学籍番号: 4619055，氏名: 辰川力駆

以下の文章は，文献 [1] の pp.58–60 を元に，東京理科大学 工学部 情報工学科 2019 年度 情報工学実験 1 用に改変したものである．

1 線形写像としての行列

1.1 線形写像

行列 A をベクトルからベクトルへの写像ととらえることができる．すなわち

$$y = Ax \tag{1}$$

はベクトル x をベクトル y に変換する写像である．より正確には $n \times m$ 行列 A は空間 $\boldsymbol{R}^m$ の要素を空間 $\boldsymbol{R}^n$ の要素に写す**線形写像**である．線形写像とは $x_1 \in \boldsymbol{R}^m$ を $y_1 \in \boldsymbol{R}^n$ へ写像し，また， $x_2 \in \boldsymbol{R}^m$ を $y_2 \in \boldsymbol{R}^n$ に写すなら，任意のスカラー α_1 ， α_2 に対して $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in \boldsymbol{R}^m$ は $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \boldsymbol{R}^n$ に写されるような写像のことである．すなわち

$$y_1 = Ax_1, y_2 = Ax_2 \Rightarrow \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

が成り立つことである．行列がこの性質をもつことは明らかであろう．

$\boldsymbol{R}^m$ から $\boldsymbol{R}^n$ への写像は，写像の独立な対が m 個与えられれば一意に決まる．すなわち x_1，x_2，$\cdots$，x_m が $\boldsymbol{R}^m$ の独立な要素で，それらをそれぞれ $y_1, y_2, \cdots, y_m \in \boldsymbol{R}^n$ に写す写像は

$$A = \left[\begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & y_m \end{array} \right]^{-1}$$

で与えられる．このことは容易にチェックできるであろう． A は $n \times m$ 行列となる．

1.2 回転写像

写像のうちで重要なのはベクトルの長さを変えない写像である．たとえば $x \in \boldsymbol{R}^2$ とし， x を図 1 のように角度 θ だけ回転させたベクトル y への写像は次のようにもとめられる．

$$\begin{aligned} y_1 &= r\cos(\theta + \psi), \\ &= r\cos\theta\cos\psi - r\sin\theta\sin\psi \\ &= \cos\theta \cdot x_1 - \sin\theta \cdot x_2 \\ y_2 &= r\sin(\theta + \psi), \\ &= \sin\theta \cdot x_1 + \cos\theta \cdot x_2 \end{aligned}$$

これより

$$R(\theta) = \left[\begin{array}{cc} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{array} \right] \tag{2}$$

がもとめていた写像を表す．関係

$$R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$$

が成り立つことは三角関数の公式を使えば容易に分かるが，この式の意味するところは明らかであろう．まず θ_2，続いて θ_1 だけ回転することは $\theta_1 + \theta_2$ だけ回転することに等しい．

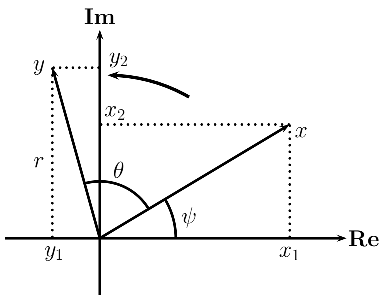

図 1: 回転写像

2　直交変換

2.1　直交行列

図 1 はベクトルの長さを変えない写像である．すなわち $\|x\| = \|y\|$．このような長さを保存する写像はどのような関係を満足しなければならないだろうか? 式 (1) より

$$\|y\|^2 = y^T y = x^T A^T A x = \|x\|^2 = x^T x$$

となるためには $x^T(I - A^T A)x = 0$ が任意の x に対して成り立たなければならない．したがって

$$A^T A = I \tag{3}$$

が満足されねばならない．式 (3) を満足する行列を**直交行列** (orthogonal matrix) とよぶ．直交行列の名前は A の列ベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が互いに直交すること，すなわち

$$a_i^T a_j = < a_i, a_j > = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{4}$$

となることからきている．

$n \times n$ の直交行列は n^2 の要素に式 (4) で与えられる $n(n+1)/2$ 個の制約条件が課されるので，その自由度は

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

である．$n = 2$ の場合は式 (2) のように 1 個の自由度である． $n = 3$ の場合は 3 個の自由度があり，これは 3 次元空間におけるベクトルの向きの自由度に対応している．

2.2　ユニタリ行列

複素行列 $\boldsymbol{C}^{n \times m}$ の場合は式 (3) の代わりに

$$A^* A = I \tag{5}$$

を用いる．式 (5) を満足する行列を**ユニタリ行列** (unitary matrix) とよぶ．

参考文献

[1] 木村英紀，線形代数 数学科学の基礎，東京大学出版会，2003