

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského, Bratislava

Porovnanie Slovenskej a Českej železničnej infraštruktúry

*Tomáš Antal
Teo Pazera
Andrej Špitalský
3DAV*

11. mája 2025

1 Úvod

Cieľom projektu je analyzovať a porovnať siete železničnej infraštruktúry Slovenska a Česka. Ako hlavnú hypotézu našeho projektu sme zvolili

V čom a ako veľmi je Česká železničná infraštruktúra lepšia od tej Slovenskej?

Dáta ktoré sme prevažne použili pri našom projekte pochádzajú od Humanitarian OpenStreetMap tímu, sú teda verejne dostupné na adresách pre Slovensko https://data.humdata.org/dataset/hotosm_svk_railways a pre Česko https://data.humdata.org/dataset/hotosm_cze_railways.

Pre ďalšie potreby analýzy v sekcii 4 sme využili aj údaje o počte obyvateľov v jednotlivých obciach na Slovensku z adresy <https://github.com/adammertel/municipalities-slovakia/blob/master/out/municipalities-slovakia.csv> a rovnaké údaje o obciach v Česku z adresy <https://csu.gov.cz/produkty/pocet-obyvatel-v-obcich-9vln2prayv>.

Podiel práce

- Tomáš Antal – deskriptívna analýza, spíšanie reportu (33.3%)
- Teo Pazera – spracovanie dát, pomer najkratšej a vzdušnej vzdialenosťi (33.3%)
- Andrej Špitalský – Kirchhoffov index, centralita efektívnej rezistencia (33.3%)

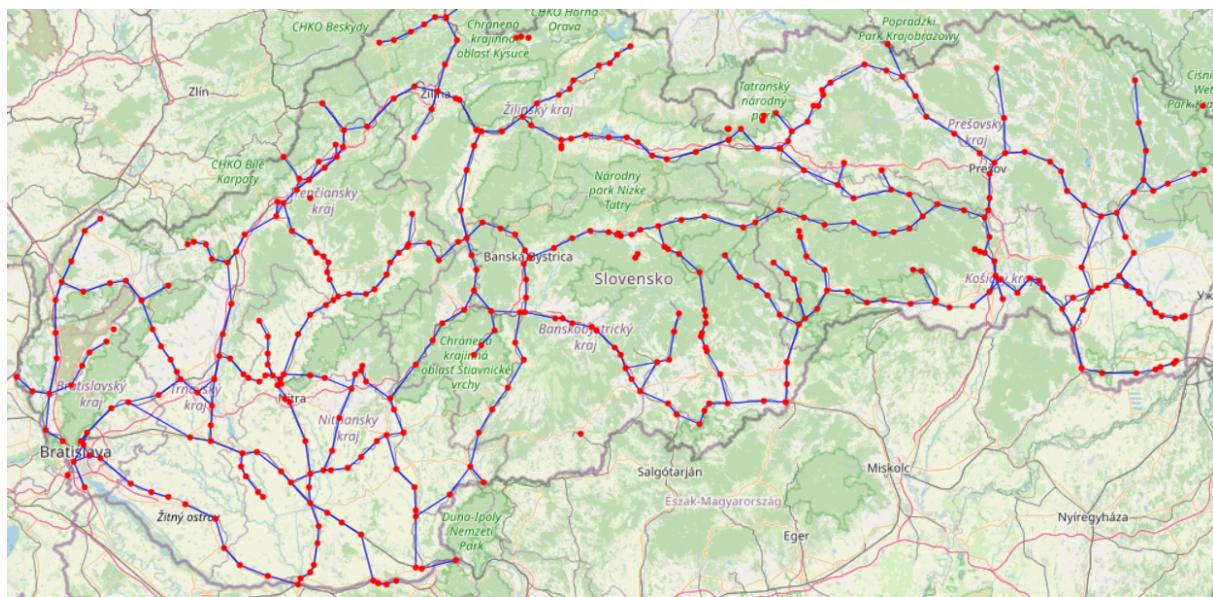
2 Spracovanie údajov o vlakových sietiach

Pre každú krajinu sme získali dva typy súborov. Prvý typ obsahoval údaje o jednotlivých staniciach v danej krajine, teda názvy staníc a ich zemepisné šírky a dĺžky. Druhý typ obsahoval údaje o prepojeniach medzi stanicami, teda dvojice bodov vyjadrené pomocou zemepisných šírok a dĺžok.

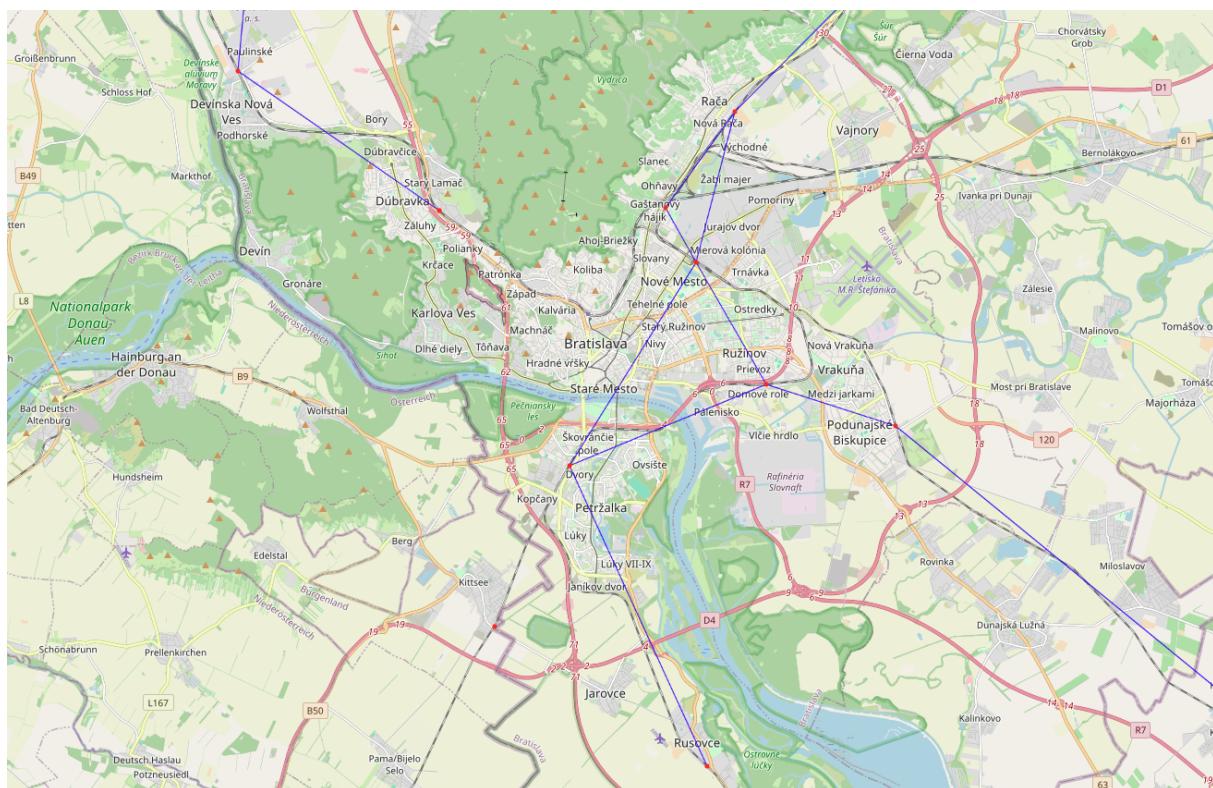
Bohužiaľ, tieto typy údajov nebolo možné priamo namapovať na seba kvôli nekonzistenciám v údajoch. Preto sme použili heuristický prístup, pri ktorom sme pre každé spojenie určili začiatočnú a konečnú stanicu ako tie stanice z datasetu, ktoré sú najbližšie k začiatočnému a konečnému bodu spojenia. Týmto spôsobom sa nám podarilo vytvoriť graf reprezentujúci železničné siete pomocou knižnice NetworkX. Následne, pre doplnenie údajov, sme do grafu pridali váhy hrán reprezentujúce vzdušnú vzdialenosť medzi stanicami, keďže naše údaje neposkytovali presné vzdialenosť medzi prepojenými stanicami.

Z prvotného pohľadu na našu reprezentáciu slovenskej železničnej siete (obrázok 1) môžeme povedať, že zachytáva reálnu sieť relatívne dobre, avšak s niekoľkými nedostatkami. Napríklad stanica vo Veľkom Krtíši nie je prepojená so žiadnou inou stanicou. Dôvodom je, že v realite je prepojená s Lučencom, ale traťou prechádzajúcou cez Maďarsko. Práve takéto hrany, ktoré prechádzajú cez zahraničné územie, v našej sieti chýbajú. Podobne, pri bližšom pohľade na oblasť Bratislavы (obrázok 2), sme zistili, že nie je zahrnutá Bratislava hlavná stanica a tiež nie je prepojená trať smerom na Záhorie. Na základe týchto zistení sme manuálne doplnili niekoľko hrán a staníc do grafu slovenskej železničnej siete.

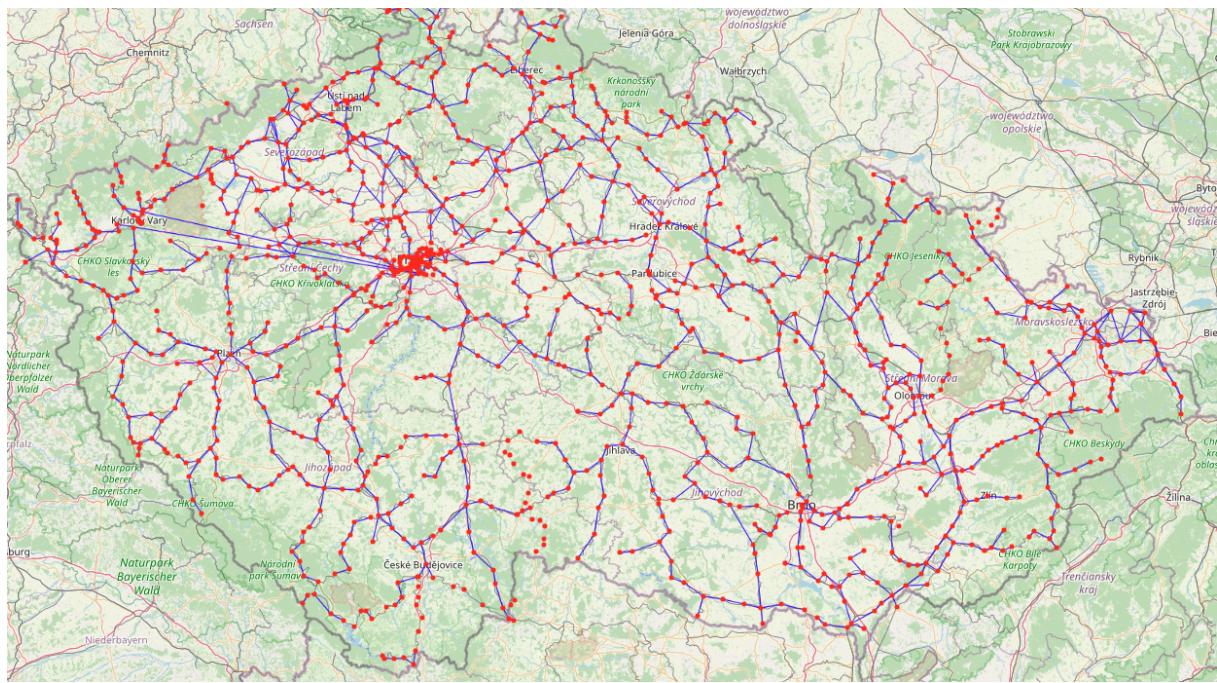
Pre českú železničnú sieť, ktorá je rozsiahlejšia, vzniklo výrazne viac nekonzistencií s realitou. Prvým problémom, ktorý sme identifikovali, bolo, že sa do nášho datasetu dostali zastávky pražského metra (obrázok 4). Rozhodli sme sa ich nepoužiť, keďže metro nepatrí



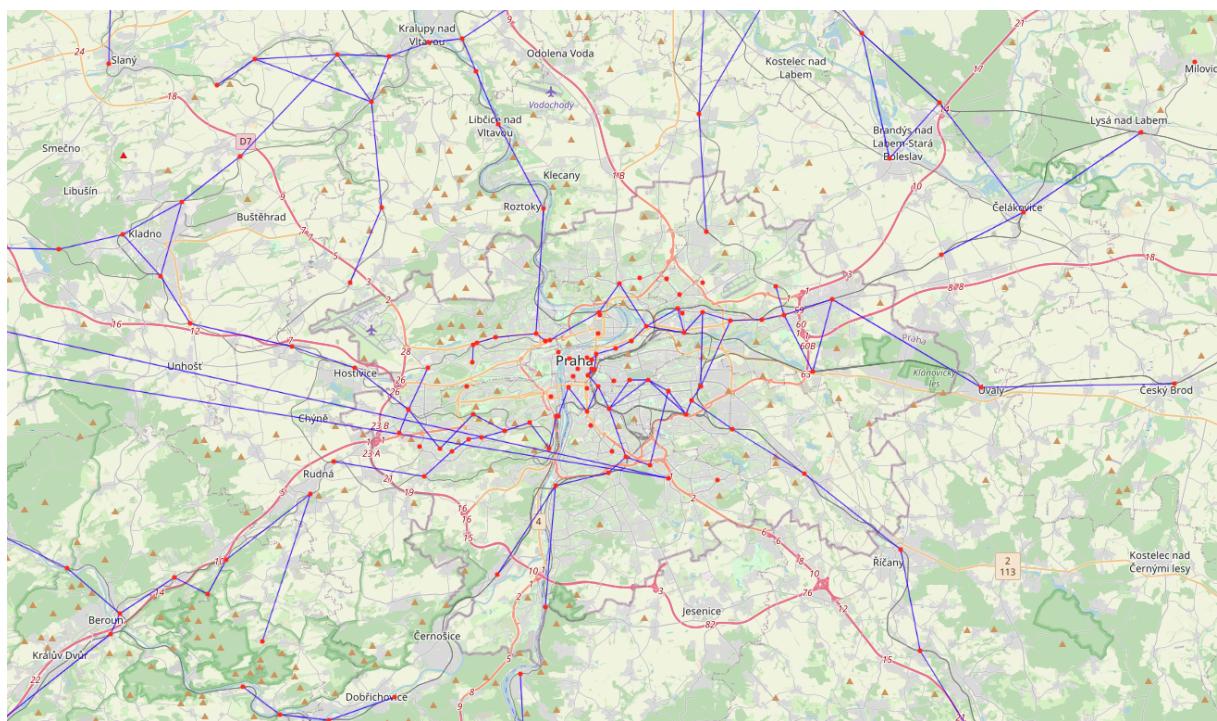
Obr. 1: Prvotný pohľad na našu reprezentáciu slovenskej železničnej siete



Obr. 2: Prvotný pohľad na reprezentáciu slovenskej železničnej siete v okolí Bratislavы

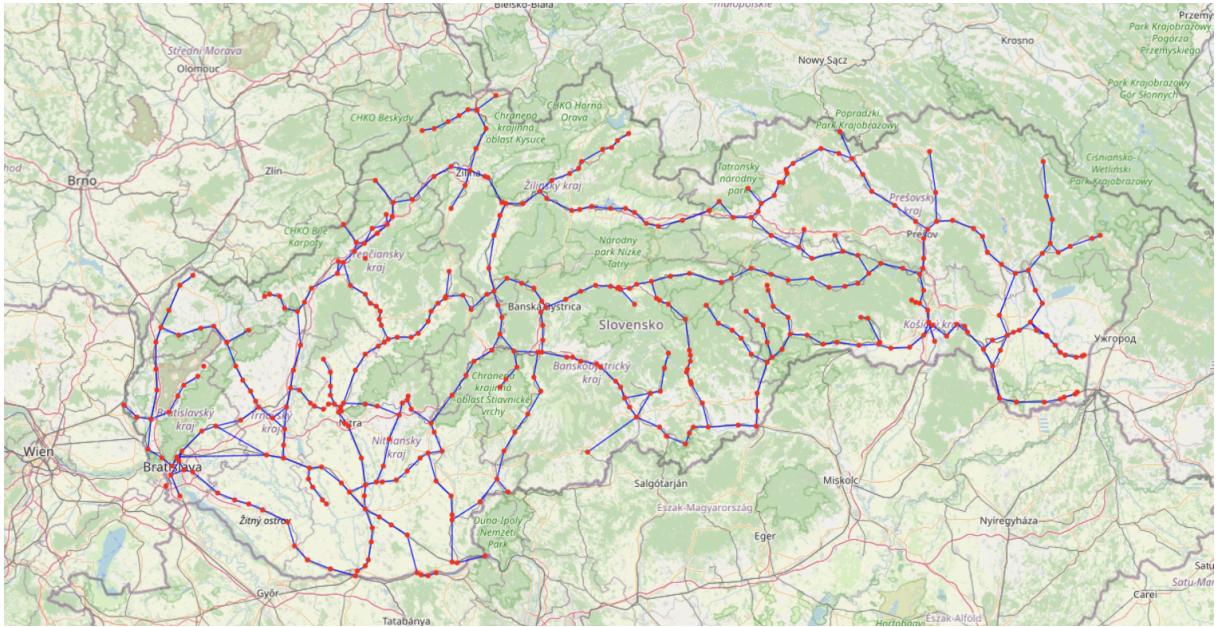


Obr. 3: Prvotný pohľad na našu reprezentáciu českej železničnej siete



Obr. 4: Prvotný pohľad na našu reprezentáciu českej železničnej siete v okolí Prahy

priamo k vlakovej doprave, ale skôr k mestskej hromadnej doprave. Toto však narušilo sietť v okolí Prahy, a preto sme museli manuálne pridať množstvo hrán a tiež niekoľko staníc. Okrem toho, na obrázku 3 môžeme vidieť viacero staníc, ktoré nie sú prepojené so žiadnymi inými stanicami, napríklad v okolí Českých Budějovíc. Pri bližšom pohľade sme však zistili, že v realite existujú spojenia pre tieto stanice. Takýchto nepravidelných výpadkov bolo v sieti pomerne veľa. Keďže sme nenašli lepšie riešenie, rozhodli sme sa manuálne doplniť väčšinu siete, aby sme zabezpečili, že naša reprezentácia je čo najbližšie k realite. Nakoniec sme do českej siete pridali viac ako 170 spojení, odstránili 59 staníc a tiež odstránili niekoľko neexistujúcich spojení.



Obr. 5: Železničná trať Slovenska

3 Deskriptívna analýza

Ako prvé sa pozrieme na základné štatistické ukazovatele pre obe železničné siete – slovenskú aj českú. Obe tieto siete môžeme vidieť na obrázkoch 5 a 6.

Okrem iných metrík uvádzame aj *vážený polomer* a *vážený priemer grafu* (tzv. *diameter*), ktoré bližšie charakterizujú štruktúru siete z hľadiska vzdialenosí medzi stanicami.

Tieto metriky definujeme nasledovne:

$$\text{vážený polomer grafu: } \text{rad}(G) = \min_{v \in V} e(v) = \min_{v \in V} \left(\max_{u \in V} d(v, u) \right),$$

$$\text{vážený priemer grafu (diameter): } \text{diam}(G) = \max_{v \in V} e(v) = \max_{v \in V} \left(\max_{u \in V} d(v, u) \right),$$

kde $d(u, v)$ predstavuje váženú vzdialenosť (v našom prípade dĺžku trate) medzi stanicami u a v a $e(v)$ je excentricita vrcholu v , teda najväčšia vzdialenosť z tohto vrcholu do ľubovoľného iného vrcholu v grafe.

Základné štatistiky uvádzame v tabuľke 1. Okrem prvých troch metrík uvádzame hodnoty len pre najväčší komponent daného grafu.

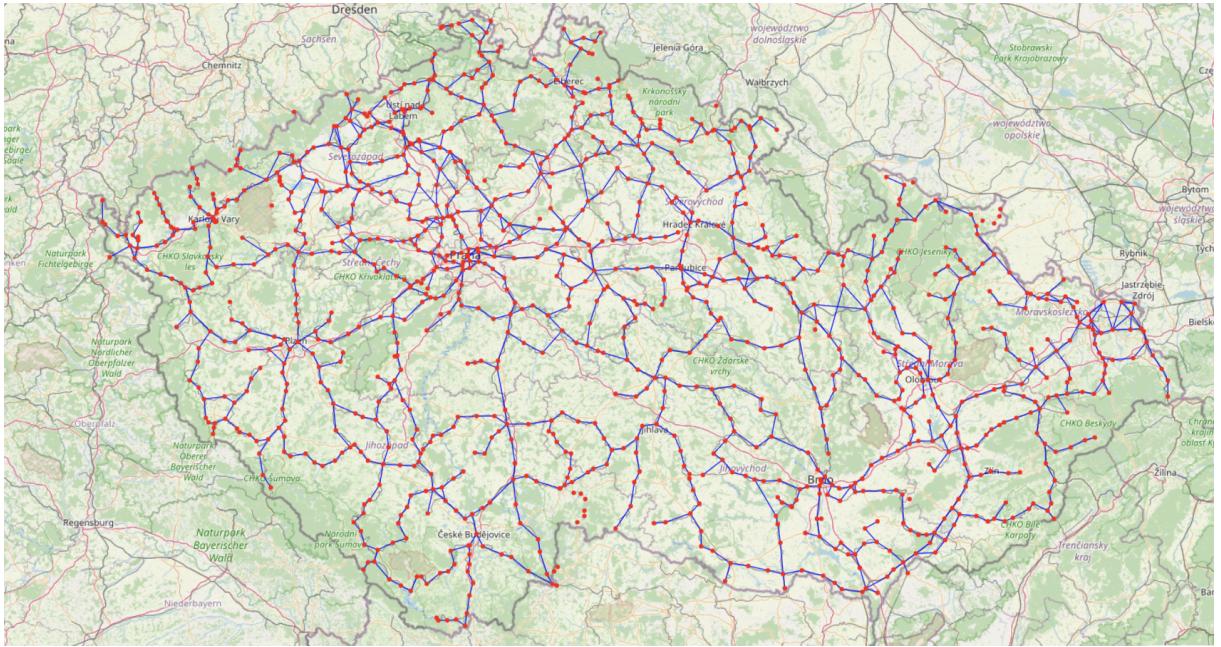
Priemerný stupeň vrchola označujeme $\mathbb{E}(k)$ a definujeme ho ako:

$$\mathbb{E}(k) = \frac{2m}{n}$$

a $\rho(G)$ označuje hustotu siete.

Ako prvé si môžeme všimnúť rozdielny počet vlakových staníc v Česku a na Slovensku. Tento rozdiel je však do značnej miery ovplyvnený aj rozlohou jednotlivých krajín. Po prepočte na tisíc kilometrov štvorcových získavame hodnoty 14,53 staníc pre Česko a 8,69 pre Slovensko. Znamená to, že Česko má vyššiu hustotu železničných staníc nie len v absolútnych číslach, ale aj v pomere k veľkosti územia.

Na druhej strane však v prípade Česka pozorujeme výrazne väčší počet komponentov súvislosti v železničnej sieti. V tomto bode je potrebné poznamenať, že napriek snahám



Obr. 6: Železničná trať Česka

	Česko	Slovensko
Počet komponentov	35	6
Počet všetkých vrcholov (staníc)	1146	426
Počet všetkých hrán (tratí)	1262	449
Počet vrcholov	1108	421
Počet hrán	1258	449
$\mathbb{E}(k)$	2,27	2,13
$\rho(G)$	0,0021	0,0051
$\text{diam}(G)$ [km]	613	562
$\text{rad}(G)$ [km]	311	282

Tabuľka 1: Základné štatistiky železničných sietí Slovenska a Česka

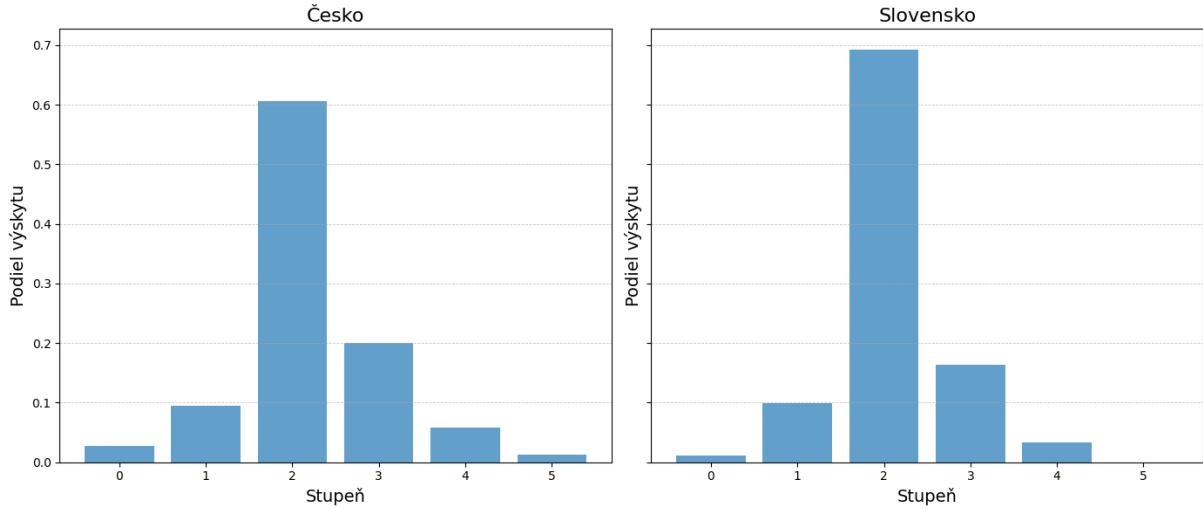
o čo najpresnejšie doplnenie údajov môže byť takýto vysoký počet komponentov skôr dôsledkom neúplnosti alebo nekonzistencie v dostupných dátach.

V hodnotách priemerného stupňa vrcholu a hustoty siete nepozorujeme výrazné rozdiely medzi oboma krajinami. Naopak, polomer a priemer železničných sietí zodpovedajú veľkostnému rozdielu medzi Českom a Slovenskom, pričom väčšie územie sa prirodzene prejavuje vo väčších hodnotách týchto metrík.

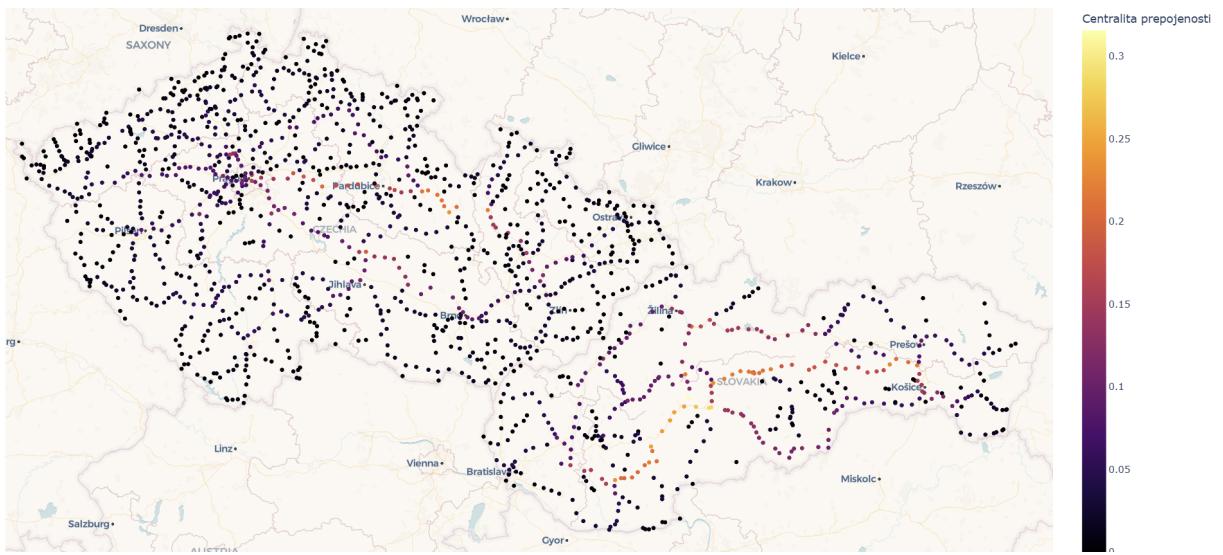
Na obrázku 7 je znázornené rozdelenie stupňa vrcholov. V oboch krajinách pozorujeme podobný trend – najčastejšie sa vyskytujú stanice, ktoré sú prepojené s dvomi ďalšími stanicami. Rozdiel však spočíva v tom, že v Česku sa vyskytujú aj stanice so stupňom až päť, čo na Slovensku zaznamenané nebolo.

Ako ďalšie si uvedieme porovnanie oboch krajín na základe rôznych centralít.

Centralita prepojenosti – táto metrika nám hovorí o tom na koľko je daný uzol prepojovacím článkom v celej sieti, teda koľko dôležitých ciest cezeň vedie. Formálne pre



Obr. 7: Rozdelenie stupňa vrcholov



Obr. 8: Centralita prepojenosti

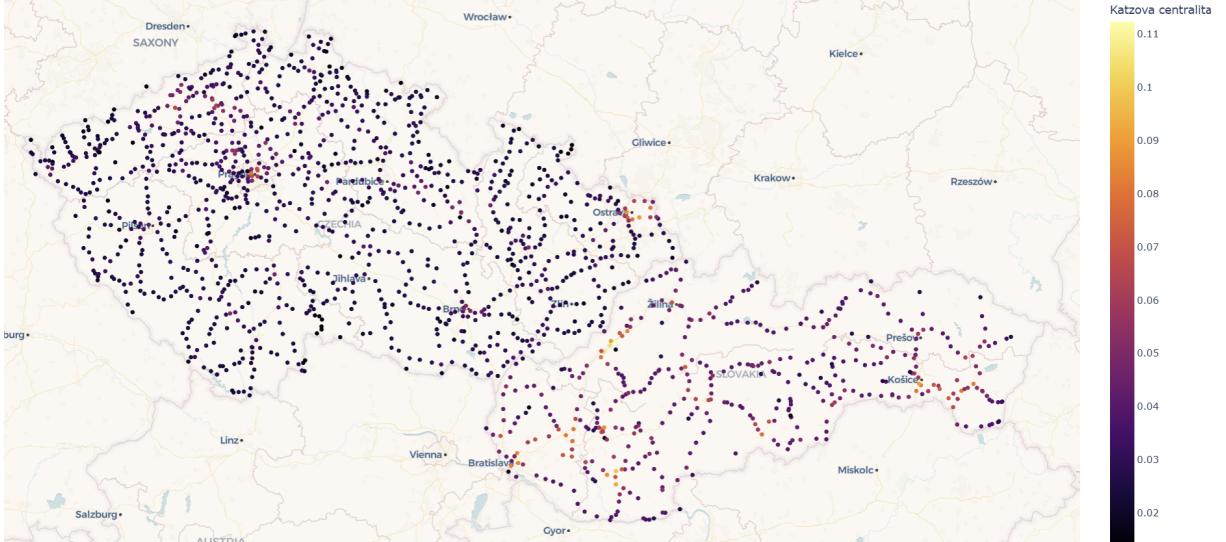
každý vrchol v definujeme

$$c_B(v) = \frac{\sum_{s,t \in V} \frac{\sigma(s,t|v)}{\sigma(s,t)}}{\frac{(n-1)(n-2)}{2}},$$

kde V je množina uzlov, $\sigma(s,t)$ je počet najkratších ciest medzi s a t a $\sigma(s,t|v)$ je počet týchto ciest, ktoré vedú cez nejaký uzol v odlišný od s a t . Ak $s = t$, potom $\sigma(s,t) = 1$, a ak $v \in \{s,t\}$, potom $\sigma(s,t|v) = 0$.

Situáciu našich dát možno vidieť na obrázku 8. Najdôležitejšie stanice z hľadiska centrality prepojenosti na Slovensku sa nachádzajú na „strednej“ trati, konkrétnie na úseku vedúcom z Nových Zámkov cez Banskú Bystricu až do Prešova. Tento trend je očakávaný, keďže severná a južná trať sú oproti nej obchádzkovejšie a teda menej priame. V Česku pozorujeme podobný vzor: kľúčové uzly sa sústredzujú v strednej časti republiky, napríklad na trasách z Prahy cez Pardubice alebo z Prahy južnejšie smerom do Brna.

Katzova centralita – metrika, ktorá rozsíruje ideu centrality vlastného vektora tak, že berie do úvahy nielen priame susedstvá, ale aj všetky dlhšie cesty v grafe, pričom



Obr. 9: Katzova centralita

príspevok každej cesty klesá s jej dĺžkou. Pre vrchol i ju definujeme ako:

$$x_i = \alpha \sum_j A_{ij} x_j + \beta,$$

kde A je matica susedností s vlastnými hodnotami λ . Parameter β určuje počiatočnú hodnotu centrality a platí

$$\alpha < \frac{1}{\lambda_{\max}}.$$

Pre parameter β sme zvolili hodnotu 1 a α sme nastavili na $\frac{0.8}{\lambda_{\max}}$. Na obrázku 9 môžeme vidieť výsledky pre obe krajiny.

Vidíme, že sa pre Slovensko aj Česko ukazujú dôležité stanice v hlavných mestách. Pre Česko tento výsledok nie je až taký prekvapivý, keďže Praha má okolo seba veľa zastávok. Na druhej strane však podobne dôležitou vychádza aj Bratislava, ktorá má v tesnej blízkosti menší počet zastávok. Taktiež si môžeme všimnúť, že Bratislava je podľa tejto metriky na rovnakej úrovni ako napríklad Vrútky alebo Šurany, ktoré sú pomerne významnými prestupnými stanicami. Okrem toho vidíme na Slovensku aj pomerne významnú časť severnej trate vedúcej cez Trenčín.

Ako posledné sa pozrieme na skupiny vrcholov a to v južnej a severnej časti krajiny, keďže trate sa zdajú byť celkom odseparované. Sieť si najprv rozdelíme na severnú a južnú časť, tak ako na obrázku 10.

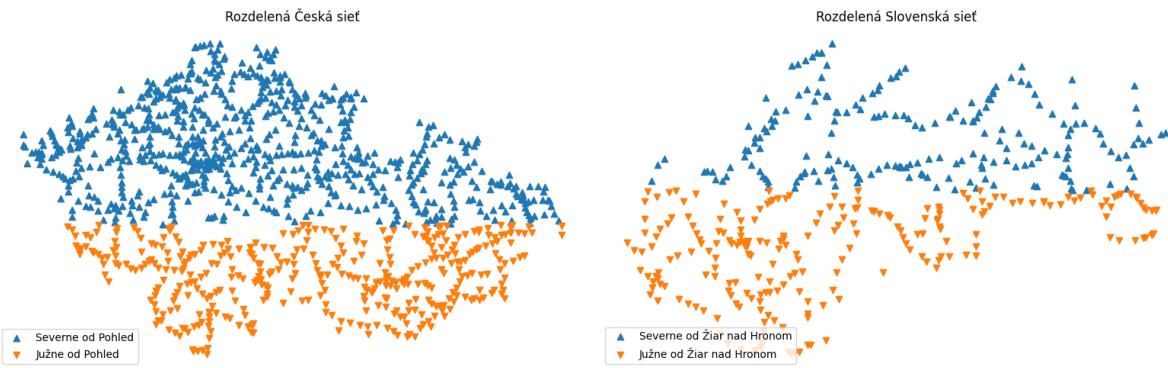
Pre takto rozdelenú sieť spočítame modularitu vzhľadom na príslušnosť ku danej skupine. Váženú modularitu vzhľadom na nezoraditeľnú vlastnosť definujeme takto:

$$Q_w = \frac{1}{2m} \sum_{i,j} \left(w_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right) \delta_{g_i, g_j},$$

kde

$$k_i = \sum_j w_{ij}, \quad m = \frac{1}{2} \sum_{i,j} w_{ij}, \quad \delta_{g_i, g_j} = \begin{cases} 1, & g_i = g_j, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Vyšli nám hodnoty 0.96 pre Česko a 0.90 pre Slovensko čo znamená, že väčšina váhy, teda kilometrov trate sa nachádza vnútri daných skupín. Prekvapivo pre Česko je to o



Obr. 10: Rozdelenie na južnú a severnú časť pre obe krajiny

6% viac ako pre Slovensko, čo by sme nemuseli očakávať, keďže na obrázku 10 vidíme, že vrcholy sú na nami zadefinovanej hranici oddelujúcej „juh“ a „sever“ hustejšie, teda by sme mohli očakávať viacero prepojení (tratí), medzi týmito mestami.

4 Pomer dĺžky najkratšej cesty v sieti a vzdialenosťi vzdušnou čiarou

V tejto časti porovnávame efektívnosť železničných sietí na Slovensku a v Českej republike. Naša hypotéza predpokladá, že nižšia prepojenosť slovenskej siete spôsobuje, že cestujúci musia častejšie využívať nepriame trasy, čo vedie k vyššiemu pomeru dĺžky najkratšej cesty v sieti k priamej vzdialenosťi medzi stanicami v porovnaní s českou sieťou.

Na overenie hypotézy sme použili stochastický prístup. Náhodne sme vyberali dvojice staníc a určovali najkratšiu cestu v sieti na základe váh hrán reprezentujúcich vzdialenosť. Túto dĺžku sme porovnali s priamou vzdialenosťou medzi stanicami, vypočítanou pomocou ich geografických súradníč, a vypočítali pomer týchto dvoch hodnôt.

Stanice sme nevyberali rovnomerne náhodne, ale vážili sme ich podľa počtu obyvateľov obcí, ku ktorým patria, aby sme lepšie odrážali reálne cestovné vzorce – väčšie mestá sú častejšími cieľmi. Ak jedna obec mala viacero staníc, počet obyvateľov sme rozdelili proporcne. Staniciam, ktoré nebolo možné priradiť k obci, sme priradili predvolenú hodnotu 1000 obyvateľov. Následne sme normalizovali počty obyvateľov, aby sme získali pravdepodobnostné rozdelenie. Celkový počet obyvateľov použitý pre Slovensko bol 3 096 147 a pre Česko 7 179 048.

Na ilustráciu náhodného výberu dvojice staníc sme zvolili príklad zo Slovenska, znázornený na obrázku 11. Spojenie medzi stanicami Kokava nad Rimavicou a Spišská Nová Ves, ktoré sú geograficky relatívne blízko, ukazuje značnú neefektívnosť železničnej siete. Najkratšia cesta železnicou je 3,8-krát dlhšia ako priama vzdialosť vzduchom, čo poukazuje na obmedzenú prepojenosť siete v tejto oblasti.

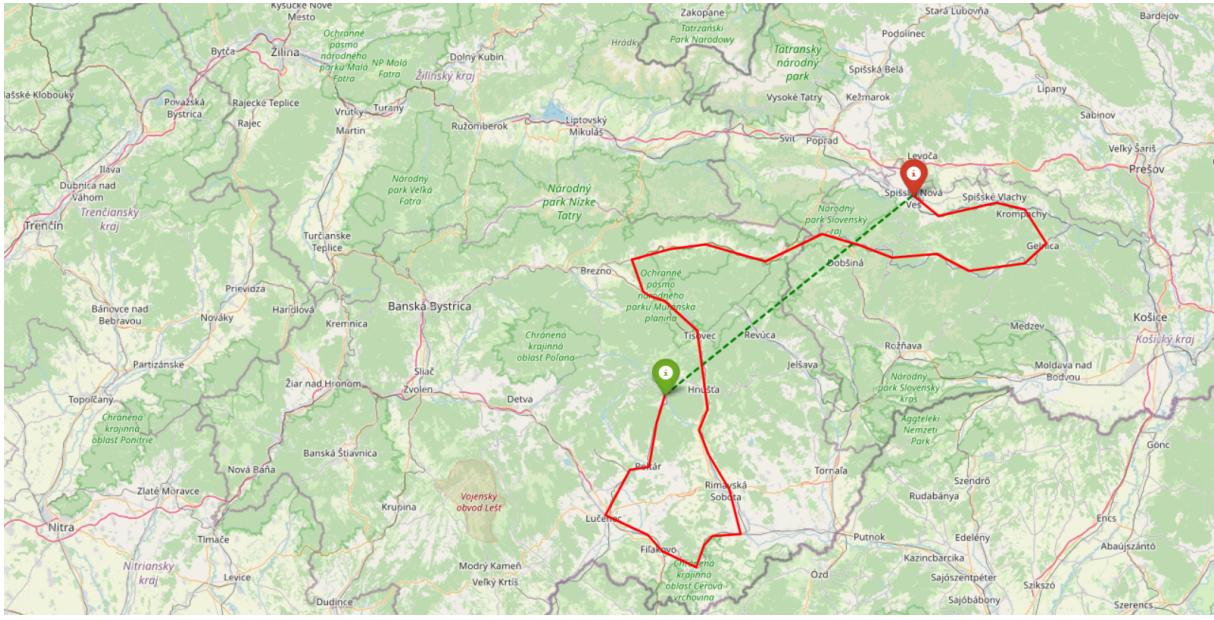
Simuláciu sme pre obe krajinu spustili miliónkrát. Výsledky simulácie sú zhrnuté v tabuľke 2.

	Slovensko	Česká republika
priemerný pomer	1.7941	1.3394
medián pomeru	1.3172	1.2710
maximálny pomer	375.0649	38.3310

Tabuľka 2: Porovnanie pomerov dĺžok ciest medzi stanicami

Na Slovensku sme zaznamenali extrémny pomer 375.0649 medzi stanicami Bratislava predmestie a Bratislava-Vinohrady, čo je reálny príklad dané stanice sú vzdialené päť metrov ale keďže nie je medzi nimi spojenie ukazujú sa ako veľký outlier. Takýto typ dvoch vybratých staníc avšak nie je veľa. Je jasné, že prepojenie daných dvoch staníc by nepomohlo infraštruktúre. V Českej republike dosiahol maximálny pomer 38.3310 medzi stanicami Rychnov nad Kněžnou a Vamberk, no tento prípad je nereálny kvôli chybe v dátach (neexistujúca hrana), aj napriek snahe o zachytenie všetkých nekonzistentností sme stále v českých dátach našli chybajúce hrany.

Výsledky avšak potvrdili našu hypotézu: priemerný pomer je na Slovensku vyšší (1.7941) ako v Českej republike (1.3394), čo naznačuje, že cestujúci na Slovensku častejšie musia voliť nepriame trasy. Pri zohľadnení nekonzistentnosti Českých dát je výsledok ešte nepriaznivejší pre slovenskú infraštruktúru, keďže chybajúce hrany spôsobujú zvýšenie pomeru. Ak by sme zohľadnili aj priemerné rýchlosťi vlakov, rozdiel v neprospech slovenskej infraštruktúry by bol pravdepodobne ešte výraznejší.



Obr. 11: Príklad dvojice staníc a porovnania najkratšej trasy v železničnej sieti a vzdialenosť vzdušnou čiarou

5 Kirchhoffov index rezistentnosti grafu

Môžeme sa pozrieť globálne na železničnú sieť podľa toho, ako jednoducho sa po nej cestuje. Požičiame si ideu z elektrických obvodov – ak sa na každú hranu pozrieme ako na rezistor s odporom rovným jej dĺžke (čím dlhšia trasa, tým náročnejšie cestovanie), môžeme počítať tzv. rezistentnú vzdialenosť $R_{i,j}$ medzi vrcholmi i, j . Čím vyššia je táto vzdialenosť, tým je prepojenie medzi týmito dvoma vrcholmi rezistentnejšie, teda v ponímaní železničných sietí horšie. Globálna hodnota pre graf, ktorá sumarizuje celkovú rezistentnosť grafu, sa nazýva Kirchhoffov index, označujeme $Kf(G)$, a jeho základný tvar je suma rezistentných vzdialostí pre všetky páry vrcholov. Túto hodnotu vieme vyjadriť aj nasledovne:

$$Kf(G) = \sum_{\substack{i,j \in V(G) \\ i < j}} R_{i,j} = n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i},$$

kde n je počet vrcholov a λ_i pre $i \in \{1, \dots, n-1\}$ sú nenulové vlastné hodnoty váhovaného Lapaciánu matice [Kinkar C. D., On the Kirchhoff Index of Graphs, 2013].

Pretože Kirchhoffov index interpretuje váhy hrán ako elektrické konduktivity (ako ľahko medzi nimi prechádza tok), zvolíme za váhu každej hrany inverznú hodnotu vzdialenosť (v km, pre rozumnejšiu mierku výsledku) medzi dvoma stanicami. Tým zaistíme, že čím sú stanice bližšie, tým silnejšie je medzi nimi prepojenie v grafe.

Treba poznamenať, že Kirchhoffov index pre nesúvislé grafy je ∞ , keďže rezistentná vzdialenosť medzi vrcholmi v dvoch rôznych komponentoch je ∞ (z jedného sa nedá dostať do druhého). Preto budeme v nasledujúcich analýzach pracovať iba s najväčších súvislých komponentom v slovenskej a v českej železničnej sieti.

Kirchhoffov index nie je priamo porovnávateľný medzi grafmi, keďže pracuje s počtom vrcholov a škálami váh. Keďže chceme porovnať českú a slovenskú železničnú sieť, normalizujeme rezistentnú vzdialenosť na počet všetkých dvojíc vrcholov v grafe, čím dostaneme



Obr. 12: Vizualizácia dvoch výmen v našom modifikovanom `networkx.connected_double_edge_swap` algoritme. Tieto dve výmeny spolu s dvomi ďalšími mali za následok nižšiu hodnotu Kirchhoffovho indexu pre českú sieť.

normalizovaný Kirchhoffov index $Kf_n(G)$ (keďže obidve siete sú váhované vzdialenosťami, tie nemusíme normalizovať):

$$Kf_n(G) = \sum_{\substack{i,j \in V(G) \\ i < j}} \frac{R_{i,j}}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j \in V(G) \\ i < j}} R_{i,j} = \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i}$$

Môžeme teraz spočítať $Kf_n(G)$ pre obe siete:

$$Kf_n(G) = \sum_{\substack{i,j \in V(G) \\ i < j}} \frac{R_{i,j}}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j \in V(G) \\ i < j}} R_{i,j} = \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i}$$

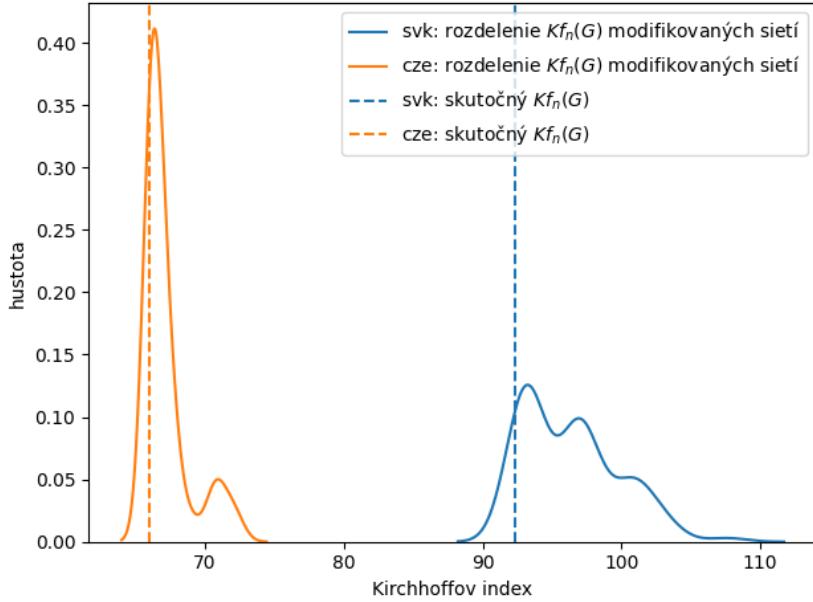
$$Kf_n(G_{svk}) = 92.29$$

$$Kf_n(G_{cze}) = 65.99$$

Nižší Kirchhoffov index českej siete naznačuje vyššiu celkovú konektivitu – teda, že cestovanie medzi dvojicami staníc je v priemere efektívnejšie ako v slovenskej sieti.

Môžeme sa pokúsiť zistiť, či nevieme nájsť nižšie hodnoty tohto indexu po nejakých náhodných úpravách v železničných sieťach. Chceme však zachovať (aspoň približne) celkovú dĺžku koľajníc, aby sme simulovali, či, vzhľadom na Kirchhoffov index, by sme nevedeli nadizajnovať optimálnejšiu sieť s rovnakým rozpočtom. Pri generovaní budeme teda vychádzať z pôvodnej siete a používať upravenú verziu Pythonovskej funkcie `networkx.connected_double_edge_swap`. Algoritmus bude hľadať také štyri vrcholy a, b, c, d , že existujú hrany $a - b$ a $c - d$, neexistujú hrany $a - d$ a $b - c$ a všetky vzdialosti $a - b, b - c, c - d, d - a$ sú približne rovnaké, čiže efektívne tvoria (koso)štvorec. Následne vymažeme hrany $a - b$ a $c - d$ a pridáme hrany $a - d$ a $b - c$ (keďže a, b, c, d tvoria skoro štvorec, súčet dĺžok všetkých koľajníc by sa nemusel veľmi zmeniť). Ak sa však graf touto zmenou rozpadne na dva komponenty, vrátime ju naspäť. Vizualizáciu dvoch takýchto výmen môžeme vidieť na obr. 12.

Tento algoritmus zopakujeme 100-krát pre Slovensko a pre Česko. V každom sa pokúsimo urobiť približne 100 výmen, no keďže kladieme tvrdé podmienky na výber hrán na



Obr. 13: Jadrový odhad hustoty Kirchhoffovho indexu na modifikovaných železničných sieťach spolu so skutočnými hodnotami.

výmenu, v priemere každý beh algoritmu spravil okolo 9 výmen (čiže siete sme modifikovali iba zľahka). Môžeme sa pozrieť na rozdelenie Kirchhoffovho indexu (vo forme jadrového odhadu hustoty) v týchto modifikovaných grafoch spolu so skutočnými hodnotami (obr. 13).

Vidíme, že skutočné hodnoty indexu sa nachádzajú v ľavých častiach týchto distribúcií. Kirchhoffov index pre slovenskú železničnú sieť bol nižší od indexov 99% modifikovaných sietí, pre českú sieť bol nižší od 97%. Môžeme teda usúdiť, že pre aktuálne rozloženie staníc a súčet dĺžok koľajníč sú obidve siete vzhľadom na normalizovaný Kirchhoffov index pomerne optimalizované, čo naznačuje, že boli dobre nadizajnované.

5.1 Centralita efektívnej rezistencia

Dôležitým meradlom kvality verejnej dopravy je jej odolnosť voči výpadkom spojení. Za definujme si tzv. centralitu efektívnej rezistencia vzhľadom na vrcholy (označíme $R(v_i, G)$) a vzhľadom na hranu $R(e_{i,j}, G)$ [Cornaro A. a Grechi D., Evaluation of Railway Systems: A Network Approach, 2023]:

$$R(v_i, G) = \frac{Kf_n(G'_{v_i}) - Kf_n(G)}{Kf_n(G)},$$

$$R(e_{i,j}, G) = \frac{Kf_n(G'_{e_{i,j}}) - Kf_n(G)}{Kf_n(G)},$$

kde G'_{v_i} je vytvorený z grafu G odstránením vrchola v_i a všetkých hrán s ním incidentných a $G'_{e_{i,j}}$ je vytvorený z grafu G odstránením hrany $e_{i,j}$. Jedná sa teda o relatívnu zmenu v normalizovanom Kirchhoffovom indexe po odstránení nejakej súčasti grafu.

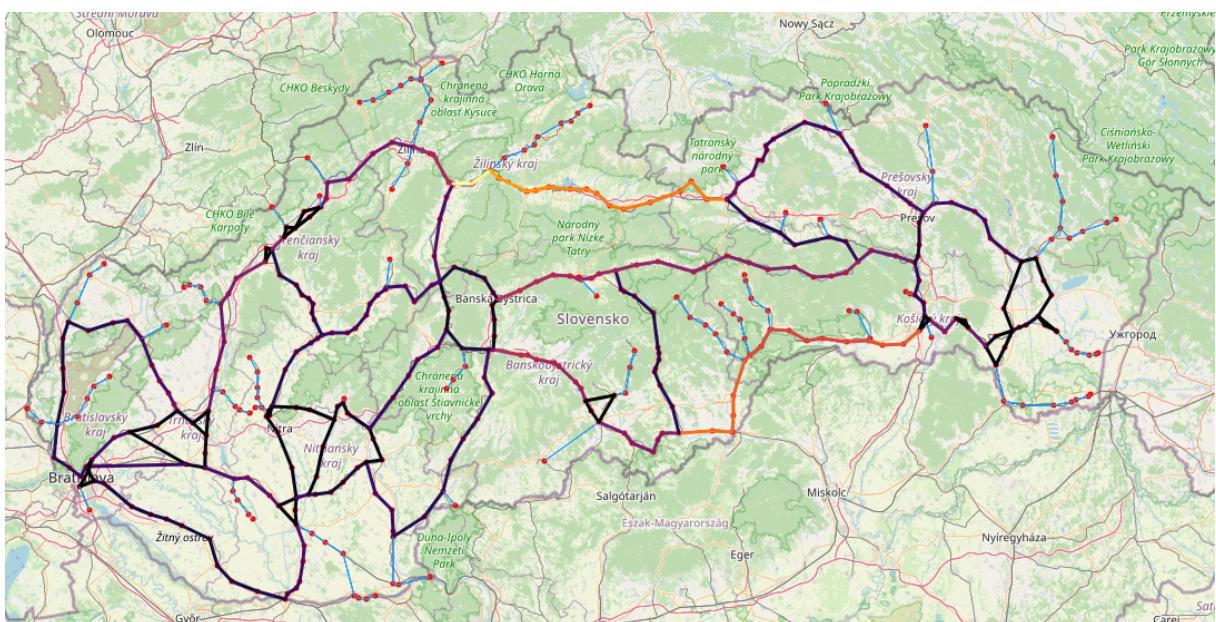
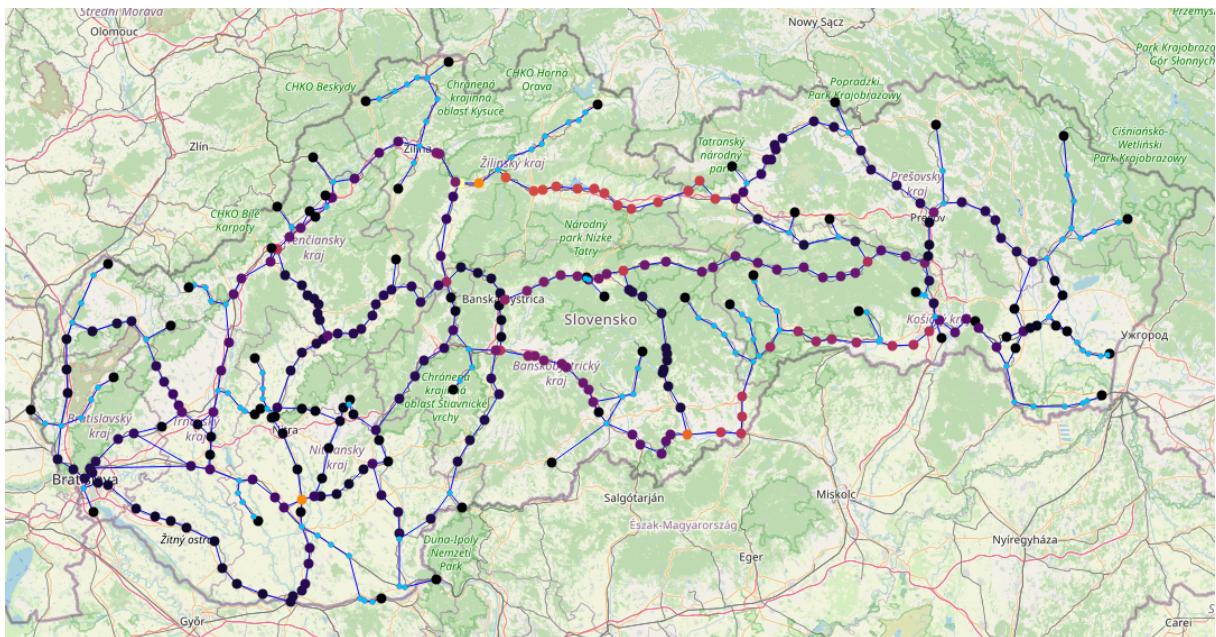
V našom kontexte môžeme interpretovať túto centralitu ako citlivosť rezistentnosti grafu na výpadok spojenia/stanice (napr. z dôvodu rekonštrukcie, vykoľajenia vlaku alebo

z iných nepredvídateľných dôvodov). Môžeme napríklad očakávať, že keď odstránime dôležitú prestupnú stanicu, doprava po železničnej sieti bude náročnejšia, keďže budeme musieť robiť obchádzky.

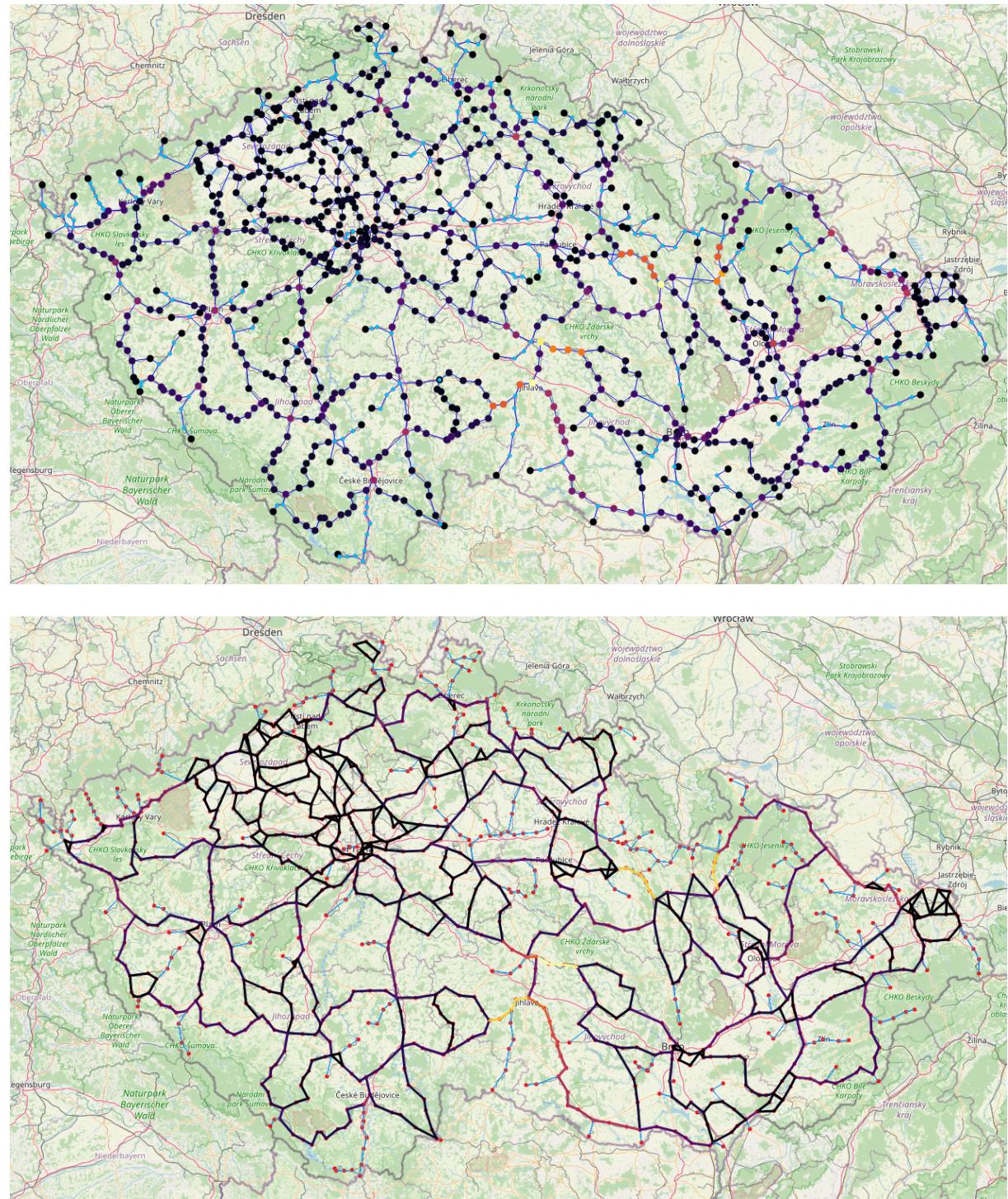
Vizualizujme túto centralitu pre Česko a Slovensko. Farebná škála (individuálna pre každú vizualizáciu) ide od čiernej (najnižšia centralita) cez fialovú po žltú (najvyššia centralita). Mosty a artikulácie sú vyznačené modrou, keďže tie majú nekonečnú centralitu rezistencia – obr. 14 a obr. 15.

Môžeme odpozorovať, že naša interpretácia sedí s pozorovanými výsledkami. Vrcholy s vysokou centralitou efektívnej rezistence sú často stanice, ktoré spájajú viacero traktov, ako napríklad Vrútky a Šurany na Slovensku, Plzeň a Jihlava v Česku. Keď sa pozrieme na hranovú centralitu, môžeme vidieť, že pre Slovensko sú kritické tri trakty prepájajúce východ so stredom/západom (Vrútky – Poprad, Košice – Zvolen, Kysak – Banská Bystrica). Jedná sa teda o pomerne dôležité trakty, ktorých porušenie by malo veľký dopad na celú sieť a teda jedná sa o časť siete, ktorá nie je veľmi odolná voči výpadkom. Podobnú seperáciu vidíme aj v Česku, medzi juhovýchodom a stredom/západom. Nájdeme tu však iba jeden dlhý kritický trakt (Břeclav – okolie Jihlavy) a dva pomerne krátke (Choceň – Třebovice, Postřemelov – Hanušovice). Česká sieť je teda náchylná na výpadky v tejto oblasti.

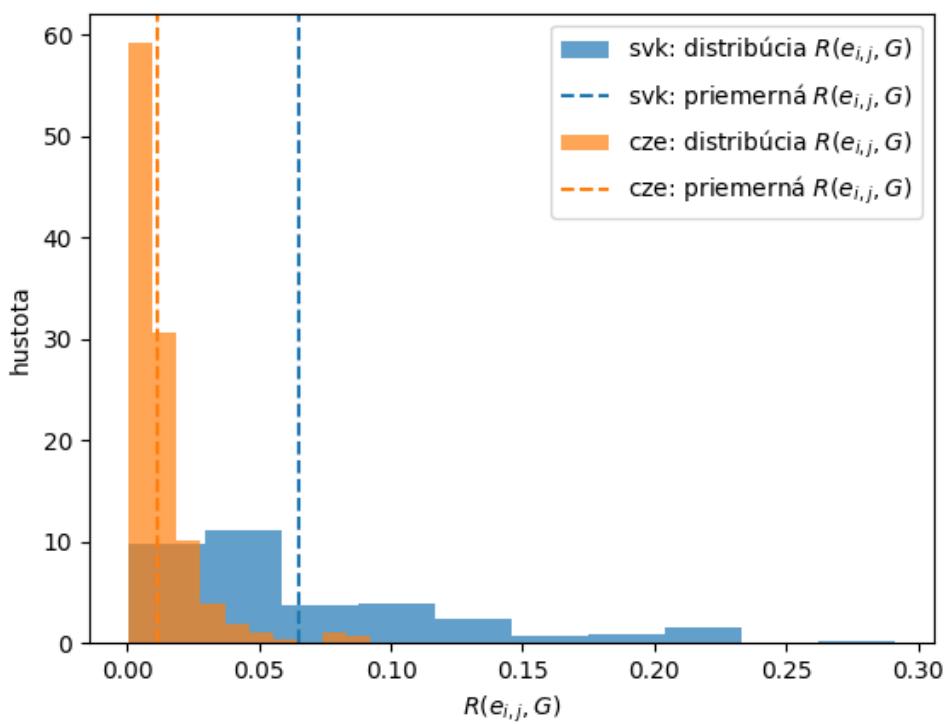
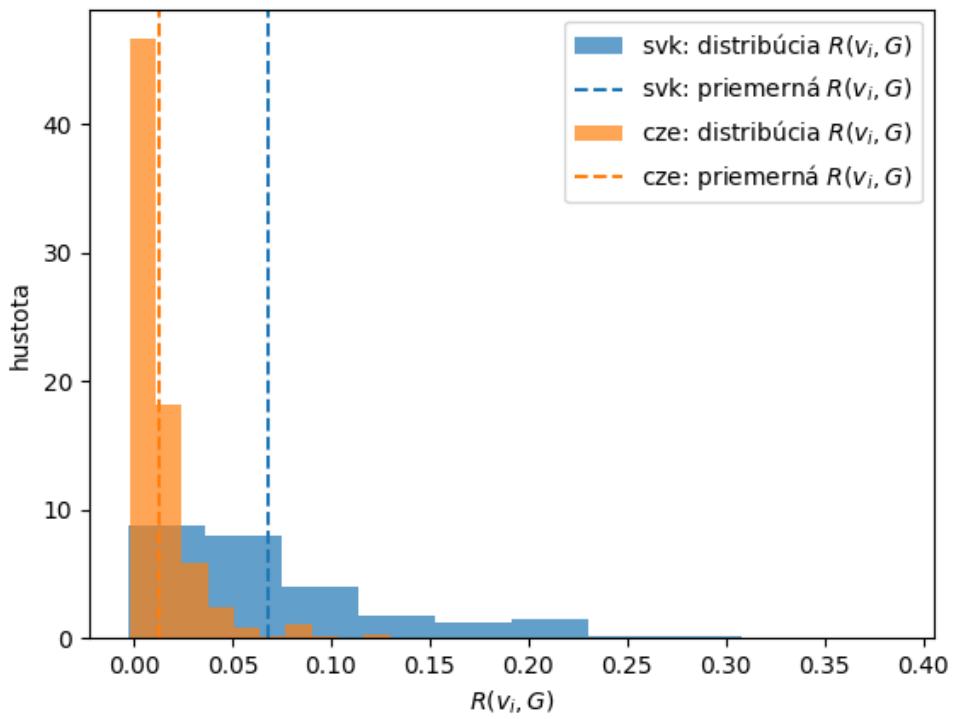
Pozrime sa však na porovnanie distribúcií týchto centralít (obr. 16). Môžeme si všimnúť, že distribúcia v oboch prípadoch má pre Slovensko omnoho ľažší chvost. Z týchto hodnôt môžeme usúdiť, že napriek tomu, že sme identifikovali kritické trakty v Česku aj na Slovensku, Slovensko je ďaleko náchylnejšie na výpadok nejakej stanice alebo spojenia. Výpadok stanice v slovenskej sieti má za následok zvýšenie rezisentnosti („komplikovanosti“ dopravy) v priemere o 7%, zatiaľ čo v Česku to je v priemere o 1%. Podobné správanie vidíme aj pri výpadkoch spojení medzi stanicami. Táto štatistika ukazuje, že česká sieť je lepšie pripravená na jej porušenie ako slovenská.



Obr. 14: Centralita efektívnej rezistencie vzhľadom na vrcholy (hore) a vzhľadom na hrany (dole) pre slovenskú železničnú siet.



Obr. 15: Centralita efektívnej rezistencie vzhľadom na vrcholy (hore) a vzhľadom na hrany (dole) pre českú železničnú sieť.



Obr. 16: Distribúcie centralít efektívnej rezistencie vzhľadom na vrchol (hore) a vzhľadom na hranu (dole), spolu s ich priemermi.

6 Zhrnutie

Naším cieľom bolo komplexne porovnať železničné siete Slovenska a Česka z hľadiska ich štruktúry, efektívnosti a odolnosti voči výpadkom. Pri spracovaní verejne dostupných datasetov sme museli dátá výrazne korigovať – najmä tie české obsahovali viaceré anomálie (napr. pražské metro, nepripojené stanice), ktoré sme ručne doplnili alebo odstránili, aby graf čo najvernejšie zodpovedal realite.

Deskriptívna analýza ukázala, že Česká republika disponuje nielen väčším absolútym počtom staníc, ale aj vyššou hustotou staníc na tisíc kilometrov štvorcových. Priemerný stupeň vrchola aj hustota siete sú pritom porovnatelné, no česká sieť má citeľne väčší počet odpojených komponentov – časť tohto rozdielu pripisujeme neúplným dátam.

Efektívnosť trás sme testovali stochasticky: milión náhodných dvojíc staníc, vázených počtom obyvateľov v danej obci. Priemerný pomer dĺžky najkratšej železničnej cesty k priamemu vzdušnému smeru vyšiel 1,79 pre Slovensko a 1,34 pre Česko, čo potvrdzuje hypotézu, že slovenská sieť vedie cestujúcich po menej priamych trasách.

Normalizovaný Kirchhoffov index (globálna rezistencie siete) dosiahol 92,3 pre Slovensko a 66 pre Česko, čo indikuje, že česká sieť ponúka v priemere lepšiu prieplavnosť medzi stanicami. Náhodné „štvorcové“ prepojenia v grafe naznačili, že obe siete sú už pomerne blízko lokálnej optimality – pri zachovaní celkovej dĺžky koľajníc sa ich konektivita výrazne zlepší nedá.

Centralita efektívnej rezistencia odhalila zraniteľnosť Slovenska voči výpadkom: pri odstránení náhodnej stanice sa rezistence v priemere zvýši o 7%, zatiaľ čo v Česku len 1%. Kritické sú najmä tri úseky spájajúce západ/stred s východom (Vrútky-Poprad, Košice-Zvolen, Kysak-Banská Bystrica). V Česku je podobne citlivý len dlhý koridor Břeclav-Jihlava a dva kratšie úseky okolo Ústí nad Orlicí a Hanušovíc.

Celkovo sa teda potvrdilo, že česká železničná infraštruktúra je hustejšia, lepšie prepojená a ponúka kratšie, priamočiarejšie trasy než slovenská. Slovenská sieť má vyššiu globálnu rezistenciu a je podstatne náhodnejšia na výpadok jednotlivých uzlov či tratí. Napriek tomu obidve siete už dosiahli blízkosť lokálneho optima – simulované „štvorcové“ prepojenia dokázali ich Kirchhoffov index vylepšiť len minimálne, takže výraznejšie zlepšenie by si vyžiadalo skôr nové trate než preskupovanie existujúcich. Pre Slovensko by mal najväčší prínos cielený posilnený koridor medzi západom, stredom a východom a dobudovanie chýbajúcich priamych segmentov, čo by skrátilo trasy a súčasne zvýšilo odolnosť celej siete.