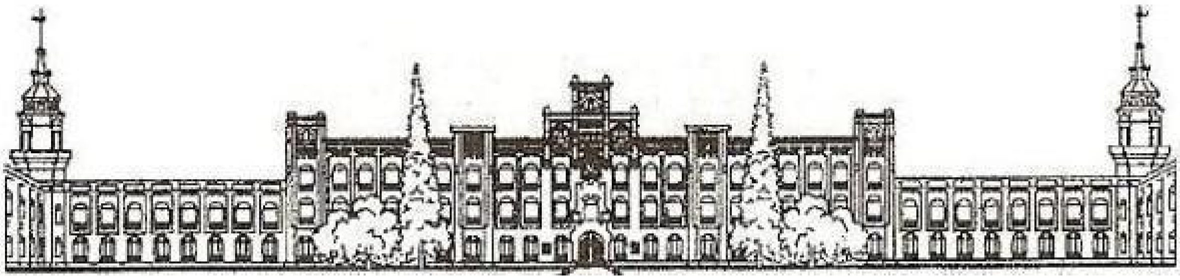


Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Інститут прикладного системного аналізу

Лабораторна робота №2
з дисципліни «Основи системного аналізу» на тему:
"Відтворення функціональних залежностей у задачах розкриття концептуальної невизначеності"
Варіант № 6

Виконали:

студенти групи КА-04

Борисевич О. І.

Михайленко Б. А.

Штріккер Д. Я.

Перевірила:

Панкратова Н. Д.

Київ 2023

Мета роботи: освоїти теоретичний матеріал по темі, розробити програму по відтворенню функціональних залежностей в адитивній формі за заданою дискретною вибіркою.

1. Опис та теоретичні відомості

Математична постановка задачі:

Відома вихідна інформація у вигляді дискретного масиву:

$\mathrm{M_0} = \langle \mathrm{Y_0}; \mathrm{X_1}; \mathrm{X_2}; \mathrm{X_3}; \rangle$,

$\mathrm{Y_0} = (\mathrm{Y_i} | \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{m}}); \mathrm{Y_i} = (\mathrm{Y_i}[\mathrm{q_0}] | \mathrm{q_0} = \overline{1, \mathrm{Q}})$,

$\mathrm{X_1} = (\mathrm{X_{1j_1}} | \mathrm{j_1} = \overline{1, \mathrm{n_1}}); \mathrm{X_{1j_1}} = (\mathrm{X_{1j_1}}[\mathrm{q_0}]\ \mathrm{q_1} = \overline{1, \mathrm{k_1}})$,

$\mathrm{X_2} = (\mathrm{X_{2j_2}} | \mathrm{j_2} = \overline{1, \mathrm{n_2}}); \mathrm{X_{2j_2}} = (\mathrm{X_{2j_2}}[\mathrm{q_0}]\ \mathrm{q_2} = \overline{1, \mathrm{k_2}})$,

$\mathrm{X_3} = (\mathrm{X_{3j_3}} | \mathrm{j_3} = \overline{1, \mathrm{n_3}}); \mathrm{X_{3j_3}} = (\mathrm{X_{3j_3}}[\mathrm{q_0}]\ \mathrm{q_3} = \overline{1, \mathrm{k_3}})$,

де множина Y_0 визначає числові значення $\mathrm{Y_i}[\mathrm{q_0}] = \langle \mathrm{X_{j1}}[q_1], \mathrm{X_{j2}}[q_2], \mathrm{X_{j3}}[q_3] \rangle$ шуканих неперервних цільових функцій

$y_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$, $\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{m}}$,

де $x_1 = (x_{1j_1} \mid j_1 = \overline{1, n_1})$,

$x_2 = (x_{2j_2} \mid j_2 = \overline{1, n_2})$,

$x_3 = (x_{3j_3} \mid j_3 = \overline{1, n_3})$

Потрібно знайти такі функції наближень $\Phi_i(x_1; x_2; x_3)$, $i = \overline{1, m}$, які з прийнятною похибкою характеризують реальні функціональні залежності $y_i = f_i(x_1; x_2; x_3)$, $i = \overline{1, m}$ на множині D_s.

Функції наближення будемо формувати у вигляді ієрархічної багаторівневої системи моделей (рис.1).

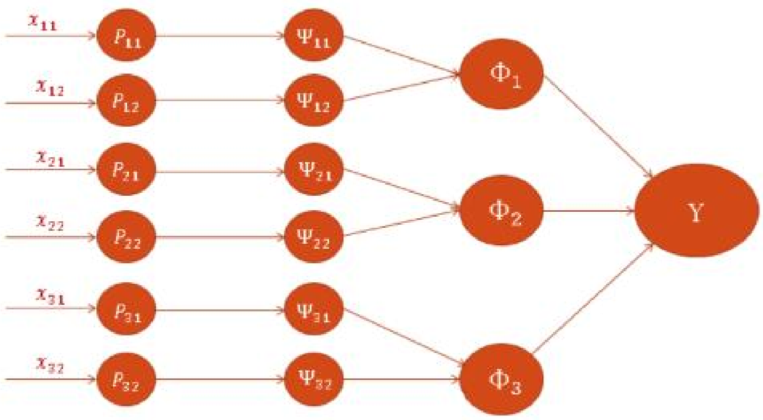


Рисунок 1 — Багаторівнева системи моделей

На верхньому ієрархічному рівні реалізовуємо модель, що визначає залежність функцій наближення від змінних x_1, x_2, x_3. Шукані функції формуємо у класі адитивних функції і подаємо у вигляді суперпозиції функцій від змінних x_1, x_2, x_3. Можливість такого подання випливає з теореми А. Н. Колмогорова.

Шукані функції формуватимемо в такому вигляді:

$$\Phi_i(x_1; x_2; x_3) = c_{i1}\Phi_{i1}(x_1) + c_{i2}\Phi_{i2}(x_2) + c_{i3}\Phi_{i3}(x_3),\ i\ =\ \overline{1,m}.$$

На другому ієрархічному рівні формуємо моделі, що визначають залежність функції наближення нарізно від компонентів змінних x_1, x_2, x_3. Для цього перейдемо від функції векторів до суперпозиції функції компонент цих векторів.З огляду на те, що компоненти кожного вектора різнорідні за фізичним змістом, доцільно для доданків функцій вибрати клас узагальнених поліномів і зобразити їх у вигляді:

$$\Phi_{is}(x_s) = \sum_{j_s=1}^{n_s} a_{ij_s}^{(s)} \Psi_{sj_s}(x_{sj_s}),\ s\ =\ \overline{1,3}$$

На третьому ієрархічному рівні формуються моделі, які визначають функції Ψ_{1j_1}, Ψ_{2j_2}, Ψ_{3j_3}. Структури функцій обираємо аналогічно до попереднього рівня. Зобразимо функції у вигляді наступних узагальнених поліномів:

$$\Psi_{sj_s}(x_{sj_s}) = \sum_{p=0}^{P_{j_s}} \lambda_{j_s p}\varphi_{j_s p}(x_{sj_s}),\ s\ =\ \overline{1,3}$$

Тоді находження функцій наближення повинно виконуватися на основі такої послідовності

$$\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3 \to \Phi_{i1}, \Phi_{i2}\Phi_{i2} \to \Phi_i$$

Задача формування функцій $\boldsymbol{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3}$ зводиться до чебишевської задачі наближення для наступної системи рівнянь:

$$F_{i1}(\widetilde{X}[q_0]) - b_0 = 0, q_0 = \overline{1, k_0}$$

$$F_{i1}(\widetilde{X}[q_0]) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{p_1=0}^{P_{j_1}} \lambda_{j_1 p_1} T_{p_1}^*(\widetilde{X}_{1j_1}[q_0]) + \sum_{j_2=1}^{n_2} \sum_{p_2=0}^{P_{j_2}} \lambda_{j_2 p_2} T_{p_2}^*(\widetilde{X}_{2j_2}[q_0]) +$$

$$+ \sum_{j_3=1}^{n_3} \sum_{p_3=0}^{P_{j_3}} \lambda_{j_3 p_3} T_{p_3}^*(\widetilde{X}_{3j_3}[q_0]);$$

$$\widetilde{X}[q_0] = (\widetilde{X}_{1j_1}[q_1], \widetilde{X}_{2j_2}[q_2], \widetilde{X}_{3j_3}[q_3] \mid q_0) \leftrightarrow \langle q_1, q_2, q_3 \rangle, \textit{ де}$$

$T_{p_1}^*, T_{p_2}^*, T_{p_3}^*$ – зміщені поліноми Чебишева.

Розв'язання системи полягає у визначенні матриць $\|\lambda_{j_1 p_1}^0\|$, $\|\lambda_{j_2 p_2}^0\|$, $\|\lambda_{j_3 p_3}^0\|$, які для величини максимальної нев'язки:

$$\Delta_\lambda = \max_{q_0 \in [1, k_0]} |F_1(\widetilde{X}[q_0]) - b_0|$$

забезпечують найкраще наближення:

$$\Delta_\lambda^0 = \min_{||\lambda||} \Delta_\lambda$$

Задача формування функцій $\boldsymbol{\Phi_{is}}$ полягає у визначенні матриць $||a_{ij1}^{(1)}||, ||a_{ij2}^{(2)}||, ||a_{ij3}^{(3)}||$ і зводиться до чебишевської задачі наближення для таких трьох незалежних систем:

$$F_{i2s}(\widetilde{X}_s[q_0]) - \widetilde{Y}_i[q_0] = 0, \text{ де}$$

$$F_{i2s}(\widetilde{X}_s[q_0]) = \sum_{j_s=1}^{n_s} a_{ij_s}^{(s)} \Psi_{sj_s}(\widetilde{X}_{sj_s}[q_s]),$$

$$i = \overline{1, m}, s = \overline{1, 3}, q_0 = \overline{1, k_0}$$

Розв'язання полягає у визначенні матриць $\|a_s^0\| = \left\|\tilde{a}_{ij_s}^{(s)}\right\|$, які для величини максимальної нев'язки забезпечують найкраще наближення.

Задача формування функцій $\boldsymbol{\Phi_i}$ полягає у визначенні множини $\Phi = \langle \Phi_i(x_1; x_2; x_3) | \; i \; = \; \overline{1, m} \rangle$ шуканих функцій наближення, і реалізується на заключному етапі формування системи моделей. Розв’язання цієї задачі полягає у відшуканні матриць $\|c_{is}\|$, $s \; = \; \overline{1, 3}$ і зводиться до чебишевської задачі наближення для наступної системи рівнянь:

$$F_{i3}\big(\widetilde{X}[q_0]\big) \; - \; \widetilde{Y}_i[q_0] = 0, \text{ де}$$

$$F_{i3}\big(\widetilde{X}[q_0]\big) = c_{i1}\Phi_{i1}\big(\widetilde{X}_1[q_0]\big) + c_{i2}\Phi_{i2}\big(\widetilde{X}_2[q_0]\big) + c_{i3}\Phi_{i3}(\widetilde{X}_3[q_0]),$$

$$q_0 = \; \overline{1, k_0}, i \, \epsilon \, [1, m].$$

Перетворення отриманих результатів з нормованого до ненормованого вигляду здійснюватиметься за формулою:

$$\widetilde{\Phi_i} = \Phi_i(\max{(Y_i)} - \min{(Y_i)}) + \; \min{(Y_i)}\,.$$

Метод градієнтного спуску використовується для розв'язання несумісних систем лінійних алгебраїчних рівнянь $Ax = b$, мінімізуючи норму вектору нев'язки, задану як $r = b - Ax$. Для знаходження наступної ітерації використовується формула, $x_{i+1} = x_i + \alpha v_i$, де v_i – напрямок антиградієнту в точці x_i . Щоб забезпечити симетричність та додатну визначеність матриці , можна помножити ліву та праву частину рівняння на A^T , створивши додатно визначену квадратну симетричну матрицю. Далі можна використовувати метод градієнтного спуску для розв'язання отриманої системи.

2. Постановка задачі

Метою розв'язання задачі є відновлення цільових функцій в адитивному вигляді згідно з теоретичним матеріалом, поданим вище, за дискретною
вибіркою.

Отже, завдання - побудувати за заданими дискретними вибірками наближувальні функції (аналітичні та графічно представлені функціональні залежності), які з практично прийнятною похибкою в сенсі чебишевського наближення характеризують справжні функціональні залежності.

2.1. Загальні параметри, що відповідають варіанту:

- b_{iq_0} приймаються рівними нормованими значеннями: $Y_i[q],\ i = \overline{1, m}$;
- Метод розв'язання несумісної системи рівнянь: градієнтний метод.

2.2. Параметри для заданої вибірки:

- Розмірність вект-в: $X_1[X_{11}, X_{12}]$ - 2, $X_2[X_{21}, X_{22}]$ - 2, $X_3[X_{31}, X_{32}]$ - 2
- Розмірність вибірки: $Q = 40$
- Кількість цільових функцій Y_i: $m = 5$

2.3. Параметри для альтернативної вибірки:

- Розмірність вект-в: $X_1[X_{11}, X_{12}]$ - 2, $X_2[X_{21}, X_{22}]$ - 2, $X_3[X_{31}, X_{32}, X_{33}]$ - 3
- Розмірність вибірки: $Q = 30$
- Кількість цільових функцій Y_i: $m = 5$

3. Опис інтерфейсу:

Створено інтерфейс з 5-ма основними блоками:

1. Вхідні дані: Користувач може вибрати файл з даними, вказати назву для файлу для результату. А також тут буде автоматично обраховано розмірність вибірки
2. Розмірності векторів: Програма автоматично визначає розмірності векторів

3. Поліноми: Можливість вибору апроксимуючих поліномів та вказання їх степенів.

4. Додатково: Визначення ваг для цільових функцій та методу визначення матриць.

5. Результати роботи: Під час обчислень виводяться значення проміжних функцій.

Розроблений інтерфейс зображено на рис. 2.

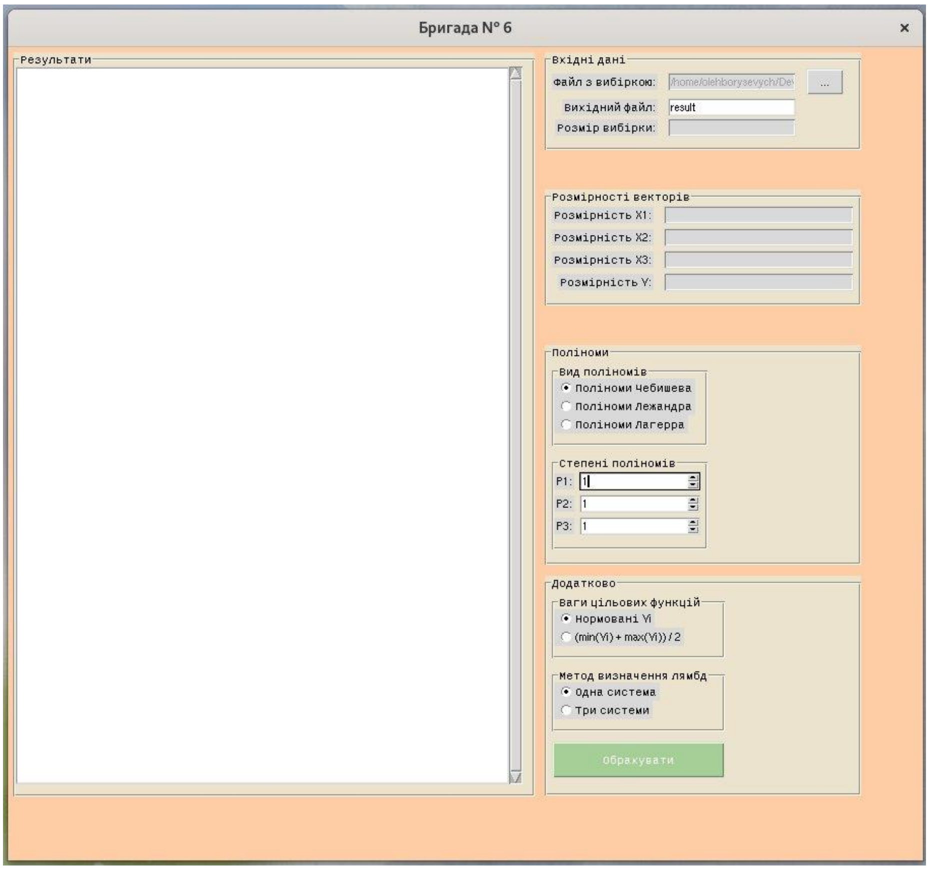


Рисунок 2 — Інтерфейс

4. Результати:

4.1. Дослідимо спочатку задану вибірку:

4.1.1.

Параметри:

- Поліном Чебишева
- Степені поліномів: $P_j = \{1, 1, 1\}$
- Метод визначення лямбд– одна система

Отримані результати та графіки зображено на рис. 3-4.

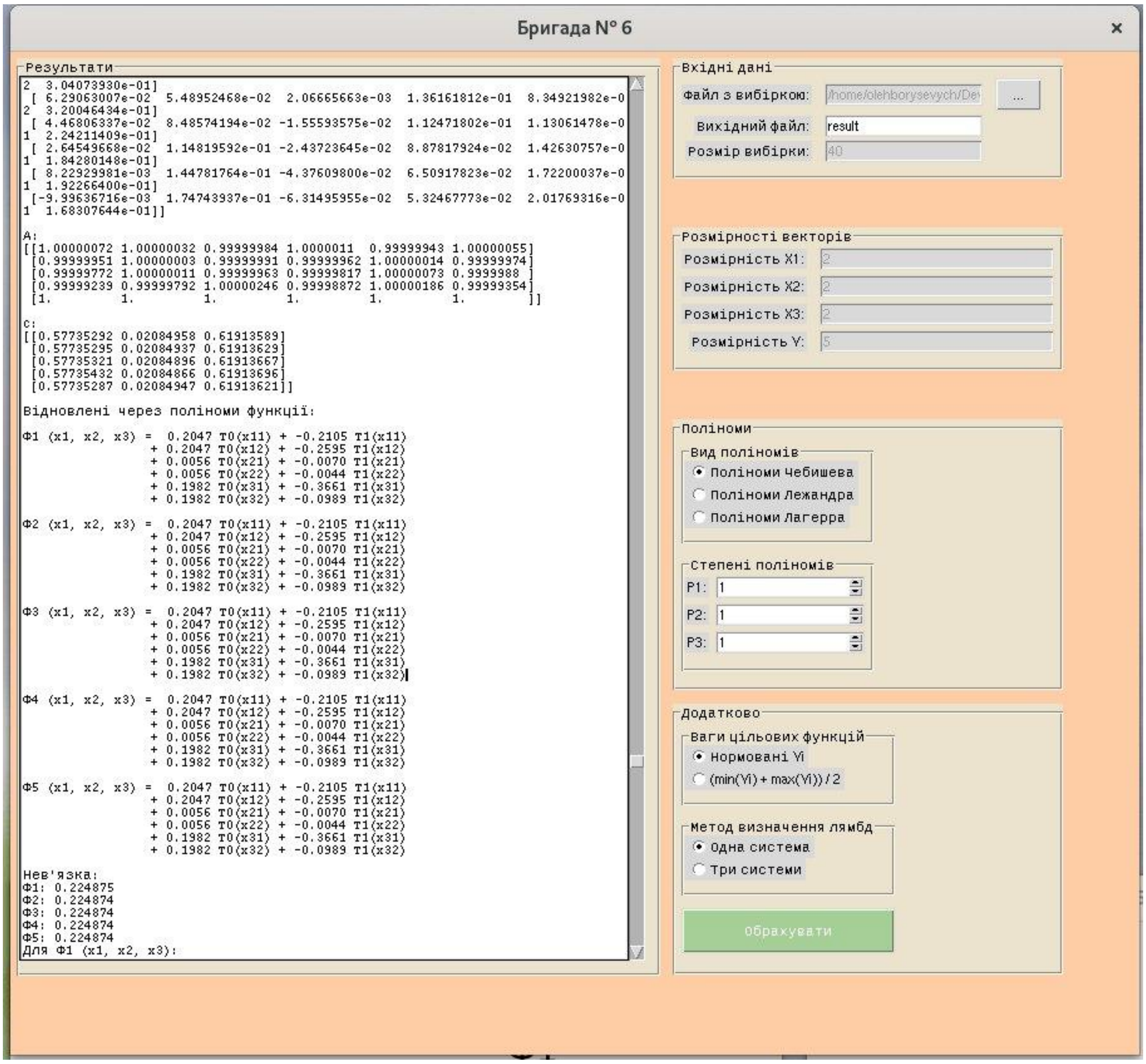


Рисунок 3 — Проміжні та отримані результати наближення функцій (в програмі)

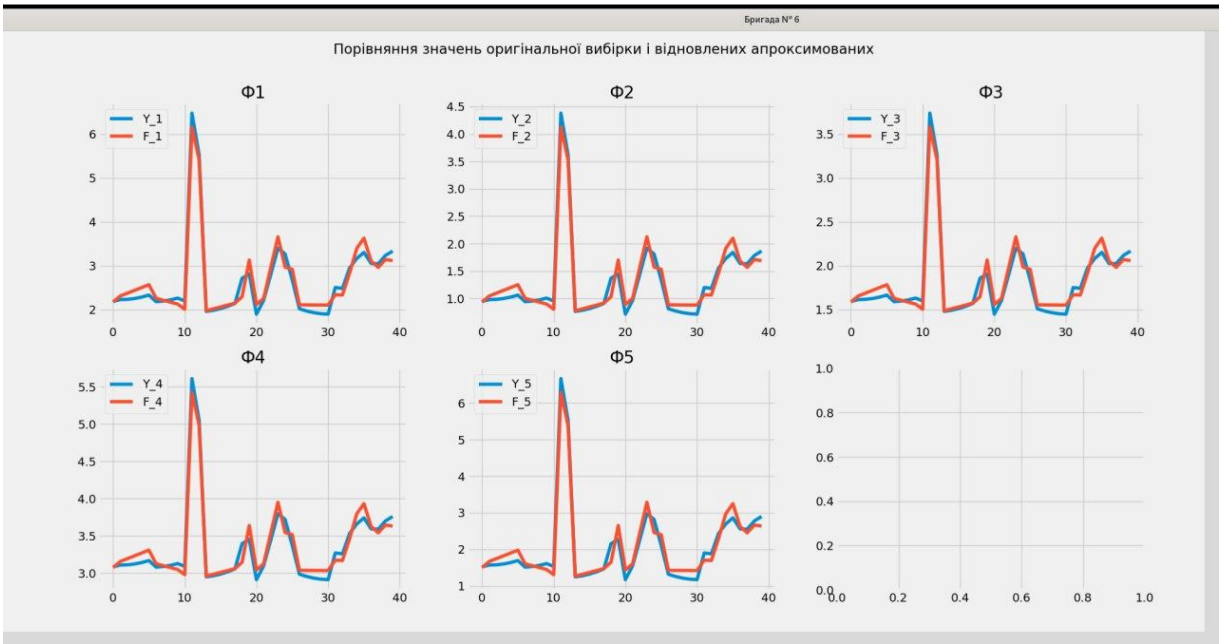


Рисунок 4 — Порівняння значень оригінальної та відновлених функцій

Отримані результати в текстовому вигляді:

```
Відновлені через поліноми функції:
Ф1 (x1, x2, x3) =  0.0671 T0(x11) + 0.1261 T1(x11)
     + 0.0733 T0(x12) + 0.2025 T1(x12)
     + 0.0326 T0(x21) + 0.0040 T1(x21)
     + 0.0175 T0(x22) + 0.0290 T1(x22)
     + 0.0501 T0(x31) + 0.1954 T1(x31)
     + 0.1329 T0(x32) + 0.1173 T1(x32)

Ф2 (x1, x2, x3) =  0.0671 T0(x11) + 0.1261 T1(x11)
     + 0.0733 T0(x12) + 0.2025 T1(x12)
     + 0.0326 T0(x21) + 0.0040 T1(x21)
     + 0.0175 T0(x22) + 0.0290 T1(x22)
     + 0.0501 T0(x31) + 0.1954 T1(x31)
     + 0.1329 T0(x32) + 0.1173 T1(x32)

Ф3 (x1, x2, x3) =  0.0671 T0(x11) + 0.1261 T1(x11)
     + 0.0733 T0(x12) + 0.2025 T1(x12)
     + 0.0326 T0(x21) + 0.0040 T1(x21)
     + 0.0175 T0(x22) + 0.0290 T1(x22)
     + 0.0501 T0(x31) + 0.1954 T1(x31)
     + 0.1329 T0(x32) + 0.1173 T1(x32)

Ф4 (x1, x2, x3) =  0.0671 T0(x11) + 0.1261 T1(x11)
```

```
     + 0.0733 T0(x12) + 0.2025 T1(x12)
     + 0.0326 T0(x21) + 0.0040 T1(x21)
     + 0.0175 T0(x22) + 0.0290 T1(x22)
     + 0.0501 T0(x31) + 0.1954 T1(x31)
     + 0.1329 T0(x32) + 0.1173 T1(x32)

Ф5 (x1, x2, x3) =  0.0671 T0(x11) + 0.1261 T1(x11)
     + 0.0733 T0(x12) + 0.2025 T1(x12)
     + 0.0326 T0(x21) + 0.0040 T1(x21)
     + 0.0175 T0(x22) + 0.0290 T1(x22)
     + 0.0501 T0(x31) + 0.1954 T1(x31)
     + 0.1329 T0(x32) + 0.1173 T1(x32)

Нев'язка:
Ф1: 0.092153
Ф2: 0.092153
Ф3: 0.092153
Ф4: 0.092153
Ф5: 0.092153
```

4.1.2.

Параметри:

- Поліном Чебишева
- Степені поліномів: $P_j = \{3, 3, 3\}$
- Метод визначення лямбд– одна система

Отримані результати та графіки зображено на рис. 5-6.

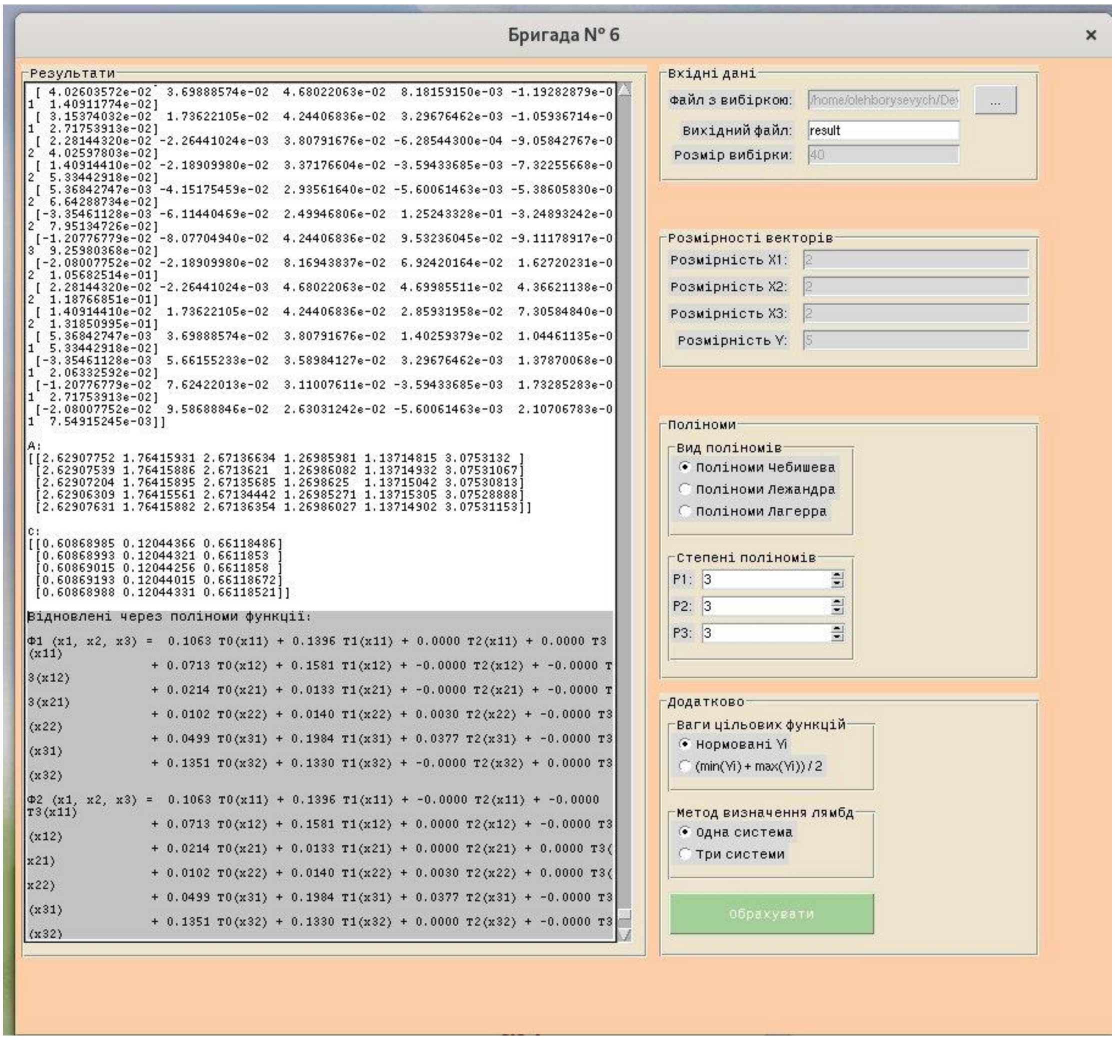


Рисунок 5 — Проміжні та отримані результати наближення функцій

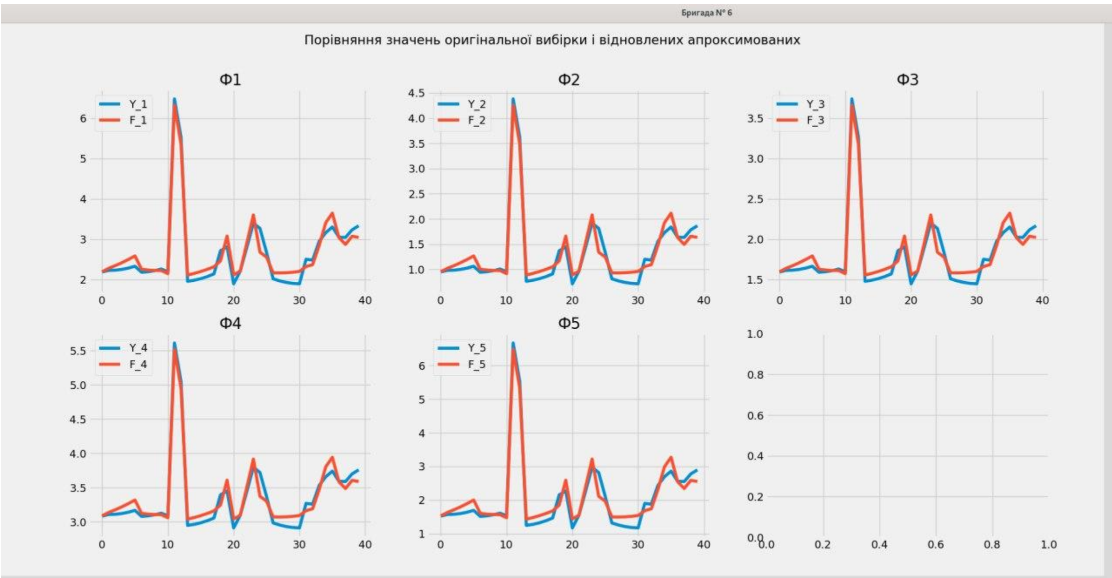


Рисунок 6 — Порівняння значень оригінальної та відновлених функцій

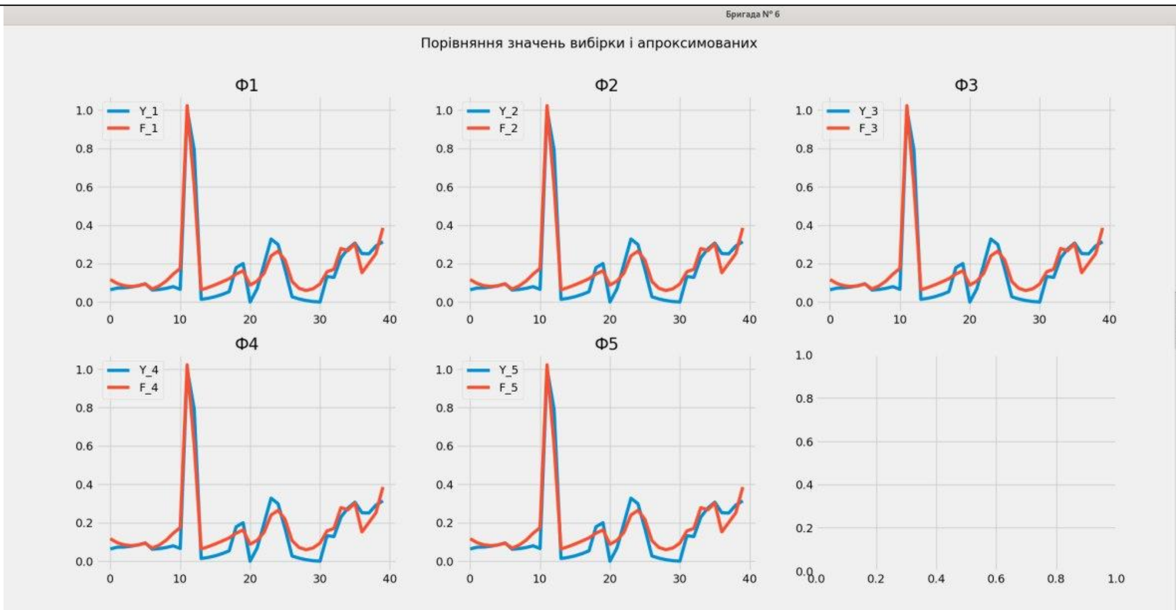
Отримані результати в текстовому вигляді:

```
Відновлені через поліноми функції:
Ф1 (x1, x2, x3) =  0.1063 T0(x11) + 0.1396 T1(x11) + 0.0000 T2(x11) + 0.0000 T3(x11)
     + 0.0713 T0(x12) + 0.1581 T1(x12) + -0.0000 T2(x12) + -0.0000 T3(x12)
     + 0.0214 T0(x21) + 0.0133 T1(x21) + -0.0000 T2(x21) + -0.0000 T3(x21)
     + 0.0102 T0(x22) + 0.0140 T1(x22) + 0.0030 T2(x22) + -0.0000 T3(x22)
     + 0.0499 T0(x31) + 0.1984 T1(x31) + 0.0377 T2(x31) + -0.0000 T3(x31)
     + 0.1351 T0(x32) + 0.1330 T1(x32) + -0.0000 T2(x32) + 0.0000 T3(x32)

Ф2 (x1, x2, x3) =  0.1063 T0(x11) + 0.1396 T1(x11) + -0.0000 T2(x11) + -0.0000 T3(x11)
     + 0.0713 T0(x12) + 0.1581 T1(x12) + 0.0000 T2(x12) + -0.0000 T3(x12)
     + 0.0214 T0(x21) + 0.0133 T1(x21) + 0.0000 T2(x21) + 0.0000 T3(x21)
     + 0.0102 T0(x22) + 0.0140 T1(x22) + 0.0030 T2(x22) + 0.0000 T3(x22)
     + 0.0499 T0(x31) + 0.1984 T1(x31) + 0.0377 T2(x31) + -0.0000 T3(x31)
     + 0.1351 T0(x32) + 0.1330 T1(x32) + 0.0000 T2(x32) + -0.0000 T3(x32)

Ф3 (x1, x2, x3) =  0.1063 T0(x11) + 0.1396 T1(x11) + -0.0000 T2(x11) + -0.0000 T3(x11)
     + 0.0713 T0(x12) + 0.1581 T1(x12) + 0.0000 T2(x12) + 0.0000 T3(x12)
     + 0.0214 T0(x21) + 0.0133 T1(x21) + 0.0000 T2(x21) + 0.0000 T3(x21)
     + 0.0102 T0(x22) + 0.0140 T1(x22) + 0.0030 T2(x22) + 0.0000 T3(x22)
     + 0.0499 T0(x31) + 0.1984 T1(x31) + 0.0377 T2(x31) + 0.0000 T3(x31)
     + 0.1351 T0(x32) + 0.1330 T1(x32) + 0.0000 T2(x32) + -0.0000 T3(x32)

Ф4 (x1, x2, x3) =  0.1063 T0(x11) + 0.1396 T1(x11) + 0.0000 T2(x11) + 0.0000 T3(x11)
     + 0.0713 T0(x12) + 0.1581 T1(x12) + 0.0000 T2(x12) + -0.0000 T3(x12)
     + 0.0214 T0(x21) + 0.0133 T1(x21) + 0.0000 T2(x21) + -0.0000 T3(x21)
     + 0.0102 T0(x22) + 0.0140 T1(x22) + 0.0030 T2(x22) + -0.0000 T3(x22)
     + 0.0499 T0(x31) + 0.1984 T1(x31) + 0.0377 T2(x31) + -0.0000 T3(x31)
     + 0.1351 T0(x32) + 0.1330 T1(x32) + -0.0000 T2(x32) + 0.0000 T3(x32)

Ф5 (x1, x2, x3) =  0.1063 T0(x11) + 0.1396 T1(x11) + -0.0000 T2(x11) + 0.0000 T3(x11)
     + 0.0713 T0(x12) + 0.1581 T1(x12) + 0.0000 T2(x12) + -0.0000 T3(x12)
```

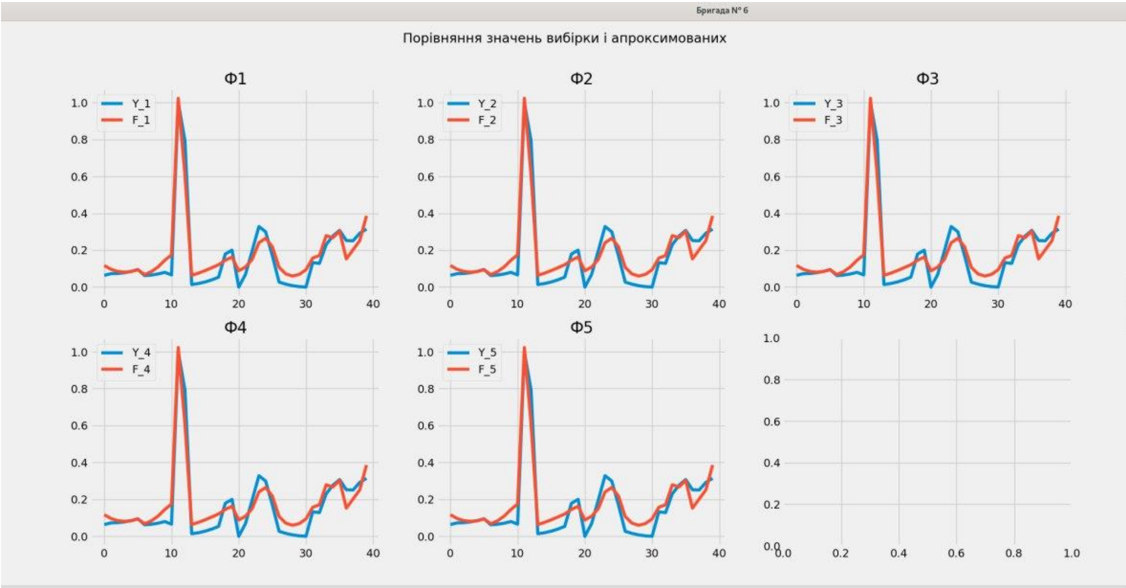
```
+ 0.0214 T0(x21) + 0.0133 T1(x21) + -0.0000 T2(x21) + -0.0000 T3(x21)
+ 0.0102 T0(x22) + 0.0140 T1(x22) + 0.0030 T2(x22) + 0.0000 T3(x22)
+ 0.0499 T0(x31) + 0.1984 T1(x31) + 0.0377 T2(x31) + 0.0000 T3(x31)
+ 0.1351 T0(x32) + 0.1330 T1(x32) + 0.0000 T2(x32) + -0.0000 T3(x32)

Нев'язка:
Ф1: 0.128563
Ф2: 0.128563
Ф3: 0.128565
Ф4: 0.128564
Ф5: 0.128563
```

4.2. Порівняємо роботу 3-х видів поліномів на даній вибірці для ступеінв поліномів рівному 1, результати показано в табл. 1.

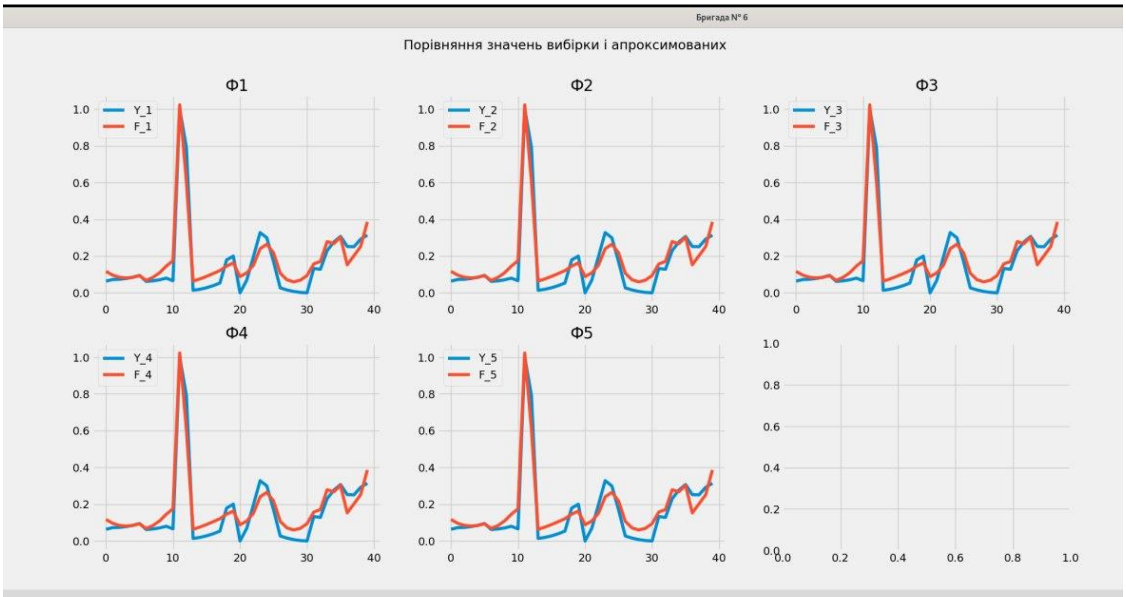
Таблиця 1. Порівняння роботи видів поліномів

<table>
<tr><td rowspan="2">Поліном</td><td colspan="5">Нев’язка</td></tr>
<tr><td>$Ф_1$</td><td>$Ф_2$</td><td>$Ф_3$</td><td>$Ф_4$</td><td>$Ф_5$</td></tr>
<tr><td>Чебишева</td><td>0.092153</td><td>0.092153</td><td>0.092153</td><td>0.092153</td><td>0.092153</td></tr>
<tr><td colspan="6">Графік</td></tr>
<tr><td colspan="6">
</td></tr>
</table>

Лежандра	0.105315	0.105315	0.105314	0.105314	0.105315
Графік					



Лаггера	0.105318	0.105316	0.105318	0.105316	0.105315
Графік					



4.3. Розглянемо альтернативну вибірку

4.3.1.

Параметри:

- Поліном Чебишева
- Степені поліномів: $P_j = \{1, 1, 1\}$
- Метод визначення лямбд – одна система

Отримані результати та графіки зображено на рис. 7-8.

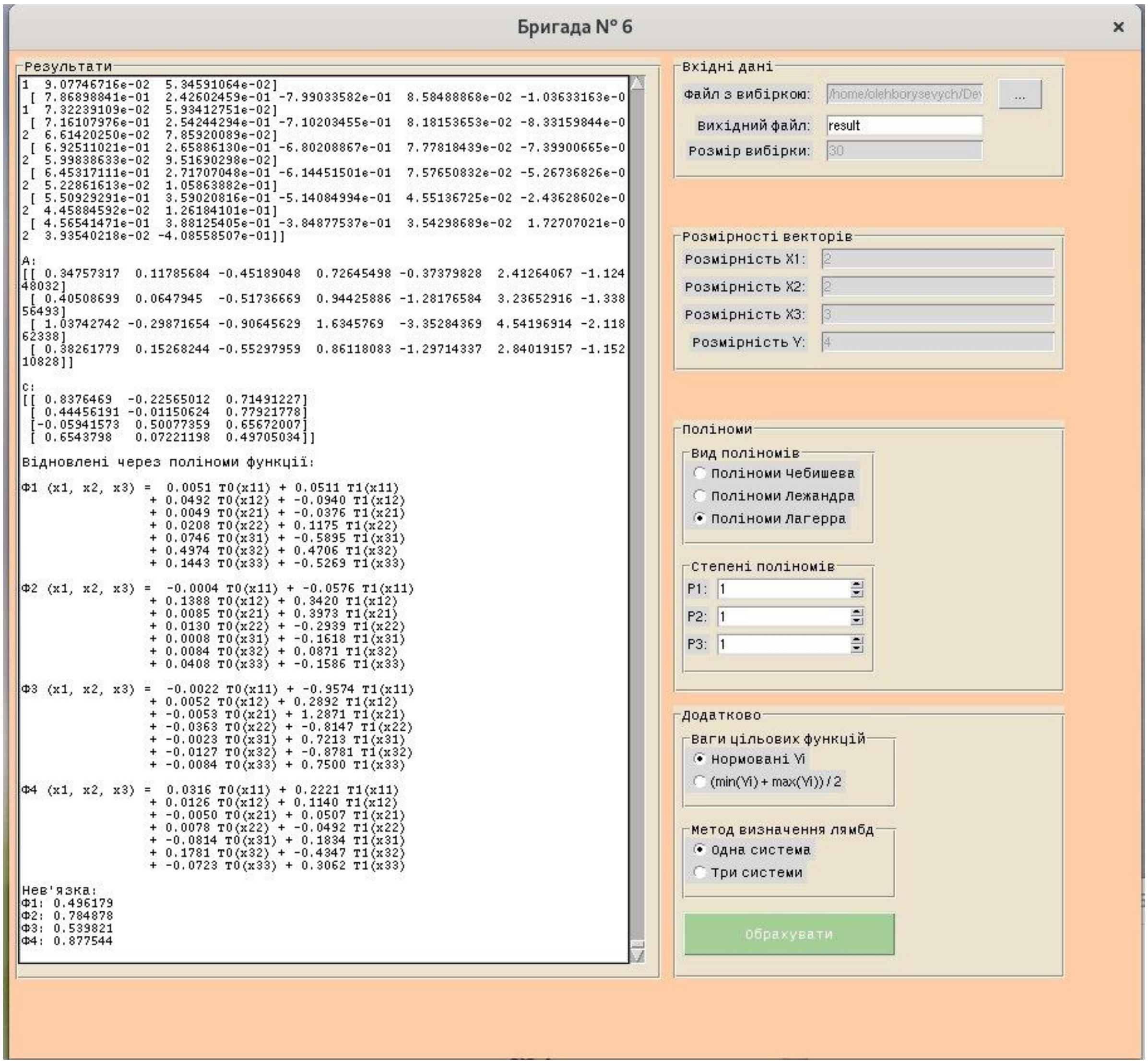


Рисунок 7 — Проміжні та отримані результати наближення функцій

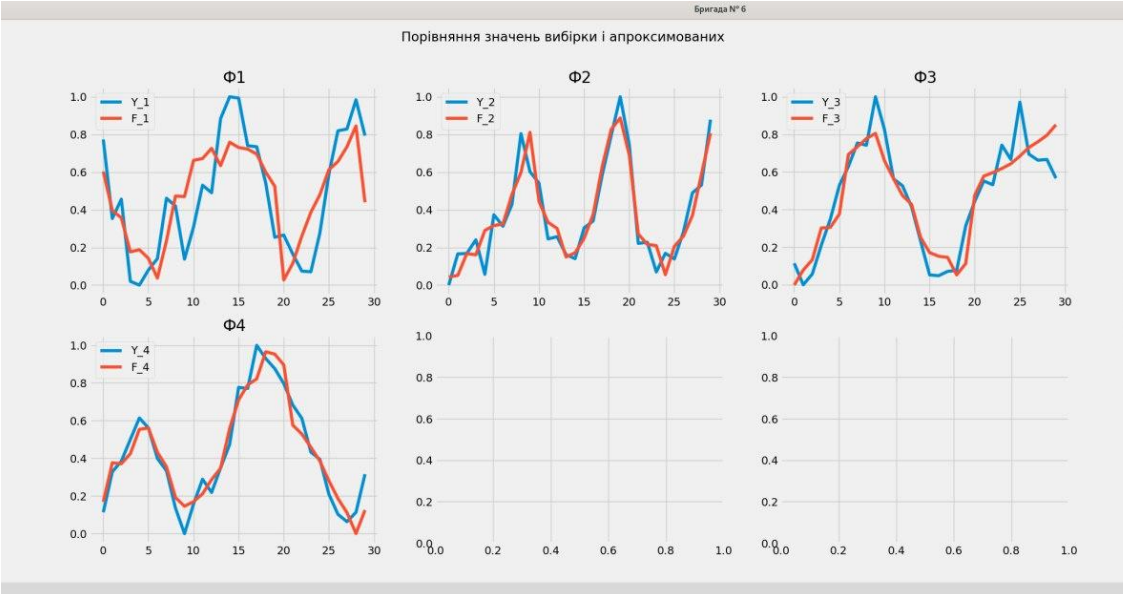


Рисунок 8 — Порівняння значень оригінальної та відновлених функцій

Отримані результати в текстовому вигляді:

```
Відновлені через поліноми функції:

Ф1 (x1, x2, x3) =  -3.2751 T0(x11) + -26.8445 T1(x11) + 16.1637 T2(x11) + -2.1997 T3(x11)
     + -3.2751 T0(x12) + 51.1419 T1(x12) + -31.1158 T2(x12) + 4.2554 T3(x12)
     + 0.4445 T0(x21) + 0.4447 T1(x21) + -0.2285 T2(x21) + 0.0257 T3(x21)
     + 0.4445 T0(x22) + -3.7947 T1(x22) + 2.3303 T2(x22) + -0.3215 T3(x22)
     + -7.3408 T0(x31) + 43.4820 T1(x31) + -24.8491 T2(x31) + 3.0820 T3(x31)
     + -7.3409 T0(x32) + 42.1149 T1(x32) + -25.8109 T2(x32) + 3.5680 T3(x32)
     + -7.3408 T0(x33) + -7.5738 T1(x33) + 5.0638 T2(x33) + -0.8090 T3(x33)

Ф2 (x1, x2, x3) =  -0.7899 T0(x11) + 16.4356 T1(x11) + -9.5478 T2(x11) + 1.2201 T3(x11)
     + -0.7899 T0(x12) + -10.5385 T1(x12) + 5.9069 T2(x12) + -0.7207 T3(x12)
     + -0.1130 T0(x21) + -7.8309 T1(x21) + 4.5944 T2(x21) + -0.5989 T3(x21)
     + -0.1130 T0(x22) + 8.6901 T1(x22) + -5.2398 T2(x22) + 0.7061 T3(x22)
     + -0.0367 T0(x31) + 103.1771 T1(x31) + -60.8162 T2(x31) + 7.8680 T3(x31)
     + -0.0367 T0(x32) + -145.9265 T1(x32) + 85.4182 T2(x32) + -11.0586 T3(x32)
     + -0.0367 T0(x33) + 49.7175 T1(x33) + -32.0182 T2(x33) + 4.5952 T3(x33)

Ф3 (x1, x2, x3) =  -1.2141 T0(x11) + 5.8297 T1(x11) + -3.3388 T2(x11) + 0.4267 T3(x11)
```

```
     + -1.2141 T0(x12) + 2.6948 T1(x12) + -1.5304 T2(x12) + 0.1839 T3(x12)
     + 4.2844 T0(x21) + -2.6433 T1(x21) + 1.5628 T2(x21) + -0.2172 T3(x21)
     + 4.2844 T0(x22) + -28.0461 T1(x22) + 16.9869 T2(x22) + -2.2833 T3(x22)
     + 2.5265 T0(x31) + -17.4725 T1(x31) + 10.6884 T2(x31) + -1.4014 T3(x31)
     + 2.5265 T0(x32) + 28.2988 T1(x32) + -15.6242 T2(x32) + 1.7975 T3(x32)
     + 2.5265 T0(x33) + -37.1769 T1(x33) + 21.2067 T2(x33) + -2.6262 T3(x33)

Ф4 (x1, x2, x3) =  2.0384 T0(x11) + -1.0580 T1(x11) + 0.4781 T2(x11) + -0.0409 T3(x11)
     + 2.0384 T0(x12) + -12.9291 T1(x12) + 7.6297 T2(x12) + -1.0017 T3(x12)
     + -1.3819 T0(x21) + -0.3292 T1(x21) + 0.2017 T2(x21) + -0.0258 T3(x21)
     + -1.3819 T0(x22) + 10.1590 T1(x22) + -6.1496 T2(x22) + 0.8308 T3(x22)
     + 6.7639 T0(x31) + -13.0323 T1(x31) + 7.9528 T2(x31) + -1.1259 T3(x31)
     + 6.7638 T0(x32) + -111.2939 T1(x32) + 65.6579 T2(x32) + -8.6435 T3(x32)
     + 6.7638 T0(x33) + 52.8951 T1(x33) + -30.3601 T2(x33) + 3.8258 T3(x33)

Нев'язка:
Ф1: 0.288158
Ф2: 0.239040
Ф3: 0.368872
Ф4: 0.198913
```

4.3.2.

Параметри:

- Поліном Чебишева
- Степені поліномів: $P_j = \{3, 3, 3\}$.
- Метод визначення лямбд –три системи

Отримані результати та графіки зображено на рис. 9-10.

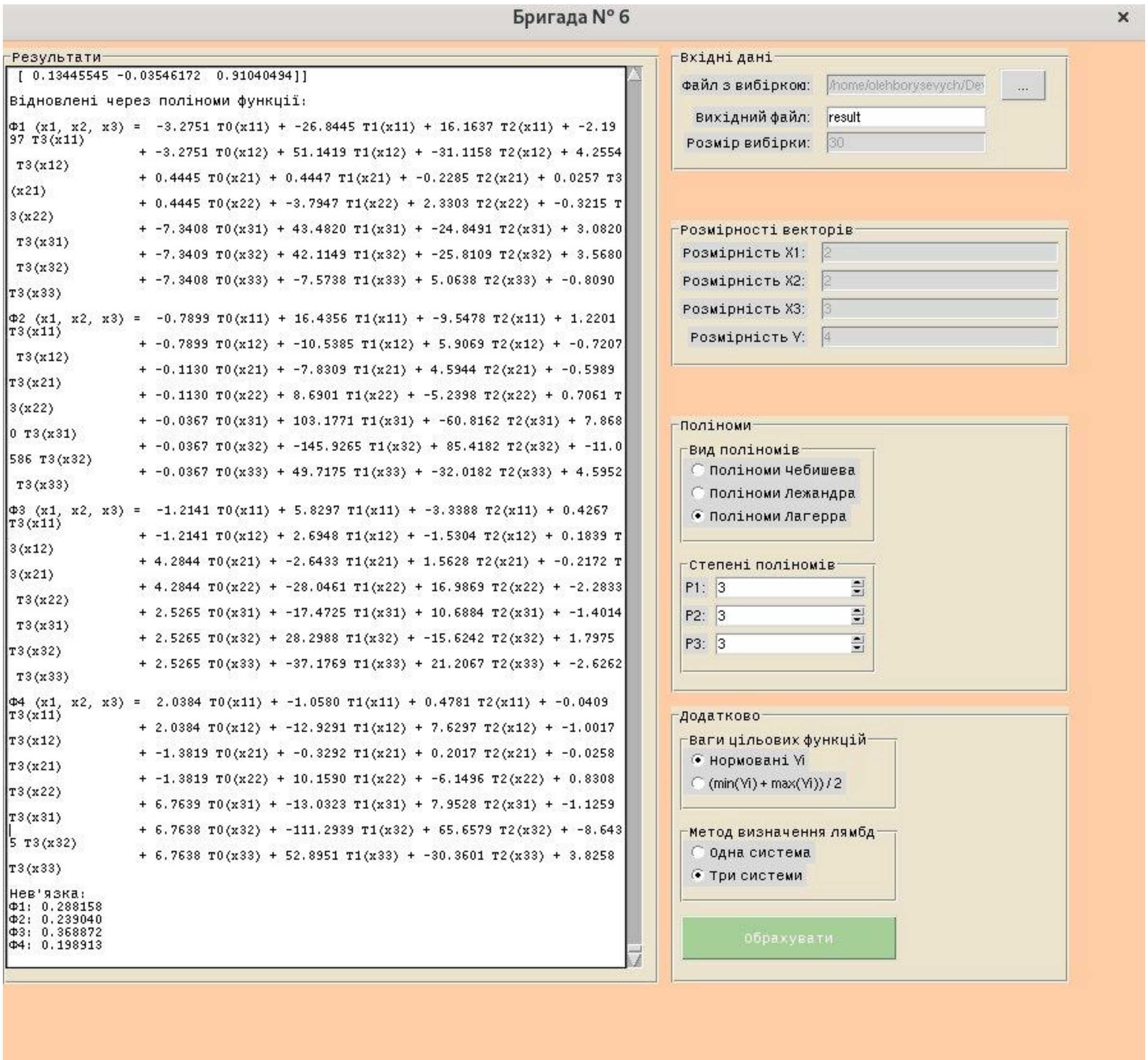


Рисунок 9 — Проміжні та отримані результати наближення функцій

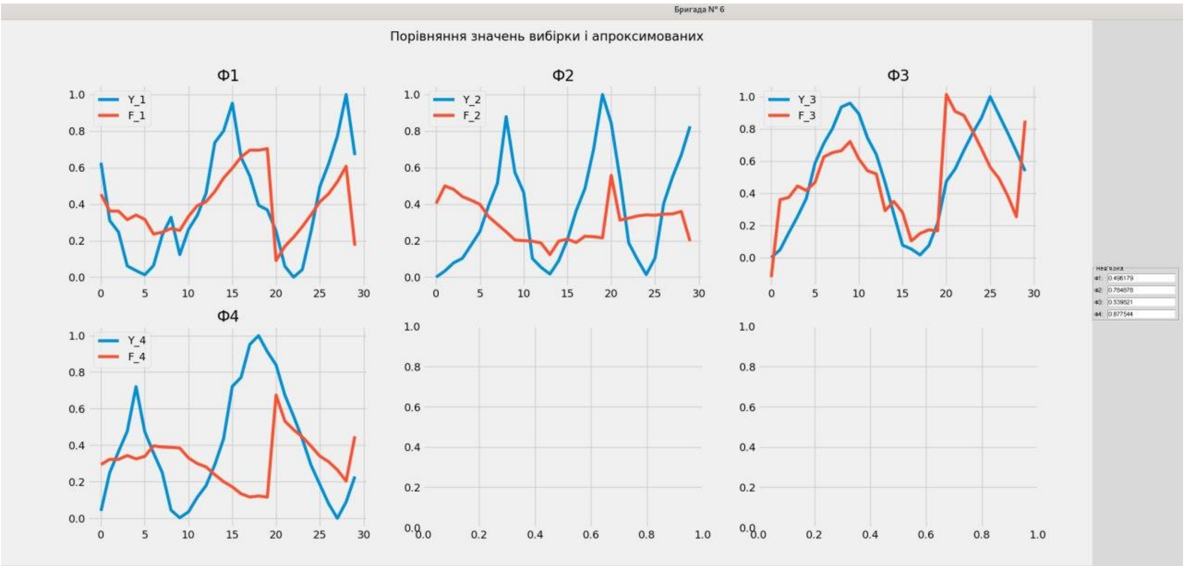


Рисунок 10 — Порівняння значень оригінальної та відновлених функцій

Отримані результати в текстовому вигляді:

```
Відновлені через поліноми функції:

Ф1 (x1, x2, x3) =  0.0051 T0(x11) + 0.0511 T1(x11)
     + 0.0492 T0(x12) + -0.0940 T1(x12)
     + 0.0049 T0(x21) + -0.0376 T1(x21)
     + 0.0208 T0(x22) + 0.1175 T1(x22)
     + 0.0746 T0(x31) + -0.5895 T1(x31)
     + 0.4974 T0(x32) + 0.4706 T1(x32)
     + 0.1443 T0(x33) + -0.5269 T1(x33)

Ф2 (x1, x2, x3) =  -0.0004 T0(x11) + -0.0576 T1(x11)
     + 0.1388 T0(x12) + 0.3420 T1(x12)
     + 0.0085 T0(x21) + 0.3973 T1(x21)
     + 0.0130 T0(x22) + -0.2939 T1(x22)
     + 0.0008 T0(x31) + -0.1618 T1(x31)
     + 0.0084 T0(x32) + 0.0871 T1(x32)
     + 0.0408 T0(x33) + -0.1586 T1(x33)
Ф3 (x1, x2, x3) =  -0.0022 T0(x11) + -0.9574 T1(x11)
     + 0.0052 T0(x12) + 0.2892 T1(x12)
     + -0.0053 T0(x21) + 1.2871 T1(x21)
     + -0.0363 T0(x22) + -0.8147 T1(x22)
     + -0.0023 T0(x31) + 0.7213 T1(x31)
     + -0.0127 T0(x32) + -0.8781 T1(x32)
     + -0.0084 T0(x33) + 0.7500 T1(x33)
Ф4 (x1, x2, x3) =  0.0316 T0(x11) + 0.2221 T1(x11)
     + 0.0126 T0(x12) + 0.1140 T1(x12)
     + -0.0050 T0(x21) + 0.0507 T1(x21)
     + 0.0078 T0(x22) + -0.0492 T1(x22)
     + -0.0814 T0(x31) + 0.1834 T1(x31)
     + 0.1781 T0(x32) + -0.4347 T1(x32)
     + -0.0723 T0(x33) + 0.3062 T1(x33)

Нев'язка:
Ф1: 0.496179
Ф2: 0.784878
Ф3: 0.539821
Ф4: 0.877544
```

Висновки

Під час виконання лабораторної роботи ми успішно навчились відтворювати функціональні залежності в адитивній формі на основі заданих дискретних вибірок. Для реалізації цієї задачі ми використали інструментарій мови програмування Python та бібліотеки для обробки та візуалізації даних, зокрема NumPy, Matplotlib, SciPy, Pandas та Tkinter.

Отримавши та проаналізувавши результати, ми дійшли до висновку, що ефективність та точність апроксимації суттєво залежить від вибору степенів поліномів та меншою мірою від їхніх видів та методів отримання. Найкращі результати були отримані для поліномів 3-го ступеню.

Також була проведена візуальна та аналітична оцінка похибки відтворення, і результати виявились досить точними. Щодо факторів, що впливають на кращу точність - це насамперед обрана дискретна вибірка та та зв’язок даних у ній.

Список використаних джерел

1. Монографія «Системный анализ: Методология. Проблемы. Приложения», автори М. З. Згуровський, Н. Д. Панкратова 2-е издание, переработаное и дополненое (Київ, вид-во «Наукова думка»).
2. Joseph Valacich, Joey George, Jeffrey Hoffer (Author) (2019). "Modern Systems Analysis and Design," 9th Edition.
3. Tan, H. B. K., & Ling, T. W. (2002). Exploring Programs for the Recovery of Data Dependencies. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 14(4), 825-835.
4. Etesami, J., & Kiyavash, N. (Publisher: IEEE). Measuring Causal Relationships in Dynamical Systems through Recovery of Functional Dependencies.
5. Elijah Polak (1997). Optimization: Algorithms and Consistent Approximations. Springer-Verlag.
6. Chong, Edwin K. P.; Żak, Stanislaw H. (2013). "Gradient Methods". An Introduction to Optimization (Fourth ed.). Hoboken: Wiley. pp. 131–160.
7. Eli Bressert (2012). SciPy and NumPy. O'Reilly Media, Inc.
8. Python documentation. (n.d.). Retrieved from https://docs.python.org