数列　対策問題 (随時更新します)

1. 長さ N の整数列 A があり, 各項 $(A_1, ..., A_N)$ は $-1, 0, 1$ のいずれかである. このとき, $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le N} A_i A_j$ として考えられる最小の値を求めよ. $\left(\displaystyle\sum_{1\le i<j\le N} \text{ は } \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \text{ と同じ意味} \right)$

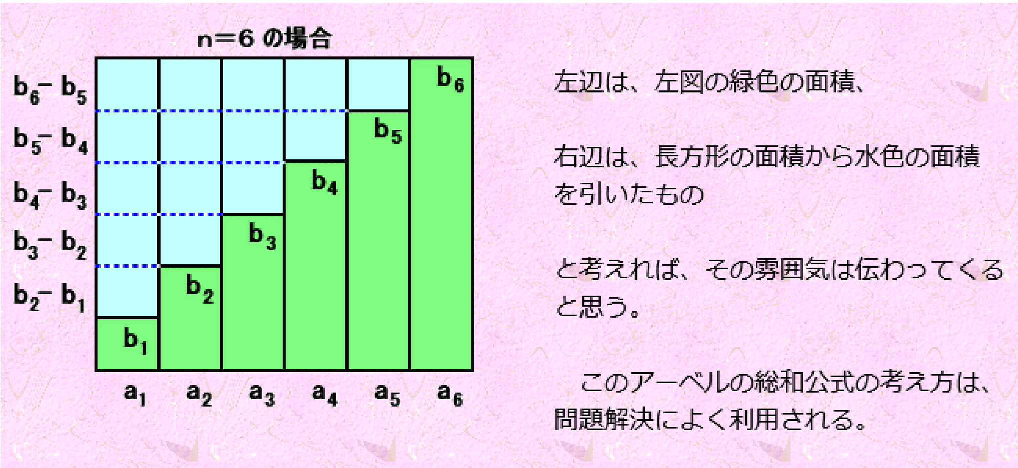
2. n を正の整数とするとき, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{2^{2k+1} - 2^{k+1} - 2^k + 1}$ を求めよ.

3. 長さ n の数列 a, b について, 一般に次が成り立つことが知られている.
以下では, $S_k = \displaystyle\sum_{m=1}^{k} a_m,\ T_k = \sum_{m=1}^{k} b_m$ とする.

Abel's summation formula:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1})$$

これは, 下のイメージを代数的な議論に置き換えることで証明できる.



上記の事実を証明なしに用いてよいので, 以下の 2 つの問いに答えよ.

(1) 次の定理を証明せよ.

Abel's inequality:
$b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n$ であるならば, $S_1, S_2, \ldots, S_n$ の最小値を m, 最大値を M とおいたとき, 以下の不等式が成り立つ.

$$m b_1 \le \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le M b_1$$

(2) 以下の命題が真であることを証明せよ.

$a_k > 0,\ b_k > 0,\ S_k \ge T_k\ (k = 1, 2, \ldots, n)$ であり, 数列 $\{a_n b_n\}$ が狭義に単調増加であるならば,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k}$$