

TRIGONOMETRIE

Lemme 1

Soit f une fonction dérivable au voisinage de 0 telle que $f'(x) = o_0(x^n)$ alors $f(x) = o_0(x^{n+1})$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, alors

$$\exists \alpha > 0 \ / \forall x \in]-\alpha, \alpha[, |f'(x)| \leq \epsilon |x^n|$$

Soit $x \in [0, \alpha]$, on sait que

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt$$

Donc par inégalité triangulaire :

$$|f(x) - f(0)| \leq \int_0^x |f'(t)| dt$$

Comme $x \in]0, \alpha[$, on a $x < \alpha$ et $[0, x] \subset]0, \alpha[$, on peut donc appliquer l'hypothèse de domination en tout point de l'intégrale :

$$\int_0^x |f'(t)| dt \leq \int_0^x \epsilon |t^n| dt = \epsilon \int_0^x |t^n| dt$$

Comme $t \mapsto t^n$ est positive sur $[0, t]$, on peut enlever les valeurs absolues. on a alors

$$\epsilon \int_0^x t^n dt = \epsilon \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \epsilon \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \underbrace{\frac{0^{n+1}}{n+1}}_{=0} \right) = \frac{\epsilon}{n+1} x^{n+1}$$

Comme $n > 1$, on a ainsi $n+1 > 2$ d'où $\frac{1}{n+1} \leq 1$ donc finalement

$$\forall x \in [0, \alpha[, |f(x) - f(0)| \leq \frac{\epsilon}{n+1} x^{n+1} \leq \epsilon x^{n+1}$$

Si $x \in]-\alpha, 0]$, alors on peut appliquer l'inégalité triangulaire en inversant les bornes

$$|f(x) - f(0)| \leq \int_x^0 |f'(t)| dt \leq \epsilon \int_x^0 |t^n| dt$$

Comme $t \mapsto t^n$ est une fonction négative sur $[-\alpha, 0]$, on a peut alors changer les bornes de l'intégrale et

on retombe alors sur la forme précédente.

$$|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon \int_x^0 -t^n dt \leq \varepsilon \int_0^x t^n dt \leq \varepsilon x^{n+1}$$

Ainsi, on a

$$\forall x \in [-\alpha, \alpha], |f(x) - f(0)| \leq \frac{\varepsilon}{n+1} x^{n+1} \leq \varepsilon x^{n+1}$$

□

I Trigonométrie du cercle

1 Addition et multiple d'angle

Sous espace propre

Soient E un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension quelconque, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on appelle **sous espace propre** associé à λ l'ensemble

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda Id_E) = \{x \in E / u(x) = \lambda x\}$$

Exercice 101

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\min\{ab, bc, ca\} > 1$. Montrer que

$$\sqrt[3]{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \leq \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 + 1$$

Lemme 2

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\sum_{k=0}^n z^k = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{si } z \neq 1 \\ n+1 & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$

Cas 1 : Supposons que $z \neq 1$, alors on peut appliquer le résultat précédent à z et à 1 :

$$1 - z^{n+1} = (1 - z) \times \sum_{k=0}^n z^k \underbrace{1^{n-k}}_{=1}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Cas 2 : Supposons que $z = 1$

$$\sum_{k=0}^n z^k = \sum_{k=0}^n 1 = (n+1) \times 1 = n+1$$

□

Théorème 3 : Binôme de Newton

Soient $x, y \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. On raisonne par récurrence,

Initialisation : $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^0 b^{0-k} = 1 \times a^0 b^0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n) : (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ est vérifiée pour un certain rang n .

Montrons que $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$:

On a par hypothèse de récurrence :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

on développe le produit. Par linéarité de la somme, on obtient

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-1-k}$$

On ré-indexe la première somme $k \leftarrow k+1$, donc

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-1-k}$$

On sépare le premier et le dernier terme pour pouvoir regrouper tous les autres dans une même somme :

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k}$$

Les coefficients binomiaux vérifient la relation de Pascal donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

□

Démonstration. On a $\frac{d}{dx} \langle \exp \circ (i \text{ Id}) \rangle (x) = i e^{ix}$

On peut réécrire l'exponentielle complexe sous sa forme trigonométrique, ce qui nous donne par linéarité :

$$\frac{d}{dx} \langle \exp \circ (i \text{ Id}) \rangle (x) = \frac{d}{dx} \langle \cos + i \sin \rangle (x) = \frac{d}{dx} \langle \cos \rangle (x) + i \frac{d}{dx} \langle \sin \rangle (x)$$

Donc comme $i^2 = 1$,

$$i e^{ix} = i \times (\cos(x) + i \sin(x)) = -\sin(x) + i \cos(x)$$

En associant partie réelle et partie imaginaire, on obtient alors :

$$\frac{d}{dx} \langle \cos \rangle (x) = -\sin(x) \quad \frac{d}{dx} \langle \sin \rangle (x) = \cos(x)$$

Pour la tangente, on applique les formules des quotients :

$$\frac{d \tan}{dx} = \frac{d}{dx} \left\langle \frac{\sin}{\cos} \right\rangle = \frac{\frac{d}{dx} \langle \sin \rangle \cos - \sin \frac{d}{dx} \langle \cos \rangle}{\cos^2} = \frac{\cos \cos + \sin \sin}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$

De plus, on a par distributivité

$$\frac{d}{dx} \langle \tan \rangle = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{\cos^2}{\cos^2} + \frac{\sin^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2$$

□

Exercice 102 : Calcul de sommes polynomiales

Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$\sum_{k=1}^n k$$

$$\sum_{k=1}^n k^2$$

$$\sum_{k=1}^n k^3$$

Démonstration. Méthode 1 : Par récurrence

Démontrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Le résultat ne change pas si on ajoute le terme pour $k = 0$ car il est nul.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a d'une part, $\sum_{k=0}^0 k = 0$ et d'autre part, on a $\frac{0(0+1)}{2} = 0$.

Donc $\sum_{k=0}^n k = \frac{0(0+1)}{2}$ i.e., $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ alors, démontrons $\mathcal{P}(n+1)$:

Remarquons que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = 0 + 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) = \left(\sum_{k=0}^n k \right) + (n+1)$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)}{2} \times (2+n) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Ce qui est bien la formule qu'on a supposée, appliquée en $n+1$. Donc si $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifié, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée aussi.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Méthode 2 : Par l'utilisation d'un polynôme de télescopage

Cette méthode permet de trouver les formules à démontrer contrairement à la récurrence. On va chercher un polynôme P tel que $P(X+1) - P(X) = X$ en raisonnant par analyse-synthèse. On impose une condition qui va simplifier notre problème en ne considérant que les polynômes de degré 2.

Étape 1 : Analyse : La recherche du polynôme

Supposons qu'il existe un tel polynôme P alors comme P est de degré 2, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P = aX^2 + bX + c$. On calcule explicitement $P(X+1) - P(X)$:

$$P(X+1) - P(X) = a(X+1)^2 + b(X+1) + c - (aX^2 + bX + c) = 2aX + (a+b)$$

Comme P vérifie $P(X+1) - P(X) = X$, alors

$$P(X+1) - P(X) = 2aX + (a+b)$$

En identifiant les coefficients, on doit nécessairement avoir $a = \frac{1}{2}$ et $b = -a = -\frac{1}{2}$.

Ainsi, si P est solution du problème, alors

$$P \in \left\{ \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \right\}$$

Synthèse : Soit $c \in \mathbb{R}$. Posons $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$ et définissons

$$P = aX^2 + bX + c = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + c$$

P vérifie $P(X+1) - P(X) = 2X$ d'après ce que nous avons vu dans analyse. c n'intervient pas dans l'égalité, donc prenons arbitrairement $c = 0$ car cela permet d'avoir $P(0) = c = 0$ et de simplifier les calculs par la suite.

Étape 2 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, alors

$$P(k+1) - P(k) = 2k$$

Ainsi, si on somme pour toutes les valeurs de k de 0 jusqu'à n cette égalité on obtient :

$$\sum_{k=0}^n (P(k+1) - P(k)) = \sum_{k=0}^n 2k = 2 \sum_{k=0}^n k$$

Étape 3 : Or d'autre part, par linéarité de la somme

$$\sum_{k=0}^n (P(k+1) - P(k)) = \sum_{k=0}^n P(k+1) - \sum_{k=0}^n P(k)$$

En posant $i = k + 1$ dans la première somme, on obtient :

$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(i) - \sum_{k=0}^n P(k) = [P(1) + P(2) + \dots + P(n) + P(n+1)] - [P(0) + P(1) + \dots + P(n)]$$

On remarque alors qu'il existe un télescopage et comme $P(0) = c = 0$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^n (P(k+1) - P(k)) = P(n+1) - P(0) = P(n+1)$$

Donc

$$\sum_{k=0}^n k = P(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+1-1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

D'où

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

□

Exercice 103

Résoudre suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 3x + ay + 2z + t = a \\ 2x + 2y + z + 3t = 0 \\ x + 5y - z + 4t = 5 \end{cases}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, alors

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 3x + ay + 2z + t = a \\ 2x + 2y + z + 3t = 0 \\ x + 5y - z + 4t = 5 \end{cases} \quad \text{ssi}$$

Exercice 104

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que le système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda x + 2y = 0 \\ x - \lambda y + z = 0 \\ 2y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

n'admette pas que la solution nulle

Exercice 105

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, discuter la nature géométrique de l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

Exercice 106

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Discuter la nature géométrique de l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

Exercice 107

Calculer $\sum_{k=1}^n k \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ et $\sum_{k=1}^n k k!$ en faisant apparaître des sommes télescopiques

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \sum_{k=1}^n k \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)$. D'après les propriétés de la fonction logarithme, on a

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln \left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$$

Ainsi,

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) = k \ln(k+1) - k \ln(k) = (k+1) \ln(k+1) - k \ln(k) - \ln(k)$$

La dernière factorisation permet de faire apparaître un télescopage. Notons

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k := k \ln(k)$$

Alors,

$$A_n = \sum_{k=1}^n u_{k+1} - u_k - \ln(k) = \sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) - \sum_{k=1}^n \ln k$$

Par télescoping, on obtient

$$A_n = (n+1) \ln(n+1) - 1 \times 0 - \ln \left(\prod_{k=1}^n k \right) = \ln \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{n!} \right)$$

■

Exercice 108

Calculer

$$\prod_{p=2}^n \frac{p^3 - 1}{p^3 + 1}$$

Soit $n \geq 2$ et $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on remarque que l'on peut factoriser la fraction rationnelle de la manière suivante :

$$\frac{p^3 - 1}{p^3 + 1} = \frac{p-1}{p+1} \times \frac{p^2 + p + 1}{p^2 - p + 1} = \frac{p-1}{p+1} \times \frac{(p+1)^2 - (p+1) + 1}{p^2 - p + 1}$$

Par associativité du produit, on a :

$$\prod_{p=2}^n \frac{p^3 - 1}{p^3 + 1} = \prod_{p=2}^n \frac{p-1}{p+1} \times \frac{(p+1)^2 - (p+1) + 1}{p^2 - p + 1} = \left(\prod_{p=2}^n \frac{p-1}{p+1} \right) \times \left(\prod_{p=2}^n \frac{(p+1)^2 - (p+1) + 1}{p^2 - p + 1} \right)$$

Notons $A_n = \prod_{p=2}^n \frac{p-1}{p+1}$ la première partie du produit et $B_n = \frac{(p+1)^2 - (p+1) + 1}{p^2 - p + 1}$ la seconde. On a alors par linéarité, puis par définition de la factorielle :

$$\boxed{A_n} = \prod_{p=2}^n \frac{p-1}{p+1} = \frac{\prod_{p=2}^n (p-1)}{\prod_{p=2}^n (p+1)} = \frac{(n-1)!}{\frac{(n+1)!}{2!}} = \boxed{\frac{2}{n(n+1)}}$$

D'autre part, le second produit est un produit télescopique évident, donc

$$\boxed{B_n} = \prod_{p=2}^n \frac{(p+1)^2 - (p+1) + 1}{p^2 - p + 1} = \frac{(n+1)^2 - (n+1) + 1}{(2)^2 - (2) + 1} = \boxed{\frac{n^2 + n + 1}{3}}$$

Ainsi, on obtient

$$\boxed{\prod_{p=2}^n \frac{p^3 - 1}{p^3 + 1}} = A_n \times B_n = \boxed{\frac{2}{3} \times \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)}}$$

■

Exercice 109

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n k$, calculer rapidement $\sum_{k=1}^{2n-1} S_k$

Exercice 110

Soient $n, m \in \mathbb{N} / n \leq m$. Que représente sur le triangle de Pascal la somme $\sum_{k=n}^m \binom{k}{n}$?

Conjecturez la valeur de cette somme puis prouver le résultat.

Cette somme correspond à la somme d'une colonne du triangle de Pascal. D'après la formule de la relation de Pascal, on a

$$\forall k \in \llbracket n+1, m \rrbracket, \binom{k}{n} + \binom{k}{n+1} = \binom{k+1}{n+1}$$

Donc on a

$$\forall k \in \llbracket n+1, m \rrbracket, \binom{k}{n} = \binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1}$$

En sommant les égalités pour $k = n+1$ jusqu'à m (sans le premier terme), on a alors

$$\sum_{k=n+1}^m \binom{k}{n} = \sum_{k=n+1}^m \left(\binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1} \right)$$

On remarque qu'il y a un télescopage qui apparaît. On obtient alors

$$\sum_{k=n+1}^{m+1} \binom{k}{n+1} - \sum_{k=n}^m \binom{k+1}{n+1} = \binom{m+1}{n+1} - \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{=1} = \binom{m+1}{n+1} - 1$$

Donc

$$\sum_{k=n+1}^m \binom{k}{n} = \binom{n}{n} + \sum_{k=n+1}^m \binom{k}{n} = \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} + \left(\binom{m+1}{n+1} - 1 \right) = \binom{m+1}{n+1}$$

■

Exercice 111

Calculer

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a d'après la relation de la diagonale du binôme :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$$

On en déduit que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$$

Ainsi, en remplaçant par cette nouvelle expression le terme général de la somme, on obtient :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \frac{2^n}{n+1}$$

■

Exercice 112

Calculer

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{2k}} \binom{n}{k}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{2k}} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

Or on sait d'après la relation de la diagonale que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$, en réinjectant cette égalité dans la somme, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \sum_{k=1}^n k \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

En effectuant un changement d'indice ($k \leftarrow k+1$) et en ajustant la puissance sur $\frac{1}{4}$, on fait apparaître le binôme de Newton :

$$n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} = n \left(\frac{1}{4}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

En appliquant la formule du binôme à 1 et $\frac{1}{4}$, on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{2k}} \binom{n}{k} = \frac{n}{4} \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}$$

■

Exercice 113

Calculer

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{2n}{2k}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \sum_{k=0}^n \sqrt{2}^{2k} \binom{2n}{2k}$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{2}^{2k+1} \binom{2n}{2k+1}$.

Alors $A_n = \sum_{k=0}^n 2^k \binom{2n}{2k}$ et si on note pour tout $p \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $u_p = \sqrt{2}^p \binom{2n}{p}$, A_n se réécrit $\sum_{k=0}^n u_{2k}$. De la

même manière, B_n se réécrit $\sum_{k=0}^{n-1} u_{2k+1}$.

D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$A_n + B_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \sqrt{2}^k = (1 + \sqrt{2})^{2n}$$

D'autre part,

$$A_n - B_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-\sqrt{2})^k = (1 - \sqrt{2})^{2n}$$

En fin de compte,

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{2n}{2k} = A_n = \frac{(A_n + B_n) + (A_n - B_n)}{2} = \frac{(1 + \sqrt{2})^{2n} + (1 - \sqrt{2})^{2n}}{2}$$

On en déduit que $\sum_{k=0}^{\lfloor n \rfloor} 2^k \binom{n}{2k} = \frac{(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n}{2}$ ■

Exercice 114

Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$, alors $x + y \geq 0$ donc \sqrt{x} , \sqrt{y} et $\sqrt{x+y}$ sont bien définis. De plus, comme une racine carrée est toujours positive, on a donc l'équivalence en passant au carré

$$0 \leq \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow x + y \leq x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{xy}$$

Cette dernière condition étant vérifiée pour tout x et y positifs, on a bien l'égalité recherché. ■

Exercice 115

Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda > 0, 2xy \leq \frac{x^2}{\lambda} + \lambda y^2$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on a

$$\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda}y\right)^2 = \frac{x^2}{\lambda} - \underbrace{2 \times \frac{x}{\sqrt{\lambda}} \times \sqrt{\lambda}y}_{=2xy} + \lambda y^2$$

Or on sait qu'un carré est toujours positif. Donc on a

$$\frac{x^2}{\lambda} - 2xy + \lambda y^2 \geq 0$$

C'est-à-dire que

$$\frac{x^2}{\lambda} + \lambda y^2 \geq 2xy$$

■

Exercice 116

Résoudre l'inéquation $\left|\frac{x-2}{x+1}\right| < 2$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, On va distinguer les cas en fonction du signe de $\frac{x-2}{x+1}$.

- Supposons que $x - 2 \geq 0$.
 - Supposons que $x + 1 \geq 0$.
 Alors $x \geq 2$ et $x \geq -1$ donc $x \geq 2$.
 De plus, $\frac{x-2}{x+1} \geq 0$ donc il faut résoudre l'équation $\frac{x-2}{x+1} \leq 2$.
 Cela revient à voir si $x - 2 > 2(x + 1)$ ie $-2 - 2 < x$, ce qui est toujours vrai comme $x \geq 2$.
 Donc l'ensemble $[2, +\infty[$ est solution.
 - Supposons que $x + 1 < 0$.
 Alors $x \geq 2$ et $x < -1$, ce n'est pas possible.
- Supposons que $x - 2 < 0$.
 - Supposons que $x + 1 \geq 0$.
 On a alors $x < 2$ et $x \geq -1$, sur cet intervalle, $\frac{x-2}{x+1} \leq 0$. Donc on doit résoudre $\frac{x-2}{x+1} > -2$.
 C'est équivalent à $(x-2) > -2x-2$ ($x+1$ est positif donc la multiplication conserve l'ordre),
 i.e. $0 > x$. Donc l'ensemble $]0, 2[$ est solution.
 - Supposons que $x + 1 < 0$. Alors $x < -1$. Dans ce cas, il faut résoudre l'équation $\frac{x-2}{x+1} < 2$.
 Cela équivaut à dire que $x - 2 > 2x + 2$ ie $x < -4$. Donc l'ensemble $] -\infty, -4[$ est solution

Finalement, en regroupant les intervalles solutions, on obtient $S =]-\infty, -4[\cup [0, +\infty[$.

■

Exercice 117

Montrer que $\forall x \in [0, 1], x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin(x) \leq x$

Posons $f(x) = \sin(x) - x$.

Alors $f'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$

Exercice 118

Étudier la fonction $f : x \mapsto 2x + \ln(x+1) - \frac{1}{x}$

Exercice 119

Étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

Exercice 120

Étudier la fonction $f : x \mapsto xe^{-x^2}$

Exercice 121

Étudier la fonction $f : x \mapsto x^2e^x$

Exercice 122

Étudier les variations de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2x^3}{1+x^2}$, ses asymptotes et la position de la courbe de f par rapport à celles-ci.

En déduire un graphe précis de f .

Étudier le signe de $f(x) - x$ et tracer sur le graphe précédent la première bissectrice.

Exercice 123

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f : x > 0 \mapsto x^{n-1} \ln(x)$. Calculer $f^{(n)}(x)$.

On sait que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{d^k}{dx^k} \langle \ln \rangle (x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$$

Et que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{d^k}{dx^k} \langle Id^{n-1} \rangle (x) = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} x^{n-1-k}$$

D'après la formule du binôme de Leibniz, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (Id^{n-1})^{(n)}(x) \ln^{(n-k)}(x)$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f^{(n)}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} x^{(n-1)-k} \frac{(-1)^{n-k-1} (n-k-1)!}{x^{n-k}} \right) + 0 \times \ln(x)$$

On remarque que x^{n-k} et x^{n-1-k} se simplifient en x^{-1} et que les facteurs $(n-1-k)!$ se s'annulent :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (n-1)! x^{-1} (-1)^{n-k-1} = \frac{(n-1)!}{x} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{(n-1)-k}$$

D'après la formule du binôme de Newton, on sait que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} = (1-1)^n \underbrace{= 0}_{\text{car } n > 0}$$

Donc en sortant le dernier terme et en rajoutant -1 en puissance :

$$(-1) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-1-k} \right) + \binom{n}{n} = 0$$

On a alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-1-k} = \binom{n}{n} = 1$$

D'où finalement,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x} \times 1 = \frac{(n-1)!}{x}}$$

■

Exercice 124

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, posons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x-a)^n (x-b)^n$. Calculer $f^{(n)}(x)$.

En déduire $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors on note

$$g_a = x \mapsto (x-a)^n \quad \text{et} \quad g_b = x \mapsto (x-b)^n$$

D'après la formule de Leibniz, comme $f = g_a g_b$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g_a^{(k)} g_b^{(n-k)}$$

Or

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, g_a^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} (x-a)^{n-k}$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (x-a)^{n-k} \frac{n!}{k!} (x-b)^k = n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (x-a)^{n-k} (x-b)^k$$

Si $a = b$, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (x-a)^n = n! (x-a)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

D'autre part, $f = x \mapsto (x-a)^n (x-a)^n = (x-a)^{2n}$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{(2n-n)!} (x-a)^{2n-n} = \frac{(2n)!}{n!} (x-a)^n$$

Ainsi, par unicité de la dérivée, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, n! (x-a)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!} (x-a)^n$$

Donc en divisant à gauche et à droite par $n! (x-a)^n$

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \boxed{\binom{2n}{n}}$$

■

Démonstration. Méthode géométrique

Étape 1 : Limite de $\sin(x)/x$ en 0

Avec un dessin, on se rend compte qu'on a l'inclusion des aires suivantes :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \frac{\sin(x) \cos(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{1}$$

La première inégalité nous donne

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \sin(x) \cos(x) \leq x$$

Donc

$$\frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

La seconde inégalité nous donne

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Donc

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x}$$

Ainsi, on a

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

Comme \cos sont continues sur \mathbb{R} , on peut faire tendre x vers 0, on obtient alors par passage à la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\cos(0)} = 1$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ d'après le théorème des gendarmes. Comme \sin est continue sur \mathbb{R} , la limite à gauche est égale à la limite à droite. On a donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Étape 2 : Calcul du taux d'accroissement de \cos

Soient $x, h \in \mathbb{R}$, alors d'après les formules trigonométriques :

$$\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \frac{-2 \sin\left(\frac{(x+h)+x}{2}\right) \sin\left(\frac{(x+h)-x}{2}\right)}{h}$$

Comme $\frac{(x+h)-x}{2} = \frac{h}{2}$ et que $\frac{(x+h)+x}{2} = x + \frac{h}{2}$, on a :

$$\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \frac{-2 \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = -\frac{2 \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \times \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

Or on a montré que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ donc en appliquant ça à $\frac{h}{2}$, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = 1$$

Comme \sin est une fonction continue, on a d'autre part

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = \sin(x)$$

Ainsi,

$$-\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}\right) \times \left(\lim_{k \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{k}{2}\right)\right) = -\sin(x)$$

Donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = -\sin(x)$$

On a ainsi montré que $\frac{d}{dx} \langle \cos \rangle = -\sin$. On sait de plus que $\sin = \cos\left(\cdot - \frac{\pi}{2}\right)$. Par composition des dérivées, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d}{dx} \langle \sin \rangle (x) = \frac{d}{dx} \left\langle \cos\left(\cdot - \frac{\pi}{2}\right) \right\rangle (x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Et

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\left(\sin(x) \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \cos(x) \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}\right) = \cos(x)$$

On en déduit alors que $\frac{d}{dx} \langle \sin \rangle = \cos$

□

Exercice 125

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} (\ln(x))^3}{x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (\ln(x^3))^3$$

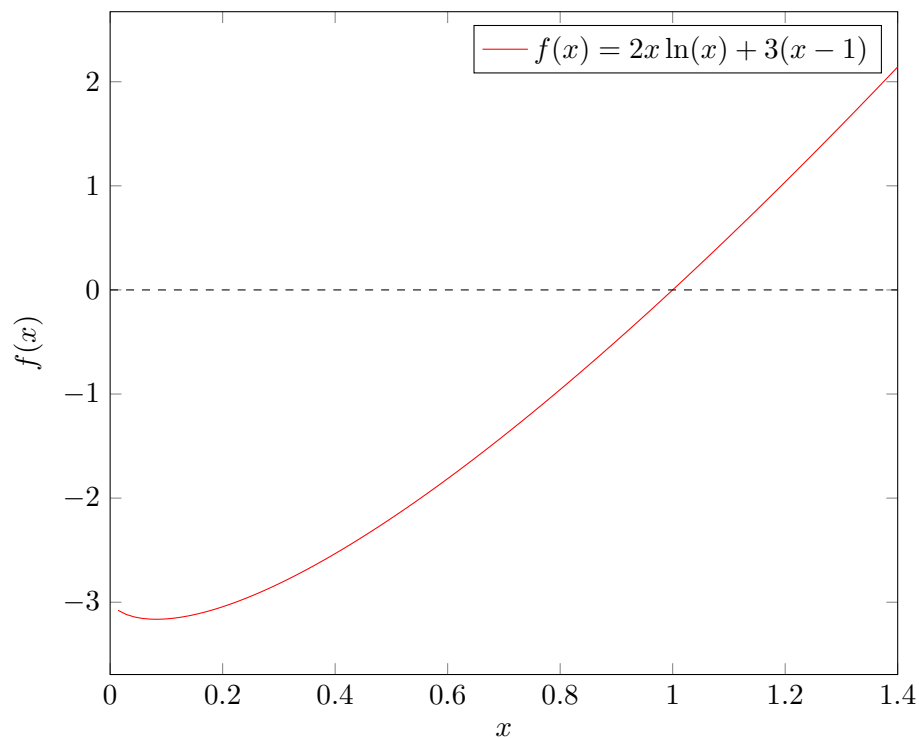
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x (\ln(-x))^3$$

Exercice 126

Résoudre l'équation

$$2x \ln(x) + 3(x-1) = 0$$

$$x = 1$$

FIG. 1.1 : Graphique de $2x \ln(x) + 3(x - 1)$ sur $[0, 1.4]$ **Exercice 127**Résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$3^x + 4^x = 5^x$$

Exercice 128

Montrer que

$$\forall x \in]0, 1[, x^x (1 - x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$$

Exercice 129

Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, / 0 < x < y, \frac{y - x}{\ln(x) - \ln(y)} < \frac{x + y}{2}$$

Indication : On utilisera $t = \frac{y}{x}$ **Exercice 130**Rappeler la formule trigonométrique $\sin(a + b)$. Montrer que

$$\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = \arcsin\left(\frac{56}{65}\right)$$

Exercice 131

Montrer que

$$\forall x \geq 0, \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1+x^2}$$

Exercice 132

Quel est le domaine de définition de $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$? Calculer sa dérivée. Conclusion?

Exercice 133

Quel est le domaine de définition de $f : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$? Calculer sa dérivée. Conclusion?

Exercice 134

Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système

$$\begin{cases} \cosh(x) + \sinh(y) = 4 \\ \sinh(x) + \sinh(y) = 1 \end{cases}$$

Exercice 135

Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation

$$\sinh(x) = y$$

Exercice 136

Montrer que

$$\mathbb{U} \setminus \{-1\} = \left\{ \frac{1+ia}{1-ia}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 137

Résoudre l'équation

$$z + \frac{1}{\bar{z}} = 1$$

Exercice 138

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que

$$|a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|$$

et étudier le cas d'égalité.

Exercice 139

Soit $\omega = e^{2i\pi/5}$ et $x = \omega + \omega^{-1}$. Calculer $x^2 + x - 1$.

Que peut-on en déduire ?

Exercice 140

Résoudre l'équation

$$z^4 - z^3 + z^2 + 2 = 0$$

en remarquant que j est solution.

Exercice 141

Déterminer les racines quatrièmes de $-7 - 24i$.

Exercice 142

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$\bar{z}^n = z$$

Exercice 143

Résoudre l'équation

$$(z^2 + 1)^n = (z - i)^{2n}$$

Exercice 144

Soient ABC et ADE deux triangles équilatéraux directs et $ABCD$ un parallélogramme. Montrer que BFE est équilatéral direct.

Exercice 145

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et ω une racine n -ième de l'unité. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k$$

Exercice 146

Déterminer une CNS sur $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ pour que les deux racines de $z^2 + az + b = 0$ aient même module.

Exercice 147

Résoudre les équations

$$\begin{cases} \cos(5x) + 2\cos(3x) + 3\cos(x) = 0 \\ \cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x) \end{cases}$$

Exercice 148

Résoudre l'équation

$$\cos(x) + \sin(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

en posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Exercice 149

Étudier la fonction

$$f : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \sin(x)$$

Exercice 150

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, |\sin(nt)| \leq n |\sin(t)|$$

Exercice 151

Étudier la fonction

$$f : x \mapsto \ln(\cosh(x))$$

Exercice 152

Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3\left(\frac{\theta}{3^{k+1}}\right)$$

Exercice 153

Calculer

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \cos(k\theta)$$

Exercice 154

Calculer les primitives suivantes en précisant à chaque fois le ou les intervalles où ceci est légitime :

$$\begin{aligned} & \int e^{-\sqrt{x}} dx & \int \cos(\ln(x)) dx & \int \ln(1+x^2) dx \\ & \int \arctan(x) dx & \int x(\sin(x))^2 dx & \int \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+4)} dx \\ & \int \cos(2x) \cos^2(x) & \int \frac{1}{\sin(t) + \tan(t)} dx \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \text{en posant } u = \cos(x) \end{aligned}$$

Exercice 155

Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n := \int \frac{1}{(1+x)^n} dx$$

À l'aide d'une intégration par parties, obtenir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .En déduire I_1 , I_2 et I_3 **Exercice 156**

Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int (1-x^2)^n dx$$

1. Établir la relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} 2. Calculer I_n 3. En déduire $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$ **Exercice 157**

Résoudre

$$y' + 2y = 2 \sinh(2x)$$

Exercice 158

Résoudre

$$\sin(x)y' = \cos(x)y + 2x \sin^2(x) \text{ sur }]0, \pi[$$

Exercice 159

Résoudre

$$y'' + y' + y = e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Exercice 160

Résoudre

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin^2(x)$$

avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ **Exercice 161**

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases}$$

avec $x(0) = 2$ et $y(0) = -2$.**Exercice 162**Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x t f(t) dt = 1$$

Exercice 163

Résoudre

$$xy'' - y' - x^3 y(x) = 0$$

sur $]0, +\infty[$ en posant $z(t) = y(\sqrt{t})$. On a donc $y(x) = z(x^2)$ puis $y'(x) = 2xz'(x^2)$...Résoudre également sur $] -\infty, 0[$.

Exercice 164

Déterminer les suites réelles u vérifiant

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, u_{n+k} = u_n u_k$$

Exercice 165

Si X est une partie de \mathbb{N} , on note $\mathcal{P}_1(X)$ et $\mathcal{P}_2(X)$ les propositions suivantes :

$$\mathcal{P}_1(X) : \forall x \in X, (\exists y \in X) / x < y$$

$$\mathcal{P}_2(X) : (\exists x \in X) / \forall y \in \mathbb{N}, (x < y \implies y \in X)$$

A-t-on $\mathcal{P}_1(X) \implies \mathcal{P}_2(X)$? A-t-on $\mathcal{P}_2(X) \implies \mathcal{P}_1(X)$?

Quel est le lien entre le fait que X est infini et les propriétés précédentes ?

Exercice 166

On note $\mathcal{P}(x, y)$ une propriété dépendant de deux réels x et y . On note A et B les propriétés suivantes :

$$A = \forall x \in X (\exists y \in X) / \mathcal{P}(x, y)$$

$$B = (\exists y \in X) / \mathcal{P}(x, y)$$

A implique-t-elle B ? B implique-t-elle A ?

On prend $\mathcal{P}(x, y)$ la propriété $x^2 - xy + a = 0$ avec a un réel. Pour quelles valeurs de a a-t-on A ?
Idem avec B .

Exercice 167

Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x^{n+2} \leq x^{n+1} + x^n$$

Exercice 168

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $k \in \mathbb{Z}$ pour qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$e^{i\theta} + e^{ik\theta} = 1$$

Exercice 169

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $f : x \mapsto x + a \sin(x)$ soit une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Exercice 170

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z réel pour qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$z = \frac{xy}{2x^2 + y^2 + 1}$$

Exercice 171

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{C}$ pour que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x + \alpha y = 0 \iff x = y = 0)$$

RACINES EXACTES DES POLYNÔMES DE DEGRÉ 2, 3 ET 4

1 Expression générale des racines d'un polynôme de degré 2

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme du second degré. Alors, cherchons les racines de P .

Pour cela on doit résoudre l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Or

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

Donc

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

Donc

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

D'où

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Finalement,

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2 Expression générale des racines d'un polynôme de degré 3

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme du troisième degré. Alors, cherchons les racines de P .

Pour cela on doit résoudre l'équation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

C'est équivalent à

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

On va éliminer le terme en x^2 . Pour cela, on va utiliser le développement de $\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3$. Posons $\beta = x + \frac{b}{3a}$, alors l'équation se transforme en

$$\left(\beta - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(\beta - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(\beta - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0$$

Donc

$$\beta^3 + \underbrace{\left(\frac{b}{a} - 3\frac{b}{3a}\right)}_{=0}\beta^2 + \underbrace{\left(\frac{c}{a} + (3-2)\frac{b}{a}\frac{b}{3a}\right)}_p\beta + \underbrace{\left(\frac{d}{a} + \frac{b}{27a}\left(\frac{2b^2}{a^2} - \frac{9c}{a}\right)\right)}_q = 0$$

On s'est donc ramené à l'équation $\beta^3 + p\beta + q = 0$

Prenons maintenant $u, v \in \mathbb{R} \Big/ uv = -\frac{p}{q}$ et $\beta = u + v$ (on va montrer par la suite que u et v sont bien définis)

Alors

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

D'autre part,

$$\underbrace{(u+v)^3 + p(u+v)}_{=-q} = u^3 + v^3 + 3(u+v)uv + p(u+v) = u^3 + v^3 + \underbrace{3\left(uv + \frac{p}{3}\right)(u+v)}_{=0}$$

Donc $u^3 + v^3 = -q$

On remarque astucieusement qu'on connaît la somme et le produit de u^3 et v^3 donc ils vérifient l'équation polynômiale de degré 2

$$X^2 - \text{somme}X + \text{produit} = 0$$

i.e.

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$$

On a alors $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$. On ne connaît pas le signe de Δ et il est parfois négatif. Ici on ne va traiter que le cas où Δ est positif, l'autre cas sera à mettre en relation avec le chapitre sur les complexes. On connaît les solutions de cette équation, on en déduit que

$$u^3, v^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

Donc

$$\beta = u + v = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

Donc finalement

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} - \frac{b}{3a}$$

3 Expression générale des racines d'un polynôme de degré 4

Soient $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$

Soit $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$ un polynôme du quatrième degré. Alors, cherchons les racines de P .

Pour cela on doit résoudre l'équation

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Pour cela, posons $x = \beta - \frac{b}{4a}$. En remplaçant x par son expression en fonction de u et en développant on obtient l'équation

$$u^4 + \underbrace{\left(\frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2}\right)}_p u^2 + \underbrace{\left(\frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3}\right)}_q u + \underbrace{\left(\frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{cb^2}{16a^3} - 3\left(\frac{b}{4a}\right)^4\right)}_r = 0$$

Donc

$$u^4 + u^2 + qu + r = 0$$

Cette forme d'équation fait fortement penser aux équations bicarrées, mais le terme en u est gênant. On va essayer d'exprimer le polynôme sous une forme plus simple cependant.

Cherchons $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} / (u^2 + \alpha)^2 + \beta(u + \gamma)^2 = u^4 + pu^2 + qu + r$

Pour cela, on va chercher des conditions en identifiant les monômes de degrés égaux. Ainsi, on obtient,

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 2\alpha + \beta = p \\ 2\beta\gamma = q \\ \alpha^2 + \beta\gamma^2 = r \end{cases}$$

La dernière équation nous donne après substitution des variables,

$$\alpha^2 + \beta\gamma^2 = \alpha^2 + \frac{q^2}{4\beta} = \alpha^2 + \frac{q^2}{4(p - 2\alpha)} = r$$

Ainsi

$$-2\alpha^3 + p\alpha^2 + 2r\alpha + \left(\frac{q^2}{4} - rp\right) = 0$$

Il s'agit d'une équation du troisième degré donc il existe toujours α qui vérifie cette relation. Cela nous donne automatiquement β et γ . Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation

$$(u^2 + \alpha) = -\gamma(u + \beta)^2$$

On obtient alors 2 équation du second degré, à savoir,

$$u^2 + \sqrt{-\gamma}u + (\alpha + \sqrt{-\gamma})$$

Et

$$u^2 - \sqrt{-\gamma}u + (\alpha - \sqrt{-\gamma})$$

Cela nous donne les solutions générales

Démonstration.

$$u^2 - \sqrt{-\gamma}u + (\alpha - \sqrt{-\gamma}) \tag{1}$$

$$u^2 - \sqrt{-\gamma}u + (\alpha - \sqrt{-\gamma}) \tag{2}$$

□

TEST

$$u^2 - \sqrt{-\gamma}u + (\alpha - \sqrt{-\gamma}) \tag{1}$$

Démonstration.

$$u^2 - \sqrt{-\gamma}u + (\alpha - \sqrt{-\gamma}) \tag{1}$$

□

