数列　対策問題 (随時更新します)

1. 長さ N の整数列 A があり, 各項 $(A_1, ..., A_N)$ は $-1, 0, 1$ のいずれかである. このとき, $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq N} A_iA_j$ として考えられる最小の値を求めよ. $\left(\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq N} \text{は} \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \text{と同じ意味} \right)$

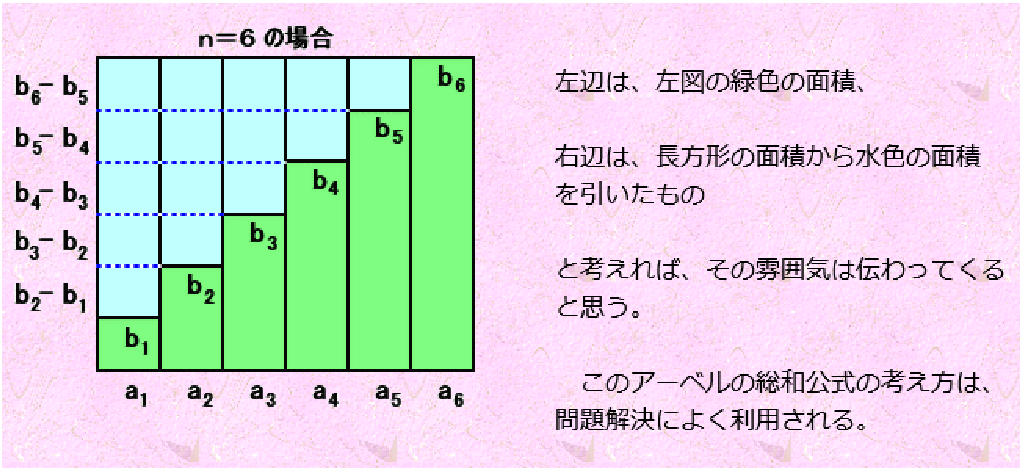
2. n を正の整数とするとき, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{2^{2k+1}-2^{k+1}-2^k+1}$ を求めよ.

3. 長さ n の数列 a, b について, 一般に次が成り立つことが知られている.
$\left(\text{以下では, } S_k = \displaystyle\sum_{m=1}^{k} a_m,\ T_k = \sum_{m=1}^{k} b_m \text{ とする.} \right)$

Abel's summation formula:

$$\sum_{k=1}^{n} a_kb_k = S_nb_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1})$$

これは, 下のイメージを代数的な議論に置き換えることで証明できる.



上記の事実を証明なしに用いてよいので, 以下の 2 つの問いに答えよ.

(1) 次の定理を証明せよ.

Abel's inequality:
$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ であるならば, $S_1, S_2, \ldots, S_n$ の最小値を m, 最大値を M とおいたとき, 以下の不等式が成り立つ.

$$mb_1 \leq \sum_{k=1}^{n} a_kb_k \leq Mb_1$$

(2) 以下の命題が真であることを証明せよ.

$a_k > 0,\ b_k > 0,\ S_k \geq T_k\ (k = 1, 2, \ldots, n)$ であり, 数列 $\{a_nb_n\}$ が狭義に単調増加であるならば,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k}$$