

# レポート提出票

科目名: 情報工学実験2

実験テーマ: 実験テーマ1 数理計画法

実施日: 2020年 10月 26日

学籍番号: 4619055

氏名: 辰川力駆

共同実験者:

_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____

# 1 実験の要旨

実験を通して、最急降下法とニュートン法についての理解を深めるとともに、二次元平面にプロットするなどをして議論をする。

# 2 実験の目的

非線形最適化問題に対し、最急降下法とニュートン法を実装・適用を通し、アルゴリズムの特性を理解する。

# 3 実験の原理 (理論)

## 3.1 無制約最小化問題に対する基礎理論

無制約最小化問題とは、 $n$  変数関数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  に対して定義される以下の問題である。

$$\text{Minimize } f(\mathbf{x}) \text{ subject to } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

### 3.1.1 諸定義

$n$  変数関数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  に対し、勾配ベクトル  $\nabla f(\mathbf{x})$  とヘッセ行列  $\nabla^2 f(\mathbf{x})$  はそれぞれ以下のように定義されるベクトルと行列である。

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n} \end{pmatrix}$$

勾配ベクトルとヘッセ行列はそれぞれ 1 変数関数  $f(x)$  の微分係数  $f'(x)$  と 2 階微分係数  $f''(x)$  を  $n$  変数関数に拡張したものである。ヘッセ行列は対称行列になることに注意する。勾配ベクトルとヘッセ行列は  $f$  のテイラー展開に現れる。具体的には、 $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  の周りで 2 次の項まで求めると、以下のようになる。

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{d}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \nabla^2 f(\mathbf{a}) \mathbf{d} + (\text{残差})$$

また、 $n$  次実正方行列  $X$  に対し、

- $X$  が半正定値とは、 $X^T = X$  と、 $\forall \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{d}^T X \mathbf{d} \geq 0$  が成り立つことを言い、
- $X$  が正定値とは、 $X^T = X$  と、 $\forall \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, \mathbf{d}^T X \mathbf{d} > 0$  が成り立つことを言う。

さらに、 $n$  次実対称行列  $X$  に対し、「 $X$  が半正定値 (正定値)  $\Leftrightarrow X$  の固有値がすべて正」が成り立つ。

### 3.1.2 最適性条件

一般に非線形最適化問題において大域的最適解を求めることは極めて難しく、多くの場合は局所的最適解を求めることを目指す。局所最適解については以下の最適性条件が成り立つ。

**定理 (最適性の必要条件)**  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  を無制約最小化問題の局所的最適解とする。このとき、つぎが成り立つ。

- $f$  が連続的微分可能  $\Rightarrow \nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$
- $f$  が2回連続的微分可能  $\Rightarrow \nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$  は半正定値行列

1 次の必要条件  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  を満たす  $\mathbf{x}^*$  を停留点という。

**定理 (2 次の十分条件)** 関数  $f$  が2回連続的微分可能とする。 $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  が以下の条件を満たすならば、 $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  は無制約最小化問題の局所的最適解である。

- $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$
- $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$  が正定値行列

関数が凸性と呼ばれる「良い」性質を持つ場合には、実は、大域的最適解を求めることが比較的容易になる。関数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が以下の条件を満たすとき、 $f$  は凸関数という。

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in (0, 1)$$

$f$  が2回連続的微分可能であるとき、以下の事実が成り立つ。

$$f \text{ が凸関数} \Leftrightarrow \nabla^2 f(\mathbf{x}) \text{ が半正定値行列} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

さらに、凸関数は次の「局所最適性=大域的最適性」を満たす。

$$f \text{ が凸関数のとき、} \mathbf{x}^* \text{ が } f \text{ の局所的最適解} \Rightarrow \mathbf{x}^* \text{ は } f \text{ の大域的最適解}$$

これにより、微分可能な凸関数に対しては、 $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  を満たす  $\mathbf{x}^*$  を求めれば、その  $\mathbf{x}^*$  は最適解であることが保証される。このように、大域的最適解が必ず求まる関数のクラスとして、凸関数は重要なクラスである。

## 3.2 反復法

適当な初期点  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  からスタートし、以下の更新式で次々と点  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ , を生成するアルゴリズムを反復法という。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$$

この式における  $\mathbf{d}_k$  を探索方向、 $\alpha_k$  をステップ幅という。

探索方向としては降下方向になっているものを用いるのが一般的である。具体的には、 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  における降下方向とは以下の条件を満たす  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$  であり、目的関数値が減少する方向である。

$$\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d} < 0$$

$\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$  であれば、 $-\nabla f(\mathbf{x})$  は自明な降下方向である。これを最急降下方向という。

また、ステップ幅は次小節で説明する直線探索を利用して求めることが多い。直線探索を用いた反復法を形式的に書くと以下ようになる。

### 直線探索を用いた反復法

ステップ0: 初期点  $\mathbf{x}_0$  を選び、 $k := 0$  とする

ステップ1: 停止基準が満たされていれば終了とする

ステップ2: 探索方向  $\mathbf{d}_k$  を定める

ステップ3: 直線探索を用いてステップ幅  $\alpha_k$  を定める

ステップ4:  $\mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$ ,  $k := k + 1$  としてステップ幅1に戻る

ステップ1の停止基準としては、勾配ベクトルの大きさ  $\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|$  が十分小さくなったことや、解の更新幅  $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|$  が十分小さくなったことなどに設定する。

## 3.3 直線探索

点  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  と  $\mathbf{x}_k$  における降下方向  $\mathbf{d}_k$  が与えられたときに可能ならばステップ幅  $\alpha_k$  を

$$f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k) = \min\{f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k) | \alpha > 0\}$$

となるように選びたい。関数  $f$  が凸2次関数の場合は正確に  $\alpha_k$  が求まるが、そうでなければこの問題は非常に難しい(それ自体が1変数の最小化問題)。多くの場合は次のアルミホ基準を満たすように  $\alpha_k$  を求める。

定義 (アルミホ基準)  $0 < \xi < 1$  を満たす定数  $\xi$  に対し、

$$f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k) \leq f(\mathbf{x}_k) + \xi \alpha \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k$$

アルミホ条件に対する直線探索 ( $\mathbf{x}_k, \mathbf{d}_k$  は所与とする)

ステップ 0: パラメータ  $0 < \xi < 1, 0 < \tau < 1$  を選び、 $\alpha := 1$  とする

ステップ 1:  $f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k) \leq f(\mathbf{x}_k) + \xi \alpha \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k$  (アルミホ条件) が成り立てば終了する

ステップ 2:  $\alpha := \tau \alpha$  としてステップ 1 に戻る

なお、アルミホ条件に  $\nabla f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k)$  に関する条件を付加したウルフ条件も実用的に多く用いられている。

### 3.4 実験で扱うアルゴリズム

#### 3.4.1 最急降下法

最急降下法とは、反復法におけるステップ 2 の探索方向として、 $\mathbf{x}_k$  における最急降下方向  $-\nabla f(\mathbf{x}_k)$  を常に用いる方法である。本実験で用いる最急降下法は以下の通りである。

##### 最急降下法

ステップ 0: 初期点  $\mathbf{x}_k$  を選び、 $k := 0$  とする。また、 $\epsilon := 10^{-8}$  とする

ステップ 1:  $\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| < \epsilon$  が満たされていれば終了する

ステップ 2: 探索方向を  $\mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$  とする

ステップ 3: アルミホ条件による直線探索を用いてステップ幅  $\alpha_k$  を定める

ステップ 4:  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$ ,  $k := k + 1$  としてステップ 2 に戻る

最急降下法の大域的収束性 関数  $f(\mathbf{x})$  に関するいくつかの仮定の下ではウルフ条件を用いた最急降下法は任意の初期点に対して以下の式が成り立つ。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| = 0$$

このように、初期点に依存せずに停留点に収束するのは最急降下法の強みであるが、その一方で収束スピードが非常に遅い欠点を持つ。

最急降下法の 1 次収束性 最急降下法で生成される点列  $\{\mathbf{x}_k\}$  の収束先を  $\mathbf{x}^*$  とすると以下の式が成り立つ定数  $0 < c < 1$  が存在する。

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq c \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|$$

この式では一見、収束が遅いようには見えないが、 $\mathbf{x}^*$  付近では  $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|$  が非常に微小のため、最急降下法が収束するまでに要する反復数は非常に多い。

### 3.4.2 ニュートン法

ニュートン法は  $f(\mathbf{x})$  2 次の項までのテイラー展開を最小化することを繰り返す方法である。すなわち、

$$q(\mathbf{d}) = f(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) = f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}$$

として、 $\nabla q(\mathbf{d}) = \nabla f(\mathbf{x}_k) + \nabla^2 f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} = \mathbf{0}$  を満たす  $\mathbf{d}$  を探索方向とする。方向  $\mathbf{d}$  はニュートン方向と呼ばれ、以下のニュートン方程式を解くことで得られる。

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$$

本実験で用いるニュートン法は以下の通りである。

#### ニュートン法

ステップ 0: 初期点  $\mathbf{x}_0$  を選び、 $k = 0$  とする。 $\epsilon = 10^{-8}$  とする

ステップ 1:  $\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| < \epsilon$  が満たされていれば終了する

ステップ 2: 方程式  $\nabla^2 f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$  を解いて探索方向  $\mathbf{d}_k$  を求める

ステップ 3:  $\mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k$ ,  $k := k + 1$  としてステップ 1 に戻る

ニュートン法の局所的 2 次収束性 初期点  $\mathbf{x}_0$  を  $\mathbf{x}^*$  の十分近くに点を取ると、ニュートン法で生成される点列  $\{\mathbf{x}_k\}$  は収束し、その収束先を  $\mathbf{x}^*$  とすると以下を満たす定数  $c \geq 0$  が存在する。

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq c \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2$$

1 次収束と異なり、上の 2 次収束は非常に速い。一方で、初期点の取り方が悪ければニュートン法は収束しなかったり、局所最適解でない点に収束することもしばしばある。

## 4 実験課題

次の各項目に取り組む。

- (1) 実験目的とアルゴリズムに関する数学的理論について概要を述べる。
- (2) 以下の2種類の2変数関数に対して最急降下法を実行するプログラムを完成させる。

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + e^{(x_1 - x_2)^2}$$

$$f_2(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^2 a_{ij} x_1^i x_2^j$$

- (3) (2)で作成したプログラムを動かしてふるまいを観察し、性能を考察する。
- (4) 関数  $f_1$  と関数  $f_2$  に対してニュートン法を実行するプログラムを完成させる。
- (5) (4)で作成したプログラムを動かしてふるまいを観察し、性能を考察する。

## 5 実験結果・検討・考察

(1)

上記(目的、原理)で述べた。

(2)

(3)

(4)

(5)

## 6 まとめ

最急降下法とニュートン法をC言語で実装した。また、それらの適用を通し、アルゴリズムの特性を理解することができた。

## 参考文献

[1] 東京理科大学工学部情報工学科 情報工学実験 2 2020 年度東京理科大学工学部情報工学科  
出版

[2] 関数グラフ - GeoGebra

<https://www.geogebra.org/graphing?lang=ja>

最終閲覧日 2020/10/29



## A 付録

ソースコード 1: saiteki.cpp

```
1  #include <bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  template <class T>
4  inline bool chmax(T &a, T b)
5  {
6      if (a < b)
7      {
8          a = b;
9          return 1;
10     }
11     return 0;
12 }
13 template <class T>
14 inline bool chmin(T &a, T b)
15 {
16     if (a > b)
17     {
18         a = b;
19         return 1;
20     }
21     return 0;
22 }
23
24 using pll = pair<long long, long long>;
25 pll sub(long long h, long long w)
26 {
27     if (h % 2 == 0 || w % 2 == 0)
28         return {h * w / 2, h * w / 2};
29     if (h > w)
30         swap(h, w);
31     return {h * (w + 1) / 2, h * (w - 1) / 2};
32 }
33
34 int main()
35 {
36     long long H, W;
37     cin >> H >> W;
38     long long res = H * W;
39
40     for (long long h = 1; h < H; ++h)
41     {
42         vector<long long> a(3);
43         a[0] = h * W;
44         auto p = sub(H - h, W);
45         a[1] = p.first, a[2] = p.second;
46         sort(a.begin(), a.end());
47         chmin(res, a.back() - a[0]);
48     }
```

```

49     for (long long w = 1; w < W; ++w)
50     {
51         vector<long long> a(3);
52         a[0] = H * w;
53         auto p = sub(H, W - w);
54         a[1] = p.first, a[2] = p.second;
55         sort(a.begin(), a.end());
56         chmin(res, a.back() - a[0]);
57     }
58     cout << res << endl;
59 }

```