2022年3月27日
第24回春の合宿セミナー（日本行動計量学会）
（統計的因果推論入門）

講義7
操作変数法の基礎

長崎大学 情報データ科学部 准教授
高橋 将宜
博士（理工学）
m-takahashi@nagasaki-u.ac.jp

概要

- 概略
- 操作変数のイメージ図
- 二段階最小二乗法
- 内生変数と外生変数
- Rによる二段階最小二乗法
- 操作変数の妥当性

教科書Ch.13

- 非遵守（ノンコンプライアンス）
- 遵守者と非遵守者の4つの種類
- 単調性の仮定と推定対象
- 無作為化奨励デザインと4つの推定量

教科書Ch.14

- データ分析

概略

通常の統計的因果推論の手法

- 共分散分析（重回帰分析）
- 傾向スコアマッチング
- 傾向スコア層化解析
- 傾向スコア重み付け法

- 無視可能な割付けが成立している場合に使用できる手法
  - 十分な共変量をモデルに取り入れることで，交絡を調整する手法

操作変数法

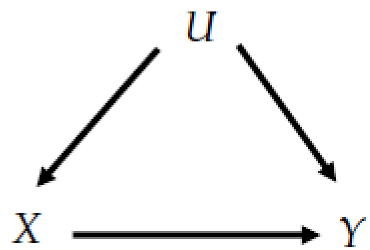
- 無視可能な割付けの仮定が成り立たない場合
  - 操作変数法を使えば，一連の仮定を置くことで，無視可能な割付けが成立していなくても統計的因果推論が可能になるとされる．

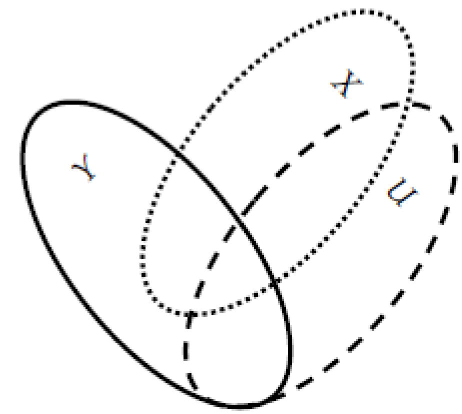
操作変数のイメージ図

操作変数のイメージ図

高橋（2022, p.183）

変数間の関係：DAGとバレンティン・ベン図

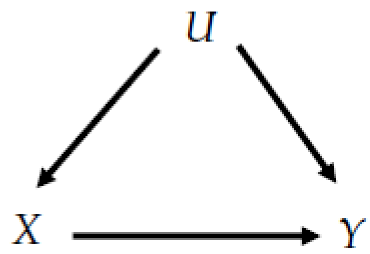


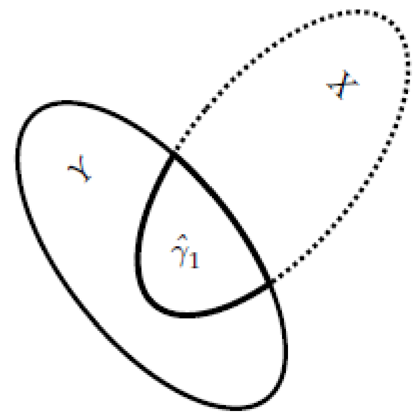


- $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 U + \varepsilon$
  - Y：結果変数
  - X：観測される共変量
  - U：観測されない共変量
- XからYへの効果β_1を知りたいとしよう
  - UからXとYに矢印が出ているので，Uは交絡因子である．
  - XとUにも相関がある

高橋（2022, p.184）

単回帰モデル

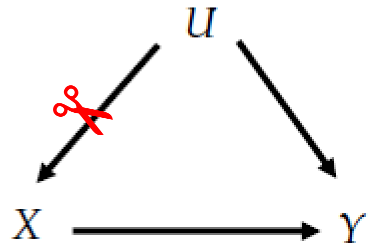


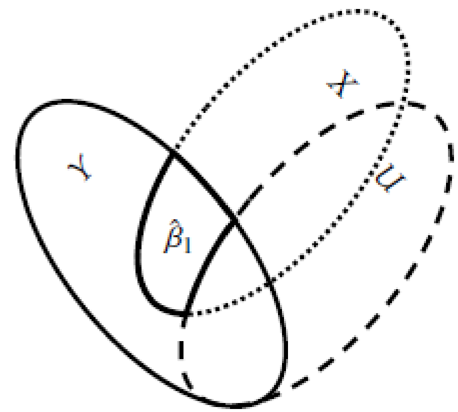


- $\hat{Y} = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 X$
- Uをモデルに入れないと，$\hat{\gamma}_1$は太線で囲った部分

高橋（2022, p.184）

重回帰モデル



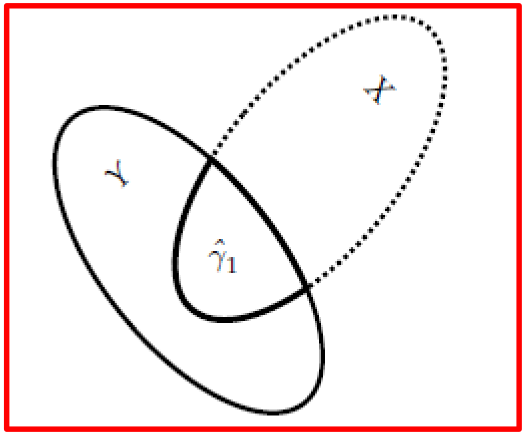


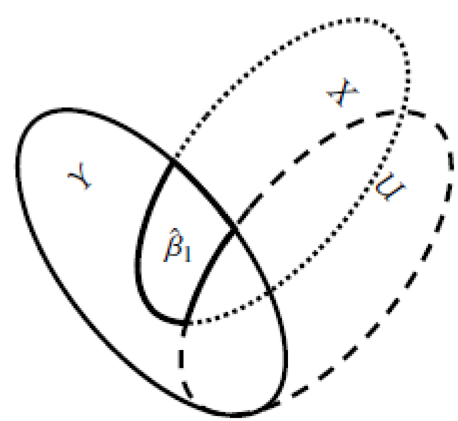
- $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X + \hat{\beta}_2 U$
- Uをモデルに入れると，$\hat{\beta}_1$は太線で囲った部分
- この$\hat{\beta}_1$が，交絡を取り除いたXからYへの純粋な因果効果である．

もしUが観測されるならば，これまで同様，Uをモデルに取り入れることで，共分散分析や傾向スコアモデリングによって交絡を取り除くことができる．

高橋（2022, p.184）

除外変数による偏り

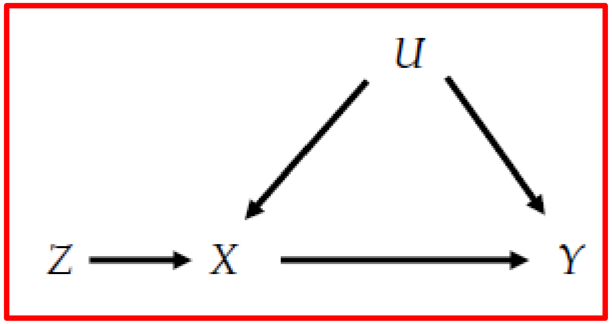


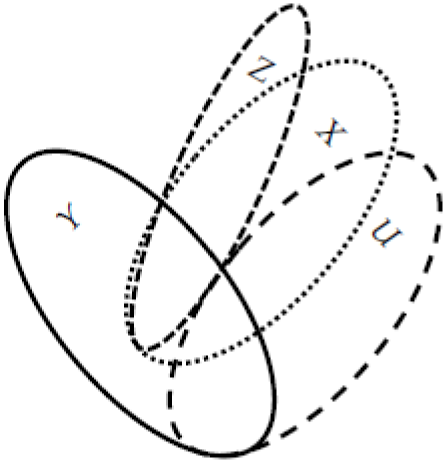


- Uは観測されない共変量
  - Uを直接的にモデルに取り込むことはできない
  - 除外変数による偏り（omitted variable bias）が不可避に発生しそう
  - 無視可能性の仮定が満たされないため，適切な因果推論ができそうにない

高橋（2022, p.184）

共変量Z：DAGとバレンティン・ベン図（1）



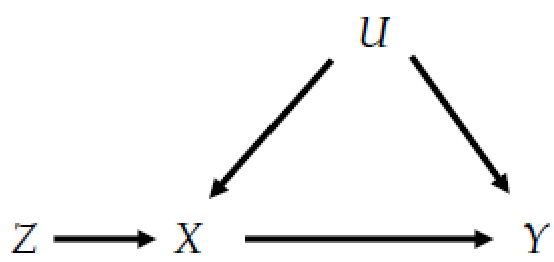


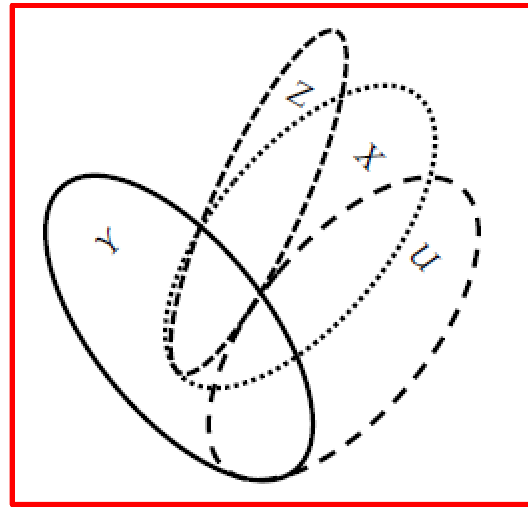
- DAG
- 観測される共変量：Z
  - このZには，Uからも，Yからも矢印が出ていない．
  - ZはXに対して直接的に影響を及ぼす
  - ZはYに対してはXを通じてのみ間接的に影響を与えており，直接的には影響を及ぼしていない．
- このようなZをXに対する操作変数（IV: instrumental variable）という．

操作変数のイメージ図

高橋（2022, p.184）

共変量Z：DAGとバレンティン・ベン図（2）



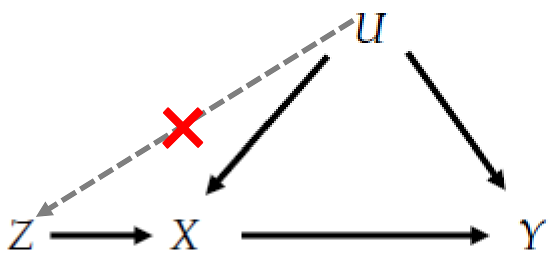


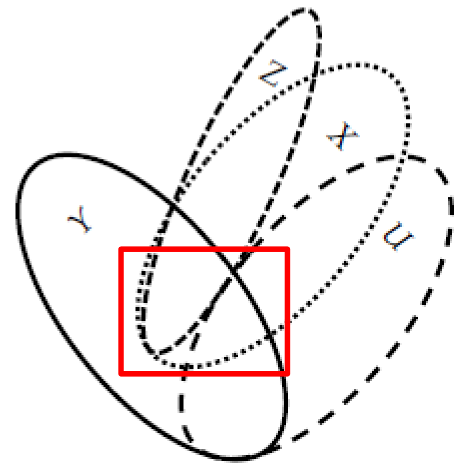
- バレンティン・ベン図
- 観測される共変量：Z
  - ZはXと重なりがある.
  - ZとYは，Xと一緒に重なっている部分はあるが，Zが単独でYと重なる部分はない.
  - ZはUと重なる部分が一切ない.
- このようなZをXに対する操作変数（IV: instrumental variable）という.

操作変数のイメージ図

高橋（2022, p.184）

操作変数の仮定1



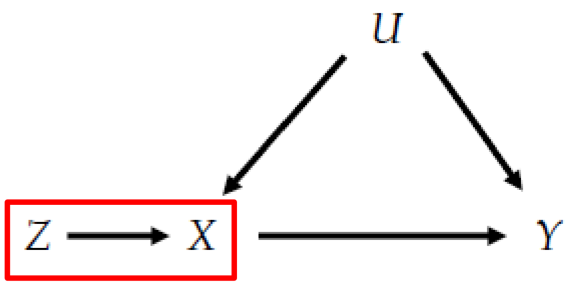


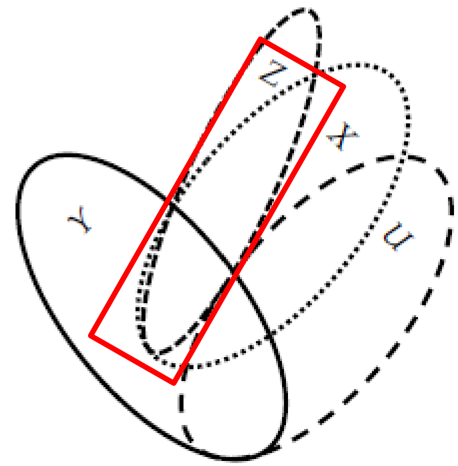
- $cov(Z, U) = 0$
- 操作変数の外生性（instrument exogeneity）
- DAG：UからZに向けて矢印が出ていない部分
- ベン図：ZとUに重なりがない部分

操作変数のイメージ図

高橋（2022, p.184）

操作変数の仮定2



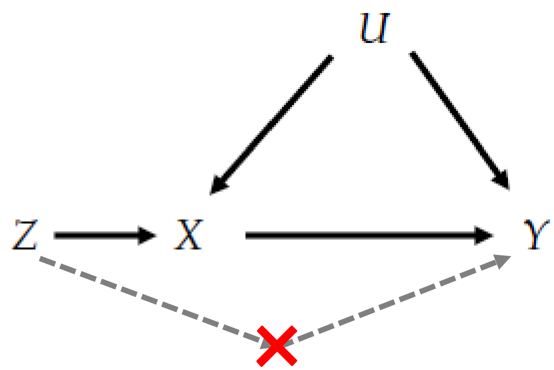


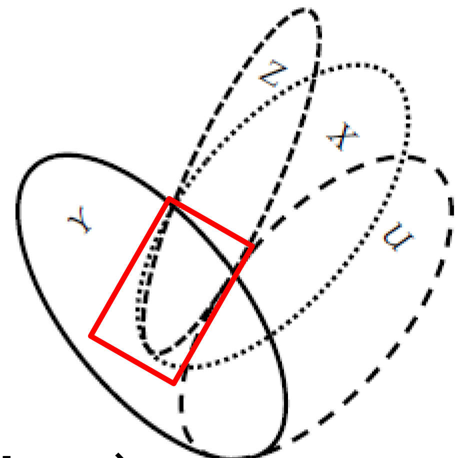
- $cov(Z, X_1) \neq 0$
- 操作変数の関連性（instrument relevance）
- DAG：ZからXに向けて矢印が出ている部分
- ベン図：XとZに重なりがある部分

操作変数のイメージ図

高橋（2022, p.184）

操作変数の仮定3





- 除外制約（exclusion restriction）
- DAG：ZからYに向けて矢印が出ていない部分
- ベン図：ZとYに直接の重なりがない部分
- 操作変数Z_iは$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 U + \varepsilon$から除外されている.
  - Xの値が決まれば，Zに関係なく，Yへの影響は同じ

二段階最小二乗法

二段階最小二乗法：一段階目

- $\hat{X}_{1i} = \hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 Z_i$
- $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_{1iv} \hat{X}_{1i}$

- Z_iは仮定1，仮定2，仮定3を満足するものとしよう．
- $\hat{X}_{1i}$を計算する．

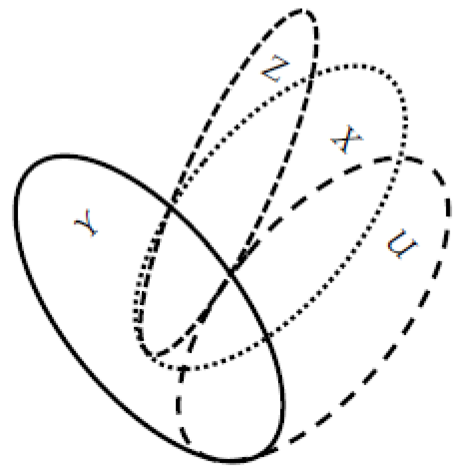
二段階最小二乗法：二段階目

- $\hat{X}_{1i} = \hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 Z_i$
- $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_{1iv} \hat{X}_{1i}$

- $\hat{X}_{1i}$を操作変数として$\hat{\beta}_{1iv}$を推定する.
  - このように二段階で推定を行うので，二段階最小二乗法（2SLS: two stage least squares）という

高橋（2022, p.190）

再掲載：操作変数のバレンティン・ベン図

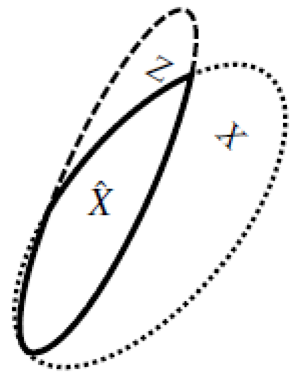


- 操作変数Zがあれば，未観測の交絡因子Uを無視しても，なぜ適切な因果推論ができるのかを視覚的に確認しよう．

高橋（2022, p.190）

二段階最小二乗法の一段階目

- $\hat{X}_{1i} = \hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 Z_i$
- $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_{1iv} \hat{X}_{1i}$

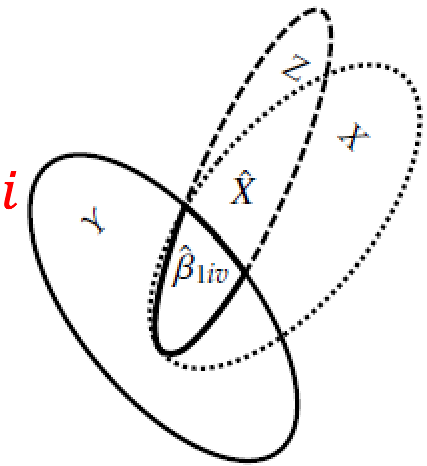


- $\hat{X}$：Xの変動の中でZによって説明できる部分

高橋（2022, p.190）

二段階最小二乗法の二段階目

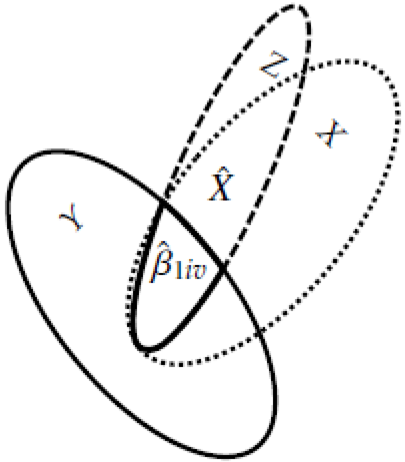
- $\hat{X}_{1i} = \hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 Z_i$
- $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_{1iv} \hat{X}_{1i}$

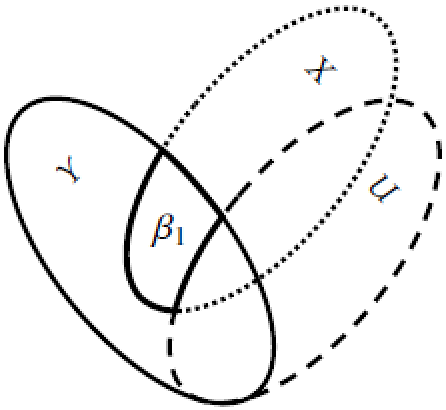


- $\hat{\beta}_{1iv}$ ：Xの予測値$\hat{X}$と結果変数Yとの関連を示しているもの
  - これが操作変数推定量

高橋（2022, p.190）

$\hat{\beta}_{1iv}$とβ_1





- 操作変数があれば，観測されないUを無視してもβ_1をほぼ適切に推定できている

内生変数と外生変数

内生変数（endogenous variable）

$$\begin{cases} Y_1 = \beta_0 + \beta_1 Y_2 + \varepsilon_1 \\ Y_2 = \gamma_0 + \gamma_1 Y_1 + \gamma_2 X_1 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

- 内生変数：モデルの依存関係によって解の定まる変数
  - Y_1とY_2：連立方程式（simultaneous equations）のシステム内で決定される変数であるから内生変数

外生変数（exogenous variable）

$$\begin{cases} Y_1 = \beta_0 + \beta_1 Y_2 + \varepsilon_1 \\ Y_2 = \gamma_0 + \gamma_1 Y_1 + \gamma_2 X_1 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

- 外生変数：モデルの依存関係によらず値が定まる変数
  - X_1：連立方程式のシステム外で決定される変数であるから，外生変数
  - 操作変数：外生変数の一種
  - 操作変数でない外生変数：外生的な共変量（exogenous covariate）という

内生変数と外生変数

- 内生変数
  - 結果変数
  - 中間変数
  - 処置変数（観察研究）

- 外生変数
  - 共変量
  - 操作変数
  - 処置変数（実験研究）

Rによる二段階最小二乗法

Rでデータ生成

- set.seed(1)
- n1 <- 1000
- u1 <- rnorm(n1)
- z1 <- runif(n1)
- z2 <- runif(n1)
- e1 <- rnorm(n1)
- x1 <- 1 + 2 * z1 + 2 * z2 + 2 * u1 + e1
- e2 <- rnorm(n1)
- y1 <- 3 + 1.5 * x1 + 1.5 * u1 + e2

操作変数：z1とz2の2個
推定対象：x1の偏回帰係数1.5

Rで二段階最小二乗法を実行

- first <- lm(x1 ~ z1 + z2)
- x1hat <- predict(first)
- second <- lm(y1 ~ x1hat)

操作変数はz1とz2の2個あったが，$\hat{X}_{1i}$を操作変数として用いている．

- 1行目：一段階目のモデルを推定
- 2行目：一段階目のモデルに基づいて$\hat{X}_{1i}$を計算
- 3行目：二段階目のモデルを推定

二段階目の結果

- summary(second)
- x1の偏回帰係数：1.57と推定
- 真値は1.5
- ほぼ正しく推定できている

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   2.7846     0.5626   4.949 8.73e-07 ***
x1hat         1.5723     0.1815   8.661  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 5.113 on 998 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.06991,   Adjusted R-squared:  0.06898
F-statistic: 75.02 on 1 and 998 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

RパッケージAERのivreg関数（教科書p.194）

- library(AER)
- modelIV <- ivreg(y1 ~ x1|z1 + z2)
- summary(modelIV)
- confint(modelIV)

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  2.78462    0.19399   14.35   <2e-16 ***
x1           1.57230    0.06259   25.12   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.763 on 998 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.8894,     Adjusted R-squared: 0.8893
Wald test:   631 on 1 and 998 DF,  p-value: < 2.2e-16

> confint(modelIV)
               2.5 %   97.5 %
(Intercept) 2.404400 3.164838
x1          1.449621 1.694984
```

ivreg(y~ex+en|ex+in)

変数y：結果変数

変数ex：外生的な共変量（縦棒の左側と右側の両方に指定）

変数en：内生変数

変数in：操作変数

操作変数の妥当性の検証

仮定1と仮定2の板挟み

- 仮定1：操作変数の外生性
- 仮定2：操作変数の関連性

- 観察研究において，適切な操作変数を見つけることは本質的に難しい

観察研究における操作変数法の使用に対する苦言

- 操作変数が不適切なものである場合
  - 交絡を取り除くことはできない
  - 操作変数法は観察研究における除外変数バイアスを回避できる方法として期待されることがあるが，そのような使用法は一般的に推奨されない
- 星野（2016, p.78）の厳しい指摘
  - 「結局は操作変数が解析者による何らかの操作や介入や，突発的な災害や事故の前後といった変数以外では操作変数法の解析結果はあまり信頼されません」

操作変数法の役目

- 統計的因果推論において操作変数法は役に立たないわけではない
- 実験研究
  - 非遵守（noncompliance）への対処法
- ファジーな回帰不連続デザイン
  - 本質的に操作変数法
  - 教科書第18章参照
- これらの方法として活用できることから，操作変数法の基本事項は，統計的因果推論の立場からも重要

非遵守（ノンコンプライアンス）

実験計画

- 処置変数：子供向け教養テレビ番組の視聴
- 結果変数：国語の成績
- 対象：小学校低学年の児童（20人）

- 処置群（10人）
  - 教養テレビ番組を見る
- 統制群（10人）
  - 教養テレビ番組を見ない

無作為に割付ける

原理的には，このような実験研究を計画し実行することができそうであるが，実際に処置の割付けが守られるかどうか分からない．

非遵守（noncompliance）

- 割付けられた処置が守られないこと
  - 不服従ともいう
- 具体例
  - 統制群に割付けられた児童が，勝手に教養テレビ番組を見てしまう
  - 処置群に割り付けられた児童が，怠けて教養テレビ番組を見ない

遵守者と非遵守者の4つの種類

記号の導入

- T_i
  - 個体iが処置に割付られたかどうかを表す二値変数
  - $T_i = 0$：統制群に割付けられる
  - $T_i = 1$：処置群に割付けられる
- D_i
  - 個体iが実際に処置を受けたかどうかを表す二値変数
  - $D_i = 0$：実際に処置を受けていない
  - $D_i = 1$：実際に処置を受けている
- ここがポイント
  - T_iとD_iは必ずしも同じにならない

遵守者と非遵守者

- $T_i = D_i$
  - 処置の割付けと実際に受けた処置が一致
  - 遵守者（complier）

- $T_i \neq D_i$
  - 処置の割付けと実際に受けた処置が一致しない
  - 非遵守者（noncomplier）

$D_i(T_i)$：個体iが実際に受ける処置

- $D_i(T_i = 1) = 0$
  - 処置の割付けT_iが1のとき，実際に受ける処置D_iが0という意味
- $D_i(T_i = 1) = 1$
  - 処置の割付けT_iが1のとき，実際に受ける処置D_iが1という意味
- $D_i(T_i = 0) = 0$
  - 処置の割付けT_iが0のとき，実際に受ける処置D_iが0という意味
- $D_i(T_i = 0) = 1$
  - 処置の割付けT_iが0のとき，実際に受ける処置D_iが1という意味

高橋（2022, p.199）

遵守者と非遵守者：4つの異なるタイプ

	$D_i(T_i = 0) = 0$	$D_i(T_i = 0) = 1$
$D_i(T_i = 1) = 0$	常に処置を受けない人（never-taker）	天邪鬼（defier）
$D_i(T_i = 1) = 1$	遵守者（complier）	常に処置を受ける人（always-taker）

- 遵守者（complier）
- 常に処置を受けない人（never-taker）
- 常に処置を受ける人（always-taker）
- 天邪鬼（defier）

高橋（2022, p.199）

遵守者（complier）

	$D_i(T_i = 0) = 0$	$D_i(T_i = 0) = 1$
$D_i(T_i = 1) = 0$	常に処置を受けない人（never-taker）	天邪鬼（defier）
$D_i(T_i = 1) = 1$	遵守者（complier）	常に処置を受ける人（always-taker）

- $D_i(T_i = 1) - D_i(T_i = 0) = 1 - 0 = 1$
  - 処置の割付けによって，実際に処置を受けるように促される人たち
  - 具体例：テレビを見るように促されて，実際にテレビを見る児童

高橋（2022, p.199）

常に処置を受けない人（never-taker）

	$D_i(T_i = 0) = 0$	$D_i(T_i = 0) = 1$
$D_i(T_i = 1) = 0$	常に処置を受けない人（never-taker）	天邪鬼（defier）
$D_i(T_i = 1) = 1$	遵守者（complier）	常に処置を受ける人（always-taker）

- $D_i(T_i = 1) - D_i(T_i = 0) = 0$
  - 常に処置を受けない人
  - 具体例：テレビを見るようにいわれたかどうかに関わらず，常にテレビを見ない児童
- 対角要素に位置する人たち
  - 処置の割付けによって，処置を受けるかどうかを変えない人たち
  - 仮定3（除外制約）により，処置効果はゼロ

高橋（2022, p.199）

常に処置を受ける人（always-taker）

	$D_i(T_i = 0) = 0$	$D_i(T_i = 0) = 1$
$D_i(T_i = 1) = 0$	常に処置を受けない人（never-taker）	天邪鬼（defier）
$D_i(T_i = 1) = 1$	遵守者（complier）	常に処置を受ける人（always-taker）

- $D_i(T_i = 1) - D_i(T_i = 0) = 0$
  - 常に処置を受ける人
  - 具体例：テレビを見るようにいわれたかどうかに関わらず，常にテレビを見る児童
- 対角要素に位置する人たち
  - 処置の割付けによって，処置を受けるかどうかを変えない人たち
  - 仮定3（除外制約）により，処置効果はゼロ

高橋（2022, p.199）

天邪鬼（defier）

	$D_i(T_i=0)=0$	$D_i(T_i=0)=1$
$D_i(T_i=1)=0$	常に処置を受けない人（never-taker）	天邪鬼（defier）
$D_i(T_i=1)=1$	遵守者（complier）	常に処置を受ける人（always-taker）

- $D_i(T_i=1)-D_i(T_i=0)=0-1=-1$
  - 処置の割付けと反対の行動を取る人たち
  - 具体例：テレビを見るようにいわれると見ず，テレビを見ないようにいわれると見る児童

高橋（2022, p.199）

非遵守者

	$D_i(T_i = 0) = 0$	$D_i(T_i = 0) = 1$
$D_i(T_i = 1) = 0$	常に処置を受けない人（never-taker）	天邪鬼（defier）
$D_i(T_i = 1) = 1$	遵守者（complier）	常に処置を受ける人（always-taker）

- 以下を総称して非遵守者という
  - 常に処置を受けない人
  - 常に処置を受ける人
  - 天邪鬼

単調性の仮定と推定対象

仮定4：単調性（monotonicity）

- $D_i(T_i = 1) \geq D_i(T_i = 0)$

- 操作変数法のその他の仮定
  - 仮定1：操作変数の外生性
  - 仮定2：操作変数の関連性
  - 仮定3：除外制約

仮定4（単調性）を満たす

- 仮定4（単調性）
  - $D_i(T_i = 1) \geq D_i(T_i = 0)$
  - $D_i(T_i = 1) - D_i(T_i = 0) \geq 0$
- 遵守者
  - $D_i(T_i = 1) - D_i(T_i = 0) = 1$
- 常に処置を受けない人
  - $D_i(T_i = 1) - D_i(T_i = 0) = 0$
- 常に処置を受ける人
  - $D_i(T_i = 1) - D_i(T_i = 0) = 1$

仮定4（単調性）を満たさない

- 仮定4（単調性）
  - $D_i(T_i = 1) \geq D_i(T_i = 0)$
  - $D_i(T_i = 1) - D_i(T_i = 0) \geq 0$

- 天邪鬼
  - $D_i(T_i = 1) - D_i(T_i = 0) = -1$

- 仮定4（単調性）は天邪鬼がいないという仮定

高橋（2022, p.201）

改めて整理しなおす

	$D_i = 0$	$D_i = 1$
$T_i = 0$	常に処置を受けない人 or 遵守者	常に処置を受ける人 or 天邪鬼
$T_i = 1$	常に処置を受けない人 or 天邪鬼	遵守者 or 常に処置を受ける人

- T_i：個体iが処置に割付られたかどうかを表す二値変数
- D_i：個体iが実際に処置を受けたかどうかを表す二値変数
- $T_i = D_i$：遵守者
- $T_i \neq D_i$：非遵守者

高橋（2022, p.201）

表から天邪鬼を消せる

	$D_i = 0$	$D_i = 1$
$T_i = 0$	常に処置を受けない人 or 遵守者	常に処置を受ける人 or 天邪鬼
$T_i = 1$	常に処置を受けない人 or 天邪鬼	遵守者 or 常に処置を受ける人

- 仮定4（単調性）が満たされているならば，この表から天邪鬼を消去できる
  - 議論が容易になる
  - 現実には，天邪鬼といわれる人たちは存在するかもしれないが，非常にわずかと考えられるため，比較的に妥当な仮定であろう．特に，処置を奨励することで，明らかにやる気が増大すると考えられるならば，仮定4（単調性）の妥当性も高いであろう

高橋（2022, p.201）

除外制約

	$D_i = 0$	$D_i = 1$
$T_i = 0$	常に処置を受けない人 or 遵守者	常に処置を受ける人
$T_i = 1$	常に処置を受けない人	遵守者 or 常に処置を受ける人

- 残りの3種類
  - 常に処置を受ける人
  - 常に処置を受けない人
- 除外制約により，処置効果はゼロ
  - 処置があってもなくても，処置を受けるか受けないかを変えない．

高橋（2022, p.201）

残りの遵守者の平均処置効果（ATE）

	$D_i = 0$	$D_i = 1$
$T_i = 0$	常に処置を受けない人 or 遵守者	
$T_i = 1$		遵守者 or 常に処置を受ける人

- $CACE = E[Y_i(1) - Y_i(0)|C]$
  - 遵守者（complier）をCで表すと，遵守者に限定した平均因果効果
  - これを遵守者の平均因果効果（CACE: complier average causal effect）という
    - 局所的な平均処置効果（LATE: local average treatment effect）ともいう

無作為化奨励デザインと4つの推定量

2021年ノーベル経済学賞：Angrist & Imbens

因果関係の分析の方法論的な貢献に対して

- 操作変数法
- 無作為化奨励デザイン
- 回帰不連続デザイン

https://www3.nhk.or.jp/news/html/20211011/k10013302101000.html

無作為化奨励デザイン

- テレビ視聴と学校の成績のような実験研究では，児童がテレビを実際に見るかどうかは無作為化できなかった
- しかし，テレビを見るように，あるいは，テレビを見ないように奨励でき，この奨励は無作為化できる．
- これを無作為化奨励デザイン（randomized encouragement design）という
  - ランダム化奨励実験（randomized encouragement experiment）ともいう．

AT（As Treated）

$$AT = E[Y_i|D_i = 1] - E[Y_i|D_i = 0]$$

- 意味：実際に受けた処置に基づく推定量
  - 処置の割付けT_iではなく，実際に受けた処置D_iに基づく推定量
- 問題点
  - 未観測の交絡のため偏りが発生するおそれがある
  - 交絡の影響は過大になることもあれば，過小になることもあるため，交絡の調整を行わないならば，ATは推奨されない

PP（Per Protocol）

$$PP = E[Y_i|T_i = D_i = 1] - E[Y_i|T_i = D_i = 0]$$

- 意味：処置の割付けを遵守した被験者のみに基づく推定量
  - 処置の割付けT_iと実際に受けた処置D_iが一致している集団に基づく推定量
- 問題点
  - 未観測の交絡のため偏りが発生するおそれがある
  - ATの場合と同様に，交絡の影響は過大になることもあれば，過小になることもあるため，交絡の調整を行わないならば，PPも推奨されない

ITT（Intention To Treat）

$$ITT = E[Y_i|T_i = 1] - E[Y_i|T_i = 0]$$

- 意味：処置意図に基づく推定量
  - 実際に受けた処置D_iに関わらず，処置の割付けT_iに基づく推定量である．
- 問題点
  - 偏りがあり得るが，効果がある場合には，効果の過小推定になる
  - 無意味な推定量ではなく，CACEの真値を過小推定しているという条件付きで推奨

IV（Instrumental Variable）

$$IV = \frac{E[Y_i|T_i = 1] - E[Y_i|T_i = 0]}{Pr[D_i = 1|T_i = 1] - Pr[D_i = 1|T_i = 0]}$$

- 意味：操作変数推定量
  - 処置の割付けT_iの奨励で影響を受けた個体の比率によってITT推定量を割ることで，ITT推定量の過小推定を是正

ファジーな回帰不連続デザイン

- 処置の割付けが確定的でなく，確率的に決まっている回帰不連続デザイン
  - 局所的な操作変数法として実行する
  - 理由：非遵守の問題だから
  - 高橋（2022，第18章）を参照

データ分析

データの読み込み（教科書p.200）

- data14を読み込んで，無作為化奨励デザインの分析を実行する.
- data14 <- read.csv(file.choose( ))
- attach(data14)
- summary(data14)

```
> summary(data14)
       y3              t1             d1            y0t             y1t
 Min.   :68.00   Min.   :0.0   Min.   :0.0   Min.   :62.00   Min.   :68.0
 1st Qu.:72.50   1st Qu.:0.0   1st Qu.:0.0   1st Qu.:70.75   1st Qu.:74.5
 Median :75.50   Median :0.5   Median :1.0   Median :75.00   Median :77.0
 Mean   :75.50   Mean   :0.5   Mean   :0.6   Mean   :74.05   Mean   :77.2
 3rd Qu.:77.25   3rd Qu.:1.0   3rd Qu.:1.0   3rd Qu.:77.00   3rd Qu.:79.0
 Max.   :88.00   Max.   :1.0   Max.   :1.0   Max.   :81.00   Max.   :89.0
      d0t            d1t
 Min.   :0.0   Min.   :0.0
 1st Qu.:0.0   1st Qu.:1.0
 Median :0.0   Median :1.0
 Mean   :0.4   Mean   :0.8
 3rd Qu.:1.0   3rd Qu.:1.0
 Max.   :1.0   Max.   :1.0
```

変数（観測部分）について

- y3：観測された成績
  - 100点満点の国語の試験の点数
- t1：処置の割付けを表すT_i
  - 無作為に割付けられている
- d1：実際に処置を受けたかどうかを表すD_i

変数（観測されない部分）について

- y0tとy1t：潜在的結果変数の組
- d0tとd1t：処置を受けるかどうかを潜在的に表す変数の組
  - 変数d0tは処置の割付けt1が0のとき，実際に処置を受けたかどうかを表す変数d1が0になるか，1になるかを潜在的に示す.
  - 変数d1tは処置の割付けt1が1のとき，実際に処置を受けたかどうかを表す変数d1が0になるか，1になるかを潜在的に示す.

CACEの真値（教科書p.202）

- $CACE = E[Y_i(1) - Y_i(0)|C]$

- m1 <- mean(y1t[d1t==1&d0t==0])
- m0 <- mean(y0t[d0t==0&d1t==1])
- m1 - m0

```
> m1 <- mean(y1t[d1t==1&d0t==0])
> m0 <- mean(y0t[d0t==0&d1t==1])
> m1 - m0
[1] 7.875
```

AT推定量（教科書p.203）

CACEの真値=7.875

- $AT = E[Y_i|D_i = 1] - E[Y_i|D_i = 0]$

- m1at <- mean(y3[d1==1])
- m0at <- mean(y3[d1==0])
- m1at - m0at

2.917

PP推定量（教科書p.204）

CACEの真値=7.875

- $PP = E[Y_i | T_i = D_i = 1] - E[Y_i | T_i = D_i = 0]$

```
m1pp <- mean(y3[t1==1&d1==1])
m0pp <- mean(y3[t1==0&d1==0])
m1pp - m0pp
```

4.625

ITT推定量（教科書p.204）

CACEの真値=7.875

- $ITT = E[Y_i|T_i = 1] - E[Y_i|T_i = 0]$

- m1itt <- mean(y3[t1==1])
- m0itt <- mean(y3[t1==0])
- m1itt - m0itt

3.6

IV推定量（RパッケージAERのivreg関数）

CACEの真値=7.875

- library(AER)
- model1 <- ivreg(y3 ~ d1|t1)
- summary(model1)
- confint(model1)
  - d1のestimateの値が操作変数推定量による推定値

```
Coefficients:
            Estimate
(Intercept)   70.100
d1             9.000
```

ivreg(y~ex+en|ex+in)
変数y：結果変数
変数ex：外生的な共変量（縦棒の左側と右側の両方に指定）
変数en：内生変数
変数in：操作変数

IV推定量の意味

CACEの真値=7.875

```
> data14
   y3 t1 d1 y0t y1t d0t d1t
1  70  0  0  70  79   0   1
2  74  0  0  74  82   0   1
3  69  0  0  69  78   0   1
4  81  0  0  81  89   0   1
5  75  0  0  75  75   0   0
6  69  0  0  69  69   0   0
7  75  0  1  75  75   1   1
8  77  0  1  77  77   1   1
9  76  0  1  76  76   1   1
10 71  0  1  71  71   1   1
11 88  1  1  81  88   0   1
12 84  1  1  75  84   0   1
13 77  1  1  70  77   0   1
14 68  1  1  62  68   0   1
15 79  1  0  79  79   0   0
16 73  1  0  73  73   0   0
17 73  1  1  73  73   1   1
18 78  1  1  78  78   1   1
19 77  1  1  77  77   1   1
20 76  1  1  76  76   1   1
```

- t1が1で，d1も1の個体数：8個
- 全体の個体数：20個
- 8/20 = 0.4
- ITT推定量 = 3.6
- IV推定量 = 3.6/0.4 = 9.0

操作変数推定量IVは，処置の割付けT_iの奨励で影響を受けた個体の比率によってITT推定量を割ることで，ITT推定量の過小推定を是正している