レポート提出票

科目名: 情報工学実験2

実験テーマ: 実験テーマ1 数理計画法

実施日: 2020年 9月 21日

学籍番号: 4619060

氏名: 照永詩恩

共同実験者:

1　実験の目的

具体例で定式化の練習し, 定式化のコツの習得することを目的とする.

2　実験の原理 (理論)

定式化は, 大雑把に言うと, 言葉で説明された最適化問題に数式での表現を与えることである. 参考文献 [1] に記載されている 4 つ例題をもとにして原理を述べる.

2.1　用語の説明

最適化問題は, 数学的には, 解集合と呼ばれる集合 S と目的関数と呼ばれる関数 $f : S \to \boldsymbol{R}$ が与えられたとき,$f(\boldsymbol{x})$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ を求める問題であり, これを,

$$\text{Minimize} \quad f(\boldsymbol{x}) \quad \text{subject to} \quad \boldsymbol{x} \ \in \ S$$

とかく. つまり,$\boldsymbol{S}$ の任意の $\boldsymbol{x}$ に対し,$f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{x}^*$ を最適解と呼ぶ. また,$\boldsymbol{x}^*$ が局所的に最小なら, つまり,

$$\exists \epsilon > 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in N_\epsilon(\boldsymbol{x}^*), \quad f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

が成り立つなら,$\boldsymbol{x}^*$ を局所的最適解と呼ぶ. ただし,$N_\epsilon(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{x}; ||\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}|| < \epsilon\}$ である. 局所的最適解と区別するために最適解を大域的最適解と呼ぶことも多い. 大域的最適解と呼ぶことも多い. 大域的最適解は局所的最適解になっているが, 逆は成り立たないことに注意せよ.

2.2　例 1

制御できる数値 (数量) は, 庭の縦の長さ $x_1[m]$ と横の長さ $x_2[m]$ であり, 最適化問題の文脈では, 決定変数と呼ばれる. また, 決定変数が満たすべき条件は制約条件と呼ばれる.//

2.3　例 2

制約条件と目的条件が線形式で, さらに, 決定変数が連続値をとる連続変数となる最適化問題として, 定式化される. このような問題は一般に線形計画問題と呼ばれる.

2.4　例 3

離散値をとる変数を整数変数, 特に 0 か 1 の値をとる変数をバイナリと呼ぶ. バイナリ変数は「ON/OFF」や「取る/取らない」等を表現できる極めて有用な変数である. 整数変数を扱う最適化問題は整数最適化問題と呼ばれる.

3　実験方法

次の各項目に取り組む.

(1) 最適化問題とみなせる現実問題の例を挙げよ. ただし, 目的関数, 制約条件, 決定変数を大雑把に述べる程度で良い.

(2) 問 1 から問 6 に答えよ.
問 1 から問 6 は次のとおりである.

問 1 例 2 の問題を定式化せよ.

問 2 例 2 の定数に具体的な数値を代入し, そのときの最適解と最適値を求めよ. ただし,(x_1, x_2)-平面を描いて制約条件を満たす解の領域を図示すること.

問 3 例 3 の問題の最適解と最適値を求めよ.

問 4 例 3 の定式化に 2 つの制約条件を追加する. これらがどのように数式で表現できるかを述べ, その妥当性を説明せよ.

A. グミとガムの両方は買わない.
B. ポテチを買うならガムを買う.

問 5 (例 4 の定式化の準備). 決定変数 x と y を考える.x はバイナリ変数,y は連続変数とする.$x = 1$ のときに y は a 以上 b 以下の値をとることができ,$x = 0$ のときには $y = 0$ でないといけないようにした. この制約を数式で表現し, その妥当性を説明せよ.

問 6 例 4 の問題を定式化せよ.

(3) 最適化問題とみなせる現実問題の例を挙げ, 実際に定式化せよ.(1) と同じ内容でもよい.

4　結果

(1) 成人の食事問題については現実の最適化問題とみなせるのではないかという考えについた. この問題は, 食品の種類をうまく決めて, 栄養バランスと成人が取るべき値である $1600[kcal] \sim 1800[kcal]$ を制約条件として食品の量を最大化摂取するというものとみなせると考えた.

(2)

問 1 2 つの野菜の合計の値段を $f(\boldsymbol{x})$,2 つの野菜のそれぞれの量を $x_1[g]$,$x_2[g]$, それぞれの単価を c_1,c_2, とする．また, 栄養素は A_1,A_2,A_3 がある. 栄養素 A_i は一日 $b_i[mg]$ 取らなければならない. ただし,$(i = 1, 2, 3)$ とする. この問題を定式化すると,

$$f(\boldsymbol{x}) = c_1x_1 + c_2x_2,\ S = \{\boldsymbol{x}; x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}, x_1, x_2 \geq 1, a_{i1}x_i + a_{i2}x_i \geq b_i\}$$

とすると,Minimize $f(\boldsymbol{x})$ subject to $\boldsymbol{x} \in S$ とかける.

問 2 野菜 V_1 の栄養素の定数を 2,0.1,0.1 とし V_2 の定数を 3,0.3,0.1 とした. 単価は 0.1,0.15 とした. グラフを書きその端点をとってその中で一番値の小さいものを選んだ. 結果は (1500,2000) が最適解となり,450 が最適値となった.

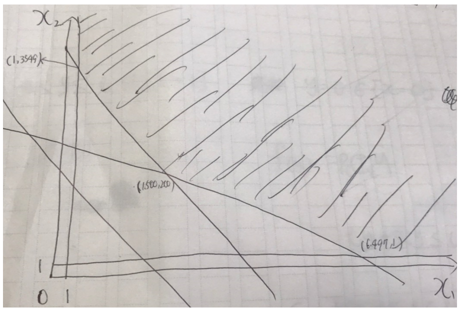

図 1:(x_1,x_2) 平面

問 3 300 円以下で最大の嬉しさの値はチョコレートとクッキーとグミを買ったときの 21 となった.

問 4

A x_4,x_5 をそれぞれグミとガムとしてこの制約条件を数式化 (線形式) で表すと,

$$x_4 + x_5 < 2$$

とたてられることができる.

B x_3,x_5 をそれぞれポテチとガムとしてこの制約条件を数式化すると

$$x_3 \leq x_5$$

問 5 この条件を数式化するとそれぞれ

$$a \leq y \leq b \in \{x = 1\}$$
$$y = 0 \in \{x = 0\}$$

となると考えた.

問 6 稼働しているかしていないかという変数を $\boldsymbol{x}$(バイナリ変数), 稼働時間を $\boldsymbol{y}$(連続変数) とおく. $i = 1, 2$ として目的関数, 制約条件を次のように

$$f(\boldsymbol{y}) = p_i e_i \boldsymbol{y}, \quad S = \{\boldsymbol{y}; a \leq y \leq b \in \{\boldsymbol{x} = 1\}, y = 0 \in \{\boldsymbol{x} = 0\}, t_i y + s_i y \leq U\} \tag{2}$$

として,Maximize $f(x)$ subject to $\boldsymbol{y} \in$ S とかく.

(3) 「とある学校で 6 科目中 3 科目のテストを受けなければいけない. 事前にそれぞれの科目はどのくらい得意なのかというアンケートを取りさらに問題作成者に難易度はどれくらいかを聞いたという設定にする.A くんは難易度が 150 を超えてしまうと精神状態が悪くなり今までの力が発揮できなくなってしまうようです. それ以下であれば得意であれば得意であるほど点数が高くなるようです. どの科目を選ぶのが最適でアンケートで答えた数値の合計はいくつになるか」という問題を作成した. これを定式化してみる.

表 1: A くんがそれぞれどれくらい得意なのかとその科目のテストの難易度

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
得意の度合い	10	8	9	4	5	1
難易度	80	60	70	50	40	10

決定変数は受けるか受けないかということでバイナリ変数 $\boldsymbol{x}$ とする. 目的関数と制約条件をそれぞれ,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= 10x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 5x_5 + x_6 \\ S &= \{\boldsymbol{x}; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}, \\ & \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3, \\ & \quad 80x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 50x_4 + 40x_5 + 10x_6 \leq 150\} \end{aligned}$$

と書くことができ,Maximize $f(x)$ subject to $\boldsymbol{y} \in$ S とかく.

5 検討・考察

(2)

問 1 この問題は値段の合計を最適化するのでそれを目的関数, 決定変数を野菜の量にした. 決定した目的関数と決定変数を利用して値段の合計を求める式と制約条件の式を設定することができると考えた.

問 2 グラフで領域を書いて端点のどれかが最適解だと考えた. 今回の自ら設定した定数の場合端点は 3 つ出てきたのでそれぞれの端点を代入して最小値をだしてそれを最適値とした.

問 3 全 $2^5 = 32$ 通りを探索するという考えで C 言語を用いた．配列 (嬉しさ, 値段,$0 \sim 32$ の二進数各ビット格納) と for 文, 各ビットの論理積を使って最適値をだした．また, 最適値がでたときの組み合わせとして 10 進数表記で出力される. それを 2 進数変換することで組み合わせを求めることができると考えた.

問 4 ポテチとガムの両方を買うことはできなくバイナリ変数を使っていることからこの場合 $x_4 + x_5 = 2$ となる．つまりこれ以外のものになればよいというものでありかつ $x_4 + x_5$ の最大値は 2 でありしかも両方買うという場合の値のみなので結果のような式を立てた.
ポテチを買うならガムを買うという条件に対して, ポテチを買うがガムを買わないということはしてはいけない．これらの決定変数は 0 か 1 が答えでありこの条件が当てはまるものとして $x_3 = x_5$ もしくは $x_3 < x_5$ ということになるのではないかと考えた.

問 5 これらの条件を $\{x = 0\}$ という集合の中に含んでいる,$\{x = 1\}$ の集合に含んでいると書くことで表現できるのではないかと考えた.

問 6 問 5 で数式化したものも使い稼働時間を決定変数 $\boldsymbol{y}$ として総利益を最大にする目的なので総利益を目的関数とした．稼働しているとき一日の総消費電力が制約条件に入っていたのでセットアップに使う電力と単位時間に使う電力を決定変数を利用して数式化することで正しい定式化ができるのではないかと考えた.

(3) バイナリ変数を決定変数とする問題を作成してみた. 私自身も一般教養を選択するにおいて前年度の成績の比率などを参考にしている. そのような経験からこのような問題を作る発想に至った.

6 結論

例題を通して定式化する方法を身に着けることができた. また, その簡単な例題から最適値を求めることができた.

参考文献

[1] 情報工学実験 1, 東京理科大学 工学部 情報工学科, 2020.

A　付録

```
#include<stdio.h>
int main()
{
int a[5]={10,5,7,6,3};//嬉しさ
int b[5]={140,80,130,70,30};//値段
int c=1;//論理積につかう値
int d[32][5];//各セルに対して 0 か 1 を格納するための配列
int i,j;//for 文に使う
int k;//論理積の結果を代入する用
int ans1,ans2;//嬉しさと値段の合計
int e=-100000000,f=300;//嬉しさの最大値と制約条件である 300 円
int g;//10 進数表記用

for(i=0;i<32;i++)//配列 d に 1~32 までの二進数の各ビットの数字を格納
{
k=i+1;
for(j=4;j>=0;j--)
{
d[i][j]=k&c;
k=k >> 1;
}
}

for(i=0;i<32;i++)//嬉しさと値段の合計を求めて最適値を出す
{
ans1=0;
ans2=0;
for(j=0;j<5;j++)
{
  ans1+=a[j]*d[i][j];
ans2+=b[j]*d[i][j];
}
if(ans1>e&&ans2<=f&&ans1>0)
{
e=ans1;
g=i+1;
}
}
```

```
printf("最適値%d(%d のとき)\n",e,g);
return 0;
}
```

図 A.2:(2) の問 3 ソースコード