



Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Інститут прикладного системного аналізу

Лабораторна робота №2
з дисципліни «Основи системного аналізу» на тему:
"Відтворення функціональних залежностей у задачах розкриття
концептуальної невизначеності"
Варіант № 6

Виконали:
студенти групи КА-04
Борисевич О. І.
Михайленко Б. А.
Штріккер Д. Я.

Перевірила:
Панкратова Н. Д.

Київ 2023

Мета роботи: освоїти теоретичний матеріал по темі, розробити програму по відтворенню функціональних залежностей в адитивній формі за заданою дискретною вибіркою.

1. Опис та теоретичні відомості

Математична постановка задачі:

Відома вихідна інформація у вигляді дискретного масиву:

$$M_0 = \langle Y_0; X_1; X_2; X_3; \rangle,$$

$$Y_0 = (Y_i | i = \overline{1, m}); Y_i = (Y_i[q_0] | q_0 = \overline{1, Q}),$$

$$X_1 = (X_{1j_1} | j_1 = \overline{1, n_1}); X_{1j_1} = (X_{1j_1}[q_0] | q_1 = \overline{1, k_1}),$$

$$X_2 = (X_{2j_2} | j_2 = \overline{1, n_2}); X_{2j_2} = (X_{2j_2}[q_0] | q_2 = \overline{1, k_2}),$$

$$X_3 = (X_{3j_3} | j_3 = \overline{1, n_3}); X_{3j_3} = (X_{3j_3}[q_0] | q_3 = \overline{1, k_3}),$$

де множина Y_0 визначає числові значення $Y_i[q_0] = \langle X_{j_1}[q_1], X_{j_2}[q_2], X_{j_3}[q_3] \rangle$ шуканих неперервних цільових функцій

$$y_i = f_i(x_1, x_2, x_3), i = \overline{1, m},$$

$$\text{де } x_1 = (x_{1j_1} | j_1 = \overline{1, n_1}),$$

$$x_2 = (x_{2j_2} | j_2 = \overline{1, n_2}),$$

$$x_3 = (x_{3j_3} | j_3 = \overline{1, n_3})$$

Потрібно знайти такі функції наближень $\Phi_i(x_1; x_2; x_3), i = \overline{1, m}$, які з прийнятною похибкою характеризують реальні функціональні залежності $y_i = f_i(x_1; x_2; x_3), i = \overline{1, m}$ на множині D_s .

Функції наближення будемо формувати у вигляді ієрархічної багаторівневої системи моделей (рис.1).

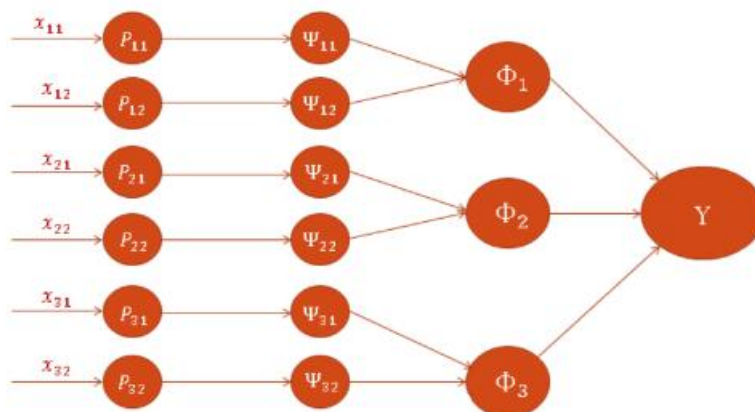


Рисунок 1 — Багаторівнева системи моделей

На верхньому ієрархічному рівні реалізовуємо модель, що визначає залежність функцій наближення від змінних x_1, x_2, x_3 . Шукані функції формуємо у класі адитивних функцій і подаємо у вигляді суперпозиції функцій від змінних x_1, x_2, x_3 . Можливість такого подання впливає з теореми А. Н. Колмогорова.

Шукані функції формуватимемо в такому вигляді:

$$\Phi_i(x_1; x_2; x_3) = c_{i1}\Phi_{i1}(x_1) + c_{i2}\Phi_{i2}(x_2) + c_{i3}\Phi_{i3}(x_3), i = \overline{1, m}.$$

На другому ієрархічному рівні формуємо моделі, що визначають залежність функції наближення нарізно від компонентів змінних x_1, x_2, x_3 . Для цього перейдемо від функції векторів до суперпозиції функції компонент цих векторів. З огляду на те, що компоненти кожного вектора різномірні за фізичним змістом, доцільно для доданків функцій вибрати клас узагальнених поліномів і зобразити їх у вигляді:

$$\Phi_{is}(x_s) = \sum_{j_s=1}^{n_s} a_{ij_s}^{(s)} \Psi_{sj_s}(x_{sj_s}), s = \overline{1, 3}$$

На третьому ієрархічному рівні формуються моделі, які визначають функції $\Psi_{1j_1}, \Psi_{2j_2}, \Psi_{3j_3}$. Структури функцій обираємо аналогічно до попереднього рівня. Зобразимо функції у вигляді наступних узагальнених поліномів:

$$\Psi_{sj_s}(x_{sj_s}) = \sum_{p=0}^{P_{js}} \lambda_{jsp} \varphi_{jsp}(x_{sj_s}), s = \overline{1, 3}$$

Тоді нахождення функцій наближення повинно виконуватися на основі такої послідовності

$$\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3 \rightarrow \Phi_{i1}, \Phi_{i2} \Phi_{i2} \rightarrow \Phi_i$$

Задача формування функцій Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 зводиться до чебишевської задачі наближення для наступної системи рівнянь:

$$\begin{aligned} F_{i1}(\tilde{X}[q_0]) - b_0 &= 0, q_0 = \overline{1, k_0} \\ F_{i1}(\tilde{X}[q_0]) &= \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{p_1=0}^{P_{j_1}} \lambda_{j_1 p_1} T_{p_1}^*(\tilde{X}_{1j_1}[q_0]) + \sum_{j_2=1}^{n_2} \sum_{p_2=0}^{P_{j_2}} \lambda_{j_2 p_2} T_{p_2}^*(\tilde{X}_{2j_2}[q_0]) + \\ &+ \sum_{j_3=1}^{n_3} \sum_{p_3=0}^{P_{j_3}} \lambda_{j_3 p_3} T_{p_3}^*(\tilde{X}_{3j_3}[q_0]); \\ \tilde{X}[q_0] &= (\tilde{X}_{1j_1}[q_1], \tilde{X}_{2j_2}[q_2], \tilde{X}_{3j_3}[q_3] | q_0) \leftrightarrow \langle q_1, q_2, q_3 \rangle, \text{ де} \end{aligned}$$

$T_{p_1}^*, T_{p_2}^*, T_{p_3}^*$ – зміщені поліноми Чебишева.

Розв’язання системи полягає у визначенні матриць $\|\lambda_{j_1 p_1}^0\|, \|\lambda_{j_2 p_2}^0\|, \|\lambda_{j_3 p_3}^0\|$, які для величини максимальної нев’язки:

$$\Delta_\lambda = \max_{q_0 \in [1, k_0]} |F_1(\tilde{X}[q_0]) - b_0|$$

забезпечують найкраще наближення:

$$\Delta_\lambda^0 = \min_{\|\lambda\|} \Delta_\lambda$$

Задача формування функцій Φ_{is} полягає у визначенні матриць $\|a_{ij1}^{(1)}\|, \|a_{ij2}^{(2)}\|, \|a_{ij3}^{(3)}\|$ і зводиться до чебишевської задачі наближення для таких трьох незалежних систем:

$$\begin{aligned} F_{i2s}(\tilde{X}_s[q_0]) - \tilde{Y}_i[q_0] &= 0, \text{ де} \\ F_{i2s}(\tilde{X}_s[q_0]) &= \sum_{j_s=1}^{n_s} a_{ij_s}^{(s)} \Psi_{sj_s}(\tilde{X}_{sj_s}[q_s]), \\ i &= \overline{1, m}, s = \overline{1, 3}, q_0 = \overline{1, k_0} \end{aligned}$$

Розв’язання полягає у визначенні матриць $\|a_s^0\| = \|\tilde{a}_{ij_s}^{(s)}\|$, які для величини максимальної нев’язки забезпечують найкраще наближення.

Задача формування функцій Φ_i полягає у визначенні множини $\Phi = \langle \Phi_i(x_1; x_2; x_3) | i = \overline{1, m} \rangle$ шуканих функцій наближення, і реалізується на заключному етапі формування системи моделей. Розв'язання цієї задачі полягає у відшукуванні матриць $\|c_{is}\|$, $s = \overline{1, 3}$ і зводиться до чебишевської задачі наближення для наступної системи рівнянь:

$$\begin{aligned} F_{i3}(\tilde{X}[q_0]) - \tilde{Y}_i[q_0] &= 0, \text{ де} \\ F_{i3}(\tilde{X}[q_0]) &= c_{i1}\Phi_{i1}(\tilde{X}_1[q_0]) + c_{i2}\Phi_{i2}(\tilde{X}_2[q_0]) + c_{i3}\Phi_{i3}(\tilde{X}_3[q_0]), \\ q_0 &= \overline{1, k_0}, i \in [1, m]. \end{aligned}$$

Перетворення отриманих результатів з нормованого до ненормованого вигляду здійснюватиметься за формулою:

$$\widetilde{\Phi}_i = \Phi_i(\max(Y_i) - \min(Y_i)) + \min(Y_i).$$

Метод градієнтного спуску використовується для розв'язання несумісних систем лінійних алгебраїчних рівнянь $Ax = b$, мінімізуючи норму вектору нев'язки, задану як $r = b - Ax$. Для знаходження наступної ітерації використовується формула, $x_{i+1} = x_i + \alpha v_i$, де v_i – напрямок антиградієнту в точці x_i . Щоб забезпечити симетричність та додатну визначеність матриці, можна помножити ліву та праву частину рівняння на A^T , створивши додатно визначену квадратну симетричну матрицю. Далі можна використовувати метод градієнтного спуску для розв'язання отриманої системи.

2. Постановка задачі

Метою розв'язання задачі є відновлення цільових функцій в адитивному вигляді згідно з теоретичним матеріалом, поданим вище, за дискретною вибіркою.

Отже, завдання - побудувати за заданими дискретними вибірками наближувальні функції (аналітичні та графічно представлені функціональні залежності), які з практично прийнятною похибкою в сенсі чебишевського наближення характеризують справжні функціональні залежності.

2.1. Загальні параметри, що відповідають варіанту:

- b_{iq_0} приймаються рівними нормованими значеннями: $Y_i[q]$, $i = \overline{1, m}$;
- Метод розв'язання несумісної системи рівнянь: градієнтний метод.

2.2. Параметри для заданої вибірки:

- Розмірність вект-в: $X_1[X_{11}, X_{12}] - 2$, $X_2[X_{21}, X_{22}] - 2$, $X_3[X_{31}, X_{32}] - 2$
- Розмірність вибірки: $Q = 40$
- Кількість цільових функцій Y_i : $m = 5$

2.3. Параметри для альтернативної вибірки:

- Розмірність вект-в: $X_1[X_{11}, X_{12}] - 2$, $X_2[X_{21}, X_{22}] - 2$, $X_3[X_{31}, X_{32}, X_{33}] - 3$
- Розмірність вибірки: $Q = 30$
- Кількість цільових функцій Y_i : $m = 5$

3. Опис інтерфейсу:

Створено інтерфейс з 5-ма основними блоками:

1. Вхідні дані: Користувач може вибрати файл з даними, вказати назву для файлу для результату. А також тут буде автоматично обраховано розмірність вибірки
2. Розмірності векторів: Програма автоматично визначає розмірності векторів

3. Поліноми: Можливість вибору апроксимуючих поліномів та вказання їх степенів.
4. Додатково: Визначення ваг для цільових функцій та методу визначення матриць.
5. Результати роботи: Під час обчислень виводяться значення проміжних функцій.

Розроблений інтерфейс зображено на рис. 2.

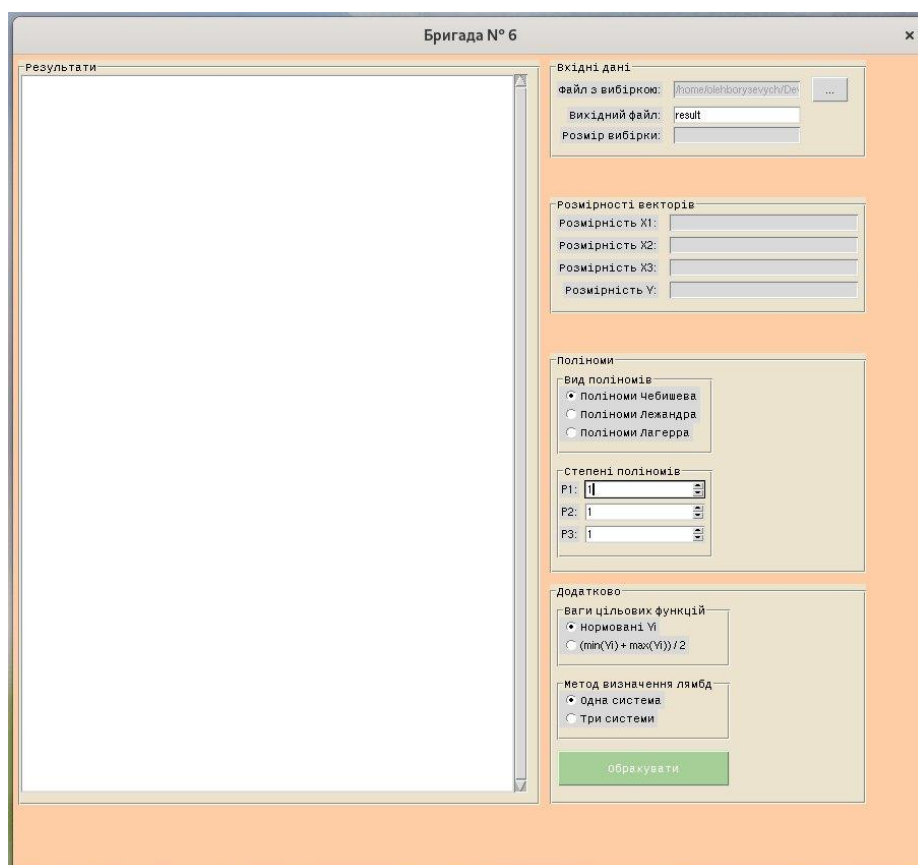


Рисунок 2 — Інтерфейс
4. Результати:

4.1. Дослідимо спочатку задану вибірку:

4.1.1.

Параметри:

- Поліном Чебишева
- Степені поліномів: $P_j = \{1, 1, 1\}$
- Метод визначення лямбд— одна система

Отримані результати та графіки зображено на рис. 3-4.

Бригада № 6

Результати

```

2 3.04073930e-01]
2 [ 6.29063007e-02 5.48952468e-02 2.06665663e-03 1.36161812e-01 8.34921982e-0
3.20046434e-01]
2 [ 4.46806337e-02 8.48574194e-02 -1.55593575e-02 1.12471802e-01 1.13061478e-0
2.24211409e-01]
1 [ 2.64549668e-02 1.14819592e-01 -2.43723645e-02 8.87817924e-02 1.42630757e-0
1.84280148e-01]
1 [ 8.22929381e-03 1.44781764e-01 -4.37609800e-02 6.50917823e-02 1.72200037e-0
1.92266400e-01]
1 [-9.39636715e-03 1.74743937e-01 -6.31495955e-02 5.32467773e-02 2.01769316e-0
1.68307644e-01]]

A:
[[1.00000072 1.00000032 0.99999984 1.00000111 0.99999943 1.00000055]
[0.99999951 1.00000003 0.99999991 0.99999962 1.00000014 0.99999974]
[0.99999772 1.00000011 0.99999963 0.99999817 1.00000073 0.99999888]
[0.99999239 0.99999732 1.00000246 0.99998872 1.00000186 0.99999354]
[1. 1. 1. 1. 1. 1.]]

C:
[[0.57735292 0.02084958 0.61913589]
[0.57735295 0.02084937 0.61913629]
[0.57735321 0.02084896 0.61913667]
[0.57735432 0.02084866 0.61913696]
[0.57735287 0.02084947 0.61913621]]

Відновлені через поліноми функції:

Ф1 (x1, x2, x3) = 0.2047 T0(x11) + -0.2105 T1(x11)
+ 0.2047 T0(x12) + -0.2595 T1(x12)
+ 0.0056 T0(x21) + -0.0070 T1(x21)
+ 0.0056 T0(x22) + -0.0044 T1(x22)
+ 0.1982 T0(x31) + -0.3661 T1(x31)
+ 0.1982 T0(x32) + -0.0989 T1(x32)

Ф2 (x1, x2, x3) = 0.2047 T0(x11) + -0.2105 T1(x11)
+ 0.2047 T0(x12) + -0.2595 T1(x12)
+ 0.0056 T0(x21) + -0.0070 T1(x21)
+ 0.0056 T0(x22) + -0.0044 T1(x22)
+ 0.1982 T0(x31) + -0.3661 T1(x31)
+ 0.1982 T0(x32) + -0.0989 T1(x32)

Ф3 (x1, x2, x3) = 0.2047 T0(x11) + -0.2105 T1(x11)
+ 0.2047 T0(x12) + -0.2595 T1(x12)
+ 0.0056 T0(x21) + -0.0070 T1(x21)
+ 0.0056 T0(x22) + -0.0044 T1(x22)
+ 0.1982 T0(x31) + -0.3661 T1(x31)
+ 0.1982 T0(x32) + -0.0989 T1(x32)

Ф4 (x1, x2, x3) = 0.2047 T0(x11) + -0.2105 T1(x11)
+ 0.2047 T0(x12) + -0.2595 T1(x12)
+ 0.0056 T0(x21) + -0.0070 T1(x21)
+ 0.0056 T0(x22) + -0.0044 T1(x22)
+ 0.1982 T0(x31) + -0.3661 T1(x31)
+ 0.1982 T0(x32) + -0.0989 T1(x32)

Ф5 (x1, x2, x3) = 0.2047 T0(x11) + -0.2105 T1(x11)
+ 0.2047 T0(x12) + -0.2595 T1(x12)
+ 0.0056 T0(x21) + -0.0070 T1(x21)
+ 0.0056 T0(x22) + -0.0044 T1(x22)
+ 0.1982 T0(x31) + -0.3661 T1(x31)
+ 0.1982 T0(x32) + -0.0989 T1(x32)

Нев'язка:
Ф1: 0.224875
Ф2: 0.224874
Ф3: 0.224874
Ф4: 0.224874
Ф5: 0.224874
Для Ф1 (x1, x2, x3):

```

Вхідні дані

Файл з вибіркою: ...

Вихідний файл:

Розмір вибірки:

Розмірності векторів

Розмірність X1:

Розмірність X2:

Розмірність X3:

Розмірність Y:

Поліноми

Вид поліномів

☒ Поліноми Чебишева

☐ Поліноми Лежандра

☐ Поліноми Лагерра

Степені поліномів

P1:

P2:

P3:

Додатково

Ваги цільових функцій

☒ Нормовані Vi

☐ (min(Vi) + max(Vi)) / 2

Метод визначення лямбд

☒ Одна система

☐ Три системи

Рисунок 3 — Проміжні та отримані результати наближення функцій (в програмі)

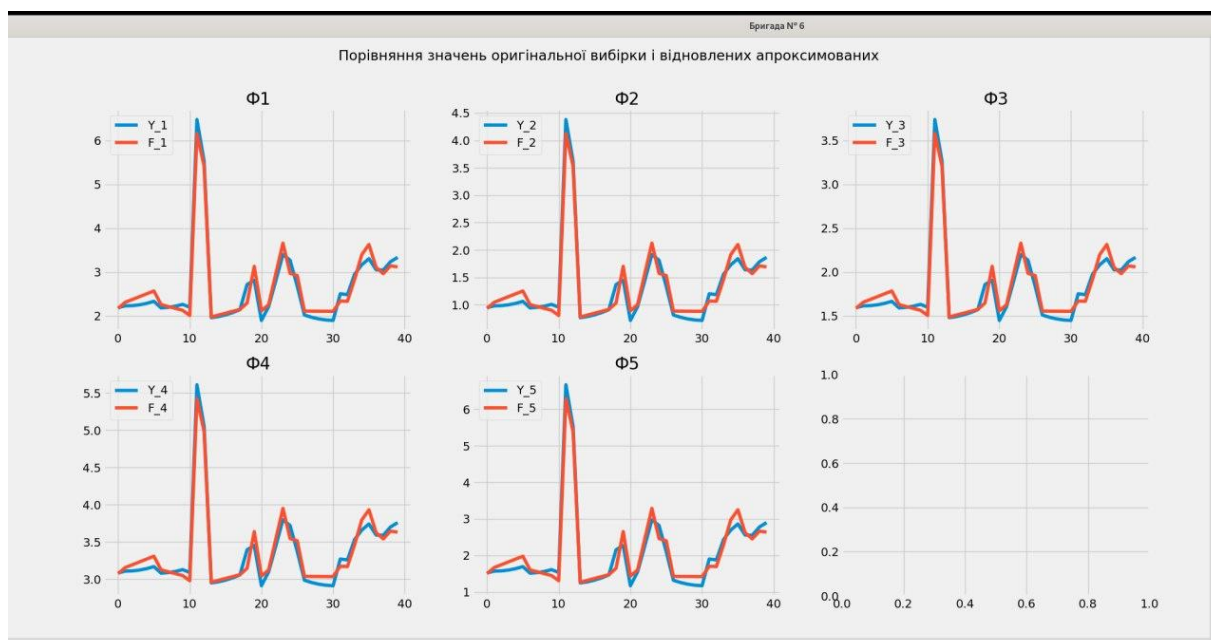


Рисунок 4 — Порівняння значень оригінальної та відновлених функцій

Отримані результати в текстовому вигляді:

Відновлені через поліноми функції:

$$\begin{aligned} \Phi 1 (x_1, x_2, x_3) = & 0.0671 T_0(x_{11}) + 0.1261 T_1(x_{11}) \\ & + 0.0733 T_0(x_{12}) + 0.2025 T_1(x_{12}) \\ & + 0.0326 T_0(x_{21}) + 0.0040 T_1(x_{21}) \\ & + 0.0175 T_0(x_{22}) + 0.0290 T_1(x_{22}) \\ & + 0.0501 T_0(x_{31}) + 0.1954 T_1(x_{31}) \\ & + 0.1329 T_0(x_{32}) + 0.1173 T_1(x_{32}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi 2 (x_1, x_2, x_3) = & 0.0671 T_0(x_{11}) + 0.1261 T_1(x_{11}) \\ & + 0.0733 T_0(x_{12}) + 0.2025 T_1(x_{12}) \\ & + 0.0326 T_0(x_{21}) + 0.0040 T_1(x_{21}) \\ & + 0.0175 T_0(x_{22}) + 0.0290 T_1(x_{22}) \\ & + 0.0501 T_0(x_{31}) + 0.1954 T_1(x_{31}) \\ & + 0.1329 T_0(x_{32}) + 0.1173 T_1(x_{32}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi 3 (x_1, x_2, x_3) = & 0.0671 T_0(x_{11}) + 0.1261 T_1(x_{11}) \\ & + 0.0733 T_0(x_{12}) + 0.2025 T_1(x_{12}) \\ & + 0.0326 T_0(x_{21}) + 0.0040 T_1(x_{21}) \\ & + 0.0175 T_0(x_{22}) + 0.0290 T_1(x_{22}) \\ & + 0.0501 T_0(x_{31}) + 0.1954 T_1(x_{31}) \\ & + 0.1329 T_0(x_{32}) + 0.1173 T_1(x_{32}) \end{aligned}$$

$$\Phi 4 (x_1, x_2, x_3) = 0.0671 T_0(x_{11}) + 0.1261 T_1(x_{11})$$

$$\begin{aligned}
& + 0.0733 T_0(x_{12}) + 0.2025 T_1(x_{12}) \\
& + 0.0326 T_0(x_{21}) + 0.0040 T_1(x_{21}) \\
& + 0.0175 T_0(x_{22}) + 0.0290 T_1(x_{22}) \\
& + 0.0501 T_0(x_{31}) + 0.1954 T_1(x_{31}) \\
& + 0.1329 T_0(x_{32}) + 0.1173 T_1(x_{32})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_5(x_1, x_2, x_3) = & 0.0671 T_0(x_{11}) + 0.1261 T_1(x_{11}) \\
& + 0.0733 T_0(x_{12}) + 0.2025 T_1(x_{12}) \\
& + 0.0326 T_0(x_{21}) + 0.0040 T_1(x_{21}) \\
& + 0.0175 T_0(x_{22}) + 0.0290 T_1(x_{22}) \\
& + 0.0501 T_0(x_{31}) + 0.1954 T_1(x_{31}) \\
& + 0.1329 T_0(x_{32}) + 0.1173 T_1(x_{32})
\end{aligned}$$

Нев'язка:

$\Phi_1: 0.092153$

$\Phi_2: 0.092153$

$\Phi_3: 0.092153$

$\Phi_4: 0.092153$

$\Phi_5: 0.092153$

4.1.2.

Параметри:

- Поліном Чебишева
- Степені поліномів: $P_j = \{3, 3, 3\}$
- Метод визначення лямбд– одна система

Отримані результати та графіки зображено на рис. 5-6.

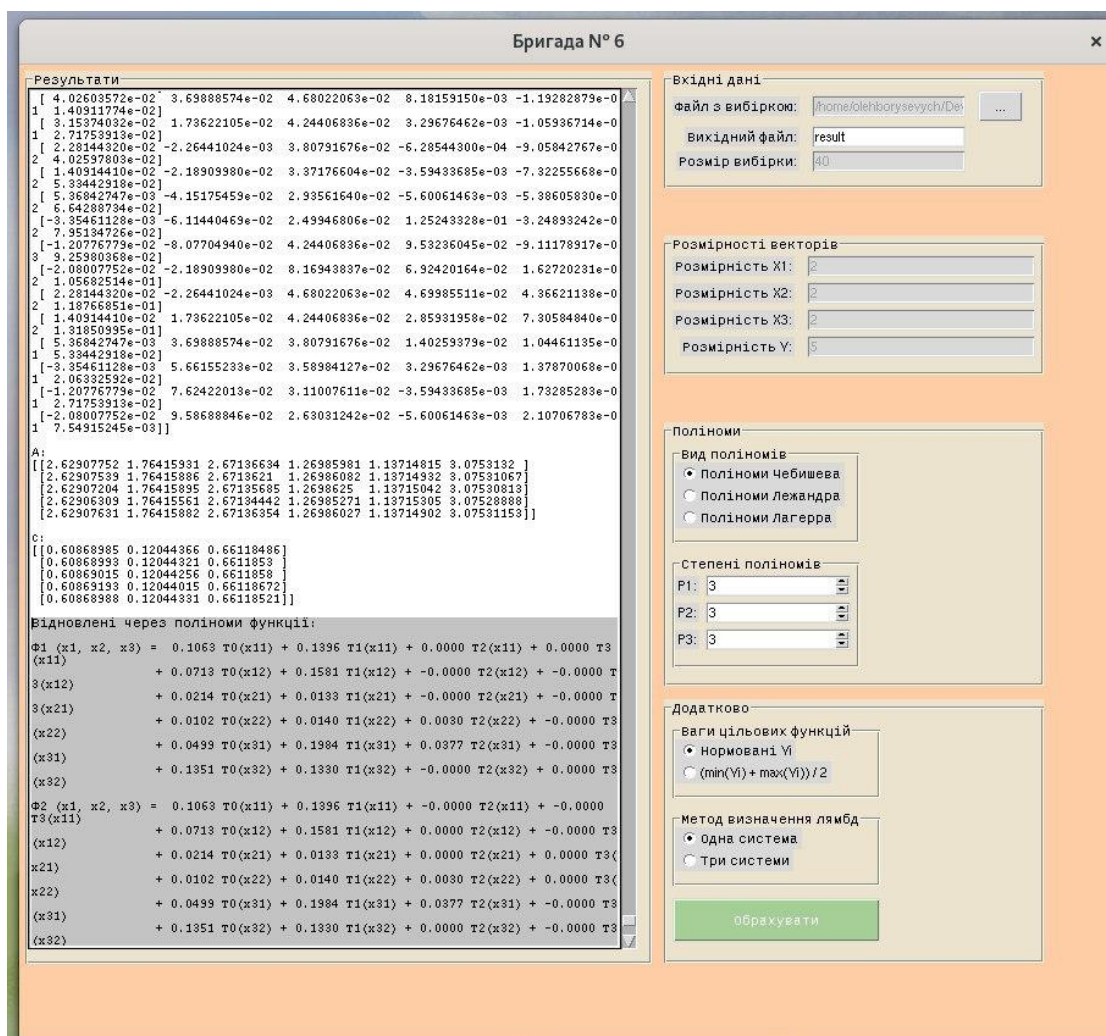


Рисунок 5 — Проміжні та отримані результати наближення функцій

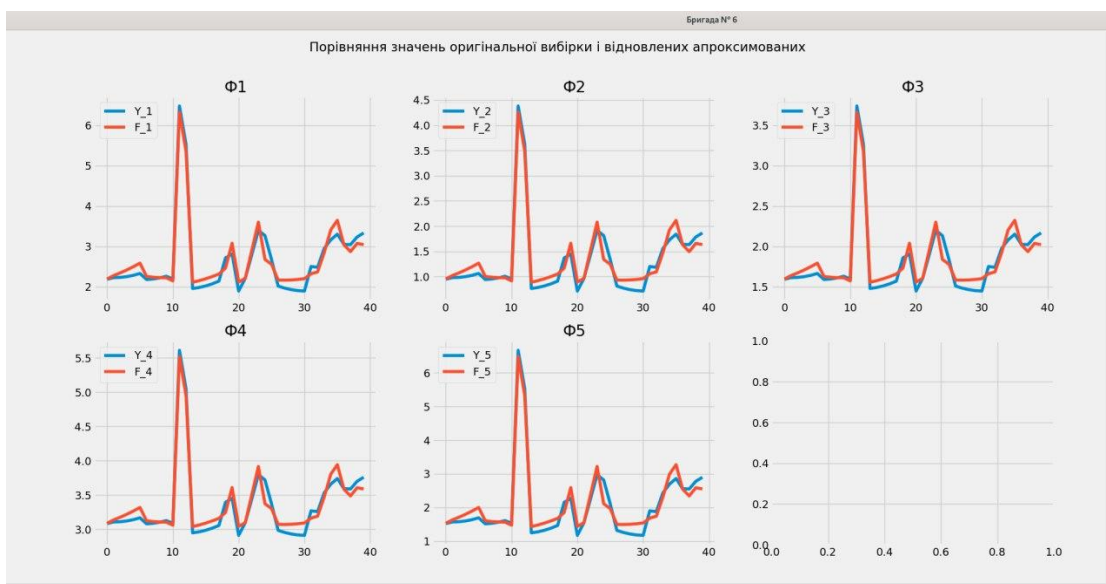


Рисунок 6 — Порівняння значень оригінальної та відновлених функцій

Отримані результати в текстовому вигляді:

Відновлені через поліноми функції:

$$\Phi_1(x_1, x_2, x_3) = 0.1063 T_0(x_{11}) + 0.1396 T_1(x_{11}) + 0.0000 T_2(x_{11}) + 0.0000 T_3(x_{11})$$

$$\begin{aligned} &+ 0.0713 T_0(x_{12}) + 0.1581 T_1(x_{12}) + -0.0000 T_2(x_{12}) + -0.0000 T_3(x_{12}) \\ &+ 0.0214 T_0(x_{21}) + 0.0133 T_1(x_{21}) + -0.0000 T_2(x_{21}) + -0.0000 T_3(x_{21}) \\ &+ 0.0102 T_0(x_{22}) + 0.0140 T_1(x_{22}) + 0.0030 T_2(x_{22}) + -0.0000 T_3(x_{22}) \\ &+ 0.0499 T_0(x_{31}) + 0.1984 T_1(x_{31}) + 0.0377 T_2(x_{31}) + -0.0000 T_3(x_{31}) \\ &+ 0.1351 T_0(x_{32}) + 0.1330 T_1(x_{32}) + -0.0000 T_2(x_{32}) + 0.0000 T_3(x_{32}) \end{aligned}$$

$$\Phi_2(x_1, x_2, x_3) = 0.1063 T_0(x_{11}) + 0.1396 T_1(x_{11}) + -0.0000 T_2(x_{11}) + -0.0000 T_3(x_{11})$$

$$\begin{aligned} &+ 0.0713 T_0(x_{12}) + 0.1581 T_1(x_{12}) + 0.0000 T_2(x_{12}) + -0.0000 T_3(x_{12}) \\ &+ 0.0214 T_0(x_{21}) + 0.0133 T_1(x_{21}) + 0.0000 T_2(x_{21}) + 0.0000 T_3(x_{21}) \\ &+ 0.0102 T_0(x_{22}) + 0.0140 T_1(x_{22}) + 0.0030 T_2(x_{22}) + 0.0000 T_3(x_{22}) \\ &+ 0.0499 T_0(x_{31}) + 0.1984 T_1(x_{31}) + 0.0377 T_2(x_{31}) + -0.0000 T_3(x_{31}) \\ &+ 0.1351 T_0(x_{32}) + 0.1330 T_1(x_{32}) + 0.0000 T_2(x_{32}) + -0.0000 T_3(x_{32}) \end{aligned}$$

$$\Phi_3(x_1, x_2, x_3) = 0.1063 T_0(x_{11}) + 0.1396 T_1(x_{11}) + -0.0000 T_2(x_{11}) + -0.0000 T_3(x_{11})$$

$$\begin{aligned} &+ 0.0713 T_0(x_{12}) + 0.1581 T_1(x_{12}) + 0.0000 T_2(x_{12}) + 0.0000 T_3(x_{12}) \\ &+ 0.0214 T_0(x_{21}) + 0.0133 T_1(x_{21}) + 0.0000 T_2(x_{21}) + 0.0000 T_3(x_{21}) \\ &+ 0.0102 T_0(x_{22}) + 0.0140 T_1(x_{22}) + 0.0030 T_2(x_{22}) + 0.0000 T_3(x_{22}) \\ &+ 0.0499 T_0(x_{31}) + 0.1984 T_1(x_{31}) + 0.0377 T_2(x_{31}) + 0.0000 T_3(x_{31}) \\ &+ 0.1351 T_0(x_{32}) + 0.1330 T_1(x_{32}) + 0.0000 T_2(x_{32}) + -0.0000 T_3(x_{32}) \end{aligned}$$

$$\Phi_4(x_1, x_2, x_3) = 0.1063 T_0(x_{11}) + 0.1396 T_1(x_{11}) + 0.0000 T_2(x_{11}) + 0.0000 T_3(x_{11})$$

$$\begin{aligned} &+ 0.0713 T_0(x_{12}) + 0.1581 T_1(x_{12}) + 0.0000 T_2(x_{12}) + -0.0000 T_3(x_{12}) \\ &+ 0.0214 T_0(x_{21}) + 0.0133 T_1(x_{21}) + 0.0000 T_2(x_{21}) + -0.0000 T_3(x_{21}) \\ &+ 0.0102 T_0(x_{22}) + 0.0140 T_1(x_{22}) + 0.0030 T_2(x_{22}) + -0.0000 T_3(x_{22}) \\ &+ 0.0499 T_0(x_{31}) + 0.1984 T_1(x_{31}) + 0.0377 T_2(x_{31}) + -0.0000 T_3(x_{31}) \\ &+ 0.1351 T_0(x_{32}) + 0.1330 T_1(x_{32}) + -0.0000 T_2(x_{32}) + 0.0000 T_3(x_{32}) \end{aligned}$$

$$\Phi_5(x_1, x_2, x_3) = 0.1063 T_0(x_{11}) + 0.1396 T_1(x_{11}) + -0.0000 T_2(x_{11}) + 0.0000 T_3(x_{11})$$

$$+ 0.0713 T_0(x_{12}) + 0.1581 T_1(x_{12}) + 0.0000 T_2(x_{12}) + -0.0000 T_3(x_{12})$$

$$\begin{aligned}
& + 0.0214 T_0(x_{21}) + 0.0133 T_1(x_{21}) + -0.0000 T_2(x_{21}) + -0.0000 T_3(x_{21}) \\
& + 0.0102 T_0(x_{22}) + 0.0140 T_1(x_{22}) + 0.0030 T_2(x_{22}) + 0.0000 T_3(x_{22}) \\
& + 0.0499 T_0(x_{31}) + 0.1984 T_1(x_{31}) + 0.0377 T_2(x_{31}) + 0.0000 T_3(x_{31}) \\
& + 0.1351 T_0(x_{32}) + 0.1330 T_1(x_{32}) + 0.0000 T_2(x_{32}) + -0.0000 T_3(x_{32})
\end{aligned}$$

Нев'язка:

Φ_1 : 0.128563

Φ_2 : 0.128563

Φ_3 : 0.128565

Φ_4 : 0.128564

Φ_5 : 0.128563

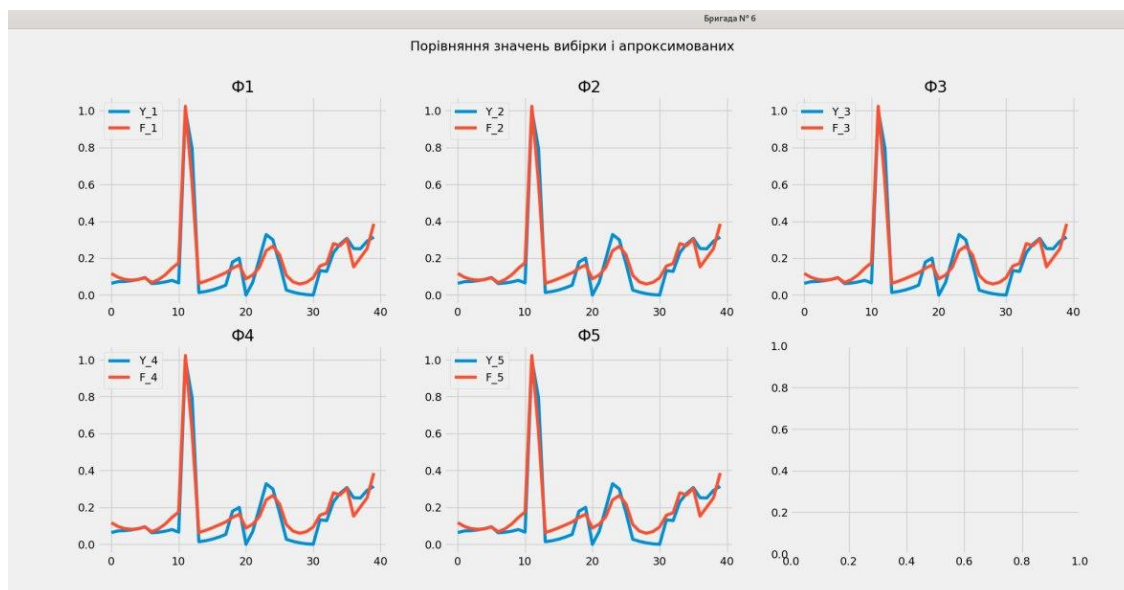
4.2. Порівняємо роботу 3-х видів поліномів на даній вибірці для ступенів поліномів рівному 1, результати показано в табл. 1.

Таблиця 1. Порівняння роботи видів поліномів

Поліном	Нев'язка				
	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5
Чебишева	0.092153	0.092153	0.092153	0.092153	0.092153
Графік					
<div> <div>Бригада № 6</div> <div>Порівняння значень вибірки і апроксимованих</div> <div> </div> </div>					

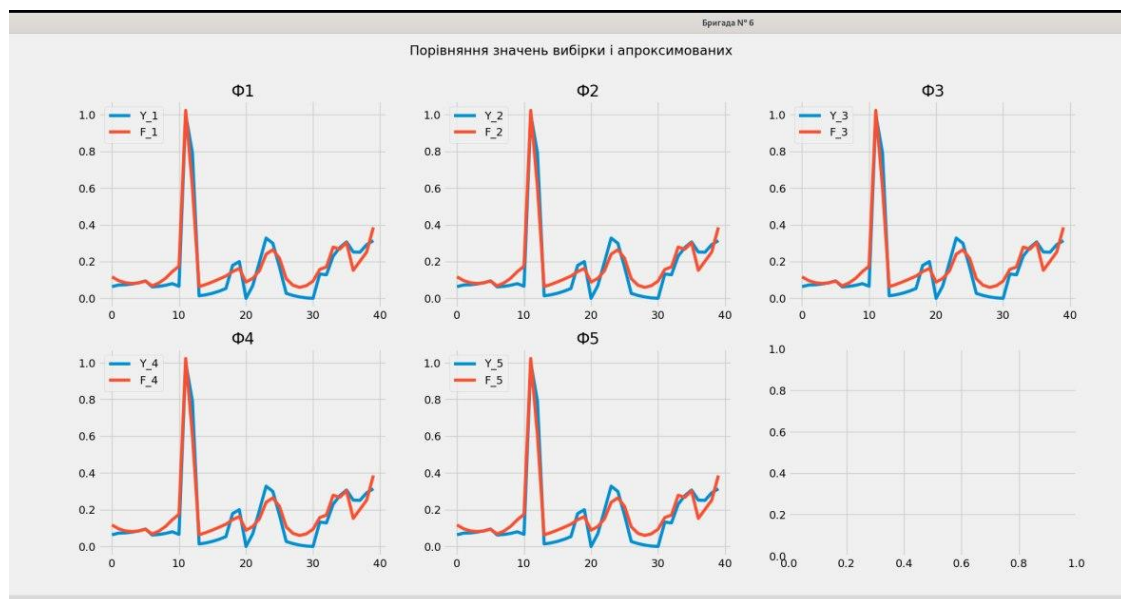
Лежандра	0.105315	0.105315	0.105314	0.105314	0.105315
----------	----------	----------	----------	----------	----------

Графік



Лаггера	0.105318	0.105316	0.105318	0.105316	0.105315
---------	----------	----------	----------	----------	----------

Графік



4.3. Розглянемо альтернативну вибірку

4.3.1.

Параметри:

- Поліном Чебишева
- Степені поліномів: $P_j = \{1, 1, 1\}$
- Метод визначення лямбд – одна система

Отримані результати та графіки зображено на рис. 7-8.

Бригада № 6

Результати

```

1  9.07746716e-02  5.34591064e-02]
1  [ 7.86898841e-01  2.42602459e-01 -7.39033582e-01  8.58488868e-02 -1.03633163e-0
1  7.32239109e-02  5.93412751e-02]
2  7.16107976e-01  2.54244294e-01 -7.10203455e-01  8.18153653e-02 -8.33159844e-0
2  6.63420250e-02  7.85320089e-02]
2  [ 6.32511021e-01  2.65886130e-01 -6.80208867e-01  7.77818439e-02 -7.39300665e-0
2  5.99838633e-02  9.51630238e-02]
2  [ 6.45317111e-01  2.71707048e-01 -6.14451501e-01  7.57650832e-02 -5.26736826e-0
2  5.22861613e-02  1.05863882e-01]
2  [ 5.50929231e-01  3.53020816e-01 -5.14084994e-01  4.55136725e-02 -2.43628602e-0
2  4.45884532e-02  1.26184101e-01]
2  [ 4.56541471e-01  3.88125405e-01 -3.84877537e-01  3.54298689e-02  1.72707021e-0
2  3.39540218e-02 -4.08558507e-01]]

A:
[[ 0.34757317  0.11785684 -0.45189048  0.72645498 -0.37379828  2.41264067 -1.124
48032]
 [ 0.40508639  0.0647945 -0.51736669  0.94425886 -1.28176584  3.23652916 -1.338
56493]
 [ 1.03742742 -0.29871654 -0.90645629  1.6345769 -3.35284369  4.54196914 -2.118
62338]
 [ 0.38261779  0.15268244 -0.55297959  0.86118083 -1.29714337  2.84019157 -1.152
10828]]

C:
[[ 0.8376469 -0.22565012  0.71491227]
 [ 0.44455191 -0.01150624  0.77321778]
 [-0.05941573  0.50077353  0.65672007]
 [ 0.6543798  0.07221138  0.49705034]]

Відновлені через поліноми функції:

Ф1 (x1, x2, x3) = 0.0051 t0(x11) + 0.0511 t1(x11)
+ 0.0432 t0(x12) + -0.0940 t1(x12)
+ 0.0049 t0(x21) + -0.0376 t1(x21)
+ 0.0208 t0(x22) + 0.1175 t1(x22)
+ 0.0746 t0(x31) + -0.5895 t1(x31)
+ 0.4374 t0(x32) + 0.4706 t1(x32)
+ 0.1443 t0(x33) + -0.5263 t1(x33)

Ф2 (x1, x2, x3) = -0.0004 t0(x11) + -0.0576 t1(x11)
+ 0.1388 t0(x12) + 0.3420 t1(x12)
+ 0.0085 t0(x21) + 0.3973 t1(x21)
+ 0.0130 t0(x22) + -0.2939 t1(x22)
+ 0.0008 t0(x31) + -0.1618 t1(x31)
+ 0.0084 t0(x32) + 0.0871 t1(x32)
+ 0.0408 t0(x33) + -0.1586 t1(x33)

Ф3 (x1, x2, x3) = -0.0022 t0(x11) + -0.9574 t1(x11)
+ 0.0052 t0(x12) + 0.2892 t1(x12)
+ -0.0053 t0(x21) + 1.2871 t1(x21)
+ -0.0363 t0(x22) + -0.8147 t1(x22)
+ -0.0023 t0(x31) + 0.7213 t1(x31)
+ -0.0127 t0(x32) + -0.8781 t1(x32)
+ -0.0084 t0(x33) + 0.7500 t1(x33)

Ф4 (x1, x2, x3) = 0.0316 t0(x11) + 0.2221 t1(x11)
+ 0.0126 t0(x12) + 0.1140 t1(x12)
+ -0.0050 t0(x21) + 0.0507 t1(x21)
+ 0.0078 t0(x22) + -0.0432 t1(x22)
+ -0.0814 t0(x31) + 0.1834 t1(x31)
+ 0.1781 t0(x32) + -0.4347 t1(x32)
+ -0.0723 t0(x33) + 0.3062 t1(x33)

Нев'язка:
Ф1: 0.496179
Ф2: 0.784878
Ф3: 0.539821
Ф4: 0.877544

```

Вхідні дані

Файл з вибіркою: ...

Вихідний файл:

Розмір вибірки:

Розмірності векторів

Розмірність X1:

Розмірність X2:

Розмірність X3:

Розмірність Y:

Поліноми

Вид поліномів

☐ Поліноми Чебишева

☐ Поліноми Лежандра

☒ Поліноми Лагерра

Степені поліномів

P1:

P2:

P3:

Додатково

Ваги цільових функцій

☒ Нормовані Yj

☐ (min(Yj) + max(Yj)) / 2

Метод визначення лямбд

☒ Одна система

☐ Три системи

Рисунок 7 — Проміжні та отримані результати наближення функцій

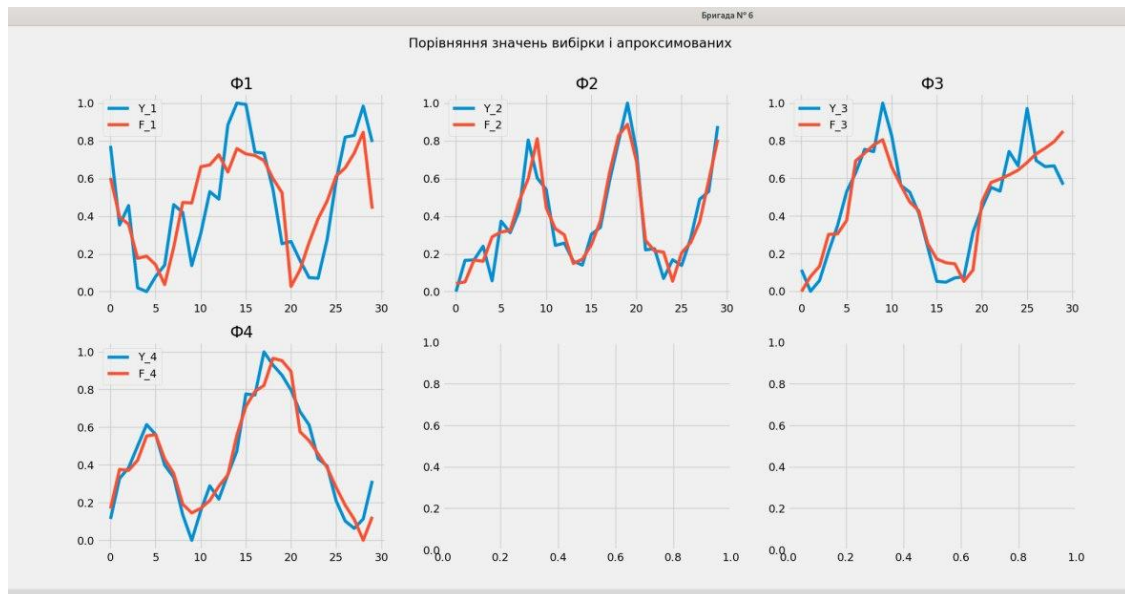


Рисунок 8 — Порівняння значень оригінальної та відновлених функцій

Отримані результати в текстовому вигляді:

Відновлені через поліноми функції:

$$\Phi_1(x_1, x_2, x_3) = -3.2751 T_0(x_{11}) + -26.8445 T_1(x_{11}) + 16.1637 T_2(x_{11}) + -2.1997 T_3(x_{11})$$

$$\begin{aligned} &+ -3.2751 T_0(x_{12}) + 51.1419 T_1(x_{12}) + -31.1158 T_2(x_{12}) + 4.2554 T_3(x_{12}) \\ &+ 0.4445 T_0(x_{21}) + 0.4447 T_1(x_{21}) + -0.2285 T_2(x_{21}) + 0.0257 T_3(x_{21}) \\ &+ 0.4445 T_0(x_{22}) + -3.7947 T_1(x_{22}) + 2.3303 T_2(x_{22}) + -0.3215 T_3(x_{22}) \\ &+ -7.3408 T_0(x_{31}) + 43.4820 T_1(x_{31}) + -24.8491 T_2(x_{31}) + 3.0820 T_3(x_{31}) \\ &+ -7.3409 T_0(x_{32}) + 42.1149 T_1(x_{32}) + -25.8109 T_2(x_{32}) + 3.5680 T_3(x_{32}) \\ &+ -7.3408 T_0(x_{33}) + -7.5738 T_1(x_{33}) + 5.0638 T_2(x_{33}) + -0.8090 T_3(x_{33}) \end{aligned}$$

$$\Phi_2(x_1, x_2, x_3) = -0.7899 T_0(x_{11}) + 16.4356 T_1(x_{11}) + -9.5478 T_2(x_{11}) + 1.2201 T_3(x_{11})$$

$$\begin{aligned} &+ -0.7899 T_0(x_{12}) + -10.5385 T_1(x_{12}) + 5.9069 T_2(x_{12}) + -0.7207 T_3(x_{12}) \\ &+ -0.1130 T_0(x_{21}) + -7.8309 T_1(x_{21}) + 4.5944 T_2(x_{21}) + -0.5989 T_3(x_{21}) \\ &+ -0.1130 T_0(x_{22}) + 8.6901 T_1(x_{22}) + -5.2398 T_2(x_{22}) + 0.7061 T_3(x_{22}) \\ &+ -0.0367 T_0(x_{31}) + 103.1771 T_1(x_{31}) + -60.8162 T_2(x_{31}) + 7.8680 T_3(x_{31}) \\ &+ -0.0367 T_0(x_{32}) + -145.9265 T_1(x_{32}) + 85.4182 T_2(x_{32}) + -11.0586 T_3(x_{32}) \\ &+ -0.0367 T_0(x_{33}) + 49.7175 T_1(x_{33}) + -32.0182 T_2(x_{33}) + 4.5952 T_3(x_{33}) \end{aligned}$$

$$\Phi_3(x_1, x_2, x_3) = -1.2141 T_0(x_{11}) + 5.8297 T_1(x_{11}) + -3.3388 T_2(x_{11}) + 0.4267 T_3(x_{11})$$

$$\begin{aligned}
& + -1.2141 T_0(x_{12}) + 2.6948 T_1(x_{12}) + -1.5304 T_2(x_{12}) + 0.1839 T_3(x_{12}) \\
& + 4.2844 T_0(x_{21}) + -2.6433 T_1(x_{21}) + 1.5628 T_2(x_{21}) + -0.2172 T_3(x_{21}) \\
& + 4.2844 T_0(x_{22}) + -28.0461 T_1(x_{22}) + 16.9869 T_2(x_{22}) + -2.2833 T_3(x_{22}) \\
& + 2.5265 T_0(x_{31}) + -17.4725 T_1(x_{31}) + 10.6884 T_2(x_{31}) + -1.4014 T_3(x_{31}) \\
& + 2.5265 T_0(x_{32}) + 28.2988 T_1(x_{32}) + -15.6242 T_2(x_{32}) + 1.7975 T_3(x_{32}) \\
& + 2.5265 T_0(x_{33}) + -37.1769 T_1(x_{33}) + 21.2067 T_2(x_{33}) + -2.6262 T_3(x_{33})
\end{aligned}$$

$$\Phi_4 (x_1, x_2, x_3) = 2.0384 T_0(x_{11}) + -1.0580 T_1(x_{11}) + 0.4781 T_2(x_{11}) + -0.0409 T_3(x_{11})$$

$$\begin{aligned}
& + 2.0384 T_0(x_{12}) + -12.9291 T_1(x_{12}) + 7.6297 T_2(x_{12}) + -1.0017 T_3(x_{12}) \\
& + -1.3819 T_0(x_{21}) + -0.3292 T_1(x_{21}) + 0.2017 T_2(x_{21}) + -0.0258 T_3(x_{21}) \\
& + -1.3819 T_0(x_{22}) + 10.1590 T_1(x_{22}) + -6.1496 T_2(x_{22}) + 0.8308 T_3(x_{22}) \\
& + 6.7639 T_0(x_{31}) + -13.0323 T_1(x_{31}) + 7.9528 T_2(x_{31}) + -1.1259 T_3(x_{31}) \\
& + 6.7638 T_0(x_{32}) + -111.2939 T_1(x_{32}) + 65.6579 T_2(x_{32}) + -8.6435 T_3(x_{32}) \\
& + 6.7638 T_0(x_{33}) + 52.8951 T_1(x_{33}) + -30.3601 T_2(x_{33}) + 3.8258 T_3(x_{33})
\end{aligned}$$

Нев'язка:

Φ_1 : 0.288158

Φ_2 : 0.239040

Φ_3 : 0.368872

Φ_4 : 0.198913

4.3.2.

Параметри:

- Поліном Чебишева
- Степені поліномів: $P_j = \{3, 3, 3\}$.
- Метод визначення лямбд – три системи

Отримані результати та графіки зображено на рис. 9-10.

Бригада № 6

Результати

```
[ 0.13445545 -0.03546172 0.91040494]]
```

Відновлені через поліноми функції:

$\Phi_1(x_1, x_2, x_3) = -3.2751 T_0(x_{11}) + -26.8445 T_1(x_{11}) + 16.1637 T_2(x_{11}) + -2.1937 T_3(x_{11}) + -3.2751 T_0(x_{12}) + 51.1419 T_1(x_{12}) + -31.1158 T_2(x_{12}) + 4.2554 T_3(x_{12}) + 0.4445 T_0(x_{21}) + 0.4447 T_1(x_{21}) + -0.2285 T_2(x_{21}) + 0.0257 T_3(x_{21}) + 0.4445 T_0(x_{22}) + -3.7947 T_1(x_{22}) + 2.3303 T_2(x_{22}) + -0.3215 T_3(x_{22}) + -7.3408 T_0(x_{31}) + 43.4820 T_1(x_{31}) + -24.8491 T_2(x_{31}) + 3.0820 T_3(x_{31}) + -7.3409 T_0(x_{32}) + 42.1149 T_1(x_{32}) + -25.8109 T_2(x_{32}) + 3.5680 T_3(x_{32}) + -7.3408 T_0(x_{33}) + -7.5738 T_1(x_{33}) + 5.0638 T_2(x_{33}) + -0.8090 T_3(x_{33})$

$\Phi_2(x_1, x_2, x_3) = -0.7899 T_0(x_{11}) + 16.4356 T_1(x_{11}) + -9.5478 T_2(x_{11}) + 1.2201 T_3(x_{11}) + -0.7899 T_0(x_{12}) + -10.5385 T_1(x_{12}) + 5.9069 T_2(x_{12}) + -0.7207 T_3(x_{12}) + -0.1130 T_0(x_{21}) + -7.8309 T_1(x_{21}) + 4.5944 T_2(x_{21}) + -0.5989 T_3(x_{21}) + -0.1130 T_0(x_{22}) + 8.6901 T_1(x_{22}) + -5.2398 T_2(x_{22}) + 0.7061 T_3(x_{22}) + -0.0367 T_0(x_{31}) + 103.1771 T_1(x_{31}) + -60.8162 T_2(x_{31}) + 7.8680 T_3(x_{31}) + -0.0367 T_0(x_{32}) + -145.9265 T_1(x_{32}) + 85.4182 T_2(x_{32}) + -11.0586 T_3(x_{32}) + -0.0367 T_0(x_{33}) + 49.7175 T_1(x_{33}) + -32.0182 T_2(x_{33}) + 4.5952 T_3(x_{33})$

$\Phi_3(x_1, x_2, x_3) = -1.2141 T_0(x_{11}) + 5.8297 T_1(x_{11}) + -3.3388 T_2(x_{11}) + 0.4267 T_3(x_{11}) + -1.2141 T_0(x_{12}) + 2.6948 T_1(x_{12}) + -1.5304 T_2(x_{12}) + 0.1839 T_3(x_{12}) + 4.2844 T_0(x_{21}) + -2.6433 T_1(x_{21}) + 1.5628 T_2(x_{21}) + -0.2172 T_3(x_{21}) + 4.2844 T_0(x_{22}) + -28.0461 T_1(x_{22}) + 16.9869 T_2(x_{22}) + -2.2833 T_3(x_{22}) + 2.5265 T_0(x_{31}) + -17.4725 T_1(x_{31}) + 10.6884 T_2(x_{31}) + -1.4014 T_3(x_{31}) + 2.5265 T_0(x_{32}) + 28.2988 T_1(x_{32}) + -15.6242 T_2(x_{32}) + 1.7975 T_3(x_{32}) + 2.5265 T_0(x_{33}) + -37.1769 T_1(x_{33}) + 21.2067 T_2(x_{33}) + -2.6262 T_3(x_{33})$

$\Phi_4(x_1, x_2, x_3) = 2.0384 T_0(x_{11}) + -1.0580 T_1(x_{11}) + 0.4781 T_2(x_{11}) + -0.0409 T_3(x_{11}) + 2.0384 T_0(x_{12}) + -12.9291 T_1(x_{12}) + 7.6297 T_2(x_{12}) + -1.0017 T_3(x_{12}) + -1.3819 T_0(x_{21}) + -0.3292 T_1(x_{21}) + 0.2017 T_2(x_{21}) + -0.0258 T_3(x_{21}) + -1.3819 T_0(x_{22}) + 10.1590 T_1(x_{22}) + -6.1496 T_2(x_{22}) + 0.8308 T_3(x_{22}) + 6.7639 T_0(x_{31}) + -13.0323 T_1(x_{31}) + 7.9528 T_2(x_{31}) + -1.1259 T_3(x_{31}) + 6.7638 T_0(x_{32}) + -111.2939 T_1(x_{32}) + 65.6579 T_2(x_{32}) + -8.6435 T_3(x_{32}) + 6.7638 T_0(x_{33}) + 52.8951 T_1(x_{33}) + -30.3601 T_2(x_{33}) + 3.8258 T_3(x_{33})$

Нев'язка:
 $\Phi_1: 0.288158$
 $\Phi_2: 0.239040$
 $\Phi_3: 0.368872$
 $\Phi_4: 0.198913$

Вхідні дані

Файл з вибіркою:

Вихідний файл:

Розмір вибірки:

Розмірності векторів

Розмірність X1:

Розмірність X2:

Розмірність X3:

Розмірність Y:

Поліноми

Вид поліномів

☐ Поліноми Чебишева

☐ Поліноми Лежандра

☒ Поліноми Лагерра

Степені поліномів

P1:

P2:

P3:

Додатково

Ваги цільових функцій

☒ Нормовані Y_i

☐ $(\min(Y_i) + \max(Y_i)) / 2$

Метод визначення лямбд

☐ Одна система

☒ Три системи

Рисунок 9 — Проміжні та отримані результати наближення функцій

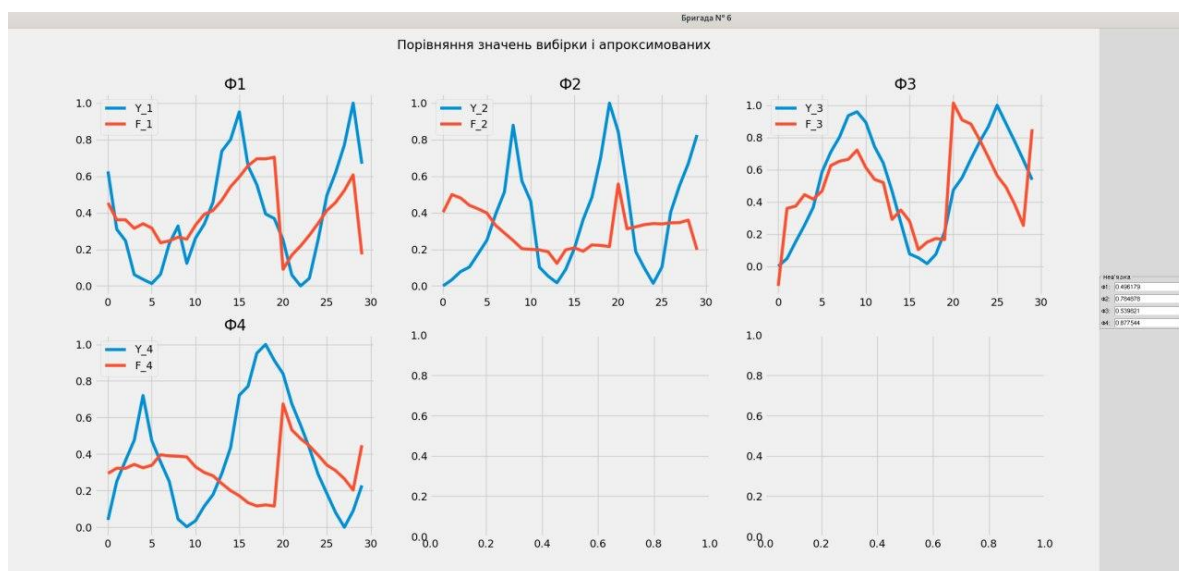


Рисунок 10 — Порівняння значень оригінальної та відновлених функцій

Отримані результати в текстовому вигляді:

Відновлені через поліноми функції:

$$\begin{aligned}\Phi_1(x_1, x_2, x_3) = & 0.0051 T_0(x_{11}) + 0.0511 T_1(x_{11}) \\ & + 0.0492 T_0(x_{12}) + -0.0940 T_1(x_{12}) \\ & + 0.0049 T_0(x_{21}) + -0.0376 T_1(x_{21}) \\ & + 0.0208 T_0(x_{22}) + 0.1175 T_1(x_{22}) \\ & + 0.0746 T_0(x_{31}) + -0.5895 T_1(x_{31}) \\ & + 0.4974 T_0(x_{32}) + 0.4706 T_1(x_{32}) \\ & + 0.1443 T_0(x_{33}) + -0.5269 T_1(x_{33})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(x_1, x_2, x_3) = & -0.0004 T_0(x_{11}) + -0.0576 T_1(x_{11}) \\ & + 0.1388 T_0(x_{12}) + 0.3420 T_1(x_{12}) \\ & + 0.0085 T_0(x_{21}) + 0.3973 T_1(x_{21}) \\ & + 0.0130 T_0(x_{22}) + -0.2939 T_1(x_{22}) \\ & + 0.0008 T_0(x_{31}) + -0.1618 T_1(x_{31}) \\ & + 0.0084 T_0(x_{32}) + 0.0871 T_1(x_{32}) \\ & + 0.0408 T_0(x_{33}) + -0.1586 T_1(x_{33})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_3(x_1, x_2, x_3) = & -0.0022 T_0(x_{11}) + -0.9574 T_1(x_{11}) \\ & + 0.0052 T_0(x_{12}) + 0.2892 T_1(x_{12}) \\ & + -0.0053 T_0(x_{21}) + 1.2871 T_1(x_{21}) \\ & + -0.0363 T_0(x_{22}) + -0.8147 T_1(x_{22}) \\ & + -0.0023 T_0(x_{31}) + 0.7213 T_1(x_{31}) \\ & + -0.0127 T_0(x_{32}) + -0.8781 T_1(x_{32}) \\ & + -0.0084 T_0(x_{33}) + 0.7500 T_1(x_{33})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_4(x_1, x_2, x_3) = & 0.0316 T_0(x_{11}) + 0.2221 T_1(x_{11}) \\ & + 0.0126 T_0(x_{12}) + 0.1140 T_1(x_{12}) \\ & + -0.0050 T_0(x_{21}) + 0.0507 T_1(x_{21}) \\ & + 0.0078 T_0(x_{22}) + -0.0492 T_1(x_{22}) \\ & + -0.0814 T_0(x_{31}) + 0.1834 T_1(x_{31}) \\ & + 0.1781 T_0(x_{32}) + -0.4347 T_1(x_{32}) \\ & + -0.0723 T_0(x_{33}) + 0.3062 T_1(x_{33})\end{aligned}$$

Нев'язка:

Φ_1 : 0.496179

Φ_2 : 0.784878

Φ_3 : 0.539821

Φ_4 : 0.877544

Висновки

Під час виконання лабораторної роботи ми успішно навчилися відтворювати функціональні залежності в адитивній формі на основі заданих дискретних вибірок. Для реалізації цієї задачі ми використали інструментарій мови програмування Python та бібліотеки для обробки та візуалізації даних, зокрема NumPy, Matplotlib, SciPy, Pandas та Tkinter.

Отримавши та проаналізувавши результати, ми дійшли до висновку, що ефективність та точність апроксимації суттєво залежить від вибору степенів поліномів та меншою мірою від їхніх видів та методів отримання. Найкращі результати були отримані для поліномів 3-го ступеню.

Також була проведена візуальна та аналітична оцінка похибки відтворення, і результати виявились досить точними. Щодо факторів, що впливають на кращу точність - це насамперед обрана дискретна вибірка та зв'язок даних у ній.

Список використаних джерел

1. Монографія «Системный анализ: Методология. Проблемы. Приложения», авторы М. З. Згуровський, Н. Д. Панкратова 2-е издание, переработаное и дополненное (Київ, вид-во «Наукова думка»).
2. Joseph Valacich, Joey George, Jeffrey Hoffer (Author) (2019). "Modern Systems Analysis and Design," 9th Edition.
3. Tan, H. B. K., & Ling, T. W. (2002). Exploring Programs for the Recovery of Data Dependencies. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 14(4), 825-835.
4. Etesami, J., & Kiyavash, N. (Publisher: IEEE). Measuring Causal Relationships in Dynamical Systems through Recovery of Functional Dependencies.
5. Elijah Polak (1997). Optimization: Algorithms and Consistent Approximations. Springer-Verlag.
6. Chong, Edwin K. P.; Żak, Stanislaw H. (2013). "Gradient Methods". An Introduction to Optimization (Fourth ed.). Hoboken: Wiley. pp. 131–160.
7. Eli Bressert (2012). SciPy and NumPy. O'Reilly Media, Inc.
8. Python documentation. (n.d.). Retrieved from <https://docs.python.org>