

実験データの統計解析

榎戸輝揚 (ver.2010-05-06@東大牧島研セミナー)

X線天文学で用いられる実用的な事例をとりあげ、データ解析の統計的な扱いについてまとめた。統計処理は奥の深く、私の誤解や不理解もあるかもしれないので、その場合、ぜひ連絡をしてほしい¹。このノートには複数の題材をまとめているが、一度のセミナーで行うには分量が多いので、5月6日のセミナーではこの一部のみを取り上げる。より詳しい議論は参考文献を参照してほしい。

§1 誤差の性質と確率密度関数

実験データには以下の2つの種類の誤差が生じ、物理量を推定するには両者の性質をよく理解することが必要である。

統計誤差 (Statistical Error); 測定にともなう統計的なゆらぎに由来する誤差。たとえば、放射線源の崩壊率や、一定の明るさで定常的に輝く天体から到来するX線光子数などで、統計分布がわかっている場合が多い。

系統誤差 (Systematic Error); 検出器の較正、バックグラウンドの推定方法に伴う不定性などに由来する誤差。たとえば、「すぎく」衛星の硬X線検出器 (HXD) では、バックグラウンドを実データを元にモデル化しているが、バックグラウンドの予測不可能なゆらぎが最終的な系統誤差として残る。その分布関数はわかっていない場合が多い。ただし、全系統誤差はガウス型の分布を仮定し個々の誤差の二乗和として求めることが行われる。

ある物理実験を行った場合、測定値には母集団が存在すると考える。母集団とは、同じ条件で無限回の測定を繰り返したときに得られる測定値の分布である。実際には無限回の測定は不可能であり、このような母集団が存在すると仮定する。ここでは、母集団が従う確率密度関数 (Probability Distribution Function; pdf) の具体例としてポアソン分布 (Poisson Distribution)、ガウス分布 (Gauss Distribution)、カイ2乗分布 (χ^2 distribution) を紹介する。

¹enoto@juno.phys.s.u-tokyo.ac.jp

§1.1 ポアソン分布とガウス分布

多くの講義で扱われているので、導出や詳しい性質は教科書を参照されたい。表 1 に、その性質の一覧をまとめた。

	ポアソン分布 Poisson	ガウス分布 Gauss	カイ 2 乗分布 χ^2
確率密度関数	$\frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\frac{x^{(\nu-2)/2} e^{-x/2}}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)}$
平均値	λ	μ	ν
分散	λ	σ^2	2ν

表 1: 代表的な確率密度関数の性質

ここでは実践的に CERN 研究所が配布しているデータ解析フレームワーク ROOT を起動して手を動かしてみる。 $0 < x < 10$ の範囲で平均 $\mu = 2$ のポアソン分布を描くには、

```
prompt> root -l
root [0] TF1 f1("poisson","TMath::Poisson(x,2)",0,10); f1.Draw();
```

とする。このようにして、ポアソン分布とガウス分布を描くと、図 1 のようになる。確率変数が ~ 20 を超えるとポアソン分布はガウス分布で近似できる。この性質は計数を行う実験データでの誤差の付け方で利用する。

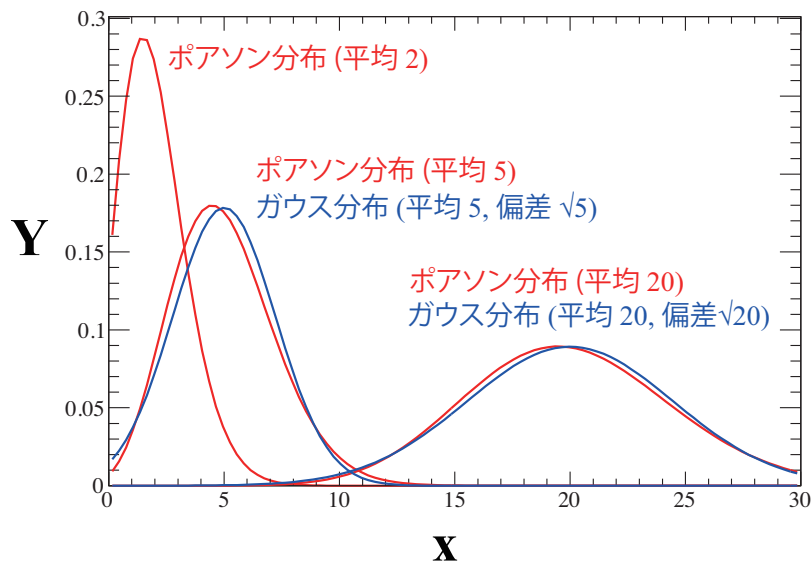


図 1: ポアソン分布 (赤) とガウス分布 (赤) の比較。

分布の各 x での値を知りたい場合には、統計学の数表を見るのもよいが、

```
root [0] TMath::Poisson(3,2)
(Double_t)1.80447044315483557e-01
```

とすれば、ポアソン分布での $x = 2$ の値は 0.18 であるとわかる。

一方で、累積密度関数 (Cumulative Distribution Function) を知りたければ、

```
root[1] ROOT::Math::gaussian_cdf(1,2)
(double)8.41344746068542926e-01
```

などとすれば、 $\sigma = 1$ のときに、 $x \leq 2$ の総確率は 0.84% であるとわかる。これを用いれば、ガウス分布の場合、確率変数 x が $\pm\sigma$ の中に含まれる確率は 68.3%、 $\pm 2\sigma$ は 95.5%、 $\pm 3\sigma$ は 99.7% であることも確認できる。

例 1. ポアソン分布

東京大学理学部物理学科の学生数 ~ 70 人に対し、女性学生数は例年 2-3 人程度である。女性数が 10 人以上の年が生じる確率はどの程度だろうか？

各学年の女性数は独立だと仮定し²、平均値が小さいので平均 2.5 人のポアソン分布を考える。このとき、10 人を超える確率は 6×10^{-5} と極めて低い！1 万年に 1 度起きるかどうかである。実は、10 年ほど前に 1 度 10 人を超えたことがあるらしく、戦後 60 年ほどで 1 度起きているとすれば、その確率は ~ 0.02 程度である。したがって、統計的には極めて有意なこの年には、仲良し女性の集団が大挙して入ったか、魅力的な教授が居たか、前年に女性が増えていた、などの効果があったのかもしれない。それにしても自虐的な例である。

例 2. ガウス分布

放射線計測で時間的に一定なバックグラウンド信号を測定し、そのレートとして 30 count s^{-1} であったとする。 50 count s^{-1} を超えるイベントは何秒間測定されれば観測されうるだろうか？

1 秒当たりのカウント数が 20 を超えているので、平均 30 で、標準偏差 $\sqrt{30} = 5.4$ のガウス関数を考える。 50 count s^{-1} を超える確率を CDF から計算してみると、 1×10^{-4} 程度である。1 日は $8.6 \times 10^4 \text{ s}$ 程度なので、1 日観測すると 50 count s^{-1} を超えるビンが統計的には 8-9 個ほどは想定される。3 時間に 1 イベントほどである。ちなみに、平均から離れた 3σ 離れたイベントの確率は 1.3×10^{-3} ほどであるから、1 時間観測して 3600 ビンの観測をすれば、4.7 個ほどは統計的に想定される。

²女性が多い学科には新入生の女性も増えるなどの効果は考えない。

§1.2 カイ 2 乗分布 (χ^2 分布)

カイ 2 乗分布 (χ^2 分布) は、実験データのフィッティングや検定でよく現れる確率密度関数である。平均 0、分散 1 のガウス分布に従う確率変数を ν 個取り出し、2 乗和をとった変数が従う分布であり、図 2 にその例を示した。自由度 ν が大きいときには χ^2 分布はガウス分布に近づく。

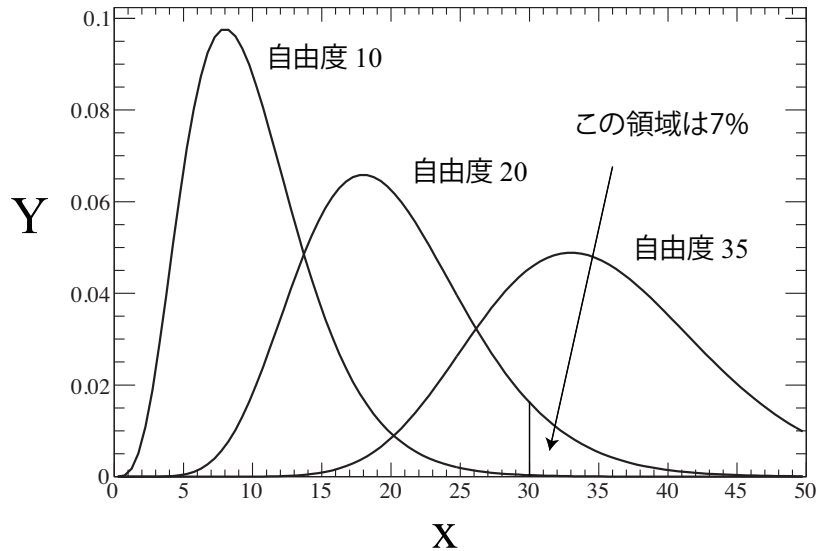


図 2: カイ 2 乗分布。

χ^2 の定義は簡単なのに対し、関数形はガンマ関数を使う少し複雑な式である。導出が気になると思うので、以下に簡単に紹介する。

—— χ^2 分布の導出 ——

ν 個の独立な変数 x_1, \dots, x_ν があり、個々の x_i ($i = 1, \dots, \nu$) はそれぞれ平均 0, 分散 1 の正規分布に従うとする。このとき、

$$\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_\nu^2 \quad (1)$$

で定義される変数 χ^2 は、

$$P(\chi^2, \nu) = \frac{(\chi^2)^{(\nu-2)/2} e^{-\chi^2/2}}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} \quad (2)$$

という確率分布関数 (chi-squared distribution) に従うことを示せ。

(証明) 簡単のため $Q = \chi^2$ とおく。 x_i は各々 $p(x_i) = e^{-x_i^2/2}/\sqrt{2\pi}$ という確率分布に従うため、変数 Q が従う確率分布関数は、

$$\begin{aligned} P(Q, \nu) dQ &= \int p(x_1) dx_1 \cdots \int p(x_\nu) dx_\nu = \int \prod_{i=1}^{\nu} p(x_i) dx_i \\ &= \int \frac{e^{-(x_1 + \cdots + x_\nu^2)/2}}{(2\pi)^{\nu/2}} dx_1 \cdots dx_\nu \\ &= \frac{e^{-Q/2}}{(2\pi)^{\nu/2}} \int dx_1 \cdots dx_\nu \end{aligned}$$

である。右辺の多重積分は多次元空間の超球殻の体積に相当することがわかる。この多次元空間の半径を $R = \chi = \sqrt{Q}$ とする。球殻の体積を dQ を用いて表すため、(球殻の表面積 A) \times (厚み dR) で計算し、教養課程の数学で習う多次元球の体積を用いると、

$$\begin{aligned} \text{球殻の表面積 } A &= S^{(\nu-1)}(R) = \frac{dV_{\nu-1}}{dR} \\ &= \frac{2\pi^{\nu/2} R^{\nu-1}}{\Gamma(\nu/2)} \end{aligned}$$

である。一方で、 $R^2 = Q$ より、 $dR = dQ/2R = dQ/2\sqrt{Q}$ であるから、

$$\int dx_1 \cdots dx_\nu = \frac{2\pi^{\nu/2} \sqrt{Q}^{\nu-1}}{\Gamma(\nu/2)} \frac{dQ}{2\sqrt{Q}} = \frac{\pi^{\nu/2} Q^{(\nu-2)/2}}{\Gamma(\nu/2)} dQ \quad (3)$$

と表せる。これを用いると、 Q が従う確率密度関数は、

$$P(Q, \nu) = \frac{Q^{(\nu-2)/2} e^{-Q/2}}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} \quad (4)$$

となり、 χ^2 分布を導けた。

§2 帰無仮説と検定

ある仮説が、一定の確率的根拠に基づいて妥当かを統計学的に判断することを仮説検定 (hypothesis test) という。実験データをフィットしたり、周期信号の検出を行う場合にも、背景にはこの統計的に検定が存在することを意識したい³。

仮説検定においては、棄却 (否定) されたときに意味を持つような帰無仮説 (null hypothesis) を立て、問題にしている物理量が従う確率密度関数に対し、実際の測定値がどの位置にあるかで帰無仮説を判定する。その際、観測された結果が、想定された確率密度関数に対して、どれだけの「めずらしさ」を持っているかの基準 p-value⁴ (Confidence level) を、測定値が分布の端からどれくらいの面積に位置するかで評価する。この値を、帰無仮

³母集団の分布に仮定があるパラメトリックな検定と仮定がないノンパラメトリックな検定 (例. 順位だけがについているデータ間の相関) があるなど、仮説検定も奥が深い、ここでは簡単な例のみ紹介していく。

⁴Probability の p

説が誤りであり得る最大の確率として設定する「危険率(or 有意水準)」と比べて、統計的な有意さを判定する⁵。わかりにくいと思うので、例をあげる。いずれも、ROOT で図を描き、CDF を計算して、検討せよ。

例 3. 仮説検定の例

ある国に流通している金貨は平均値 6 g、標準偏差 0.5 g (分散 0.25) のガウス関数の確率密度分布をもつ。このとき、ある袋に入った 10 枚の金貨があり、その重さの平均値は 6.4 g であったとする。これらは全て、同一の母集団から得られた偽金貨か本当の金貨かいずれかであるとすると、どのように判定するか [12]⁶?

母平均 6、標準偏差 0.5 の母集団から 10 個の標本をサンプルした場合、標本平均は 6、標本分散は $0.25/10 = 0.025$ (偏差は 0.158) に等しくなるはずである。実際に 10 個の標本されたサンプルで 6.4 g というのはどの程度外れた値なのだろうか? 平均 6 で偏差 0.158 のガウス関数において、6.4 以上の値をとる確率は 0.4 % ($p\text{-value} = 4 \times 10^{-3}$) である。「10 個の金貨は本物である」という帰無仮説を考え、危険率を 0.01 (1%) と設定した場合、この $p\text{-value}$ の値は危険率よりも小さい。つまり、有意に本当の金貨の分布からはずれており、統計的には帰無仮説を棄却して偽金貨であるとなる。

例 4. フィット時の χ^2 (§7 参照)

ある X 線スペクトルをモデルスペクトルでフィットする場合を考える。ここでの帰無仮説は「得られた X 線スペクトルは、想定した放射モデルの光子分布に基づいてポアソン分布したもの」となる。この帰無仮説のもとで χ^2 検定を行うことで、「天体が仮定した放射モデルで輝いているとすると、得られた揺らぎをもつデータが得られる確率はどれくらいか」を計算することができる。

フィットの結果は、データ数とモデルパラメータで決まる自由度 ν の χ^2 分布に従う (§4)。たとえば、自由度 9 であった場合を考える。仮に、 $\chi^2 = 10.0$ と得られたならば、危険率 0.01 と設定したときには、 $p\text{-value} = 0.35$ で危険率の左側で、最適なモデル関数のパラメータのもとで「よくある」ことのため、帰無仮説は棄却できない。つまり、危険率 0.01 のもとでは、観測データはこの放射モデルを母関数にしていると考え“ても”よいということになる。ただし、 χ^2 検定はこのモデル関数が唯一の答えであるかどうかは教えてくれない。同じデータに対して、別の放射モデルでフィットを行っても $\chi^2 \sim 10.0$ になることがあり得、統計的にどちらのモデルが正しいかは χ^2 検定では判定できない。その場合は、物理的な理解に基づいて、モデルを選択するなど、統計手法以外の選択基準が必要となる。一方で、 $\chi^2 = 24.0$ であれば $p\text{-value} = 4 \times 10^{-3}$ と危険率より低く、このモデル関数で当てはめるとめったに合わない結果、つまりモデル関数が正しくないということになる。

例 5. 時間変動の検定/周期性の探索 (§8 参照)

連続した 10 個の時系列データが得られたとして、「得られたデータは、時間的に一定な母関数から抽出されたものである」という帰無仮説をたてたとする。このデータを一定値 (定数) でフィットした場合、得られる χ^2 の値は、 $10-1=9$ 個の自由度の χ^2 分布に従うはずである (§1.2)。

⁵危険率 (有意水準) の設定は問題設定や人ごとに異なりうる。

⁶わかりやすい数値設定にしているが、直感的にもこれは偽物だろうけれど。。。

仮に、 $\chi^2 = 10.0$ と得られたならば、危険率 0.01 としたときには、 $p\text{-value} = 0.35$ で危険率の左側にあり「起こりうること」として、帰無仮説は棄却できない(採択される)。つまり、時間的に一定と考えて矛盾がない。一方で、 $\chi^2 = 24.0$ であれば、 $p\text{-value} = 4 \times 10^{-3}$ であり、得られた結果は「偶然には滅多にないこと」であり、帰無仮説は棄却される。つまり、危険率 0.01 のもとではデータは時間的に一定ではない、ということになる。

なお、上記の棄却計算を ROOT で行う場合、自由度 $\nu = 9$ の χ^2 において、 $\chi^2 = 10$ を超える確率は、

```
root [0] ROOT::Math::chisquared.cdf.c(10,9)
(double)3.50485212323360884e-01
```

とすれば、0.07 だとわかる。Mathematica を用いる場合には、

```
In[0]= N[1 - CDF[ChiSquareDistribution[9], 10], 3]
Out[0]= 0.350
```

である。

§3 天体観測における検出感度の実例

衛星に搭載された検出器が天体の信号をどの程度の有意性で検出できるかも SN 比 (Signal-to-Noise ratio) を Poisson 統計に基づいて考えることで議論できる。ここでは、天体からの信号やバックグラウンド信号が時間変化していないとし、検出器の有効面積 A cm^2 、検出効率 ϵ 、観測しているエネルギー幅 ΔE keV とする [11]。

§3.1 光子限界 (photon limit)

バックグラウンドが無視できる明るい天体の場合には、観測時間 T の間に天体から検出した光子数 N_s の統計的なゆらぎが感度を決まる。

$$N_s = \epsilon A T F_s \Delta E \quad (5)$$

統計的なゆらぎは Poisson 統計から $\delta N_s = \sqrt{N_s}$ (1σ 誤差) となり、SN 比は

$$\frac{N_s}{\delta N_s} = \sqrt{N_s} = \sqrt{\epsilon A T F_s \Delta E} \quad (6)$$

である。 3σ の SN 比、つまり 99.8% の信頼度で統計的なゆらぎではないと言える有意性は $N_s/\delta N_s \sim 3$ より

$$F_{\min} = \frac{3^2}{\epsilon A T \Delta E} \quad (7)$$

と表せる。これがバックグラウンド信号が無視できるときの光子限界で決まる検出感度であり、これは観測時間を長くし統計をあげることで下げることができる。ここにも仮説検定の思想が裏にある。

§3.2 バックグラウンドによる検出限界

天体の信号がバックグラウンド信号に比べて弱いときには、バックグラウンドの統計的なゆらぎにより検出感度が決まる。バックグラウンドのレートを $B \text{ count}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ keV}^{-1}$ とすると、その統計的なゆらぎは 1σ で、

$$\delta N_b = \sqrt{ATB\Delta E} \quad (8)$$

である。これを用いると、SN 比が 3 になる条件は、

$$\text{SN} = \frac{N_s}{\delta N_b} = 3 \quad (9)$$

であり、式 (5) と式 (8) を用いると、

$$F_{\min} = \frac{3}{\epsilon} \sqrt{\frac{B}{AT\Delta E}} \quad (10)$$

となる。この式によれば、観測時間を長くすれば検出限界は引き下げられることになるが、現実のバックグラウンドは Poisson 統計に従うゆらぎだけでは決まらない。それは、十分に観測時間を長くした場合、予測できないバックグラウンドの系統的な誤差 ΔB によって感度が制限されるからである。この条件は、SN 比が $\Delta B/B$ 程度になると効いてくるので、

$$\text{SN} = \frac{\epsilon F_{\min}}{B} = 3 \sqrt{\frac{1}{ATB\Delta E}} > \frac{\Delta B}{B} \quad (11)$$

が限界を与える。したがって、それ以上観測しても感度があがらない観測時間 T_{\max} は 3σ レベルで、

$$T_{\max} = \frac{3^2}{AB\Delta E} \left(\frac{B}{\Delta B} \right)^2 \quad (12)$$

である。バックグラウンドの理解が進み ΔB が小さくなることで、検出感度が引き下げられる場合があり、このバックグラウンドの理解が宇宙 X 線観測でサイエンスを引き出す重要な観点のひとつとなる。

なおこれらの他に、検出限界よりも暗い天体の個数が観測する視野によって統計的にばらつく混入雑音で決まる検出限界として「混入限界」がある。これは上記二つの検出感度の限界とはことなり、観測時間を長くしたり、バックグラウンドの理解が進んでも引き下げることができない。

§4 最小二乗法

モデル関数を実験データと比較し、あてはめるには、大きく分けて最尤法 (Maximum likelihood method) と最小二乗法 (Least squares method) がある。ある測定値について確率分布関数がわかっている場合には、Likelihood 関数を最大にする最尤法を用いることができる。Maximum Likelihood 法ではデータをビンまとめ (binning) する必要がない利点があるが、確率分布関数を知っていなくてははいけない。X 線天文で用いる例が比較的少ないのでここでは割愛する。

最小二乗法を用いる場合には、測定値の確率分布関数がかかっていない場合にも適用できるが、得られたデータ点ごとに誤差が明示されなくてははいけない。したがって、事象をカウントするたぐいの実験 (放射線計測や X 線観測データ) では、得られたデータをビンまとめし (binning)、ヒストグラム (度数分布) を生成して、独立変数 x_i ($i = 1 \cdots N$) ごとの測定データ y_i について、誤差 σ_i を決める。これらを用い、測定データに理論曲線をあてはめるの良さを、

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - f_M(x_i))^2}{\sigma_i^2} \quad (13)$$

という関数を用いて評価する。ここで $f_M(x_i)$ は、実験データを再現するために用意された M 個のパラメータをもつモデル関数とする。

想定したモデル関数が正しく、パラメータが適切な値の場合には、各ビンのデータ点 y_i は $f_M(x_i)$ のまわりに σ_i 程度のばらつきで分布するはずである。ここで、ビンまとめした各ビンはモデル関数のまわりに Poisson 分布に従って分布するが、§1.1 で前述したようにカウント数が大きい ($\gtrsim 20$) 場合には、Gauss 分布で近似できる。大雑把に言えば、正しいモデル関数のもとでは、式 (13) の右辺の各項の大きさはおよそ 1 程度になるため、 χ^2 はデータ点数 N に近くなると考えればよい。したがって、実験データのビン数とモデル関数のパラメータ数で決まる自由度 ν (degree of freedom; d.o.f) を用い、

$$\text{Reduced chi-square} \quad \chi_\nu^2 = \chi^2 / \nu \quad (14)$$

という量を定義すれば、これが 1 程度であればフィットが妥当であったことの指標となる。

より正確には、§1.2 の χ^2 分布の定義を思い出すと予想されるように、各データ y_i が平均 $f(x_i)$ 、分散 σ_i のガウス分布に従う場合、最良推定値のパラメータを採用した場合の χ_{\min}^2 は、自由度 $N - M$ の χ^2 分布に従う。したがって、式 (13) において、適当なモデル関数で実験データをフィットし、モデル関数を実験データを統計的にどの程度よく再現しているかは、最終的に得られた χ_{\min}^2 の値を自由度 $N - M$ の χ^2 分布と比較し、

$$\text{CL} = \text{p-value} = \int_{\chi_{\min}^2}^{\infty} f_{\chi^2}(\chi^2; \nu) d\chi^2 \quad (15)$$

で定義した信頼度 (Confidence level; p-value) を見積もることで、フィットの妥当性の目安とする (§2)。ここで、 $f_{\chi^2}(\chi^2; \nu)$ は自由度 ν の χ^2 分布の確率密度関数である。さらに、 χ^2 の最小値 χ^2_{\min} が得られれば、 χ^2 を最小にするパラメータが最良推定値であり、パラメータの誤差 (信頼区間) は χ^2 からのずれ $\Delta\chi^2$ から推定できる。

図3は、 ν と χ^2_{ν} に対して p-value の線を示したものであり、自由度が大きい場合には同じ Reduced chi-square の値でも p-value は小さくなっていくことに注意しよう。

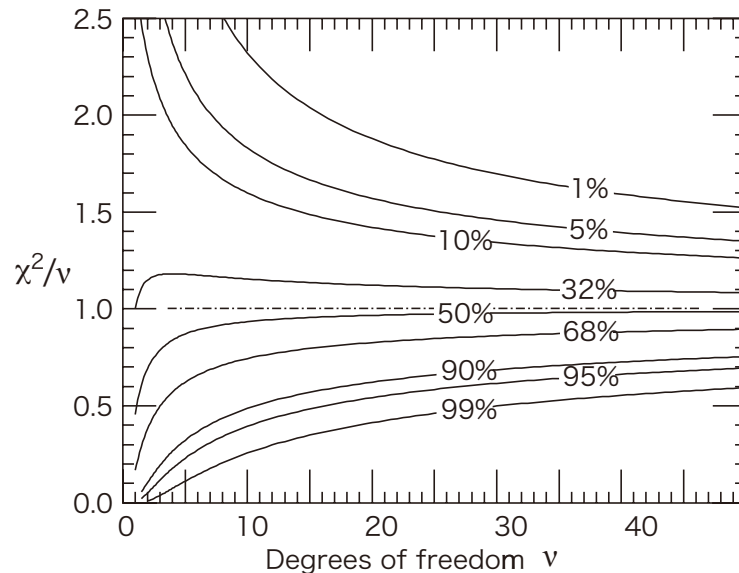


図3: 自由度 ν , Reduced chi-square χ^2/ν に対する p-value の曲線??。

§5 χ^2 の最小化アルゴリズム

前節 (§4) で述べた χ^2 の最小化において、モデル関数が多項式の場合は行列計算 (連立方程式) で解くことができる。しかし一般には、モデル関数は多項式ではない非線形項を含むことが多く、 χ^2 自身も多次元空間における複雑な凹凸をもつ局面となっているため、適切な反復 (iteration) アルゴリズムに基づく最小値の探索が必要になる。最小化アルゴリズムでは、モデル関数の微分可能性、パラメータの範囲、収束性の良さ、局所的な最小値に陥らない性質、初期値の選び方など多くの注意点があり、これらに応じて最小化アルゴリズムにも Grid Search、Gradient Search、Expansion Method、Gradient-Expansion algorithm (Marquardt method) など様々な種類がある。奥が深いので詳しくは教科書を読んでほしい。

ひとつの例として、2 変数パラメータで決まる

$$f(x, y) = (1 - x)^2 + 100(-x^2 + y)^2 \quad (16)$$

という関数を考える。関数形から明らかになように、この最小値は $(x, y) = (1, 1)$ である。初期値として $(x, y) = (1, 3)$ を与えた場合に、関数の勾配とヘッセ行列を使うニュー

トン法 (Newton method)、その修正である修正ニュートン法 (Quasi-Newton method)、導関数を用いない直接探索を行う主軸法、剰余関数とその導関数であるヤコビ行列を用いる Gauss-Newton 法あるいは Levenberg-Marquardt 法を用いた場合に、どのような反復ステップを経て最小値に至るかを図 4 に示した [9]。いずれの方法でも最小値に収束しているが、そこへ至る道筋はアルゴリズムごとに異なることがわかる。これらのなかで X 線データの解析ツール XSPEC の標準設定では、比較的頑健な Levenberg-Marquardt 法を採用している。Levenberg-Marquardt の比較的まとまった解説は [10] にある。

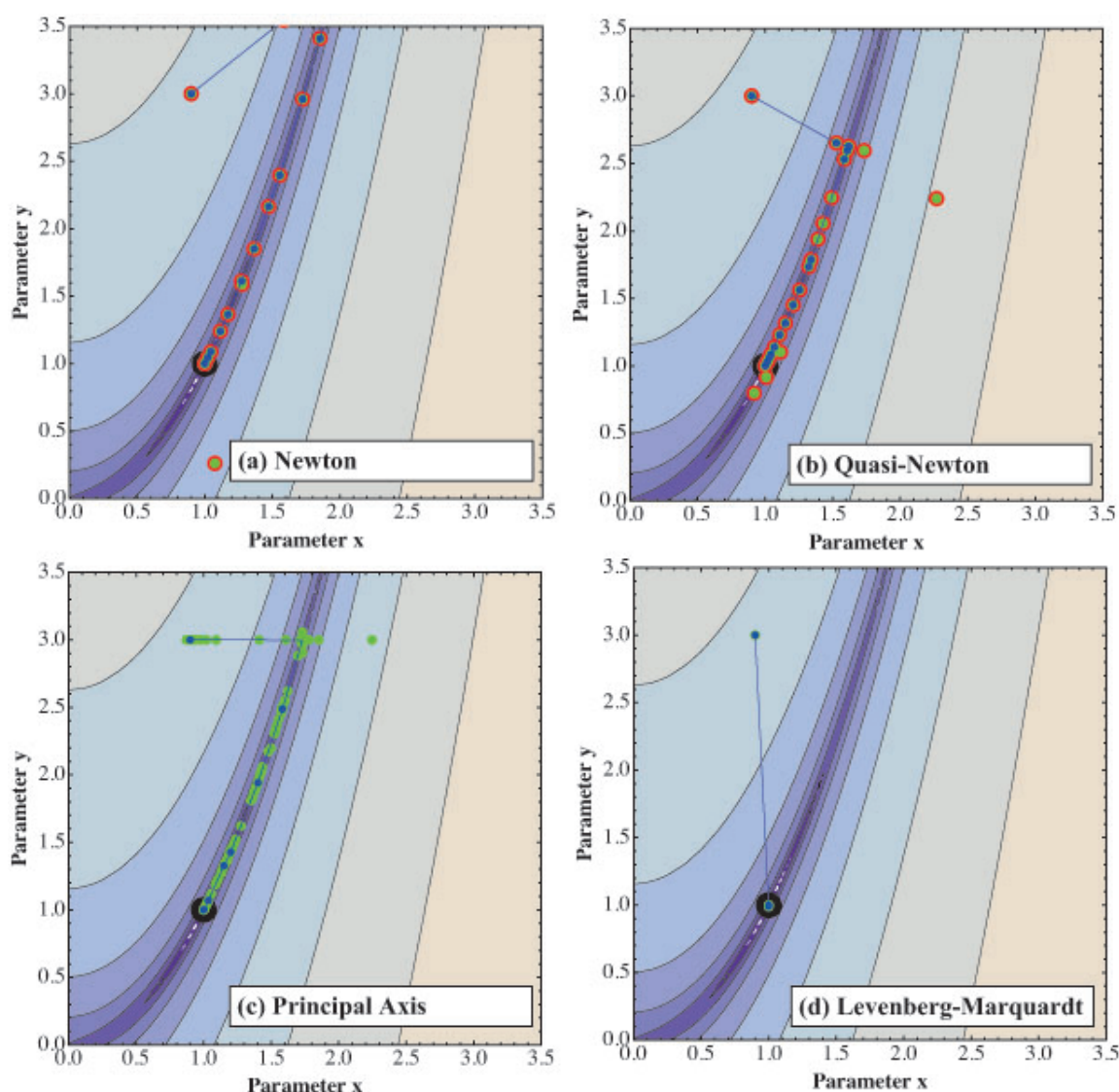


図 4: 関数最小値の探索ステップを各々の探索法について関数値 contour の上に示した。関数として $f(x, y) = (1 - x)^2 + 100(-x^2 + y)^2$ を使い、(a) Newton 法、(b) Quasi-Newton 法、(c) 主軸法、(d) Levenberg-Marquardt 法、を Mathematica を用いて計算した。ステップは青い線と青い点、関数の評価は緑点、勾配の評価は赤点、ヘッセ行列の評価は水色の点、剰余関数の評価は黄色い点、ヤコビ行列の評価は紫の点、検索の終了は大きい黒い点で示した。

§6 ROOT を用いたフィットの実例

CERN ライブラリとして提供されている MINUIT パッケージは、 χ^2 などの多変数関数の最小値を探し、その周辺の関数の形を調べる信頼性の高いアルゴリズム群である。もともとは FORTRAN で作成され、後に C++ クラスとして実装された。XSPEC でも呼び出すことができ、ROOT では TMinuit クラスとして使用できる。MINUIT パッケージには、乱数を用いて関数の最小値を探る SEEK、関数の微分を用いずにシンプレックス法で最小値を探す SIMPLEX、関数の微分を用いて Fletcher 法で最小値に到達する MIGRAD、見つけた最小値が唯一ものかを確認する IMPROVE、誤差の評価を正確に行い、+側の誤差と - 側の誤差とを別々に求める MINOS、などのルーチンが含まれている [4, 3, 13]。

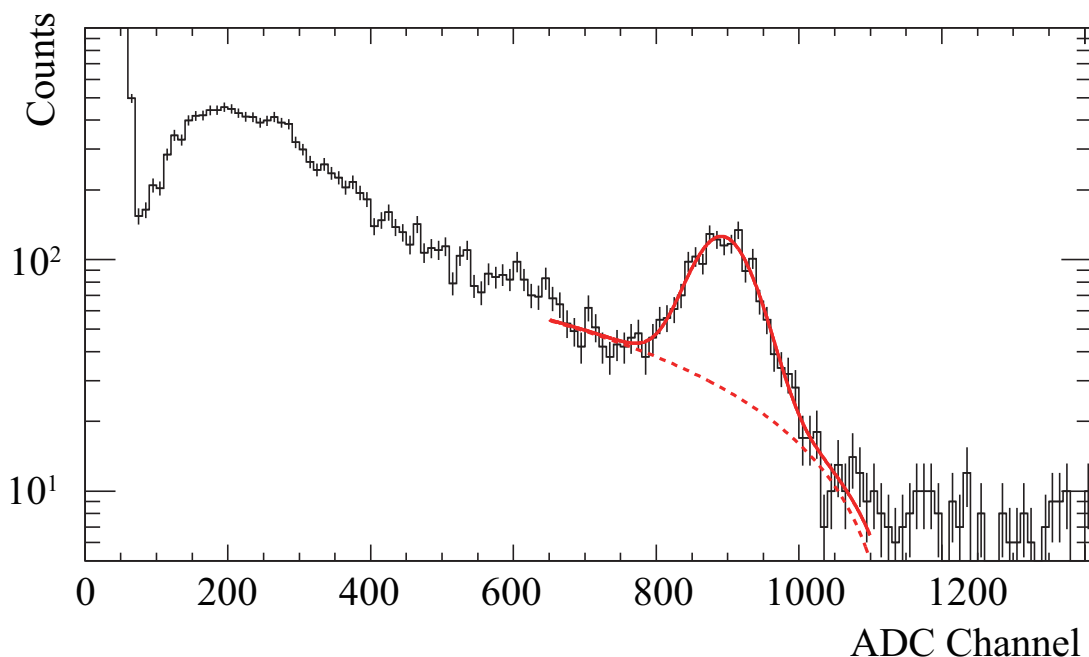


図 5: 結晶シンチレータに ^{137}Cs を照射した際の放射線スペクトル。1 次の線形関数で近似したバックグラウンド (赤点線) と、662 keV ラインをガウス関数でフィットした (赤線)。

ここでは ROOT から MINUIT パッケージを利用してフィットを行う例を紹介しよう。図 5 は、実際に放射線検出器で取得された放射線スペクトルのヒストグラムである。ここで用いた検出器は、雷雲活動に伴って発生するガンマ線放射を衛星軌道上から検出するため、BGO 結晶シンチレータとアバランシェ・フォトダイオードを組み合わせた小型で省電力な検出器である。小型衛星に搭載されて H2-A ロケットによって種子島から打ち上げられたが、残念ながら打ち上げ後の衛星不具合で検出器に電源投入する機会もなかった。動作していれば、雷放電での加速電子の物理を探る専用の検出器として、世界初の切り口であったため大変残念であった。このように、軌道上でのデータ取得ができなかったため、地上での校正作業時に放射線源 ^{137}Cs を照射したデータを例にした。

図5では、バックグラウンド信号と放射線源のコンプトン散乱成分が連続成分をなし、900 チャンネル付近には ^{137}Cs から ^{137}Ba 励起状態への β^- 崩壊に伴う 662 keV の全吸収ピークが見られる。ここで、前者を 1 次関数、後者でガウス関数でフィットしてみよう。ROOT のヒストグラム (hist) を上記の関数 (func) でフィットする場合、

```
root [10] hist->Fit(func,"R+","");
```

とすると⁷、MINUIT パッケージが呼ばれ、MIGRAD や HESSE などの極小化のアルゴリズムにより、

```
FCN=41.2192 FROM MIGRAD      STATUS=CONVERGED      166 CALLS      167 TOTAL
EDM=7.7618e-10      STRATEGY= 1      ERROR MATRIX ACCURATE

EXT  PARAMETER
NO.   NAME      VALUE      ERROR      STEP      FIRST
      SIZE      DERIVATIVE
1  norm      9.70420e+01  4.57006e+00  1.16744e-02  -6.49102e-06
2  peak      8.93035e+02  2.01288e+00  6.12456e-03  1.16488e-05
3  sigma     4.26672e+01  1.86541e+00  4.25964e-03  -1.65975e-05
4  const     1.25044e+02  6.25712e+00  2.59914e-03  -7.58078e-06
5  slope     -1.07862e-01  6.35067e-03  2.69270e-06  -3.46881e-03
```

と表示される。ここで、FCN の後の数字は χ^2 の値、フィットの状況 (INITIATE, CONVERGED, PROGRESS)、EDM (estimated vertical distance to the minimum)、各パラメータの最良推定と誤差などが表示される。MINUIT では、各段階において常に現状のエラー推定値を保持しており、その時点でどの程度正確かには関わらず必要に応じて表示するようになっており、オプションで冗長モード (V) を指定すると、各ステップでの結果を見ることができる。上記の表示では収束した結果が得られており、図5に示したようによく実験データを再現している。

フィットが妥当かどうかの検定を確かめるには、フィットが収束した後で、

```
TF1 *fit = hist->GetFunction("total");
Double_t chi2 = fit->GetChisquare();
Double_t ndf = fit->GetNDF();
Double_t prob = fit->GetProb();
cout << "Chi-squared value =" << chi2 << endl;
```

などとして、自由度 $\nu = 40$ のもとで、 χ^2 値は 41.2 であり Reduced chi-square は $\chi^2_\nu = 1.03$ であったことがわかる。これに対応する CL (p-value) は、0.42 であるから、モデルは最良推定値のパラメータのもとで自然に実験データを説明できていることがわかる。

せっかくパラメータが求まったので、エネルギー分解能を求めてみよう。エネルギー

⁷オプションの R と + はそれぞれ、関数レンジで指定される値域を使用する、フィッティングされた関数のリストに、新しいフィッティングされた関数を追加する、という指示。詳しくは ROOT のマニュアルを読むこと。

分解能は、実験の各過程における統計的変動とノイズ信号により出力がばらつくことで広がり、その幅 ΔE は、ピークの半分の高さでのエネルギー幅 FWHM (full width at half maximum) で評価される。ガウス関数のピーク値は 893 ch、標準偏差 42.6 ch であるので、 $\Delta E/E = 11.2\%$ となる。結晶シンチレータももう少しよい分解能が達成できるが、この検出器は主に計数機能で使用するので問題はなかった。

さて、さらに MINOS を用いて、+ と - のそれぞれについて誤差評価を行う場合、オプションに E をつけて

```
ROOT [11] hist->Fit(total,"EVR+","",);
```

とすると、

```
FCN=41.2192 FROM MINOS      STATUS=SUCCESSFUL      261 CALLS      358 TOTAL
                        EDM=2.20811e-10      STRATEGY= 1      ERROR MATRIX ACCURATE
EXT  PARAMETER
NO.  NAME      VALUE      PARABOLIC      MINOS ERRORS
      ERROR      NEGATIVE      POSITIVE
1  norm      9.70420e+01      4.56961e+00      -4.54109e+00      4.59856e+00
2  peak      8.93035e+02      2.01286e+00      -2.01724e+00      2.01035e+00
3  sigma     4.26672e+01      1.86518e+00      -1.83572e+00      1.89780e+00
4  const     1.25044e+02      6.25710e+00      -6.26513e+00      6.24945e+00
5  slope     -1.07862e-01      6.35066e-03      -6.34565e-03      6.35590e-03
```

となる。今回のような簡単な例において、MINOS を使用しても誤差評価は大きくは変わらないが、 χ^2 曲面が特殊な形状をしている場合には、+ と - の誤差が異なることがあるため、注意が必要である。

最後に誤差の定義を確認しておこう。MIGRAD では、誤差行列⁸を求めて誤差評価を行っている。MINOS は、パラメータ同士の相関や非線形性も取り入れて正負の誤差を評価してくれるアルゴリズムで、最良推定値を MIGRAD などで求めた後に使用するものである。 χ^2 面において、最良推定値を与える χ^2 に対し、 $\chi^2_{\text{bound}} = \chi^2_{\text{min}} + \Delta\chi^2$ となる範囲を、誤差をつけたいパラメータ以外のパラメータを free にしつつ探索していくものである。デフォルトでは $\Delta\chi^2 = 1$ に設定されているので、 1σ (68% 信頼度) の誤差がつくようになっていたが、ERRordef によって変更することができる。MINOS のアルゴリズムそのものは XSPEC と同手順であるが、 $\Delta\chi^2$ のデフォルト設定値は異なり、信頼度の定義が違うので注意してほしい。多変数関数の誤差の付け方の妥当性の背景をさらに詳しく知りたい場合、MINUIT に関わる参考文献を読んでほしい。

⁸ χ^2 をモデル・パラメータで Taylor 展開した際の 2 回微分で定義されるのが、Hessian 行列である。この逆行列として誤差行列が定義される。

§7 XSPEC を用いたフィットの実例

宇宙 X 線データの標準的な解析ツール XSPEC を使い、スペクトル解析の実例を考えてみる。ここでは、代表的な X 線天体である「かに」星雲 (Crab Nebula) のスペクトルをもち、X 線強度のみ 1/1000 にした仮想的な天体を例としてとりあげる⁹。図 1(a) の黒点は、検出器で計数された X 線光子のカウント数をエネルギーに対してプロットしたもので、縦軸は $\text{Counts s}^{-1} \text{keV}^{-1}$ で表示される。XSPEC の plot コマンドでは、誤差棒は Poisson 統計から予想される 1σ が default ではつく。

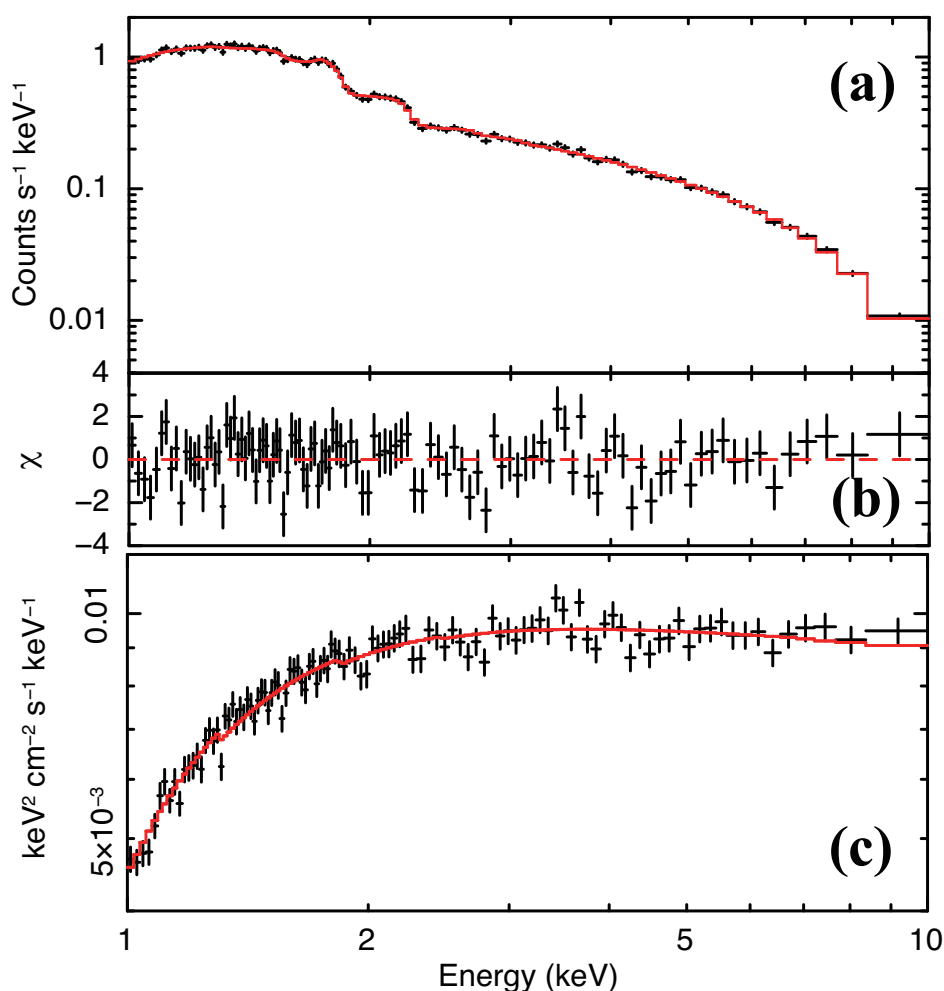


図 6: X 線スペクトルデータ (黒点) とスペクトルのモデル関数 (赤)。(a) 検出器で計数された生のスペクトルと最適モデル関数の解。(b) モデルに対するデータの比。(c) 検出器の応答関数を考慮して推定される、検出器に到来した段階での天体のスペクトルを νF_ν で表示。星間吸収は含まれている。

⁹ ここでは乱数をふり天体の疑似データを作成した。ここでは簡単のため、バックグラウンドはすでに引かれているものとしよう。また、XSPEC の使用方法は、XSPEC マニュアルや「すぎく」ファーストステップマニュアルを読んでほしい。ヘルプ (help) 機能も有用である。

§7.1 モデル関数パラメータの最良推定値

この観測データを再現するモデル関数として、天体が「べき」関数で表せる X 線スペクトルをもち、星間吸収を受けて検出器まで届いたと考える。これは「べき」関数 (pow) と星間吸収 (wabs) の積 $wabs * pow$ で与えられ、検出器に入射したエネルギー E keV をもつ X 線光子の個数は、

$$A(E) = e^{-N_H \sigma(E)} \times K \left(\frac{E}{1 \text{ keV}} \right)^{-\Gamma} \text{ Photons cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ keV}^{-1} \quad (17)$$

と表せる。星間吸収において、 $N_H \text{ atoms cm}^{-2}$ は水素柱密度、 $\sigma(E) \text{ cm}^2$ は光電吸収の断面積であり、「べき」関数において、 $K \text{ Photons cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ keV}^{-1}$ は 1 keV で規格化した強度 (Normalization; Norm)、 Γ は光子指数である。実験データを最もよく再現するモデルパラメータの最良推定値を探してみよう。

χ^2 の最小値を求めるアルゴリズムには複数あり (§5)、XSPEC のデフォルトは Bevington の CURFIT ルーチンに基づいた Levenberg-Marquardt 法 (leven) を用いている。Levenberg-Marquardt 法は χ^2 の関数面の傾きから最小値を探索する最急降下法 (Steepest descent method) とガウス-ニュートン法 (Gauss-Newton method) を合わせたようなものである。このほかに CERN ライブラリの MINUIT 関数も用いることができ、

```
XSPEC12> method simplex
```

などとして切り替えることができる。method としては、migrad (MINUIT の MIGRAD), simplex (SIMPLEX), monte (SEEK), minim (MINIMIZE) などが用意されている。 χ^2 を最小化するようにモデル関数のパラメータを最適化しデータに合わせ込むには、

```
XSPEC12> fit 200
```

とする。これで、200 回の試行を繰り返しを行い (iteration)、 χ^2 の最小値 χ^2_{\min} を見つけ出す。収束した場合、図 6(a) のようなデータによく合うモデル関数が得られ、両者の残差は図 6(b) となった。同時に、以下のような最適なパラメータと統計量が表示される。

```
-----
Model:  wabs<1>( powerlaw<2> )
Model Fit Model Component  Parameter  Unit      Value
par   par  comp
  1     1    1   wabs       nH         10^22    0.369923    +/-    0.119232E-01
  2     2    2  powerlaw   PhoIndex      2.08445    +/-    0.131589E-01
  3     3    2  powerlaw   norm          1.097450E-02 +/-    0.194411E-03
-----
Chi-Squared =      114.2912      using   110 PHA bins.
Reduced chi-squared =      1.068142      for    107 degrees of freedom
Null hypothesis probability = 0.297
```


これを読むと、110 ビンのデータを 3 パラメータのモデルでフィットしたので、自由度 ν は 107 であり、得られた $\chi^2 = 114.3$ であるから、フィットの妥当性の目安として用いられる reduced chi-square χ^2_ν の値は 1.07 程度となったことがわかる。 χ^2 分布において、上記の自由度で χ^2 が得られる確率は、 ~ 0.30 (Null hypothesis probability) であるから、もし仮に 100 回同一の観測を行えたとするれば、このモデルに合致する観測結果が 30 回得られる、つまり最適なパラメータをもつモデル関数はデータをよく再現すると言える。このようにして妥当なモデル関数を得ることができた。

一般に、 $0.05 \lesssim \chi^2_\nu \lesssim 1.20$ 程度の範囲であればモデル関数が妥当であると言える場合が多いが、最終的には null hypothesis probability に基づいた、つまり帰無仮説を背景にした考察に戻るべきである。なお、 χ^2 が自由度 n より非常に小さい場合、つまり χ^2_ν が 0 に近い場合、フィットがよく合っていると考えるよりも、誤差評価に誤りがあるなどを疑うべきであろう。また、このフィットにおいて保証されるのは「用いたモデル関数がデータを表すものとして適切であったか」であり、「そのモデル関数が物理的に適切かどうか」には言及していないことに注意しておいた方がよい。フィットを合わせられることと、データを正しく物理解釈することは等価ではない。

なお、検出器の応答関数を考慮し、天体から地球に届いた段階での検出器に入る前の νF_ν スペクトルは

```
XSPEC12> plot eeuf
```

とすれば表示され、図 6(c) のような形になった。この天体は非熱的な「べき」成分の天体スペクトルが星間吸収を受けてきたものと解釈できる。

§7.2 パラメータ誤差の推定

次のステップとして、モデル関数パラメータの誤差の範囲 (信頼できる値の範囲) を error コマンドを用いて求めよう。XSPEC の error コマンドでは、fit コマンドで求めた χ^2_{\min} に対して、与えられた $\Delta\chi^2$ を足した $\chi^2_{\text{bound}} = \chi^2_{\min} + \Delta\chi^2$ 以下の χ^2 を与えるようなパラメータ値の範囲を計算する。この際、誤差を求めたいパラメータ以外の、値を固定されていないフリーな全てのパラメータをふり χ^2 の最小化を行う。これは自由度 1 の χ^2 分布に対応し、XSPEC のデフォルト設定では 90% の信頼区間に対応する $\Delta\chi^2 = 2.73$ の範囲から誤差を求める。星間吸収、「べき」の光子指数、強度はそれぞれパラメータ番号が 1, 2, 3 で、あれば

```
XSPEC12> error 1, 2, 3
```

とすれば、90% 信頼区間に対応する誤差を求めることができる。これにより、

```
XSPEC>error 1 2 3
Parameter    Confidence Range (      2.706)
   1      0.350421      0.389573      (  -1.950225E-02,      1.965013E-02)
   2      2.06311      2.10595      (  -2.134013E-02,      2.150106E-02)
   3      1.065941E-02      1.129973E-02      (  -3.150888E-04,      3.252309E-04)
```

という表示が得られるので、星間吸収 $N_H = (3.70 \pm 0.02) \times 10^{21} \text{ cm}^{-2}$ 、「べき」の光子指数 $\Gamma = 2.08 \pm 0.02$ 、1 keV での強度 $(1.097 \pm 0.003) \times 10^{-2} \text{ photons s}^{-1} \text{ keV}^{-1} \text{ cm}^{-2}$ (いずれも信頼度 90%) であると求まる。1 σ 誤差 (68% 信頼度) の場合には、 $\Delta\chi^2 = 1.0$ として

```
XSPEC12> error 1.0 1, 2, 3
```

とすればよい。これを確認するために、フリーなパラメータのうち 2 つについて χ^2 値の変化を描くことができる。

```
XSPEC12> steppar 2 2.04 2.16 100 3 1.00e-2 1.21e-2 100
```

などすると、2 番目のパラメータ (今回の場合、べきの光子指数) を 2.04 から 2.16 まで 100 ステップ、3 番目のパラメータ (べきの強度) を 1.00×10^{-2} から 1.21×10^{-2} までの 100 ステップにそれぞれ分割し、 100×100 のグリッド点について他のパラメータを最適化した上で計算する。この結果は

```
XSPEC12> plot contour,,3,2.3,4.61,9.21
```

とすると、 $\Delta\chi^2 = 2.30$ 、4.61、9.21 をもつ 3 つの confidence contour を図 7 のように描いてくれる。2 個のパラメータ空間において残り 1 個のパラメータを最適化して χ^2 を求めるので、この場合は自由度 2 の χ^2 分布に従い、3 つの confidence contour はそれぞれ信頼度 68% ($\Delta\chi^2 = 2.30$)、90% ($\Delta\chi^2 = 4.61$)、99% ($\Delta\chi^2 = 9.21$) に対応することになる。

一方で、XSPEC の標準的な解析で error コマンドを使用する場合には、パラメータ 1 個ずつについて誤差を計算してりうので自由度 1 の χ^2 分布であり、信頼度 68%、90% での誤差は $\Delta\chi^2 = 1.00$ 、 $\Delta\chi^2 = 2.70$ で決まる図 7 中に示した太線のようなになる。自由度 2 の場合よりも誤差範囲はわずかに小さくなる。一般的な解析では error コマンドを使用することが多いが、どのようなデータ解析を行っているのかには常に注意が必要である。また、実験結果をまとめる際に、1 σ 誤差をつけることが多いが、XSPEC では 90% 信頼度での誤差がデフォルトのことが多い。いずれも定義して使えば問題ないが、注意しよう。

最後に参考として、「べき」の光子指数 Γ と強度 Norm 以外のパラメータである星間吸収の大きさ N_H を最良推定値で固定した場合の 90% 信頼度での confidence contour もピンク色で図 7 中に示した。 N_H が固定されている分、 Γ や Norm で許される範囲が小さくなり、誤差範囲が縮小することが見て取れる。

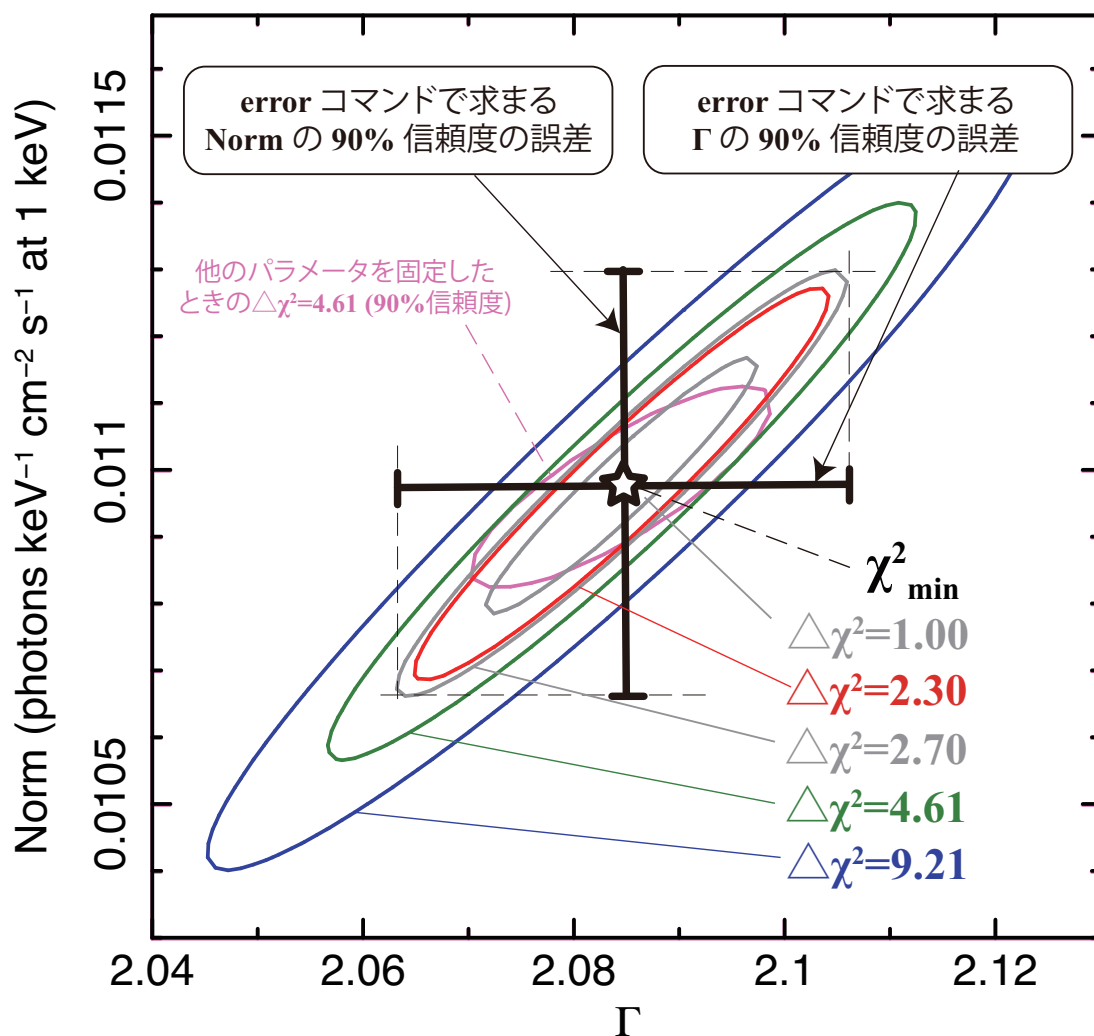


図7: χ^2 値の Contour マップを χ^2_{\min} (星印) に対して描いた。 Γ と Norm の2つのパラメータを考え、自由度2の χ^2 分布から計算すると、68%、90%、99% 信頼度での confidence contour はそれぞれ、 $\Delta\chi^2 = 2.30$ (赤)、4.61 (緑)、9.21 (青) に対応する。一方で、1 パラメータごとに error コマンドで求まる 90% 信頼度での誤差の範囲を求めると、自由度1の χ^2 分布で $\Delta\chi^2 = 2.70$ に対応し、誤差棒で示した範囲である。また、ピンク色の confidence contour は、残りのパラメータ (星間吸収の量) を最適値で固定した場合での $\Delta\chi^2 = 4.61$ の 90% 信頼度の範囲を示した。

§7.3 XSPEC におけるフィット

このセクションの最後に XSPEC の中での検出器応答の扱いを簡単に補足しておく [5]。簡単な物理観測では、測定値に対して検出器の検出効率の補正を施せば、元々の物理量、観測量に簡単に戻すことが可能である。一方で X 線観測においては、検出器に光子の全エネルギーを与える光電吸収のほかにも、一部分のエネルギーを与えるコンプトン散乱などの過程もある確率で生じている。そのため、検出器の実際の計数から元の X 線スペクトルを一意的に求めることは、一般にはできない。

そこで、X 線のモデルスペクトルを仮定し、検出器応答を受けた場合に予想されるカウント数のスペクトルを、実際の観測結果と比較する。そして χ^2 最小化のアルゴリズムによって、再帰的に最適なモデルパラメータを求めるという方法を採用する。これは、

$$\mathcal{M}(PI_j) = \sum_{i=1}^m S \cdot A(E_i) \cdot R(E_i, PI_j) \cdot M(E_i) \cdot \Delta E_i \quad (18)$$

と表せる。ここで、

$\mathcal{M}(PI_j)$: 検出されるイベント数 ($\text{count cm}^{-2} \text{s}^{-1}$)

S : 有効面積 (cm^2)

$A(E_i)$: 検出効率

$R(E_i, PI_j)$: 検出器の応答関数

$M(E_i)$: 天体 X 線のモデル関数 ($\text{photons cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{keV}^{-1}$)

ΔE_i : エネルギー幅 (keV)

である。エネルギー $E = E_i \text{ keV}$ の単色 X 線で予想されるスペクトルは、 $A(E_i)R(E_i, PI_j)$ であり、エネルギー $E_i \text{ keV}$ に対応する検出効率は $A(E_i) \sum_{j=1}^n R(E_i, PI_j)$ と表せる [5]。一般に $R(E_i, PI_j)$ に逆行列が必ずしも見つかるわけではないため、 χ^2 最小化アルゴリズムを採用しているとも考えられる。

XSPEC では $R(E_i, PI_j)$ を RESP (Response File)、 $SA(E_i)$ を ARF (Ancillary Response File) として読み込むが、検出器ごとに S をどこが担うかは異なる場合がある。たとえば、「すざく」の X 線 CCD カメラ (XIS) では、ARF、RESP を両方用いているが、硬 X 線検出器の PIN 型半導体 (HXD-PIN) では、RESP のみに全てを含めるようになっている。また、硬 X 線検出器の GSO 結晶シンチレータ (HXD-GSO) では、若干の補正として ARF を用いるようにしている。それぞれがどのような関数形をしているかは、FTOOLS の fv コマンドなどで中身を見てみるとよい。

§8 バックグラウンド信号に埋もれた周期性の探索

回転する中性子星(パルサー)のように、宇宙には周期的に X 線で変動する天体が存在する。バックグラウンド信号に埋もれた天体からの周期性の検出も、帰無仮説を用いているよい応用例である。

地球を周回する宇宙 X 線観測衛星が、X 線パルサーを観測したときの X 線強度は、緩やかに変動するバックグラウンドの上に天体からの信号が重なった

$$C_x = (\text{バックグラウンド信号}) + (\text{天体の非周期信号}) + (\text{天体の周期的信号}) \quad (19)$$

と表せる。このうち、周期的信号はフーリエ解析(Fourier Analysis)を用いて検出できる。有名な回転駆動型パルサー PSR B1509-58 のフーリエ・スペクトルを図8に示してみた。6.608 Hz に周期が検出できており、これは 151.33 ms に対応する。

パルサー解析ではさらに、これと独立な「畳み込み解析(Folding Analysis)」を用いて、パルス周期のより正確な値を求めることが行われる¹⁰。畳み込み解析では、放射線イベントの時系列データを、テスト周期を仮定して畳み込み、できあがったパルス波形を強度一定として仮定してフィットする。不適切な周期ではパルス波形は一定なので χ^2 値は自由度と同じであるが、天体の真のパルス周期で畳み込んだ場合にはパルス波形が一定値にはならないので、 χ^2 の値が統計的に有意な、大きな値をとる。統計の言葉で言えば、「テスト周期で畳み込んだパルス波形は一定である」という帰無仮説をたてていることになる。

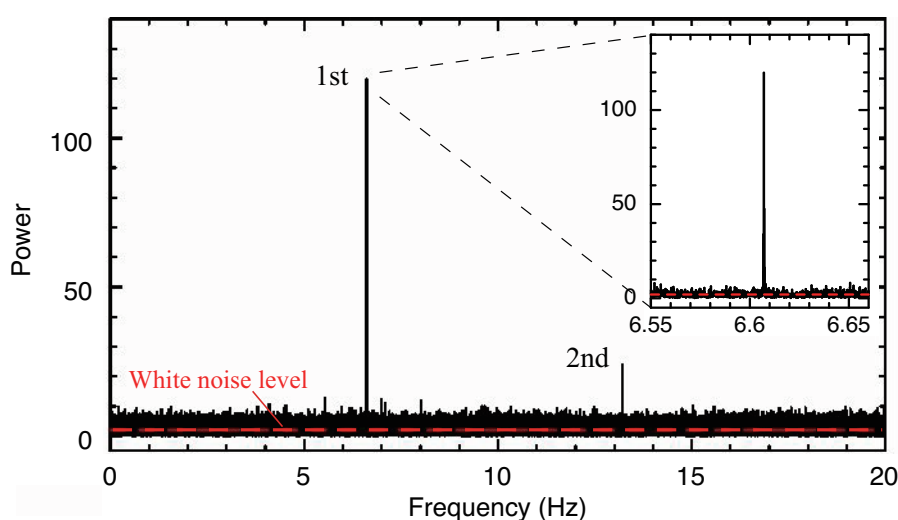


図8: X 線パルサー PSR B1509-58 のフーリエ・スペクトル。白色ノイズ(White noise)が Power=2 を持つように規格化している。基本波と第一高調波が検出できており、右上の図は基本波の拡大図。

¹⁰ Z_n テストというビンまとめ不要な検定法も存在する。

1 周期を 13 ビンのヒストグラムに分割し、畳み込み解析を行ってテスト周期に対する χ^2 の値を描くと図 9 となる。周期 $P \sim 151$ ms に χ^2 のピークが検出できていることがわかる。位相ビン数 13 個に対し、一様分布の強度という 1 パラメータをもつ関数でフィットするため、自由度は 12 である。ピークでは $\chi^2 \sim 1.3 \times 10^3$ であるから、

$$\text{CL} = \int_{1.3 \times 10^3}^{\infty} f(\chi^2; 12) d\chi^2 \quad (20)$$

として信頼度をチェックすると、 $\text{CL} < 1 \times 10^{-10}$ と極めて有意な周期信号が検出できていることがわかる。このようにして得られたパルス波形を図 9(b,c) に示した。

PSR B1509–58 の場合には周期は顕著に見えたが、10 keV 以上で数 mCrab 程度の天体の場合、100 ks 観測でも周期検出が感度ぎりぎりのこともある。そのような場合には、上の方法を用いて周期の有意性を細かく詰めて行くことが大切である。たとえば、図 9(c) の HXD-GSO の 50-300 keV のデータでは、10 ビン(自由度 9)に対して $\chi^2 = 27$ であるから、 $\text{CL} = 2.6 \times 10^{-3}$ である。それでも危険率 0.01 程度に設定すれば十分有意とはいえ、PIN に比べると有意性が下がっているのがわかる。

ところで、図 9(a) では天体からの周期とは別に、その左右にも複数の小さな周期性の山が見えているが、これは何だろうか? 「天体からの周期的な変動」の部分バックグラウンドが時間的に完全に一様ならばピークは一本しか立たないが、実際のバックグラウンドは衛星の地球周回にしたがって緩やかに変動する。したがって、実際の変動は

$$\begin{aligned} C_x &\propto \cos\left(\frac{2\pi}{P_0}t\right) \left[\text{const} + \cos\left(\frac{2\pi}{P_{\text{orb}}}t + \phi\right) \right] \\ &= \text{const} \times \cos\left(\frac{2\pi}{P_0}t\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \cos\left[2\pi t \left(\frac{1}{P_0} + \frac{1}{P_{\text{orb}}}\right) + \phi\right] + \cos\left[2\pi t \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{P_{\text{orb}}}\right) - \phi\right] \right\} \end{aligned}$$

となり、 $(1/P_0 \pm 1/P_{\text{orb}})^{-1}$ にも、周期のビートが現れることになる。実際、図 9 を見ると、 $P_{\text{orb}} = 90 \times 60$ s とのビートのため、真の周期に対して $\pm 4 \times 10^{-6}$ s 付近にもピークがたっていることがわかる。

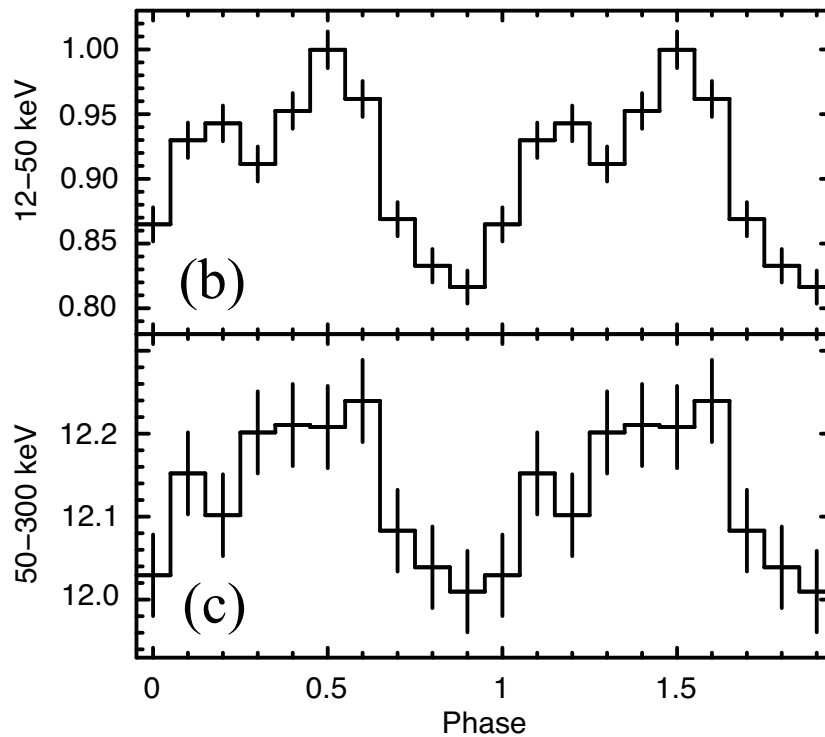
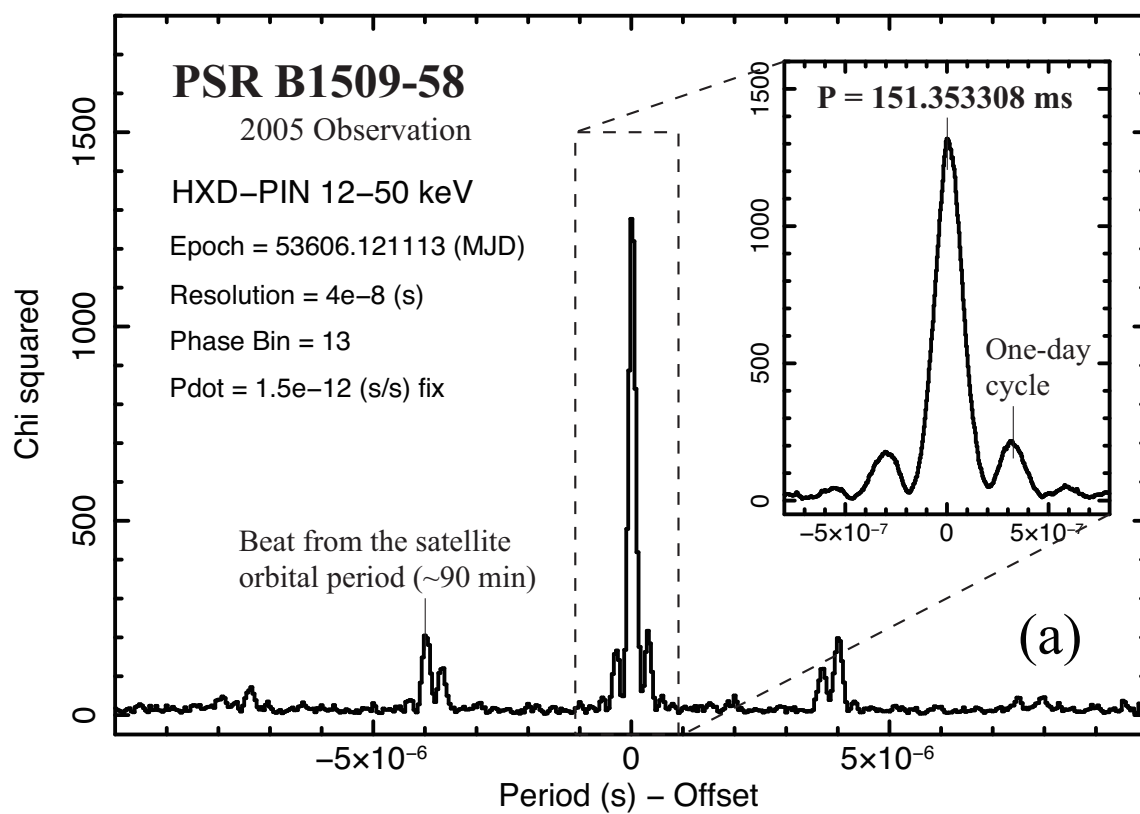


図9: (a) PSR B1509-58 のペリオドグラム。(b) 最も有意な周期 (151.353308 ms) で畳み込んだ 12-50 keV の HXD-PIN でのパルス波形。バックグラウンドを含む。(c) 同様に 50-300 keV の HXD-GSO でのパルス波形。

関連図書

- [1] Carleton DeTar,
http://www.physics.utah.edu/~detar/phys6720/handouts/curve_fit/curve_fit/node8.html
- [2] Fred James, “The Interpretation of Errors”, (2004)
- [3] Fred James, Matthias WINKLER, “MINUIT User’s Guide” (2004)
- [4] Fred James, “MINUIT Tutorial”, (2004)
- [5] Ishisaki, Y., et al. 2007, Publications of the Astronomical Society of Japan, 59, 113
- [6] MINUIT Reference Manual,
<http://www.fresco.org.uk/minuit/cern/minmain.html>
- [7] Particle DataGroup, “Review of Particle Physics”, pp.316–339
- [8] P. R. Bevington, D.K. Robinson, “Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences”
- [9] Mathematica Documentation,
<http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/UnconstrainedOptimizationPlottingSearchData.html>
- [10] Press William H., Teukolsky Saul A., Vetterling William T., Flannery Brian P., “Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing”
- [11] 出沢 恵理子, 修士論文「ASTRO-E 衛星搭載硬 X 線検出器用 fine collimator の開発」, 東京大学 (1999)
- [12] 小波秀雄, 「統計学講義ノート」, <http://www.cs.kyoto-wu.ac.jp/~konami/statistics/Statistics.pdf>
- [13] 早野 龍五, 高橋 忠幸, 「計算物理– Computer in physics」, 共立出版