

# Шпаргалка по интегралам

## Таблица интегралов

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (3)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (5)$$

## Интегрирование дробно-рациональной функции

- 1) Определить, является ли дробь правильной (по степеням многочленов). Если нет – поделить числитель на знаменатель.
- 2) Разложить знаменатель на множители.
- 3) Представляем дробь в виде суммы рациональных дробей. Знаменатели – множители из п. 2, числители – выражения с новыми переменными  $A, B, C, \dots$ , причем:
  - Если есть кратные множители  $x^n$ , требуется написать в сумму  $n$  дробей вида  $\frac{A_i}{x^i}$ ,  $i = 1..n$
  - Если среди множителей есть неразложимые квадратные трехчлены, в соотв. числителе – выражения вида  $Ax + B$ .
  - Если знаменатель –  $x^n$  или  $(x + \alpha)^n$ , то в соотв. числителе – единственная переменная.
- 4) Привести полученную сумму к общему знаменателю и приравнять к исходной дроби
- 5) Найти значения новых переменных методом неопределенных коэффициентов (сгруппировать слева и справа эти переменные при  $x$  в одной степени, составить и решить систему линейных уравнений)
- 6) Интегрировать найденную в п. 4 сумму с найденными в п. 5 числителями

## Подстановки Эйлера

Используются для интегрирования рациональных функций, содержащих  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ .

Первая подстановка, если  $a > 0$ :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{a}x \quad (6)$$

Вторая подстановка, если  $c > 0$ :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{x} \quad (7)$$

Третья подстановка, если подкоренное выражение имеет два действительных корня:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda), \lambda - \text{один из корней} \quad (8)$$