Chapitre 1

Trigonométrie

Lemme 1
Soit f une fonction dérivable au voisinage de 0 telle que $f'(x) = o_0(x^n)$ alors $f(x) = o_o(x^{n+1})$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, alors

$$\exists \alpha > 0 \,/\, \forall x \in \left]-\alpha, \alpha\right[, |f'(x)| \leq \varepsilon |x^n|$$

Soit $x \in [0, \alpha]$, on sait que

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$$

Donc par inégalité triangulaire :

$$|f(x) - f(0)| \leq \int_0^x |f'(t)|dt$$

Comme $x \in \left]0, \alpha\right[$, on a $x < \alpha$ et $[0, x] \subset \left]0, \alpha\right[$, on peut donc appliquer l'hypothèse de domination en tout point de l'intégrale :

$$\int_0^x |f'(t)|dt \leq \int_0^x \varepsilon |t^n|dt = \epsilon \int_0^x |t^n|dt$$

Comme $t \longmapsto t^n$ est positive sur $[0, t]$, on peut enlever les valeurs absolues. on a alors

$$\varepsilon \int_0^x t^n dt = \varepsilon \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \varepsilon\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \underbrace{\frac{0^{n+1}}{n+1}}_{=0}\right) = \frac{\varepsilon}{n+1}x^{n+1}$$

Comme $n > 1$, on a ainsi $n + 1 > 2$ d'où $\dfrac{1}{n+1} \leq 1$ donc finalement

$$\forall x \in \left[0, \alpha\right[, |f(x) - f(0)| \leq \frac{\varepsilon}{n+1}x^{n+1} \leq \varepsilon x^{n+1}$$

Si $x \in \left]-\alpha, 0\right]$, alors on peut appliquer l'inégalité triangulaire en inversant les bornes

$$|f(x) - f(0)| \leq \int_x^0 |f'(t)|dt \leq \varepsilon \int_x^0 |t^n|dt$$

Comme $t \mapsto t^n$ est une fonction négative sur $[-\alpha, 0]$, on a peut alors changer les bornes de l'intégrale et on retombe alors sur la forme précédente.

$$|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon \int_x^0 -t^n dt \leq \varepsilon \int_0^x t^n dt \leq \epsilon x^{n+1}$$

Ainsi, on a

$$\forall x \in [-\alpha, \alpha[\,, |f(x) - f(0)| \leq \frac{\varepsilon}{n+1} x^{n+1} \leq \varepsilon x^{n+1}$$

□

I Trigonométrie du cercle

1 Addition et multiple d'angle

Sous espace propre

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension quelconque, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on appelle **sous espace propre** associé à λ l'ensemble

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda Id_E) = \{\, x \in E / u(x) = \lambda x \,\}$$

Exercice 1

Soient $a\,, b\,, c \in \mathbb{R}$ tels que $\min\{\, ab, bc, ca \,\} > 1$. Montrer que

$$\sqrt[3]{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \leq \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 + 1$$

Lemme 2

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{si } z \neq 1 \\ n+1 & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$

Cas 1 : Supposons que $z \neq 1$, alors on peut appliquer le résultat précédent a z et à 1 :

$$1 - z^{n+1} = (1-z) \times \sum_{k=0}^{n} z^k \underbrace{1^{n-k}}_{=1}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

Cas 2 : Supposons que $z = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1) \times 1 = n+1$$

□

Théorème 3 : Binôme de Newton
Soient $x\,, y \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. On raisonne par récurrence,

Initialisation : $(a+b)^0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^0 b^{-k} = 1 \times a^0 b^0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$: $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ est vérifiée pour un certain rang n.

Montrons que $(a+b)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$:
On a par hypothèse de récurrence :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

on développe le produit. Par linéarité de la somme, on obtient

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-1-k}$$

On ré-indice la première somme $k \leftarrow k+1$, donc

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-1-k}$$

On sépare le premier et le dernier somme pour pouvoir regrouper tous les autres dans une même somme :

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k}$$

Les coefficients binomiaux vérifient la relation de Pascal donc $\forall k \in [\![\, 1\,,\, n \,]\!]\,,\ \displaystyle\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

□

Démonstration. On a $\dfrac{d}{dx}\Big\langle \exp \circ (i\,\mathrm{Id}) \Big\rangle(x) = i\, e^{i\,x}$
On peut réécrire l'exponentielle complexe sous sa forme trigonométrique, ce qui nous donne par linéarité :

$$\frac{d}{dx}\Big\langle \exp \circ (i\,\mathrm{Id}) \Big\rangle(x) = \frac{d}{dx}\Big\langle \cos + i\ \sin \Big\rangle(x) = \frac{d}{dx}\Big\langle \cos \Big\rangle(x) + i\,\frac{d}{dx}\Big\langle \sin \Big\rangle(x)$$

Donc comme $i^2 = 1$,

$$i\, e^{i\,x} = i \times (\cos(x) + i\, \sin(x)) = -\, \sin(x) + i\, \cos(x)$$

En associant partie réelle et partie imaginaire, on obtient alors :

$$\frac{d}{dx}\Big\langle \cos \Big\rangle(x) = -\sin(x) \qquad \frac{d}{dx}\Big\langle \sin \Big\rangle(x) = \cos(x)$$

Pour la tangente, on applique les formules des quotients :

$$\frac{d\tan}{dx} = \frac{d}{dx}\left\langle \frac{\sin}{\cos} \right\rangle = \frac{\frac{d}{dx}\Big\langle \sin \Big\rangle \cos - \sin \frac{d}{dx}\Big\langle \cos \Big\rangle}{\cos^2} = \frac{\cos\cos + \sin\sin}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$

De plus, on a par distributivité

$$\frac{d}{dx}\Big\langle \tan \Big\rangle = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{\cos^2}{\cos^2} + \frac{\sin^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2$$

$\square$

Exercice 2 : Calcul de sommes polynomiales

Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} k \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Démonstration. **Méthode 1 : Par récurrence**

Démontrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Le résultat ne change pas si on ajoute le terme pour $k = 0$ car il est nul.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a d'une part, $\sum_{k=0}^{0} k = 0$ et d'autre part, on a $\frac{0(0+1)}{2} = 0$.

Donc $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{0(0+1)}{2}$ i.e., $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ alors, démontrons $\mathcal{P}(n+1)$:

Remarquons que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = 0 + 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \Big(1 + 2 + \cdots + n\Big) + \Big(n+1\Big) = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + (n+1)$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)}{2} \times (2+n) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Ce qui est bien la formule qu'on a supposée, appliquée en $n+1$. Donc si $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifié, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée aussi.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}}$.

Méthode 2 : Par l'utilisation d'un polynôme de télescopage
Cette méthode permet de trouver les formules à démontrer contrairement à la récurrence. On va chercher un polynôme P tel que $P(X+1) - P(X) = X$ en raisonnant par analyse-synthèse. On impose une condition qui va simplifier notre problème en ne considérant que les polynômes de degré 2.

Étape 1 : Analyse : La recherche du polynôme
Supposons qu'il existe un tel polynôme P alors comme P est de degré 2, il existe $a\,, b\,, c \in \mathbb{R}$ tels que $P = a\,X^2 + b\,X + c$. On calcule explicitement $P(X+1) - P(X)$:

$$P(X+1) - P(X) = a\,(X+1)^2 + b\,(X+1) + c - (a\,X^2 + b\,X + c) = 2a\,X + (a+b)$$

Comme P vérifie $P(X+1) - P(X) = X$, alors

$$P(X+1) - P(X) = 2a\,X + (1+b)$$

En identifiant les coefficients, on doit nécessairement avoir $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -a = -\dfrac{1}{2}$.
Ainsi, si P est solution du problème, alors

$$P \in \left\{ \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + c \quad , c \in \mathbb{R} \right\}$$

Synthèse : Soit $c \in \mathbb{R}$. Posons $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$ et définissons

$$P = a\,X^2 + b\,X + c = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + c$$

P vérifie $P(X+1) - P(X) = 2\,X$ d'après ce que nous avons vu dans analyse. c n'intervient pas dans l'égalité, donc prenons arbitrairement $c = 0$ car cela permet d'avoir $P(0) = c = 0$ et de simplifier les calculs par la suite.

Étape 2 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![\, 0\,,\, n \,]\!]$, alors

$$P(k+1) - P(k) = 2\,k$$

Ainsi, si on somme pour toutes les valeurs de k de 0 jusqu'à n cette égalité on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \Big(P(k+1) - P(k) \Big) \;=\; \sum_{k=0}^{n} k \;=\; 2\sum_{k=0}^{n} k$$

Étape 3 : Or d'autre part, par linéarité de la somme

$$\sum_{k=0}^{n}\Big(P(k+1)-P(k)\Big)=\sum_{k=0}^{n}P(k+1)-\sum_{k=0}^{n}P(k)$$

En posant $i=k+1$ dans la première somme, on obtient :

$$=\sum_{i=1}^{n+1}P(i)-\sum_{k=0}^{n}P(k)=\Big[P(1)+P(2)+...+P(n)+P(n+1)\Big]-\Big[P(0)+P(1)+...+P(n)\Big]$$

On remarque alors qu'il existe un télescopage et comme $P(0)=c=0$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n}\Big(P(k+1)-P(k)\Big)=P(n+1)-P(0)=P(n+1)$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n}k=P(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)^2-\frac{1}{2}(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+1-1)=\frac{n(n+1)}{2}$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

$\square$

Exercice 3

Résoudre suivant les valeurs de $a\in\mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 3x+ay+2z+t=a \\ 2x+2y+z+3t=0 \\ x+5y-z+4t=5 \end{cases}$$

Soit $a\in\mathbb{R}$, soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4$, alors

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 3x+ay+2z+t=a \\ 2x+2y+z+3t=0 \\ x+5y-z+4t=5 \end{cases}\quad \text{ssi}$$

Exercice 4
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que le système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda x + 2y = 0 \\ x - \lambda y + z = 0 \\ 2y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

n'admette pas que la solution nulle

Exercice 5
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, discuter la nature géométrique de l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

Exercice 6
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Discuter la nature géométrique de l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

Exercice 7
Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, k!$ en faisant apparaître des sommes télescopiques

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. D'après les propriétés de la fonction logarithme, on a

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$$

Ainsi,

$$\forall k \in [\![1, n]\!], k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = k\ln(k+1) - k\ln(k) = (k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) - \ln(k)$$

La dernière factorisation permet de faire apparaître un télescopage. Notons

$$\forall k \in [\![1, n]\!], u_k := k\ln(k)$$

Alors,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} u_{k+1} - u_k - \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k) - \sum_{k=1}^{n} \ln k$$

Par télescopage, on obtient

$$A_n = (n+1)\ln(n+1) - 1\times 0 - \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}\right)$$

■

Exercice 8
Calculer

$$\prod_{p=2}^{n} \frac{p^3-1}{p^3+1}$$

Solution. Soit $n \geq 2$ et $p \in [\![2\,,\,n]\!]$, on remarque que l'on peut factoriser la fraction rationnelle de la manière suivante :

$$\frac{p^3-1}{p^3+1} = \frac{p-1}{p+1} \times \frac{p^2+p+1}{p^2-p+1} = \frac{p-1}{p+1} \times \frac{(p+1)^2-(p+1)+1}{p^2-p+1}$$

Par associativité du produit, on a :

$$\prod_{p=2}^{n} \frac{p^3-1}{p^3+1} = \prod_{p=2}^{n} \frac{p-1}{p+1} \times \frac{(p+1)^2-(p+1)+1}{p^2-p+1} = \left(\prod_{p=2}^{n} \frac{p-1}{p+1}\right) \times \left(\prod_{p=2}^{n} \frac{(p+1)^2-(p+1)+1}{p^2-p+1}\right)$$

Notons $A_n = \prod_{p=2}^{n} \frac{p-1}{p+1}$ la première partie du produit et $B_n = \frac{(p+1)^2-(p+1)+1}{p^2-p+1}$ la seconde. On a alors par linéarité, puis par définition de la factorielle :

$$\boxed{A_n} = \prod_{p=2}^{n} \frac{p-1}{p+1} = \frac{\prod_{p=2}^{n}(p-1)}{\prod_{p=2}^{n}(p+1)} = \frac{(n-1)!}{\frac{(n+1)!}{2!}} \boxed{= \frac{2}{n(n+1)}}$$

D'autre part, le second produit est un produit télescopique évident, donc

$$\boxed{B_n} = \prod_{p=2}^{n} \frac{(p+1)^2-(p+1)+1}{p^2-p+1} = \frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{(2)^2-(2)+1} \boxed{= \frac{n^2+n+1}{3}}$$

Ainsi, on obtient

$$\boxed{\prod_{p=2}^{n} \frac{p^3-1}{p^3+1}} = A_n \times B_n \boxed{= \frac{2}{3} \times \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}}$$

■

Exercice 9

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$, calculer rapidement $\sum_{k=1}^{2n-1} S_k$

Exercice 10

Soient $n\,,m \in \mathbb{N}/n \leq m$. Que représente sur le triangle de Pascal la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{m}\binom{k}{n}$?

Conjecturez la valeur de cette somme puis prouver le résultat.

Solution. Cette somme correspond à la somme d'une colonne du triangle de Pascal. D'après la formule de la relation de Pascal, on a

$$\forall k \in [\![n+1\,,\,m]\!]\,,\ \binom{k}{n}+\binom{k}{n+1}=\binom{k+1}{n+1}$$

Donc on a

$$\forall k \in [\![n+1\,,\,m]\!]\,,\ \binom{k}{n}=\binom{k+1}{n+1}-\binom{k}{n+1}$$

En sommant les égalités pour $k=n+1$ jusqu'à m (sans le premier terme), on a alors

$$\sum_{k=n+1}^{m}\binom{k}{n}=\sum_{k=n+1}^{m}\left(\binom{k+1}{n+1}-\binom{k}{n+1}\right)$$

On remarque qu'il y a un télescopage qui apparaît. On obtient alors

$$\sum_{k=n+1}^{m+1}\binom{k}{n+1}-\sum_{k=n}^{m}\binom{k+1}{n}=\binom{m+1}{n+1}-\underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{=1}=\binom{m+1}{n+1}-1$$

Donc

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{m}\binom{k}{n}}=\binom{n}{n}+\sum_{k=n+1}^{m}\binom{k}{n}=\underbrace{\binom{n}{n}}_{=1}+\left(\binom{m+1}{n+1}-1\right)\boxed{=\binom{m+1}{n+1}}$$

■

Exercice 11

Calculer

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a d'après la relation de la diagonale du binôme :

$$\forall k \in [\![0\,,\,n]\!]\,,\ \binom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$$

On en déduit que

$$\forall k \in [\![0\,,\,n]\!]\,,\ \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

Ainsi, en remplaçant par cette nouvelle expression le terme général de la somme, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \boxed{= \frac{2^n}{n+1}}$$

■

Exercice 12
Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{2k}}\binom{n}{k}$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{2k}}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

Or on sait d'après la relation de la diagonale que $\forall k \in [\![1\,,\, n]\!]\,,\ \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, en réinjectant cette égalité dans la somme, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \sum_{k=1}^{n} \cancel{k}\frac{n}{\cancel{k}}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{4}\right)^k = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

En effectuant un changement d'indice $(k \leftarrow k+1)$ et en ajustant la puissance sur $\frac{1}{4}$, on fait apparaître le binôme de Newton :

$$n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{4}\right)^k = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} = n\left(\frac{1}{4}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

En appliquant la formule du binôme à 1 et $\frac{1}{4}$, on en déduit que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{2k}}\binom{n}{k} = \frac{n}{4}\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}}$$

■

Exercice 13
Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{2n}{2k}$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{2}^{2k}\binom{2n}{2k}$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{2}^{2k+1}\binom{2n}{2k+1}$.

Alors $A_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{2n}{2k}$ et si on note pour tout $p \in [\![0\,,\, 2n]\!]\,,\ u_p = \sqrt{2}^p\binom{2n}{p}$, A_n se réécrit $\sum_{k=0}^{n} u_{2k}$.

De la même manière, B_n se réécrit $\sum_{k=0}^{n-1} u_{2k+1}$.
D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\boxed{A_n + B_n} = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \sqrt{2}^k \boxed{= (1+\sqrt{2})^{2n}}$$

D'autre part,

$$\boxed{A_n - B_n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-\sqrt{2})^k \boxed{= (1-\sqrt{2})^{2n}}$$

En fin de compte,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n}{2k}} = A_n = \frac{(A_n + B_n) + (A_n - B_n)}{2} \boxed{= \frac{(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n}}{2}}$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n \rfloor} 2^k \binom{n}{2k} = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}$ ■

Exercice 14
Montrer que $\forall x\,, y \in \mathbb{R}^+\,, \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Solution. Soient $x\,, y \in \mathbb{R}^+$, alors $x + y \geq 0$ donc $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ et $\sqrt{x+y}$ sont bien définis. De plus, comme une racine carré est toujours positive, on a donc l'équivalence en passant au carré

$$0 \leq \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \Leftrightarrow \quad x + y \leq x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \sqrt{xy}$$

Cette dernière condition étant vérifiée pour tout x et y positifs, on a bien l'égalité recherché. ■

Exercice 15
Montrer que $\forall x\,, y \in \mathbb{R}\,, \forall \lambda > 0\,, 2xy \leq \dfrac{x^2}{\lambda} + \lambda y^2$

Solution. Soient $x\,, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on a

$$\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda}y\right)^2 = \frac{x^2}{\lambda} - \underbrace{2 \times \frac{x}{\sqrt{\lambda}} \times \sqrt{\lambda}y}_{=2xy} + \lambda y^2$$

Or on sait qu'un carré est toujours positif. Donc on a

$$\frac{x^2}{\lambda} - 2xy + \lambda y^2 \geq 0$$

C'est-à-dire que

$$\frac{x^2}{\lambda} + \lambda y^2 \geq 2xy$$

■

Exercice 16

Résoudre l'inéquation $\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right| < 2$

Solution. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, On va distinguer les cas en fonction du signe de $\dfrac{x-2}{x+1}$.

- Supposons que $x - 2 \geq 0$.
  - Supposons que $x + 1 \geq 0$.
    Alors $x \geq 2$ et $x \geq -1$ donc $x \geq 2$.
    De plus, $\dfrac{x-2}{x+1} \geq 0$ donc il faut résoudre l'équation $\dfrac{x-2}{x+1} \leq 2$.
    Cela revient à voir si $x - 2 > 2(x+1)$ ie $-2-2 < x$, ce qui est toujours vrai comme $x \geq 2$.
    Donc l'ensemble $[2, +\infty[$ est solution.
  - Supposons que $x + 1 < 0$.
    Alors $x \geq 2$ et $x < -1$, ce n'est pas possible.
- Supposons que $x - 2 < 0$.
  - Supposons que $x + 1 \geq 0$.
    On a alors $x < 2$ et $x \geq -1$, sur cet intervalle, $\dfrac{x-2}{x+1} \leq 0$. Donc on doit résoudre $\dfrac{x-2}{x+1} > -2$.
    C'est équivalent à $(x-2) > -2x-2$ ($x+1$ est positif donc la multiplication conserve l'ordre), i.e. $0 > x$. Donc l'ensemble $]0, 2[$ est solution.
  - Supposons que $x+1 < 0$. Alors $x < -1$. Dans ce cas, il faut résoudre l'équation $\dfrac{x-2}{x+1} < 2$.
    Cela équivaut à dire que $x - 2 > 2x + 2$ ie $x < -4$. Donc l'ensemble $]-\infty, -4[$ est solution

Finalement, en regroupant les intervalles solutions, on obtient $S =]-\infty, -4[\cup [0, +\infty[$. ■

Exercice 17

Montrer que $\forall x \in [0, 1], x - \dfrac{1}{6}x^3 \leq \sin(x) \leq x$

Posons $f(x) = \sin(x) - x$.
Alors $f'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$

Exercice 18

Étudier la fonction $f : x \longmapsto 2\,x + \ln(x+1) - \dfrac{1}{x}$

Exercice 19

Étudier la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

Exercice 20

Étudier la fonction $f : x \longmapsto xe^{-x^2}$

Exercice 21

Étudier la fonction $f : x \longmapsto x^2e^x$

Exercice 22

Étudier les variations de $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{2x^3}{1+x^2}$, ses asymptotes et la position de la courbe de f par rapport à celles-ci.
En déduire un graphe précis de f.
Étudier le signe de $f(x) - x$ et tracer sur le graphe précédent la première bissectrice.

Exercice 23

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f : x > 0 \longmapsto x^{n-1}\ln(x)$. Calculer $f^{(n)}(x)$.

Solution. On sait que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{d^k}{dx^k}\left\langle \ln \right\rangle(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$$

Et que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{d^k}{dx^k}\left\langle Id^{n-1} \right\rangle(x) = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{n-1-k}$$

D'après la formule du binôme de Leibniz, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(Id^{n-1})^{(n)}(x)\ln^{(n-k)}(x)$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f^{(n)}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{(n-1)-k}\frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!}{x^{n-k}}\right) + 0 \times \ln(x)$$

On remarque que x^{n-k} et x^{n-1-k} se simplifient en x^{-1} et que les facteurs $(n-1-k)!$ se s'annulent :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(n-1)!\,x^{-1}(-1)^{n-k-1} = \frac{(n-1)!}{x}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{(n-1)-k}$$

D'après la formule du binôme de Newton, on sait que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k} = (1-1)^n \underbrace{=0}_{\text{car } n>0}$$

Donc en sortant le dernier terme et en rajoutant -1 en puissance :

$$(-1)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{n-1-k}\right) + \binom{n}{n} = 0$$

On a alors

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{n-1-k}=\binom{n}{n}=1$$

D'où finalement,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\, f^{(n)}(x)}=\frac{(n-1)!}{x}\times 1=\boxed{\frac{(n-1)!}{x}}$$

■

Exercice 24

Soient $a\,,b\in\mathbb{R}$, posons $f:x\in\mathbb{R}\longmapsto(x-a)^n(x-b)^n$. Calculer $f^{(n)}(x)$.

En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$

Solution. Soient $a\,,b\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$, alors on note

$$g_a=x\longmapsto(x-a)^n\quad\text{et}\quad g_b=x\longmapsto(x-b)^n$$

D'après la formule de Leibniz, comme $f=g_ag_b$:

$$\forall x\in\mathbb{R},\, f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g_a^{(k)}g_b^{(n-k)}$$

Or

$$\forall k\in[\![\,0\,,\,n\,]\!]\,,g_a^{(k)}=\frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k}$$

Donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\, f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k}\frac{n!}{k!}(x-b)^k=n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(x-a)^{n-k}(x-b)^k$$

Si $a=b$, on a alors

$$\forall x\in\mathbb{R},\, f^{(n)}(x)=n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(x-a)^n=n!(x-a)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

D'autre part, $f=x\longmapsto(x-a)^n(x-a)^n=(x-a)^{2n}$, donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\, f^{(n)}(x)=\frac{(2n)!}{(2n-n)!}(x-a)^{2n-n}=\frac{(2n)!}{n!}(x-a)^n$$

Ainsi, par unicité de la dérivée, on a

$$\forall x\in\mathbb{R},\, n!(x-a)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\frac{(2n)!}{n!}(x-a)^n$$

Donc en divisant à gauche et à droite par $n\,!(x-a)^n$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \binom{2n}{n}$$

$\blacksquare$

Démonstration. **Méthode géométrique**

Étape 1 : Limite de $\sin(x)/x$ en 0

Avec un dessin, on se rend compte qu'on a l'inclusion des aires suivantes :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{1}$$

La première inégalité nous donne

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \sin(x)\cos(x) \leq x$$

Donc

$$\frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

La seconde inégalité nous donne

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Donc

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x}$$

Ainsi, on a

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

Comme cos sont continues sur $\mathbb{R}$, on peut faire tendre x vers 0, on obtient alors par passage à la limite :

$$\lim_{x \mapsto 0} \cos(x) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\cos(0)} = 1$$

Donc $\displaystyle\lim_{x \longmapsto 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ d'après le théorème des gendarmes. Comme sin est continue sur $\mathbb{R}$, la limite à gauche est égale à la limite à droite. On a donc

$$\lim_{x \longmapsto 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Étape 2 : Calcul du taux d'accroissement de cos

Soient $x\,, h \in \mathbb{R}$, alors d'après les formules trigonométriques :

$$\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \frac{-2\sin\left(\dfrac{(x+h)+x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{(x+h)-x}{2}\right)}{h}$$

Comme $\dfrac{(x+h)-x}{2} = \dfrac{h}{2}$ et que $\dfrac{(x+h)+x}{2} = x + \dfrac{h}{2}$, on a :

$$\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \frac{-2\sin\left(x + \dfrac{h}{2}\right)\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)}{h} = -\frac{2\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)}{h} \times \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

Or on a montré que $\lim\limits_{x \longmapsto 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ donc en appliquant ça à $\frac{h}{2}$, on a :

$$\lim_{h \longmapsto 0} \frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = 1$$

Comme sin est une fonction continue, on a d'autre part

$$\lim_{h \longmapsto 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = \sin(x)$$

Ainsi,

$$-\left(\lim_{h \longmapsto 0} \frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}\right) \times \left(\lim_{k \longmapsto 0} \sin\left(x + \frac{k}{2}\right)\right) = -\sin(x)$$

Donc

$$\lim_{h \longmapsto 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = -\sin(x)$$

On a ainsi montré que $\frac{d}{dx}\langle\cos\} = -\sin$. On sait de plus que $\sin = \cos\left(\cdot - \frac{\pi}{2}\right)$. Par composition des dérivées, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d}{dx}\langle\sin\rangle(x) = \frac{d}{dx}\left\langle\cos\left(\cdot - \frac{\pi}{2}\right)\right\rangle(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Et

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\left(\sin(x)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \cos(x)\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}\right) = \cos(x)$$

On en déduit alors que $\frac{d}{dx}\langle\sin\rangle = \cos$ □

Exercice 25
Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}(\ln(x))^3}{x^4} \qquad \lim_{x \to 0^+} x^2(\ln(x^3))^3 \qquad \lim_{x \to -\infty} x^2 e^x(\ln(-x))^3$$

Exercice 26
Résoudre l'équation

$$2x\ln(x) + 3(x-1) = 0$$

$x = 1$

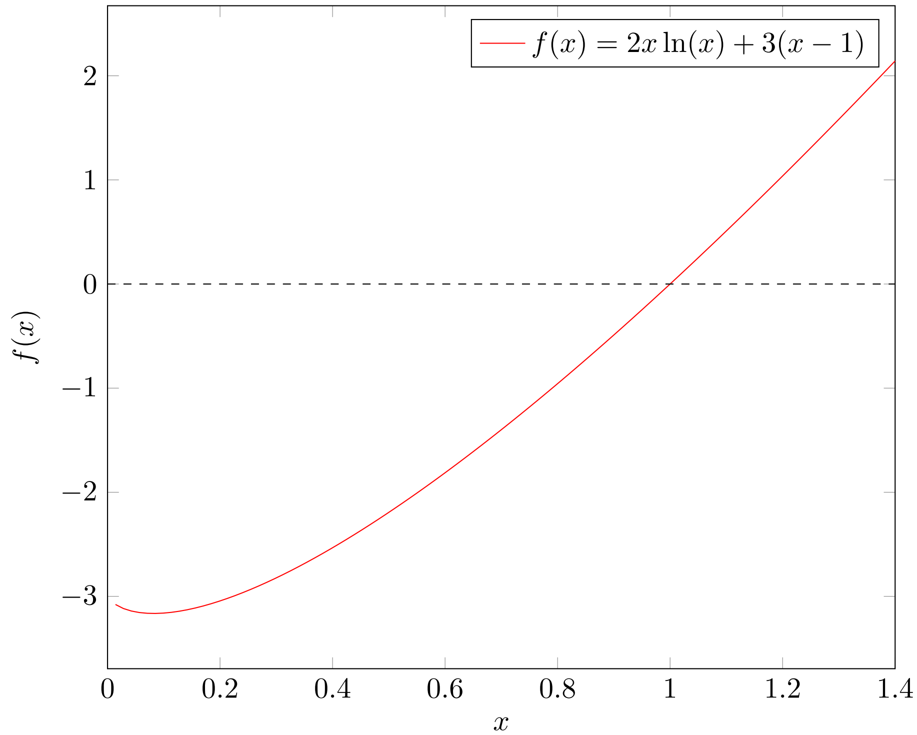

Fig. 1.1: Graphique de $2x\ln(x) + 3(x-1)$ sur $[0, 1.4]$

Exercice 27
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$3^x + 4^x = 5^x$$

Exercice 28
Montrer que

$$\forall x \in \left]0,1\right[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$$

Exercice 29
Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, /0 < x < y\ , \frac{y-x}{\ln(x)-\ln(y)} < \frac{x+y}{2}$$

Indication : On utilisera $t = \dfrac{y}{x}$

Exercice 30
Rappeler la formule trigonométrique $\sin(a+b)$. Montrer que

$$\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = \arcsin\left(\frac{56}{65}\right)$$

Exercice 31
Montrer que

$$\forall x \geq 0, \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1+x^2}$$

Exercice 32

Quel est le domaine de définition de $f : x \longmapsto \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$? Calculer sa dérivée. Conclusion ?

Exercice 33

Quel est le domaine de définition de $f : x \longmapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$? Calculer sa dérivée. Conclusion ?

Exercice 34

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\begin{cases} \cosh(x) + \sinh(y) = 4 \\ \sinh(x) + \sinh(y) = 1 \end{cases}$$

Exercice 35

Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation

$$\sinh(x) = y$$

Exercice 36

Montrer que

$$\mathbb{U} \setminus \{-1\} = \left\{ \frac{1+ia}{1-ia}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 37

Résoudre l'équation

$$z + \frac{1}{z} = 1$$

Exercice 38

Soit $(a\,,b) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que

$$|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|$$

et étudier le cas d'égalité.

Exercice 39

Soit $\omega = e^{2i\pi/5}$ et $x = \omega + \omega^{-1}$. Calculer $x^2 + x - 1$.

Que peut-on en déduire ?

Exercice 40

Résoudre l'équation

$$z^4 - z^3 + z^2 + 2 = 0$$

en remarquant que j est solution.

Exercice 41
Déterminer les racines quatrièmes de $-7-24i$.

Exercice 42
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$\overline{z}^n = z$$

Exercice 43
Résoudre l'équation
$$(z^2+1)^n = (z-i)^{2n}$$

Exercice 44
Soient ABC et ADE deux triangles équilatéraux directs et $ABCD$ un parallélogramme. Montrer que BFE est équilatéral direct.

Exercice 45
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et ω une racine n-ième de l'unité. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k$$

Exercice 46
Déterminer une CNS sur $(a\,,b) \in \mathbb{C}^2$ pour que les deux racines de $z^2+az+b=0$ aient même module.

Exercice 47
Résoudre les équations
$$\begin{cases} \cos(5x)+2\cos(3x)+3\cos(x)=0 \\ \cos(x)-\cos(2x)=\sin(3x) \end{cases}$$

Exercice 48
Résoudre l'équation
$$\cos(x)+\sin(x)=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$$
en posant $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Exercice 49
Étudier la fonction
$$f : x \longmapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+\sin(x)$$

Exercice 50
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, |\sin(nt)| \leq n|\sin(t)|$$

Exercice 51
Étudier la fonction
$$f : x \longmapsto \ln(\cosh(x))$$

Exercice 52
Calculer
$$\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3\left(\frac{\theta}{3^{k+1}}\right)$$

Exercice 53
Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\cos(k\theta)$$

Exercice 54
Calculer les primitives suivantes en précisant à chaque fois le ou les intervalles où ceci est légitime :
$$\int e^{-\sqrt{x}}dx \qquad \int \cos(\ln(x))dx \qquad \int \ln(1+x^2)dx$$
$$\int \arctan(x)dx \qquad \int x(\sin(x))^2dx \qquad \int \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+4)}dx$$
$$\int \cos(2x)\cos^2(x) \qquad \int \frac{1}{\sin(t)+\tan(t)}dx \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ en posant } u = \cos(x)$$

Exercice 55
Posons
$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n := \int \frac{1}{(1+x)^n}dx$$
À l'aide d'une intégration par parties, obtenir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
En déduire I_1 , I_2 et I_3

Exercice 56
Posons
$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int (1-x^2)^n dx$$

1. Établir la relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}
2. Calculer I_n
3. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}$

Exercice 57
Résoudre
$$y' + 2y = 2\sinh(2x)$$

Exercice 58
Résoudre
$$\sin(x)y' = \cos(x)y + 2x\sin^2(x) \text{ sur }]0,\pi[$$

Exercice 59
Résoudre
$$y'' + y' + y = e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Exercice 60
Résoudre
$$y'' - 2y' + 2y = e^x\sin^2(x)$$
avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

Exercice 61
Résoudre le système différentiel
$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases}$$
avec $x(0) = 2$ et $y(0) = -2$.

Exercice 62
Déterminer les $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x tf(t)dt = 1$$

Exercice 63
Résoudre
$$xy'' - y' - x^3y(x) = 0$$
sur $]0,+\infty[$ en posant $z(t) = y(\sqrt{t})$. On a donc $y(x) = z(x^2)$ puis $y'(x) = 2xz'(x^2)$...
Résoudre également sur $]-\infty, 0[$.

Exercice 64
Déterminer les suites réelles u vérifiant
$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, u_{n+k} = u_n u_k$$

Exercice 65
Si X est une partie de N,on note $\mathcal{P}_1(X)$ et $\mathcal{P}_2(X)$ les propositions suivantes :

$$\mathcal{P}_1(X) : \forall x \in X, (\exists y \in X) \,/ x < y$$

$$\mathcal{P}_2(X) : (\exists x \in X) \,/ \forall y \in \mathbb{N}, (x < y \Longrightarrow y \in X)$$

A-t-on $\mathcal{P}_1(X) \Longrightarrow \mathcal{P}_2(X)$? A-t-on $\mathcal{P}_2(X) \Longrightarrow \mathcal{P}_1(X)$?
Quel est le lien entre le fait que X est infini et les propriétés précédentes ?

Exercice 66
On note $\mathcal{P}(x\,,y)$ une propriété dépendant de deux réels x et y. On note A et B les propriétés suivantes :

$$A = \forall x \in X (\exists y \in X) \,/ \mathcal{P}(x, y)$$

$$B = (\exists y \in X) \,/ \mathcal{P}(x, y)$$

A implique-t-elle B ? B implique-t-elle A ?
On prend $\mathcal{P}(x\,,y)$ la propriété $x^2 - xy + a = 0$ avec a un réel. Pour quelles valeurs de a a-t-on A ?
Idem avec B.

Exercice 67
Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x^{n+2} \leq x^{n+1} + x^n$$

Exercice 68
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $k \in \mathbb{Z}$ pour qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$e^{i\theta} + e^{ik\theta} = 1$$

Exercice 69
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $f : x \longmapsto x + a\sin(x)$ soit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 70
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z réel pour qu'il existe $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$z = \frac{xy}{2x^2 + y^2 + 1}$$

Exercice 71
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{C}$ pour que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x + \alpha y = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0)$$

Chapitre 2

Racines exactes des polynômes de degré 2, 3 et 4

1 Expression générale des racines d'un polynôme de degré 2

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme du second degré. Alors, cherchons les racines de P.

Pour cela on doit résoudre l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Or

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{a^2}$$

Donc

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

Donc

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

D'où

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Finalement,

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2 Expression générale des racines d'un polynôme de degré 3

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme du troisième degré. Alors, cherchons les racines de P.
Pour cela on doit résoudre l'équation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

C'est équivalent à

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

On va éliminer le terme en x^2. Pour cela, on va utiliser le développement de $\left(x+\dfrac{b}{3a}\right)^3$. Posons $\beta = x+\dfrac{b}{3a}$,alors l'équation se transforme en

$$\left(\beta-\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{b}{a}\left(\beta-\frac{b}{3a}\right)^2+\frac{c}{a}\left(\beta-\frac{b}{3a}\right)+\frac{d}{a}=0$$

Donc

$$\beta^3+\underbrace{\left(\frac{b}{a}-3\frac{b}{3a}\right)}_{=0}\beta^2+\underbrace{\left(\frac{c}{a}+(3-2)\frac{b}{a}\frac{b}{3a}\right)}_{p}\beta+\underbrace{\left(\frac{d}{a}+\frac{b}{27a}\left(\frac{2b^2}{a^2}-\frac{9c}{a}\right)\right)}_{q}=0$$

On s'est donc ramené a l'équation $\beta^3+p\beta+q=0$
Prenons maintenant $u\,,v\in\mathbb{R}\Big/ uv=-\dfrac{p}{q}$ et $\beta=u+v$ (on va montrer par la suite que u et v sont bien définis)
Alors

$$u^3v^3=-\frac{p^3}{27}$$

D'autre part,

$$\underbrace{(u+v)^3+p(u+v)}_{=-q}=u^3+v^3+3(u+v)uv+p(u+v)=u^3+v^3+\underbrace{3(uv+\frac{p}{3})(u+v)}_{=0}$$

Donc $u^3+v^3=-q$
On remarque astucieusement qu'on connait la somme et le produit de u^3 et v^3 donc ils vérifient l'équation polynômiale de degré 2

$$X^2-\text{somme}X+\text{produit}=0$$

i.e.

$$X^2+qX-\frac{p^3}{27}=0$$

On a alors $\Delta=q^2+\dfrac{4p^3}{27}$. On ne connait pas le signe de Δ et il est parfois négatif. Ici on ne va traiter que le cas ou Δ est positifs, l'autre cas sera à mettre en relation avec le chapitre sur les complexes. On connait les solutions de cette équation, on en déduit que

$$u^3,v^3=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}}{2}$$

Donc

$$\beta=u+v=\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\dfrac{4p}{3}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}}{2}}$$

Donc finalement

$$x=\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}}{2}}-\frac{b}{3a}$$

3 Expression générale des racines d'un polynôme de degré 4

Soient $(a\,,b\,,c\,,d\,,e) \in \mathbb{R}^5$
Soit $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$ un polynôme du quatrième degré. Alors, cherchons les racines de P.
Pour cela on doit résoudre l'équation

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Pour cela, posons $x = \beta - \dfrac{b}{4a}$. En remplaçant x par son expression en fonction de u et en développant on obtient l'équation

$$u^4 + \underbrace{\left(\frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2}\right)}_{p} u^2 + \underbrace{\left(\frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3}\right)}_{q} u + \underbrace{\left(\frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{cb^2}{16a^3} - 3\left(\frac{b}{4a}\right)^4\right)}_{r} = 0$$

Donc

$$u^4 + u^2 + qu + r = 0$$

Cette forme d'équation fait fortement penser aux équations bicarrées, mais le terme en u est gênant. On va essayer d'exprimer le polynôme sous une forme plus simple cependant.
Cherchons $\alpha\,,\beta\,,\gamma \in \mathbb{R} \big/ (u^2+\alpha)^2 + \beta(u+\gamma)^2 = u^4 + pu^2 + qu + r$
Pour cela, on va chercher des conditions en identifiant les monômes de degrés égaux. Ainsi, on obtient,

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 2\alpha + \beta = p \\ 2\beta\gamma = q \\ \alpha^2 + \beta\gamma^2 = r \end{cases}$$

La dernière équation nous donne après substitution des variables,

$$\alpha^2 + \beta\gamma^2 = \alpha^2 + \frac{q^2}{4\beta} = \alpha^2 + \frac{q^2}{4(p-2\alpha)} = r$$

Ainsi

$$-2\alpha^3 + p\alpha^2 + 2r\alpha + \left(\frac{q^2}{4} - rp\right) = 0$$

Il s'agit d'une équation du troisième degré donc il existe toujours α qui vérifie cette relation. Cela nous donne automatiquement β et γ. Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation

$$(u^2 + \alpha) = -\gamma(u+\beta)^2$$

On obtient alors 2 équation du second degré, à savoir,

$$u^2 + \sqrt{-\gamma}u + (\alpha + \sqrt{-\gamma})$$

Et

$$u^2 - \sqrt{-\gamma}u + (\alpha - \sqrt{-\gamma})$$

Cela nous donne les solutions générales