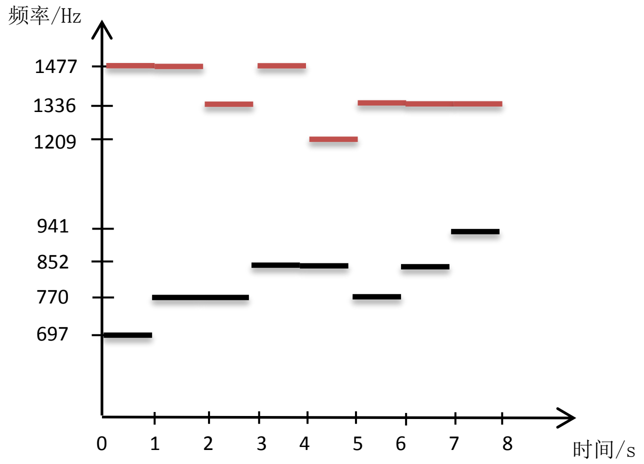
2013 年信号处理原理期末考试

参考答案

By TA 2013-2014 Fall

计 13 杨植麟 张宏辉

1、解：



注：每次按键持续时间为 1s，按键分别为 3，6 ，5 ，9 ，7 ，5， 8，0

2、证明：

【解法一】

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \int f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$= \int f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} T\delta(t-nT)\,dt = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int f(t)\delta(t-nT)dt$$

$$= T\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) = T\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)$$

【解法二】（见 EX04-第三次作业第 4 题）

令 $g(t)=T\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-kT)$，则 $g(0)=T\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)$

$$\Im[g(t)] = \Im[T\cdot f(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)]$$

$$= T\cdot\omega_0 F(\omega)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0) = 2\pi F(\omega)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$g(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Im[g(t)]e^{j\omega\cdot 0}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Im[g(t)]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi F(\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)d\omega=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_0)$$

所以，$T\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_0)$

3、解：

由 $20\log\delta_s=-25$ 解得 $\delta_s=0.0562$

$$\omega_s=\frac{2k}{8k}\cdot 2\pi=0.5\pi$$

$$\omega_p=\frac{1.6k}{8k}\cdot 2\pi=0.4\pi$$

$$\Omega_s=2f_s\tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right)=16000$$

$$\Omega_p=2f_s\tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right)=116247$$

$$n\geq\frac{\log\left(\frac{1}{\delta_s^2}-1\right)}{2\log\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)}=9.00480$$

所以 $n=10$.

4、解：

采样频率 $f_s=10kHz$，数据点数 $L=f_s*t=10kHz\times 20ms$

$$\Delta f\geq\frac{f_s}{L}=\frac{f_s}{f_s\times t}=\frac{1}{t}=\frac{1}{20ms}=50Hz$$

取Δf为最小值$50Hz$，则频率分量的可能频率范围：

$[f1+\Delta f,\ f2-\Delta f]$，也即$[2.05kHz, 2.95kHz]$

5、解：

（a）

根据

$$f=\frac{\omega f_s}{2\pi}$$

所以原曲线不变，横坐标进行伸缩变换，得到新的取值范围为 $[0,6k\mathrm{Hz}]$

（b）

观察得到 -3dB 处数字频率 $\omega = \frac{\pi}{3}$.
所以物理频率

$$f = \frac{\omega f_s}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} \cdot 12k\text{Hz} = 2k\text{Hz}$$

（c）

$$f = \frac{\omega f_s}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} \cdot 30k\text{Hz} = 5k\text{Hz}$$

（d）

根据采样定理

$$2f\text{max} \leq f_s$$

所以

$$\omega = \frac{2\pi f}{f_s} \leq \pi$$

6、解：

（a）时不变

$$\forall n_0 \in \mathcal{Z}, \text{假设} x(n-n_0+t) = x(n+t), \forall t \in \mathcal{Z}$$

$$y(n-n_0) = x(n-n_0) - x(n-n_0-1) = x(n) - x(n-1) = y(n)$$

（b）时变

$$\forall n_0 \in \mathcal{Z}, \text{假设} x(n-n_0+t) = x(n+t), \forall t \in \mathcal{Z}$$

$$y(n-n_0) = (n-n_0)x(n-n_0) = (n-n_0)x(n) \neq nx(n) = y(n)$$

（c）时变

$$\forall n_0 \in \mathcal{Z}, \text{假设} x(n-n_0+t) = x(n+t), \forall t \in \mathcal{Z}$$

$$y(n-n_0) = x(-n+n_0) \neq x(-n) = y(n)$$

（d）时变

$$\forall n_0 \in \mathcal{Z}, \text{假设} x(n-n_0+t) = x(n+t), \forall t \in \mathcal{Z}$$

$$y(n-n_0) = x(n-n_0)\cos(\omega_0(n-n_0)) = x(n)\cos(\omega_0(n-n_0)) \neq x(n)\cos(\omega_0 n) = y(n)$$

7、解：

（a）**线性**

$$\text{设新输入为 } x'(n)=\lambda x(n)\text{，新输出为 } y'(n)$$

$$y'(n)=nx'(n)=n\lambda x(n)=\lambda y(n)$$

（b）**线性**

$$\text{设新输入为 } x'(n)=\lambda x(n)\text{，新输出为 } y'(n)$$

$$y'(n)=x'(n^2)=\lambda x'(n^2)=\lambda y(n)$$

（c）**非线性**

$$\text{设新输入为 } x'(n)=\lambda x(n)\text{，新输出为 } y'(n)$$

$$y'(n)=x'^2(n)=\lambda^2x^2(n)=\lambda^2y(n)\neq\lambda y(n)$$

（d）**非线性**

$$\text{设新输入为 } x'(n)=\lambda x(n)\text{，新输出为 } y'(n)$$

$$y'(n)=e^{x'(n)}=e^{\lambda x(n)}=y^{\lambda}(n)\neq\lambda y(n)$$

8、解：

$$y=f_1(t)*f_2(t)=(\delta(t-1)+2\delta(t-2))*f_2(t)$$

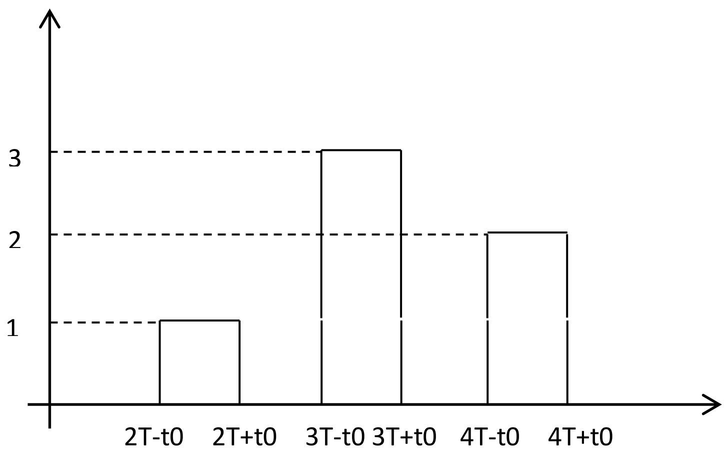
根据分配律

$$y=\delta(t-1)*f_2(t)+2\delta(t-2)*f_2(t)$$

根据搬移特性

$$y=f_2(t-1)+2f_2(t-2)$$

如下图所示：



9、解：

（a）

对于

$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{R} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{K} a_k z^{-k}}$$

我们可以得到差分方程

$$\sum_{k=0}^{K} a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{R} b_r x(n-r)$$

代入本题数据得到

$$y(n)-3.5y(n-1)+1.5y(n-2)=3x(n)-4x(n-1)$$

转化为流程图即可。

（b）

$$H(z)=\frac{(3z-4)z}{(z-3)(z-0.5)}$$

零点为 $z=\frac{4}{3}, z=0$，极点为 $z=3, z=0.5$

（c）

可能的收敛域为 $|z|<0.5$, $0.5<|z|<3$ 或 $|z|>3$

（d）

因为系统是稳定的，所以收敛域必须包含单位元，所以收敛域为 $0.5 < |z| < 3$

$$h(n) = \sum_m \operatorname{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]_{z=p_m}$$

取围线 $l : |z| = a, 0.5 < a < 3$

$$H(z)z^{n-1} = \frac{(3z-4)z^n}{(z-3)(z-0.5)}$$

若 $n \geq 0$, $H(z)z^{n-1}$ 在围线 l 内有一个极点 $z = 0.5$.

$$h(n) = \operatorname{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]_{z=0.5} = 0.5^n$$

若 $n < 0$, $H(z)z^{n-1}$ 在围线 l 内有两个极点 $z = 0$, $z = 0.5$

$$h(n) = \operatorname{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]_{z=0} + \operatorname{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]_{z=0.5} = -\operatorname{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]_{z=3} = -2\times 3^n$$

综合上述两种情况

$$h(n) = 0.5^n u(n) - 2 \times 3^n u(-n-1)$$

（e）

因为系统是因果的，所以收敛域为 $|z| > 3$

$$h(n) = \sum_m \operatorname{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]_{z=p_m}$$

取围线 $l : |z| = a, a > 3$

$$H(z)z^{n-1} = \frac{(3z-4)z^n}{(z-3)(z-0.5)}$$

若 $n \geq 0$, $H(z)z^{n-1}$ 在围线 l 内有两个极点 $z = 0.5$，$z = 3$.

$$h(n) = \operatorname{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]_{z=0.5} + \operatorname{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]_{z=3} = 0.5^n + 2 \times 3^n$$

若 $n < 0$, $H(z)z^{n-1}$ 在围线 l 内有三个极点 $z = 0$, $z = 0.5$, $z = 3$

$$h(n) = \operatorname{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]_{z=0.5} + \operatorname{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]_{z=0} + \operatorname{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]_{z=3} = 0$$

综合上述两种情况

$$h(n) = (0.5^n + 2 \times 3^n)u(n)$$

（f）

因为系统是非因果的，所以收敛域为 $|z|<0.5$ 或 $0.5<|z|<3$
若收敛域为 $0.5<|z|<3$，则情况同 (d).
下面考虑收敛域为 $|z|<0.5$

$$h(n)=\sum_m \operatorname{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]_{z=p_m}$$

取围线 $l:|z|=a, 0<a<0.5$

$$H(z)z^{n-1}=\frac{(3z-4)z^n}{(z-3)(z-0.5)}$$

若 $n\geq 0$, $H(z)z^{n-1}$ 在围线 l 内没有极点.

$$h(n)=0$$

若 $n<0$, $H(z)z^{n-1}$ 在围线 l 内有一个极点 $z=0$

$$h(n)=\operatorname{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]_{z=0}=-\operatorname{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]_{z=0.5}-\operatorname{Res}\left[H(z)z^{n-1}\right]_{z=3}=-(0.5^n+2\times 3^n)$$

综合上述两种情况

$$h(n)=-(0.5^n+2\times 3^n)u(-n-1)$$

10、解：

$$x_1(n)=\{2,1,2,1\}\quad x_2(n)=\{1,2,3,4\}$$

(a) 由线卷积定义得：

$$y(n)=x_1(n)*x_2(n)=\sum_{m=0}^{\infty}x_1(m)x_2(n-m)$$

则$y(0)=x_1(0)x_2(0)=2\times 1=2$，$y(1)=x_1(0)x_2(1)+x_1(1)x_2(0)=2\times 2+1\times 1=5$，

$y(2)=x_1(0)x_2(2)+x_1(1)x_2(1)+x_1(2)x_2(0)=2\times 3+1\times 2+2\times 1=10$，……

最后得到$y(n)=\{2,5,10,16,12,11,4\}$

(b) 由圆卷积定义得：

$$y(n)=x_1(n)\otimes x_2(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N$$

本题中$N=4$, 计算得到：

$$\begin{aligned}
y(0)&=x_1(0)x_2(0)+x_1(1)x_2(3)+x_1(2)x_2(2)+x_1(3)x_2(1)=14\\
y(1)&=x_1(0)x_2(1)+x_1(1)x_2(0)+x_1(2)x_2(3)+x_1(3)x_2(2)=16\\
y(2)&=x_1(0)x_2(2)+x_1(1)x_2(1)+x_1(2)x_2(0)+x_1(3)x_2(3)=14\\
y(3)&=x_1(0)x_2(3)+x_1(1)x_2(2)+x_1(2)x_2(1)+x_1(3)x_2(0)=16
\end{aligned}$$

最后得到$y(n)=\{14,16,14,16\}$

(c) 解：

由 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, $W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$, $N = 4$ 得到如下矩阵

W_N^{kn}	$k = 0,1,2,3$
$n = 0,1,2,3$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$

则根据

$$X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) W_N^{kn}$$

可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix}$$

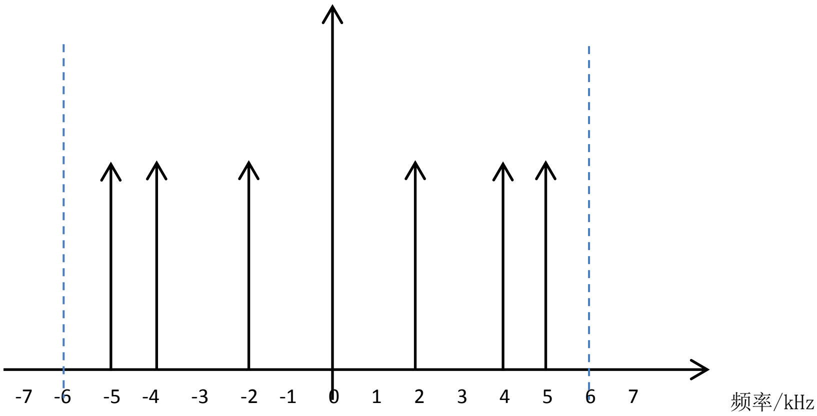
将$x(n) = x_1(n) = \{2, 1, 2, 1\}$ 代入上式得到 $X(k) = X_1(k) = \{6, 0,2, 0\}$
将$x(n) = x_2(n) = \{1, 2, 3, 4\}$ 代入上式得到 $X(k) = X_2(k) = \{10, -2 + 2i, -2, -2 - 2i\}$
则$X_1(k) \cdot X_2(k) = \{60, 0, -4, 0\}$
将$X(k) = X_1(k) \cdot X_2(k) = \{60, 0, -4, 0\}$代入上式得到$x(n) = \{14, 16, 14, 16\}$
也即$\mathrm{IDFT}[X_1(k) \cdot X_2(k)] = \{14, 16, 14, 16\}$

11、解：

(a) 因为采样频率不符合采样定理（即不符合$2f_{max} \geq f_s$），出现混叠现象。（注：采样定理、混叠两个关键词各一分）

(b) 当采样频率为$12kHz$时 f_2 的位置发生平移变换但仍是虚假的，所以 $f_{max} > 6kHz$。考虑到信号必定为实信号，且实信号的频谱图图像关于 y 轴对称，而采样频率为$12kHz$时$f_2 = 3kHz$为虚假信号，则 f_2 的物理频率可能为$7kHz(-3 + 10)$, $13kHz(3 + 10)$, $17kHz(-3 + 2 \times 10)$……所以 f_2 分量的物理频率最小值为$7kHz$

(c) 根据前一题结论，采样频率为$12kHz$，f_2 分量的物理频率为$7kHz$。考虑$-6kHz$ 到 $6kHz$ 的频谱图，根据“实信号关于 y 轴对称”、“采样频率为$12kHz$”以及“原始信号为$2kHz$、$4kHz$、$-5kHz$（由 7-12=-5 得到）”三个条件可得下图：



是频谱周期的

注：也可画出对应的 0 至 12kHz 的图（即将-6 至 0kHz 的按周期性对应到 6 至 12kHz），画出一个采样周期内的即可。