別紙

入門微分積分（’２２）(1760165)

問１　正解は②です。

三角関数の倍角の公式を用いて，次のように変形しましょう。

$$a_n = \sin\frac{n\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{4} = \frac{1}{2}\left(2\sin\frac{n\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

正弦関数 $\sin x$ は，$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ をみたします。この問題では，$x > 0$ で考えれば良さそうです。ここで，$\sin x = 1$ をあたえる x は，$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k = 0,1,2,\ldots$ で，$\sin x = -1$ をあたえる x は，$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k = 0,1,2,\ldots$ です。$\frac{n\pi}{2}, n = 1,2,\ldots$ の中に $\sin\frac{n\pi}{2} = 1$ をあたえる n が無限個みつかれば，$\sin\frac{n\pi}{2}$ の上極限は１になります。したがって，a_n の上極限は $\frac{1}{2}$ となります。実際，$n = 4k+1, k = 0,1,2,\ldots$ であたえられる n がみつかります。（n が４で割って１余る自然数)。同様に，$\frac{n\pi}{2}, n = 1,2,\ldots$ の中に $\sin\frac{n\pi}{2} = -1$ をあたえる n が無限個みつかれば，$\sin\frac{n\pi}{2}$ の下極限は -1 であり，a_n の上極限は $-\frac{1}{2}$ となります。実際，$n = 4k+3, k = 0,1,2,\ldots$ であたえられる n がみつかります。（n が４で割って３余る自然数)。以上より，上極限は $\frac{1}{2}$ で下極限は $-\frac{1}{2}$ になります。

問２　正解は③です。

印刷教材の（1.10）式

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

が使えるように変形しましょう。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

となります。

問３　正解は④です。

$f(x)=\dfrac{x^3-9x}{|x-3|},x\neq 3$ とおきます。

$x>3$ のときは，$|x-3|=x-3$ ですから，$f(x)=\dfrac{x(x-3)(x+3)}{x-3}=x(x+3)$ となります。

$x<3$ のときは，$|x-3|=-(x-3)$ ですから，$f(x)=\dfrac{x(x-3)(x+3)}{-(x-3)}=-x(x+3)$ となります。したがって，左側極限は，$x<3$ のときの表現で極限を考えますから

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}\left(-x(x+3)\right)=-18$$

を得ます。

印刷教材の図 2.4 にならって，$f(x)$ のグラフを描いてみることをお勧めします。ちなみに，$\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0} x(x+3)=18$ となっています。

問 4　正解は④です。

それぞれの合成関数を求めてみましょう。まず,

$(f\circ g)(x)\ =2x^2-1,\ \ (g\circ f)(x)\ =4x^2+4x$

ですから，次数はともに 2 です。よって，$g(x)$ の次数と一致します。したがって，①,②とも正しくありません。

$(f\circ g\circ f)(x)\ =8x^2+8x+1,\ \ (g\circ f\circ g)(x)\ =4x^4-4x^2$

ですから $(f\circ g\circ f)(x)$ の次数は 2 で，$(g\circ f\circ g)(x)$ の次数は 4 になります。したがって，④が正しく，③,⑤は正しくありません。

問 5　正解は③です。

印刷教材の例 4.6 より，あたえられた関数の導関数は,

$$y'=\frac{-2}{x^3}$$

ですから，$x=-\dfrac{1}{2}$ の導関数の値は，16 です。したがって, 印刷教材の定理 4.2 の公式(4.9)を用いれば，求める法線の方程式は,

$$y=-\frac{1}{16}\left(x+\frac{1}{2}\right)+4$$

すなわち,

$$y=-\frac{1}{16}x+\frac{127}{32}$$

となります。

問 6　正解は②です。

まず，x が -2 から 1 まで変化するときの $f\left(x\right)$ の平均変化率を求めましょう。印刷教材の定義式（4.4）から

$$\frac{f\left(1\right)-f\left(-2\right)}{1-\left(-2\right)}=-5$$

となります。あたえられた関数の導関数は，

$$f'\left(x\right)=2x-4$$

です。求める接線の接点の x 座標を α とすれば，題意から

$$f'\left(\alpha\right)=2\alpha-4=-5$$

ですから，$\alpha=-\dfrac{1}{2}$ となります。ゆえに，接点の座標は，$\left(-\dfrac{1}{2},f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{25}{4}\right)$ です。したがって，印刷教材の定理 4.2 の(4.8)を用いれば，求める接線の方程式は，

$$y-\frac{25}{4}=-5\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

すなわち，

$$y=-5x+\frac{15}{4}$$

となります。

問 7　正解は①です。

対数微分法で導関数を求めましょう。あたえられた式の両辺の対数を考えると，

$$\log y=\log x^{\cos x}=\cos x\ \log x$$

となります。両辺を x で微分すれば，

$$\frac{y'}{y}=-\sin x\ \log x+\frac{\cos x}{x}$$

です。ゆえに

$$y'=\left(-\sin x\ \log x+\frac{\cos x}{x}\right)x^{\cos x}$$

となります。

問 8　正解は①です。

問題の関数 $x=t+1$，$y=\sqrt{1-t^2}$ は，$-1<t<1$ において，t の関数として，それぞれ微分可能です。$\dfrac{dx}{dt}=\left(t+1\right)'=1$ なので，$\dfrac{dx}{dt}$ は 0 になりません。また，

$$\frac{dy}{dt}=\left(\sqrt{1-t^2}\right)'=\frac{\left(1-t^2\right)'}{2\sqrt{1-t^2}}=\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$$ です。

したがって，印刷教材の定理 5.3 を用いれば，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}}{1}=\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$$

となります。

問 9　正解は③です。

$f(x)$ は多項式ですから，微分可能です。印刷教材の定理 6.4，定理 6.5 を用いて極値を判定していきましょう。まず $f'(x)$ を計算して，因数分解をすれば

$$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=4(x+1)(x-1)(x-3)$$

になります。よって，$x=-1, x=1, x=3$ が極値をあたえる候補となる点になります。

これらの点の前後での $f'(x)$ の符号を調べて，増減表を書くと

x	$\ldots$	-1	$\ldots$	1	$\ldots$	3	$\ldots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

のようになります。したがって，極大値は，$x=1$ のとき，$f(1)=6$ になります。

問 10　正解は②です。

双曲線関数の導関数は

$$(\cosh x)'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x,$$

$$(\sinh x)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x$$

ですから，n が奇数のときは，$(\cosh x)^{(n)}=\sinh x$ であり，n が偶数のときは，$(\cosh x)^{(n)}=\cosh x$ になります。

$$\sinh 0=\frac{e^0-e^{-0}}{2}=0,$$

$$\cosh 0=\frac{e^0+e^{-0}}{2}=1$$

なので，求めるマクローリン展開は，

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

であることがわかります。これを，和の記号$\sum$を用いて表せば，$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$

となります。（$0!=1$に注意して下さい。）