信原

朱书琦 周乾睿

基本知识

1. Sa 函数

- $Sa(x) = \frac{\sin t}{t}$;
- $\int_{-\infty}^{0} Sa(x)dx = \int_{0}^{+\infty} Sa(x) = \frac{\pi}{2}$;
- 偶函数，过零点位置 $K\pi$，且 $K \neq 0$，除原点附近的过零区间宽度为 2π，其他过零区间宽度均为 π;

2. 欧拉公式

- $e^{ix} = \cos x + i\sin x$;
- $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$，$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$;
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$，$e^{i\pi} = -1$，$e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$;
- 理解方式：泰勒展开、微分法（对 $f(x) = \frac{\cos x + i\sin x}{e^{ix}}$ 求导为0）；

3. 函数分解

正交基、标准正交基、正交函数集、完备的正交函数集(主要是给后面做铺垫)，与函数有关时必须说明区间。

4. 波形变换

- 时移运算：将原信号 $f(t)$ 的波形沿横轴平移b个单位，$f(t)->f(t-b)$，$b>0$ 向右平移，$b<0$ 向左平移;
- 反褶运算：将原信号 $f(t)$ 的波形按纵轴对称翻转过来， $f(t)->f(-t)$；
- 压扩运算：$f(t)->f(at)$，如果 $a<0$ 则需要反褶，$|a|>1$ 为压缩，$|a|<1$ 为扩张;
- 例如课堂练习题已知 $f(t)$ 波形，画出 $y(t) = 3f(1-\frac{t}{2})-1$ 的波形，即先反褶，再压扩，再时移，再进行后续变换;
- 需要注意：上面三种运算都是针对自变量的，如对 $f(1-t)$ 来说是针对 t 而不是针对 f 中的表达式，如反褶应得到 $f(1+t)$；原信号的定义一般是 $[-\infty, +\infty]$，为 0 的部分与坐标轴重合(上下平移之后不能丢)；横纵坐标标清楚，关键点标清楚。

5.信号的能量和功率

- 信号的能量：连续时间信号：$E[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\|f(t)\|^{2}dt$，离散时间信号：$E[f(n)]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\|f(n)\|^{2}$；
- 信号的功率：连续时间信号：$P[f(t)]=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\|f(t)\|^{2}dt$，离散时间信号：$P[f(n)]=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\|f(n)\|^{2}$；
- 信号能量有限，则称为能量有限信号，简称能量信号，信号功率有限，则称为功率有限信号，简称功率信号。

6. 相互运算

6.1. 卷积

- 连续时间信号：$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-a)g(a)da$，离散时间信号：$f(m)*g(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(m-n)g(n)$;
- 卷积满足交换律，分配律，结合律；
- 卷积微分：$\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)]=f_1(t)*[\frac{d}{dt}f_2(t)]=[\frac{d}{dt}f_1(t)]*f_2(t)$（可用于计算多重微分）；
- 卷积积分：$\int_{-\infty}^{t}(f_1*f_2)(\lambda)d\lambda=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)d\lambda=(\int_{-\infty}^{t}f_1(\lambda)d\lambda)*f_2(t)$;

6.2. 相关运算

- $R_{f_1f_2}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(a)f_2^*(a-t)da$;
- 相关与次序有关：$R_{f_1f_2}(t)=R_{f_2f_1}^*(-t)$;
- 相关与卷积关系：$R_{f_2f_1}(t)=f_1^*(-t)*f_2(t)$;

7. 奇异信号（详见ppt）

注意每种信号对应符号！

7.1. 单位斜变信号

$R(t),R_\tau(t)$

7.2. 单位阶跃信号

$u(t)=\frac{dR(t)}{dt}$

7.3. 单位矩形脉冲信号

$G_\tau(t)=u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})$

7.4. 符号函数信号

$sgn(t)=2u(t)-1$

7.5. 单位冲激信号

- 设冲激信号有一个总的冲激强度，它在整个时间域上的积分等于该强度值，而在除冲激点之外的其他点的函数取值为零（记牢定义式）；
- 搬移抽样特性：$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$;
- 抽样特性（函数->值映射关系）：$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\phi(t)dt=\phi(t_0)$;

- 偶函数;
- 时域压扩性：$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$;
- 积分：$\delta(t)$ 在包含 0 的区间上的积分为 1 ，在不包含 0 的区间上积分为 0;

`FS`

1. 三角形式

- $f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t\right)$;
- 系数计算：$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)dt$，$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\cos n\omega_1 tdt$，$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\sin n\omega_1 tdt$。

2. 复指数形式

- $$\begin{aligned} f(t) &= a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n-jb_n}{2}e^{jn\omega_1 t}+\frac{a_n+jb_n}{2}e^{-jn\omega_1 t}\right] \\ &= F(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[F\left(na_1\right)e^{jn\omega t}+F\left(-n\omega_1\right)e^{-jn\omega t}\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t} \end{aligned}$$
- 系数计算：$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{T_1}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$;

3. 性质

- 偶周期信号的`FS`是偶对称的实数序列：$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{T_1}f(t)\cos n\omega_1 tdt\neq 0$，$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{T_1}f(t)\sin n\omega_1 tdt=0$;
- 奇周期信号的`FS`是奇对称的纯虚序列：$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{T_1}f(t)\cos n\omega_1 tdt=0$，$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{T_1}f(t)\sin n\omega_1 tdt\neq 0$;
- 帕斯瓦尔定理：

$$\begin{aligned} P=\overline{\|f(t)\|^2} &= \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}\|f(t)\|^2 d_t \\ &= \|a_0\|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\|a_n\|^2+\|b_n\|^2\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2 \end{aligned}$$

- 仅在离散频率点$\frac{2\pi n}{T_1}$上有值，$n\in(-\infty,+\infty)$;
- 特别的，周期矩形脉冲信号的`FS`，其谱线包络线为$\frac{E\tau}{T_1}Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$，其中$T_1$为周期，脉冲宽度为$\tau$，脉冲幅度为$E$，谱线包络线过零点位置为$\omega=\frac{2k\pi}{\tau}$，在频域其能量主要集中在第一个零点以内。(包络线计算思路就是带进复指数形式的`FS`公式，再结合欧拉公式)。

`FT`

1. 基本形式

- `FT`： $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j \omega t} d t$;
- `IFT`： $f(t)=\frac{1}{2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j \omega t} d \omega$;
- 存在条件：时域信号绝对可积；

2. 性质

- 唯一性：如果两个函数的`FT`或`IFT`相等，则这两个函数必然相等；
- 可逆性：$FT[f(t)]=F(\omega)$，$FT^{-1}[F(\omega)]=f(t)$；
- **FT、DTFT、DFT变换的性质**

	FT	DTFT	DFT
线性性	是		
时域反褶	频域共轭		
时域共轭	频域共轭+反褶		
对称性	$\mathscr{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$	$\mathrm{DTFT}[X(n)]=2\pi x(-\omega)$	$\mathrm{DFT}[X(n)]=Nx(-k)$
时域平移	$\mathscr{F}[f(t-t_0)]=\mathscr{F}[f(t)]e^{-j\omega t_0}$	$\mathrm{DTFT}[x(n-n_0)]=e^{-j\omega n_0}X(\omega)$	$\mathrm{DFT}[x(n-m)]=W_N^{mk}X(k)$
频域平移	$\mathscr{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}]=F(\omega-\omega_0)$	$\mathrm{DTFT}[e^{j\omega_0 n}x(n)]=X(\omega-\omega_0)$	$X(k-l)=\sum_{n=0}^{N-1}[x(n)W_N^{-nl}]W_N^{nk}$
时域卷积	$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=\mathscr{F}[f_1(t)]\cdot\mathscr{F}[f_2(t)]$	$\mathrm{DTFT}[x_1(n)*x_2(n)]=X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)$	$\mathrm{DFT}[x(n)*y(n)]=X(k)\cdot Y(k)$
频域卷积	$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[f_1(t)]*\mathscr{F}[f_2(t)]$	$\mathrm{DTFT}[x_1(n)\cdot x_2(n)]=\frac{1}{2\pi}X_1(\omega)\otimes X_2(\omega)$	$\mathrm{DFT}[x(n)\bullet y(n)]=\frac{1}{N}X(k)\otimes Y(k)$

3. 常用的变换

- $FT\left[e^{j \omega_0 t}\right]=2 \pi \delta\left(\omega-\omega_0\right)$;
- $FT\left[\cos \omega_0 t\right]=FT\left[\frac{e^{j \omega_0 t}+e^{-j \omega_0 t}}{2}\right]=\pi\left(\delta\left(\omega-\omega_0\right)+\delta\left(\omega+\omega_0\right)\right)$;
- $FT\left[\sin \omega_0 t\right]=j \pi\left(\delta\left(\omega+\omega_0\right)-\delta\left(\omega-\omega_0\right)\right)$;
- $FT\left[E G_\tau(t)\right]=E \tau \cdot Sa\left(\frac{\tau}{2} \omega\right)$(矩形脉冲信号);
- $FT[E \delta(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} E \delta(t) e^{-j \omega t} d t=E e^{-j \omega 0}=E$;
- $FT[1]=2 \pi \delta(\omega)$;

4. 与`FS`的关系

- `FS`分析的是周期信号，`FT`分析的是非周期信号；
- 如果将一个非周期信号以T_1为周期重复得到$\tilde{f}(t)$，则可以得到

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\tilde{f}(t)e^{-jn\omega_1 t}dt = \frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt \\ &= \frac{1}{T_1}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \end{aligned}$$

  即$F_n = F(n\omega_1)/T_1$；

- `FS`函数值是信号在该频率分量处的数值，而`FT`得函数值是信号在该频率分量的密度。

采样和采样定理

1. 采样的数学模型

- 使用冲击串采样：$x_p(t) = x(t)p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$(其中$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$，$T$为采样间隔)；
- 由`FT`可得频域上体现为

$$\begin{aligned} X_p(j\omega) &= \tfrac{1}{2\pi}X(j\omega) * P(j\omega) \\ &= \tfrac{1}{2\pi}X(j\omega) * \tfrac{2\pi}{T}\textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_s) \\ &= \tfrac{1}{T}\textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega - k\omega_s)) \quad \omega_s = \tfrac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

  其中$p(t) \leftrightarrow P(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}n\right)$。即在时域对连续时间信号进行理想采样，相当于在频域将连续时间信号的频谱以ω_s为周期进行延拓。

2. 奈奎斯特采样定理

要想从采样后的信号样本中恢复出原来的信号，就必须得到$X(j\omega)$(然后`IFT`即可)，这就要求信号的频域在周期延拓的时候不能发生频谱混叠。需要满足以下条件：

- $x(t)$必须是带限的，最高频率分量为ω_M；
- 采样间隔需要满足$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq 2\omega_M$；

这样的$x(t)$可以唯一的由其样本$x(nT)$确定。

3. 内插

由样本值重建某一函数的过程。这一部分主要是为后面的滤波器做铺垫，通过采样可以得到不发生频谱混叠的信号样本，但它在频域上是周期延拓的，可以在频域上对其进行滤波得到原信号的频域(最理想的情况是乘一个频域矩形脉冲$H(\omega)$)，由于频域上相乘时域上卷积，于是时域上对应的需要卷积一个$h(t)$，即

$$x(t)=x_p(t)*h(t)=\sum_{n-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)*h(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)h(t-nT)$$

这样理论上就可以恢复出原来的信号。

不同的内插：

- 理想内插：频域矩形脉冲，时域上为Sa函数形态；
- 零阶保持内插：频域上Sa函数形态，时域上矩形脉冲；
- 一阶保持内插：频域上Sa函数平方形态，时域上三角形脉冲(由于三角形脉冲可由两个矩形脉冲卷积得到，由此可以计算其`FT`)。

分割线

至此，信号采样再恢复的理论工作已经完成了，剩下的`DTFT`和`DFT`解决的是在计算机上的存储以及计算问题。

`DTFT`

采样得到的是信号序列，需要从信号序列直接计算出该信号序列对应的频域，而不能用原信号的频域进行周期延拓得到。另外，序列存储的下标往往是$0,1,2,3...$，因此有必要进行频率归一化。抽样信号和频谱函数如下：

$\hat{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s)$

$\hat{F}(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F(\omega-m\omega_s)$

1. 归一化前

在区间$[-\omega_s/2,\omega_S/2]$上：满足奈奎斯特抽样定理时有$F(\omega)=T_s\hat{F}(\omega)$，不满足时由于频率混叠，近似相等。

- $\hat{F}(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)e^{-j\omega nT_S}$(这是直接求$FT[\hat{f}(t)]$得到的)；
- $f(nT)=\frac{1}{\omega_s}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}}\hat{F}(\omega)e^{jn\omega T_S}d\omega$(由于上式可看作`FS`展开式，因此直接使用`FS`求系数的公式可以得到该式)；
- 特点：用时域上采样得到的序列计算信号的频域；

2. 归一化后

- $X(\omega)=DTFT[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\omega}(T_s=1)$；
- $x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega)e^{j\omega n}d\omega(\omega_s=2\pi)$；

3. 模拟频率与数字频率

- 模拟频率Ω：`CTFT`得到(即非周期信号的傅里叶变换)；
- 数字频率ω：`DTFT`得到；
- 举例说明：数字频率方面可以确定，抽样频率$f_s' = 1$(一般抽样频率说的都是对应模拟频率的，这里只是为了方便对比)，抽样周期$T_s' = 1$(同上)，数字频率对应的周期$\omega_s = 2\pi$；模拟频率方面，抽样频率f_s，抽样周期$T_s = \frac{1}{f_s}$，模拟频率对应的周期$\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$，那么对于一个模拟频率$\Omega$，它与它的数字频率$\omega$间的关系应为$\frac{\Omega}{\Omega_s}\omega_s = \omega$，代入可得$\Omega = f_s\omega$；

4. 性质

- 帕斯瓦尔定理：$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X_\omega(\omega)|^2 d\omega$；

FT、DTFT、DFT变换的性质

	FT	DTFT	DFT
线性性	是		
时域反褶	频域共轭		
时域共轭	频域共轭+反褶		
对称性	$\mathscr{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$	$\mathrm{DTFT}[X(n)] = 2\pi x(-\omega)$	$\mathrm{DFT}[X(n)] = Nx(-k)$
时域平移	$\mathscr{F}[f(t-t_0)] = \mathscr{F}[f(t)]e^{-j\omega t_0}$	$\mathrm{DTFT}[x(n-n_0)] = e^{-j\omega n_0}X(\omega)$	$\mathrm{DFT}[x(n-m)] = W_N^{mk}X(k)$
频域平移	$\mathscr{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega-\omega_0)$	$\mathrm{DTFT}[e^{j\omega_0 n}x(n)] = X(\omega-\omega_0)$	$X(k-l) = \sum_{n=0}^{N-1}[x(n)W_N^{-nl}]W_N^{nk}$
时域卷积	$\mathscr{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathscr{F}[f_1(t)] \cdot \mathscr{F}[f_2(t)]$	$\mathrm{DTFT}[x_1(n) * x_2(n)] = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$	$\mathrm{DFT}[x(n) * y(n)] = X(k) \cdot Y(k)$
频域卷积	$\mathscr{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[f_1(t)] * \mathscr{F}[f_2(t)]$	$\mathrm{DTFT}[x_1(n) \cdot x_2(n)] = \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) \otimes X_2(\omega)$	$\mathrm{DFT}[x(n) \cdot y(n)] = \frac{1}{N}X(k) \otimes Y(k)$

DFT

时域和频域都应为有限长的序列，`DFT`完成了由时域信号序列向频域信号序列的转换。

1. 基本形式

- 就是将$\omega = \frac{2k\pi}{N}$代入`DTFT`的$X(\omega)$中，其中$k \in Z$且$k \in [0, N-1]$，N是频域上的点数，L是$x(n)$的长度，$X(\omega_k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\omega_k n} = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$；
- $X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)W_N^{nk}, k = 0, 1, \cdots N-1$，$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$；

2. 矩阵表示

- $x=\begin{bmatrix}x_0\\x_1\\\vdots\\x_{L-1}\end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix}X_0\\X_1\\\vdots\\X_{N-1}\end{bmatrix}$，$X_k=\sum_{n=0}^{L-1}A_{kn}x_n$， $k=0,1,\cdots,N-1$ $A_{kn}=W_N^{kn}$；

3. N与L关系(这里只写了结论，具体证明见PPT)

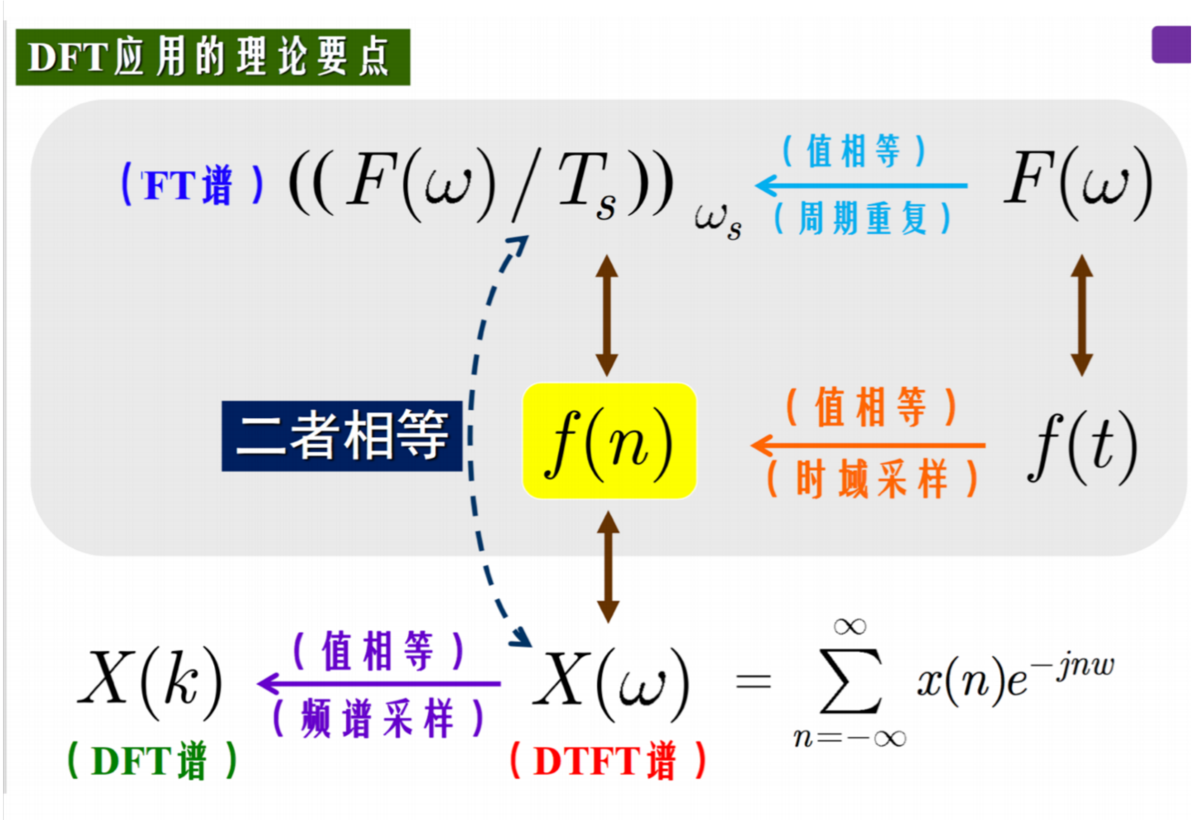
- $N>L$：在序列尾部补0至等长，`DFT`结果完全一样；
- $N<L$：将原序列按N处理为回绕序列，`DFT`结果不变；
- 需要注意的是`IDFT`并不能得到原来的序列，得到的只是原来序列的回绕序列，$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{-nk}X_k$。

2. 性质(重要的图贴三遍)

- 帕斯瓦尔定理：$\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2(L=N)$；
- 奇函数的`DFT`是奇函数，偶函数的`DFT`是偶函数；
- 实偶函数的`DFT`是实偶函数，实奇函数的`DFT`是虚奇函数；
- 实函数的`DFT`，实部是偶函数，虚部是奇函数；模是偶函数，相位是奇函数；
- 虚偶函数的`DFT`是虚偶函数，虚奇函数的`DFT`是实奇函数；
- 虚函数的`DFT`，实部是奇函数，虚部是偶函数；模是偶函数，相位是奇函数；
- FT、DTFT、DFT变换的性质

	FT	DTFT	DFT
线性性	是		
时域反褶	频域共轭		
时域共轭	频域共轭+反褶		
对称性	$\mathscr{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$	$\mathrm{DTFT}[X(n)]=2\pi x(-\omega)$	$\mathrm{DFT}[X(n)]=Nx(-k)$
时域平移	$\mathscr{F}[f(t-t_0)]=\mathscr{F}[f(t)]e^{-j\omega t_0}$	$\mathrm{DTFT}[x(n-n_0)]=e^{-j\omega n_0}X(\omega)$	$\mathrm{DFT}[x(n-m)]=W_N^{mk}X(k)$
频域平移	$\mathscr{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}]=F(\omega-\omega_0)$	$\mathrm{DTFT}[e^{j\omega_0 n}x(n)]=X(\omega-\omega_0)$	$X(k-l)=\sum_{n=0}^{N-1}[x(n)W_N^{-nl}]W_N^{nk}$
时域卷积	$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=\mathscr{F}[f_1(t)]\cdot\mathscr{F}[f_2(t)]$	$\mathrm{DTFT}[x_1(n)*x_2(n)]=X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)$	$\mathrm{DFT}[x(n)*y(n)]=X(k)\cdot Y(k)$
频域卷积	$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[f_1(t)]*\mathscr{F}[f_2(t)]$	$\mathrm{DTFT}[x_1(n)\cdot x_2(n)]=\frac{1}{2\pi}X_1(\omega)\otimes X_2(\omega)$	$\mathrm{DFT}[x(n)\cdot y(n)]=\frac{1}{N}X(k)\otimes Y(k)$

4. `DFT`与`FT`



- 用`DFT`计算非周期信号的`FT`：$F\left(\omega_k\right)=T_s X(k)$；
- 用`IDFT`计算非周期信号的`IFT`：$f(n)=\frac{1}{T_s}\cdot \mathrm{IDFT}\left[F\left(\omega_k\right)\right]$；
- 用`DFT`计算周期信号的`FS`：$F_k=\frac{1}{T_1}F_0\left(k\omega_1\right)=\frac{1}{T_1}\left(T_s X(k)\right)=\frac{1}{N}X(k)$。

其中T_s为采样间隔，T_1为周期信号的周期。

`FFT`

计算`DFT`需要N^2次复数乘法，$N(N-1)$次加法，因此利用W的周期性$W_N^{nk}=W_N^{nk\%N}$和对称性$W_N^{nk+\frac{N}{2}}=-W_N^{nk}$快速计算`DFT`。

- 原理：

$$\begin{aligned}
X(k)&=\sum_{\text{偶数}}x(n)W_N^{nk}+\sum_{\text{奇数}}x(n)W_N^{nk}\\
&=\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2r)W_N^{(2r)k}+\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2r+1)W_N^{(2r+1)k}\\
&=\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2r)W_{\frac{N}{2}}^{rk}+W_N^k\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2r+1)W_{\frac{N}{2}}^{rk}\\
&\begin{cases}g(r)=x(2r)\\h(r)=x(2r+1)\end{cases}\qquad k=0,1,2\ldots\frac{N}{2}-1\\
&\begin{cases}\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2r)W_{N/2}^{rk}=\sum_{r=0}^{N}g(r)W_{N/2}^{rk}=G(k)\\\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2r+1)W_{N/2}^{rk}=\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}h(r)W_{N/2}^{rk}=H(k)\end{cases}\qquad k=0,1,2\ldots\frac{N}{2}-1
\end{aligned}$$

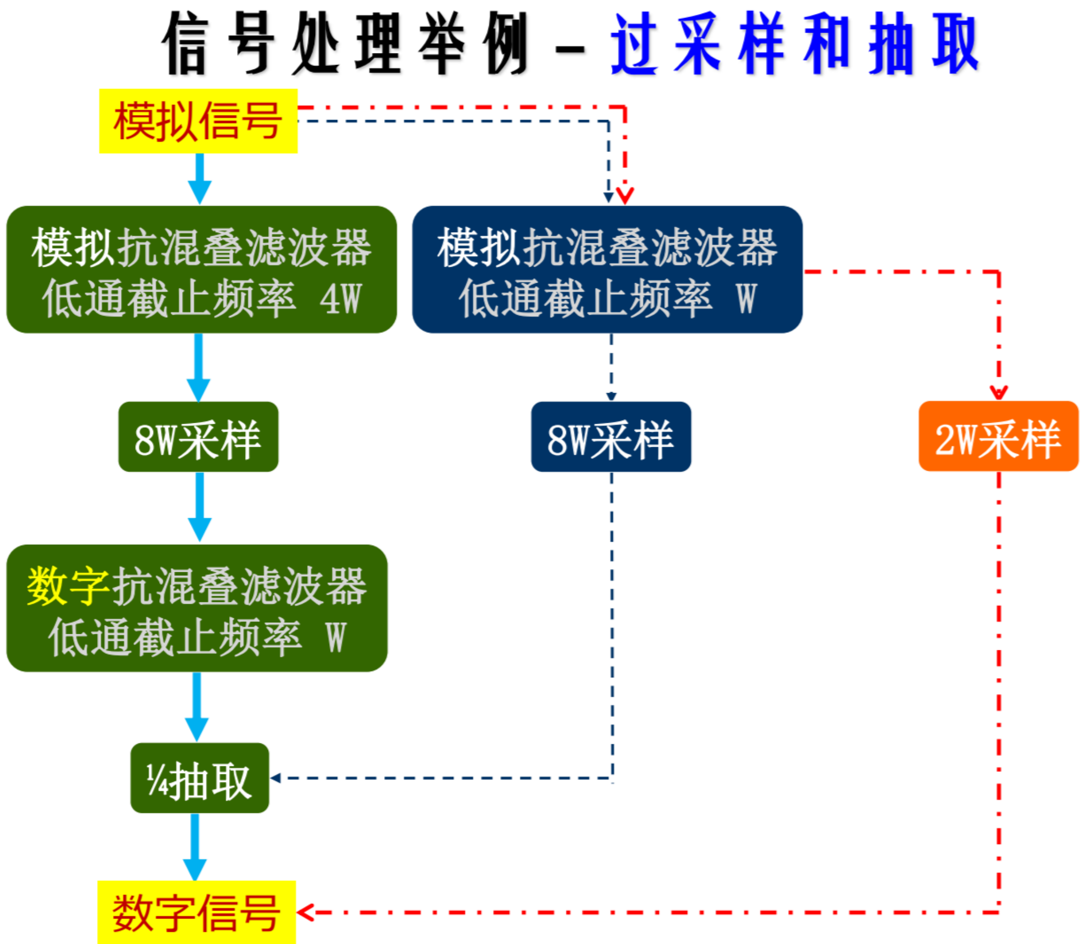
由此可得$X(k)=G(k)+W_N^kH(k)$，$X(k+\frac{N}{2})=G(k)-W_N^kH(k)$，其中$k=0,1,2\ldots\frac{N}{2}-1$。

- 复杂度：$O\left(N\log_2 N\right)$。

过采样和抽取、提升采样率和插零

1. 抗混叠滤波器

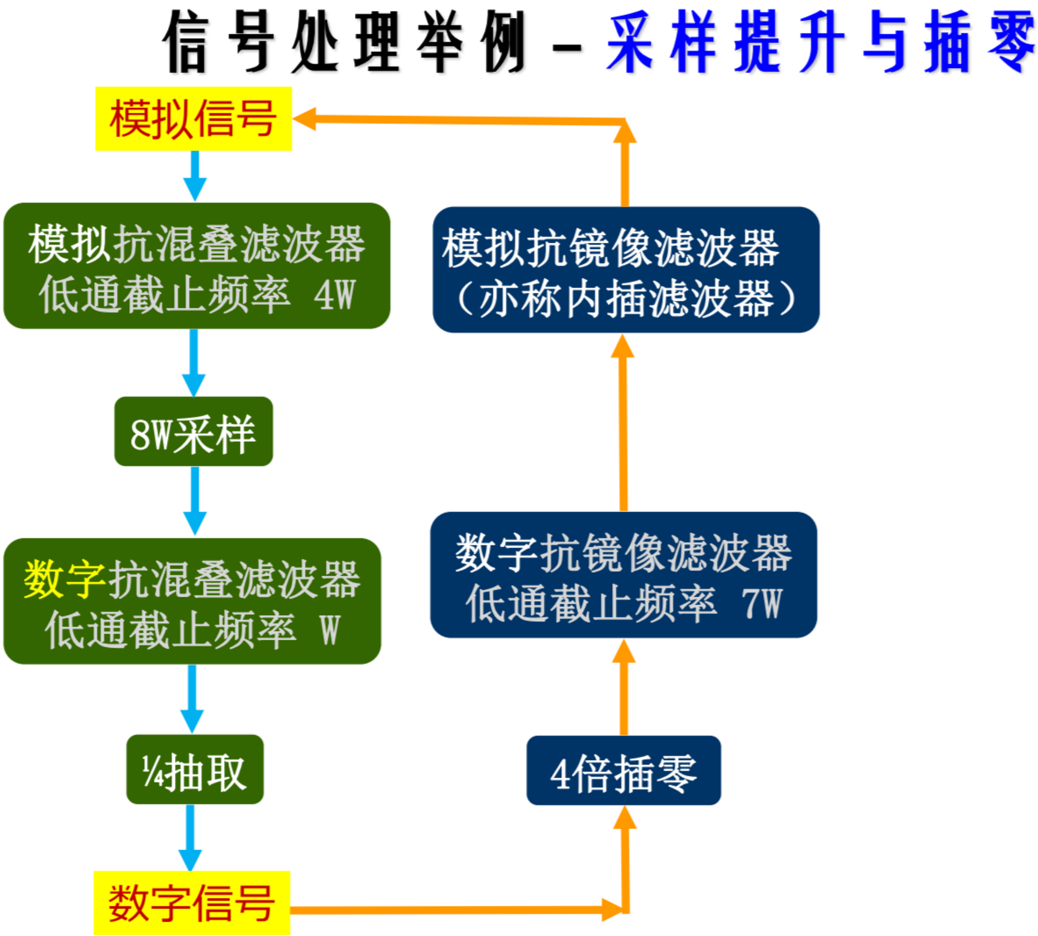
- 现实情况下的信号的频域总会有无用的高频分量，为防止它们与需要的部分发生混叠，因此需要将它们滤去；
- 低采样率的抗混叠滤波器对参数要求严格，实现成本高，高采样率的抗混叠滤波器对参数要求宽松，实现成本低；
- 为了成本低选择使用高采样率的抗混叠滤波器，但是这样会得到更多样本，加重后续数字信号处理的负担。解决方法是$1/4$抽取(二次采样)，第一步以$8W$采样率取$4N$个点，第二步再从$4N$个点中取N个点，这样等同于$2W$采样率；



---

2. 抗镜像滤波器

- 数字信号转换为模拟信号时(一般用零阶保持器实现)产生的是一个具有阶梯特性的模拟信号，这样会引入高频分量。需要将其过滤掉；
- 截止频率越高，模拟抗镜像滤波器越是容易实现。因此为了提高截止频率，需要对数字信号的采样率进行提升(相对来说滤波器的截止频率就提高了)。在原数字序列中插零：$x(n) \rightarrow x(n/M), M \in \mathbb{Z}^+$，这样相同宽度的频带可以容纳更多的频谱分布，再经过一个数字抗镜像滤波器将中间的信号滤去。



滤波器(流图详见ppt)

1. 系统的分类

- 线性系统：叠加性(当几个输入信号同时输入系统 时，系统总的输出等于每个输入信号单独输入系统 时的的输出信号和)和齐次性(当输入信号乘以某个常数时， 系统的输出也倍乘相同的常数)；
- 时不变系统：若系统无论何时收到输入，系统的输出都是相 同的，则称系统为时不变系统 。反之，则称为 时变系统；
- 因果系统：如果系统的输出取决于现在和以前的输入数据，而与 以后的输入数据无关，则称此系统为因果系统；
- 稳定系统：若系统的输入有界则输出也是有界的，则称此系统 为稳定系统。 这个性质通常被称为 `BIBO` 原则。

2. 系统的描述方法

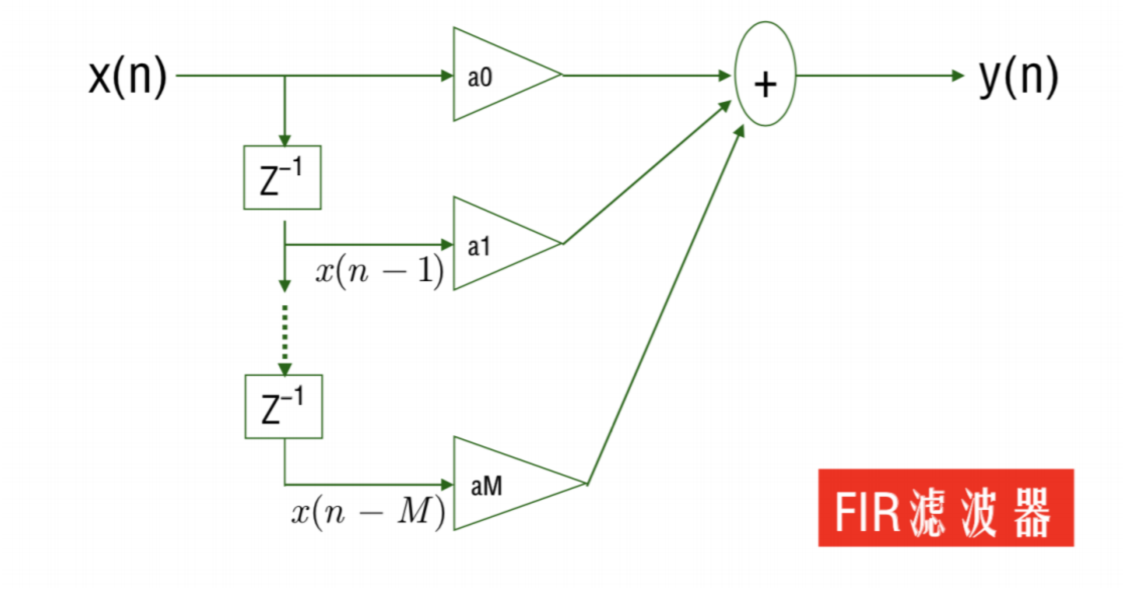
- 差分方程：$\sum_{k=0}^{N} b_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} a_r x(n-r)$；
- 流图。

3. 系统响应的分类

- 零输入响应：系统可能在没有给任何激励信号作用时，产生信号输出，与外界无关；
- 零状态响应：所谓系统的零状态响应，就是指系统在起始状态时状 态值为零(相当于系统没有存储任何能量和信息)，此时给系统一个激励信号，系统产生的输出响应就是零状态响应；
- 脉冲响应(冲激响应)：就是滤波器对 脉冲输入的响应。即：当滤波器的输入为单位脉 冲时，滤波器的输出就是单位脉冲响应。

4. 有限脉冲响应`FIR`

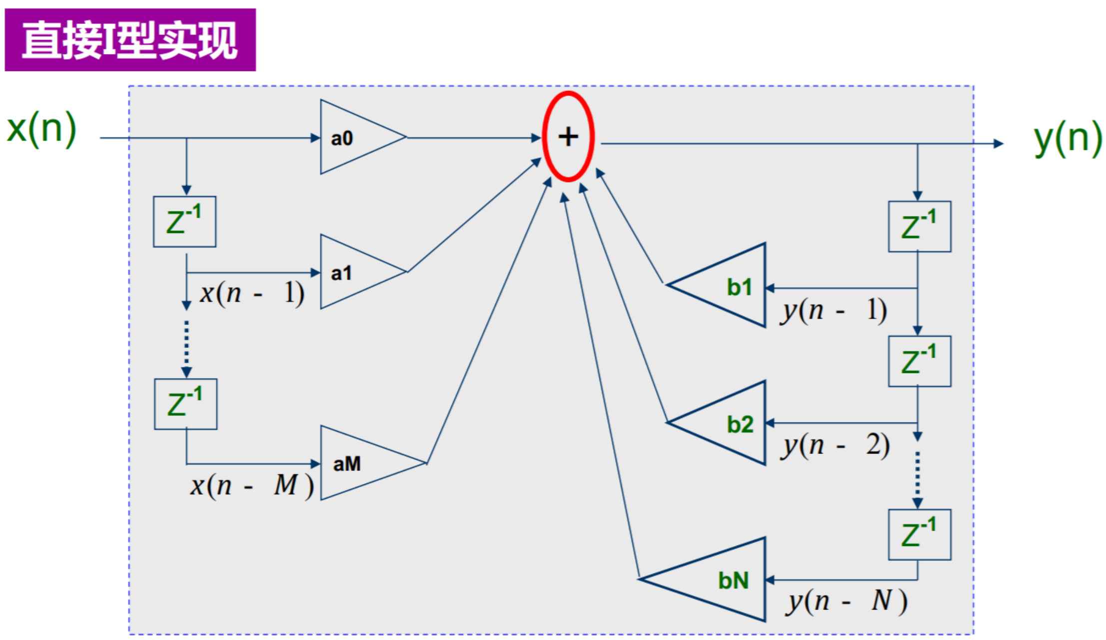
- 系统的脉冲响应在有限个非零采样值后下降到零。 这种响应被称为有限脉冲响应，其滤波器为`FIR`滤波器；
- 差分方程(非递归)：$y(n)=\sum_{k=0}^{M}a(k)x(n-k)$；
- 流图(最简单的实现)：



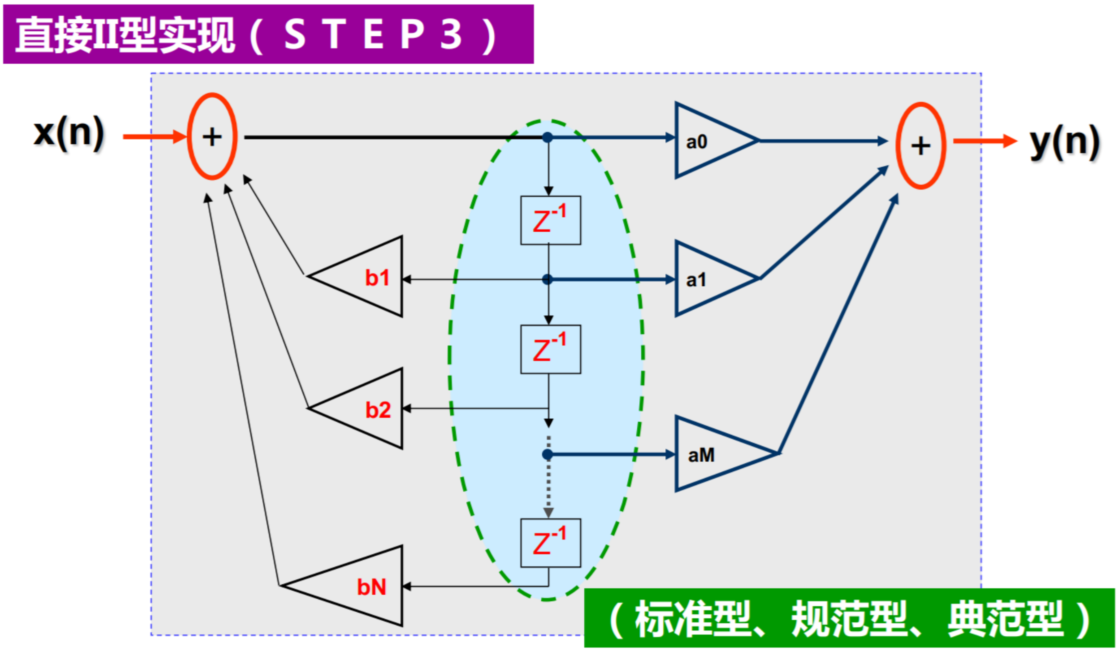
5. 无限脉冲响应`IIR`

- 新的输出取决于过去的输出，所以脉冲响应永 远不会消失，这种响应被称为无限脉冲响应，其滤波器为`IIR`滤波器；
- 差分方程(递归)：$y(n)=\sum_{k=0}^{M}a(k)x(n-k)+\sum_{k=1}^{N}b(k)y(n-k)$；
- 流图

  直接Ⅰ型：



直接Ⅱ型



6. 滤波器输入和输出的关系

- 输入信号：$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$;
- 脉冲响应：$\delta(n) \to h(n)$;
- 输出：$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = h(n) * x(n)$;
- 卷积和差分方程都可以计算滤波器输出，对于`FIR`都适用，对于`IIR`，差分方程较好；
- 线性时不变系统(`LTI`系统)稳定条件：$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = P < \infty$;
- 系统串联，脉冲响应作卷积，系统并联，脉冲响应作加法。

7. 滤波器的频率响应

- 定义：$H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} a(k)e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} b(k)e^{-jk\omega}}$;
- 滤波器的频率响应等于脉冲响应的`DTFT`：$DTFT[h(n)] = H(\omega)$;
- 系统串联，频率响应作乘法，系统并联，频率响应作加法。

8. Z变换

9. 传递函数(离散`LTI`系统)

- $H(z) = Y(z)/X(z)$，也称系统函数；
- 传递函数$H(z)$实际上是系统单位冲激响应$h(n)$的Z变换，可以直接由单位冲激响应求出来，$H(z) = Z[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$;
- 系统串联，传递函数作乘法，系统并联，传递函数作加法；
- 离散线性时不变系统是因果系统的充要条件是：传递函数`ROC`是某个圆外部的区域， 包括无穷远点；
- 离散线性时不变系统是稳定系统的充要条件是：传递函数的`ROC`包括单位圆。

10. `FIR`数字滤波器设计(ppt上有很多例题)

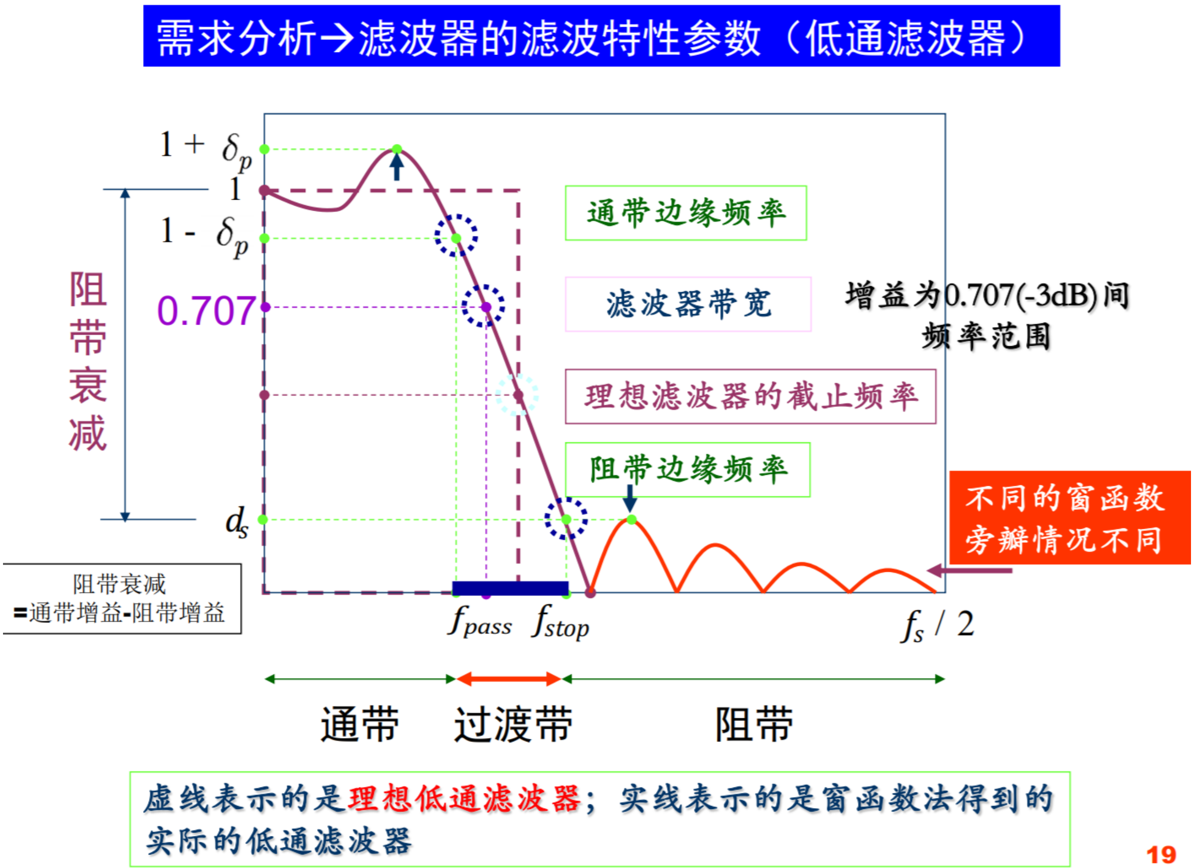
10.1. 窗函数设计法

理想低通滤波器的$h(n)$无限长，且有负值下标，是物理不可实现的；`FIR`滤波器的单位冲激响应$h'(n)$是有限长(只有有限个非零值)的因果序列。

- $h'(n)$将满足要求的理想低通滤波器的$h(n)$截断；
- 因为时域平移只影响相位，所以可以将截断后的$h(n)$平移成因果序列(而不影响系统的幅频响应特性)；
- 用所得$h(n)$实现的滤波器即为所需`FIR`的$h'(n)$。

理想低通滤波器：$h(n)=\frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi}$。

理想低通滤波器的截止频率，由于单位冲激响应被截短成了有限项，所以滤波器的频率响应特性会发生改变。根据经验，在设计滤波器时，理想低通滤波器的截止频率不使用通带边缘频率，而是使用过渡带中点的频率，即通带边缘频率和阻带边缘频率的中点处。



10.2. 低通`FIR`滤波器的设计步骤

低通FIR滤波器的设计步骤

1. 在过渡带宽度中间，选择理想低通滤波器的截止频率 f_c(Hz) = 设计指标要求的通带边缘频率 + (过渡带宽度) / 2
2. 计算截止频率的**数字频率**，并代入

$$h(n) = \frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi} \qquad \omega_c = 2\pi f_c \,/\, f_s$$

3. 从表中选择满足阻带衰减及其他要求的窗函数，计算窗内非零项的数目，选择奇数项（好处：脉冲响应完全对称，相位没有失真），计算出窗函数的表达式
4. 用窗函数与h(n)相乘，计算有限长脉冲响应
5. 将脉冲响应右移(N-1)/2，使第一个非零值在n=0处

10.3. 带通和高通`FIR`滤波器

频率响应函数在频域移动到新位置，即脉冲响应与余弦函数相乘：$h'(n) = h(n)w(n)\cos(nw_0)$，需要注意的是此时给出的通带边缘频率、阻带边缘频率等参数需要进行一定换算才能得到理想低通滤波器所需要的截止频率。

10.4. 带通和带阻`FIR`滤波器

- 带阻`FIR`滤波器：高通加低通(并联)，$h_{\mathrm{BS}}(n) = h_{\mathrm{LP}}(n) + h_{\mathrm{HP}}(n)$；
- 带通`FIR`滤波器：高通卷积低通(串联)，$h_{\mathrm{BP}}(n) = h_{\mathrm{LP}}(n) * h_{\mathrm{HP}}(n)$。