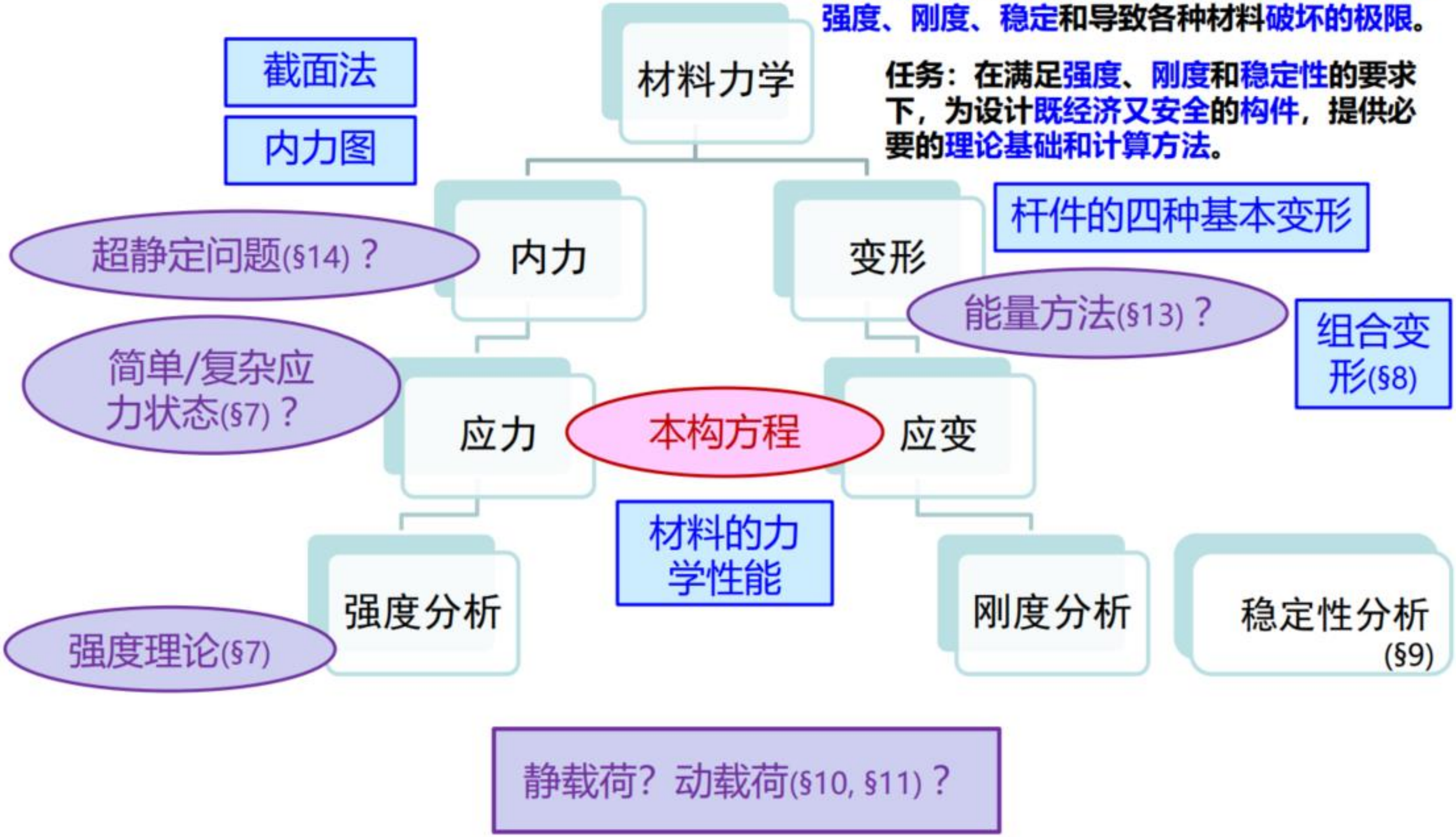
1-7章材料力学习题课

李腾枭

总结

研究材料在各种外力作用下产生的应变、应力、强度、刚度、稳定和导致各种材料破坏的极限。

任务：在满足强度、刚度和稳定性的要求下，为设计既经济又安全的构件，提供必要的理论基础和计算方法。



绪论

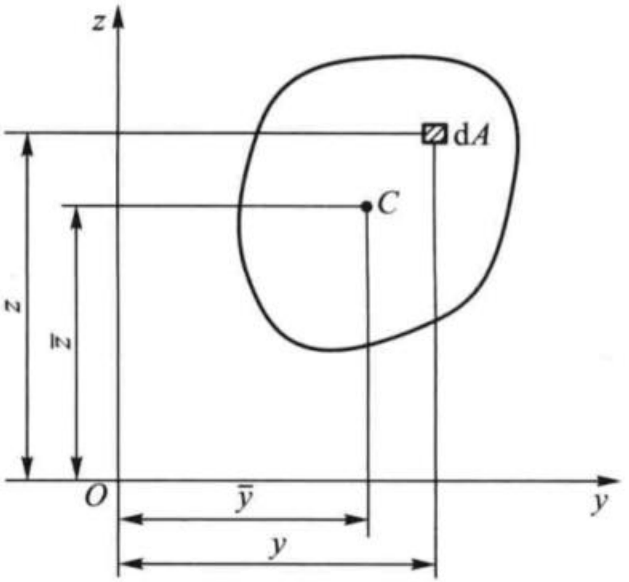
- 1. 基本任务
  - 强度、刚度、稳定性
- 2. 基本假设
  - 连续性、均匀性、各向同性
- 3. 截面法
  - 轴力、剪力、弯矩、扭矩
- 4. 外载形式
  - 力、温度、湿度、装配精度…
- 5. 安全因数

$$[\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}$$

截面的几何性质

- 1. 静矩、形心

$$S_y = \int_A z dA,\ \bar{z} = \frac{S_y}{A}$$



- 2. 极惯性矩、惯性矩

$$I_p = \int_A \rho^2 dA,\ I_z = \int_A y^2 dA$$

- 3. 惯性积

$$I_{yz} = \int_A yz dA$$

- 4. 平行移轴公式

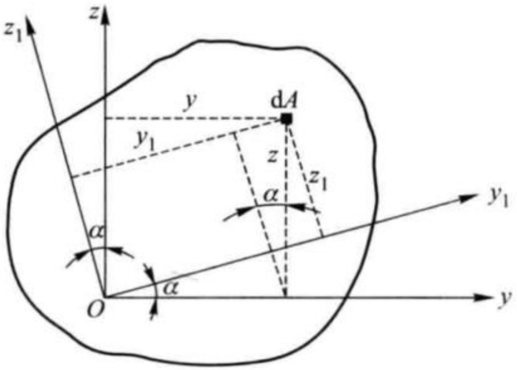
$$I_y = \int_A (z_c + a)^2 dA = \int_A z_c^2 dA + a^2 A$$

- 5. 转轴公式

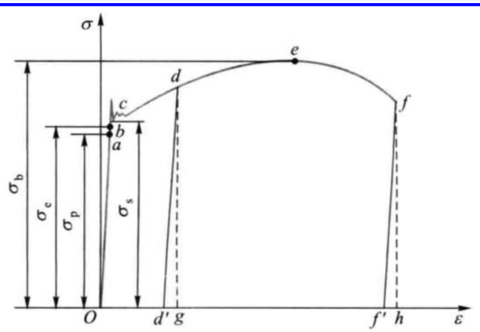
$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha$$

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha$$

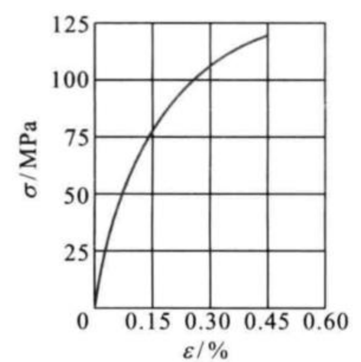
$$I_{y_1 z_1} = \frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha$$



拉伸、压缩、剪切



- 1. 拉伸、压缩
  - 轴力图 -> 截面法
  - 平面假设 -> 应力均匀分布
- 2. 低碳钢（塑性材料）拉伸试验
  - 变形的阶段：弹性、屈服、强化、局部变形
  - 屈服极限、强度极限、断后伸长率、断面收缩率…
  - 卸载、冷作硬化



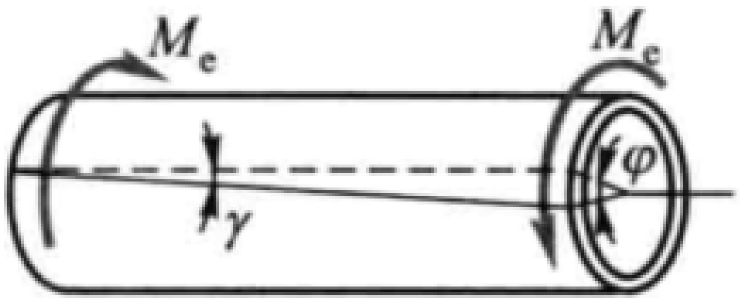
- 3. 铸铁（脆性材料）的拉伸
- 4. 蠕变、松弛 -> 对于高分子材料
- 5. 剪切与挤压 -> 挤压面不是平面时，其应力分布不一定均匀
- 6. 泊松比
- 7. 应力集中、圣维南原理

扭转

- 1. 功率、转速、力矩

$$\{M_e\}_{N\cdot m} = 9549\,\{P\}_{kW}/\{n\}_{r/min}$$

- 2. 扭转
  - 截面几何性质 -> 极惯性矩
  - 基本假设 -> 扭转的平面假设
  - 扭转应力
  - 扭转变形
- 3. 密圈螺纹弹簧的变形和应力
- 4. 非圆截面的扭转
- 5. 薄壁杆件的扭转

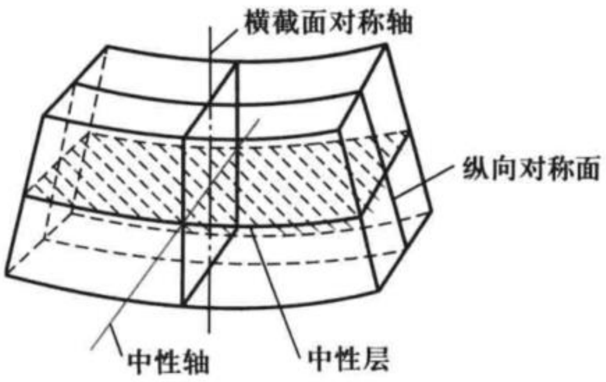


弯曲

- 1. 弯曲内力 -> 理论力学知识
  - 载荷集度、剪力、弯矩的微分方程

$$\frac{d^2M}{dx^2}=\frac{dF_s}{dx}=q$$

  - 剪力图、弯矩图，符号的判断。



- 2. 弯曲应力
  - 截面的几何性质
  - 基本假设、中性轴
  - 弯曲正应力、弯曲切应力
- 3. 弯曲变形
  - 挠度和弯矩之间的微分方程（线性化） -> $w''=\frac{M}{EI}$
  - 积分法、叠加法求解挠度
  - 超静定问题

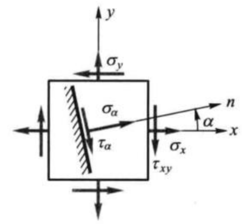
应力应变分析、强度理论

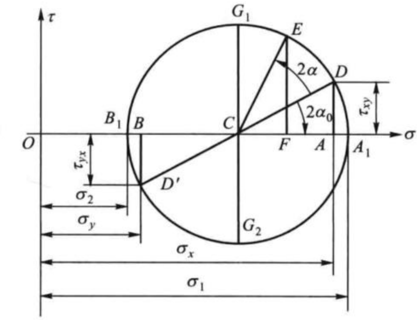
- 1. 应力应变分析
  - 解析法

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

  - 图解法：莫尔圆
  - 主应力





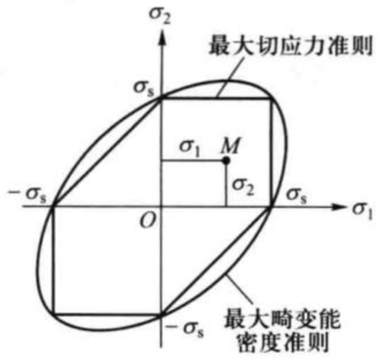
- 2. 广义胡克定律

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}\left(\sigma_y+\sigma_z\right)$$

- 3. 各向异性材料常数

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$$

  - 各向异性、正交各向异性



- 4. 强度理论
  - 四种强度准则：最大正应力、应变、切应力、畸变能
  - 莫尔强度理论

第一、二章知识点

- **材料力学的基本假设**

  - 连续性、均匀性、各向同性

- **截面法步骤**

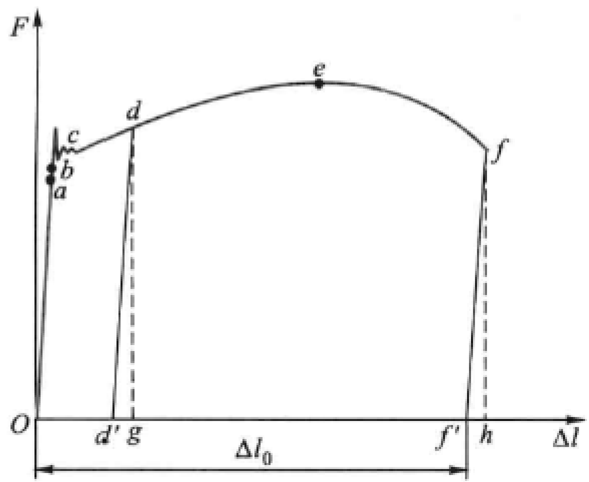
  - 选取截面；
  - 代之以未知力、力矩；
  - 利用理论力学力、力矩平衡方程求解未知力。

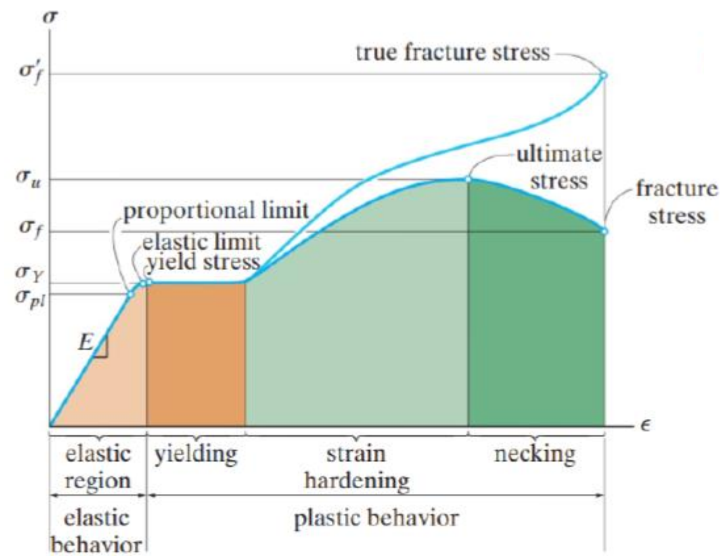
- 能量法

  - 外力功：$W=\int Fdx=\frac{1}{2}F\Delta$
  - 储存的弹性能：$E=\int_V v_e dV=\int_V\int\sigma d\epsilon dV=\int_V \frac{1}{2}\frac{F^2}{EA}+\frac{1}{2}\frac{T^2}{GI_p}+\frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}dx$
  - 外力功与储存的弹性能相等：可以求出力F方向的位移。

第一、二章知识点

➢ 低碳钢拉伸曲线

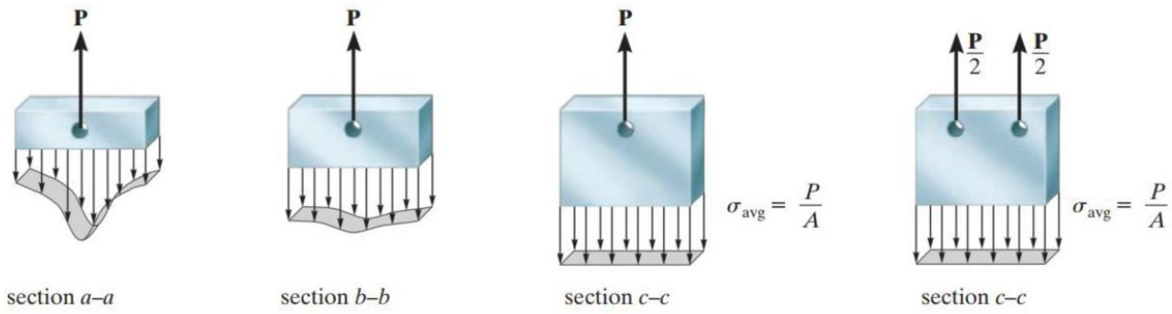




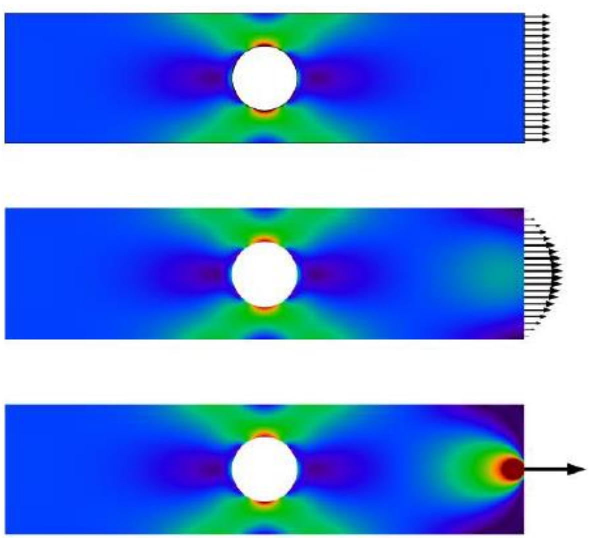
- 名义应力、名义应变、真实应力、真实应变
- 弹性极限：弹性模量、比例极限、弹性极限
- 屈服极限：上屈服极限、下屈服极限
- 强化阶段：卸载、冷作硬化
- 局部变形阶段：颈缩阶段

第一、二章知识点

➢ 圣维南原理：



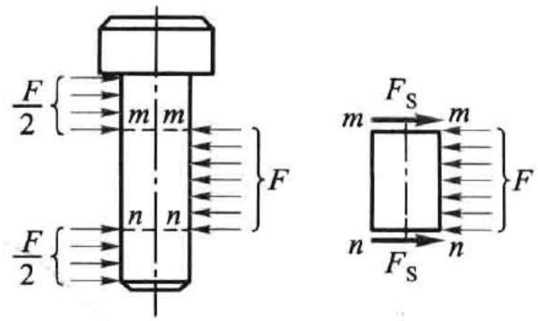
➢ 应力集中



□ 应力集中因数：$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0}$，圆孔周围应力集中系数为3

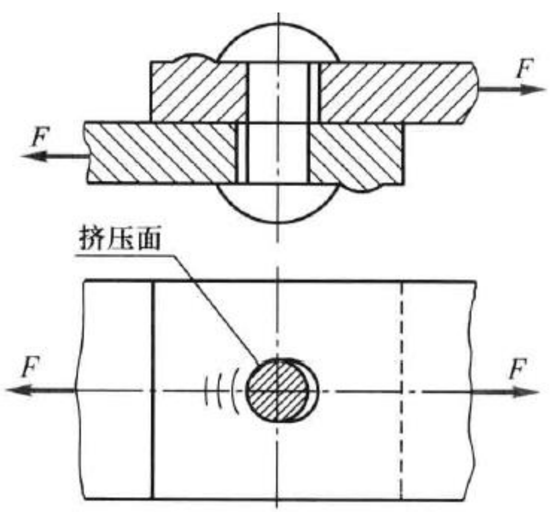
第一、二章知识点

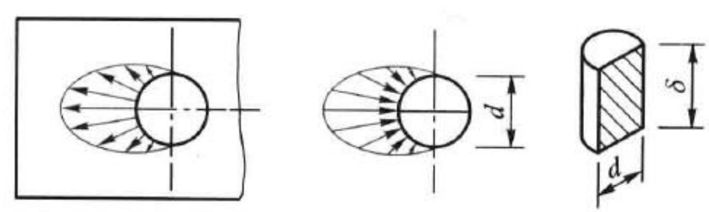
➢ 剪切应力



$$\tau = \frac{F_S}{S}$$

➢ 挤压应力



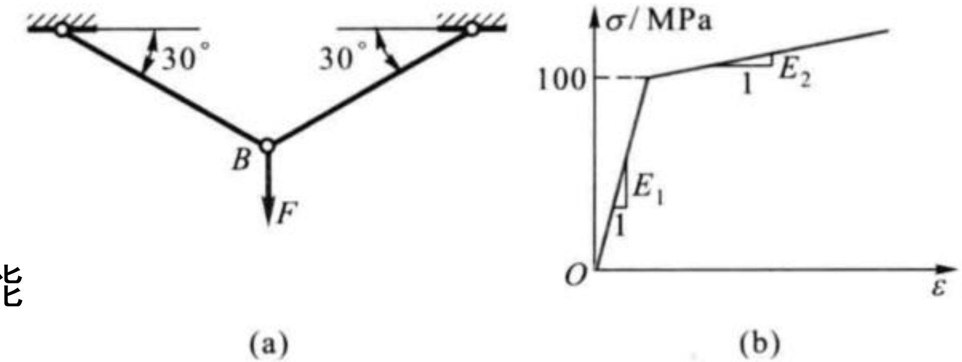


$$\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}}$$

在接触面为圆柱时，$A_{bs} = \delta d$

第二章作业：2.25

2.25　图 a 所示简单杆系，其两杆的长度均为 $l = 3$ m，横截面面积 $A = 1\ 000\ \text{mm}^2$。材料的应力 - 应变关系如图 b 所示。$E_1 = 70$ GPa，$E_2 = 10$ GPa。试分别计算当 $F = 80$ kN 和 $F = 120$ kN 时，节点 B 的铅垂位移。



(a)　　(b)

思路1：几何法求解（常规方法）

思路2：能量法求解（展开讲）

能量法的想法：外力功=弹性内力储存能

外力功形式：

$$W = \int F dx$$

弹性能形式：

$$E = \int_v v_e dV = \int_v \int_{\epsilon_0} \sigma d\epsilon\, dV$$

其中对于线弹性系统：外力F和应力正比于应变。而对于本题中的本构关系而言，其应力和外力均按照本构关系的形式进行。

a.　F < 100 kN 时，系统为线弹性系统

$$W = \frac{1}{2} F\Delta,\quad E = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} AL \cdot 2$$

b. F > 100 kN 时，不论是应力还是外力均是以本构关系的形式进行变形。外力功和弹性能均是按照图中的形式变化。

第二章作业：2.27

2.27 抗拉(压)刚度为 EA 的等直杆，受力情况如图所示。试问：

(1) 总伸长是否为 $\Delta l = \dfrac{F_1 l_1}{EA} + \dfrac{F_2 l_2}{EA}$? 如有错误，正确的算式是什么？

(2) 应变能是否为 $V_\varepsilon = \dfrac{F_1^2 l_1}{2EA} + \dfrac{F_2^2 l_2}{2EA}$? 如有错误，正确的算式是什么？

(3) 若 $l_1 = l_2 = l, F_1 + F_2 = F$(常量)，试求 $V_{\varepsilon\max}$ 和 $V_{\varepsilon\min}$，并求两种情况下的比值 $\dfrac{F_2}{F_1}$。

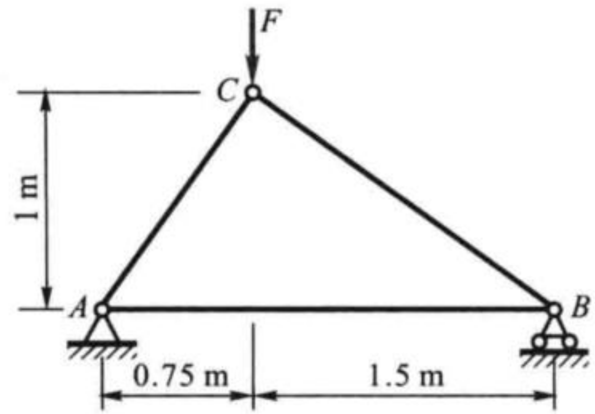
$$\Delta l = \frac{(F_1 - F_2) l_1}{EA} - \frac{F_2 l_2}{EA}$$

$$V_\varepsilon = \frac{(F_1 - F_2)^2 l_1}{2EA} + \frac{F_2^2 l_2}{2EA}$$

$$V_\varepsilon(F_1) = \frac{l}{2EA}(2F^2 - 6FF_1 + 5F_1^2)$$

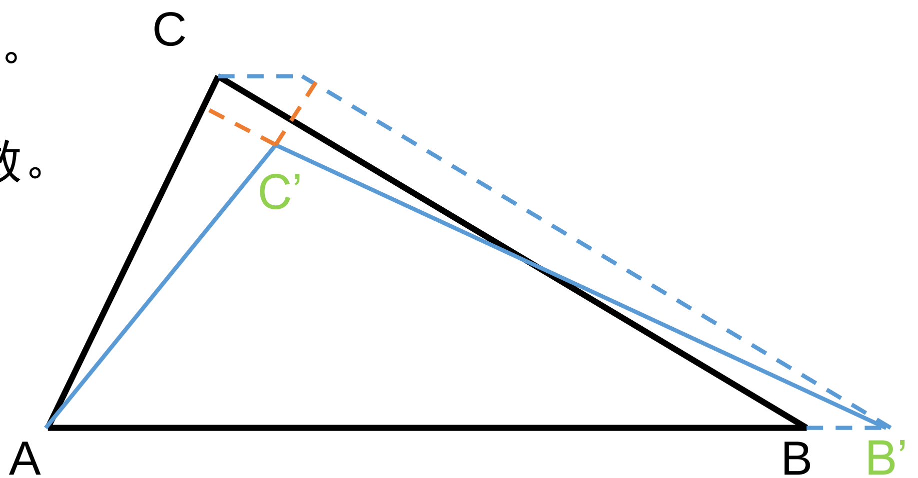
第二章作业：2.38

2.38　图示简单桁架的三根杆件均由钢材制成，横截面面积均为 300 mm^2，E = 200 GPa。若 F = 5 kN，试求 C 点的水平及铅垂位移。



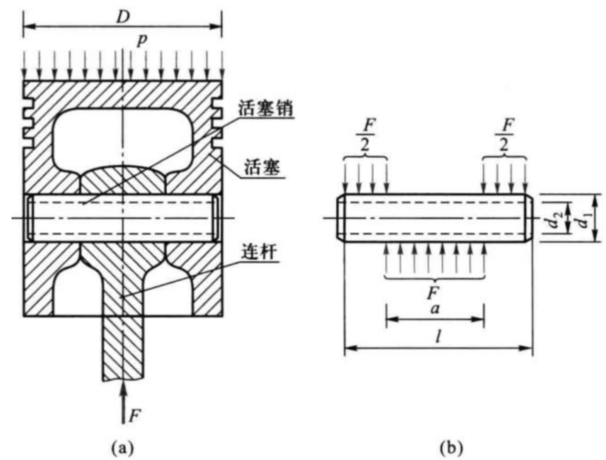
思路：需要求解水平位移，而作用力是竖直方向的，单单用能量法求解不出来。目前只能采用几何法求解。

分别对 C 点、 B 点受力分析得到杆的内力。
利用本构方程得到杆变形。
最后对整个体系几何分析求得其中的未知数。



第二章作业：2.68

2.68　图示柴油机的活塞销的材料为20Cr，$[\tau]=70\ \mathrm{MPa}$，$[\sigma_{bs}]=100\ \mathrm{MPa}$。活塞销外径 $d_1=48\ \mathrm{mm}$，内径 $d_2=26\ \mathrm{mm}$，长度 $l=130\ \mathrm{mm}$，$a=50\ \mathrm{mm}$。活塞直径 $D=135\ \mathrm{mm}$。气体爆发压力 $p=7.5\ \mathrm{MPa}$。试对活塞销进行剪切和挤压强度校核。



思路：校验剪切和挤压强度，不要遗漏。

在活塞销上存在三个需要校核的地方：

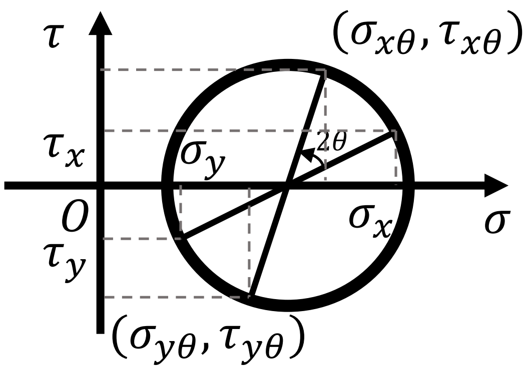
1. 中间部分的挤压强度；
2. 两端的挤压强度；
3. 连接处的剪切强度。

分别求出挤压应力和剪切应力：

1. $\sigma_{bs1}=\dfrac{F}{ad_1}=44.71\ MPa<[\sigma_{bs}]$
2. $\sigma_{bs2}=\dfrac{F}{(l-a)d_1}<\sigma_{bs1}$
3. $\tau=\dfrac{F}{2\pi(d_1^2/4-d_2^2/4)}=41.98\ MPa<[\tau]$

第三章知识点

➢ 外力偶矩、功率、转速之间的关系



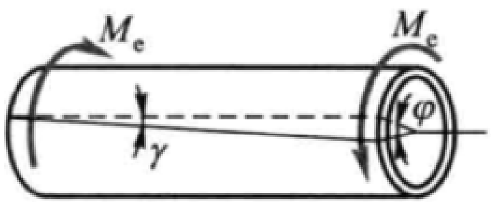
□ $\{M_e\}_{N\cdot m} = 9549\,\{P\}_{kW}/\{n\}_{r/min}$

本质上还是一个功率方程：P=Mw，其中w为角速度。
前面的系数：9549 相当于只是一个单位换算的过程。

➢ 切应力互等定理

学过应力分析之后，作出一个莫尔圆就可以得到这个结论。

➢ 扭转的平面假设（无翘曲，只有平行于平面的切应力）



$$\phi R = \gamma l$$

$$\tau = G\gamma = \frac{r\phi}{l}$$

$$T = \int_A \tau r dA = \frac{d\phi}{dx} G I_p \qquad \tau_{max} = \frac{T}{W_t}$$

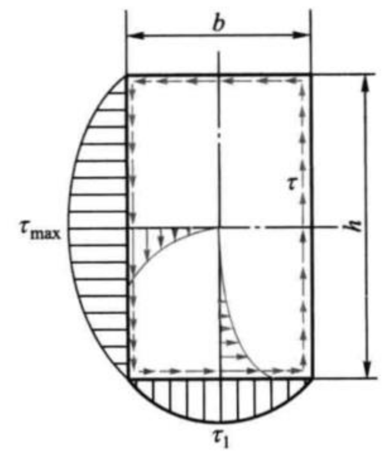
极惯性矩：$I_p = \int_A \rho^2 dA$

第三章知识点

- 密圈螺纹弹簧的应力和变形

  - 弹簧每一截面上收到扭矩和剪力，当簧圈直径远大于簧丝直径时，剪力导致的剪应力可以忽略。利用能量法可以得到弹簧的刚度系数。

$$C = \frac{Gd^4}{64R^3n}$$



- 非圆截面杆的扭转

  - 应力分布形式
  - 最大切应力： $\tau_{max} = \frac{T}{\alpha hb^2}$
  - 扭转角： $\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{G\beta hb^3}$　　h/b>10时，$\alpha = \beta \approx 1/3$
  - 开口薄壁杆件自由扭转：相等关系 -> 各个矩形杆的扭转角相等

存在圆角、斜度时，有修正公式。

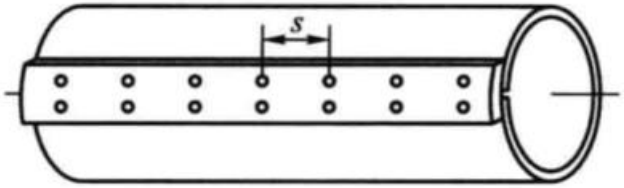
$$I_t = \eta\frac{1}{3}\sum h_i\delta_i^3$$

- 闭口薄壁杆件自由扭转

$$M_e = 2A\tau\delta \qquad \phi = \frac{M_eS}{8A^2G}$$

第三章作业：3.17

3.17 由厚度 $\delta = 8$ mm 的钢板卷制成的圆筒，平均直径为 $D = 200$ mm。接缝处用铆钉铆接（见图）。若铆钉直径 $d = 20$ mm，许用切应力 $[\tau] = 60$ MPa，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 160$ MPa，筒的两端受扭转力偶矩 $M_e = 30$ kN·m 作用，试求铆钉的间距 s。



思路：在铆钉连接处承受扭转导致的外力，这个外力与闭口薄壁圆筒的扭转有关，该外力引起铆钉的剪切和挤压，校核这两者得到铆钉的设计间距s。

$$M_e = 2A\tau\delta$$

$$\tau = \frac{M_e}{2A\delta} = 59.71\ MPa$$

剪切强度校核：

$$\tau_{剪} = \frac{F}{A} = \frac{\tau s\delta}{A} < [\tau]$$
$$s < 39.44\ mm$$

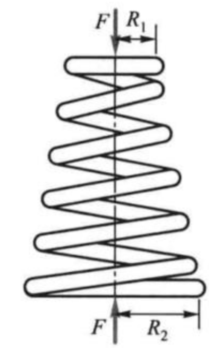
挤压强度校核：

$$\sigma = \frac{F}{d\delta} = \frac{\tau s\delta}{d\delta} < [\sigma_{bs}]$$
$$s < 53.59\ mm$$

铆钉间距最少为 39.44 mm

第三章作业：3.30

3.30 图示锥形密圈螺旋弹簧，也称塔簧，受轴向压力 F 作用，上端面和下端面弹簧圈的平均直径分别为 R_1 和 R_2。簧丝直径为 d，有效圈数为 n，材料的切变模量为 G。试确定弹簧的压缩量 λ。



思路1：找到合适的积分变量，对整个锥形密圈螺纹弹簧进行积分即可。具体步骤类似于课本上的密圈螺纹弹簧。

$$R(x) = R_1 + (R_2 - R_1)\frac{x}{n}$$

扭矩： $$T(x) = F\left[R_1 + (R_2 - R_1)\frac{x}{n}\right]$$

切应力： $$\tau(x) = \frac{T(x)\rho}{\frac{1}{32}\pi d^4} = \frac{32F\rho\left[R_1 + (R_2 - R_1)\frac{x}{n}\right]}{\pi d^4}$$

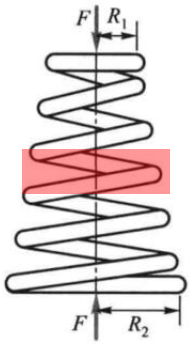
应变能密度： $$v_\varepsilon(x) = \frac{\tau^2(x)}{2G} = \frac{512F^2\rho^2\left[R_1 + (R_2 - R_1)\frac{x}{n}\right]^2}{G\pi^2 d^8}$$

能量法： $$V_\varepsilon = \int v_\varepsilon dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{d/2}\int_0^{n} v_\varepsilon \cdot \rho 2\pi R(x)dxd\rho d\theta = \frac{1}{2}F\lambda$$

$$\lambda = \frac{16Fn(R_1^2 + R_2^2)(R_1 + R_2)}{Gd^4}$$

第三章作业：3.30

3.30 图示锥形密圈螺旋弹簧，也称塔簧，受轴向压力 F 作用，上端面和下端面弹簧圈的平均直径分别为 R_1 和 R_2。簧丝直径为 d，有效圈数为 n，材料的切变模量为 G。试确定弹簧的压缩量 λ。



思路2：将锥形密圈螺纹弹簧看作一个个密圈弹簧的叠加。
→ 直接利用课本上的公式，简化计算过程。

利用直弹簧的公式：

$$C=\frac{Gd^4}{64R^3n}$$

对处于R(x)处的直弹簧，其长度为dx，收到压力F的作用，其变形为：

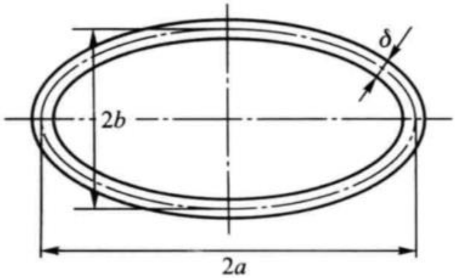
$$d\lambda=\frac{F}{C}=F\frac{64R^3}{Gd^4}\frac{n}{l}dx$$

$$\lambda=\int_l d\lambda=\int_l F\frac{64R(x)^3}{Gd^4}\frac{n}{l}dx=\frac{16Fn(R_1^2+R_2^2)(R_1+R_2)}{Gd^4}$$

第三章作业：3.40

3.40　图示椭圆形截面薄壁等直杆件受自由扭转，两端作用扭矩 $M_e = 8\ \text{kN}\cdot\text{m}$。若材料的切变模量 $G = 80\ \text{GPa}$，截面的几何参数为：壁厚 $\delta = 5\ \text{mm}$，壁厚中线的长轴 $a = 80\ \text{mm}$、短轴 $b = 60\ \text{mm}$。试求：(1) 截面上的切应力大小；(2) 杆件的单位长度扭转角。

提示：壁厚中线所包围面积的计算公式为 $\omega = \pi ab$，壁厚中线周长的近似计算公式为 $S = \pi[1.5(a+b) - \sqrt{ab}]$。



思路：基本的闭口薄壁杆扭转问题。

推导过程：
由于是薄壁杆，设在薄壁处切应力均匀分布，为τ。
则切应力产生的扭矩为：$M_e = \int \tau\delta r dx = 2A\tau\delta$
利用能量法求解扭转角：

$$E = \frac{1}{2}T\phi l = \frac{\tau^2}{2G} lS\delta$$

$$\phi = \frac{M_e S}{8A^2 G}$$

其中：A 为壁厚中线所包围面积，S 为壁厚中线的周长。

本题的求解过程直接代入公式即可。

第四、五、六章知识点

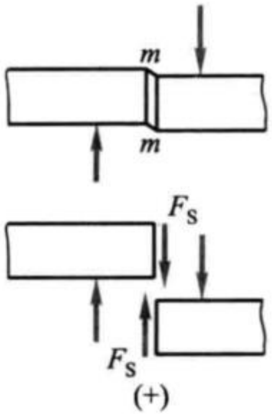
- 弯曲内力

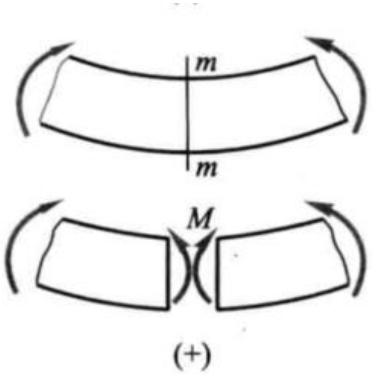
  - 求解方法：截面法

- 载荷集度、剪力、弯矩之间的微分关系

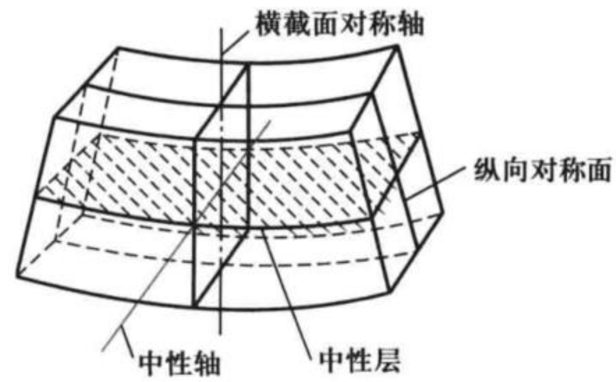
$$\frac{d^2M}{dx^2}=\frac{dF_s}{dx}=q$$

- 剪力和弯矩符号的判定方法

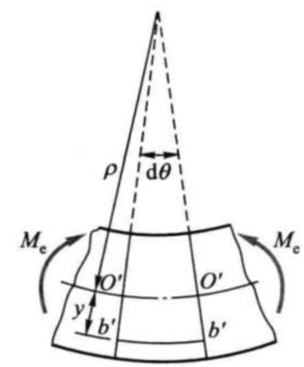


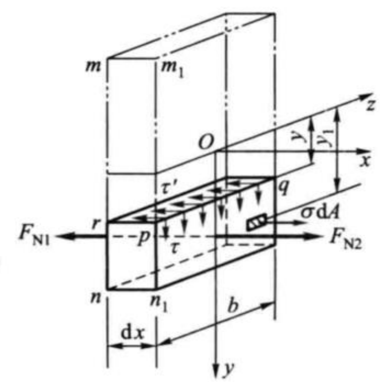


第四、五、六章知识点

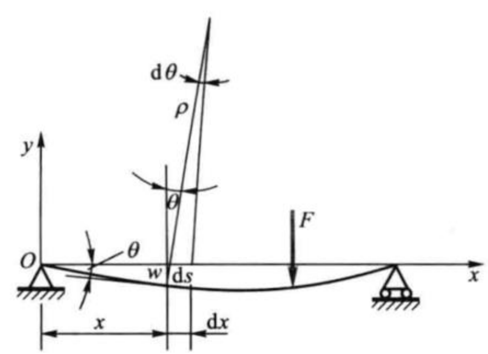


- 弯曲应力
  - ☐ 基本假设：平面假设、纵向纤维无正应力假设
  - ☐ 中性轴，应力分布：$\sigma = \frac{Ey}{\rho} = \frac{My}{I_z}$
  - ☐ 惯性矩：$I_z = \int y^2 dA$
  - ☐ 弯曲最大正应力：$\sigma_{max} = \frac{M}{W} = \frac{My_{max}}{I_z}$
  - ☐ 弯曲切应力：$\tau = \frac{F_S S_Z^*}{I_z b}$　$S_Z^* = \int ydA = \overline{y}A$



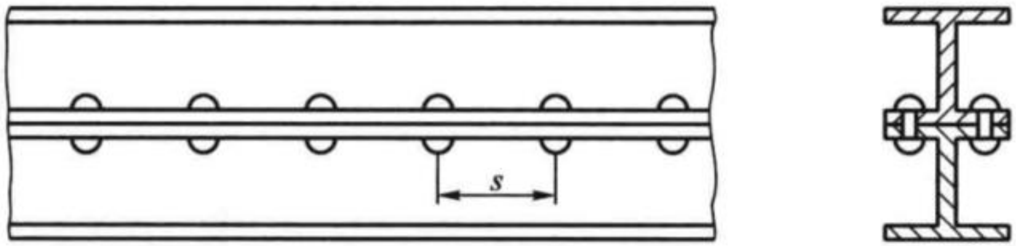


- 弯曲变形
  - ☐ 挠曲线的微分方程：$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$
  - ☐ 线性化：$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI}$
  - ☐ 积分法求解挠曲线方程：$w = \int \int \frac{M}{EI} dx + Cx + D$
  - ☐ 叠加法求解
  - ☐ 超静定梁



第五章作业：5.27

5.27 图示梁由两根 No.36a 工字钢铆接而成。铆钉的间距为 s = 150 mm，直径 d = 20 mm，许用切应力[τ] = 90 MPa。梁横截面上的剪力 F_s = 40 kN。试校核铆钉的剪切强度。



思路：与题目3.17类似，均是求解贴合面上的剪应力。

$$I_Z = I_{Z1} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 S + I_{Z2} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 S = 8.1159 \times 10^{-4}\ m^4$$

$$S_Z^* = S\left(\frac{h}{2}\right) = 1.3766 \times 10^{-3}\ m^3$$

$$\tau_{max} = \frac{F_s S_Z^*}{I_Z b} = 0.4989\ MPa$$

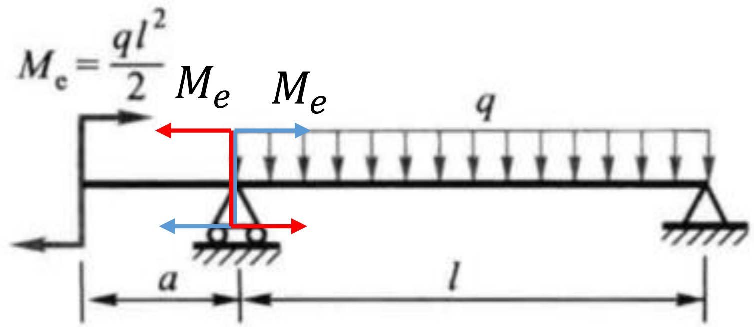
$$F_S = \frac{\tau_{max} s b}{2} = 5.0888\ KN$$

$$\tau_{max} = \frac{F_S}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 16.2064\ MPa$$

剪切强度合格。

第六章作业：6.11

6.11　用叠加法求图示外伸梁外伸端的挠度和转角。设 EI 为常数。



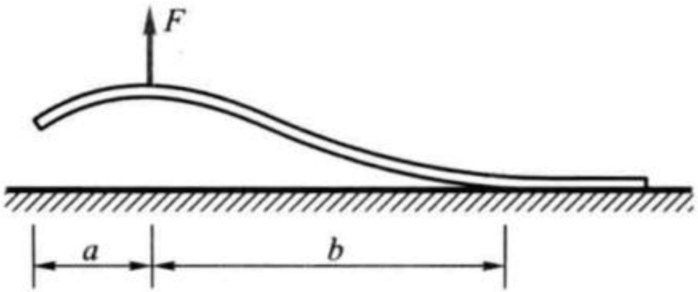
思路：叠加法简化成三个基本形式
1.均布荷载的简支梁；2.一端受到弯矩的简支梁；3.受到弯矩的悬臂梁。
三种形式的叠加。

$$\theta_A=\theta_{qA}+\theta_{MeA}=-\frac{ql^2}{24EI}(5l+12a)$$

$$w_A=w_{qA}+w_{MeA}=\frac{ql^2a}{24EI}(5l+6a)$$

第五章作业：5.36

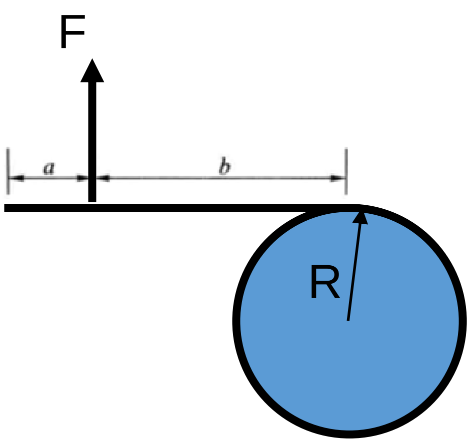
5.36　以 F 力将置放于地面的钢筋提起。若钢筋单位长度的重量为 q，当 $b=2a$ 时，试求所需的力 F。



思路：在钢筋和地面接触的地方，曲率半径为无穷大，这个时候弯矩为零。

利用公式：$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}$$

对于接触点取力矩，利用力矩平衡求解所需力F。

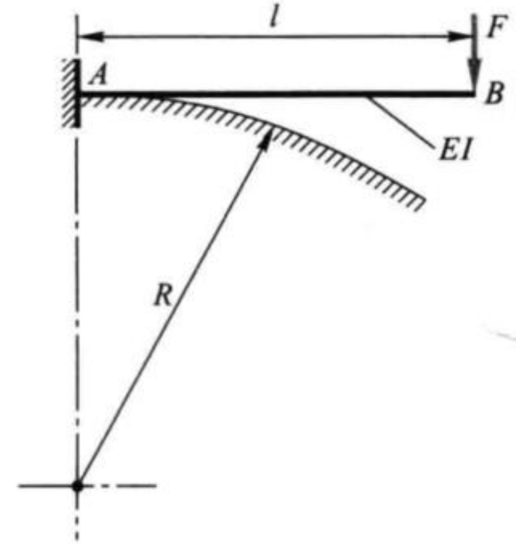


变种题：
如右图所示，钢筋受到未知外力卷在半径为R的圆形物体上，所需的力F。

步骤如上所述，但是此时**半径就不是无穷大了，需要额外考虑**。

第六章作业：6.34

*6.34 悬臂梁的下面是一半径为 R 的刚性圆柱面(见图)。在集中力 F 作用下，试求端点 B 的挠度。

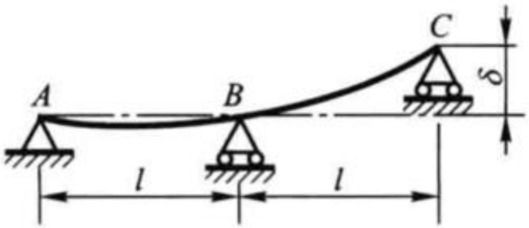


思路：类似于前一题，需要考虑弯曲紧贴处的弯矩。

1. 当力很小的时候，小到为零，这个时候挠度之和力的大小有关。此时，弯曲变形简化成一个悬臂梁的模型。
2. 当力达到一定程度之后，与圆柱面有一个接触面，此时就是存在角度的悬臂梁和接触点挠度的叠加。
3. 当力无穷大时，整个梁与圆柱面贴合，挠度为接触点的挠度。

第六章作业：6.36

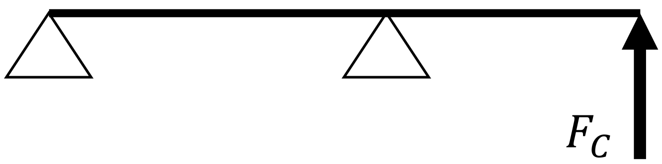
6.36　图示三支座等截面轴，由于制造不精确，轴承有高低。设 EI，δ 和 l 均为已知量，试用叠加法求图示两种情况的最大弯矩。



思路：判断出整个系统一次超静定问题，去掉C点处的约束，代之以力Fc，再利用叠加法求出位移，利用几何条件求解出未知力Fc，最后求解出整个系统的最大弯矩。

直接画出剪力图与弯矩图，利用积分法求出位移

$$F_C = \frac{3EI\delta}{2l^3}$$

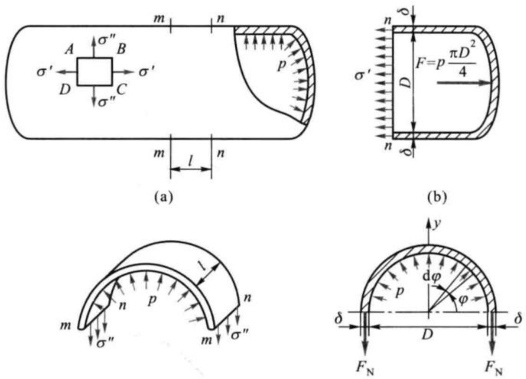


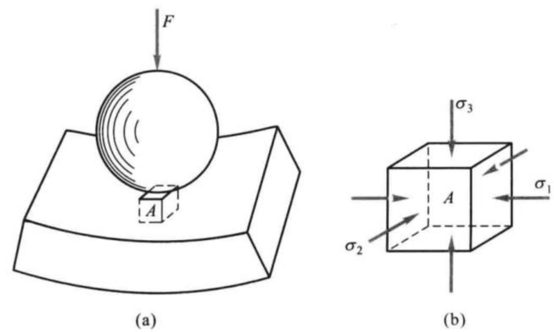
最后得到整个系统最大弯矩为：

$$M_{max} = F_C l = \frac{3EI\delta}{2l^2}$$

第七章知识点

- 主应力、主平面
- 二向应力、三向应力例子



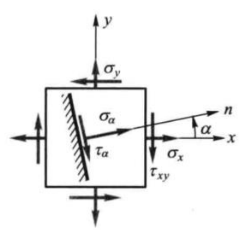


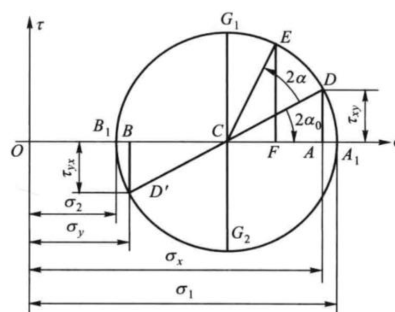
- 二向应力分析：解析法

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

- 二向应力分析：图解法：莫尔圆





第七章知识点

- 应变分析

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\alpha$$

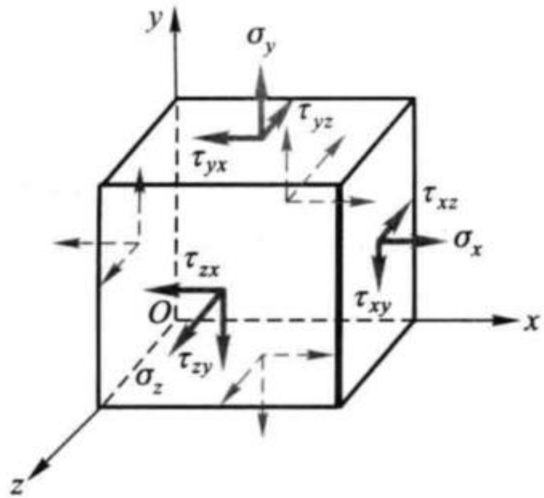
$$\frac{\gamma_\alpha}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\alpha$$

- 平面应变问题、平面应力问题

- 广义胡克定律：各向同性材料

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\mu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$



- 各向异性材料的弹性常数

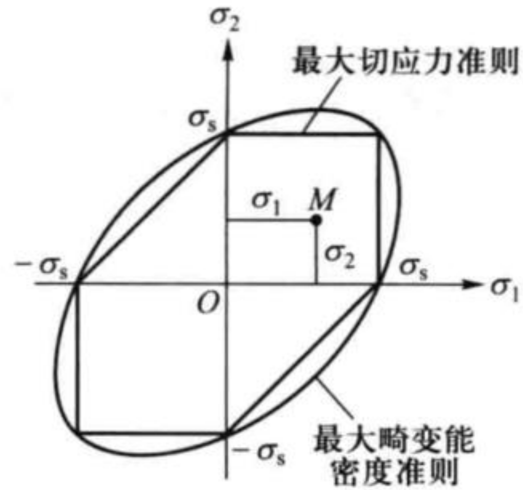
第七章知识点

- 四种强度理论

  - 最大拉应力理论： $\sigma_1 < [\sigma_t]$
  - 最大应变理论： $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) < [\sigma]$
  - 最大切应力理论： $\sigma_1 - \sigma_3 < [\sigma]$
  - 最大畸变能密度理论： $\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} < [\sigma]$

- 莫尔强度理论

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}\sigma_3 < [\sigma]$$

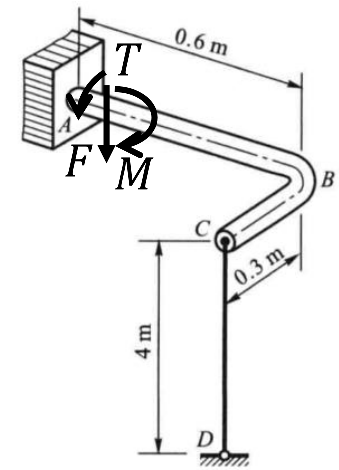


- 含裂纹构件的断裂准则

$$\sigma\sqrt{\pi a} > K_{IC}$$

第七章作业：7.9

7.9 图示钢制曲拐的横截面直径为 20 mm，C 端与钢丝相连，钢丝的横截面面积 $A = 6.5\ \mathrm{mm}^2$。曲拐和钢丝的弹性模量同为 $E = 200$ GPa，$G = 84$ GPa。若钢丝的温度降低 50 ℃，若线胀系数 $\alpha_l = 12.5\times10^{-6}$ ℃$^{-1}$，试求曲拐固定端截面 A 的顶点的应力状态。



思路：将钢丝对曲拐的作用考虑成一个未知的拉力，建立曲拐和钢丝的位移相等条件，求解未知的力。

注意：不要被温降、装配、湿度等外界激励迷惑，这些因素说到底就是给构件提供力的作用。其次，在分析曲拐的时候需要考虑弯曲、扭转的组合变形。

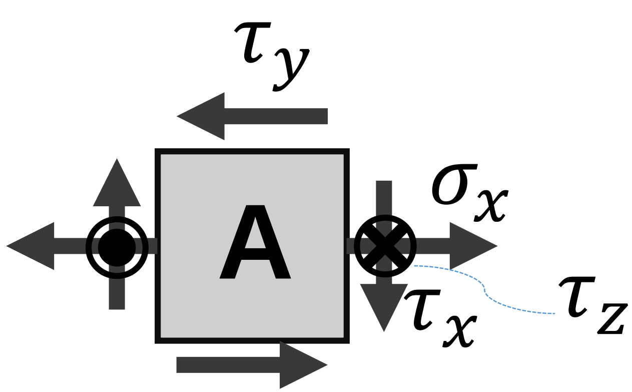
$$\delta_{string} = \delta_T + \delta_F = \alpha_l \Delta T L - \frac{F}{EA} L$$

$$\delta_{beam} = \delta_{bend_{AB}} + \delta_{bend_{BC}} + \delta_{torsion} = \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{Fa^3}{3EI} + \frac{Fal}{GI_P} a$$

变形协调关系

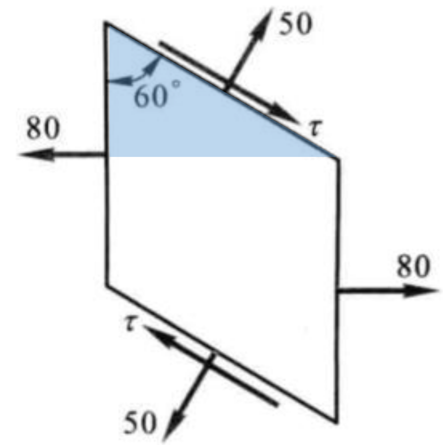
$$\delta_{string} = \delta_{beam}$$

由分析可以得到 A 截面处受到扭矩 T 、弯矩 M 和剪力 F 。（截面法求得）



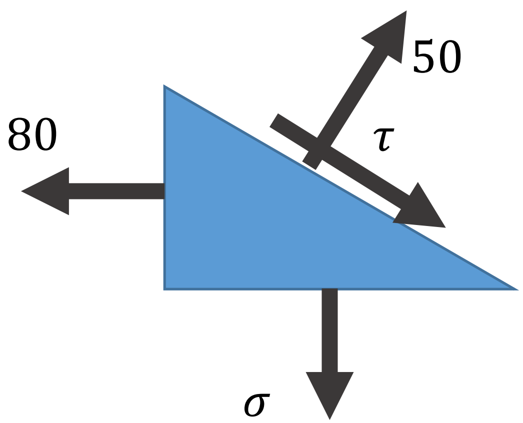
第七章作业：7.12

7.12　二向应力状态如图所示，应力单位为 MPa。试求主应力并作应力圆。



思路1：采用解析法代入公式计算。
思路2：采用图解法计算。

思路3：直接取其中的单元体进行受力分析计算。



两个主应力方向必然互相垂直
→ 在三角形下底面不存在切应力。
利用受力平衡，求解得到底面的正应力σ
和斜面的切应力τ。

剩下就是作应力圆的基本方法了。