大学数学入門無料公開講座「$\epsilon\delta$ 論法と中間値の定理」

梅崎直也@unaoya（株式会社すうがくぶんか）

2022 年 4 月 2 日

この講座では大学数学への入門として、$\epsilon\delta$ 論法や中間値の定理を通して論理的に数学を記述することについてお話しします。新しい現象を説明するのではなく、すでにお馴染みの実数、連続関数、極限、指数関数などについてより論理的に厳密に記述していきます。目標である中間値の定理は以下のようなものです。

定理 (中間値の定理)**.** 実数 a, b が $a < b$ であるとし、$f(x)$ を a, b を含む区間で定義された連続関数であるとする。$f(a) < 0$ かつ $f(b) > 0$ であるとき、x 軸上の $a < c < b$ を満たす点 $x = c$ で $f(c) = 0$ となるものが存在する。

この定理を証明せよといわれても、当たり前にみえて何をすればいいのかわからないと感じる方も多いでしょう。連続関数とはグラフが切れ目ない曲線であることで、x 軸とは実数が切れ目なく並んでいる数直線であり、切れ目ないものと切れ目ないものが交わるのは直感的には当たり前と感じます。何を証明すればよいのかわからないのは、定義がはっきりしないことやそもそも数学の証明とは何をするものかがわからないことにあります。今回の講座では、実数や連続関数という概念を数学的な意味で厳密に定義し、その定義から論理的に上の定理を証明することを目指します。直感的な理解と厳密な論証は数学を学ぶ上で相補的であり、$\epsilon\delta$ 論法を通してその両面を学んでいきましょう。

数学における論理を表現するために重要な道具が量化子です。量化子とは「すべての x」や「x が存在する」という文を表現するためのもので、$\forall, \exists$ という記号が用いられます。この講座では、量化子を用いた論理を土台として、集合や写像により数学的対象を記述するということについても解説していきます。

$\epsilon\delta$ 論法をはじめとして、微積分では不等式が頻繁に出てきます。高校数学での不等式は、仮定と同じ形に変形する、平方完成する、有名な不等式と同じ形に帰着する、などで証明できるものが多いでしょう。しかし、微積分で現れる不等式を証明する際には、量化子付きの仮定からうまく不等式を作り出すなどの操作が必要なため、慣れないと難しいものです。今回の講座では、この点についても丁寧に説明します。

$\epsilon\delta$ 論法を用いて関数の連続性や極限を定義することの実用上の利点は、複数の変数の極限を同時に考える場合などに収束の様子を正確に表現できることにあります。例えば連続関数列の極限が連続となることや、連続関数が積分できることの十分条件として、一様収束や一様連続などの概念があり、これらは $\epsilon\delta$ 論法を用いることで通常の収束や連続性との違いが明確になります。今回の講座では一様収束や一様連続性については扱わないので、またの機会をお待ちください。

この資料単独でも読んでいただけるように丁寧に説明を書きました。実際の講座では内容の一部のみを解説することをご了承ください。

すうがくぶんかでは、微分積分や線形代数をはじめとして、さまざまな数学の講座を開講しています。ご興味ある方は弊社 web サイトより講座をご覧ください。私は 2022 年は確率論と線形代数と群の表現の講座を担当します。

目次

1　論理と量化子

いわゆる大学数学が書かれる数学書はおおよそ、公理や定義から出発して論理によってさまざまな命題を証明していくというスタイルで書かれている。

命題とは、真偽が定まる文のことをいう。既に真であるとわかっている命題と論理を用いて命題が真であることを証明していく。

公理は理論の出発点となる命題で、真であると定めているもの。定義は数学的概念に名前を付けるもので、これも真であると定めている。つまり、定義や公理から論理と既に真であるとわかっている命題を用いて新たな命題を証明していく。

証明すべき命題たちは、重要度や位置付けによって、定理、補題、系、命題などと呼ばれる。ここで「命題」は二重の意味を持つことに注意しよう。重要なものが定理、それほど重要でないものが命題、系は定理などからすぐにわかるもの、補題は定理などを証明するための準備である。呼び分けは気持ちの問題なので、同じ内容の命題が教科書によって定理だったり命題だったり系だったりする。

命題を証明していく過程では、何を真として使ってよくて何を使ってはいけないかを明確にすることがポイントになる。既に当たり前のように使っている事実も一旦知らないつもりで証明し直すという態度が必要になる。

今回の講座では量化子入りの定理や定義、仮定の使い方に慣れることを一つの目標とする。変数がたくさん出てくるとき、変数を整理し、また変数のスコープを意識することが大事になる。同じ文字を使っていても異なるものを示すことも多いし、束縛変数の文字はその外では意味を持たない。特に、ある命題を証明する際に、既に証明した命題を用いるときに文字が衝突するので注意が必要になる。

証明の考え方として重要なことは、まず結論が何であるか、その結論を示すためには何をいえばよいかを考えるのがよい。仮定は後でみる方がうまくいくことが多い。定義は基本的には文の言い換えで、証明したい命題に現れる言葉を定義を用いてより基本的な言葉に書き直していくというのが基本戦略。

証明をゲーム的に捉えると、結論が真であることを言えれば勝ち。仮定は道具や武器のイメージで、公理、定義やこれまで示した命題と共に用いて結論を導く。このとき、サブゴールをうまく設定することが重要になる。つまり、結論の一歩手前となるような命題を設定することができると証明が見つけやすい。証明をグラフ的に捉えれば、最後まで道が通れば勝ち。教科書などに書かれた証明の文章は一直線的だが、実のところそうではない。

1.1　量化子

論理は述語論理と呼ばれるものを用いる。変数 x を持つ文で x の値を決めるごとに命題となるものを、条件とか述語とかいう。例えば x が実数を動く変数とし、「$x > 0$」とか「$x + 1 = 2$」とかが変数 x を持つ条件で、x の値を決めると命題になる。例えば「$1 > 0$」や「$-1 > 0$」」あるいは「$1 + 1 = 2$」や「$2 + 1 = 2$」などは命題である。$1, 0, -1, 2$ などは別に定義が与えられており、これを用いて上の命題の真偽を証明する。

条件 $P(x)$ から命題「すべての x に対して $P(x)$」や「$P(x)$ をみたす x が存在する。」を作ることができる。これは真偽が決まる文になり、x は「すべての」や「存在する」例えば「任意の x に対して $x > 0$」という命題と「任意の y に対して $y > 0$」という命題は同じものであると考える。

「すべての」と「存在する」をそれぞれ量化子と呼ばれる記号 $\forall, \exists$ で表す。条件 $P(x)$ に対し $\forall x P(x), \exists x P(x)$

として、量化子を用いて変数 x を束縛し、命題を作る。例えば変数 x が実数全体を動くとき、「$\forall x(x>0)$」であれば、これは偽である。$\forall xP(x), \exists xP(x)$ における x は束縛変数と呼ばれるもので、常に量化子とセットにして扱う。

論理記号 $\forall$ を用いて $\forall xP(x)$ と表される命題を全称命題といい、「全ての x に対して $P(x)$」とか「任意の x に対して $P(x)$」などと書く。x の動く範囲を集合 X としたとき、$\forall x \in X(P(x))$ などとも表す。「全ての $x \in X$ に対して $P(x)$」とか「任意の $x \in X$ に対して $P(x)$」などと書く。これは $x \in X$ ならば $P(x)$ というのと同じこと。実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と表す。例えば「$\forall x \in \mathbb{R}(x>0)$」は偽な命題であり、「$\forall x \in \mathbb{R}(x^2 \geq 0$」は真な命題である。

論理記号 $\exists$ を用いて $\exists xQ(x)$ と表される命題を存在命題といい、「$Q(x)$ となる x が存在する」とか「ある x に対して $Q(x)$」などと書く。集合 X の要素に条件を満たすものが存在するというときには、$\exists x \in X(Q(x))$ などとも表す。「$Q(x)$ となる $x \in X$ が存在する」とか「ある $x \in X$ に対して $Q(x)$」などと書く。あるいは「ある $x \in X$ が存在して $Q(x)$」と書かれることもある。例えば「$\exists x \in \mathbb{R}(x \leq 0)$」は真な命題であり、「$\exists x \in \mathbb{R}(x^2<0)$」は偽な命題である。

量化子と「かつ」、「または」は似ている。「全ての x について $P(x)$」というのは「$P(0)$ かつ $P(1)$ かつ $\cdots$」というようなもの。「$P(x)$ となる x が存在する」というのは「$P(0)$ または $P(1)$ または $\cdots$」というようなもの。

1.1.1 量化子の否定

量化子の否定について説明する。「全ての x に対して $P(x)$」の否定は「$P(x)$ でない x が存在する」であり、論理式で書くと $\forall xP(X)$ の否定は $\exists x\neg P(x)$ であり、否定を取ることで $\forall$ と $\exists$ が入れ替わるのは、ドモルガンで「かつ」と「または」が入れ替わったことと似ている。

例えば「$\forall x \in \mathbb{R}(x>0)$」の否定は「$\exists x \in \mathbb{R}(x \leq 0)$」であり、逆に「$\exists x \in \mathbb{R}(x \leq 0)$」の否定は「$\forall x \in \mathbb{R}(x>0)$」である。「$\forall x \in \mathbb{R}(x^2 \geq 0$」の否定は「$\exists x \in \mathbb{R}(x^2<0)$」であり、逆に「$\exists x \in \mathbb{R}(x^2<0)$」の否定は「$\forall x \in \mathbb{R}(x^2 \geq 0$」である。

1.1.2 複数の量化子が現れる場合

複数の量化子がつく場合、量化子の順番が重要になる。$P(x,y)$ を二変数 x,y についての条件とする。これに対し $\forall x\exists yP(x,y)$ と $\exists y\forall xP(x,y)$ は異なる命題である。

例えば $x,y \in R$ として、$P(x,y)$ を「$x<y$」としよう。

「どんな x に対しても $P(x,y)$ をみたす y が存在する」というと、二通りの解釈が存在する。「「どんな x に対しても $P(x,y)$ をみたす」という性質を持つ y が存在する」なのか、「どんな x に対しても「その x に対しては $P(x,y)$ をみたす y がが存在する」」なのか。

1.1.3 ならば

二種類のならばの違いについて説明する。$P(x)$ ならば $Q(x)$ といったときと、P ならば Q といったときの違いに注意する。論理式でいうと $P \to Q$ と $P(x) \Rightarrow Q(x)$ を区別する。後者は任意量化が隠れていて、「任意の x に対して $P(x)$ ならば $Q(x)$ である」ということであり、これは「任意の $P(x)$ を満たす x に対して $Q(x)$ である」ということでもある。論理式で書くと $\forall x(P(x) \to Q(x))$ のことである。

日常用語でならばを使うのは後者であることが多いように思う。これの否定は、「$P(x)$ でありかつ $Q(x)$ でない x が存在する」または「ある x に対して $P(x)$ でありかつ $Q(x)$ でない」などと書かれる命題で、論理式

で書くと $\exists x(P(x) \land \neg Q(x))$ である。

1.1.4 証明の方法

量化子の入った命題の証明方法を簡単に説明する。二種類の量化子、仮定に入る場合と結論に入る場合、4 パターンある。

結論に量化子がつくとき。$\forall x P(x)$ であれば、与えられた x について、条件 $P(x)$ が成り立つことを確認する。自分で x の値を指定することはできない。$\exists x Q(x)$ であれば、x の作り方を説明する。このためには他の存在命題から存在を保証してもよいし、とにかく自分で好きに作り、それが $Q(x)$ を満たすことを確認する。よくある間違いが、単に $Q(x)$ をより簡単な条件に変形するだけで存在を明示しないこと。

量化子がついた命題や条件を用いるとき。「任意の x に対して $P(x)$」を使うときであれば x に好きな値を代入して使うことができる。例えば x が実数全体を動くなら $P(0), P(1), \ldots$ どれでも使い放題である。「$P(x)$ である x が存在する」を使うときであれば、x になんらかの値が代入されるが、それをこちらで指定することはできない。とにかく何か $P(x_0)$ を使うことができるのみ。

今回の文章では任意の証明と存在の証明で「とする」と「とおく」を使い分けることにした。

$P(x)$ ならば $Q(x)$ を証明する場合。基本的には $\forall$ を示すのと同じ。x が $P(x)$ を満たすとする、あるいは $P(x)$ を満たす x が与えられたとする、から始めてどうにかして x が $Q(x)$ を満たすことを示す。ここで、x は $P(x)$ を満たすことのみからしか出発できない。$P(x)$ を満たすものならなんでも同じ議論ができる必要があるため、x を自分で決めることはできない。

1.2 高校数学での量化子と論理

この節の残りは高校数学の範囲で現れる概念や命題を量化子を用いて論理的に表現し、それを証明するということについての具体例をみていこう。ただし、自然数や整数、有理数や実数及びそれらの四則演算や大小関係などについては定義や公理を与えず、既に知っているものとして扱う。公理を設定した議論は次節から。

1.2.1 整数

約数や倍数という概念を通して量化子、特に存在量化子の扱いの具体例をみていこう。ここでは整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ とその加減乗、大小関係は既知のものとして様々な性質を用いるが、特に以下の事実は証明なく用いる。

命題 1.1. 0 以上の整数全体のなす集合 $\mathbb{N}$ の部分集合 A は最小元をもつ。

これについても実際には整数や自然数、その大小関係などについて公理や定義を与えた上で証明するべき事実ではあるが、今回はそこには立ち入らない。

定義 1.2 (倍数と約数)**.** 整数 n, m に対して n が m の倍数であるとは、$n = mk$ となる整数 k が存在することをいう。また、このとき m が n の約数であるという。

n が m の倍数であることあるいは m が n の約数であることは、存在量化子 $\exists$ を用いて $\exists k(k \in \mathbb{Z} \land n = mk)$ または $\exists k \in \mathbb{N}(n = mk)$ と形式化できる。

例 1.3. 6 は 2 の倍数であることを証明しよう。結論は倍数であることなので、倍数の定義を確認して書き直

す。すると、証明すべきことは $6 = 2k$ となる整数 k が存在することであることがわかる。存在することを言いたいので、k の作り方を考える。今回は $6 = 2 \times 3$ であることを知っているので、$k = 3$ とおけばいいことがわかる。これを整理して証明を書くと次のようになる。

$k = 3$ とおくと、$6 = 2k$ である。よって、$6 = 2k$ となる k が存在することがわかる。定義から、6 は 2 の倍数である。

今回は、存在することを具体的にその候補を与えることで示した。

例 1.4. 6 は 5 の倍数でないことを証明しよう。定義を確認すると、倍数であることは $6 = 5k$ となる整数 k が存在すること。証明すべきことは上の否定なので、任意の整数 k に対して $6 \neq 5k$ となることである。「任意の」というのを証明したいので、整数 k が与えられたとして証明を始める。例えば次のように証明しよう。

k を整数とする。$k \leq 1$ または $k \geq 2$ のいずれかが成り立つ。（これについては既に示したものとして利用する。）$k \leq 1$ であれば $5k \leq 5$ であり、$k \geq 2$ であれば $5k \geq 10$ である。もし $6 = 5k$ となれば $5 < 6 < 10$ であることに矛盾する。よって $5k = 6$ とはならない。k は任意にとれるので、任意の整数 k に対して $6 \neq 5k$ であることが示せた。よって 6 は 5 の倍数ではない。

例 1.5. 任意の整数 n に対し n が 4 の倍数ならば n は 2 の倍数であることを示そう。仮定にも結論にも存在量化子がついている。n を整数とし、4 の倍数であると仮定する。証明したいことは $n = 2k$ となる整数 k が存在すること。今回は具体的に与えるのではなく、仮定から存在を保証することになる。ここで仮定を思い出すと、n が 4 の倍数なので、$n = 4k$ となる整数 k が存在することがわかるので一つとって k_0 とおく。k が二つ出てきたが、これらはそれぞれ束縛変数なので別物として扱っている。ここでとった k_0 にたいし、$n = 2(2k_0)$ なので、$k = 2k_0$ とおくと $n = 2k$ となる。つまり $n = 2k$ となる整数 k の存在がわかったので、n は 2 の倍数である。

もう一度整理して証明を書く。n を 4 の倍数とする。このとき、$n = 4k$ となる整数 k が存在するのでそのようなものを一つとりそれを k_0 とおく。これに対し、$k = 2k_0$ とおくと、$n = 4k_0 = 2k$ であり、k は整数である。よって、$n = 2k$ となる整数 k の存在が示されたので、n は 2 の倍数である。

例 1.6. 任意の整数 n に対して 0 は n の倍数であることを証明しよう。示したいことは $0 = nk$ となる整数 k が存在することだが、$n0 = 0$ なので $k = 0$ とすればよい。証明を書く。n を整数とする。このとき、$0 = n0$ なので、$k = 0$ とおくと $0 = nk$ である。よって $0 = nk$ となる整数 k が存在するので、0 は n の倍数である。n は勝手にとれるので、任意の整数 n に対して 0 は n の倍数であることが示された。

逆に、整数 k が任意の n に対して n の倍数であるならば $k = 0$ であることを証明しよう。（仮定に全称量化が入っているパターン。n をいろんな値にしたものが全て仮定として使える。）仮定から、特に k は 0 の倍数であるので、$k = 0l$ となる整数 l が存在するのでそのようなものを一つとり l_0 とする。（ここも文字が衝突しているので注意しよう。）これに対し、$k = 0l_0 = 0$ である。よって $k = 0$ であることが示された。

問題 1.7. 任意の n に対して 1 は n の約数であることを示せ。整数 k が任意の n に対して n の約数であるならば $k = \pm 1$ であることを示せ。

m が n の約数であることを、n が m で割り切れる、あるいは n を m で割ったあまりが 0 という方法で定義することができる。こうすると、存在量化子を一見用いていないように見えるが、実は割り切れることあるいはあまりの定義に隠れている。

定義 1.8 (あまり)**.** n を m で割ったあまりが r であるとは、$n = mk + r$ となる整数 k が存在し、$0 \leq r < m$

となること。

形式化すると、$\exists k(k \in \mathbb{Z} \wedge n = mk + r \wedge 0 \leq r < m)$ という条件をみたす r のこと。これについての存在と一意性は別に証明する。小学校では割り算を手続として習ったとが、その手続きが確かに必ず一つの数を定めるかということを議論する必要がある。実際にはその手続きについて注意深く考えると確かに商とあまりが一つ定まることがわかる。数学でよくある方法は、手順で定義するのではなく性質を満たすものの存在と一意性で定義する。

命題 1.9. 整数 n, m にたいし n を m で割ったあまり r は一意的に存在する。

数学では、ある性質をみたすものが一意的に存在する、というタイプの命題が非常によく現れる。一般的に、存在と一意性は分けて証明することができ、そのように議論されることが多い。

考え方. 一般的に、存在と一意性は分けて証明することができる。存在することと、もしあれば一つしかないことをそれぞれ証明する。

証明. r の存在を示す。集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0 \wedge \exists k \in \mathbb{Z}(x = n - mk)\}$ の最小を r とする。この最小が存在することは初めに述べたとおり。この r が条件をみたすことを確かめる。まずある整数 k が存在して $n = mk + r$ である。次に、$0 \leq r < m$ を示す。上の集合 A の定義から $r \geq 0$ である。$r < m$ を背理法で証明しよう。もし、$r \geq m$ であるとすると、$r' = r - m \geq 0$ であり、$n = mk + r = mk + r' + m = m(k+1) + r'$ であるので、$r' \in A$ でもある。$r' < r$ なので、これは r の最小性に矛盾する。よって、$r < m$ であり、$0 \leq r < m$ である。

r の一意性を証明する。$n = mk + r$ かつ $n = mk' + r'$ であり、$0 \leq r < m$ かつ $0 \leq r' < m$ であると仮定する。このとき、$mk + l = mk' + r'$ であり、$m(k - k') = r' - r$ である。ここで、r, r' は共に 0 以上 m 未満なので、$r' - r$ は $-m$ より大きく m より小さい。もし $k \neq k'$ であれば左辺は m 以上または、$-m$ 以下なので、上に矛盾する。よって $k = k'$ であり、$r' = r$ でもある。 □

定義 1.10 (公約数、最大公約数)**.** 整数 n, m に対し、整数 d が n と m の**公約数である**とは、d が n の約数でありかつ m の約数であること。

整数 n, m の**最大公約数**とは、公約数のうち最大のものをいう。

定理 1.11. n, m を整数とする。n, m の最大公約数が 1 であるならば $nx + my = 1$ となる整数 x, y が存在する。逆に $nx + my = 1$ となる整数 x, y が存在するならば n, m の最大公約数が 1 である。

一つの証明方法はユークリッドの互助法を用いるものがあるが、ここではそれを明示的には用いない形で証明する。

考え方. $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq 0, \exists x, y \in \mathbb{Z}(k = nx + my)\}$ という $\mathbb{Z}$ の部分集合を考える。（後の話との対応でいうと、関数 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $f(x, y) = nx + my$ としたとき、この関数の値域が上の集合である。）これは空集合ではなく、最小元が存在するのでそれを d とする。このとき、d は n, m の公約数となることを示す。（補題として切り分ける。）n を d で割ったあまり r が 0 より大きいとき、

1.2.2 方程式と不等式

方程式が実数解を持つことは存在量化子を用いて形式化することができる。

例 1.12. 方程式 $x^2 - 1 = 0$ が実数解を持つことは、「$x^2 - 1 = 0$ を満たす x が存在する」ということ。これは $\exists x(x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 1 = 0)$ と形式化できる。あるいは $\exists x \in \mathbb{R}(x^2 - 1 = 0)$ とかかれることもある。

例 1.13. 連立方程式 $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ が解を持つことは、「$x + y = 1$ かつ $x - y = 2$ を満たす x, y が存在する」ということ。これは $\exists x(\exists y(x + y = 1 \wedge x - y = 2))$ と形式化できる。

パラメータ付の方程式を考える。

例 1.14. 変数の動く範囲は全て実数全体とする。「$x + y = 1$ と $ax + 2y = 1$ の解が存在するような a が存在する。」という命題と、「任意の a に対して $x + y = 1$ と $ax + 2y = 1$ の解が存在する。」という命題を考える。前者は真な命題で、後者は偽な命題である。

「$x^2 + a = 0$ の解が存在するような a が存在する」という命題は真で、「任意の a に対して $x^2 + a = 0$ の解が存在する」という命題は偽である。

例 1.15. 以下の 4 つの命題の真偽を判定する。

1. 「任意の x に対して $ax > 0$ となる」ような a が存在する。
2. 任意の x に対して「$ax > 0$ となるような a が存在する。」
3. 任意の a に対して任意の x に対して $ax > 0$ となる。
4. $ax > 0$ となる x が存在するような a が存在する。

上から、偽、偽、偽、真である。

1. a をどうとっても $x = 0$ なら $ax > 0$ とはならない。
2. $x = 0$ であれば a をどうとっても $ax > 0$ とはならない。
3. $a = 1, x = -1$ とおくと $ax > 0$ ではない。
4. $a = 1, x = 1$ とおくと $ax > 0$ である。

1.2.3 大小関係

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す。

定義 1.16 (最大最小)**.** A を $\mathbb{R}$ の部分集合とする。$a \in \mathbb{R}$ が A の最大元であるとは、$a \in A$ であり、かつ任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $x \in A$ ならば $x \leq a$ であることをいう。

命題 1.17 (最大最小の一意性)**.** A を $\mathbb{R}$ の部分集合とする。このとき、A の最大は存在すれば一意的である。

証明. a, b が共に A の最大なら $a = b$ である。a が最大で $b \in A$ より $b \leq a$ である。また、b が最大で $a \in A$ より $a \leq b$ である。よって $a = b$ である。 □

最大が存在しないことをどう証明するか。

例 1.18. $A \subset \mathbb{R}$ を $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ とする。この A には最大元が存在しないことを示そう。

背理法で存在すれば矛盾することを示す。$a \in \mathbb{R}$ が最大だとする。$b = \dfrac{a+1}{2}$ とすると、$a < b < c$ である。よって $b \in A$ であり、a は A の最大であることに矛盾する。

1.2.4　関数

定義 1.19 (関数の値域). 部分集合 $U \subset \mathbb{R}$ を定義域にもつ関数 $f : U \to \mathbb{R}$ に対し、その値域とは、「$f(u) = x$ となる $u \in U$ が存在する」という条件をみたす $x \in \mathbb{R}$ 全体のなす部分集合のことをいう。

上の条件は形式化すると $\exists u \in U(f(u) = x)$ ということである。

例 1.20. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ により定める。$x \in (-1, 1)$ のときの値域は $[0, 1)$ である。$0 \le a < 1$ である a に対して $f(x) = a$ となる $x \in (-1, 1)$ が存在するということ。

例 1.21. $f(x) = x^2 + a$ に対して。任意の実数 x に対して $f(x) > 0$ となるための a の必要十分条件は $0 < a$ である。

整数のところで出てきた集合も関数の値域である。$A = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \ge 0, \exists x, y \in \mathbb{Z}(k = nx + my)\}$ という $\mathbb{Z}$ の部分集合は、関数 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $f(x, y) = nx + my$ としたときの値域である。以下でもこのような記法をしばしば用いる。

1.2.5　軌跡

ここでは軌跡のある有名な問題を通して、量化子や写像などの概念がどのように用いられるかをみていこう。高校数学風の表現で問題を紹介する。

問題 1.22. 点 (x, y) が $x^2 + y^2 \le 1$ をみたしながら動くとき、点 $(x + y, xy)$ の動く領域を求めよ。

この問題は、写像の言葉を用いて書くと次のようになる。

問題 1.23. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f(x, y) = (x + y, xy)$ で定める。f の定義域を $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ に制限したときの値域を求めよ。

量化子を明示的に用いて考えてみる。

考え方. 文字の名前を変える。(x, y) に対し $x = u + v, y = uv, u^2 + v^2 \le 1$ なる (u, v) が存在するための条件を求めよ。x, y を止めて、u, v を変数と見ている。$\exists u, v(P(u, v))$ で $P(u, v)$ は x, y に依存している。あるいは、$Q(x, y)$ を $\exists u, v(P(u, v, x, y))$ として考える。つまり、$\exists u, v(x = u + v \land y = uv \land u^2 + v^2 \le 1)$ をみたす (x, y) の集合を求める。

$x = u + v$ は $u = x - v$ と同値なので、上の条件はさらにこの条件のもとでは $y = uv$ と $y = (x - v)v$ は同値であり、さらに式変形すると、$y = (v - x)v$ は $v^2 - xv + y = 0$ と同値であり、つまり、$\exists u, v(u = v - x \land v^2 - xv + y = 0 \land u^2 + v^2 \le 1)$ をみたす (x, y) の集合を求める。

$v^2 - xv + y = 0$ である実数 v が存在する必要十分条件は $x^2 - 4y \ge 0$ である。

また、$u = x - v$ かつ $v^2 - xv + y = 0$ という条件のもとでは、$u^2 + v^2 = (x - v)^2 + v^2 = 2v^2 - 2xv + x^2 = -2y + x^2$ となるので、$u^2 + v^2 \le 1$ は $-2y + x^2 \le 1$ と同値である。

上の考え方を整理して数学書風に解答を書く。

解答. 求める領域が

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4y \ge 0 \text{ かつ } -2y + x^2 \le 1\}$$

であることを証明する。

まず $x^2+y^2 \leq 1$ のとき、$(x+y,xy)$ が上の集合に属することを示す。$(x+y)^2-4xy=(x-y)^2$ よりこれは 0 以上となる。また、$-2xy+(x+y)^2-1=x^2+y^2-1$ よりこれは 0 以上となる。

逆に上の集合に属する (x,y) に対して $(u+v,uv)=(x,y)$ となる (u,v) で、$u^2+v^2 \leq 1$ となるものが存在することを示す。(x,y) に対し、方程式 $t^2-xt+y=0$ を考える。これは $x^2-4y \geq 0$ であることから二つの実数解を持つ。その実数解を u,v とする。これについて、解と係数の関係から $u+v=x, uv=y$ である。さらに、$u^2+v^2=(u+v)^2-2uv=x^2-2y \leq 1$ をみたす。

2 実数の連続性

実数とは何か？ という問いに答えるため実数の連続性という公理を説明する。実数とは有限または無限小数展開で表される数のこと、あるいは数直線上に一列に隙間なく並んだ数のことである。こういった説明でも、直感的には、あるいはこれまでの経験上は問題ないと感じるかもしれない。しかし厳密な論理によって数学的事実を証明していくための土台としてはやや心許ない。直線とは？ 隙間とは？ 一列とは？ 無限にとは？ 無限列で数がちゃんと決まる？ 展開の方法は一通りか？ などにはどう答えればよいだろうか。例えば $1 = 0.999\cdots$ を証明するためにはどうすればいいだろうか。

数学でよくある方法は、実数とは何か、実数をどのように作るか、あるいは実数をどのように表すかではなく、実数全体の集合とは何かを決めるというものである。実数が先にあって実数の集合を作るのではなく、実数全体の集合を決めてからその要素として実数を定める。つまり、実数を先に定義するのではなく、実数全体の集合を先に定義する。線形代数でも、ベクトルが先にあってベクトル空間を作るのではなく、ベクトル空間が先にあってその要素がベクトルであると考えるのと同様である。さらに、実数全体の集合をどう作るかよりも、実数全体の集合がどのような性質を持つものかを決めておくという方法をとる。実数全体の集合がみたすべき性質を公理としておき、この公理から導かれる性質について調べていく。

では、上で説明したような実数に対する直感をどう公理化するか？ 四則演算が適切にできること、大小関係が適切に決まっていることに加え、**連続性**と呼ばれる重要な性質をみたすものとして定義する。連続性は、微積分を行うためのさまざまな極限操作を可能にする、特に極限の存在を保証するためのもの。極限という概念自体は連続性がなくとも可能であることは後で簡単に説明する。これは上の直感的な説明でいうと、**無限**小数がちゃんと**収束**して数を定めることや、直線に数が**隙間なく**並んでいることを明確に述べる公理である。

公理 2.1 (実数の公理)**.** 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は以下の公理をみたす。任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対し、その和 $a + b \in \mathbb{R}$ と積 $ab \in \mathbb{R}$ が定まる。また、任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対し $a \leq b$ または $a \not\leq b$ のいずれかが成り立つ。これらは以下の性質をみたす。

1. 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $a + b = b + a$ である。
2. 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して $(a + b) + c = a + (b + c)$ である。
3. 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $a + 0 = a$ がなりたつ、という性質をみたす要素 $0 \in \mathbb{R}$ がただ一つ存在する。
4. 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $-a \in \mathbb{R}$ が存在して $a + (-a) = 0$ がなりたつ。
5. 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $ab = ba$ である。
6. 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して $(ab)c = a(bc)$ である。
7. 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $a1 = a$ がなりたつ、という性質をみたす要素 $1 \in \mathbb{R}$ がただ一つ存在する。
8. 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、$a \neq 0$ であるならば $a^{-1} \in \mathbb{R}$ が存在して $aa^{-1} = 1$ がなりたつ。
9. 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して $a(b + c) = ab + ac$ である。
10. $1 \neq 0$ である。
11. 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $a \leq a$ である。
12. 任意の a, b に対して $a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$ である。
13. 任意の a, b, c に対して $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$ である。
14. 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $a \leq b$ または $b \leq a$ である。
15. 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して、$a \leq b$ ならば $a + c \leq b + c$ である。

16. 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、$a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ ならば $ab \geq 0$ である。
17. 連続性の公理。

さらに、$a \leq b$ かつ $a \neq b$ であることを $a < b$ と表すこととする。また、$a \leq b$ であることを $b \geq a$ とも表す。

この公理には和や積、大小関係を具体的にどう定義するかは書かれていないことに注意しよう。そもそも $\mathbb{R}$ 自体も具体的にどのような集合であるかもわからないし、そのようなものが一つに決まるかもわからない。線形代数ではベクトル空間の公理から出発するが、ベクトル空間の公理をみたすようなベクトル空間はたくさんある。実数の公理については、実は全て満たすものは本質的に一つしかない。ただし、例えば以下で定義する有理数全体の集合は連続性の公理以外の全てをみたす。

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合として、自然数全体の集合 $\mathbb{N}$、整数全体の集合 $\mathbb{Z}$、有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ を順に定義する。まず、自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は平たくいうと $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ のこと。上の公理からは $0, 1 \in \mathbb{R}$ であることはわかるが、$2, 3$ などは $\mathbb{R}$ の要素であるか、そもそも何のことかわからない。$\mathbb{N}$ の特徴は $0 \in \mathbb{N}$ であることと、$n \in \mathbb{N}$ ならば $n + 1 \in \mathbb{N}$ であること。もし $n \in \mathbb{R}$ であれば $n + 1 \in \mathbb{R}$ という要素が定まることは公理からわかる。そこで、このような特徴を持つ部分集合たちを考え、それらすべての共通部分として $\mathbb{N}$ を定義する。$\mathbb{N}$ の要素を自然数と呼ぶ。具体的な自然数は $2 = 1 + 1, 3 = 1 + 1 + 1$ などと定義する。

整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ として定義する。これは正確に書くと $\{x \in \mathbb{R} \mid x = -n$となる自然数 n が存在する$\}$ ということ。$\mathbb{Z}$ の要素を整数と呼ぶ。有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q} = \{nm^{-1} \mid n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ として定義する。これは正確に書くと $\{x \in \mathbb{R} \mid x = nm^{-1}$となる整数 n, m が存在する$\}$ ということ。nm^{-1} のことを $\dfrac{n}{m}$ と表記する。$\mathbb{Q}$ の要素を有理数と呼ぶ。これらを定義するには連続性の公理を用いていないことに注意しよう。

改めて定義したとはいえ、これまでに馴染みのある性質はおおよそ全て成立すると思って問題ない。ただし、原理的な立場に立てばそのような性質は全て改めて証明し直す必要がある。実際に当たり前に思えるいくつかの性質については以下で公理のみから改めて証明し直す。当たり前と思っていることを証明し直すのは慣れないと難しく感じるが、やるべきことは定義、公理、既に示したこと、論理のみからその事実を導くということ。すごく理解力が高くどんな細かいことも曖昧にはしないが知識や経験はない人を相手に説明するようなものだと思ってほしい。

連続性には同値なたくさんの条件があり、微積分の教科書によって何を出発点にするかが異なっている。今回は上限の存在を公理とする立場をとる。上限の存在の公理を述べる前に、切断という概念を紹介する。切断についての性質を実数の公理とする立場もあり、そちらの方が隙間なく数が並んでいるという直感的なイメージに近い。今回そうしないのは単なる好みの問題にすぎない。

切断について説明する前に、有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ と実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の大きな違いを観察しよう。よく知られているように $x^2 - 2 = 0$ となる有理数 x は存在しない。有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ はその部分集合 $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 < 0\}$ と $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 > 0\}$ で交わりのない和に分割できる。

定義 2.2 (切断)**.** $\mathbb{R}$ の切断とは、空でない部分集合 $A, B \subset \mathbb{R}$ の組 (A, B) であって、以下の条件を満たすもの。

1. $A \cup B = \mathbb{R}$
2. $A \cap B = \emptyset$
3. $a \in A$ かつ $b \in B$ ならば $a < b$

同じように $\mathbb{Q}$ の切断 (A, B) も定義できる。

例 2.3. $\mathbb{R}$ の部分集合 A, A', B, B' を以下のように定める。

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 < 0\} \\ A' &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 \leq 0\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 > 0\} \\ B' &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 \geq 0\} \end{aligned}$$

これに対して $\mathbb{R}$ の切断は $(A', B), (A, B')$ のみである。

$\mathbb{Q}$ の部分集合 A, A', B, B' を以下のように定める。

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 < 0\} \\ A' &= \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 \leq 0\} \\ B &= \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 > 0\} \\ B' &= \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 \geq 0\} \end{aligned}$$

$x^2 - 2 = 0$ となる有理数 x が存在しないことから、$(A, B), (A', B), (A, B'), (A', B')$ は全て $\mathbb{Q}$ の切断である。

命題 2.4 (デデキンドの公理)**.** 任意の $\mathbb{R}$ の切断 (A, B) に対し、以下のいずれかが成り立つ。

1. A に最大元があり、B に最小元が存在しない。
2. B に最小元があり、A に最小元が存在しない。

この公理によって、A, B のいずれもが最大最小を持つ、いずれもが最大最小を持たない、という可能性を排除している。上で述べたように、$\mathbb{Q}$ については上の公理は正しくない。

今回は、少し違った命題を公理として、その公理から上を証明するという立場をとる。デデキンドの公理と名づけたが、今回の講義では証明すべき命題という位置づけである。

それでは、連続性の公理を述べるための準備をしていこう。

定義 2.5 (上界と下界)**.** 部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対し、$a \in \mathbb{R}$ が A の上界であるとは、任意の $x \in A$ に対して $x \leq a$ が成り立つことをいう。

また、$a \in \mathbb{R}$ が A の下界であるとは、任意の $x \in A$ に対して $a \leq x$ が成り立つことをいう。

A の上界という数がただ一つに決まるわけではないことに注意しよう。

例 2.6. 負の数全体の集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ にたいし $0, 1, 2$ などは A の上界である。

このことは公理から証明すべき事実である。例えば $0 < 1$ や $1 < 2$ などを実数の公理から証明する必要がある。$0 < 1$ を証明してみよう。まず、公理 14 から $0 \leq 1$ または $0 \geq 1$ のいずれかが成り立つ。$0 \geq 1$ ならば矛盾することを示す。公理 15 から、$0 + (-1) \geq 1 + (-1)$ であり、公理 3 と公理 4 から両辺計算すると $-1 \geq 0$ である。公理 16 から $(-1)(-1) \geq 0$ である。ここで、$(-1)(-1) = 1$ であることが公理のみから証明できるので、$1 \geq 0$ である。ところが $0 \geq 1$ でもあるから、公理 12 より $1 = 0$ となって公理 10 に矛盾する。

例 2.7. また、整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ に対し上界は存在しない。これについては、連続性の公理を用いて後で証明する。実は、連続性の公理以外の全てを満たすが、$\mathbb{Z}$ に上界が存在するようなものを作ることができる。

定義 2.8 (上限 sup と下限 inf)**.** $A \subset \mathbb{R}$ に対し $s \in \mathbb{R}$ が A の上限であるとは、A の上界の最小値のことをいう。このとき、これを $\sup A$ あるいは $\sup_{x \in A} x$ と表す。

同様に A の下限は下界の最大値のことで、これを $\inf A$ などと表す。

$\sup A$ は存在すれば一意的である。これは、A の上界全体の集合が一意的であり、最小の一意性からわかる。

最大と上限は似ているが違うもの。まず、最大が存在すればそれは上限でもある。

命題 2.9. x が A の最大元なら x は A の上限である。

考え方. 与えられた x が A の上界の最小であることをいう。定義から、x が A の上界であることと、任意の A の上界 u に対して $x \leq a$ をいえばよい。

証明. $a \in A$ とする。x は最大なので $a \leq x$ である。a は任意にとれるので、x は A の上界である。

u が A の上界であるとする。すると、特に $x \in A$ に対して $x \leq u$ である。u は任意にとれるので、x は A の上界全体の最小である。

以上から x が A の上限であることが示された。 □

逆に上限は最大とは限らない。

例 2.10. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ にたいし $\sup A = 1$ であるが、$\max A$ は存在しない。$\sup A = 1$ を証明しよう。

まず 1 が A の上界であることを示す。$x \in A$ とする。$x < 1$ であり、よって $<$ の定義から $x \leq 1$ である。

次に 1 が A の上界全体の集合の最小であることを示す。u を A の上界とする。$u < 1$ として矛盾を導く。このとき、$u \leq -1$ または $-1 < u$ のいずれかが成り立つ。もし $-1 < u$ であれば $u \in A$ となり、$v = \dfrac{u-1}{2}$ とおくと $v \in A$ かつ $v < u$ であるので、u が A の上界であることに反する。もし $u \leq -1$ であれば、$0 \in A$ であり $u < 0$ であるので、u が A の上界であることに反する。いずれの場合にも矛盾するので、$u \geq 1$ であることがわかる。u は任意にとれるので、1 が A の最小の上界であることが示された。

上限について考えるときに、非常によく使う性質が以下のものである。

命題 2.11. 部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対し、$x = \sup A$ であることは、x は A の上界であってかつ任意の $\epsilon > 0$ に対して $x - \epsilon < a \leq x$ となる $a \in A$ が存在することの必要十分条件である。

証明. まず、$x = \sup A$ が「任意の $\epsilon > 0$ に対して $x - \epsilon < a \leq x$ となる $a \in A$ が存在する」という条件を満たすことを示す。$\epsilon > 0$ とする。このとき、$x - \epsilon < a \leq x$ となる $a \in A$ が存在することを背理法で示す。そのような a が存在しないとすると、$x - \epsilon < y \leq x$ である任意の y は A に属さない。そこで、$y_0 = x - \dfrac{\epsilon}{2}$ とすると、$y_0 \leq y \leq x$ である任意の y は A に属さず、また、x が A の上限であることから $x < y$ である任意の y は A に属さない。よって、$y_0 < y$ である任意の y は A に属さず、y_0 は A の上界である。$y_0 < x$ であるから、これは x が A の上界の最小であることに矛盾する。よって、$x - \epsilon < a \leq x$ となる $a \in A$ が存在することがわかる。$\epsilon > 0$ は任意にとれるので、示すべき性質を導けた。x は A の上界でもあるので、条件の十分性が示た。

逆に x が A の上界であってかつ「任意の $\epsilon > 0$ に対して $x - \epsilon < a \leq x$ となる $a \in A$ が存在する」ならば $x = \sup A$ であることを示す。背理法で証明する。$x \neq \sup A$ であれば、x は上界の最小ではないということなので、A の上界 y であって $y < x$ であるものが存在する。このとき $\epsilon = x - y > 0$ に対して仮定された性質を用いると、$x - (x - y) < a \leq x$ となる $a \in A$ が存在する。$x - (x - y) = y$ であるので、$y < a$ となる

$a \in A$ が存在することになるが、これは y が A の上界であることに矛盾する。よって、$x = \sup A$ であることが示された。 □

例 2.12. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 1\}$ の上限は 1 である。$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ の上限は $\sqrt{2}$ となるべきである。これは正しいが、$0 < 1$ を証明しなければいけなかったことと同様にこのことも証明が必要である。

例 2.13. $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ にたいし、$\inf A = 0$ である。直感的には明らかに見えるこの事実も、公理のみから証明するのは多少厄介。以下ではアルキメデス性という形でこの事実を述べ、証明する。

この例からもわかるように、上限 sup は極限と密接に関係する概念である。

では上限は必ず存在するか？ いくらでも大きな数が属するような集合を考えると存在しないのでそのような場合を排除した上で、存在を公理とする。

定義 2.14 (連続の公理)**.** 任意の空でない上に有界な $A \subset \mathbb{R}$ は上限 $\sup A$ をもつ。

sup の定義や扱い方が慣れないと難しいが、主張自体はシンプルで使いやすい。空でない下に有界な $A \subset \mathbb{R}$ が下限 $\inf A$ をもつことは、$-A = \{-x \mid x \in A\}$ に対する上限を考えればよい。

連続の公理によれば、実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ にさらにさまざまな上限や下限を増やしたイメージだが、$\mathbb{R}$ の作り方を指定しているわけではない。上限が存在することを仮定すれば微積分が全部できる。なんらかの方法で実数を作ったとすると（つまりより基本的なところから出発すると)、上限の存在は証明すべき事実となる。

連続の公理を用いてデデキンドの公理を証明しよう。

命題 2.15 (デデキンドの公理)**.** 任意の $\mathbb{R}$ の切断 (A, B) に対し、以下のいずれかが成り立つ。

1. A に最大元があり、B に最小元が存在しない。
2. B に最小元があり、A に最大元が存在しない。

考え方.

証明. (A, B) が $\mathbb{R}$ の切断であるとする。このとき、A が最大元をもつならば B は最小元を持たず、A が最大元を持たないならば B が最小元を持つことを示す。

まず、A が最大元を持たないとする。A の上限 $s = \sup A$ が存在する。A は最大元を持たないので $s \notin A$ である。よって $s \in B$ である。これが最小値であることを示す。任意の $b \in B$ に対して $s \leq b$ であることを示せばよい。$b \in B$ であれば、これは A の上界である。上限は上界の最小なので、$s \leq b$ である。

A が最大元をもつとき、B は最小元を持たないことを示す。もし B が最小元を持つならば、それらの平均を考えると矛盾する。 □

逆にデデキンドの公理から連続の公理を証明することもできる。これは練習問題としよう。

問題 2.16. デデキンドの公理から連続の公理を導く。

考え方. 上に有界で空でない $A \subset \mathbb{R}$ が上限を持つことを言いたい。$A' = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a$となる$a \in A$が存在する$\}$ とする。$A \subset A'$ であるから、A' は空集合ではない。また、A は上に有界なので、上界 u が存在する。$u+1$ も上界で $u+1 \notin A$ であり、$u+1$ は A' の上界でもある。A' の補集合を B とすると $u+1 \in B$ であり、(A', B) は切断である。デデキンドの公理から、A' の最大値または B の最小値が存在するが、これが

A の上限を与えることを証明できる。

命題 2.17 (アルキメデスの原理)**.** 任意の実数 a に対し、$a < n$ を満たす整数 n が存在する。

考え方. $a < 0$ のときは 0 が条件をみたす。$a \geq 0$ とする。a に対し $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq a\}$ とする。A は a を上界にもつから上に有界で、$0 \in A$ なので空でない。よって $\sup A = s$ が存在する。背理法で示す。このとき $A = \mathbb{Z}$ である。上限の性質より $s - 1 < m$ なる $m \in \mathbb{Z}$ が存在するので矛盾する。これに対し $s < m + 1$ であるが $m + 1 \in \mathbb{Z}$ なので $s = \sup A$ に矛盾する。

証明. □

系 2.18. $A = \{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ とする。$\inf A = 0$ である。

命題 2.19 (有理数の稠密性)**.** 任意の実数 x, y に対して $x < r < y$ となる有理数 r が存在する。

有理数でもアルキメデスの原理は満たす。有理数に数をたくさん付け加えたものが実数だが、有理数の近くにしか増えてないということを言っている。

考え方. 整数の存在に帰着。$x - y$ の幅が 1 より大きければ、x の整数部分 $+1$ は x と y の間の整数。$x - y$ の幅が 1 より小さければ $N(x - y)$ を考える。

実数は 10 進展開でき、逆にそれによって実数を定めることができる。$x \in \mathbb{R}$ に対し、アルキメデス性から $\{n \in \mathbb{N} \mid n < x\}$ は有限なので最大が取れる。これを x の整数部分という。x に対し a_0 を整数部分とする。a_1 を $10x$ の整数部分から $10a_0$ を引いたものとする。これは 0 以上 9 以下の整数になる。a_2 を $10^2 x$ の整数部分から $10^2 a_0 + 10a_1$ を引いたものとする。以下これを繰り返して a_n とする。これにより、数列 (a_n) が定まる。このとき、$\sup\{\sum_{n=0}^{m} \dfrac{a_n}{10^n} \mid m \in \mathbb{N}, m > 0\} = x$ であることが証明できる。

命題 2.20 (10 進小数展開の収束)**.** 数列 a_n を $a_n = 0, 1, \ldots, 9$ で定める。これに対し、実数 b であって、任意の m に対し

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{a_n}{10^n} \leq b \leq \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^m}$$

をみたすものが存在する。

考え方. $A = \{\sum n = 0^m \frac{a_n}{10^n} \mid m \in \mathbb{N}\}$ とする。$\sup A = x$ であることを証明する。まず x が上界であること。次に任意の $\epsilon > 0$ に対して $x - \epsilon < a$ となる $a \in A$ が存在すること。これは、ϵ に対して $\dfrac{1}{10^m} < \epsilon$ となる m がとれるため、これを使えばよい。

例 2.21. $1 = 0.9999\cdots$ であることを説明しよう。これの右辺を $A = \{\sum_{n=0}^{m} \dfrac{9}{10^n} \mid m \in \mathbb{N}, m \neq 0\}$ の $\sup A$ と解釈する。1 はこの集合の上界であり、任意の $\epsilon > 0$ に対して $1 - \epsilon < a \leq 1$ となる $a \in A$ が存在する。

逆に 10 進小数展開の収束とアルキメデスの公理から連続の公理を導くことができる。概略を以下で説明する。

上に有界で空でない A に上限が存在することを示す。まず A の上界 M を取り、アルキメデスから M は整数とできる。A の上界である整数全体の集合は下に有界で空でないので最小が存在する。それを M と取りなおす。$M - 1$ は A の上界ではない。つまり $M - 1 < a_0 < M$ なる a_0 が取れる。小数第一位まで同じよう

に A を挟む。以下繰り返すと数列が定まるので、10 進小数展開の収束から実数 b が定まる。これが $\sup A$ であることを証明できる。

3　関数の連続性

関数の連続性を定義する前に、関数とは何かについて確認しておこう。

まず、一つ記号を導入する。開区間 (a,b) とは $\mathbb{R}$ の部分集合で、以下の 4 パターンのいずれかを表す。

1. 実数 a,b に対して $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$
2. 実数 a に対して $(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<a\}$
3. 実数 a に対して $(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$
4. 実数全体 $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$

(a,b) という記号は座標と紛らわしいが、今回は座標は使わない。以下では断りなく (a,b) と書いたら上の 4 つのいずれかを意味するものとする。

定義 3.1 (関数)**.** 関数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ とは、任意の $x\in(a,b)$ に対して $y=f(x)$ となる $y\in\mathbb{R}$ がただ一つ定まっていることをいう。(a,b) のことを f の定義域という。

関数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ と言ったときには、$x\in(a,b)$ つまり $a<x<b$ である実数 x に対して実数 $f(x)\in\mathbb{R}$ が具体的にどう計算するかは別にして指定されている。また、関数を定義するためにはすべての $x\in(a,b)$ に対して $f(x)\in\mathbb{R}$ を一通りに定める方法を指定する。このときには一意的に存在することさえ言えればよく、どのように計算するかなどについては気にしない。

高校までだと x 軸、y 軸は固有名詞的に使われていて、関数も $y=f(x)$ という書き方が多かった。上の定義では x,y は束縛変数であるので、文字は何を使っても良い。例えば f を $y\in(a,b)$ に対して $f(y)=y^2$ とする、と書いても同じこと。関数の x での値 $f(x)$ と関数の名前 f を区別する。

例えば関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x)=x^2$ として定義する、というのと、関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $a\in\mathbb{R}$ に対して $f(a)=a^2$ として定義する、というのは、全く同じ意味の文章になり、全く同じ関数を定義していると考える。

関数を記述するときには定義域を先に決めており、可能な限り最大にとるわけではない。実際には定義域は自由に小さく取り替えることができる。未知の関数についても扱えるような一般論を考えたいので、定義域を先に決めておいた方が便利なことが多い。例えば、ある定義域で定義された関数全体、のようなものを考える。あるいは、どのような定義域を持つかによって、関数の性質が変わる。具体的な関数に興味があるときには、関数に対して固有の定義域があるというよりは場合に応じて定義域を小さくする。

上では定義域を開区間としたが、実際にはそうでなくてもよい。今回は、定義域が開区間であるか、または開区間の和である場合のみを考える。実数全体 $\mathbb{R}$ や a 未満の実数全体 $\{x\in\mathbb{R}\mid x<a\}$、$a$ より大きな実数全体 $\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\}$ も開区間。$(-\infty,a),(a,\infty),(-\infty,\infty)$ という記号も**形式的に**用いる。$\infty,-\infty$ という実数が存在するわけではないことに注意せよ。

3.1　関数の連続性

それでは、関数の連続性を $\epsilon\delta$ 論法を用いて定義しよう。

定義 3.2 (関数の連続性)**.** 関数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ が $c\in(a,b)$ で連続であるとは、任意の実数 $\epsilon>0$ に対し、ある実数 $\delta>0$ が存在し、任意の $x\in(a,b)$ に対し、$|x-c|<\delta$ ならば $|f(x)-f(c)|<\epsilon$ が成り立つことをいう。

また関数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ が連続であるとは、任意の $x\in(a,b)$ について f が x で連続なことをいう。

$c\in(a,b)$ で連続なことは形式化すると

$$\forall\epsilon>0(\exists\delta>0(\forall x\in(a,b)(|x-c|<\delta\to|f(x)-f(c)|<\epsilon)))$$

となる。

任意量化を省略したならばを使って書くと

$$\forall\epsilon>0(\exists\delta>0(|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(c)|<\epsilon))$$

となる。δ は小さくできるので、定義域については心配しなくてよい。

定義域全体で連続なことを形式化すると

$$\forall c\in(a,b)(\forall\epsilon>0(\exists\delta>0(\forall x\in(a,b)(|x-c|<\delta\to|f(x)-f(c)|<\epsilon))))$$

となる。

定義に慣れるために、簡単な連続関数の例をいくつか紹介しよう。

例 3.3 (定数関数の連続性)**.** 実数 $a\in\mathbb{R}$ を一つとる。この a を用いて関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x)=a$ とすることにより定める。このとき、f は任意の $c\in\mathbb{R}$ で連続である。このことを定義にしたがって証明してみよう。

まずは考え方を説明する。最終的に示したいのは $|f(x)-f(c)|<\epsilon$ とできるかどうか。f の定義によればどのような x に対しても $|f(x)-f(c)|=0$ である。ところが $0<\epsilon$ はそもそも仮定されているため任意の x について $|f(x)-f(c)|<\epsilon$ が成り立つ。なので δ はどうとってもよいが、存在を明確にするために $\delta=1$ とおく。あえて仮定を強めても成立することには変わりない。より一般に δ は小さく取り直してもよい。これをふまえて証明を書いてみる。

$c\in\mathbb{R}$ とする。$\epsilon>0$ とする。$\delta=1$ とおく。このとき、$|x-c|<1$ ならば $|f(x)-f(c)|=0<\epsilon$ が成り立つ。よって、$|x-c|<\delta$ ならば $|f(x)-f(c)|=0<\epsilon$ が成り立つような δ の存在が示された。ϵ は任意にとれるので、このことから f が c で連続である。c は任意にとれるので、f は連続である。

例 3.4. 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x)=x$ とすることにより定める。これが任意の $c\in\mathbb{R}$ で連続なことを証明しよう。

まずは考え方を説明する。最終的に示すべき式は $|f(x)-f(c)|<\epsilon$ である。ところが $|f(x)-f(c)|=|x-c|$ は δ を使って小さくできるので、$\delta=\epsilon$ とおけば仮定と結論が同じ式になるため $|x-c|<\delta$ ならば $|f(x)-f(c)|<\epsilon$ は成立する。これをふまえて証明を書いてみる。

$c\in\mathbb{R}$ とする。$\epsilon>0$ とする。$\delta=\epsilon$ とおく。これに対し、$|x-c|<\delta$ ならば $|f(x)-f(c)|=|x-c|<\delta=\epsilon$ である。よって、$|x-c|<\delta$ ならば $|f(x)-f(c)|=0<\epsilon$ が成り立つような δ の存在が示された。ϵ は任意にとれるので、このことから f が c で連続である。c は任意にとれるので、f は連続である。

連続でない例もやってみよう。

例 3.5. 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

で定める。これはグラフを見れば当たり前のように思うが、0 で連続ではない。関数の連続性の定義を直感的に説明すると、次のように理解できる。x の動く範囲を 0 の周りでどれほど小さくしたとしても、$f(x)$ の動く範囲は 1 より小さくできない。

連続でないことはどう形式的に表されるかを考えよう。量化子のついた命題の否定は以下のように考えることができた。

- 「任意の ϵ に対して P」の否定は「P でない ϵ が存在する」である。
- 「Q となる δ が存在する」の否定は「任意の δ に対して Q でない」である。
- 「P ならば Q」の否定は「P かつ Q でない」である。
- 「$P(x) \Rightarrow Q(x)$」の否定は「$P(x)$ かつ $Q(x)$ でないような x が存在する」である。

1. 「任意の実数 $\epsilon > 0$ に対し、ある実数 $\delta > 0$ が存在し、任意の $x \in (a,b)$ に対し、$|x-c| < \delta$ ならば $|f(x)-f(c)| < \epsilon$ である」の否定は、「「ある実数 $\delta > 0$ が存在し、任意の $x \in (a,b)$ に対し、$|x-c| < \delta$ ならば $|f(x)-f(c)| < \epsilon$」でない $\epsilon > 0$ が存在する」である。
2. 「ある実数 $\delta > 0$ が存在し、任意の $x \in (a,b)$ に対し、$|x-c| < \delta$ ならば $|f(x)-f(c)| < \epsilon$」の否定は「任意の $\delta > 0$ に対して「任意の $x \in (a,b)$ に対し、$|x-c| < \delta$ ならば $|f(x)-f(c)| < \epsilon$」でない」である。
3. 「任意の $x \in (a,b)$ に対し、$|x-c| < \delta$ ならば $|f(x)-f(c)| < \epsilon$」の否定は「「$|x-c| < \delta$ ならば $|f(x)-f(c)| < \epsilon$」でない $x \in (a,b)$ が存在する」である。
4. 「$|x-c| < \delta$ ならば $|f(x)-f(c)| < \epsilon$」の否定は「$|x-c| < \delta$ かつ $|f(x)-f(c)| \geq 0$」である。

まとめると、f が c で連続でないことは、ある $\epsilon > 0$ が存在し、任意の $\delta > 0$ にたいし、$|x-c| < \delta$ かつ $|f(x)-f(c)| \geq 0$ であるような $x \in (a,b)$ が存在する、ということになる。

形式的に否定の計算をしてみよう。論理式の否定を外側から順番に計算していくと次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\neg(\forall\epsilon > 0(\exists\delta > 0(\forall x \in (a,b)(|x-c| < \delta \to |f(x)-f(c)| < \epsilon))))\\
\exists\epsilon > 0 \neg(\exists\delta > 0(\forall x \in (a,b)(|x-c| < \delta \to |f(x)-f(c)| < \epsilon))))\\
\exists\epsilon > 0(\forall\delta > 0 \neg(\forall x \in (a,b)(|x-c| < \delta \to |f(x)-f(c)| < \epsilon))))\\
\exists\epsilon > 0(\forall\delta > 0(\exists x \in (a,b)\neg(|x-c| < \delta \to |f(x)-f(c)| < \epsilon))))\\
\exists\epsilon > 0(\forall\delta > 0(\exists x \in (a,b)(|x-c| < \delta \land |f(x)-f(c)| \geq \epsilon))))
\end{aligned}
$$

結果として、「ある $\epsilon > 0$ に対して、任意の $\delta > 0$ に対して $x \in (a,b)$ であって $|x-c|$ かつ $|f(x)-f(c)| \geq \epsilon$ であるような x が存在する、ような ϵ が存在する。」ことが f が c で連続でないということになる。

改めて先ほどの例を検討しよう。

例 3.6. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$
f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}
$$

で定める。これは 0 で連続でないことを証明する。

$\epsilon = 1$ とおく。$\delta > 0$ とする。$x = \dfrac{\delta}{2}$ とおく。すると、$|x| < \delta$ かつ $|f(x)| \geq 1$ となる。よって、ある $\epsilon > 0$ が存在し、任意の $\delta > 0$ に対し、$|x-0| < \delta$ かつ $|f(x)-f(0)| \geq \epsilon$ となる x が存在することが示された。

もう少しだけ複雑な例をやってみよう。

例 3.7. $f(x) = x^2$ で定まる関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $c \in \mathbb{R}$ で連続なことを証明する。まずは考え方を説明しよう。与えられた ϵ に対して $|x^2 - c^2| < \epsilon$ を示したい。$|x^2 - c^2| = |x - c||x + c|$ である。$|x - c|$ は δ を決めればいくらでも小さくできる。このとき実は $|x|$ も $|x + c|$ も小さくできる。$|x - c| < \delta$ のとき、$|x + c| \leq |x| + |c| < 2|c| + \delta$ である。そこで、$2|c|\delta + \delta^2 < \epsilon$ となるように δ を取れればよい。ここで、二次不等式を解こうと思わなくてよい！ 不等式は同値でなくてもよく、いくらでも小さくしていいので、例えば $2|c|\delta < \dfrac{\epsilon}{2}$ かつ $\delta^2 < \dfrac{\epsilon}{2}$ となるようにとれればよい。二つ目の不等式の考え方としては、基本的には ϵ は小さい数を念頭に置いているので $\delta < \epsilon$ で成立するが、実際には ϵ が大きい時のことも考慮すると $\delta = \min\{\dfrac{\epsilon}{2}, \dfrac{1}{4}\}$ にすればよい。

別の考え方を説明しよう。$|x^2 - c^2| = |x^2 - xc + xc - c^2| = |x(x - c) + c(x - c)|$ とする。三角不等式を用いる。$|x(x - c) + c(x - c)| \leq |x||x - c| + |c||x - c|$ である。ここで、$|x| < |c| + \delta$ とできるので、あとは上と同様。

証明しよう。$c \in \mathbb{R}$ とする。$\epsilon > 0$ とする。$\delta = \min\{\dfrac{\epsilon}{4|c|}, \dfrac{\epsilon}{2}, \dfrac{1}{4}\}$ とおく。これに対し、$2|c|\delta < \dfrac{\epsilon}{2}$ かつ $\delta^2 < \dfrac{\epsilon}{2}$ であり、$2|c|\delta + \delta^2 < \epsilon$ である。$|x - c| < \delta$ とする。このとき、三角不等式により $|x + c| = |(x - c) + 2c| \leq |x - c| + |2c|$ であり、$|x^2 - c^2| = |x + c||x - c| < \delta^2 + 2|c|\delta < \epsilon$ である。よって、$|x - c| < \delta$ ならば $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ となる。以上により f が c で連続なことがわかり、c は任意にとれるので f は連続である。

δ を作るときには、ϵ も定数という扱いでよい。

問題 3.8. $f(x) = x^3$ が連続なことを上と同様に二通りの考え方で証明しよう。

考え方. $x^3 - c^3$ を因数分解して考える。$x^3 = x \times x^2$ とみなして考える。

解答.

次の例では、三角関数については既に知っていることにする。特に、ある正の実数 π が存在して、任意の整数 n に対して $\sin(n\pi + \dfrac{\pi}{2}) = 0$ であることと、任意の実数 x に対して $-1 \leq \sin x \leq 1$ であることを用いる。

例 3.9. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

により定める。f は 0 で連続でないことを証明しよう。

$\epsilon = \dfrac{1}{2}$ とおく。$\delta > 0$ とする。アルキメデスの原理により $n\pi + \dfrac{\pi}{2} > \dfrac{1}{\delta}$ となる正の整数 n が存在するのでそのようなものを一つとり n_0 とする。このとき、$x = \dfrac{1}{n_0\pi + (\pi/2)}$ とおくと $|x| < \delta$ であって $\sin \dfrac{1}{x} = \pm 1$ となり、$|f(x) - f(0)| = 1 \geq \epsilon$ である。δ は任意にとれるので、任意の δ に対して $|x - 0| < \delta$ かつ $|f(x) - f(0)| \geq \epsilon$ であるような x が存在することが示された。よって、f は 0 で連続ではない。

実は上の例では $f(0)$ をどう定めようとも 0 で連続にはできないことも証明できる。

問題 3.10. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

により定める。f は 0 で連続でないことを証明しよう。

考え方.

解答.

例 3.11. 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

により定める。このとき、f は 0 で連続である。

まず考え方を説明する。示したいのは $|x\sin\dfrac{1}{x}-0|<\epsilon$ であるが、$|\sin\dfrac{1}{x}|\leq 1$ であるから、$|x|<\epsilon$ を示せばよい。そこで $\delta=\epsilon$ とすれば示したい式そのものを仮定できる。これを踏まえて証明しよう。

$\epsilon>0$ とする。$\delta=\epsilon$ とおく。$|x-0|<\delta$ とする。このとき、$|f(x)-f(0)|=|f(x)|\leq|x|<\delta=\epsilon$ となる。よって f は 0 で連続である。

関数の極限を定義し、極限を用いて関数の連続性を記述する。関数 f が $x\to c$ で実数 b に収束することをまず定義する。ここで、関数 f の定義域に c が属さなくともよい。ここでは定義域が開区間とは限らない関数を考えていることに注意しよう。

定義 3.12 (関数の極限)**.** 関数 $f:(a,c)\cup(c,b)\to\mathbb{R}$ が $x\to c$ で d に収束するとは、任意の実数 $\epsilon>0$ に対し、ある実数 $\delta>0$ が存在し、任意の $x\in(a,b)$ に対し、$0<|x-c|<\delta$ ならば $|f(x)-d|<\epsilon$ となること。

このような d は存在すればただ一つであることを示せる。この d のことを

$$\lim_{x\to a}f(x)$$

と表す。

命題 3.13. 極限は存在すれば一意的である。

考え方. d_1,d_2 が共に条件をみたすと仮定する。$\epsilon=\dfrac{1}{n}$ とおく。これに対し、仮定からある $\delta_1,\delta_2>0$ が存在して、任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $0<|x-c|<\delta_1$ ならば $|f(x)-d_1|<\dfrac{1}{n}$ かつ任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $0<|x-c|<\delta_2$ ならば $|f(x)-d_2|<\dfrac{1}{n}$ が成り立つ。$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2$ とおくと、任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $0<|x-c|<\delta$ ならば $|f(x)-d_1|<\dfrac{1}{n}$ かつ $|f(x)-d_2|<\dfrac{1}{n}$ が成り立つ。$0<|x-c|<\delta$ を満たす実数 x を一つとり x_0 とおく。これに対し、$|f(x_0)-d_1|<\dfrac{1}{n}$ かつ $|f(x_0)-d_2|<\dfrac{1}{n}$ であるので、$|d_1-d_2|<\dfrac{2}{n}$ である。これが任意の n に対して成立するので、$d_1=d_2$ である。

上の定義で $0<|x-c|<\delta$ の代わりに $x=c$ も入れて $|x-c|<\delta$ とするとどういう問題がおこるか。

例 3.14. 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$$

により定める。すると、任意の実数 $\epsilon>0$ に対し、ある実数 $\delta>0$ が存在し、任意の $x\in(a,b)$ に対し、

$|x-0|<\delta$ ならば $|f(x)-d|<\epsilon$ となるような d は存在しない。つまり、上の定義を $|x-c|<\delta$ に変えてしまうと、$\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない。

この関数の極限を用いて関数の連続性を表すことができる。

命題 3.15. f が c で連続であるならば $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ であり、逆も正しい。

考え方. 定義に従って、$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ を書き直すと、任意の実数 $\epsilon>0$ に対し、ある実数 $\delta>0$ が存在し、$0<|x-c|<\delta$ ならば $|f(x)-f(c)|<\epsilon$ となること。

一方で c で連続であることは、任意の実数 $\epsilon>0$ に対し、ある実数 $\delta>0$ が存在し、$|x-c|<\delta$ ならば $|f(x)-f(c)|<\epsilon$ となること。

ほとんど同じだが、$0=|x-c|$ の場合、、つまり $x=c$ の分だけずれている。複雑な論理式なので、慣れないとどっちが強いことを言っているのか分かりにくいが、下から上は論理式の操作のみで示せる。上から下は実数の性質を用いて考えるが、$x=c$ ならば $f(x)=f(c)$ なので、$|f(x)-f(c)|<\epsilon$ となるのはよい。

量化子の扱いに慣れるために少々くどい書き方にしたが、実際にはもっと簡潔に書かれることが多いだろう。

証明. まず、c で連続であることを仮定して $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ であることを示す。$\epsilon>0$ とする。このとき、f が c で連続であるという仮定から $\delta>0$ が存在して $|x-c|<\delta$ ならば $|f(x)-f(c)|<\epsilon$ が成り立つので、そのようなものを一つとり δ_0 とする。この δ_0 に対し、$0<|x-c|<\delta_0$ とすると、上の条件から $|f(x)-f(c)|<\epsilon$ となる。よって、δ の存在が言えたので、$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ である。

次に $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ を仮定して c で連続であることを示す。$\epsilon>0$ とする。このとき、$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ であることから、 □

関数の連続性や極限の定義は有理数だけでもできる。連続性や極限の定義に現れる ϵ,δ の動く範囲も実際には有理数だけでよい。

3.2 連続関数の作り方

色々な関数が連続であることを確かめるため、一般論を用意する。連続関数の四則演算によって定まる関数が連続となることを示す。これを繰り返し使うことで、上の例で見た $f(x)=c, f(x)=x$ で定まる関数の連続性から多項式関数の連続性が証明できる。

命題 3.16. 関数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ と関数 $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ に対し、以下のいずれかが成り立つ。

1. 関数 $f+g:(a,b)\to\mathbb{R}$ を $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ で定めると、これは連続である。
2. 関数 $fg:(a,b)\to\mathbb{R}$ を $(fg)(x)=f(x)g(x)$ で定めると、これは連続である。
3. 関数 $g\circ f:(a,b)\to\mathbb{R}$ を $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ で定めると、これは連続である。

それぞれ、f と g の和、積、合成と呼ばれる。

実際に $\epsilon\delta$ 論法を用いて何かを証明するときに、δ を取るのが難しく、また不等式の扱いも難しい。量化子入りの仮定を使うときに、うまく取り替える必要がある。仮定と結論が同値である必要がなく、式変形でぎりぎりを考えなくてもよく、同値な変形をする必要もない。例えば $x<1$ ならば $x<2$ を示せ、のようなものもある。不等式を示すとき、間にいい感じの式を入れると証明できることが多いが、このいい感じの式を見つける

のが難しい。

微積分で現れる不等式を示す上では、三角不等式が重要になる。

命題 3.17 (三角不等式)**.**

$$|x+y| \le |x| + |y|$$

上は $x, y \in \mathbb{R}$ で $|x|$ は絶対値である。

x, y が平面ベクトルで $|x|$ が x の長さとすると、三角形の二辺の長さの和は残りの一辺より長いという式になる。これが三角不等式という名前の由来である。ベクトルの長さは距離の概念へと抽象化されるが、そこでは三角不等式が公理となる。

考え方. $f+g$ が c で連続であることを示したい。そのためには $|(f(x)+g(x))-(f(c)+g(c))| < \epsilon$ をいいたい。x を制限すれば $|f(x)-f(c)|, |g(x)-g(c)|$ はいくらでも小さくできることを使いたい。そこで、$|(f(x)+g(x))-(f(c)+g(c))|$ を上の二つの式に結びつける。三角不等式を用いると

$$\begin{aligned}|(f(x)+g(x))-(f(c)+g(c))| &= |(f(x)-f(c))+(g(x)-g(c))| \\ &\le |f(x)-f(c)| + |g(x)-g(c)|\end{aligned}$$

となることがわかるので、これで目的の不等式を証明できる。$|(f(x)+g(x))-(f(c)+g(c))| < \epsilon$ をいうためには、$|f(x)-f(c)| < \dfrac{\epsilon}{2}$ かつ $|g(x)-g(c)| < \dfrac{\epsilon}{2}$ であれば十分。ここで、f, g の連続性の仮定を使うところで ϵ を取り替えるところがポイント。つまり、連続性が任意の ϵ に対する条件であったことが使える。

fg が c で連続であることを示したい。そのためには $|(f(x)g(x))-(f(c)g(c))| < \epsilon$ をいいたい。x を制限すれば $|f(x)-f(c)|, |g(x)-g(c)|$ はいくらでも小さくできることを使いたい。そこで、$|(f(x)+g(x))-(f(c)+g(c))|$ を上の二つの式に結びつける。ここで、少し工夫して式変形をする。

$$\begin{aligned}f(x)g(x)-f(c)g(c) &= f(x)g(x)-f(c)g(x)+f(c)g(x)-f(c)g(c) \\ &= (f(x)-f(c))g(x)+f(c)(g(x)-g(c))\end{aligned}$$

と変形する。これを利用すると、$|f(x)g(x)-f(c)g(c)| < \epsilon$ とするためには、$|f(x)-f(c)||g(x)| < \dfrac{\epsilon}{2}$ かつ $|g(x)-g(c)||f(c)| < \dfrac{\epsilon}{2}$ を言えばよい。f, g についてはその x での値と c での値の差を小さくできる。$f(c)$ は今は定数であるので、二つ目の不等式は $|g(x)-g(c)| < \dfrac{\epsilon}{2|f(c)|}$ とすればよい。ただし、$f(c)=0$ のときは割り算できないが、この場合は常に $|g(x)-g(c)||f(c)| < \dfrac{\epsilon}{2}$ が成立するので気にしなくてよい。$g(x)$ は定数ではないが、g の連続性から $g(c)$ の近くであることは言える。例えば $|g(x)| < |g(c)|+1$ とすることはできる。こうしておくと、$|f(x)-f(c)||g(x)| < |f(x)-f(c)|(|g(c)|+1) < \dfrac{\epsilon}{2}$ とするためには、$|f(x)-f(c)| < \dfrac{\epsilon}{2(|g(c)|+1)}$ とすればよい。結局 x についての条件は、

$$\begin{aligned}|g(x)-g(c)| &< \frac{\epsilon}{2|f(c)|} \\ |g(x)| &< |g(c)|+1 \\ |f(x)-f(c)| &< \frac{\epsilon}{2(|g(c)|+1)}\end{aligned}$$

の三つで、これらはそれぞれ f, g の連続性から適当な δ をとって $|x-c| < \delta$ とすれば成立する。

$g \circ f$ が c で連続であることを示したい。$|g(f(x))-g(f(c))| < \epsilon$ をいいたい。g の連続性で、$|g(y)-g(f(c))|$ は小さくできる。$|y-f(c)| < \delta$ とする。$y = f(x)$ とすれば f の連続性でこれも小さくできる。

証明. $f+g$ が c で連続であることを示す。$\epsilon>0$ とする。f,g はそれぞれ連続であるので、$\dfrac{\epsilon}{2}$ に対してある δ_1,δ_2 が存在して、$|x-c|<\delta_1$ ならば $|f(x)-f(c)|<\dfrac{\epsilon}{2}$ であり、$|x-c|<\delta_2$ ならば $|g(x)-g(c)|<\dfrac{\epsilon}{2}$ である。ここで、$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ とすると、$|x-c|<\delta$ ならば $|f(x)-f(c)|<\dfrac{\epsilon}{2}$ かつ $|g(x)-g(c)|<\dfrac{\epsilon}{2}$ である。さらにこのとき、

$$\begin{aligned}|(f(x)+g(x))-(f(c)+g(c))| &= |(f(x)-f(c))+(g(x)-g(c))|\\ &\le |f(x)-f(c)|+|g(x)-g(c)|\\ &< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\end{aligned}$$

となる。

fg が c で連続であることを示す。$\epsilon>0$ とする。

f は連続なので、$|x-c|<\delta$ ならば $|f(x)-f(c)|<\dfrac{\epsilon}{2(|g(c)|+1)}$ となるような δ が存在する。そのようなものを一つとり、δ_1 とおく。g は連続なので、$|x-c|<\delta$ ならば $|g(x)|<|g(c)|+1$ となるような δ が存在する。そのようなものを一つとり、δ_2 とおく。また、$|x-c|<\delta$ ならば $|g(x)-g(c)|<\dfrac{\epsilon}{2(|f(c)|+1)}$ となるような δ が存在する。そのようなものを一つとり、δ_3 とおく。

$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ とおく。$|x-c|<\delta$ とおく。このとき、$|x-c|<\delta_1$ かつ $|x-c|<\delta_2$ かつ $|x-c|<\delta_3$ である。すると、

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(c)g(c)| &= |f(x)g(x)-f(c)g(x)+f(c)g(x)-f(c)g(c)|\\ &= |(f(x)-f(c))g(x)+f(c)(g(x)-g(c))|\\ &\le |g(x)||f(x)-f(c)|+|f(c)||g(x)-g(c)|\\ &\le |g(x)||f(x)-f(c)|+|f(c)+1||g(x)-g(c)|\\ &\le (|g(c)+1|)\frac{\epsilon}{2(|g(c)|+1)}+|f(c)+1|\frac{\epsilon}{2(|f(c)+1|)}\\ &\epsilon\end{aligned}$$

となるため、$|x-c|<\delta$ ならば $|f(x)g(x)-f(c)g(c)|<\epsilon$ となるような δ が存在することがわかった。ϵ は任意にとれるので、fg は c で連続である。

$g\circ f$ が c で連続なことを示す。$\epsilon>0$ とする。g が連続なので、$|x-f(c)|<\delta$ ならば $|g(x)-g(f(c))|<\epsilon$ であるような $\delta>0$ が存在するのでそのようなものを一つとり δ_0 とする。f が連続なので、$|x-c|<\delta$ ならば $|f(x)-f(c)|<\delta_0$ であるような $\delta>0$ が存在するので、そのようなものを一つとり δ_1 とする。このとき、$|x-c|<\delta_1$ ならば、$|f(x)-f(c)|<\delta_0$ であり、さらに $|g(f(x))-g(f(c))|<\epsilon$ である。よって、$|x-c|<\delta$ ならば $|(g\circ f)(x)-(g\circ f)(c)|<\epsilon$ である δ が存在することを示された。ϵ は任意にとれるので、$g\circ f$ は c で連続である。 $\square$

4 中間値の定理

それでは目標であった中間値の定理を証明しよう。

定理 4.1 (中間値の定理)**.** 関数 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ が連続であるとする。$c, d \in (a, b)$ で $c < d$ であるものに対して $f(c) \leq 0, f(d) \geq 0$ であるとする。このとき $f(e) = 0$ となるような実数 e で $c \leq e \leq d$ であるものが存在する。

関数の値が 0 でなく、$f(c) \leq k, f(d) \geq k, f(e) = k$ という状況でも同様の定理が成り立つ。また、$f(c) \leq 0, f(d) \geq 0$ の場合にも同様の定理が成り立つ。それぞれ、f の代わりに $-f$ や $f + k$ を考えればよい。

この定理を証明するためには、関数の連続性と実数の連続性を両方使う。関数が連続でない場合には次のような反例が存在する。

例 4.2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ で定める。$f(-1) \leq 0, f(1) \geq 0$ であるが、$f(e) = 0$ となるような実数 e で $-1 \leq e \leq 1$ となるものは存在しない。

また、定義域が開区間ではない場合には次のような反例が存在する。

例 4.3. $f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ を $f(x) = \dfrac{1}{x}$ で定めると、これは連続関数である。$f(-1) \leq 0, f(1) \geq 0$ であるが、$-1 \leq e \leq 1$ で $f(e) = 0$ となる実数 e は存在しない。

後で応用するため、中間値の定理の精密化を同時に証明する。

定理 4.4 (中間値の定理の精密化)**.** 関数 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ が連続であるとする。$c, d \in (a, b)$ で $c < d$ であるものに対して $f(c) \leq 0, f(d) \geq 0$ であるとする。このとき $f(e) = 0$ となるような実数 e で $c \leq e \leq d$ であり、かつ任意の $x \in (c, e)$ で $f(x) \neq 0$ であるものが存在する。

考え方. ある条件を満たす実数が存在することを、上限の存在を利用して証明する。そこで、どのような集合の上限を考えればよいかを考える

やりたいことは、f のグラフと x 軸が**最初に**交わるところを探すこと。最初に交わるというのは、交わっていて、かつ交わっている中で最小ということだが、これを上限を使った形に言い換える必要がある。最初に交わる点よりも小さいところでは交わっておらず、さらにそれより小さいところでも交わっていない。つまり、x より左ではずっと f の値が負であるような点 x たちの中で「ぎりぎり一番大きい」ところが最初に交わるところであると言えそうである。

x より左でずっと負であるという条件は「任意の $y < x$ に対して $f(y) < 0$」となる。これは y について量化されているので、x についての条件である。(y と書いても $y = f(x)$ ということではない、あるいは y 軸とは関係ない。)形式化すると $\forall y(y \in \mathbb{R} \land y < x \to f(y) < 0)$ ということ。

この条件を満たす集合を A としよう。

$$A = \{x \in [c, d) \mid \text{任意の} y \in \mathbb{R} \text{に対し、} y < x \text{ならば} f(y) < 0\}$$

(この「任意の」は二通りの解釈がみづらい。)A が上限を持つことを示したいので、空でなく上に有界であることを言えば十分である。まず $a \in A$ である。というのも、仮定が空なので。また、b はこれの上界である。

以上から、実数の連続性を用いて $\sup A$ が存在することがわかる。

$\sup A = c$ とし、この c が結論にある条件をみたすことを示す。この時点では $c \in A$ とは限らないので注意しよう。ここから関数の連続性を用いる。示したいのは $f(c) = 0$ であることと、$x < c$ ならば $f(x) < 0$ であること。

上の考え方を踏まえて、中間値の定理の精密化を証明する。

証明. 部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ を以下で定義する。

$$A = \{x \in [c, d) \mid y \in (c, d)\text{かつ}y < x\text{ならば}f(y) < 0\}$$

$c \in A$ であるため A は空でなく、d は A の上界であるため A は上に有界である。よって、実数の連続性から $\sup A$ が存在するので $s = \sup A$ とする。以下で、この s が結論に現れる e の条件をみたすことを示そう。

まず $x < s$ ならば $f(x) < 0$ であることを示そう。実数 x が $x < s$ であるとする。$s = \sup A$ に対して上限の性質を用いると、$x < y$ であるような $y \in A$ が存在するためそれを一つとり y_0 とおく。$y_0 \in A$ であるため、$x < y_0$ であることから $f(x) < 0$ であることがわかる。

次に $f(s) = 0$ であることを示そう。背理法で証明する。$f(s) \neq 0$ と仮定する。このとき、$f(s) < 0$ または $f(s) > 0$ であるので場合わけしてそれぞれ矛盾を導く。

まず $f(s) < 0$ の場合を考える。このとき、関数 f の連続性から $\epsilon = |f(s)|$ に対して、$s - \delta < x < s + \delta$ ならば $f(x) < 0$ となる $\delta > 0$ が一つ取れるので、それを δ_0 とおく。これに対し、$s + \delta_0 \in A$ を示す。$z \in A$ で $s - \delta_0 < z \leq s$ となるものが取れる。このとき、$y < z$ ならば $f(y) < 0$ であり、$s - \delta_0 < y < s + \delta_0$ ならば $f(y) < 0$ であるので、$y < s + \delta_0$ ならば $f(y) < 0$ である。よって $s + \delta_0 \in A$ であるが、$s < s + \delta_0$ であるので、s が A の上限であることに矛盾する。

次に $f(s) > 0$ の場合を考える。関数 f の連続性から $\epsilon = |f(s)|$ に対して、$s - \delta < x < s + \delta$ ならば $f(x) > 0$ となる $\delta > 0$ が一つ取れるので、それを δ_0 とおく。これに対し、$s - \delta < y < s$ である y を一つとると、$f(y) > 0$ である。一方で、$s = \sup A$ であるので、$y < z \leq s$ である $z \in A$ が存在する。この z に対し、$z \in A$ であり $y < z$ であるから $f(y) < 0$ である。これは矛盾。

いずれも矛盾するため、$f(c) = 0$ であることが示された。 $\square$

今回は上限の存在を連続性の公理とし、それを直接用いる証明を紹介した。

5 逆関数の存在と連続性

単調で連続な関数について、逆関数が存在することを中間値の定理を用いて証明する。例えば正の実数 a に対して平方根 $\sqrt{a}$ や n 乗根 $\sqrt[n]{a}$ が存在することを示すことができる。これを用いて指数関数を定義し、単調で連続なことを示す。さらにその逆関数としての対数関数を定義する。

定義 5.1 (単調性)**.** 関数 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ に対して以下の性質を定義する。

1. f が単調増加であるとは、任意の $a < s < t < b$ に対して $f(s) < f(t)$ が成り立つことをいう。
2. f 単調減少であるとは、任意の $a < s < t < b$ に対して $f(s) > f(t)$ が成り立つことをいう。
3. f が単調弱増加であるとは、任意の $a < s < t < b$ に対して $f(s) \leq f(t)$ が成り立つことをいう。
4. f が単調弱減少であるとは、任意の $a < s < t < b$ に対して $f(s) \geq f(t)$ が成り立つことをいう。

まずは、中間値の定理を用いて $\sqrt{2}$ が実数であることを示そう。より正確に言うと、$x^2 - 2 = 0$ が正の実数解をただ一つ持つことを示す。それによって、その唯一の正の実数解を $\sqrt{2}$ と定義することができる。

命題 5.2. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2 - 2$ により定める。このとき、$f(c) = 0$ となる $c > 0$ がただ一つ存在する。

考え方. ただ一つ存在することを、ただ一つであることと、存在することに分けて考える。存在することは中間値の定理を用いる。ただ一つであることは $f(c) = 0$ かつ $f(c') = 0$ ならば $c = c'$ であることを示せばよい。このために、f の単調性を用いる。$s < t$ ならば $f(s) < f(t)$ であることから $f(s) = f(t)$ ならば $s = t$ であることがわかる。

証明. まず $f(c) = 0$ となる $c > 0$ が存在することを示す。$f(x) = x^2 - 2$ とすることで、連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が定まる。$f(1) < 0$ かつ $f(2) > 0$ である。中間値の定理から $1 < c < 2$ かつ $f(c) = 0$ である $c \in \mathbb{R}$ が存在する。

ただ一つであることを示す。$f(c) = 0$ かつ $f(c') = 0$ であり、$c > 0, c' > 0$ であるとする。もし $c < c'$ であるならば $c^2 - 2 < c'^2 - 2$ であり、$c > c'$ ならば $c^2 - 2 > c'^2 - 2$ である。よって、$c \neq c'$ ならば $f(c) \neq f(c')$ であるが、これは $f(c) = f(c') = 0$ に矛盾する。よって $c = c'$ である。 □

ここでは一意性の証明を一般の状況を意識して単調性から示したが、$c^2 - 2 = c'^2 - 2$ から因数分解して $c = c'$ を導いてもよい。

より一般に正の実数 a に対して $x^2 - a = 0$ の正の解がただ一つであることがまったく同じ方法で証明できる。この正の解を $\sqrt{a}$ と表すことにする。関数 $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $g(x) = \sqrt{x}$ とすることにより定義できる。これは $f(x) = x^2$ の逆関数である。つまり、$y = f(x)$ であることと $x = g(y)$ であることが必要十分である。このことには、上で述べた解が存在することとただ一つであることの両方を用いている。この g が連続となり、また単調であることは以下の命題を用いて証明できる。

一般に単調で連続な関数に対して、その逆関数が存在し連続で単調であることを証明しよう。

命題 5.3. 関数 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ が単調増加で連続であるとする。$c = \inf\{f(x) \mid x \in (a, b)\}, d = \sup\{f(x) \mid x \in (a, b)\}$ とする。これらは $-\infty, \infty$ となる場合もあることに注意。

1. 任意の実数 t で $c < t < d$ であるものに対し、$t = f(s)$ かつ $a < s < b$ をみたす実数 s がただ一つ存在する。
2. 関数 $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ を $x \in (c, d)$ に対し、実数 $g(x) = y$ を $f(y) = x$ をみたすただ一つの $a < y < b$ なる実数 y とすることによって定める。このとき、g は単調増加で連続である。

考え方. $f(x) = x^2$ のときと同様に、f の連続性から中間値の定理を用いて $t = f(s)$ となる s の存在を示す。また、単調性を用いて $t = f(s)$ となる s の一意性を示す。

逆の連続性と単調性について。

g が s で連続なことを示す。示したいのは $|g(x) - g(s)| < \epsilon$ である。絶対値の条件は $s - \delta < x < s + \delta$ と $g(s) - \epsilon < g(x) < g(s) + \epsilon$ である。もし $g(s) - \epsilon, g(s) + \epsilon \in (a, b)$ であれば、$g(s) - \epsilon = g(u), g(s) + \epsilon = g(v)$ とできる。このとき、$g(u) < g(s) < g(v)$ なので、$f(g(u)) < f(g(s)) < f(g(v))$ であり、$u < s < v$ である。$\delta >$ をうまくとって $u < s - \delta < s < s + \delta < v$ とできる。$s - \delta < x < s + \delta$ であれば g の単調性により $g(u) < g(s - \delta) < g(x) < g(s + \delta) < g(v)$ となり、$|g(x) - g(s)| < \epsilon$ となる。

与えられた ϵ に対して、それより小さい ϵ' にあえて取り替えた上で δ の存在を示してもよい。というのも、$|g(x) - g(s)| < \epsilon'$ であれば $|g(x) - g(s)| < \epsilon' < \epsilon$ となるためである。そこで、$g(c) - \epsilon', g(c) + \epsilon'$ が (a, b) に入るように、必要ならば ϵ を取り替える。

証明. 条件をみたす s の一意性を示そう。$f(s) = f(s') = t$ と仮定する。このとき、もし $s \neq s'$ なら $s < s'$ または $s > s'$ であり、f の単調性から $f(s) < f(s')$ または $f(s') < f(s)$ となるが、$f(s) = f(s')$ に矛盾する。また、

条件をみたす s の存在を示そう。$c < t < d$ であることと $\inf, \sup$ の定義により、$f(u) < t < f(v)$ となる $u, v \in (a, b)$ が存在する。これに対し、中間値の定理により $f(s) = t$ となる $t \in (a, b)$ が存在する。

g の単調性。$f(a) \leq s < t \leq f(b)$ と仮定する。このとき、$g(s) < g(t)$ であることを示したい。$u = g(s), v = g(t)$ とおくと、g の定義から $f(u) = s, f(v) = t$ であり、$f(u) < f(v)$ である。もし、$u = v$ ならば $f(u) = f(v)$ であり、また f が単調なのでもし $u > v$ ならば $f(u) > f(v)$ であるため、いずれも矛盾する。よって $u < v$ であり、$g(s) < g(t)$ が示された。

g が $s \in (c, d)$ で連続であることを示す。$\epsilon > 0$ とする。このとき、必要であれば $\epsilon' \leq \epsilon$ を $g(s) - \epsilon', g(s) + \epsilon' \in (a, b)$ となるようにとる。これに対し、$g(s) - \epsilon' = g(u), g(s) + \epsilon' = g(v)$ となる $u, v \in (c, d)$ をとる。$g(u) < g(s) < g(v)$ であるので、f の単調性から $f(g(u)) < f(g(s)) < f(g(v))$ であり、f は g の逆関数であるから $u < s < v$ である。これに対し、$\delta > 0$ を $u < s - \delta < s + \delta < v$ となるようにとる。このとき、$s - \delta < x < s + \delta$ に対し、g の単調性から $g(u) < g(s - \delta) < g(x) < g(s + \delta) < g(v)$ となり、$g(s) - \epsilon' < g(x) < g(s) + \epsilon'$ となる。$\epsilon' \leq \epsilon$ であるので、$g(s) - \epsilon < g(x) < g(s) + \epsilon$ となる。以上で g が s で連続なことがわかった。 □

5.1 指数関数と対数関数

微積分で一般の関数についての性質を調べるのは、さまざまな現象を記述するため未知の関数について知ることが一つの目的である。以下では、すでによく知っているであろう指数関数と対数関数について、それについて知らなかったかのように、その定義と基本的な性質を特に中間値の定理や関数の連続性に関わる部分についてみていこう。

以下では $a > 1$ であるような実数 a を一つ固定し、実数 x に対して a^x を定義していこう。

まず x が正の整数のときは a を x 回かけたものとして、$x=0$ のときは 1 として、x が負の整数のときは $1/a^{-x}$ として定義する。次に x が有理数のときに a^x を定義する。まず正の整数 n に対する $a^{1/n}$ は a の n 乗根として定義する。このようなものがただ一つ存在することは上で見た通り。さらに、整数 n,m を用いて $x=m/n$ となるときは $(a^{1/n})^m$ と定義する。有理数の表示方法は一意的ではないので、この値が表示によらないことを確かめる必要があることに注意。ここまでで、有理数 x に対して a^x を定めた。これは指数法則を満たすことが証明できる。また x,y が有理数で $x<y$ のとき $a^x<a^y$ である。

さらに、これを実数 x に対する a^x まで拡張する。x を小数展開してその極限でやるというのも一つのやり方だが、今回は上限を用いて考える。

定義 5.4. 実数 $x\in\mathbb{R}$ に対し、部分集合 A_x を $A_x=\{a^y\mid y\in\mathbb{Q}\text{ かつ}y<x\}$ と定義する。これは空でなく上に有界である。A_x の上限が一意的に存在することから、これを用いて関数 $\exp_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $\exp_a(x)=\sup A_x$ と定義する。

$\exp_a(x)$ というのは普通の記号でいう a^x のことだが、有理数 x に対してはふた通りの表記が一致することを確かめないといけない。そのため、ここでは一旦別の記号として定義した。

命題 5.5. $x\in\mathbb{Q}$ のとき、$\exp_a(x)=a^x$ である。

これを示すために、次の補題を用意する。

補題 5.6. $x\in\mathbb{Q}$ に対し、$\inf\{a^x-a^y\mid y<x,y\in\mathbb{Q}\}=0$ である。

証明. $a^y<a^x$ より $a^x-a^y>0$ である。よって、0 は $\{a^x-a^y\mid y<x,y\in\mathbb{Q}\}$ の下界である。

任意の $\epsilon>0$ に対して $a^x-a^y<\epsilon$ となる $y\in\mathbb{Q},y<x$ が存在することを示す。

一方で、$a^x-a^y=a^x(1-a^{y-x})$ であり、アルキメデス性から、任意の ϵ に対して $b_n<\epsilon$ とできる。$y=x-\dfrac{1}{n}$ とすると、$a^{y-x}=a^{-1/n}$ である。

$a^{-1/n}=1-b_n$ とすると、$a^{1/n}=(1-b_n)^{-1}>1+b_n$ であり、$a>1+nb_n+\cdots$ となり、$a>1+nb_n$ となる。よって、$1-a^{-1/n}=b_n<\dfrac{a-1}{n}$ である。$a^x(1-a^{-1/n})<\dfrac{a^x(a-1)}{n}$ である。そこで、ϵ に対して $\dfrac{a^x(a-1)}{n}<\epsilon$ となるような n をアルキメデスの原理からとれるので、それをとると、$y=x-\dfrac{1}{n}$ とすれば $a^x-a^y<\epsilon$ となる。これが示したいことであった。 □

命題を証明する。

証明. $A_x=\{a^y\mid y\in\mathbb{Q}\text{かつ}y<x\}$ として、$a^x=\sup A_x$ を示す。$s=\sup A_x$ とおく。$y<x$ ならば $a^y<a^x$ なので a^x は A_x の上界である。よって、$s\leq a^x$ である。$s\neq a^x$ であるとする。$y<x$ に対して $a^x-a^y=a^x(a^{y-x}-1)$ である。ここで、$\inf\{a^x-a^y\mid y<x\}=1$ をである。一方で、$a^y\leq s$ なので、$a^x-a^y\geq a-s>0$ である。これは $\inf\{a^y-a^x\mid y\in\mathbb{Q},y<x\}=0$ に矛盾する。 □

命題 5.7 (単調性)**.** 実数 s,t が $s<t$ であるとき、$\exp_a(s)<\exp_a(t)$ である。つまり、$\exp_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は単調増加関数である。

考え方. 上限の大小を比較する時には、考えている集合の要素で上界となるものを見つければよい。

証明. 実数 $s<t$ に対し $a^s<a^t$ を示す。s,t の間に有理数が存在するのでそれを $q_1<q_2$ とする。定義に現れた集合を A_s,A_t とすると、$a^{q_2}\in A_t$ である。よって $a^{q_2}\leq\sup A_t=\exp_a(t)$ である。一方で a^{q_1} は A_s の

上界であることがわかる。というのも、$a^r \in A_s$ とすると、$r < s < q_1$ となるため $a^r < a^{q_1}$ である。よって、$\exp_a(s) = \sup A_s \leq a^{q_1}$ である。よって、$\exp_a(s) \leq a^{q_1} < a^{q_2} \leq \exp_a(t)$ である。 □

命題 5.8 (連続性)**.** $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続関数である。

考え方. 示したいのは $|a^x - a^c| < \epsilon$ である。絶対値を外して $a^c - \epsilon < a^x < a^c + \epsilon$ と考える。

a^c が上限だから、$a^c - \epsilon < a^r < a^c$ となる $r \in \mathbb{Q}$ が取れる。単調性から $r < x < c$ なら $a^r < a^x < a^c$ である。

$a^c + \epsilon$ についても同様の議論をしたいので、a^x が下限としても書けるかどうかを考えよう。そこで、$a^x = \inf\{a^r \mid r \in \mathbb{Q}, x < r\}$ となることをまず示す。

下に有界で空でないので $\inf = b$ は存在する。背理法でやる。$a^x < b$ と仮定する。有理数 r, s が $r < x < s$ なとき、$a^r < a^x < b < a^s$ である。特に $a^s - a^r > b - a^x$ である。一方で $a^s - a^r = a^r(a^{s-r} - 1)$ である。ここで、$\inf\{a^r - 1 \mid r \in \mathbb{Q}, r > 0\} = 0$ が示せるので、これにより $a^{s-r} - 1$ はいくらでも 0 に近づく。これは矛盾。

このことから、$a^c < a^s < a^c + \epsilon$ となる有理数 s が取れる。$c < x < s$ なら $a^c < a^x < a^s < a^c + \epsilon$ であることがわかる。

よって、$r < x < s$ なら $a^c - \epsilon < a^x < a^c + \epsilon$ となり、δ を $\min\{x - r, s - x\}$ より小さくとれば $|c - x| < \delta$ ならば $|a^x - a^c| < \epsilon$ であることが示される。

命題 5.9 (指数法則)**.** 実数 x, y に対して $a^{x+y} = a^x a^y$ を示す。

考え方. x, y が共に有理数なら一致する。次に x を有理数として一つ固定すると、上のことから拡張の一意性により任意の実数 y で一致する。最後に、実数 y を固定したとき任意の有理数 x で一致するから拡張の一位性から出る。

連続で有理数で一致なら一致をいう。もしある $c \in \mathbb{R}$ で $f(c) \neq g(c)$ とする。このとき、ϵ をうまくとって $|x - c| < \delta$ なら $f(x) \neq g(x)$ となる δ が存在することがわかる。これに対して有理数の稠密性から $|x - c| < \delta$ なる有理数 x が存在するので矛盾。

証明. $x \in \mathbb{Q}$ とする。これに対し、$f_1(y) = a^{x+y}, f_2(y) = a^x a^y$ はいずれも連続関数で、任意の $y \in \mathbb{Q}$ で一致する。よって、任意の $y \in \mathbb{R}$ で一致する。x は任意にとれるので、任意の有理数 x と任意の実数 y に対して $a^{x+y} = a^x a^y$ である。

次に $x \in \mathbb{R}$ とする。これに対し、$g_1(y) = a^{x+y}, g_2(y) = a^x a^y$ とする。$y \in \mathbb{Q}$ とすると、$g_1(y) = a^{x+y} = a^{y+x}, g_2(y) = a^x a^y = a^y a^x$ となるので、上で示したことより $g_1(y) = g_2(y)$ である。g_1, g_2 は連続なので $g_1 = g_2$ である。よって、任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して $a^{x+y} = a^x a^y$ である。x は任意にとれるので、任意の実数 x, y に対して $a^{x+y} = a^x a^y$ である。 □

ここまでで、指数関数 $\exp_a$ が単調増加な連続関数であることがわかった。よって、単調増加で連続な逆関数が存在する。それを対数関数と呼び $\log_a$ と表す。対数関数のよく知っている性質は、指数法則と逆関数であることを用いると証明できる。

今回の講義では上の手順で指数関数や対数関数を定義したが、指数関数や対数関数の定義の方法はさまざまある。対数関数を積分で定義してその逆関数として指数関数を定義する方法、微分方程式を用いて定義する方法、冪級数を用いて定義する方法など様々。三角関数の定義についても同様に様々なやり方があり、次の文章

に詳しく書かれている。https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~t-saito/jd/三角関数.pdf

6　微積分における応用

この節では微積分における中間値の定理の応用を見ていこう。中間値の定理は連続な関数についての定理であるが、微積分においても非常に基本的で、例えば平均値の定理を証明するのに用いられる。さらに、平均値の定理を用いることで以下のような基本的な事実を証明することができる。

1. 導関数の正負から関数の増加減少を判定すること。
2. 導関数が 0 なら定数関数となること。
3. テイラーの定理

この節では、導関数が 0 なら定数関数であることを平均値の定理を明示的には用いずに証明する。特に中間値の定理がどのように用いられるかを詳しく見ていきたい。

関数のグラフを書くときに、ある区間で導関数が正なら増加関数であり、導関数が負なら減少関数であることを用いた。このことをまず証明しよう。その系として、導関数が 0 なら定数関数であることを示すことができる。今回の証明では平均値は明示的には使ってないが、さまざまな教科書には平均値の定理を使う証明がよく書かれていて、それとはほぼ差はない。

定義 6.1 (微分係数)**.** 関数 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ に対し、$c \in (a, b)$ における**微分係数**とは、以下の極限値のことをいう。

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

この極限が存在するとき、f **は** c **で微分可能である**といい、極限値を $f'(c)$ と表す。

微分係数は、c の付近での変化の割合 $g(x) = \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ によって定まる関数を $x = c$ でも連続になるように拡張した関数の c での値と見做せることを強調しておく。

定義 6.2 (導関数)**.** 関数 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ が任意の $x \in (a, b)$ で微分可能であるとする。このとき、$x \in (a, b)$ に対して $f'(x)$ を対応させることで、関数 $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ を定める。これを f の**導関数**と呼ぶ。

高校までの数学と比べると、極限の定義がより厳密になった以外には特に違いはなく、よく知っている関数の微分などは同じように計算できる。以下で何を使うかを明確にしておく。

関数についての等式と不等式を説明する。関数 f, g に対して $f = g$ とは定義域の任意の x に対して $f(x) = g(x)$ であること。$f \leq g$ とは定義域の任意の x に対して $f(x) \leq g(x)$ であること。f, g で定義域が異なる場合は、それらの定義域の共通部分を考える。

定理 6.3. 関数 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ の導関数が $f' > 0$ であるとする。このとき、任意の s, t について $a < s < t < b$ ならば $f(s) < f(t)$ がなりたつ。つまり、f は単調増加である。

考え方. 微分係数 $f'(c)$ は極限を用いて定義されている。極限で定義しているので、c とその近くの点での変化の割合を c まで連続関数として拡張したことになる。そこで、$f'(c) > 0$ であることは、c の近くで変化の割合が正であるということを導く。

実際には背理法で証明する。s を止めて、t を動かして関数を作る。この関数についての中間値の定理。微分が正という仮定に矛盾させるにはどうすればよいか？ ある点での微分係数が 0 以下になればよい。微分係数

が極限で定義されていたことから、傾きが 0 以下になるような部分を作ればよい。

証明. 背理法で証明する。背理法の仮定よりある $s < t$ で $f(s) \geq f(t)$ であるので、そのような s, t を一組とる。

この s を用いて関数 $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ を

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(s)}{x - s} & x \neq s \\ f'(s) & x = s \end{cases}$$

により定める。微分係数の定義から $\lim_{x \to s} g(x) = g(s)$ となるため、g は $x = s$ において連続である。また、$x \neq s$ においては連続関数の四則により定まる関数なので連続である。

導関数についての仮定より $g(s) > 0$ であり、また背理法の仮定から $g(t) \leq 0$ である。よって、中間値の定理の精密化から、$c \in [s, t]$ で任意の $x < c$ に対し $g(x) > 0$ でありかつ $g(c) = 0$ であるようなものが唯一存在する。さらに $g(s) > g(c)$ であるため $s \neq c$ でもある。

$g(c) = 0$ であることから $f(c) - f(s) = 0$ である。また、$x < c$ に対しては $g(x) > 0$ であるため、$x - s > 0$ と合わせると $f(x) - f(s) > 0$ である。よって、$x < c$ で $f(x) - f(s) = f(x) - f(c) > 0$ である。関数 h を

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} & x \neq c \\ f'(c) & x = c \end{cases}$$

で定義すると、上と同様にこれは連続である。上で示したことから、$x < c$ では $h(x) < 0$ である。一方で仮定より $h(c) > 0$ である。これは矛盾。 □

負の値をとる関数の極限が 0 以下になることを証明する。

微分が負なら減少も、上の証明を不等号の向きに注意して同様の議論を行うことで証明できる。あるいは次のように示すこともできる。

系 6.4. 関数 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ の導関数が $f' < 0$ であるとする。このとき、任意の s, t について $a < s < t < b$ ならば $f(s) < f(t)$ がなりたつ。つまり、f は単調減少である。

証明. $g = -f$ とする。これは連続で $g' > 0$ である。定理を用いることで g が単調増加がわかる。よって f は単調減少である。 □

系 6.5. 関数 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ の導関数が $f' \geq 0$ であるとする。このとき、任意の s, t について $a < s < t < b$ ならば $f(s) \leq f(t)$ がなりたつ。つまり、f は単調弱増加である。

関数 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ の導関数が $f' \leq 0$ であるとする。このとき、任意の s, t について $a < s < t < b$ ならば $f(s) \geq f(t)$ がなりたつ。つまり、f は単調弱減少である。

証明. 正の実数 c を勝手に一つとる。$g(x) = f(x) + cx$ とする。これは連続であり、また微分可能でもある。$g'(x) = f'(x) + c$ であり、$g' > 0$ である。よって、g は増加関数であり、$g(s) < g(t)$ である。$0 < (f(t) + ct) - (f(s) + cs) = f(t) - f(s) + c(t - s)$ である。c は任意にとれるので、任意の $c > 0$ に対して $-c(t - s) < f(t) - f(s)$ であることがわかる。よって、上限が上界の最小なので $\sup\{-c(t - s) \mid c > 0\} \leq f(t) - f(s)$ となり、$0 \leq f(t) - f(s)$ が示される。 □

目標としていた、導関数が 0 なら定数関数であるという事実を証明しよう。

系 6.6. 関数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ が微分可能で導関数 f' が $f'=0$ をみたす（つまり、任意の x に対して $f'(x)=0$ である）ならば f は定数関数である。また、関数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}, g:(a,b)\to\mathbb{R}$ が $f'=g'$ をみたすならば $f-g$ は定数関数である。

証明. $f'\geq 0$ かつ $f'\leq 0$ であり、単調弱増加かつ単調弱減少であり、よって定数。 $\square$

これが不定積分の積分定数である。積分定数というと、つまらないもののようだが、上の事実が述べているのは「不定積分 (あるいはある種の微分方程式) の答えがこれで全てだ」ということを保証するためのものである。数学の問題で、答えを一つ見つけるのも大事だが、答えはこれで全てであることを示すもの同じくらい大事である。

上の主張では、関数 f が区間で定義されていることを用いていることに注意しよう。定義域が区間でないなら中間値が成り立つとは限らず、$f'=0$ であっても f が定数とは言えない。

参考文献

[1] 加藤文元、微分積分、数研出版
[2] 嘉田勝、論理と集合から始める数学の基礎、日本評論社
[3] 古賀真輝、問題文の読み取り方、旺文社
[4] 斎藤毅、微積分、東京大学出版会
[5] 杉浦光夫、解析入門 I、東京大学出版会
[6] 竹山美宏、数学書の読み方、森北出版
[7] 長岡亮介、論理学で学ぶ数学、旺文社
[8] 松尾厚、大学数学ことはじめ、、東京大学出版会