

2022年3月27日
第24回春の合宿セミナー（日本行動計量学会）
（統計的因果推論入門）

講義8a 回帰不連続デザインの基礎

長崎大学 情報データ科学部 准教授

高橋 将宜

博士（理工学）

m-takahashi@nagasaki-u.ac.jp

概要

- 概略
 - 使用するデータと状況設定
 - 外挿の問題
 - 閾値における局所的な平均処置効果
 - 回帰不連続デザインによる解析
 - 回帰不連続デザインの図解
 - 回帰不連続デザインの理論
 - 回帰不連続デザインの現状
 - Rパッケージrdrobustによる解析
 - データ分析
- 教科書
Ch.15
- 教科書
Chs.16-17

概略

傾向スコア

□ 傾向スコアによる解析


- 最もよく使用される準実験の1つ
- 前提：処置群と統制群の間に重なりがあること

□ 前提の満たされない具体例

- 試験の点数：60点未満の学生は補習授業を受ける
- 試験の点数：60点以上の学生は補習授業を受けない
- 処置の割付けは確定的
 - 処置群と統制群の間に重なりがない
 - このような研究課題は、傾向スコアを用いて適切に解析できない

回帰不連続デザイン

- RDD: regression discontinuity design
 - 回帰不連続デザイン
 - 回帰分断デザイン
 - 回帰非連続デザイン
 - 不連続回帰デザイン
- 回帰不連続デザインも準実験の1つ
 - 処置の割付けが確定的なときに使用できる
 - さまざまな準実験の中で最も実験研究に近いデザインといわれる
 - 局所的な範囲で無作為割付けが成立していると思なすことができるから



使用するデータと状況設定

data15の読み込み（教科書p.210）

- 回帰不連続デザインは、やや特殊なモデリングであるため、最初に数値データを使って解説をする.
- `data15 <- read.csv(file.choose())`
- `attach(data15)`
- `summary(data15)`

```
> summary(data15)
```

y0t	ylt	y3	tl	xl
Min. : 65.31	Min. : 53.89	Min. : 65.31	Min. : 0.000	Min. : 62.55
1st Qu.: 132.72	1st Qu.: 112.83	1st Qu.: 115.39	1st Qu.: 1.000	1st Qu.: 133.61
Median : 150.91	Median : 122.92	Median : 124.41	Median : 1.000	Median : 150.56
Mean : 151.17	Mean : 122.19	Mean : 123.92	Mean : 0.798	Mean : 150.44
3rd Qu.: 169.47	3rd Qu.: 131.75	3rd Qu.: 132.81	3rd Qu.: 1.000	3rd Qu.: 167.29
Max. : 229.33	Max. : 174.08	Max. : 174.08	Max. : 1.000	Max. : 235.05

変数の意味 (1)

- y_{0t} と y_{1t} : 潜在的結果変数の組 $\{Y_i(0), Y_i(1)\}$
 - 実際の場面ではデータに含まれていることはあり得ないが、ここでは例示のために潜在的結果変数が分かっている状態でデータ解析を行う。
- y_3 : 実際に観測される結果変数 Y_i
- t_1 : 処置の割付け変数 T_i
- X_1 : 共変量 X_i
- 具体的な状況設定
 - 処置の割付け変数 t_1 は降圧剤が投与されるかどうかを表す二値変数とし、共変量 x_1 は処置前の血圧とし、結果変数 y_3 は処置後の血圧としよう。

変数の意味 (2)

- $X_i \sim N(150, 625)$
- $$\begin{cases} Y_i(0) = 1.0X_i + \varepsilon_i \\ Y_i(1) = 10.0\sqrt{X_i} + \varepsilon_i \end{cases}$$
- $\varepsilon_i \sim N(0, 100)$

処置の割付け (1)

$$T_i = \begin{cases} 1 & \text{if } X_i > c \\ 0 & \text{if } X_i \leq c \end{cases}$$

- 共変量 X_i に従って確定的に行われる.
 - ここで, $c = 130$ としよう.
 - 血圧が130を超えると処置を受け, それ以下の場合は処置を受けないものとする.
 - この c の値を閾値 (しきいち : cutoff) と呼ぶ.

処置の割付け (2)

$$T_i = \begin{cases} 1 & \text{if } X_i > c \\ 0 & \text{if } X_i \leq c \end{cases}$$

□ 具体例

- 処置とは血圧を下げる薬（降圧剤）の服用
- 降圧剤の血圧に対する効果を推定する

□ 注意

- 具体的な状況次第で、 X_i の値が c 未満であれば処置の割付け T_i が1で、 X_i の値が c 以上であれば処置の割付け T_i が0となっていてよい。

共変量 X_i

- 処置の割付け T_i を決定付ける連続変数
 - 強制変数 (forcing variable) という
 - 継続変数 (running variable) ともいう

$$T_i = \begin{cases} 1 & \text{if } X_i > c \\ 0 & \text{if } X_i \leq c \end{cases}$$

- 強制変数 X_i の値がある定数 c 以上であれば処置の割付け T_i が1であり, 強制変数 X_i の値がある定数 c 未満であれば処置の割付け T_i が0である.

共変量 X_i と閾値

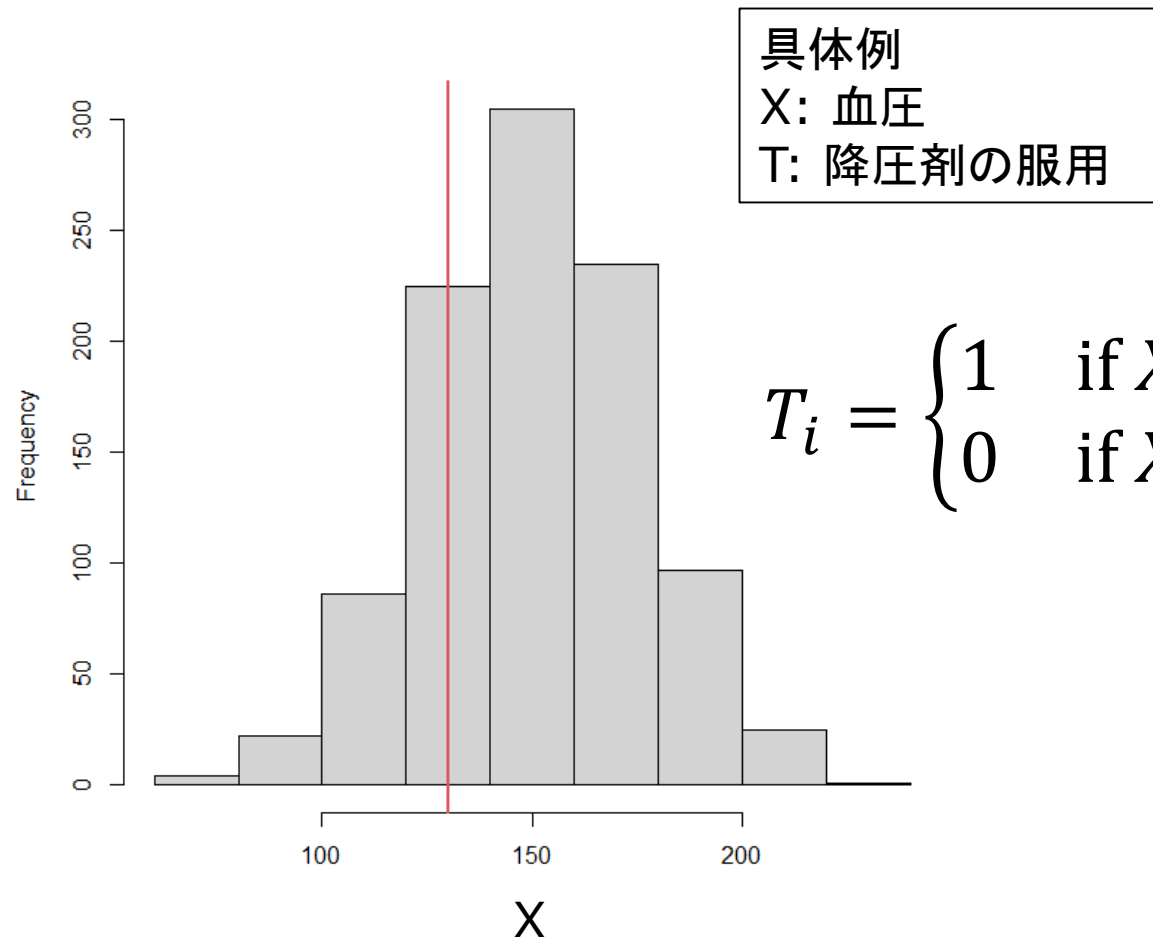
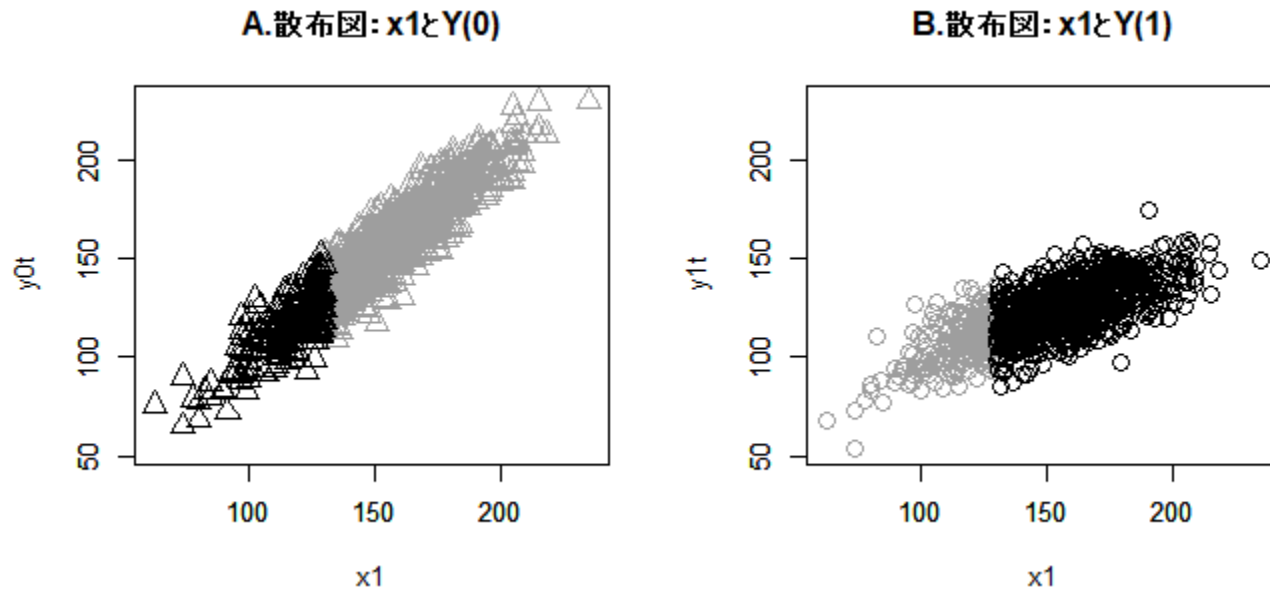


図15.1：潜在的結果変数

高橋 (2022, p.211)



図A：処置を受けなかった場合の潜在的結果変数 $Y_i(0)$ と共変量 X_i との散布図 (Δ)

□ 閾値 $c = 130$

□ 横軸が130以下の部分が観測される。

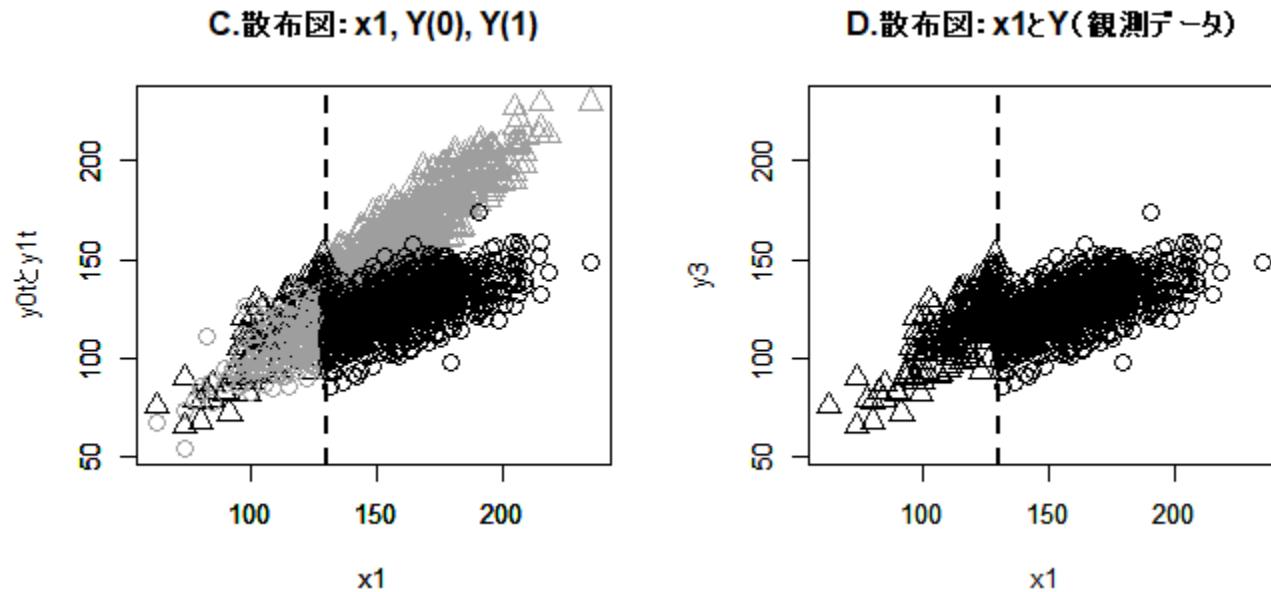
□ 130以下の部分を濃い黒色で表し，130よりも上の部分を薄い灰色で表している。

図B：処置を受けた場合の潜在的結果変数 $Y_i(1)$ と共変量 X_i との散布図 (\circ)

□ 横軸が130より上の部分が観測される。

□ 130以下の部分を薄い灰色で表し，130よりも上の部分を濃い黒色で表している。

図15.2：潜在的結果変数と観測データ 高橋（2022, p.211）



図C：上記の図Aと図Bを統合したものである。

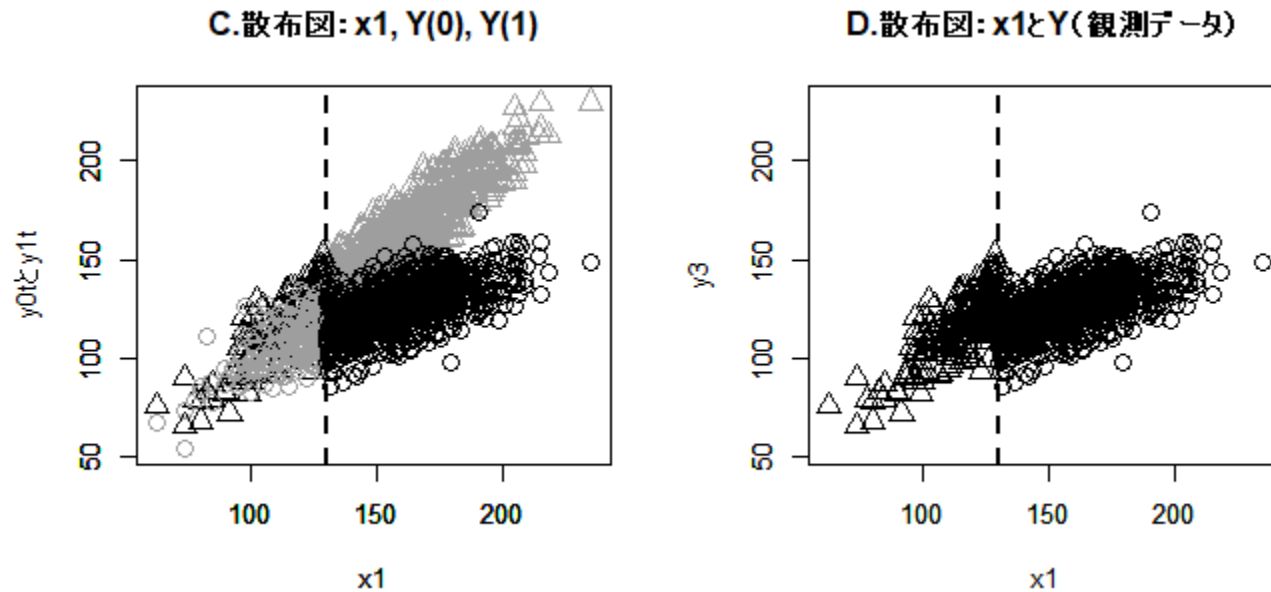
□ もし潜在的結果変数の組 $\{Y_i(0), Y_i(1)\}$ が共に観測されるなら，図Cのように見える。

図D：実際に観測される散布図

□ 実際には薄い灰色で表されている部分は観測されないから

我々がやろうとしていること

高橋 (2022, p.211)



図Dのデータしかないときに、処置効果を推定すること
閾値130を境に、 Δ と \circ には重なりがない。
傾向スコアを用いることができない

回帰不連続デザインに使用するデータ

図C：灰色のデータは観測されない

図D：一部のデータしか観測されていない

平均処置効果 (ATE)

- $\text{mean}(y1t) - \text{mean}(y0t)$
- $\text{mean}(y3[t1==1]) - \text{mean}(y3[t1==0])$

```
> mean(y1t) - mean(y0t) 平均処置効果 (ATE) の真値
```

```
[1] -28.97441
```

```
> mean(y3[t1==1]) - mean(y3[t1==0]) ナイーブな推定値
```

```
[1] 10.33062
```

この例では、降圧剤を飲むと、平均して、血圧が約29下がるという設定になっている。実際には、降圧剤の効果は血圧を5～10程度下げられると思われるため、この設定はやや現実的でないかもしれないが、回帰不連続デザインのメカニズムを明確に示すためにやや誇張した設定にしている。

ナイーブな推定量

□ 交絡の影響

- 正しい因果効果を推定できていない

□ 処置の割付け

- 共変量 X_i の値によって確定的に割り付けられる
- 交絡因子： X_i

□ 交絡

- 降圧剤を飲む前の血圧の値は処置群の方が統制群よりも高い
- 処置後の血圧の値も処置群の方が統制群よりも高く見えているわけである。

共分散分析（重回帰モデル）による交絡調整

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 T_i + \beta_2 X_i + \varepsilon_i$$

- `model1 <- lm(y3 ~ t1 + x1)`
- `summary(model1)`

Coefficients:

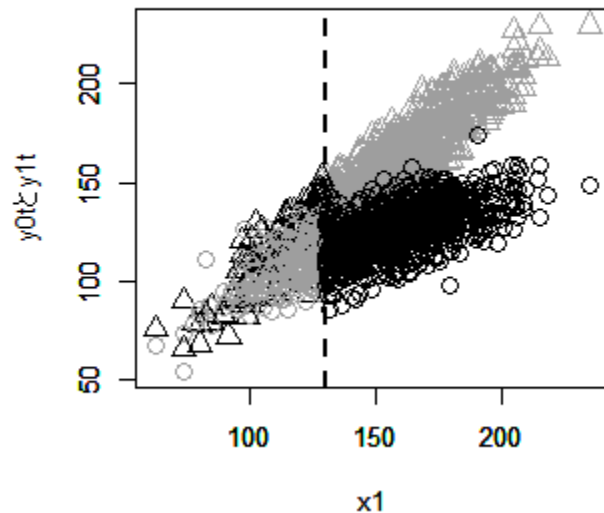
	Estimate	Std. Error
(Intercept)	64.62053	2.32272
t1	-9.38949	1.20196
x1	0.44397	0.01908

t1の偏回帰係数：-9.389
平均処置効果の真値：-28.974
理由：処置群と統制群で関数形が異なっているからうまく推定できていない。

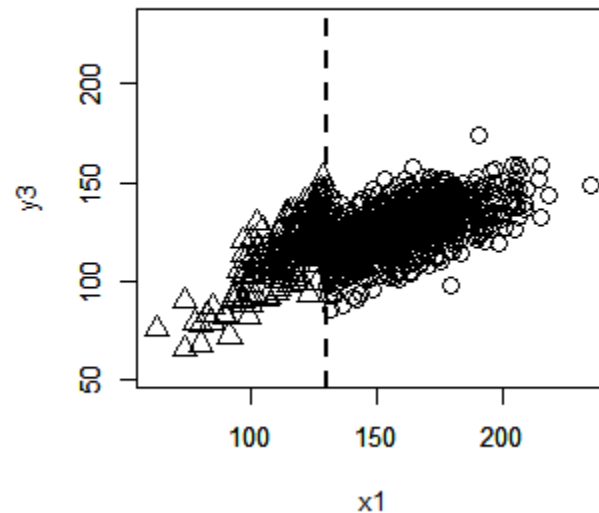
共分散分析：関数形と交互作用項

高橋 (2022, p.211)

C. 散布図: x_1 , $Y(0)$, $Y(1)$



D. 散布図: x_1 と Y (観測データ)



- 適切な変数変換によって関数形を設定したり，交互作用項を用いたりすることで平均処置効果を推定できる.
- もし図Cが観測されているのであれば，処置群と統制群の関数形の違いを適切にモデリングできる.
- 実際に観測できるのは図Dである.

交互作用項のある共分散分析

- $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 T_i + \beta_3 XT_i + \varepsilon_i$
- $Y_i(T_i = 0) = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$
- $Y_i(T_i = 1) = (\beta_0 + \beta_2) + (\beta_1 + \beta_3)X_i + \varepsilon_i$
- XT_i : 変数の積の項（掛け算の項）

高橋（2022, pp.126-131）

交互作用項のある共分散分析：個体処置効果

- $\tau_i = Y_i(1) - Y_i(0)$
- $\tau_i = [(\beta_0 + \beta_2) + (\beta_1 + \beta_3)X_i + \varepsilon_i] - [\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i]$
- $\tau_i = \beta_2 + \beta_3 X_i$

高橋（2022, pp.126-131）

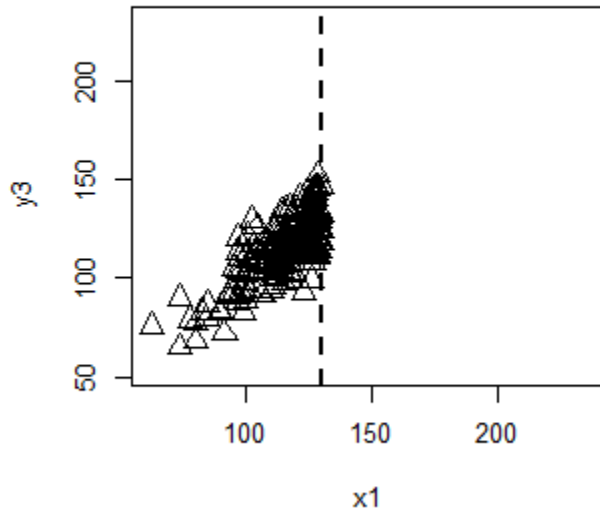
交互作用項のある共分散分析：平均処置効果

- $\tau_{ATE} = E[Y_i(1) - Y_i(0)]$
- $\tau_{ATE} = E[\beta_2 + \beta_3 X_i]$
- $\tau_{ATE} = E[\beta_2] + E[\beta_3 X_i]$
- $\tau_{ATE} = \beta_2 + \beta_3 E[X_i]$

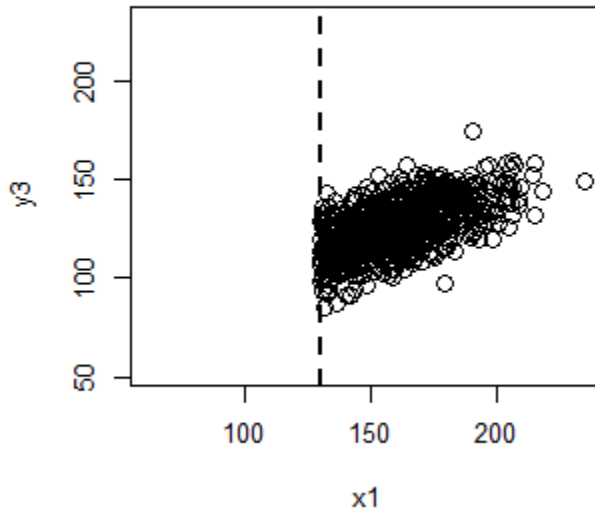
高橋（2022, pp.126-131）

観測データ

D1. 散布図: x_1 と Y (観測データ)



D2. 散布図: x_1 と Y (観測データ)



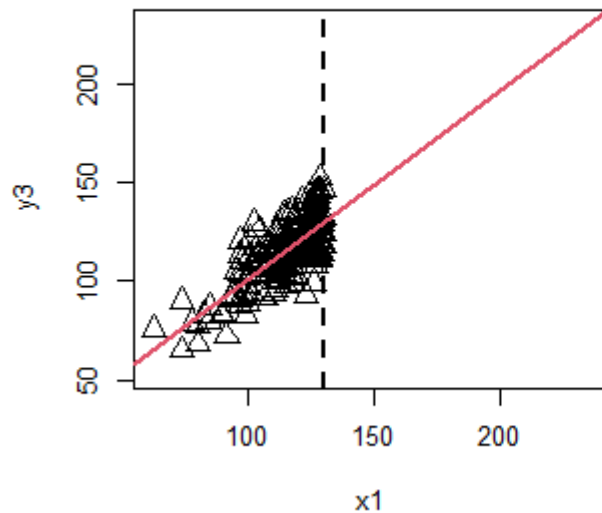
□ 実際に観測できるのは図Dである.

△の観測値が閾値130を超えた場合, どのような関数形を取るのかデータから確認する手掛かりがない.

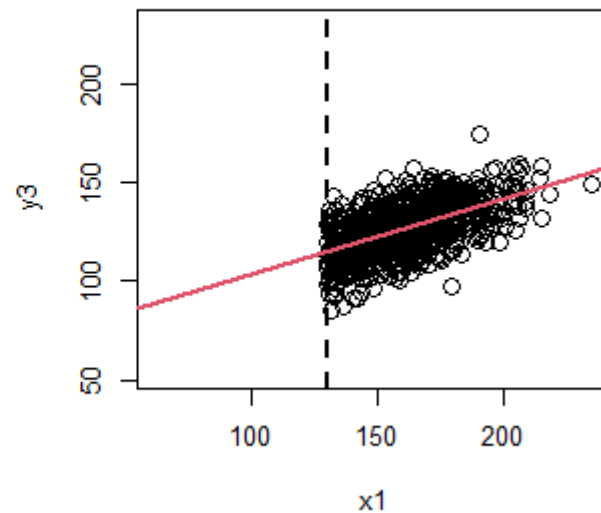
○の観測値が130を下回った場合も, どのような関数形を取るのかデータから確認する手掛かりがない.

大域的な方法 (global approach)

D1. 散布図: x_1 と Y (観測データ)



D2. 散布図: x_1 と Y (観測データ)



- 横軸の変数 X の定義域全体を使って分析する方法
- 共分散分析

$$\begin{aligned}Y_i &= \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 T_i + \beta_3 X_i T_i + \varepsilon_i \\Y_i(T_i = 0) &= \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \\Y_i(T_i = 1) &= (\beta_0 + \beta_2) + (\beta_1 + \beta_3) X_i + \varepsilon_i\end{aligned}$$

外挿（**extrapolation**）と内挿（**interpolation**）

□ 外挿（extrapolation）

- 横軸の変数 X の観測範囲の外にある値に基づいて回帰モデルから予測すること

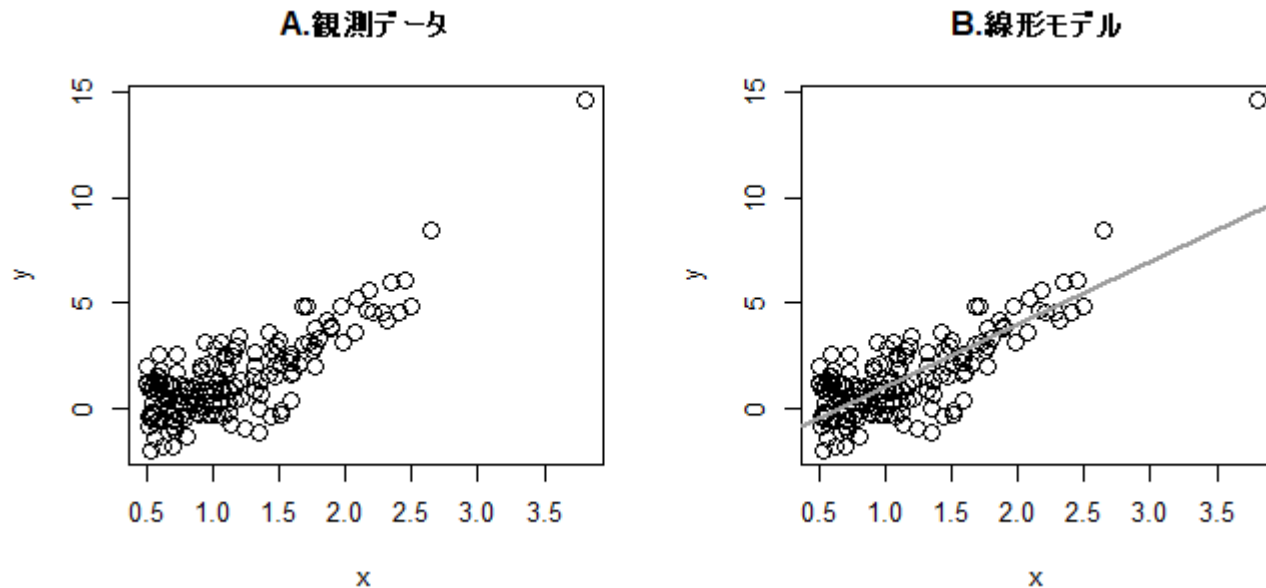
□ 内挿（interpolation）

- データの存在している部分について予測を行うこと

外挿の問題

図15.3

高橋 (2022, p.214)



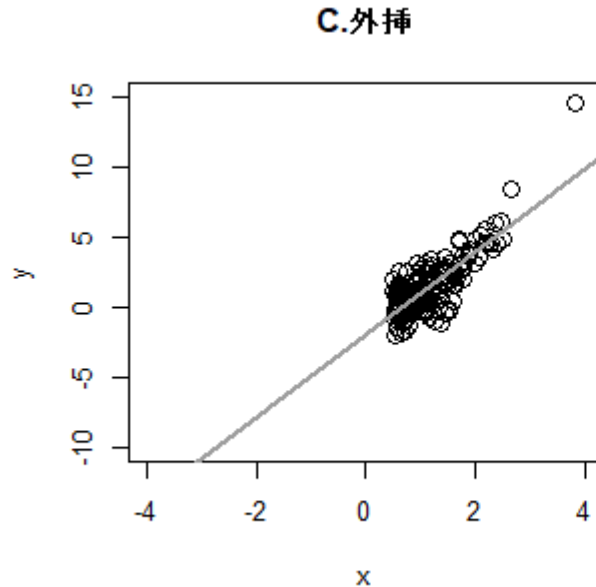
図A：あるデータについて観測されている部分

図B：通常の最小二乗法による線形モデル $\hat{y} = -1.899 + 2.973x$ に基づいて直線を引いたもの

- 一見すると、データとモデルの当てはまりは、さほど悪くないように見える.
- 決定係数：0.645

図15.4C

高橋 (2022, p.214)



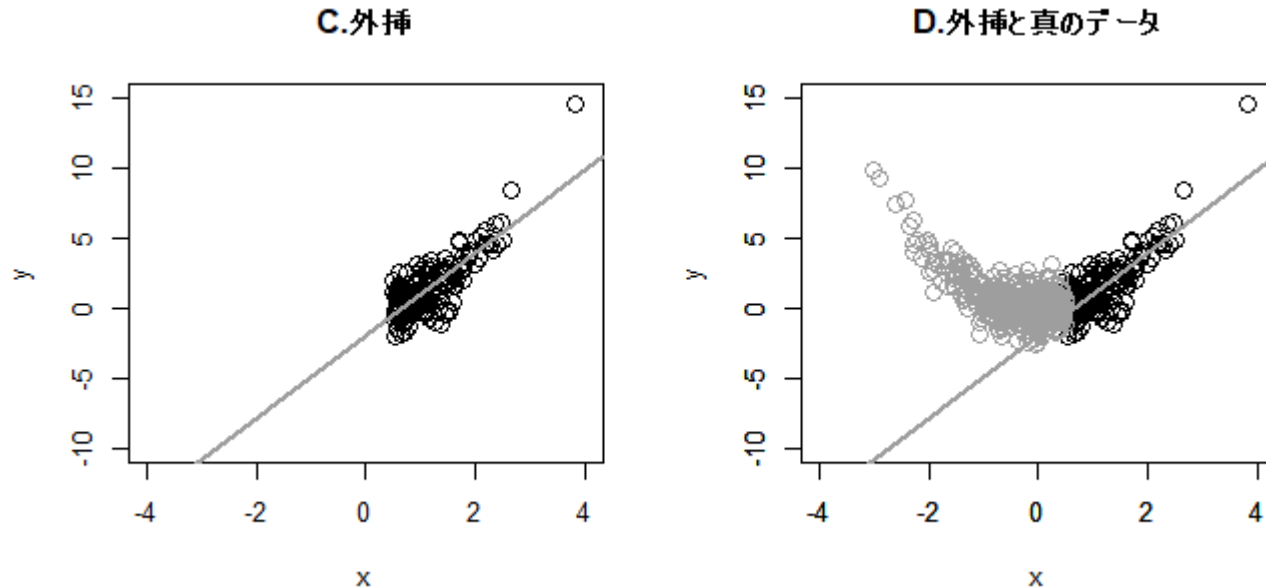
図C： x がマイナスの値のところまで横軸を左に拡張して、観測データのないところの予測を行ったものである。

予測： x の値が -2 の場合， y の値は $-1.899 + 2.973(-2) = -7.845$

外挿： このようにデータの存在しない部分を予測すること

図15.4D

高橋 (2022, p.214)



図D：観測されていなかったデータも表示したもの

x と y は二次関数の関係

実際にデータから計算したモデルは $\hat{y} = -0.056 + 1.010x^2$ である.

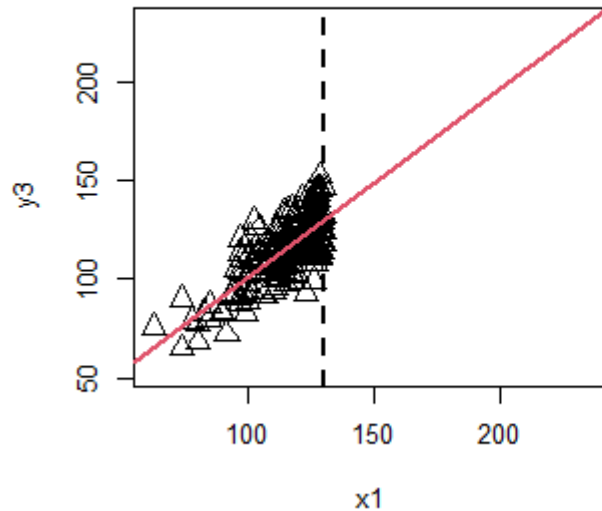
x が0を下回ったあたりから、線形モデルは明らかに当てはまっていない.

x の値が -2 の場合、 y の値は $-0.056 + 1.010(-2)^2 = 3.984$ と予測される.

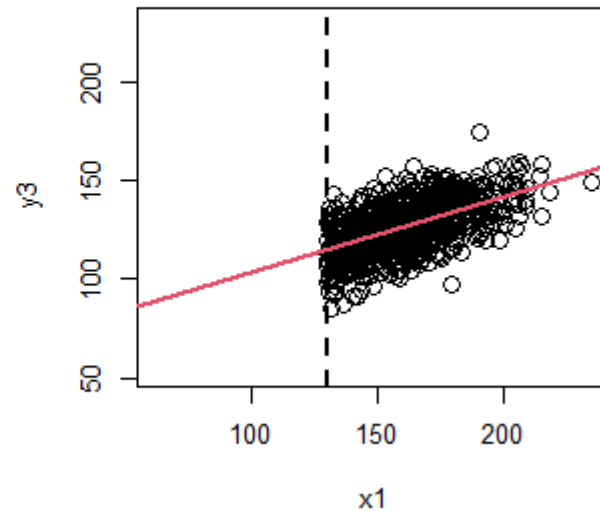
先ほどの予測値 -7.845 は、大幅に間違っていた.
これが外挿の問題である.

data15における問題点

D1. 散布図: x1とY(観測データ)



D2. 散布図: x1とY(観測データ)



図Dにおいて、 \triangle と \circ のそれぞれに対してモデルを当てはめて閾値を超えた部分を予測してしまうと、このような**外挿**の問題が発生するおそれがある。

閾値における局所的な平均処置効果

推定対象 (1)

- 処置群と統制群に重なりがない場合
 - 外挿を最小限に抑えたモデリングを行う必要がある
 - 平均処置効果 (ATE) を推定対象とすることは諦めなければならない
 - 平均処置効果 (ATE) を推定するためには, X の定義域全体に対して外挿しなければならないからである.
- 共分散分析のような大域的な方法は好ましくない.

推定対象 (2)

- 大域的な方法の代わりに、**閾値における局所的な平均処置効果** (**LATE**: local average treatment effect at the cutoff) を推定対象とする

$$\begin{aligned} & E[Y_i(1) - Y_i(0) | X_i = c] \\ &= E[Y_i(1) | X_i = c] - E[Y_i(0) | X_i = c] \end{aligned}$$

- 理論的には、閾値における局所的な平均処置効果 (LATE) とは、共変量 X_i が閾値 c の値を取るときの $Y_i(1)$ と $Y_i(0)$ の差の期待値
- このような方法を局所的な方法 (local approach) という。

LATEを推定対象とするメリットと理由

□ 回帰不連続デザイン

- 共分散分析を統計的因果推論の手法として妥当なものになるよう拡張したもの

□ 閾値のすぐ上と下の値

- 無作為な副標本（subsample）と考えられる
- 直感的には、閾値付近の X_i の違いは、無作為なノイズによって発生していると理解できる。

具体例：数学の試験（平均**70**点，標準偏差**10**点）

- $c = 60$ で補習授業を行う
 - 試験の点数が60点未満のすべての学生は補習授業を受ける.
 - 試験の点数が60点以上の学生は補習授業を受けない.
- 学生Aの点数：59点
- 学生Bの点数：60点

- 学生Aは補習授業を受けるが，学生Bは補習授業を受けない.

具体例：数学の試験（平均70点，標準偏差10点）

- 学生Aの点数：59点
- 学生Bの点数：60点
- 2人の数学力は誤差範囲でほぼ同じはず
 - どんなに丹念に作られた数学の試験といえども，真の数学力を誤差なく測定することはできないから
 - 数学の試験の点数＝**数学力±無作為なノイズ**
- $X_i = \delta W_i + V_i$
 - 強制変数 X_i ：ベースラインとなる変数 W_i と無作為なノイズ V_i との線形結合によって表現
 - δ は何らかの定数
 - $\delta = 0$ の研究デザインが実験研究

回帰不連続デザイン：局所的な実験研究

- 閾値付近のデータだけに着目
 - X_i ：唯一の交絡因子
 - 局所的なデータにおいて処置が無作為に割付けられているのも同然＝局所的に事実上の実験研究
 - 準実験の中で最も実験研究に近いデザイン

局所的な平均処置効果のメリットとデメリット

□ デメリット

- 閾値周辺の個体にのみ適用可能な処置効果であるから、かなり限定的

□ メリット

- ある政策であったり、ある薬であったり、何らかの処置の効果として、局所的な平均処置効果は実質的な意味で興味深い推定対象である

具体例

□ 血圧と降圧剤の例

- 閾値が130だった
- 薬の処置をする際に、血圧が130よりもわずかに下の人たちも降圧剤を服用すべきなのかといった疑問があるかもしれない。

□ 数学の試験の例

- 補習授業を実施する際に、試験の点数が60点よりもわずかに上の学生にも補習授業を受けさせるべきなのかといった疑問があるかもしれない。

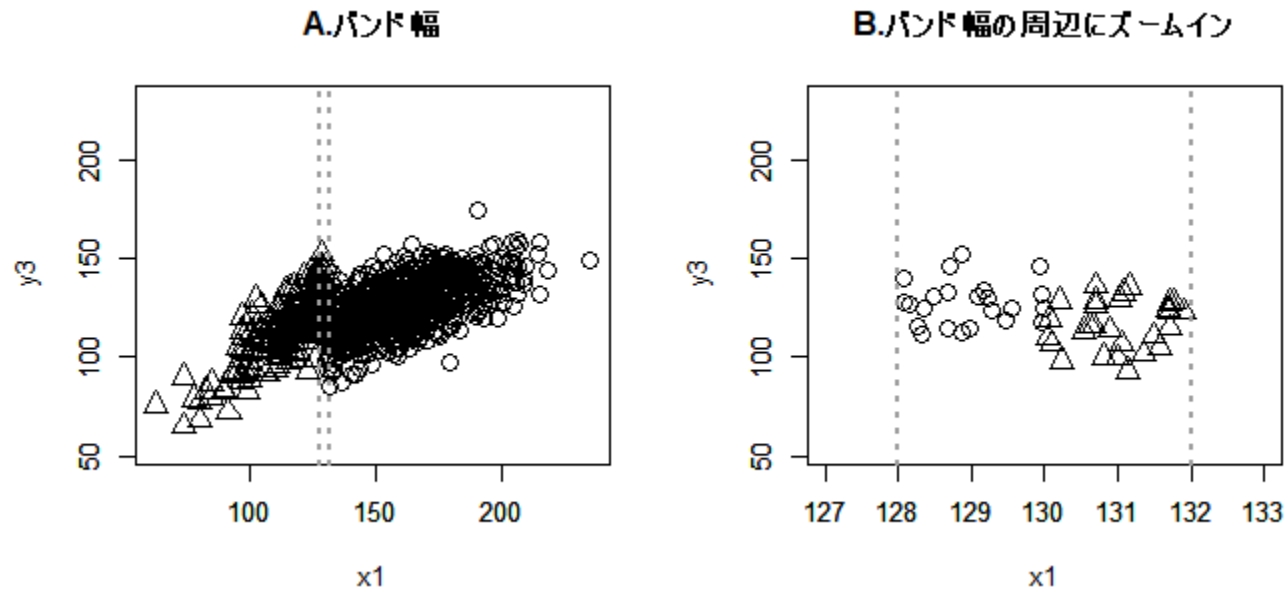
data15のLATE

- $E[Y_i(1) - Y_i(0) | X_i = c]$
- $= E[Y_i(1) | X_i = c] - E[Y_i(0) | X_i = c]$
 - $Y_i(1) = 10.0\sqrt{X_i} + \varepsilon_i$
 - $Y_i(0) = 1.0X_i + \varepsilon_i$
 - $c = 130$
- $E[10.0\sqrt{X_i} + \varepsilon_i | X_i = 130] - E[1.0X_i + \varepsilon_i | X_i = 130]$
- $= E[10.0\sqrt{130} + \varepsilon_i] - E[130 + \varepsilon_i]$
- $= E[10.0\sqrt{130}] + E[\varepsilon_i] - E[130] - E[\varepsilon_i]$
- $= 10.0\sqrt{130} - 130$
- $= -15.982$

回帰不連続デザインの図解

図15.5Fと図15.6G

高橋 (2022, p.218)



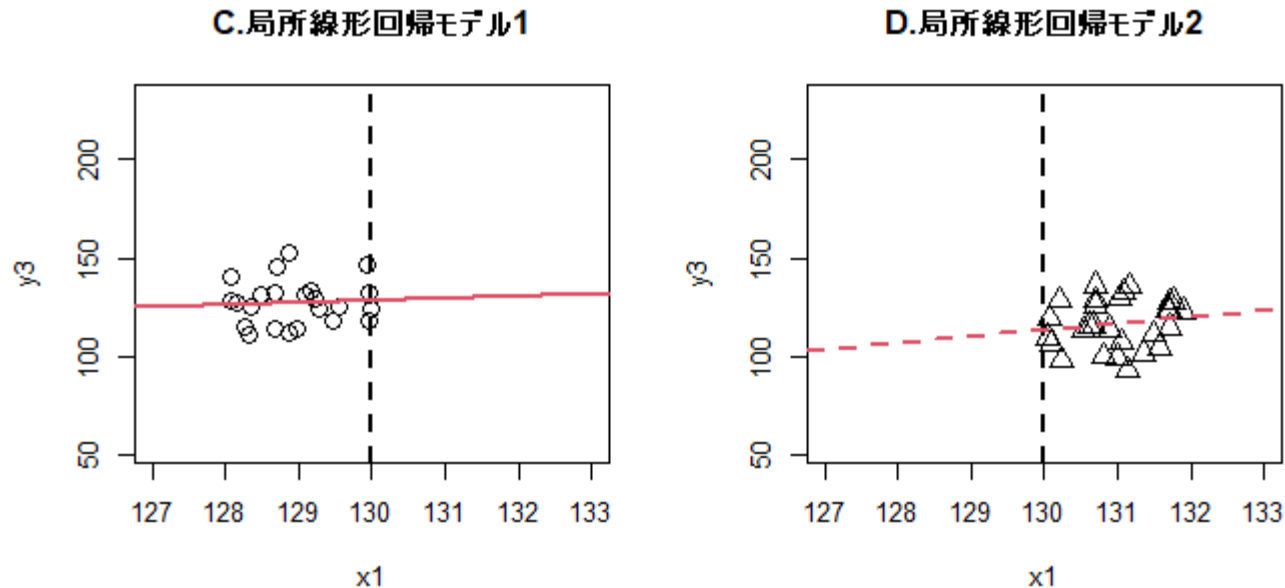
図E：共分散分析は、横軸の x_1 の範囲全体で2つの集団に対して回帰直線を推定している。

図F：バンド幅は点線で囲まれた局所的な範囲である。

回帰不連続デザインでは、この点線で囲まれた局所的なデータだけを使って解析を行う。

高橋 (2022, pp.223-229) も参照されたい

図15.6Hを分解



図G : x_1 の値が128より大きく, 132以下のバンド幅の範囲内にズームインしたものである.

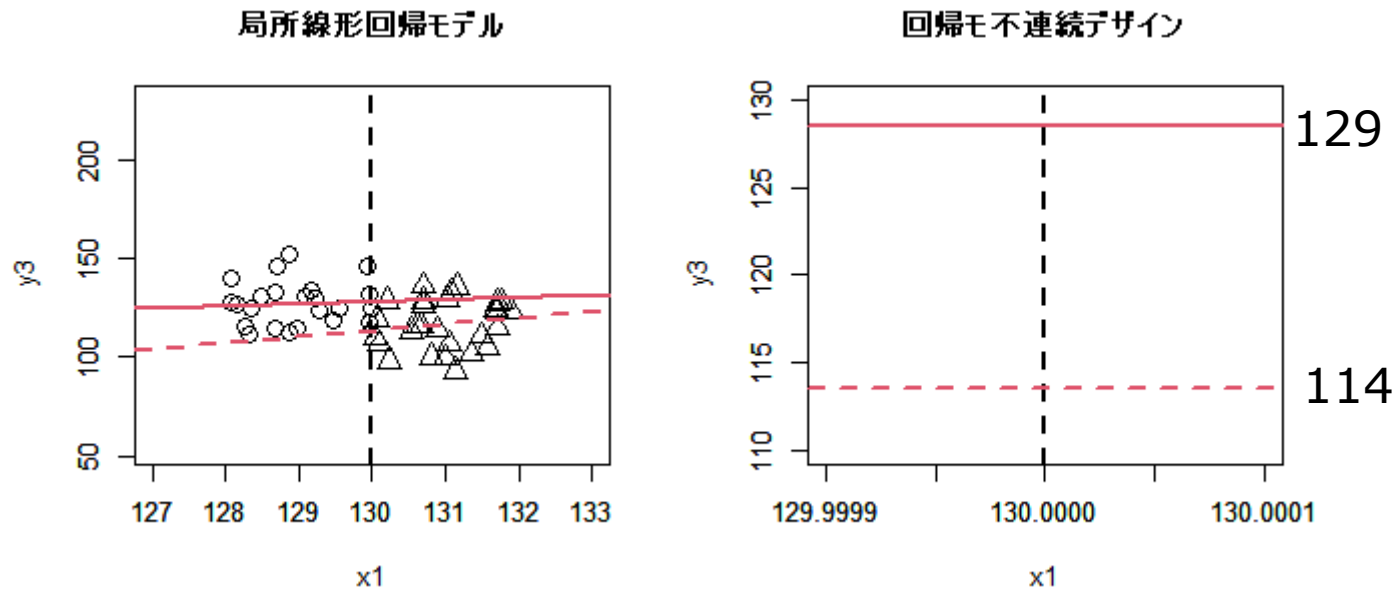
図H : 130を境にして, 左側のデータだけを使った直線と右側のデータだけを使った直線が引いてある.

$x_1 = 130$ の点線におけるこの2つの回帰直線の差がLATEである.

高橋 (2022, pp.223-229) も参照されたい

図15.6Hをズームイン

高橋 (2022, p.219)



2本の回帰直線の縦方向の差が局所的な平均処置効果

$$114 - 129 = -15$$

高橋 (2022, pp.223-229) も参照されたい

再掲載 : data15のLATE

- $E[Y_i(1) - Y_i(0)|X_i = c]$
- $= E[Y_i(1)|X_i = c] - E[Y_i(0)|X_i = c]$
 - $Y_i(1) = 10.0\sqrt{X_i} + \varepsilon_i$
 - $Y_i(0) = 1.0X_i + \varepsilon_i$
 - $c = 130$
- $E[10.0\sqrt{X_i} + \varepsilon_i|X_i = 130] - E[1.0X_i + \varepsilon_i|X_i = 130]$
- $= E[10.0\sqrt{130} + \varepsilon_i] - E[130 + \varepsilon_i]$
- $= E[10.0\sqrt{130}] + E[\varepsilon_i] - E[130] - E[\varepsilon_i]$
- $= 10.0\sqrt{130} - 130$
- $= -15.982$

回帰不連続デザインによる解析

局所線形回帰モデル

- h をある定数としよう.
 - h をバンド幅 (bandwidth) という

- 閾値の周辺 ($c \pm h$) において, 閾値の左側と右側にそれぞれ別々の線形回帰モデルを当てはめる
 - 閾値の周辺のデータだけを使って, 交互作用項を含む共分散分析を行う

Rによる局所線形回帰モデル

- `h1 <- 128 < x1 & x1 <= 132`
- `mean(y1t[h1]) - mean(y0t[h1])`
- `tx1 <- t1 * x1`
- `model2 <- lm(y3[h1] ~ t1[h1] + x1[h1] + tx1[h1])`
- `summary(model2)`

```
> mean(y1t[h1]) - mean(y0t[h1])  
[1] -13.09745
```

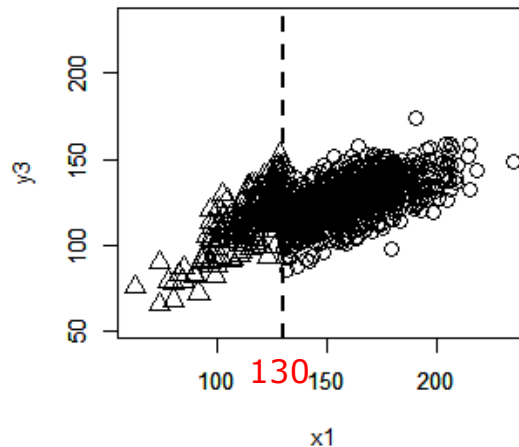
```
Coefficients:  
                Estimate Std. Error  
(Intercept)   -11.521      521.932  
t1[h1]        -289.931      744.626  
x1[h1]           1.077        4.047  
tx1[h1]         2.115        5.729
```

交互作用項については、教科書pp.125-131も参照してください。

交互作用項を含む回帰モデルの処置効果

- $\beta_1 + \beta_3 E[X_i]$
- 求めるべき局所的な平均処置効果
 - $X_i = 130$ のとき
 - $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_3 X_i = -289.931 + 2.115 \times 130 = -14.981$

D. 散布図: x1とY(観測データ)



Coefficients:

	Estimate	Std. Error
(Intercept)	-11.521	521.932
t1[h1]	-289.931	744.626
x1[h1]	1.077	4.047
tx1[h1]	2.115	5.729

交互作用項については、教科書pp.125-131も参照してください。

回帰不連続デザインの理論

X_i : 唯一の交絡因子

- 強制変数 X_i によって処置の割付けが決定付けられるから

- 共変量の重なりがない
 - 傾向スコアを用いて交絡の調整を行うことができない.
 - 傾向スコアを用いたモデリングでは, 条件付き正值性 (オーバーラップ条件) が必須だったから

閾値における局所的な平均処置効果の式

$$\tau_{LATE} = \lim_{x \downarrow c} E[Y_i(1)|X_i = c] - \lim_{x \uparrow c} E[Y_i(0)|X_i = c]$$

- 閾値ちょうどの位置における結果変数の差の期待値である.

- 強制変数 X_i : 連続変数
 - 現実には, 閾値ちょうどの位置に観測値を見つけることはできない.
 - $\lim_{x \downarrow c}$: x を右から c に近づけた右極限
 - $\lim_{x \uparrow c}$: x を左から c に近づけた左極限

シャープRDDとファジーRDD

- シャープな回帰不連続デザイン (sharp RDD)
 - 処置の割付け T_i が強制変数 X_i によって**確定的**に決められている
 - 教科書第15章～第17章
 - 本講義で扱っている手法
- ファジーな回帰不連続デザイン (fuzzy RDD)
 - 処置の割付けが**確率的**に決まる
 - 教科書第18章
 - ファジーRDDは、局所的な範囲に操作変数法を適用したものである.

回帰不連続デザインの現状

回帰不連続デザインの初出

- Thistlewaite and Campbell (1960)
 - 比較的に古くからある手法

- 回帰不連続デザイン自体は古くから存在しているが、実際には21世紀に入るまでほとんど研究されてこなかったという意味で、新しい手法でもある。

理論・応用・手法の発展：ノーベル経済学賞

□ 理論

- Hahn et al. (2001) : 識別性 (identification) の条件の提示

□ 応用

- **Angrist** and Lavy (1999) : 小学校のクラスの大きさが成績に与える影響に関する研究
- Lee (2008) : 米国議会選挙における現職政治家であることの影響に関する研究

□ 手法

- **Imbens** and Kalyanaraman (2012) : 最適なバンド幅の提案



使用状況

- 最初に提案されてから半世紀以上経つ手法ではあるものの、今も発展し続けている手法
 - その使用例はますます増加
 - 2000年：年間に100編程度の研究論文
 - 2019年：年間で5,600編もの研究論文

Rパッケージrdrobustによる解析

高橋 (2022, pp.230-231)

Rコード

インストールしていない人：
`install.packages("rdrobust")`

- ❑ `library(rdrobust)`
- ❑ `model3 <- rdrobust(y3, x1, c=130, h=2,
kernel="uniform")`
- ❑ `summary(model3)`

- ❑ 構文
 - `rdrobust(結果変数, 強制変数, c=閾値, h=バンド幅,
kernel=カーネル関数)`

解析結果

```
> summary(model3)
```

```
Call: rdrobust
```

```
Number of Obs.      1000
BW type             Manual
Kernel              Uniform
VCE method          NN
```

```
Number of Obs.      202      798
Eff. Number of Obs.  23      28
Order est. (p)       1       1
Order bias (q)       2       2
BW est. (h)          2.000    2.000
BW bias (b)          2.000    2.000
rho (h/b)            1.000    1.000
Unique Obs.          197     749
```

Method	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[95% C.I.]
Conventional	-15.006	6.159	-2.436	0.015	[-27.078 , -2.934]
Robust	-	-	-1.650	0.099	[-31.745 , 2.729]