

# R torch による深層学習と科学計算

Sigrid Keydana 著 榎本剛 訳

2024-12-02



# Table of contents

第 I 部	torch に慣れる	11
第 1 章	概要	13
第 2 章	torch とその入手方法	15
2.1	torch の世界 . . . . .	15
2.2	torch のインストールと実行 . . . . .	16
第 3 章	テンソル	17
3.1	テンソルとは何か . . . . .	17
3.2	テンソルの作成 . . . . .	18
3.2.1	値からテンソル . . . . .	18
3.2.2	指定からテンソル . . . . .	21
3.2.3	データセットからテンソル . . . . .	22
3.3	テンソルに対する操作 . . . . .	26
3.3.1	集計 . . . . .	28
3.4	テンソルの部分参照 . . . . .	30
3.4.1	「R 思考」 . . . . .	30
3.4.2	R を越える . . . . .	31
3.5	テンソルの変形 . . . . .	32
3.5.1	複製なし変形と複製あり変形 . . . . .	33
3.6	拡張 . . . . .	35
3.6.1	拡張のルール . . . . .	36
第 4 章	自動微分	39
4.1	なぜ微分を計算するのか . . . . .	39
4.2	自動微分の例 . . . . .	41
4.3	torch <i>autograd</i> による自動微分 . . . . .	42
第 5 章	<i>autograd</i> を使った関数の最小化	45
5.1	最適化の古典 . . . . .	45
5.2	最小化を白紙から . . . . .	46
第 6 章	ニューラルネットワークを白紙から	51

6.1	ネットワークの考え方 . . . . .	51
6.2	ネットワークの層 . . . . .	52
6.3	活性化関数 . . . . .	53
6.4	損失関数 . . . . .	54
6.5	ネットワークの実装 . . . . .	54
6.5.1	ランダムデータの生成 . . . . .	55
6.5.2	ネットワークの構築 . . . . .	55
6.5.3	ネットワークの訓練 . . . . .	55
<b>第7章</b>	<b>モジュール</b>	<b>57</b>
7.1	組込の <code>nn_moudle()</code> . . . . .	57
7.2	モデルの構築 . . . . .	60
7.2.1	層の列としてのモデル: <code>nn_sequential()</code> . . . . .	60
7.2.2	独自処理のモデル . . . . .	60

## List of Figures

4.1	仮想的な損失関数（放物面）。 . . . . .	40
4.2	計算グラフの例 . . . . .	41
5.1	ローゼンブロック関数 . . . . .	46



# Preface

This is a book about `torch`, the R interface to PyTorch. PyTorch, as of this writing, is one of the major deep-learning and scientific-computing frameworks, widely used across industries and areas of research. With `torch`, you get to access its rich functionality directly from R, with no need to install, let alone learn, Python. Though still “young” as a project, `torch` already has a vibrant community of users and developers; the latter not just extending the core framework, but also, building on it in their own packages.

In this text, I’m attempting to attain three goals, corresponding to the book’s three major sections.

The first is a thorough introduction to core `torch`: the basic structures without whom nothing would work. Even though, in future work, you’ll likely go with higher-level syntactic constructs when possible, it is important to know what it is they take care of, and to have understood the core concepts. What’s more, from a practical point of view, you just need to be “fluent” in `torch` to some degree, so you don’t have to resort to “trial-and-error-programming” too often.

In the second section, basics explained, we proceed to explore various applications of deep learning, ranging from image recognition over time series and tabular data to audio classification. Here, too, the focus is on conceptual explanation. In addition, each chapter presents an approach you can use as a “template” for your own applications. Whenever adequate, I also try to point out the importance of incorporating domain knowledge, as opposed to the not-uncommon “big data, big models, big compute” approach.

The third section is special in that it highlights some of the non-deep-learning things you can do with `torch`: matrix computations (e.g., various ways of solving linear-regression problems), calculating the Discrete Fourier Transform, and wavelet analysis. Here, more than anywhere else, the conceptual approach is very important to me. Let me explain.

For one, I expect that in terms of educational background, my readers will vary quite a bit. With R being increasingly taught, and used, in the natural sciences, as well as other areas close to applied mathematics, there will be those who feel they can’t

benefit much from a conceptual (though formula-guided!) explanation of how, say, the Discrete Fourier Transform works. To others, however, much of this may be uncharted territory, never to be entered if all goes its normal way. This may hold, for example, for people with a humanist, not-traditionally-empirically-oriented background, such as literature, cultural studies, or the philologies. Of course, chances are that if you're among the latter, you may find my explanations, though concept-focused, still highly (or: too) mathematical. In that case, please rest assured that, to the understanding of these things (like many others worthwhile of understanding), it is a long way; but we have a life's time.

Secondly, even though deep learning has been “the” paradigm of the last decade, recent developments seem to indicate that interest in mathematical/domain-based foundations is (*again* – this being a recurring phenomenon) on the rise (Consider, for example, the Geometric Deep Learning approach, systematically explained in Bronstein et al. (2021), and conceptually introduced in *Beyond alchemy: A first look at geometric deep learning*<sup>\*1</sup>.) In the future, I assume that we'll likely see more and more “hybrid” approaches that integrate deep-learning techniques and domain knowledge. The Fourier Transform is not going away.

Last but not least, on this topic, let me make clear that, of course, all chapters have `torch` code. In case of the Fourier Transform, for example, you'll see not just the official way of doing this, using dedicated functionality, but also, various ways of coding the algorithm yourself – in a surprisingly small number of lines, and with highly impressive performance.

This, in a nutshell, is what to expect from the book. Before I close, there is one thing I absolutely need to say, all the more since even though I'd have liked to, I did not find occasion to address it much in the book, given the technicality of the content. In our societies, as adoption of machine/deep learning (“AI”) is growing, so are opportunities for misuse, by governments as well as private organizations. Often, harm may not even be intended; but still, outcomes can be catastrophic, especially for people belonging to minorities, or groups already at a disadvantage. Like that, even the inevitable, in most of today's political systems, drive to make profits results in, at the very least, societies imbued with highly questionable features (think: surveillance, and the “quantification of everything”); and most likely, in discrimination, unfairness, and severe harm. Here, I cannot do more than draw attention to this problem, point you to an introductory blog post that perhaps you'll find useful: *Starting to think about AI Fairness*<sup>\*2</sup>, and just ask you to, please, be actively aware of this problem in public life as well as your own work and applications.

Finally, let me end with saying thank you. There are far too many people to thank

---

<sup>\*1</sup> <https://blogs.rstudio.com/ai/posts/2021-08-26-geometric-deep-learning/>

<sup>\*2</sup> <https://blogs.rstudio.com/ai/posts/2021-07-15-ai-fairness/>



that I could ever be sure I haven't left anyone out; so instead I'll keep this short. I'm extremely grateful to my publisher, CRC Press (first and foremost, David Grubbs and Curtis Hill) for the extraordinarily pleasant interactions during all of the writing and editing phases. And *very* special thanks, for their support related to this book as well as their respective roles in the process, go to Daniel Falbel, the creator and maintainer of `torch`, who in-depth reviewed this book and helped me with many technical issues; Tracy Teal, my manager, who supported and encouraged me in every possible way; and Posit (formerly, RStudio), my employer, who lets me do things like this for a living.

Sigrid Keydana



## 第 I 部

torch に慣れる



# 第 1 章

## 概要

本書は三部からなる。第二部と第三部は、それぞれ深層学習の様々な応用例と基本的な科学計算技術を調査する。その前に、第一部では `torch` の基本的な構成要素である、テンソルや自動微分、最適化法、モジュールについて学ぶ。この部分を「`torch` の基礎」、よくある雛型に従って「`torch` を始める」にすることもできたが、これらが誤った印象を与えると考えた。これらは確かに基礎ではあるが、基盤としての基礎である。これらの章を勉強すれば、`torch` がどのように動いているかしっかりと概念が身につき、後の節に現れるより複雑な例をいじるのに支障がない程度までコードに馴染むことができる。言い換えれば、ある程度 `torch` に **堪能** になれる。

また、ニューラルネットワークを一度や二度、白紙から書くことになる。最初は、単なるテンソルそのものとそれが備える機能を使う次は、ニューラルネットワークの学習に不可欠な機能をオブジェクト指向でカプセル化した、`torch` の専用の構造を利用する。結果として、第二部に進む準備が周到に整い、そこで深層学習を様々な問題や分野に適用する。



## 第 2 章

# torch とその入手方法

### 2.1 torch の世界

torch は PyTorch を R に移植したものである。PyTorch は、(執筆時点で) 産業や研究で最もよく使われている二つの深層学習フレームワークのうちの一つである。その設計から、様々な科学計算の問題（その一部を本書の最終部で扱う）で有用なすばらしい道具でもある。torch は R と C++（少しの C を含む）だけで書かれており、これを使うために Python をインストールする必要はない。

Python (PyTorch) の側では、エコシステムは同心円状になっている。中に PyTorch 自体、これなしでは何も動作しない中心ライブラリがある。これを取り囲むのは、フレームワークライブラリと呼ばれる内側の円があり、特別なデータの種類の種類に特化しているか、運用のような仕事の流れの問題を中心据えている。さらに、より広範なアドオンや特化したコード、ライブラリのエコシステムがあり、それは PyTorch を構成要素やツールとして使っている。

R の側では同一の「心臓」を用いている。全ては torch のコアに依存している。R でも類似のライブラリがあるが、カテゴリの「円」は互いに明確に定められておらず、境界ははっきりとしていない。活発な開発者のコミュニティがあり、出自や目的も様々だが、さらに torch を開発して拡張するために共同で活動し、より多くの人々がそれぞれの目的の達成を手助けしている。エコシステムは急速に成長しており、個々のパッケージに言及することは控えるが、torch のウェブサイト<sup>\*1</sup>を訪れば、その一部が掲示されている。

三つのパッケージについては、名前をあげ、本書で利用する。それらは `torchvision`、`torchaudio` と `luz` である。最初の二つは用途を特定した変換、深層学習モデル、データセット、それぞれ画像（動画を含む）及び音声データのユーティリティを集めたものである。三番目は torch の高水準で直感的、使いやすいインターフェースで、ニューラルネットワークの定義、訓練、評価がわずか数行でできる。torch 自体のように三つのパッケージは CRAN からインストールできる。

---

<sup>\*1</sup> <https://torch.mlverse.org/>

## 2.2 torch のインストールと実行

torch は Windows、macOS と Linux で利用できる。対応する GPU と必要な NVIDIA のソフトウェアがインストールされていれば、訓練されたモデルの種類次第で、かなりの高速化の恩恵を得られる。本書の全ての例は、CPU で実行できるものを選び、読者が辛抱強く待つ必要がないようにした。

適合性の問題は一時的なものであるため、本書ではここに記さない。同様に具体的なインストールの手順を羅列することも控える。いつでも最新情報は vignette<sup>\*2</sup>から得られる。問題や質問があれば、torch の GitHub リポジトリに遠慮なく issue を立ててほしい。

---

<sup>\*2</sup> <https://cran.r-project.org/web/packages/torch/vignettes/installation.html>



## 第3章

# テンソル

### 3.1 テンソルとは何か

`torch` で何か役に立つことをするには、テンソルについて知る必要がある。数学や物理の意味のテンソルではない。TensorFlow や (Py-)Torch のような深層学習フレームワークでは、テンソルは「単なる」多次元配列で、CPU だけでなく、GPU や TPU のような専用の装置上での高速計算に最適化されたものだ。

実際、`torch` の `tensor` は、R の `array` に同様に任意の次元を取れる。R の `array` とは異なり、高速かつ大規模に計算を実行するために、GPU に移すことができる（おまけに、自動微分ができるので、大変有用だ）。

`tensor` は R6 オブジェクトに類似していて、`$`によりフィールドやメソッドを利用できる。

```
torch_tensor
1
[ CPUFloatType{1} ]
```

これは単一の値 1 だけを格納したテンソルだ。CPU に「生息」しており、その型は `Float`。次に波括弧の中の `1{1}`に着目する。これはテンソルの値を改めて示したものではない。これはテンソルの形状、つまりそれが生息する空間と次元の長さである。Base R と同様にベクトルは単一の要素だけでもよい（base R は 1 と `c(1)` を区別しないことを思い出してほしい）。

前述の `$`記法を使って、一つ一つ関連するフィールドを参照することで、個別に以上の属性を確認できる。

```
torch_Float
torch_device(type='cpu')

[1] 1
```

テンソルの `$to()` を使うと、メソッドいくつかの属性は直接変更できる。

```
torch_Int
```

```
torch_device(type='mps', index=0)
```

形状の変更はどのようにするのか。これは別途扱うに値する話題だが、手始めにいじってみることにする。値の変更なしに、この1次元の「ベクトルテンソル」を2次元の「行列テンソル」にできる。

```
[1] 1 1
```

概念的には、Rで1要素のベクトルや行列を作るのに似ている。

```
[1] 1
```

```
[,1]
```

```
[1,] 1
```

テンソルがどのようなものか分かったところで、いくつかのテンソルを作る方法について考えてみる。

## 3.2 テンソルの作成

既に見たテンソルを作る一つの方法は `torch_tensor()` を呼び出し、Rの値を渡すというものだった。この方法は多次元オブジェクトに適用でき、以下にいくつかの例を示す。

しかし、多くの異なる値を渡す必要があるときは効率が悪くなる。ありがたいことに、値が全て同一であるべき場合や、明示的なパターンに従うときに適用できる別の方法がある。この節ではこの技についても説明する。

### 3.2.1 値からテンソル

前の例では単一要素のベクトルを `torch_tensor()` に渡したが、より長いベクトルを同様に渡すことができる。

```
torch_tensor
```

```
1
```

```
2
```

```
3
```

```
4
```

```
5
```

```
[ CPULongType{5} ]
```

同様に規定のデバイスはCPUだが、最初からGPU/MPSに配置するテンソルを作成することもできる。

```
torch_tensor
```

```
1
```

```
2
3
4
5
[ MPSLongType{5} ]
```

これまで作ってきたのはベクトル。行列、つまり 2 次元テンソルはどうやって作るのか。

R の行列を同様に渡せばよい。

```
torch_tensor
 1  2  3  4  5  6  7  8  9
[ CPULongType{1,9} ]
```

結果を見てほしい。1 から 9 までの数字は、列ごとに表示されている。これは意図通りかもしれないし、そうではないかもしれない。意図と異なる場合は `matrix()` に `byrow = TRUE` を渡せばよい。

```
torch_tensor
 1  2  3
 4  5  6
 7  8  9
[ CPULongType{3,3} ]
```

高次元のデータはどうか。同様の方針に従って、配列を渡すことができる。

```
torch_tensor
(1,...) =
 1 13
 5 17
 9 21

(2,...) =
 2 14
 6 18
10 22

(3,...) =
 3 15
 7 19
11 23

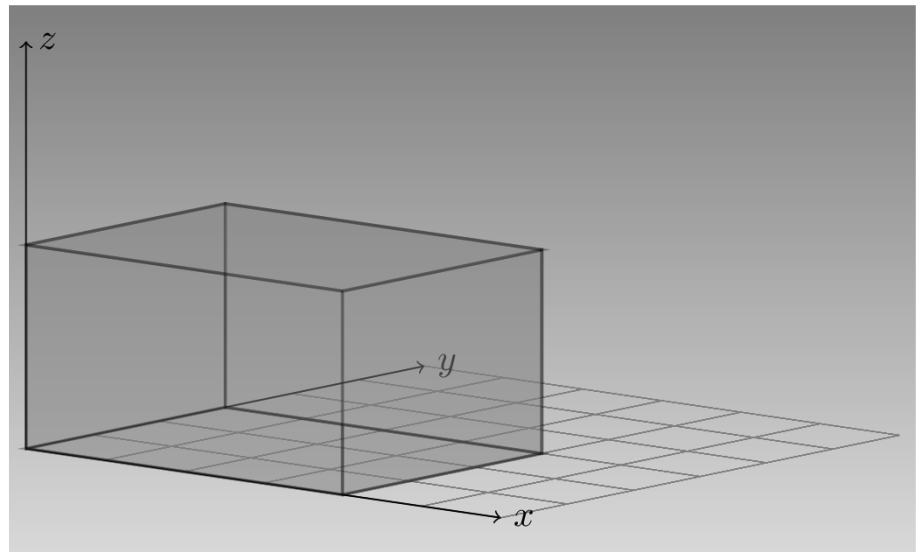
(4,...) =
 4 16
 8 20
```

12 24

```
[ CPULongType{4,3,2} ]
```

この場合でも、結果は R の埋め方に沿ったものとなる。これが求めるものではないなら、テンソルを構築するプログラムを書いた方が簡単かもしれない。

慌てる前に、その必要が非常に稀であることを考えてみてほしい。実際は、R のデータセットからテンソルを作ることがほとんどだ。「データセットからテンソル」の最後の小節で詳しく確認する。その前に、少し時間をとって最後の出力を少し吟味しよう。



{#fig-tensor-432} 私たテンソルは以下のように印字される。

```
, , 1
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	1	5	9
[2,]	2	6	10
[3,]	3	7	11
[4,]	4	8	12

```
, , 2
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	13	17	21
[2,]	14	18	22
[3,]	15	19	23
[4,]	16	20	24

上のテンソルの印字と比較しよう。Array と tensor は異なる方向にオブジェクトを切っている。テンソルは値を 3x2 の上向きと奥に向かう広がる長方形に切り、4つの x のそれ

ぞれの値に対して一つ示している。一方、配列は  $z$  の値で分割し、二つの奥向きと右向きに進む大きな  $4 \times 3$  の部分を示す。

言い換えれば、テンソルは左/「外側」から、配列は右/「内側」から思考を始めているとも言えるだろう。

### 3.2.2 指定からテンソル

`torch` の大口生成函数が便利な状況は、おおまかに二つある。一つは、テンソルの個々の値は気にせず、分布のみに興味がある場合だ。もう一つは、ある一定のパターンに従う場合だ。

要素の値の代わりに、大口生成函数を使うときは、取るべき形状を指定する。例えば、 $3 \times 3$  のテンソルを生成し、標準正規分布の値で埋める場合は次のようにする。

```
torch_tensor
-0.1635 -2.8428 -0.8758
-0.2465 -1.8656 -0.5252
 1.3292  0.6861 -0.0015
[ CPUFloatType{3,3} ]
```

次に示すのは、0 と 1 の間の一様分布に対する同様なもの。

```
torch_tensor
 0.0212  0.2078  0.3527
 0.8190  0.6516  0.1223
 0.5132  0.3738  0.1585
[ CPUFloatType{3,3} ]
```

全て 1 や 0 からなるテンソルが必要となることがよくある。

```
torch_tensor
 0  0  0  0  0
 0  0  0  0  0
[ CPUFloatType{2,5} ]
```

```
torch_tensor
 1  1
 1  1
[ CPUFloatType{2,2} ]
```

他にも多くの大口生成函数がある。最後に線型代数で一般的ないくつかの行列を作る方法を見ておく。これは単位行列。

```
torch_tensor
 1  0  0  0  0
```

```

0 1 0 0 0
0 0 1 0 0
0 0 0 1 0
0 0 0 0 1
[ CPUFloatType{5,5} ]

```

そしてこれは対角行列。

```

torch_tensor
1 0 0
0 2 0
0 0 3
[ CPUFloatType{3,3} ]

```

### 3.2.3 データセットからテンソル

さて、R のデータセットからテンソルを作る方法を見ていこう。データセットによっては、この過程は「自動」であったり、考慮や操作が必要になったりする。

まず、base R についてくる `JohnsonJohnson` を試してみる。これは、Johnson & Johnson の一株あたりの四半期利益の時系列である。

	Qtr1	Qtr2	Qtr3	Qtr4
1960	0.71	0.63	0.85	0.44
1961	0.61	0.69	0.92	0.55
1962	0.72	0.77	0.92	0.60
1963	0.83	0.80	1.00	0.77
1964	0.92	1.00	1.24	1.00
1965	1.16	1.30	1.45	1.25
1966	1.26	1.38	1.86	1.56
1967	1.53	1.59	1.83	1.86
1968	1.53	2.07	2.34	2.25
1969	2.16	2.43	2.70	2.25
1970	2.79	3.42	3.69	3.60
1971	3.60	4.32	4.32	4.05
1972	4.86	5.04	5.04	4.41
1973	5.58	5.85	6.57	5.31
1974	6.03	6.39	6.93	5.85
1975	6.93	7.74	7.83	6.12
1976	7.74	8.91	8.28	6.84
1977	9.54	10.26	9.54	8.73
1978	11.88	12.06	12.15	8.91
1979	14.04	12.96	14.85	9.99

```
1980 16.20 14.67 16.02 11.61
```

`torch_tensor()` に渡すだけで、魔法のようにほしいものが手に入るだろうか。

```
torch_tensor
  0.7100
  0.6300
  0.8500
  0.4400
  0.6100
  0.6900
  0.9200
  0.5500
  0.7200
  0.7700
  0.9200
  0.6000
  0.8300
  0.8000
  1.0000
  0.7700
  0.9200
  1.0000
  1.2400
  1.0000
  1.1600
  1.3000
  1.4500
  1.2500
  1.2600
  1.3800
  1.8600
  1.5600
  1.5300
  1.5900
... [the output was truncated (use n=-1 to disable)]
[ CPUFloatType{84} ]
```

うまくいっているようだ。値は希望通り四半期ごとに並んでいる。

魔法？ いや、そうではない。`torch` ができるのは与えられたものに対して動作することだ。ここでは、与えられたのは実は四半期順に並んだ `double` のベクトル。データは `ts` クラスなので、その通りに印字されただけだ。

```

[1] 0.71 0.63 0.85 0.44 0.61 0.69 0.92 0.55 0.72 0.77 0.92 0.60
[13] 0.83 0.80 1.00 0.77 0.92 1.00 1.24 1.00 1.16 1.30 1.45 1.25
[25] 1.26 1.38 1.86 1.56 1.53 1.59 1.83 1.86 1.53 2.07 2.34 2.25
[37] 2.16 2.43 2.70 2.25 2.79 3.42 3.69 3.60 3.60 4.32 4.32 4.05
[49] 4.86 5.04 5.04 4.41 5.58 5.85 6.57 5.31 6.03 6.39 6.93 5.85
[61] 6.93 7.74 7.83 6.12 7.74 8.91 8.28 6.84 9.54 10.26 9.54 8.73
[73] 11.88 12.06 12.15 8.91 14.04 12.96 14.85 9.99 16.20 14.67 16.02 11.61
attr(,"tsp")
[1] 1960.00 1980.75 4.00

```

これはうまくいった。別なものを試そう。

```

[1] 35 3

Tree age circumference
1 1 118 30
2 1 484 58
3 1 664 87
4 1 1004 115
5 1 1231 120
6 1 1372 142

```

```
Error in torch_tensor_cpp(data, dtype, device, requires_grad, pin_memory): R type
```

どの型が処理されないのか。「元凶」は順序付き因子の列 `Tree` に違いないのは明らかだ。  
先に `torch` が因子を扱えるか確認する。

```

torch_tensor
1
2
3
[ CPULongType{3} ]

```

これは問題なく動作した。他に何がありうるか。ここでの問題は含まれている構造 `data.structure` である。`as.matrix()` を先に作用させる必要がある。でも、因子が存在するので、全て文字列の配列になってしまい、希望通りにならない。したがって、基礎となるレベル（整数）を抽出してから、`data.frame` から行列に変換する。

```

torch_tensor
2 118 30
2 484 58
2 664 87
2 1004 115
2 1231 120
2 1372 142
2 1582 145

```



```
... [the output was truncated (use n=-1 to disable)]
[ CPUFloatType{35,3} ]
```

同じことを別の `data.frame`、`modeldata` の `okc` でしてみよう。

### Caution

`okc` は `modeldata` の 0.1.1 で廃止となり、0.1.2 以降は削除された。

```

age          diet height          location      date Class
1  22 strictly anything      75 south san francisco 2012-06-28 other
2  35      mostly other      70          oakland 2012-06-29 other
3  38          anything      68      san francisco 2012-06-27 other
4  23      vegetarian      71          berkeley 2012-06-28 other
5  29          <NA>      66      san francisco 2012-06-27 other
6  29 mostly anything      67      san francisco 2012-06-29 stem

[1] 59855      6
```

二つある整数の列は問題なく、一つある因子の列の扱い方は学んだ。character と date の列はどうだろう。個別に date の列からテンソルを作ってみる。

```
torch_tensor
15519
15520
15518
15519
15518
15520
15516
... [the output was truncated (use n=-1 to disable)]
[ CPUFloatType{59855} ]
```

これはエラーを投げなかったが、何を意味するのか。これは R の Date に格納されている実際の値、つまり 1970 年 1 月 1 日からの日数である。すなわち、技術的には動作する変換だ。結果が実際に意味をなすかは、どのようにそれを使うつもりかという問題だ。言い換えれば、おそらく計算に使う前に、これらのデータを追加の処理する必要がある。どのようにするかは文脈次第。

次に location を見る。これは、character 型の列のうちのひとつだ。そのまま torch に渡すとどうなるか。

```
Error in torch_tensor_cpp(data, dtype, device, requires_grad, pin_memory): R type not handled
```

実際 torch には文字列を格納するテンソルはない。これらを numeric 型に本管する何らかの方法を適用する必要がある。この例のような場合、個々の観測が単一の実体（例

えば文やパラグラフではなく)を含む場合、最も簡単な方法は R で `factor` に変換し、`numeric`、そして `tensor` にすることだ。

```
torch_tensor
120
 74
102
 10
102
102
102
... [the output was truncated (use n=-1 to disable)]
[ CPUFloatType{59855} ]
```

確かに、技術的にはこれはいくらか動作する。しかしながら、情報が失われる。例えば、最初と3番目の場所はそれぞれ”south san francisco”と”san francisco”だ。一度因子に変換されると、これらは意味の上で”san francisco”や他の場所と同じ距離になる。繰り返しになるが、これが重要かはデータの詳細と目的次第だ。これが重要なら、例えば、観測をある基準でまとめたり、緯度/経度に変換したりすることを含めさまざまな対応がありうる。これらの考慮は全く `torch` に特有ではないが、ここで述べたのは `torch` の「データ統合フロー」に影響するからだ

最後に実際のデータ科学の世界に挑むには、NA を無視するわけにはいかない。確認しよう。

```
torch_tensor
1
nan
 3
[ CPUFloatType{3} ]
```

R の NA は NaN に変換された。これを扱えるだろうか。いくつかの `torch` のかんすうでは可能だ。例えば、`torch_nanquantil()` は単に NaN を無視する。

```
torch_tensor
2
[ CPUFloatType{1} ]
```

ただし、ニューラルネットワークを訓練するなら、欠損値を意味のあるように置き換える方法を考える必要があるが、この話題は後回しにする。

### 3.3 テンソルに対する操作

テンソルに対する数学的操作は全て可能だ。和、差、積など。これらの操作は (`torch_`で始まる) 関数や (\$記法で呼ぶ) オブジェクトに対するメソッドとして利用可能だ。次の

二つは同じだ。

```
torch_tensor
4
6
[ CPUFloatType{2} ]
```

```
torch_tensor
4
6
[ CPUFloatType{2} ]
```

どちらも新しいオブジェクトが生成され、`t1` も `t2` も変更されない。オブジェクトをその場で変更する別のメソッドもある。

```
torch_tensor
4
6
[ CPUFloatType{2} ]
```

```
torch_tensor
4
6
[ CPUFloatType{2} ]
```

実は、同じパターンは他の演算にも適用される。アンダスコアが後についているのを見たら、オブジェクトはその場で変号とされる。

当然、科学計算の場面では行列演算は特に重要だ。二つの一次元構造、つまりベクトルの内積から始める。

```
torch_tensor
32
[ CPULongType{} ]
```

これは動かないはずだと考えただろうか。テンソルの一つを転置 (`torch_t()`) する必要があるだろうか。これも動作する。

```
torch_tensor
32
[ CPULongType{} ]
```

最初の呼び出しも動いたのは、`torch` が行ベクトルと列ベクトルを区別しないからだ。結果として、`torch_matmul()` を使ってベクトルを行列にかけるときも、ベクトルの向きを心配する必要はない。

```
torch_tensor
14
```

```

32
50
68
[ CPULongType{4} ]

```

同じ関数 `torch_matmul()` は二つの行列をかけるときにも使う。これが `torch_multiply()` が行う、引数のスカラとどのように異なるかよく見てほしい。

```

torch_tensor
 4
10
18
[ CPULongType{3} ]

```

テンソル演算は他にも多数あり、勉強の途中、いくつかに出会うことになるか、特に述べておく必要な集まりが一つある。

### 3.3.1 集計

R 行列に対して和を計算する場合、それは次の三つのうちの一つを意味する。総和、行の和、もしくは列の和。これら三つを見てみよう（訳あって `apply()` を使う）。

```

[1] 126

[1] 21 42 63

[1]  6 12 18 24 30 36

```

それでは `torch` で同じことをする。総和から始める。

```

torch_tensor
126
[ CPULongType{} ]

```

行と列の和は面白くなる。`dim` 引数は `torch` にどの次元の和をとるか伝える。`dim = 1` を渡すと次のようになる。

```

torch_tensor
 6
12
18
24
30
36
[ CPULongType{6} ]

```

予想外にも列の和になった。結論を導く前に、`dim = 2` だとどうなるか。

```
torch_tensor
  21
  42
  63
[ CPULongType{3} ]
```

今度は行の和である。torch の次元の順序を誤解したのだろうか。そうではない。torch では、二つの次元があれば行が第一で列が第二である（すぐに示すように、添え字は R で一般的なのと同じで 1 から始まる）。

むしろ、概念の違いは集計にある。R における集計は、頭の中にあるものをよく特徴づけている。行（次元 1）ごとに集計して行のまとめを得て、列（次元 2）ごとに集計した列のまとめを得る。torch では考え方が異なる。列（次元 2）を圧縮して行のまとめを計算し、行（次元 1）で列のまとめを得る。

同じ考え方がより高い次元に対しても適用される。例えば、4 人の時系列データを記録しているとする。二つの特徴量を 3 回計測する。再帰型ニューラルネットワーク（詳しくは後ほど）を訓練する場合、測定を次のように並べる。

- 次元 1: 個人に互る。
- 次元 2: 時刻に互る。
- 次元 3: 特徴に互る。

テンソルは次のようになる。

```
torch_tensor
(1,...) =
  0.6865 -0.1703
 -0.2696 -0.0101
  1.4464  0.9333

(2,...) =
  4.4592e-01  1.1488e+00
  4.4665e-01 -1.1363e+00
 -8.3818e-01 -6.1822e-05

(3,...) =
  0.7710  0.3463
  0.7245  0.1028
 -0.1008  1.4203

(4,...) =
 -0.2045 -1.1789
 -0.9796 -1.1840
 -0.2577  0.1839
```

```
[ CPUFloatType{4,3,2} ]
```

二つの特徴量についての平均は、対象と時刻に独立で、次元 1 と 2 を圧縮する。

```
torch_tensor
  0.1559
  0.0380
[ CPUFloatType{2} ]
```

一方、特徴量について平均を求めるが、各個人に対するものは次のように計算する。

```
torch_tensor
  0.6211  0.2510
  0.0181  0.0041
  0.4649  0.6231
-0.4806 -0.7263
[ CPUFloatType{4,2} ]
```

ここで圧縮されたは時刻である。

### 3.4 テンソルの部分参照

テンソルを使っていると、計算のある部分が入力テンソルの一部にのみに対する演算であることはよくある。その部分が単一の実体（値、行、列など）なら添字参照、このような実体の範囲なら切り出しと呼ばれる。

#### 3.4.1 「R 思考」

添字参照も切り出しも基本的には R と同じように働く。いくつかの拡張された記法を続く節で示すが、総じてふるまいは直感に反しない。

なぜなら R と同じように、`torch` でも添字は 1 から始まるし、1 要素になった次元は落とされるからだ。

下の例では、2 次元テンソルの最初の行を求め、その結果 1 次元つまりベクトルを得る。

```
torch_tensor
  1
  2
  3
[ CPULongType{3} ]
```

ただし、`drop = FALSE` を指定すると次元は保持される。

```
torch_tensor
  1  2  3
```

```
[ CPULongType{1,3} ]
```

切り出しの時は、1 要素となる次元はないので、他に考慮すべきことはない。

```
torch_tensor
(1,...) =
  0.7757  0.8278
  0.7819  0.8257

(2,...) =
  0.6599  0.1333
  0.9478  0.2013
[ CPUFloatType{2,2,2} ]
```

まとめると、添字参照と切り出しはほぼ R と同じように働く。次に、前に述べた、さらに使いやすくする拡張について見る。

### 3.4.2 R を越える

拡張の一つはテンソルの最後の要素の参照だ。利便性のため、`torch` では-1 を使ってそれができる。

```
torch_tensor
4
[ CPULongType{} ]
```

注意すべきは、R では負の添字はかなり異なった効果を持ち、対応する位置の要素は取り除かれることだ。

もう一つの便利な機能は、切り出しの記法で刻み幅を二つ目のコロンの後に指定できることだ。ここでは、一つ目から八つ目の列を一つおきに取り出している。

```
torch_tensor
  1   3   5   7
11  13  15  17
[ CPULongType{2,4} ]
```

最後に示すのは、同じコードを異なる次元のテンソルに対して動作させる方法だ。この場合、`..` を使って明示的に参照されていない、存在する次元全てをまとめて指定できる。

例えば、行列、配列、もしくは高次元の構造など、どんなテンソルが渡されても最初の次元の添字参照をしたいとする。次の

```
t[1, ..]
```

は全てに対して機能する。

```

torch_tensor
  1.5797
 -0.8341
 [ CPUFloatType{2} ]

torch_tensor
  1.1281  1.1267
  1.5198  0.8977
 [ CPUFloatType{2,2} ]

torch_tensor
(1,.,.) =
  0.2347 -0.0155
 -1.4033 -0.8455

(2,.,.) =
  1.0417 -0.9092
  1.0029  0.3166
 [ CPUFloatType{2,2,2} ]

```

最後の次元の添字参照がしたければ、代わりに `t[..., 1]` と書けばよい。両方を組み合わせることもできる。

```

torch_tensor
-0.0155 -0.8455
-0.9092  0.3166
 [ CPUFloatType{2,2} ]

```

次の話題は、添字参照や切り出しと同じくらい重要なテンソルの変形だ。

### 3.5 テンソルの変形

24 要素のテンソルがあるとする。形状はどうなっているか。次の可能性がある。

- 長さ 24 のベクトル
- 24 x 1、12 x 2、6 x 4 などの行列
- 24 x 1 x 1、12 x 2 x 1 などの 3 次元配列
- その他 (24 x 1 x 1 x 1 x 1 という可能性もありうる)

値をお手玉しなくても、`view()` メソッドでテンソルの形状を変更できる。最初のテンソルは長さ 24 のベクトルとする。

```

torch_tensor
0
0

```



```
0
... [the output was truncated (use n=-1 to disable)]
[ CPUFloatType{24} ]
```

同じベクトルを横長の行列に変形する。

新しいテンソル `t2` を得たが、興味深いことに（そして性能の上で重要なことに）、`torch` はその値に対して新たに記憶域を割り付ける必要がなかったことだ。自分で確認することができる。二つのテンソルはデータは同じ場所に格納している。

```
[1] "0x131d079c0"
[1] "0x131d079c0"
```

どのように実現されているか少し議論する。

### 3.5.1 複製なし変形と複製あり変形

`torch` にテンソルの変形をさせると、テンソルの中身に対して新たな記憶域を割り付けずに要求を達成しようとする。これが実現可能なのは、同じデータ、究極的には同じバイト列は異なる方法で読み出すことができるからだ。必要なのはメタデータの記憶域だけだ。

`torch` はどのようにしているか。具体的な例を見てみる。3 x 5 行列から始める。

```
torch_tensor
  1   2   3   4   5
  6   7   8   9  10
 11  12  13  14  15
[ CPULongType{3,5} ]
```

テンソルには `stride()` メソッドがあり、各次元に対して次の要素にたどり着くまでにいくつの要素を越えたか追跡する。上記のテンソル `t` に対して、次の行に進むには 5 要素飛ばす必要があるが、次の列には一つだけ飛ばせばよい。

```
[1] 5 1
```

ここで、テンソルを変形して、今度は 5 行 3 列にする。データ自体は変化しないことを思い出してほしい。

```
torch_tensor
  1   2   3
  4   5   6
  7   8   9
 10  11  12
 13  14  15
[ CPULongType{5,3} ]
```

今回は次の行には、5 要素ではなく 3 要素だけ飛ばせば次の行に到達する。次の列に進むのは、ここでも 1 要素だけ「跳べ」ばよい。

```
[1] 3 1
```

ここで、要素の順序を変えることができるか考えてみよう。例えば、行列の転置はメタデータの方法で可能だろうか。

```
torch_tensor
  1   6  11
  2   7  12
  3   8  13
  4   9  14
  5  10  15
[ CPULongType{5,3} ]
```

元のテンソルとその転置はメモリ上の同じ場所を指しているので、実際に可能であるはずだ。

```
[1] "0x11ebc3d80"
```

```
[1] "0x11ebc3d80"
```

これは道理にかなっている。次の行に到達するのに、1 要素だけ跳び、次の列には 5 要素跳べばよいから、うまくいくだろう。確認する。

```
[1] 1 5
```

その通りだ。

可能な限り、`torch` は形状を変更する演算をこの方法で扱おうとする。

このような（今後多数見ることになる）複製なし演算の一つは `squeeze()` とその対義語 `unsqueeze()` だ。後者は指定位置に単一要素の次元を付け加え、前者は取り除く。例を挙げる。

```
torch_tensor
 0.4872
 0.8368
 0.4469
[ CPUFloatType{3} ]

torch_tensor
 0.4872  0.8368  0.4469
[ CPUFloatType{1,3} ]
```

ここでは単一要素の次元を前につけた。代わりに、`t$unsqueeze(2)` を使えば末尾につけることもできた。

さて、複製なしの技法は失敗することがあるか。そのような例を示す。

```
Error in (function (self, size) :
view size is not compatible with input tensor's size and
stride (at least one dimension spans across two contiguous subspaces).
Use .reshape(...) instead.
```

ストライドを変える演算を連続して行くと、二つ目は失敗する可能性が高い。失敗するかどうか決める方法はあるが、簡単な方法は `view()` の代わりに `reshape()` を使うことだ。後者は魔法のように機能し、可能であればメタデータで、そうでなければ複製する。

```
[1] "0x1216bf7c0"
```

```
[1] "0x12161e4c0"
```

想像通り、二つのテンソルは今度は異なる場所に格納されている。

この長い章の終わりに取り上げる内容は、一見手に余るように見える機能だが、性能の上で極めて重要なものである。多くのもののように、慣れるには時間が掛かるが、安心してほしい。この本や `torch` を使った多くのプロジェクトでたびたび目になることになる。この機能 **拡張** (ブロードキャスト) と呼ばれている。

## 3.6 拡張

形状が厳密に一致しないテンソルに対する演算をすることが多い。

もちろん、長さ 2 のベクトルに長さ 5 のベクトルを足すようなことはしないかもしれない。でもやってみたいこともありうる。例えば、全ての要素にスカラを掛けることがあるが、これはできる。

```
torch_tensor
 0.5756  0.2616  0.3201  0.1131 -0.3872
-0.4443 -0.1180 -0.2796 -0.2504  0.5174
 0.3109  0.3838  0.1145 -0.2903 -0.4970
[ CPUFloatType{3,5} ]
```

これはおそらく大したことではなかっただろう。R で慣れている。しかし、次は R では動作しない。同じベクトルを行列の全ての行に加えようとしている。

`m2` をベクトルに代えてもうまくいかない。

```
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]    2    6    5    9    8
[2,]    8   12   11   10   14
[3,]   14   13   17   16   20
```

文法としては動いたが、意味の上では意図した通りではない。

ここで、上の二つを `torch` で試してみる。まず二つのテンソルが2次元の場合（概念的には一つは行ベクトルだが）から。

```
[1] 3 5
```

```
[1] 1 5
```

```
torch_tensor
  2   4   6   8  10
  7   9  11  13  15
 12  14  16  18  20
[ CPULongType{3,5} ]
```

次に足すものが1次元テンソルの場合。

```
[1] 5
```

```
torch_tensor
  2   4   6   8  10
  7   9  11  13  15
 12  14  16  18  20
[ CPULongType{3,5} ]
```

`torch` ではどちらも意図通りにうまくいった。理由を考えてみよう。上の例でテンソルの形状をあえて印字した。3 x 5 のテンソルには、形状3のテンソルも形状1 x 5のテンソルも足すことができた。これらは、拡張がどのようにされるか示している。簡単にいうと、起きたのは次の通りだ。

1. 1 x 5 テンソルが加数として使われると、実際は拡張される。つまり、同じ3行あるかのように扱われる。このような拡張は一致しない次元が単一で一番左にある場合にのみ実行される。
2. 形状3のテンソルも同様だが、先に手順が追加される。大きさが1の主要な次元が実質上左に追加される。これにより1と同様になり、そこから手順が続く。

重要なのは、物理的な拡張はされないことだ。

ルールを系統だててことにする。

### 3.6.1 拡張のルール

ルールは次の通り。まず、一つ目は目を引くものではないか、全ての基礎になる。

1. テンソルの形状を右に揃える。

二つのテンソル、一つのサイズは3 x 7 x 1、もう一つは1 x 5、があるとする。これらを右に揃える。

```
t1, 形状:    3 7 1
t2, 形状:    1 5
```

2. 右から始めて、揃えた軸に沿う大きさが厳密に一致するか、一つが1でなければならない。後者の場合、単一要素次元のテンソルは単一でないものに対して **拡張** される。

上の例では、拡張は各テンソルに1回ずつ2回発生する。結果は実質的に以下のようになる。

```
t1, 形状:    3 7 5
t2, 形状:    7 5
```

3. もしテンソルの一つが一つ（もしくは1以上）余分な軸があれば、実質的に拡張される。

```
t1, 形状: 3 7 5 t2, 形状: 1 7 5
```

そして拡張が発生する。

```
t1, 形状:    3 7 5
t2, 形状:    3 7 5
```

この例では、拡張が両方のテンソルに同時に発生していることを見た。覚えておくべきことは、常に右から見るということだ。次の例は、どんな拡張をしてもうまくいかない。

```
torch_zeros(4, 3, 2, 1)$add(torch_ones(4, 3, 2)) # error
```

---

おそらく、この本の中で、この章は最も長く、最も応用から離れたように見えるものだった。しかし、テンソルに慣れることは、`torch` をすらすら書くための前提であると言っておく。同様のことは次の章で扱う話題、自動微分についても言える。違いは、`torch` が大変な仕事を我々の代わりにしてくれるということだ。我々は何をしているか理解すればよいだけだ。



## 第 4 章

# 自動微分

前の章では、テンソルをどのように扱うかを学び、それに対して行うことができる数学的な演算の例を示した。そのような演算が多数あったとしても、それらが主要な `torch` の全てだったら、この本は読む必要がない。`torch` のようなフレームワークの人気は、それらを使ってできること、一般的には深層学習、機械学習、最適化、大規模科学計算にある。これらの応用分野の多くは、なんらかの損失関数を最小化と関係している。これは、さらに函数の **微分** の計算を必要とする。ここで、利用者として、個々の微分の函数形を自分で指定しなくてはならないということを想像してみよう。特にニューラルネットワークでは、すぐに面倒になるだろう。

実は、`torch` は微分の函数表現を作ったり、保存したりしない。代わりに、**自動微分** と呼ばれるものを実装している。自動微分では、より具体的には逆モード形では、微分はテンソル演算のグラフを逆向き走査で計算され、結合される。この後すぐに例を示すが、その前に一步引いてなぜ微分を計算する必要があるのか、簡単に議論しておこう。

### 4.1 なぜ微分を計算するのか

教師あり機械学習では、訓練集合が使えて、予測したい変数は既知である。これが目的変数で真値である。今予測アルゴリズムを開発し、これを入力変数、予測変数に基づいて訓練する。この訓練あるいは学習過程は、アルゴリズムの予測と真値とを比べ、現在の予測がどれくらいよいか悪いか捉える数値が出てくるような比較に基づいている。この数値を与えるのは、**損失関数** の仕事だ。

一度現在の損失が分かったら、アルゴリズムはパラメタ、つまりニューラルネットワークの重みを調整して、もっとよい予測にする。アルゴリズムはどの方向に調整するか知る必要がある。この情報は、**勾配** つまり微分のベクトルから得られる。

例として次のような損失関数を想像してみる Figure 4.1。

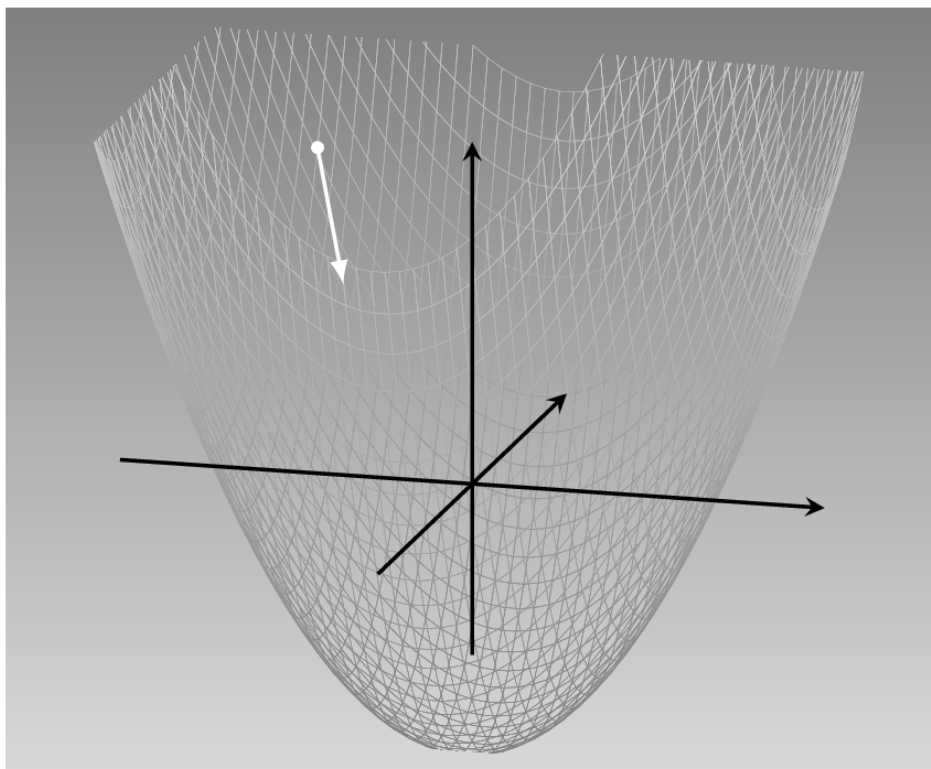


Figure4.1: 仮想的な損失関数（放物面）。

これは二変数の二次関数  $f(x_1, x_2) = 0.2x_1^2 + 0.2x_2^2 - 5$  である。最小値は  $(0,0)$  で、この点を求める。白い点で示した点に立ち、風景を眺めれば、坂を速く降る方法は明確に分かる（坂を下るのを恐れないとする）。でも、最良の方向を計算で見つけるには、勾配を計算する。

$x_1$  の方向を取り上げる。 $x_1$  に関する関数の微分は、函数値が  $x_1$  とともにどのように変化するかを示す。計算すると  $\partial f / \partial x_1 = 0.4x_1$  となる。これは  $x_1$  が増えると損失が増えることと、それがどの程度かを示している。でも損失を減らす必要があるので、逆方向に進む必要がある。

同じことが  $x_2$  軸に対しても成り立つ。微分を計算すると、 $\partial f / \partial x_2 = 0.4x_2$  を得る。再び、微分が示す向きと逆方向を選ぶ。全体では、降下方向は

$$\begin{bmatrix} -0.4x_1 \\ -0.4x_2 \end{bmatrix}$$

である。

この方法は最急降下と呼ばれている。一般的に **勾配降下** と呼ばれ、機械学習で最も基本的な最適化アルゴリズムである。おそらく直感に反して、最も効率の良い方法ではない。さらに別の問いがある。出発点で計算されたこの方向は降下中にずっと最適なのか。代わりに、定期的に方向を計算し直した方が良いのかもしれない。このような質問は後の章で検討する。



## 4.2 自動微分の例

微分がなぜ必要か分かったところで、自動微分（AD: automatic differentiation）がどのように計算しているか見てみよう。

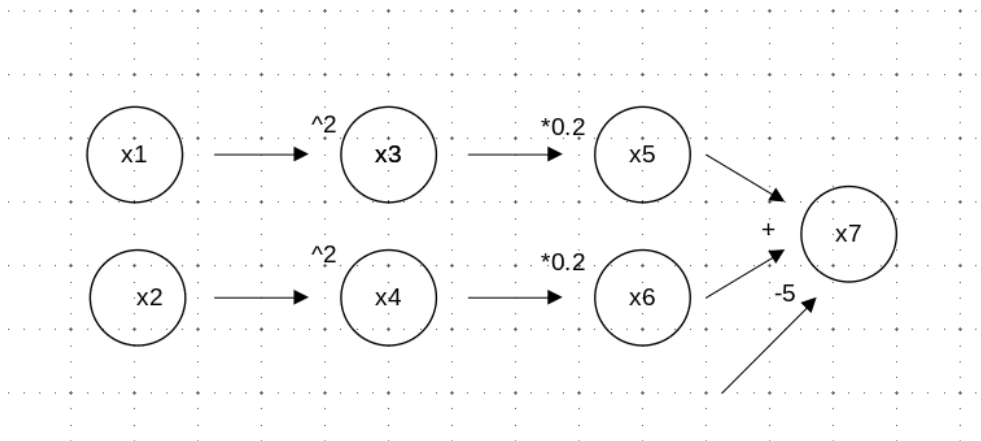


Figure4.2: 計算グラフの例

Figure 4.2 は上の関数が計算グラフにどのように表すことができるかを示している。 $x_1$  と  $x_2$  は入力ノードで、対応する関数のパラメタは  $x_1$  と  $x_2$  である。 $x_u$  は関数の出力で、他は全て中間ノードであり正しい順序で実行するために必要である（定数-5、0.2 及び 2 をノードとすることもできるが、定数なので特に気にせずに、簡潔なグラフを選んだ）。

逆モード AD は、`torch` が実装している自動微分の種類で、まず関数の出力を計算する。これはグラフの順方向伝播である。次に逆伝播を行い、両方の入力  $x_1$  と  $x_2$  に関する出力の勾配を計算する。この過程で、右から情報が利用可能となり、積み重なっていく。

- $x_7$  で、 $x_5$  と  $x_6$  に関する偏微分を計算する。つまり、微分する式は  $f(x_5, x_6) = x_5 + x_6 - 5$  なので、偏微分は両方とも 1 である。
- $x_5$  から左に動き、 $x_3$  にどのように依存しているか確認すると、 $\partial x_5 / \partial x_3 = 0.2$  である。微積分の連鎖律を用いると、出力がどのように  $x_3$  に依存するか分かるので、 $\partial f / \partial x_3 = 0.2 \times 1 = 0.2$  と計算できる。
- $x_3$  から、 $x_1$  に最後の段階を踏む。 $\partial x_3 / \partial x_1 = 2x_1$  なので、連鎖律を再度用いて関数が最初の入力にどのように依存するか定式化できる。つまり  $\partial f / \partial x_1 = 2x_1 \times 0.2 \times 0.1 = 0.4x_1$  となる。
- 同様に二番目の偏微分も計算し、勾配を求める。 $\nabla f = (\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2)^T = (0.4x_1, 0.4x_2)^T$

これが原理である。実際には、フレームワークによって逆モード自動微分の実装は異なる。次の節で `torch` がどのように実装しているか簡潔に示す。

### 4.3 torch *autograd* による自動微分

まず、用語について注意しておく。torch では AD エンジンが *autograd* と呼ばれ、本書の残りの多くの部分でもそのように記す。それでは説明に戻る。

上述の計算グラフを torch で構築するには、入力テンソル `x1` と `x2` を作成する。これは興味のあるパラメタを模している。これまでしてきたように「いつも通り」テンソルを作成すると、torch は AD 向けの準備をしない。そうせずに、これらのテンソルを作るときに `requires_grad = TRUE` を渡す必要がある。

(ところで二つのテンソルに 2 という値を選んだのは完全に任意である。)

次に「隠れた」ノード `x3` と `x6` を作るには、二乗して掛け算をする。最後に `x7` に最終出力を格納する。

```
torch_tensor
-3.4000
[ CPUFloatType{1} ][ grad_fn = <SubBackward1> ]
```

`requires_grad = TRUE` を追加しなければならなかったのは、入力テンソルを作るときだけであることに注目してほしい。グラフの依存するノードは全てこの属性を継承する。確認してみよう。

```
[1] TRUE
```

これまでに自動微分が動作するために必要な前提が全て満たされた。あとは `backward()` を呼べば、`x7` が `x1` と `x2` にどのように依存するかが決まる。

この呼び出しにより、`x1` と `x2` の `$grad` フィールドが埋まる。

```
torch_tensor
0.8000
[ CPUFloatType{1} ]
```

```
torch_tensor
0.8000
[ CPUFloatType{1} ]
```

これらは、それぞれ `x7` の `x1` と `x2` に関する偏微分である。上記の手計算を確認すると、どちらも 0.8 つまり 0.4 にテンソル値 2 及び 2 をかけたものになっている。

すでに述べた、端から端の微分を積み上げるのに必要な積算過程はどうなっているのか。積み上げられるに従って端から端までの微分を「追跡」することはできるのだろうか。例えば、最終出力がどのように `x3` に依存しているか見ることはできるだろうか。

```
torch_tensor
[ Tensor (undefined) ]
```

このフィールドは埋まっていないようである。実は、これらを計算することは必要だが、torch は不要になったら中間集計を捨て、メモリを節約する。しかしながら、保存する `retarin_grad = TRUE` を渡して保存を指示することも可能だ。

それでは、`x3` の `grad` フィールドが埋まっているか確認してみよう。

```
torch_tensor
0.2000
[ CPUFloatType{1} ]
```

`x4`、`x5`、`x6` についても同様だ。

```
torch_tensor
0.2000
[ CPUFloatType{1} ]
```

```
torch_tensor
1
[ CPUFloatType{1} ]
```

```
torch_tensor
1
[ CPUFloatType{1} ]
```

もう一つ気になることがある。勾配の蓄積過程を「実行中の勾配」の観点から理解したが、蓄積を進めるのに必要な個々の微分はどのように計算されるのか。例えば `x3$grad` が示しているのは出力が中間状態 `x3` にどのように依存しているかであるが、ここから実際の入力ノードである `x1` にどのように到達するのか。

この面についても、確認できる。順伝播で torch はすべきことを書き残しておいて、後で個々の微分を計算する。この「レシピ」はテンソルの `grad_fn` フィールドに格納される。これが `x3` に対して `x1` への「失われたつながり」を追加する。

```
PowBackward0
```

`x4`、`x5`、`x6` についても同様。

```
PowBackward0
```

```
MulBackward1
```

```
MulBackward1
```

これでおしまい。この節では、torch がどのように微分を計算するかを見た上で、それをどのように行っているかの概要を示した。ここで、自動微分を応用した最初の二つの課題に取り組む準備が整った。



## 第 5 章

# *autograd* を使った関数の最小化

前の二つの章ではテンソルと自動微分について学んだ。これから二つの章では `torch` の仕組みについての勉強は休んで、その代わりすでに学んだことで何ができるか試してよう。テンソルだけを使い、自動微分だけの力を借りるだけで、既に二つのことができる。

- 関数を最小化する（つまり、数値最適化を行う）、そして
- ニューラルネットワークを構築して訓練する。

この章では、最小化からはじめ、ネットワークは次章に回す。

### 5.1 最適化の古典

最適化研究において、**ローゼンブロッック関数** は古典である。この関数は二つの変数を取り、 $(1, 1)$  で最小となる。等値線を眺めると、最小は伸びた細い谷の中にあることが分かる。

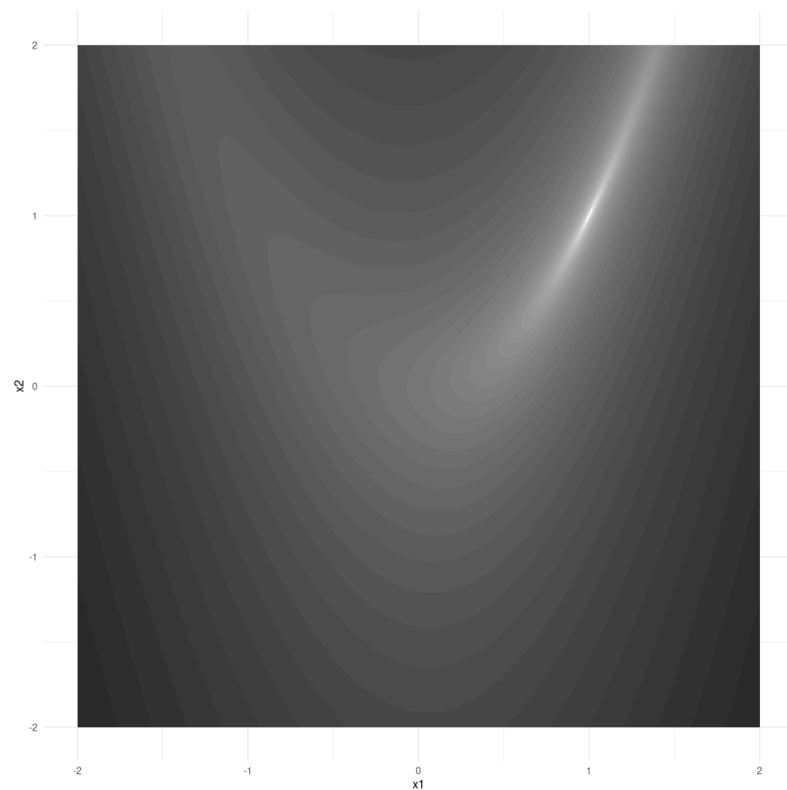


Figure5.1: ローゼンブロック関数

関数の定義は次の通りだ。a と b は自由に定めてよいパラメタだが、よく使われる値を用いる。

## 5.2 最小化を白紙から

シナリオは次の通り。与えられた点 ( $x_1$ ,  $x_2$ ) から出発し、ローゼンブロック関数が最小になる場所を見つける。

前の章で説明した方法に従い、現在の位置における関数の勾配を計算し、それを使って逆方向に進む。どれくらい遠くまで行けばよいかは分からない。大きく進みすぎると、簡単に行き過ぎてしまう。(等値線図を再度確認すると最小値の西または東の急な崖に立っていると、これがすぐに生じることが分かる。)

つまり、最良の方法は反復して進むことで、妥当な幅を取り、毎回勾配を再評価することだ。

まとめると、最適化の手順は次のようになる。

```
library(torch)
```

```
# これはまだ正しい手順ではない!
```

```

for (i in 1:num_iterations) {

  # 関数を呼び現在のパラメタ値を渡す。
  value <- rosenbrock(x)

  # パラメタについての勾配を計算する。
  value$backward()

  # 手動でパラメタを更新し、勾配に比例した一部を引く。
  # ここはまだ正しくない。
  x$sub_(lr * x$grad)
}

```

書かれている通り、コード片は考えを示したもので、(まだ) 正しくない。また、いくつかの必要なものが欠けている。テンソル `x` も変数 `lr` や `num_iterations` も定義されていない。まず、これらを準備しよう。学習率 `lr` は毎回引く勾配に比例した一部で、`num_iterations` は反復する回数である。これらは実験パラメタである。

```
lr <- 0.01
```

```
num_iterations <- 1000
```

`x` は最適化するパラメタ、つまり関数の入力であり、最適化の最後に可能な限り最小の関数値に近い値を与える位置であることが望まれる。このテンソルについて関数の微分を計算するので、`requires_grad = TRUE` をつけて作る必要がある。

```
x <- torch_tensor(c(-1, 1), requires_grad = TRUE)
```

初期位置 `(-1, 1)` は任意に選択した。さて、残っているのは最適化ループを少し修正することだ。`autograd` が `x` について有効化されていると、`torch` はこのテンソルに対して行われるすべての演算を記録する。そのため `backward()` を呼ぶたびに、すべての必要な微分を計算しようとすることになる。しかし、勾配の一部を引くときは、微分を今朝さんする必要はない。`torch` にこれを記録しないように指示するために、`with_no_grad()` を囲む。

ここで説明しておかなければならないことがある。既定で `torch` は `grad` フィールドに格納された勾配を筑西する。新しい計算をするたびに `grad$zero_()` を使ってゼロに消去する必要がある。

これらを考慮すると、パラメタの更新は次のように書ける。

```

with_no_grad({
  x$sub_(lr * x$grad)
  x$grad$zero_()
})

```

完成したコードは次のようになる。ログをとる文を追加して何が起きているか分かるようにしてある。

```
Iteration: 100
Value is : 0.3502924
Gradient is : -0.667685 -0.5771312
Iteration: 200
Value is : 0.07398106
Gradient is : -0.1603189 -0.2532476
Iteration: 300
Value is : 0.02483024
Gradient is : -0.07679074 -0.1373911
Iteration: 400
Value is : 0.009619333
Gradient is : -0.04347242 -0.08254051
Iteration: 500
Value is : 0.003990697
Gradient is : -0.02652063 -0.05206227
Iteration: 600
Value is : 0.001719962
Gradient is : -0.01683905 -0.03373682
Iteration: 700
Value is : 0.0007584976
Gradient is : -0.01095017 -0.02221584
Iteration: 800
Value is : 0.0003393509
Gradient is : -0.007221781 -0.01477957
Iteration: 900
Value is : 0.0001532408
Gradient is : -0.004811743 -0.009894371
Iteration: 1000
Value is : 6.962555e-05
Gradient is : -0.003222887 -0.006653666
```

1000 回の反復後、関数値は 0.0001 よりも小さくなった。対応する (x1,x2) の位置はどこになったか。

```
torch_tensor
0.9918
0.9830
[ CPUFloatType{2} ][ requires_grad = TRUE ]
```

これは真の最小 (1,1) にかなり近い。気が向いたら、学習率がどのような違いを生じるか試してみよう。例えば、0.001 と 0.1 をそれぞれ使ってみるとよい。



次の章では、白紙からニューラルネットワークを構築する。そこで最小化するのは **損失関数**、つまり回帰問題から現れる平均二乗誤差である。



## 第 6 章

# ニューラルネットワークを白紙から

この章では、回帰問題を解く。とはいっても、1m ではない。実際にニューラルネットワークを構築が、テンソルだけを使う（言うまでもなく *autograd* を有効にしたもの）。もちろん、今後このやり方で *torch* を使うわけではないが、無駄な努力にはならない。むしろその逆だ。基本的な仕組みを見ることで、*torch* が多くの手間を省いてくれることを認識できるだろう。それに、基本を理解することは、驚くほどよくある、深層学習をある種の「魔法」と考えてしまう罠に対する有効な対策になる。それは行列演算の繰り返しに過ぎない。学ぶべきはこれらをまとめ上げることだ。

回帰を行うネットワークに必要なものから始めよう。

### 6.1 ネットワークの考え方

簡単にいうと、ネットワークは入力から出力への関数だ。適切な関数が求めるものだ。

これを決めるには、会期として線型回帰を考えてみよう。線型回帰がしているのは、掛け算と足し算だ。独立変数一つ一つに対して、これに掛ける係数がある。それから、**バイアス**と呼ばれる項を末尾に加える。（二次元では、回帰係数とバイアスは回帰直線の傾きと  $y$  切片である。）

これらを考慮すると、乗算と加算はテンソルでできることで、テンソルはこれらの演算のためにあると言ってもいいくらいだ。例として、入力が百個の観測からなり、特徴量がそれぞれ三つあるものを示す。

[1] 100    3

$x$  に掛ける特徴量ごとの係数を格納するために、特徴量の数である長さ 3 の列ベクトルが必要だ。あるいは、この後すぐ行う修正に備えて、列の長さが三の行列にしてもよい。つまり、三行を持つ行列である。列はいくつ必要か。単一の特徴量を予測したいとすれば、行列は大きさ  $3 \times 1$  となる。

よさそうな候補を乱数で初期化する。テンソルは `requires_grad = TRUE` をつけて作成されていることに留意する。この変数はネットワークに学習てもらいたいパラメタを表し

ているからだ。

バイアステンソルは大きさ  $1 \times 1$  となる。

これで、データに重み  $w$  をかけ、バイアス  $b$  を加えて「予測」を得ることができる。

```
torch_tensor
-1.7865
-1.6663
 0.2930
-0.1158
 1.0669
 1.7775
-1.1148
-2.9786
-0.0540
 0.5420
... [the output was truncated (use n=-1 to disable)]
[ CPUFloatType{100,1} ][ grad_fn = <AddBackward0> ]
```

数学の表記では、ここでは次の関数を実装した。

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{XW} + \mathbf{b}$$

これのどこがニューラルネットワークなのか。

## 6.2 ネットワークの層

ニューラルネットワークの用語に戻れば、ここでしたのは単層のネットワーク、出力層の動作の原型である。単層ネットワークは構築したい類とはとてもいえない。単に線型内挿すれば済むのに、なぜネットワークを作るのか。実際、ニューラルネットワークの特徴は、(理論的に) 無数の層を連鎖できることになあ。もちろん出力層以外は「隠れ」層と呼ばれるが。深層学習フレームワークを使う上では全く隠れている訳ではない。

例えば、隠れ層が一つあるネットワークを作りたいとしよう。その大きさ、つまり層を持つユニットの数はネットワークの力を決める重要な要因になる。この数は作成する重み行列の大きさに反映される。八つのユニットを持つ層には八つの列を持つ行列が必要である。

```
w1 <- torch_randn(3, 8, requires_grad = TRUE)
```

各ユニットにはそれぞれバイアス値もある。

```
b1 = torch_zeros(1, 8, requires_grad = TRUE)
```

以前見たように、隠れ層は受け取った入力に重みを掛けてバイアスを加える。つまり、上に示した関数  $f$  を適用する。そして、別の関数を適用する。この関数は隠れ層から入力を受け取り、最終出力を生成する。結局、ここで行われているのは関数の合成である。二番目の関数  $g$  を呼び出すと、全体の変換は  $g(f(\mathbf{X}))$  つまり  $g \circ f$  となる。

上述の単層構造に類似した出力を  $g$  がするには、その重み行列は八つの列の隠れ層を取り、単一の列にしなければならない。つまり、 $\mathbf{w}_2$  は次のようになる。

```
w2 <- torch_randn(8, 1, requires_grad = TRUE)
```

バイアス  $\mathbf{b}_2$  は  $\mathbf{b}_1$  のように単一の値である。

```
b2 <- torch_randn(1, 1, requires_grad = TRUE)
```

もちろん、単一の隠れ層に止める理由はなく、仕組みを完成させたら、自由にコードをいじってほしい。でも最初に、追加しなければならない部品がいくつかある。その一つは、今の構造では関数を連鎖、あるいは合成しているのはよいが、これらの関数がしているのは加算と乗算であり、線型である。しかし、ニューラルネットワークの力は通常 **非線型性** にある。なぜか。

## 6.3 活性化関数

ここで、三つの層からなるネットワークがあったとして、各層では入力に重みを掛けただけだとする。(バイアス項を考慮することで変わるものはないにもないが、例がややこしくなるだけなので、省略する。)

このネットワークは行列積の連鎖  $f(\mathbf{X}) = ((\mathbf{X}\mathbf{W}_1)\mathbf{W}_2)\mathbf{W}_3$  になる。さて、この式を変形するとすべての重み行列を掛け合わせてから  $\mathbf{X}$  に作用させ  $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}(\mathbf{W}_1\mathbf{W}_2\mathbf{W}_3)$  と書くことができる。つまり三つの層のネットワークは単層のものに簡略化され、 $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\mathbf{W}_4$  となる。こうなると、深層ニューラルネットワークの利点がすべて失われてしまう。

ここで活性化関数、時に「非線型性」が登場する。これは非線型演算を導入するもので、行列演算でモデル化することはできない。歴史的には典型的な活性化関数は **シグモイド** であり、現在でも極めて重要である。その本質的な作用は入力を 0 と 1 との間に圧縮して確率と解釈できる量を与える。回帰では、これが求めるものではなく、ほとんどの隠れ層についても同様だ。

代わりに、ネットワークの中で最も利用されている活性化関数は *ReLU*、Rectified Linear Unit (正規化線型関数) と呼ばれるものだ。名前は長いが単に全ての負の値を 0 するだけだ。`torch` では `relu()` でこれができる。

なぜこれが非線型なのか。線型である規準の一つは、二つの入力に対し先に加えてから変換しても、先に個々の入力を変換してから加えても結果が同じになることだ。ReLU ではそのようにはならない。

```
torch_tensor
```

```
2
0
6
[ CPUFloatType{3} ]

torch_tensor
2
2
6
[ CPUFloatType{3} ]
```

結果は同じではない。

これまでをまとめると、層を重ねて活性化関数を作用されることを説明した。あと一つ概念を示してからネットワークを完成される。その概念とは損失関数だ。

## 6.4 損失関数

抽象的にいえば、損失とは目的からどれくらい離れているかという尺度だ。関数を最小化するとき、前の章で行ったように、これは現在の関数値と取りうる最小の値との差である。ニューラルネットワークでは、目的に適合している限り損失関数を自由に選ぶことができる。回帰問題では、平均二乗誤差（MSE: mean square error）がよく用いられるが、それには限らない。平均絶対誤差を代わりに用いるべきこともあるだろう。

`torch` では、平均二乗誤差は一行で書ける。

```
torch_tensor
9.99999e-05
[ CPUFloatType{} ]
```

損失関数が決まれば、重みの更新は勾配に比例した一部を引くことでできる。やり方は既に前の章で見たが、すぐにまた行うことになる。

それでは説明した部品を集めて組み立てよう。

## 6.5 ネットワークの実装

実装は三つの部分に分かれる。こうしておく、後で `torch` の高レベルの機能を利用してそれぞれの部分を改訂する際に、カプセル化やモジュール化が行われる部分が分かりやすい。

### 6.5.1 ランダムデータの生成

例として使うデータは百個の観測からなる。入力  $\mathbf{x}$  は三つの特徴量を持つ。目的  $y$  は一つの値で、 $y$  は  $\mathbf{x}$  から生成されるが、ノイズが加えられる。

### 6.5.2 ネットワークの構築

ネットワークは隠れ層と出力層の二層とする。つまり二つの重み行列と二つのバイアステンソルが必要である。特に理由はないが、隠れ層には三十二ユニット配置する。

現在の値、乱数初期化の結果は、重みとバイアスは有用ではない。ネットワークを訓練する時が来た。

### 6.5.3 ネットワークの訓練

ネットワークの訓練は入力を層に伝播させ、損失を計算し、パラメタ（重みとバイアス）を調整して、予測を向上するようにする事である。性能が十分（実際の応用では、非常に注意深く定義する必要がある）と思われるまで、これらの計算を繰り返す。技術的には、これらの手順を反復して適用する各回を **エポック**と呼ぶ。

関数の最小化のように、適切な学習率（差し引く勾配の比率）は実験的に決める。

以下に示す訓練ループを見ると、必然的に四つの部分に分かれることが分かる。

- 順伝播してネットワークの予測を得る（一行に書くのが好みでないなら、分けて書いてもよい）。
- 損失を計算する（これも一行で、いくらかのログ出力を追加しただけだ）。
- *autograd* に損失のパラメタに対する勾配を計算させる。
- パラメタを適切に更新する（ここでも全ての演算を `with_no_grad()` で囲み、`grad` フィールドを反復ごとにゼロにしている）。

Epoch:	10	Loss:	13.47987
Epoch:	20	Loss:	12.73906
Epoch:	30	Loss:	12.04771
Epoch:	40	Loss:	11.40238
Epoch:	50	Loss:	10.79786
Epoch:	60	Loss:	10.23156
Epoch:	70	Loss:	9.702051
Epoch:	80	Loss:	9.206795
Epoch:	90	Loss:	8.743211
Epoch:	100	Loss:	8.310417
Epoch:	110	Loss:	7.905298
Epoch:	120	Loss:	7.525508

Epoch:	130	Loss:	7.169545
Epoch:	140	Loss:	6.835567
Epoch:	150	Loss:	6.522161
Epoch:	160	Loss:	6.227923
Epoch:	170	Loss:	5.951756
Epoch:	180	Loss:	5.692746
Epoch:	190	Loss:	5.449304
Epoch:	200	Loss:	5.220502

損失は最初急速に減少し、その後それほど速く減少なくなる。この例は素晴らしい性能を示すために作られたのではなく、わずかな行のコードで「本物の」ニューラルネットワークが構築できることを示すことが意図である。

層や、損失、パラメタ更新はまだかなり粗削りで、(文字通り)単なるテンソルである。このような小さなネットワークには問題だが、より複雑な設計ではすぐに面倒になる。以下の二つの章では、重みとバイアスをネットワークに抽象化し、自作の損失関数を組込のものに取り替え、冗長なパラメタ更新部分を取り除く。



## 第 7 章

# モジュール

前の章では、ニューラルネットワークを構築して回帰の問題に適用した。演算には、線型と非線型の二種類があった。

非線型に分類される ReLU 活性化は、簡単な関数呼び出し `nnf_relu()` で表されていた。活性化関数は、関数であり、与えられた入力  $\mathbf{x}$  に対して出力  $\mathbf{y}$  を呼び出す毎に返す。つまり、決定論的であるが、線型部分は異なる。

回帰ネットワークの線型部分は、重みを表す行列との積とバイアスを表すベクトルの和で実装されていた。このような操作では、結果は当然関係するテンソルに格納されている実際の値に依存する。言い換えれば、演算は状態依存である。

状態が関係する場合は、それをオブジェクトにカプセル化して、ユーザが直接管理する必要がないようにするとよい。これが torch のモジュールが行なっていることだ。

モジュールという用語に注意してほしい。torch では、モジュールの複雑さの程度はさまざまである。この後すぐに導入する `nn_linear()` のような基本的な層から、多層からなる完成されたモデルまでが含まれる。コード上では、「層」と「モデル」との違いはない。そのため、「モジュール」だけが使われることもある。本書では、一般的な層とモデルの使い方に従い、概念との対応を重視する。

なぜモジュールかという話に戻る。カプセル化に加えて、層オブジェクトが提供されているのには、別の理由がある。よく用いられる層が全部 `nn_linear()` のように軽量ではない。次の節の最後で、簡単に他のモジュールについて述べ、本書の後の章で詳しく説明する。

### 7.1 組込の `nn_moudle()`

torch では、線型層は `nn_linear()` で作る。`nn_linear()` は、`in_features` と `out_features` の（最低）二つの引数が必要である。入力データに観測が 50 あり、それぞれ五つの特徴量がある場合、大きさは  $50 \times 5$  となる。潜在層には、16 のユニットを置く。この場合、`in_features` は 5、`out_features` は 16 である。（自分で重み行列を作

る場合、同じ5と16が行と列の数である。)

一度作られれば、モジュールのパラメタの情報は簡単に得られる。

```
An `nn_module` containing 96 parameters.
```

```
-- Parameters -----
```

```
* weight: Float [1:16, 1:5]
```

```
* bias: Float [1:16]
```

カプセル化されていても、重みとバイアステンソルを確認することができる。

```
torch_tensor
```

```
0.0646 -0.3890 0.2638 0.3351 0.2705
```

```
0.3745 0.0350 0.1128 -0.3636 0.1534
```

```
0.3132 -0.2470 0.3564 -0.2696 0.3627
```

```
-0.0336 0.0080 -0.0313 0.1328 0.4397
```

```
-0.3942 -0.4061 0.0750 -0.0503 -0.2439
```

```
-0.4121 0.1147 -0.3060 0.1572 -0.0701
```

```
0.2392 -0.3773 -0.2696 0.3430 0.4355
```

```
-0.3424 -0.1313 -0.1219 0.4039 0.3961
```

```
-0.1357 -0.3501 -0.0776 0.4018 0.3597
```

```
0.1596 0.4351 0.3172 0.1477 0.0573
```

```
-0.0025 -0.1653 -0.3160 -0.2467 0.4033
```

```
0.1396 -0.1446 0.1861 0.4311 0.1376
```

```
0.0108 -0.3997 -0.1708 -0.2127 0.0325
```

```
0.2889 0.0882 0.4059 0.3335 0.0059
```

```
0.3746 0.3524 -0.2349 0.2675 0.0421
```

```
-0.2548 0.2122 -0.3600 -0.4069 0.4436
```

```
[ CPUFloatType{16,5} ][ requires_grad = TRUE ]
```

```
torch_tensor
```

```
-0.3470
```

```
0.4273
```

```
0.0509
```

```
-0.2636
```

```
-0.4238
```

```
0.0590
```

```
-0.3259
```

```
0.2162
```

```
-0.1743
```

```
-0.1898
```

```
0.1058
```

```
0.4151
```

この時点で、ちょっと立ち止まってほしい。torch が返した重み行列の大きさは 16 x 5 で、白紙からコードを書いたときの 5 x 16 ではない。これは基礎となる C++ 実装 libtorch に由来する。性能のため、libtorch の線型モジュールは重みとバイアスを転置で格納している。R からは、この点を指摘しておくことくらいしかできない。混乱が軽減されることを望む。

```
[1] 50 16
```

AddmmBackward0

[illegible]

つまり、`nn_module` を使うと、`torch` は自動的に勾配計算が必要だとみなされる。

`nn_linear` は簡単に見えるが、ほとんど全てのモデル構成において必須の要素だ。

- `nn_conv1d()`、`nn_conv2d()`、および `nn_conv3d()`、いわゆる畳み込み層は入力要素に対するフィルタを異なる次元で適用する。
- `nn_lstm()` と `nn_gru()` は状態を引き継ぐ再帰層。
- `nn_embedding()` は高次元の質的データにつ分かれる。
- その他多数

## 7.2 モデルの構築

組込の `nn_module()` は普通の呼び方では層だが、どのようにモデルに組み上げるのか。「工場函数」`nn_module()` を使って、モデルを任意の複雑さで定義できる。でも、必ずしもそうする必要はない。

### 7.2.1 層の列としてのモデル: `nn_sequential()`

モデルが単に層を伝播するだけであれば、モデルを作るときに `nn_sequential()` が使える。線型層だけからなるモデルは多層パーセプトロン (MPL: Multi-Layer Perceptron) として知られている。

関係する層を詳しく見てみよう。ReLU 活性化を実装した函数をであった。(nnf\_のfは汎函数であることを示す。) 以下は `nn_relu` は `nn_linear()` と同様でモジュール、つまりオブジェクトで、引数は全てモジュールでなければならない。

組込モジュール同様、このモデルをデータに適用するには呼び出せばよい。

```
torch_tensor
0.01 *
4.8682
-3.2388
-6.0954
5.5774
5.4991
[ CPUFloatType{5,1} ][ grad_fn = <AddmmBackward0> ]
```

一回の呼び出しによりネットワークを通じた順伝播が始動した。同様に、`backward()` を呼び出せば全ての層を通じて逆伝播される。

### 7.2.2 独自処理のモデル

既に暗示されているように、ここが `nn_module` の使いどころだ。

`nn_module|()` は独自に作成された R6 オブジェクトに対するコンストラクタを作

る。以下、`my_linear()` はそのようなコンストラクタだ。呼び出させると、組込の `nn_linear()` に似た線型モジュールを返す。

コンストラクタの定義の中で、二つのメソッドが実装されなければならない。`initialize()` と `forward()` である。`initialize()` はモジュールのオブジェクトフィールドを作る。すなわちそれが持つオブジェクトまたは値でどのメソッドの中からも見える。`forward()` はモジュールが入力があったときの動作を定義する。

`nn_parameter()` の使い方を見てほしい。`nn_parameter()` は渡されたテンソルかモジュールの **パラメタ** として登録されていることを確認する、つまり逆伝播されるのが既定だ。

新たに定義されたモジュールのインスタンスを作るには、コンストラクタを呼び出す。

An ``nn_module`` containing 8 parameters.

```
-- Parameters -----  
* w: Float [1:7, 1:1]  
* b: Float [1:1]
```

この例では、モジュールを定義するために必要な独自のロジックはないが、ここではどんな利用形態にも適用できる雛型である。後に、より複雑な `initialize()` と `forward()` を検討したが、モジュールに定義される追加のメソッドを示す。基本的な仕組みは一緒だ。

ここ手では、前の章でモジュールを使ったニューラルネットワークを書き換えることができると感じるかもしれない。自由に取り組んでもよいし、最適化手法と組込損失関数を学ぶ次の章まで待ってもよい。それが済んだら、関数最小化と回帰ネットワークの二つの例に戻ることができる。そして、`torch` により自作した余計なものを取り除くことができる。



## 参考文献

Bronstein, Michael M., Joan Bruna, Taco Cohen, and Petar Velickovic. 2021. “Geometric Deep Learning: Grids, Groups, Graphs, Geodesics, and Gauges.” *CoRR* abs/2104.13478. <https://arxiv.org/abs/2104.13478>.