レポート提出票

科目名: 情報工学実験2

実験テーマ: 実験テーマ5 教育システム設計

実施日: 2020年 11月 16日

学籍番号: 4619055

氏名: 辰川力駆

共同実験者: 書かないと！

1　要旨

2　目的

統計モデルを用いた分析は、例えば商品の推薦や迷惑メールの削除機能など、身近な機能を支える基本的な技術となっている。本実験では、このような統計モデルを用いた分析に欠かせない、パラメタの推定の方法について、基本的な技術を習得することを目的とする。

3　理論

3.1　項目反応理論:複数問の反応からの能力値推定

複数の問題に対する正誤反応を得た場合の能力値の推定について考える。今、ある問題系列について正誤反応 $\mathbf{X}_j = (x_{1,j}, x_{2,j}, ..., x_{n,j})$ が与えられたとする。この時の能力値 θ の推定値を考える際には以下のような数式を考えれば良い。

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \arg\max_{\theta} P(\theta|\mathbf{X}_j) & (1) \\ &= \arg\max_{\theta} P(\theta)P(\mathbf{X}_j|\theta) & (2) \end{aligned}$$

ここで $P(\mathbf{X}_j|\theta)$ はある能力値 θ の受験者が、それぞれの項目に $\mathbf{X}_j$ のように反応する確率である。そのため、それぞれの項目への正誤が θ のみに影響され定まるとすれば、$P(\mathbf{X}_j|\theta)$ は以下のようにかける。

$$\begin{aligned} P(\mathbf{X}_j|\theta) &= P(x_{1,j}|\theta) \times P(x_{2,j}|\theta) \times \cdots \times P(x_{n,j}|\theta) & (3) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(x_{i.j}|\theta) & (4) \end{aligned}$$

つまり、複数のサイコロを同時に投げたときと同様に同時確率とみなすことができる。それぞれの項目への能力値 θ だけを媒介に独立に正誤反応していると考える。これを局所独立仮定という。すなわち、それぞれの項目が他の項目の答えやヒントになっていない状況である。

また、$P(x_{i,j}|\theta)$ は正答の場合と誤答の場合両方を以下のように表すことができる。

$$P(x_{i,j}|\theta) = P_i(\theta)^{x_{i,j}} \times (1 - P_i(\theta))^{1-x_{i,j}} \quad (5)$$

従って、考えるべき式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \arg\max_{\theta} P(\theta|\mathbf{X}_j) \\ &= \arg\max_{\theta} P(\theta) \prod_{i=1}^{n} P(x_{i,j}|\theta) \\ &= \arg\max_{\theta} P(\theta) \prod_{i=1}^{n} (P_i(\theta)^{x_{i,j}} (1 - P_i(\theta))^{1-x_{i,j}}) & (6) \end{aligned}$$

ただし、これを計算機により計算することは、値域が $[0,1]$ を取る関数を複数回かけることになり、計算誤差が生じやすい。そのため、実装上は、このような関数の対数関数を考える。log は単調増加関数であり、ある関数 $f(x)$ が $x = x_{\max}$ で最大を取るとき、$\log(f(x))$ も $x = x_{\max}$ で最大を取る。そのため、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \arg\max_{\theta} P(\theta|\mathbf{X}_j) \quad (7) \\ &= \arg\max_{\theta} \ln\left(P(\theta|\mathbf{X}_j)\right) \quad (8) \end{aligned}$$

そのため、実装上は以下を計算すれば良い。

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta}\Big\{\ln\left(P(\theta)\right) + \sum_{i=1}^{n}\Big(x_{i,j}\ln(P_i(\theta)) + (1-x_{i,j})\ln(1-P_i(\theta))\Big)\Big\} \quad (9)$$

これを対数尤度関数と呼ぶ。

4 課題

4.1 課題 3-1

課題 2-4 で描いた事後分布とその対数尤度関数を図示し、それぞれの最大値にどのような関係があるか示せ。

4.2 課題 3-2

課題 2-1 で描いたグラフを参考に、それらの項目がどのような項目であったのか考察する。

4.3 課題 3-3

$\theta_j = b_i$ の場合、正答確率は 50 % であることを証明する。

4.4 課題 3-4

$\theta_j = b_i$ での項目反応関数の傾きは a_i に比例することを証明する。

4.5 課題 3–5

課題 2-4 で描いた事後分布から能力値を推定する。またその時の標準誤差を求める。

4.6 課題 3c–1

θ の刻み幅を 0.1 以外に 2 パターンを自ら適当に変更した場合の能力値と標準誤差の結果を記述し、結果について考察する。

5 まとめ

表 1: 解いた問題の特性パラメタ

問題	a パラメタ	b パラメタ
3	2.87168	0.69892
9	0.42082	0.22627
21	1.03497	0.31148
24	0.71798	1.22817
30	1.20718	0.65633
35	0.72641	0.14052
40	0.31796	2.23511
51	0.51611	0.94029