

APPUNTI DI  
EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI  
PARTE ANALITICA

Dalle lezioni del Prof. Sandro Salsa & Gianmaria Verzini  
per il corso di Ingegneria Matematica

di Teo Bucci & Filippo Cipriani

Politecnico di Milano  
A.A. 2020/2021

# *Appunti di Equazioni alle Derivate Parziali*

© Gli autori, tutti i diritti riservati

Sono proibite tutte le riproduzioni senza autorizzazione scritta degli autori.

Revisione del 1 giugno 2021

Developed by

Teo Bucci - [teobucci8@gmail.com](mailto:teobucci8@gmail.com)

Filippo Cipriani - [filippo.cipriani99@hotmail.it](mailto:filippo.cipriani99@hotmail.it)

Compiled with ♡

Per segnalare eventuali errori o suggerimenti potete contattare gli autori.

# Indice

<b>I Equazioni alle Derivate Parziali</b>	<b>1</b>
<b>1 Modelli matematici</b>	<b>3</b>
1.1 Distinzione di EDP . . . . .	3
1.2 Problema ben posto . . . . .	4
1.3 Topologia di $\mathbb{R}^n$ . . . . .	5
1.4 Topologia indotta . . . . .	7
1.5 Ripasso di Analisi 2 e 3 . . . . .	8
1.6 Domini regolari e Lipschitziani . . . . .	9
1.7 Formule di integrazione per parti . . . . .	10
1.8 Ripasso . . . . .	11
<b>2 Diffusione</b>	<b>13</b>
2.1 Conduzione del calore . . . . .	13
2.1.1 Legge di conservazione dell'energia . . . . .	14
2.2 Problemi ben posti in dimensione spaziale $n = 1$ . . . . .	15
2.3 Metodo di separazione delle variabili . . . . .	16
2.4 Problemi in dimensione $n > 1$ . . . . .	22
2.5 Principi di massimo . . . . .	24
2.6 Conseguenze del principio di massimo debole . . . . .	25
2.6.1 Corollario del massimo debole . . . . .	25
2.6.2 Principio di massimo forte . . . . .	26
2.7 Soluzione fondamentale $n = 1$ . . . . .	27
2.7.1 Passo 1 . . . . .	27
2.7.2 Passo 2 . . . . .	29
2.7.3 Modellazione matematica della sorgente d'origine . . . . .	31
2.7.4 Interpretazione della $\Gamma_D(x, t)$ . . . . .	32
2.7.5 Soluzione fondamentale in $n > 1$ . . . . .	32
2.8 Passeggiata aleatoria simmetrica (unidimensionale) . . . . .	32
2.8.1 Dalla passeggiata aleatoria al moto browniano . . . . .	34
2.8.2 Passeggiata aleatoria non simmetrica . . . . .	35
2.9 Inquinante in un canale . . . . .	36
2.10 Problema di Cauchy globale ( $n = 1$ ) . . . . .	38
2.10.1 Esistenza . . . . .	38
2.10.2 Unicità . . . . .	39
<b>3 Equazione di Laplace-Poisson</b>	<b>43</b>
3.1 Tipici problemi al bordo . . . . .	43
3.2 Funzioni armoniche nel discreto . . . . .	45
3.3 Funzioni armoniche . . . . .	48
3.3.1 Proprietà di media . . . . .	48
3.3.2 Principio di massimo . . . . .	50
3.3.3 Conseguenze del principio di massimo . . . . .	52
3.4 Laplaciano in coordinate cilindriche . . . . .	52
3.5 Formula di Poisson per il cerchio . . . . .	53
3.6 Soluzione fondamentale per l'operatore di Laplace . . . . .	57
3.7 Il potenziale Newtoniano . . . . .	59

3.8	La funzione di Green . . . . .	60
3.9	Funzione di Green e formula di rappresentazione . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Leggi di conservazioni scalari</b>	<b>65</b>
4.1	Caso omogeneo . . . . .	66
4.2	Caso non omogeneo . . . . .	67
4.3	Modelli di dinamica del traffico . . . . .	67
4.3.1	Coda al semaforo . . . . .	69
4.3.2	Traffico fermo a valle . . . . .	73
4.4	Ritorno al metodo delle caratteristiche . . . . .	75
4.5	Soluzione debole . . . . .	80
4.5.1	Condizione di Rankine-Hugoniot . . . . .	81
4.5.2	Condizione di entropia . . . . .	85
<b>5</b>	<b>Le onde</b>	<b>91</b>
5.1	Equazione della corda vibrante in $n = 1$ . . . . .	91
5.2	Energia . . . . .	93
5.3	Problema di Cauchy globale ( $n = 1$ ) . . . . .	95
5.3.1	Metodo di Duhamel per il problema non omogeneo con IC omogenee. . . . .	100
5.4	Equazione delle onde in più dimensioni, $n \geq 2$ . . . . .	102
5.4.1	Problemi ben posti: unicità. . . . .	103
5.5	Problema di Cauchy globale ( $n = 2, n = 3$ ) . . . . .	107
5.5.1	Caso $n = 3$ . . . . .	108
5.5.2	Caso $n = 2$ . . . . .	113
<b>II</b>	<b>Analisi Funzionale</b>	<b>115</b>
<b>6</b>	<b>Introduzione</b>	<b>117</b>
6.1	Approssimazione di vettori (Teorema delle Proiezioni) . . . . .	120
6.2	Operatori lineari . . . . .	123
6.2.1	Teorema di rappresentazione di Riesz . . . . .	125
6.2.2	Teorema di Lax-Milgram . . . . .	128
<b>7</b>	<b>Distribuzioni e spazi di Sobolev</b>	<b>133</b>
7.1	Richiami su funzioni test e distribuzioni . . . . .	133
7.2	Esercizio (controesempio derivata debole-classica) . . . . .	135
7.2.1	Derivata classica . . . . .	135
7.2.2	Derivata distribuzionale . . . . .	135
7.3	Spazi di Sobolev . . . . .	138
7.3.1	Disuguaglianza di Poincaré . . . . .	142
<b>8</b>	<b>Un'applicazione: formulazione variazionale per l'equazione di Poisson</b>	<b>147</b>

## Parte I

# Equazioni alle Derivate Parziali



# Capitolo 1

## Modelli matematici

*Lezione Salsa 1 (22/02/2021)*

Un modello matematico è un compromesso tra complessità del mondo reale e idee astratte della matematica. Li applicheremo spesso nel contesto della meccanica dei continui.

Ci serviranno due mattoni principali

- leggi generali (conservazione, bilancio dell'energia, della massa, della carica)
- leggi costitutive, di natura sperimentale, costruite ad hoc per catturare la natura essenziale del fenomeno che osserviamo (di Fourier, di Fick, di Ohm...)

Si perviene quindi a equazioni o sistemi di equazioni ordinarie o alle derivate parziali.

Una EDP è un'equazione della forma

$$F(\mathbf{x}, t, u, u_t, u_{x_j}, u_{x_i x_j}, \dots) = 0 \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

L'ordine di un'equazione è l'ordine massimo di derivazione.

### 1.1 Distinzione di EDP

Si distinguono

- equazioni lineari:  $F$  è un polinomio di primo grado in  $u$  e in tutte le derivate parziali
- equazioni non lineari
  - semilineari:  $F$  è non lineare solo rispetto ad  $u$
  - quasilineari:  $F$  è lineare nelle derivate di ordine massimo, con coefficienti che possono dipendere da  $u$  e dalle derivate di ordine inferiore
  - completamente non lineari:  $F$  è non lineare nelle derivate di ordine massimo

**DEFINIZIONE 1.1 — Laplaciano.** Definiamo il laplaciano di  $u = u(x_1, \dots, x_n)$

$$\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

*Esempi.*

- Lineare

*Calore o diffusione*

$$u_t - D(x, t)\Delta u = f$$

*Laplace/Poisson*

$$\Delta u = f(x, t)$$

Onde

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \quad c(x, t)$$

- Non lineare

- Semilineare

*Fisher-Kolmogorov*

$$u_t - D\Delta u = f(u) = ru(1-u)$$

- Quasi lineare

*Burgers*

$$u_t + u \cdot u_x = \varepsilon u_{xx} \quad x \in \mathbb{R}$$

*Equazione delle superfici minime (o delle bolle di sapone)*

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0$$

- Completamente non lineare

*Iconale* (ottica geometrica)<sup>1</sup>

$$|\nabla u|^2 = c(x)$$

*Altro esempio di equazione completamente non lineare.*

Sia  $u = u(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , consideriamo un'equazione del secondo ordine lineare

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j} = a_{11}(x)u_{x_1 x_1} + \dots + a_{nn}(x)u_{x_n x_n}$$

Prendo due operatori del tipo  $\mathcal{L}_1 u$  e  $\mathcal{L}_2 u$ . Allora

$$F(u)(x) = \max\{\mathcal{L}_1 u(x), \mathcal{L}_2 u(x)\}$$

è completamente non lineare.

Se è presente il tempo, si possono assegnare delle condizioni iniziali.

## 1.2 Problema ben posto

Compito dell'analisi teorica è, una volta costruito il modello consono, stabilire quale tipo di dati è necessario assegnare per ottenere

### 1. Esistenza

L'esistenza è un controllo di consistenza, perché il modello non è la realtà, ma cerca di copiarla.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nabla u) &= \Delta u = 0 \\ \operatorname{div}(a(x)\nabla u) &= \nabla a \cdot \nabla u + a\Delta u \end{aligned}$$

Voglio  $u \in C^2$ , ci sono problemi se esce un termine  $a$  che tiene conto dell'anisotropia (discontinuità), perché  $\nabla a$  non ha senso, essendo discontinuo.

### 2. Unicità

L'unicità è importante per l'approssimazione, vogliamo essere certi che ci sia un'unica soluzione a cui far tendere l'approssimazione.

---

<sup>1</sup> $c(x)$  è l'indice di rifrazione.

### 3. Dipendenza continua dai dati

La dipendenza continua dai dati è importante perché è una forma di *stabilità* rispetto all'argomento. In generale, siano  $g_1, g_2$  i dati di un problema e  $u_1, u_2$  le corrispondenti soluzioni. Vi è stabilità se

$$\text{dist}(g_1, g_2) \rightarrow 0 \Rightarrow \text{dist}(u_1, u_2) \rightarrow 0$$

Un problema di questo tipo è un problema ben posto *secondo Hadamard..*

Non abbiamo ancora definito quale distanza utilizzare, ricordiamone alcune per il momento. Supponiamo che  $g_1, g_2$  siano due funzioni definite su una certa regione in  $R \subseteq \mathbb{R}^n$ .

- norma infinito

$$\|g_1 - g_2\|_{L^\infty(R)} = \sup_{x \in R} |g_1(x) - g_2(x)|$$

- media quadratica

$$\left( \frac{1}{|R|} \int_R |g_1(x) - g_2(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

L'obiettivo delle prossime lezioni è guardare un'equazione del tipo

$$u_t - D\Delta u + \mathbf{v} \cdot \nabla u + ru = f(x, t)$$

e dedurre subito che

- il primo è un tasso di variazione di  $u$  nel tempo
- il secondo è un termine di diffusione
- il terzo è trasporto
- il quarto è una reazione o decadimento
- l'ultimo è una sorgente esogena

*Lezione Salsa 2 (23/02/2021)*

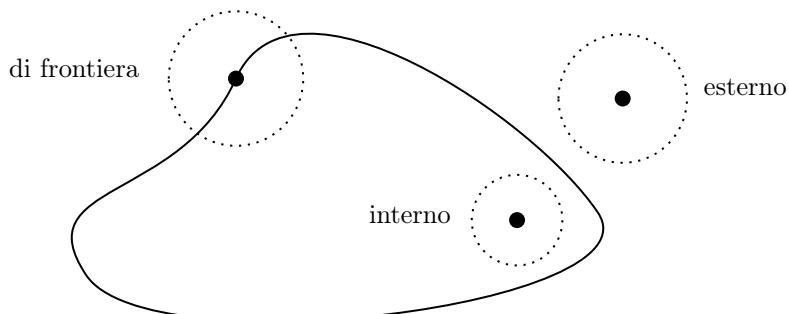
## 1.3 Topologia di $\mathbb{R}^n$

**DEFINIZIONE 1.2 — Palla aperta.** Definiamo il concetto generale di intorno **aperto**, di raggio  $r$  centrato in  $\mathbf{x}$

$$B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r\}$$

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  si dice

- **punto interno** ad  $E$  se  $\mathbf{x} \in E$  ed esiste una sfera tale che  $B_r(\mathbf{x}) \subset E$
- **punto esterno** ad  $E$  se esiste una sfera  $B_r(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^n \setminus E$
- **punto di frontiera** per  $E$  se **ogni** sfera  $B_r(\mathbf{x})$  contiene punti di  $E$  e del complementare. I punti di frontiera possono appartenere ad  $E$  o meno.



Inoltre

- **x è punto limite o di accumulazione** per  $E$  se  $\forall B_r(\mathbf{x})$  contiene  $\infty$  punti di  $E$ . Equivalentemente: se  $\exists \{\mathbf{x}_k\} \subset E : \mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}$  per  $k \rightarrow +\infty$ .
- Un punto che non è di accumulazione è un **punto isolato**.

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $E$  si dice

- **aperto** se  $\forall \mathbf{x} \in E$ ,  $\mathbf{x}$  è interno ad  $E$ <sup>2</sup>

– Un aperto  $E$  si dice **connesso** se non si può scrivere come unione di due aperti non vuoti e disgiunti, oppure se esiste una curva contenuta nell'insieme che congiunge tutti i punti.

Chiameremo **dominio** un aperto connesso.

- **chiuso** se  $\mathbb{R}^n \setminus E$  è aperto, oppure se contiene tutti i propri punti di frontiera  $\partial E \subseteq E$ , oppure se contiene tutti i propri punti limite.
- si dice **chiusura** di  $E$  l'insieme  $\overline{E} = \partial E \cup E$
- si dice **convesso** se  $\forall x, y \in E$  il segmento che li congiunge è contenuto nell'insieme

$$[x, y] = \{tx + (1 - t)y, 0 \leq t \leq 1\} \subseteq E$$

Un insieme convesso è automaticamente connesso, ma non in generale il contrario.

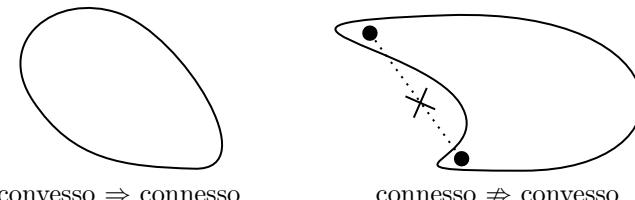


Figura 1.1: Controesempio insieme connesso che non implica convesso.

- si dice **compatto** se da *qualunque* copertura aperta di  $E$  si può estrarre una sottocopertura finita.<sup>3</sup>
- si dice **limitato** se esiste una sfera  $B_r(0)$  che contiene  $E$ , cioè se  $\exists B_r(0) : E \subset B_r(0)$

**NB.**  $\mathbb{R}^n$  è sia aperto che chiuso, ma allora anche il suo complementare, l'insieme vuoto, lo è. Sono gli unici due insiemi in  $\mathbb{R}^n$  che lo sono.

**DEFINIZIONE 1.3 — Copertura.** Una famiglia  $\mathcal{F}$  di aperti si dice copertura di  $E$  se

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \supset E$$

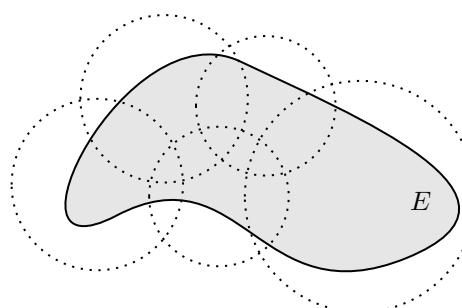


Figura 1.2: Copertura di un insieme in due dimensioni.

*Esempio.*

<sup>2</sup>per esempio  $B_r(\mathbf{x})$  è un aperto.

<sup>3</sup>In  $\mathbb{R}^n$  vale l'implicazione: compatto  $\Leftrightarrow$  chiuso e limitato.

Tipici esempi di compatti sono gli intervalli **chiusi** e **limitati** in  $\mathbb{R}$

$$E = [a, b] \subset \mathbb{R}$$

*Controesempio.*

Se consideriamo  $E = (0, 1]$  non è chiuso. Consideriamo la famiglia di aperti

$$A_k = \left( \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k} \right), k = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset E$$

Tuttavia non riesco a estrarre nessuna sottocopertura *finita*, perché lascerei fuori degli elementi vicino all'origine.

## 1.4 Topologia indotta

Sia  $X$  un insieme. Introdurre una topologia in  $X$  significa introdurre una famiglia  $\mathcal{A}$ , i cui elementi saranno **aperti**, con le seguenti proprietà

- $X$  e  $\emptyset$  appartengono ad  $\mathcal{A}$
- Unione di un numero **finito o infinito** di aperti di  $\mathcal{A}$  è ancora un elemento di  $\mathcal{A}$
- Intersezione di un numero **finito** di aperti di  $\mathcal{A}$  è ancora un elemento di  $\mathcal{A}$

*Controesempio.*

Un'intersezione infinita di aperti può essere un insieme chiuso:

$$C_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 + \frac{1}{k} \right\}$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ chiuso!}$$

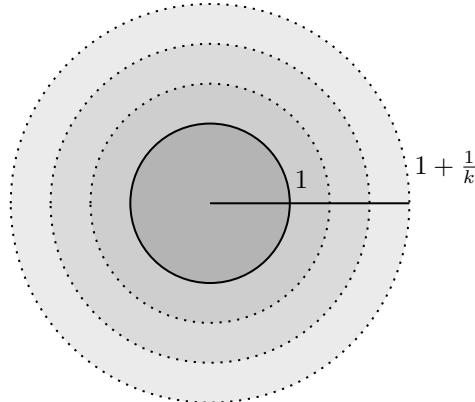


Figura 1.3: Intersezione infinita di aperti che è un insieme chiuso.

**DEFINIZIONE 1.4 — Insieme aperto rispetto a topologia indotta.** Sia  $\Omega$  dominio di  $\mathbb{R}^n$  con bordo  $\partial\Omega$ . Si dice che  $A \subset \partial\Omega$  è aperto relativamente a  $\partial\Omega$ , rispetto alla topologia indotta da  $\mathbb{R}^n$ , se  $\exists$  un aperto  $E$  di  $\mathbb{R}^n$  tale che  $A = E \cap \partial\Omega$

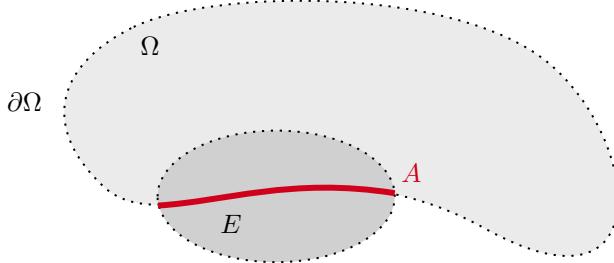


Figura 1.4: Esempio di topologia indotta secondo la definizione.

*Esempio.*

$$X = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$$

L'insieme  $A = (-1, 1]$  lo posso vedere come  $\subset \mathbb{R}$  o come  $\subset X$ . Relativamente a  $\mathbb{R}$  non è né aperto né chiuso. Nel secondo caso lo posso scrivere come

$$\underbrace{(-1, 1]}_A = \underbrace{[-1, 1]}_X \cap \underbrace{(-1, 2)}_E$$

In questo caso  $X$  ricopre il ruolo di  $\partial\Omega$ , infatti in realtà non serve che sia il bordo di un dominio, basta che sia aperto (o chiuso se stiamo dando la definizione complementare). Naturalmente di  $E$  ci basta che ne esista almeno uno, potevamo prenderne anche un diverso, non c'è nulla di speciale nel 2 all'estremo destro, l'importante era che fosse a destra di 1.

Quindi è un *aperto relativamente a  $X$ , rispetto alla topologia indotta da  $\mathbb{R}$ !*

## 1.5 Ripasso di Analisi 2 e 3

### Serie di funzioni

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , data una successione di funzioni  $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definiamo:

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^N f_k(x) \quad S(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

- **Convergenza uniforme** di una serie di funzioni:

$\sum f_k$  converge uniformemente in  $\Omega$  se

$$\sup_{\Omega} |S_N(x) - S(x)| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow +\infty$$

- **Test di Weierstrass** (condizione sufficiente per la convergenza uniforme):

Se  $\forall k \geq 1$  esiste  $a_k$  tale che

$$|f_k(x)| \leq a_k \quad \forall x \in \Omega \quad \wedge \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$$

$\Rightarrow \sum f_k$  converge uniformemente in  $\Omega$

- **Scambio serie e limite:**

Se  $\sum f_k$  converge uniformemente in  $\Omega$  e  $f_k, k \geq 1$ , è continua in  $\Omega$ , allora  $S$  è continua in  $\Omega$  e

$$x_0 \in \Omega \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sum f_k(x) = \sum f_k(x_0)$$

- **Scambio serie e derivata:**

Siano  $f_k$  derivabili in  $\Omega$  per ogni  $k \geq 1$ , rispetto a  $x_j$  se inoltre:

- esiste almeno un  $x_0 \in \Omega : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$  è convergente, chiamiamo  $F(x)$  la funzione a cui converge;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}$  è uniformemente convergente a una certa  $f(x)$ .

Allora per tutti gli  $x \in \Omega$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)}_{F(x)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}}_{f(x)}$$

## Integrali

- Disuguaglianza di Holder

$$\left| \int_{\Omega} fg \right| \leq \left( \int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} |g|^q \right)^{1/q}$$

dove

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad p, q \geq 1$$

- Disuguaglianza di Schwarz (se  $p = 2 = q$ )

$$\left| \int_{\Omega} fg \right| \leq \left( \int_{\Omega} f^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} g^2 \right)^{1/2}$$

**Funzioni** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Definisco:

- $C(\Omega)$ , l'insieme delle **funzioni continue** in  $\Omega$ .
- $C(\bar{\Omega}) \subset C(\Omega)$ , l'insieme delle **funzioni estendibili con continuità fino al bordo di  $\Omega$** . Se  $\Omega$  è limitato,  $\bar{\Omega}$  è compatto.
- $C(\bar{\Omega})$  è uno spazio di Banach rispetto alla norma  $\|g\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{\bar{\Omega}} |g|$

Posso estendere le definizioni a ordini di derivazione maggiori:

- $C^1(\Omega) \dots C^k(\Omega)$ ,  $k$  ordine di derivazione.
- Per  $C^1(\bar{\Omega}) \dots C^k(\bar{\Omega})$  tutte le derivate fino alla  $k$ -esima sono estendibili con continuità fino al bordo di  $\Omega$ .

Definisco le norme per gli spazi  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$

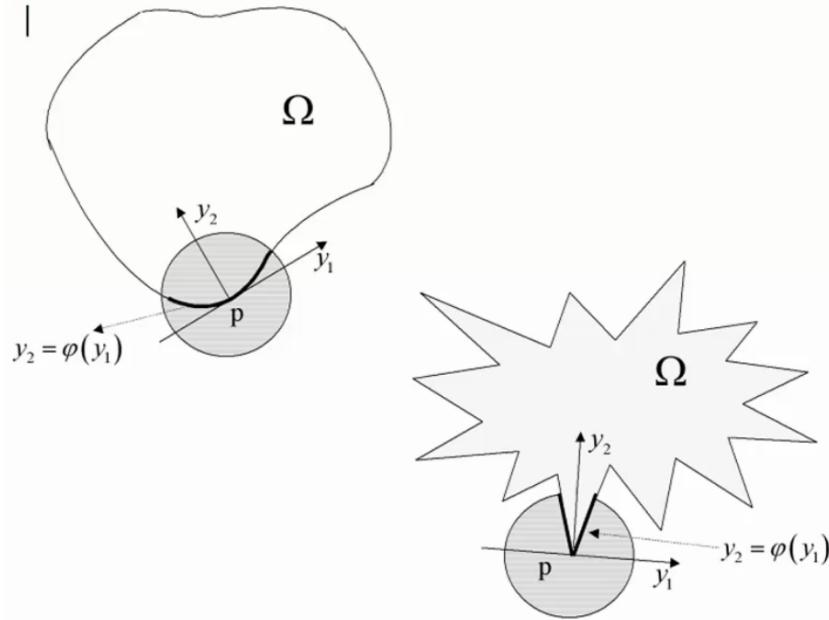
$$\begin{aligned} \|f\|_{L^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} |f| & p = 1 \\ \|f\|_{L^p(\Omega)} &= \left( \int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p} & 1 < p < \infty \\ \|f\|_{L^{\infty}(\Omega)} &= \sup_{\Omega} |f| & p = \infty \end{aligned}$$

Gli spazi  $L^p$  sono spazi di Banach,  $L^2$  è anche di Hilbert.

## 1.6 Domini regolari e Lipschitziani

Avremo bisogno di classificare i domini  $\Omega$  in  $\mathbb{R}^n$  secondo il grado di regolarità della loro frontiera.

Possiamo descrivere il pezzo di bordo dentro la sferetta tramite un grafico cartesiano del tipo  $y_2 = \varphi(y_1)$ . Se il grafico è sufficientemente liscio, quella  $\varphi$  sarà almeno  $C^1$ . Se la funzione è  $C^k$  diremo che il dominio è di classe  $C^k$ , ovviamente per ogni punto del bordo.



**DEFINIZIONE 1.5.** Un dominio  $\Omega$  si dice di classe  $C^1$  se per ogni punto  $p \in \partial\Omega$  esiste un sistema di assi cartesiani  $(y', y_n)$ ,  $y' \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $y_n \in \mathbb{R}$ , con origine in  $p$ , una sfera  $B(p)$ , una funzione  $\varphi_p$  definita in un intorno  $N_p \subset \mathbb{R}^{n-1}$  di  $y' = 0'$ , tale che

$$\varphi_p \in C^1(N_p), \quad \varphi(0') = 0$$

e che

1.  $\partial\Omega \cap B(p) = \{(y', y_n) : y_n = \varphi_p(y'), y' \in N_p\}$   
cioè il bordo coincide col grafico della funzione
2.  $\Omega \cap B(p) = \{(y', y_n) : y_n > \varphi_p(y'), y' \in N_p\}$   
cioè l'insieme sta tutto da una parte del grafico

Le coppie  $(\varphi, N)$  sono dette **carte locali**.

Se  $\Omega$  è **limitato**, può essere descritto da un numero finito di carte locali  $(\varphi_p, N_p)$ .

Se  $\varphi_p$  è Lipschitziana il dominio si dice **dominio Lipschitziano**.

**DEFINIZIONE 1.6 — Funzione Lipschitziana.** Una funzione  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  è Lipschitziana se

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in \Omega$$

Poiché il grafico di una funzione Lipschitziana può presentare angoli e/o spigoli, non ci si può aspettare l'esistenza di un iperpiano tangente in ogni suo punto. Tuttavia, l'insieme dei punti "irregolari" costituisce un insieme di misura nulla (secondo Lebesgue). Precisamente, vale il seguente teorema.

**TEOREMA 1.7 — di Rademacher.** Se  $f$  è lipschitziana in  $\mathbb{R}^n \Rightarrow f$  è differenziabile q.o. in  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.7 Formule di integrazione per parti

Sia  $\Omega$  di classe  $C^1$ . Consideriamo una funzione vettoriale  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Vale il teorema della divergenza

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{G} \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma \quad \text{dove } \boldsymbol{\nu} \text{ è il versore normale.}$$

Sia  $v$  una funzione scalare scalare  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , vale la regola di derivazione di Leibniz estesa a più dimensioni:

$$\operatorname{div}(v\mathbf{F}) = v \operatorname{div}(\mathbf{F}) + \nabla v \cdot \mathbf{F}$$

da cui ricaviamo

$$v \operatorname{div}(\mathbf{F}) = \operatorname{div}(v\mathbf{F}) - \nabla v \cdot \mathbf{F}$$

Integrando e applicando il teorema della divergenza otteniamo una **formula di integrazione per parti** in  $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\Omega} v \operatorname{div}(\mathbf{F}) = \int_{\partial\Omega} v \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \mathbf{F} \quad (1.1)$$

Se  $\mathbf{F}$  è un gradiente, ovvero  $\mathbf{F} = \nabla u$ , e  $u \in C^2$  in modo poter parlare di derivate seconde, si ha che  $\operatorname{div} \nabla u = \Delta u$ . Ricordiamo anche che  $\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} = \partial_{\boldsymbol{\nu}} u$ . Tale formula diventa l'**identità di Green**<sup>4</sup>:

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} v \partial_{\boldsymbol{\nu}} u \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \quad (1.2)$$

In particolare se  $v = 1$

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \partial_{\boldsymbol{\nu}} u \, d\sigma \quad (1.3)$$

*Lezione Salsa 3 (25/2/2021)*

## 1.8 Ripasso

Consideriamo un dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : \Omega \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e consideriamo

$$\varphi(t) = \int_{\Omega} f(x, t) dx$$

Quand'è che possiamo passare la derivata sotto il segno di integrale?

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(x, t) dx \stackrel{?}{=} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx$$

Supponiamo che

- $x \mapsto f(x, t)$  sia  $L^1(\Omega)$ ,  $\forall t \in (a, b)$
- $t \mapsto f(x, t)$  sia  $C^1(a, b)$ , quasi ovunque rispetto a  $x$  in  $\Omega$

**TEOREMA 1.8.** Assumiamo che esistano  $g \in L^1(\Omega)$  e  $h \in L^1(\Omega)$ <sup>a</sup> tali che

$$|f(x, t)| \leq g(x) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq h(x)$$

quasi ovunque in  $\Omega$ ,  $\forall t \in (a, b)$ . Allora

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(x, t) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx$$

<sup>a</sup>funzioni della sola  $x$ .

Per integrali di Riemann, assumiamo  $\Omega$  limitato,  $f \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $f, f_t$  R-integrabile e  $|f|, |f_t| \leq M$  in  $\Omega$ . Allora

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(x, t) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx$$

<sup>4</sup>È facile ricordarla notando la similarità con la formula per parti in una dimensione.



# Capitolo 2

## Diffusione

Consideriamo  $u(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq t_0$ . La seguente equazione è nota come **equazione di diffusione, o del calore**:

$$u_t - D\Delta u = f(x, t)$$

Dimensionalmente:

- $D$  è il coefficiente di diffusione di dimensioni  $[D] = \text{lunghezza}^2 \cdot \text{tempo}^{-1}$ .
- La  $f$  deve avere dimensioni  $[f] = \text{gradi Kelvin/tempo}$ .

Casi particolari:

- Se  $u_t = 0$  l'equazione risulta  $-\Delta u = f$ , la versione stazionaria, un'**equazione di Poisson**.
- Se  $f = 0$  otteniamo l'equazione omogenea  $u_t - D\Delta u = 0$ .
- Se  $f = 0$  e  $u_t = 0$  otteniamo un'equazione di Laplace  $\Delta u = 0$ .

**Proprietà dell'omogenea.**

- *Principio di sovrapposizione (linearità).*

Siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $u_1, u_2$  soluzioni. Allora  $\alpha u_1 + \beta u_2$  sono soluzioni.

Più in generale, se  $a_k, k \geq 0, a_k \rightarrow 0$  abbastanza rapidamente e  $u_k, \forall k$ , è soluzione dell'omogenea, allora è soluzione anche

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k(x, t)$$

- *Riflessione temporale.*

Se  $u = u(x, t)$  è soluzione dell'omogenea, poniamo  $v(x, t) = u(x, -t)$ . Allora  $v$  è soluzione dell'**equazione backward**

$$v_t + D\Delta v = 0$$

- *Simmetria spaziale.*

Se  $u = u(x, t)$  è soluzione dell'omogenea,  $v(x, t) = u(-x, t)$  è ancora soluzione.

- *Invarianza rispetto a traslazione nello spazio e nel tempo.*

La funzione  $v(x, t) = u(x - y, t - s)$  è ancora soluzione nel dominio traslato.

### 2.1 Conduzione del calore

Faremo le seguenti ipotesi.

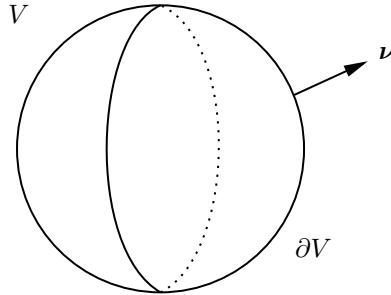
Corpo (rigido) omogeneo (densità  $\rho$  costante) isotropo (propagazione uniforme in ogni direzione) può ricevere calore da sorgente esterna di intensità  $r$ .

Il calore è una forma di energia misurato in calorie (1 cal = 4,182 Joule).

$$[r] = \text{cal} \times \text{tempo}^{-1} \times \text{massa}^{-1}$$

### 2.1.1 Legge di conservazione dell'energia

Consideriamo un volumetto (di controllo) all'interno di un corpo rigido. Il tasso di variazione dell'energia interna a  $V$  è uguale al contributo fornito dalla sorgente esterna + quello dovuto al flusso di calore netto, per conduzione, attraverso il bordo  $\partial V$  di  $V$ . Traduciamo in formule.



1.  $e = e(x, t)$  è l'energia interna per unità di massa, di conseguenza il tasso di variazione è descritto da

$$\frac{d}{dt} \int_V e \rho dx$$

2. La sorgente esterna è descritta da

$$\int_V r \rho dx$$

3. Il flusso attraverso  $\partial V$  lo descriviamo tramite un vettore flusso di calore  $\mathbf{q}$ , che misura il calore per unità di area. Consideriamo anche  $\nu$  versore normale *uscente*, allora dal momento che la componente tangente non comporta una variazione di calore nel corpo, il flusso entrante è dato da

$$-\int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \nu \, d\sigma$$

Mettendo insieme

$$\frac{d}{dt} \int_V e \rho dx = \int_V r \rho dx - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \nu \, d\sigma$$

Supponendo di poter portare la derivata dentro l'integrale e applicando il teorema della divergenza

$$\int_V e_t \rho dx = \int_V r \rho dx - \int_V \operatorname{div} \mathbf{q} \, dx$$

Per l'arbitrarietà di  $V$  deduciamo la **legge fondamentale della conduzione del calore**

$$e_t \rho = -\operatorname{div} \mathbf{q} + r \rho$$

*Lezione Salsa 4 (1/3/2021)*

Per ricavare l'**equazione del calore** occorrono delle leggi costitutive per le quantità  $e$  e  $\mathbf{q}$ :

- **Legge di Fourier** (proporzionalità lineare tra flusso e gradiente della temperatura):

$$\mathbf{q} = -k \nabla \theta$$

dove  $k > 0$  è la conduttività termica (dipendente dal materiale),  $\theta$  la temperatura (assoluta) e il segno meno indica che il flusso del calore avviene verso zone a temperatura minore.

- **Proporzionalità lineare tra energia interna e temperatura assoluta:**

$$e = c_v \theta$$

dove  $c_v$  è il calore specifico a volume costante

$k$  e  $c_v$  sono costanti in condizioni standard, per cui li supporrò tali.

Sostituendo le relazioni costitutive nella **legge fondamentale della conduzione del calore** ottengo:

$$\boxed{\rho c_v \theta_t = k \Delta \theta + r \rho}$$

Da cui, dividendo per  $\rho c_v$ , deduco l'**equazione del calore** in dimensione  $n$  generica:

$$D = \frac{k}{\rho c_v} \quad \text{coefficiente di diffusione}, \quad f = \frac{r}{c_v}, \quad \boxed{\theta_t - D \Delta \theta = f}$$

## 2.2 Problemi ben posti in dimensione spaziale $n = 1$

Considero l'evoluzione temporale della temperatura in una sbarra cilindrica di sezione trasversale  $A$  e lunghezza  $L$ . Sotto le ipotesi:

1. raggio  $\ll$  lunghezza;
2. sbarra isolata termicamente lungo la superficie laterale.

Posso assumere che il flusso di calore avvenga in una sola direzione (l'asse  $x$ ):

$$q = -k u_x \mathbf{L}$$

Sostituendo nella **legge fondamentale della conduzione del calore** su un volume di controllo del tipo  $V = A \times (x, x + \Delta x)$  e assumendo  $u = u(x, t)$ ,  $e = e(x, t)$ ,  $r = r(x, t)$  (ben approssimabili a funzioni dipendenti da una sola variabile spaziale), l'area  $A$  si semplifica e ottengo

$$\int_x^{x+\Delta x} c_v \rho u_t dx = \int_x^{x+\Delta x} k u_{xx} dx + \int_x^{x+\Delta x} r \rho dx$$

Da cui l'**equazione del calore monodimensionale**:

$$\boxed{u_t - Du_{xx} = f} \quad x \in (0, L), \quad 0 < t < T$$

**Condizioni al bordo per garantire la buona posizione:**

- Condizione **iniziale** (o di Cauchy) a  $t = 0$ : assegna il profilo iniziale di temperatura

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

- Condizione **agli estremi**  $x = 0, x = L$

– Condizioni di **Dirichlet** (temperatura agli estremi) per  $t \in (0, T]$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= h_1(t) \\ u(L, t) &= h_2(t) \end{aligned}$$

– Condizioni di **Neumann** (flusso entrante agli estremi) per  $t \in (0, T]$

$$\begin{aligned} -k u_x(0, t) &= h_1(t) \\ k u_x(L, t) &= h_2(t) \end{aligned}$$

– Condizioni di **radiazione** o di Robin (in uno o due estremi)

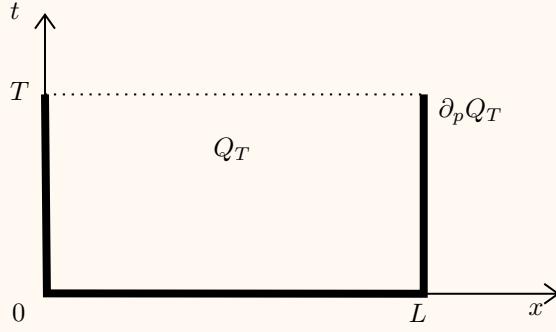
$$k u_x(L, t) = \gamma(U - u(L, t)), \quad t \in (0, T]$$

dove  $\gamma > 0$  è una costante di proporzionalità e  $U$  è la temperatura ambiente. Ponendo  $\alpha = \frac{\gamma}{k} > 0$  e  $\beta = \frac{\gamma U}{k}$  posso riscrivere la condizione:

$$u_x(L, t) + \alpha u(L, t) = \beta, \quad t \in (0, T]$$

– Condizioni **miste**

**NB.** La soluzione è cercata per i punti nell'insieme  $Q_T = (0, L) \times (0, T)$ , aperto connesso. Nessuna condizione finale per  $0 < x < L$ ,  $t = T$  è assegnata: le condizioni assegnate sono unicamente sulla **frontiera parabolica** di  $Q_T$ , formata dai 3 segmenti in grassetto. A breve ne formalizzeremo la definizione.



In alcuni casi  $x$  può variare in intervalli illimitati del tipo  $(0, \infty)$  o  $\mathbb{R}$  (sbarra ideale infinita). Il problema di Cauchy globale richiede allora delle condizioni aggiuntive che vedremo più avanti.

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = f & x \in \mathbb{R}, 0 < t < T \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \\ \text{condizioni } x \rightarrow \infty \end{cases}$$

## 2.3 Metodo di separazione delle variabili

Esaminiamo un modello della sbarra in dimensione  $n = 1$ . Sotto opportune ipotesi si può dimostrare facilmente che il problema è ben posto utilizzando il metodo di separazione delle variabili. Consideriamo il seguente problema di Cauchy-Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & 0 < x < L, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0 & 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) = u_0, u(L, t) = u_1 & t > 0 \end{cases}$$

Dove  $u_0, u_1$  costanti e  $u_1 > u_0$ . La sbarra è tenuta dunque inizialmente alla temperatura iniziale costante  $u_0$ . Successivamente, l'estremo  $x = 0$  mantiene la stessa temperatura (**estremo freddo**) mentre ho una discontinuità in  $x = L$ , mantenuto alla temperatura costante  $u_1$  (**estremo caldo**).

Attraverso un **ragionamento euristico** possiamo provare a capire come si evolverà la temperatura della sbarra nel tempo: dall'estremo caldo vi sarà un flusso entrante di calore che aumenterà la temperatura della sbarra, dall'estremo freddo un flusso uscente. All'inizio il flusso entrante sarà maggiore del flusso uscente ma, col passare del tempo (e con l'aumento della temperatura della sbarra), il flusso entrante diminuirà e il flusso uscente aumenterà fino a raggiungere una **situazione stazionaria** con i flussi bilanciati. Poiché siamo interessati al comportamento a regime,  $t$  è illimitato.

### Variabili adimensionali

Per motivi numerici e modellistici è utile riscrivere il problema di partenza utilizzando delle quantità *indipendenti dalle unità di misura*, riscalando spazio, tempo e temperatura

- **Spazio:** riscalo usando la lunghezza della sbarra  $L$

$$y = \frac{x}{L}, 0 < y < 1$$

- **Tempo:** osserviamo che le dimensioni di  $D$  sono

$$[D] = \text{lunghezza}^2 \times \text{tempo}^{-1}$$

Definisco

$$\tau = \frac{L^2}{D},$$

che ha le dimensioni di un tempo e dipende dalle caratteristiche fisiche del problema. Riscalo il tempo usando la costante  $\tau$

$$s = \frac{t}{\tau}$$

- **Temperatura:** definisco

$$\vartheta(y, s) = \frac{u(Ly, \tau s) - u_0}{u_1 - u_0}$$

osservo che

$$\begin{aligned}\vartheta(y, 0) &= 0, & \vartheta(1, s) &= 1, \\ \vartheta(0, s) &= 0.\end{aligned}$$

inoltre

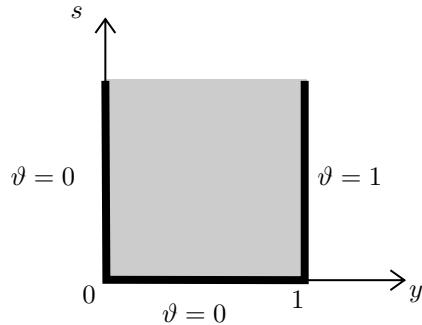
$$\vartheta_s = \frac{u_t \tau}{u_1 - u_0}, \quad \vartheta_{yy} = \frac{L^2 u_{xx}}{u_1 - u_0}$$

sostituendo  $u_t = Du_{xx}$  e  $\tau = L^2/D$  ottengo

$$\vartheta_s = \frac{u_t \cdot \tau}{u_1 - u_0} = \frac{Du_{xx} \cdot \frac{L^2}{D}}{u_1 - u_0} = \frac{L^2 u_{xx}}{u_1 - u_0} = \vartheta_{yy}.$$

quindi  $\vartheta(y, s)$  soddisfa l'equazione del calore senza il termine  $D$ , normalizzato a 1. Posso riscrivere il mio problema in forma adimensionale.

$$\begin{cases} \vartheta_s - \vartheta_{yy} = 0 & 0 < y < 1, s > 0 \\ \vartheta(y, 0) = 0 & 0 < y < 1 \\ \vartheta(0, s) = 0, \vartheta(1, s) = 1 & s > 0 \end{cases}$$



### Condizioni omogenee

Il problema in forma adimensionale presenta ancora una condizione non omogenea  $\vartheta(1, s) = 1$ . Per usare il metodo di separazione delle variabili è necessario che tutto il sistema sia omogeneo.

Prendiamo in considerazione la soluzione stazionaria, per definizione essa non dipende dal tempo ( $\vartheta^{st}(y)$ ) e si dimentica delle condizioni iniziali. Il sistema assume la forma

$$\begin{cases} \vartheta_{yy} = 0 & 0 < y < 1 \\ \vartheta(0) = 0, \vartheta(1) = 1 \end{cases}$$

Da cui integrando e imponendo le condizioni agli estremi si ricava

$$\vartheta^{st}(y) = y$$

**NB.** Ritornando alla forma dimensionale l'equazione stazionaria diventa

$$\begin{aligned}u^{st}(x) &= u_0 + (u_1 - u_0)\vartheta^{st}(y) \\ &= u_0 + (u_1 - u_0)y\end{aligned}$$

$$= u_0 + (u_1 - u_0) \frac{x}{L}$$

La soluzione stazionaria corrisponde dunque ad un flusso uniforme di calore lungo la sbarra del valore

$$\text{flusso} = -ku_x^{st} = -\frac{k}{L}(u_1 - u_0)$$

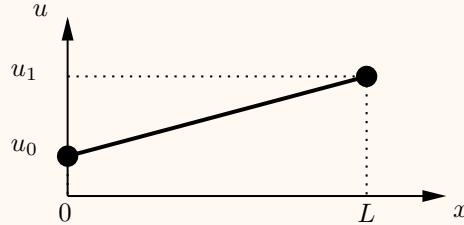


Figura 2.1: Soluzione stazionaria  $u^{st}(x)$ .

Definendo a questo punto il **regime transitorio**:

$$U(y, s) = \vartheta^{st}(y) - \vartheta(y, s) = y - \vartheta(y, s)$$

esso tenderà a 0 per  $s \rightarrow \infty$ .  $U$  soddisfa ancora l'equazione del calore e posso riscrivere il sistema con condizioni omogenee

$$\begin{cases} U_s - U_{yy} = 0 & 0 < y < 1, s > 0 \\ U(0, s) = U(1, s) = 0 & s > 0 \\ U(y, 0) = y & 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

### Applicazione del metodo

Ora che il problema è nella forma adatta voglio costruire una soluzione non banale mediante sovrapposizione di soluzioni particolari della forma

$$U(y, s) = w(s)v(y)$$

in modo tale che  $v(0) = v(1) = 0$

Sostituendo la forma della soluzione nell'equazione del calore ottengo

$$w'(s)v(y) - w(s)v''(y) = 0, \quad \forall y \in (0, 1), \quad \forall s > 0$$

Da cui dividendo per  $w(s)v(y)$  e separando:

$$\frac{w'(s)}{w(s)} = \frac{v''(y)}{v(y)} = \lambda$$

Dove  $\lambda$  è una costante: infatti affinché l'identità tra i due rapporti sia valida per ogni  $s > 0$  ed ogni  $y \in (0, 1)$ , essendo il primo membro funzione della sola variabile  $s$  ed il secondo della sola variabile  $y$ , l'unica possibilità è che siano entrambi uguali ad una costante comune. Posso dividere il mio problema iniziale in due sottoproblemi

- **Problema 1**

$$\begin{cases} v''(y) - \lambda v(y) = 0 \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

Si presentano 3 casi

–  $\lambda > 0$ , l'integrale generale è  $v(y) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}y} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}y}$ , le condizioni al bordo

$$\begin{cases} v(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ v(1) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \end{cases}$$

da cui  $c_1 = c_2 = 0$ , per cui otteniamo soluzioni banali e le scartiamo.

- $\lambda = 0$ , l'integrale generale è  $v(y) = c_1y + c_2$ , che unito alle condizioni al bordo dà  $c_1 = c_2 = 0$ , soluzioni banali. Scartiamo anche queste.
- $\lambda = -\mu^2 < 0$ , l'integrale generale è  $v(y) = c_1 \cos(\mu y) + c_2 \sin(\mu y)$ , le condizioni al bordo

$$\begin{cases} v(0) = c_1 = 0 \\ v(1) = \underline{c_1 \cos(\mu)} + c_2 \sin(\mu) = c_2 \sin(\mu) = 0 \end{cases}$$

Escludendo le soluzioni banali ( $c_2 = 0$ ) ottengo  $\sin(\mu) = 0$  e quindi  $\mu = m\pi$ ,  $m = 1, 2..$

Le soluzioni non banali del **problema 1** sono della forma<sup>1</sup>

$$v_m(y) = c_2 \sin(m\pi y), \quad \lambda_m = -m^2\pi^2$$

• **Problema 2**

$$w'(s) = \lambda w(s)$$

Ha soluzioni non banali della forma

$$w_m(s) = C e^{\lambda_m s} = C e^{-m^2\pi^2 s}$$

Unendo le soluzioni dei due problemi ottengo infinite soluzioni numerabili

$$U_m(y, s) = A_m e^{-m^2\pi^2 s} \sin(m\pi y) \quad m = 1, 2, \dots$$

*Lezione Salsa 5 (2/3/2021)*

Nessuna di queste infinite soluzioni soddisfa la condizione iniziale  $U(y, 0) = y$ , cerchiamo quindi di ottenere ciò che vogliamo sovrapponendo le infinite soluzioni

$$U(y, s) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-m^2\pi^2 s} \sin(m\pi y)$$

Imponiamo la condizione iniziale, per farlo risulta

$$U(y, s=0) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\pi y) = y \tag{2.1}$$

quell'uguaglianza ad  $y$  è da intendersi nel senso  $L^2$ , nello specifico dobbiamo sviluppare la funzione  $f(y) = y$  in serie di Fourier nell'intervallo  $(0, 1)$  per calcolare i coefficienti  $A_m$  che garantiscono la condizione iniziale.

Considerando una generica funzione  $T$ -periodica, si scrive in **serie di Fourier**<sup>2</sup>

$$f(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ a_m \cos\left(\frac{2\pi m}{T} y\right) + b_m \sin\left(\frac{2\pi m}{T} y\right) \right]$$

i cui coefficienti sono, per  $m \geq 0$

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(y) \cos\left(\frac{2\pi m}{T} y\right) dy \quad b_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(y) \sin\left(\frac{2\pi m}{T} y\right) dy$$

Ricordiamo l'**identità di Parseval**

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(y)]^2 dy = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2)$$

<sup>1</sup> $v_m$  prendono il nome di **autofunzioni** e  $\lambda_m$  di **autovalori**

<sup>2</sup>Il simbolo  $\sim$  indica che l'uguaglianza vale nel senso  $L^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ . Indicando con  $S_N(y)$  le somme parziali della serie, vale

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} [f(y) - S_N(y)]^2 dy = 0$$

Nel nostro caso vogliamo sviluppare la funzione 2-periodica

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(y) = y$$

È dispari, quindi è composta da soli seni, ovvero  $a_m = 0$  per ogni  $m$ .

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{2}{1 - (-1)} \int_{-1}^1 y \sin(m\pi y) dy \stackrel{\text{pari}}{=} 2 \int_0^1 y \sin(m\pi y) dy \\ &\stackrel{\text{ipp}}{=} \left[ -\frac{2}{m\pi} y \cos(m\pi y) \right]_0^1 + \frac{2}{m\pi} \int_0^1 \cos(m\pi y) dy \\ &= -2 \frac{\cos(m\pi)}{m\pi} + \frac{2}{m^2\pi^2} \overline{[\sin(m\pi y)]_0^1} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \end{aligned}$$

allora

$$y \sim \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin(m\pi y) \right] \quad (2.2)$$

Lo sviluppo è valido nell'intervallo  $(-1, 1)$ , agli estremi è nulla, e converge uniformemente in ogni  $[a, b] \subset (-1, 1)$ .

La nostra soluzione *candidata* è quindi, a seguito di (2.1) e (2.2) uguagliando i coefficienti

$$A_m = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \quad \boxed{U(y, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin(m\pi y) e^{-m^2\pi^2 s}} \quad (2.3)$$

### Questioni aperte

- **Q1** *Condizione iniziale.* In che senso

$$U(y, s) \rightarrow y \text{ per } s \rightarrow 0^+$$

- **Q2** Le  $U_m$  sono tutte soluzioni dell'equazione del calore. Anche  $U$  lo sarà? Se possiamo scambiare derivata e serie allora sì

$$(\partial_s - \partial_{yy})U(y, s) \stackrel{?}{=} \sum_{m=1}^{\infty} (\partial_s - \partial_{yy})U_m(y, s) = 0$$

- **Q3**  $U$  soddisfa la *condizione al bordo*?

$$\begin{aligned} \lim_{(y,s) \rightarrow (0,s_0)} U(y, s) &= 0 \\ \lim_{(y,s) \rightarrow (1,s_0)} U(y, s) &= 0 \end{aligned}$$

- **Q4** *Unicità.*

- **Q5** È vero che  $U(y, s) \rightarrow 0$  se  $s \rightarrow \infty$ ?

### Risposte

- **Q1** Consideriamo (2.3) e (2.2). Per Parseval

$$\begin{aligned} \int_0^1 [U(y, s) - y]^2 dy &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(e^{-m^2\pi^2 s} - 1)^2}{m^2} \\ &\Rightarrow \frac{(e^{-m^2\pi^2 s} - 1)^2}{m^2} \leq \frac{1}{m^2} \text{ per } s \geq 0 \end{aligned}$$

Allora la serie converge uniformemente per il test di Weierstrass in  $[0, +\infty)$  rispetto ad  $s$ , quindi

$$U(y, s) - y \rightarrow 0 \text{ in senso } L^2(0, 1) \text{ se } s \rightarrow 0$$

- **Q2** Consideriamo (2.3). Consideriamo una semistriscia del tipo

$$[0, 1] \times [s_0, +\infty) \quad s_0 > 0$$

Il termine generale della serie  $\sum U_m$  in modulo è maggiorato da

$$\left| \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin(m\pi y) e^{-m^2\pi^2 s} \right| \leq e^{-m^2\pi^2 s_0} \quad \text{se } s > s_0$$

quindi per il test di Weierstrass la serie converge uniformemente.

Inoltre la serie delle derivate  $\sum \partial_s U_m, \sum \partial_{yy} U_m$  converge uniformemente sempre per il test di Weierstrass

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_m}{\partial s} &= \frac{\partial^2 U_m}{\partial y^2} = (-1)^{m+2} 2m\pi e^{-m^2\pi^2 s} \sin(m\pi y) \\ \Rightarrow \left| \frac{\partial U_m}{\partial s} \right| &= \left| \frac{\partial^2 U_m}{\partial y^2} \right| \leq 2m\pi e^{-m^2\pi^2 s_0}, \quad s \geq s_0 \text{ nella striscia} \end{aligned}$$

Quindi possiamo scambiare serie e derivata e  $U(y, s)$  è anch'essa soluzione.

Deduciamo anche che

$$U \in C^\infty([0, 1] \times (0, +\infty))$$

avevamo una discontinuità nell'estremo destro, ma è diventata *istantaneamente* regolare. Questo è l'**effetto regolarizzante** dell'equazione del calore.

- **Q3** Sì perché la serie di  $U$  è uniformemente convergente in  $[0, 1] \times [s_0, +\infty)$ ,  $\forall s_0 > 0$  e possiamo scambiare serie e limite.

- **Q4** Usiamo il *metodo dell'energia*.

Supponiamo che esistano due soluzioni nella stessa classe di  $U$  con lo stesso dato iniziale  $y$ , assunto in senso  $L^2(0, 1)$ . Poniamo

$$w = U - V$$

vogliamo mostrare che  $w$  è nulla. La  $w$  è soluzione dell'equazione con dati iniziali e al bordo nulli

$$\begin{cases} w_s - w_{yy} = 0, & \text{in } 0 < y < 1, s > 0 \\ w(0, s) = w(1, s) = 0, & \boxed{s > 0} \\ w(y, 0) = 0, & \text{in senso } L^2(0, 1) \end{cases}$$

Moltiplichiamo per  $w$  da entrambi i lati e integriamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 w w_s dy &= \int_0^1 w w_{yy} dy \\ \int_0^1 w w_s dy &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} w^2(y, s) dy = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \underbrace{\int_0^1 w^2(y, s) dy}_{E(s)} = \frac{1}{2} E'(s) \\ \int_0^1 w w_{yy} dy &\stackrel{\text{ipp}}{=} w w_y \Big|_0^1 - \int_0^1 (w_y)^2 dy \leq 0 \end{aligned}$$

quindi  $E(s)$  è non negativa, descrescente (non strettamente), inoltre  $E(s) \rightarrow 0$  se  $s \rightarrow 0$ , allora

$$E(s) = 0 \quad \forall s > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 w^2(y, s) dy = 0 \quad \forall s > 0$$

ma  $w^2$  è continua per  $s > 0$  e non negativa. Non può essere che  $w = 0$  per  $s > 0$ , ovvero  $U = V$ .

- **Q5** Sempre per la convergenza uniforme della serie: se  $s \geq 1$ , il termine generale

$$\left| \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin(m\pi y) e^{-m^2\pi^2 s} \right| \leq \frac{e^{-m^2\pi^2 s}}{m}$$

quindi per il test di Weierstrass la serie converge uniformemente in  $[0, 1] \times [1, \infty)$ , posso passare al limite sotto il segno di somma:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} U(y, s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{s \rightarrow \infty} \cdots = 0$$

### Ritorno alle origini.

Avevamo definito

$$\vartheta(y, s) = \frac{u(Ly, \tau s) - u_0}{u_1 - u_0} \Rightarrow u(Ly, \tau s) = u_0 + [u_1 - u_0]\vartheta(y, s)$$

e anche

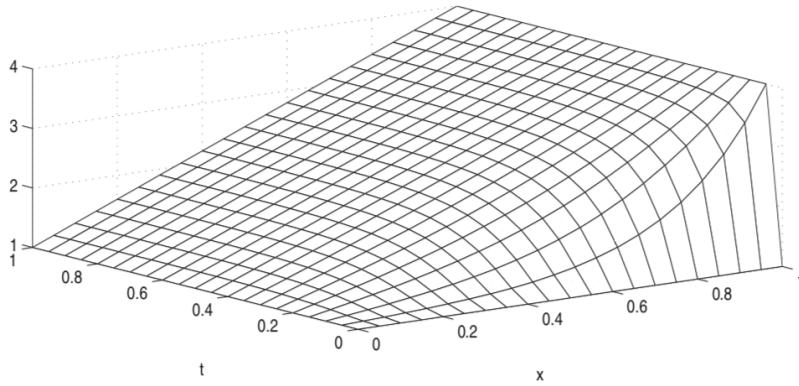
$$\vartheta(y, s) = y - U(y, s) \quad s = \frac{t}{\tau} \quad y = \frac{x}{L} \quad \tau = \frac{L^2}{D}$$

da cui possiamo finalmente riscrivere la soluzione nelle variabili originali

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0 + [u_1 - u_0](y - U(y, s)) \\ &= u_0 + [u_1 - u_0]y - [u_1 - u_0]U(y, s) \\ &= u_0 + [u_1 - u_0]\frac{x}{L} - [u_1 - u_0] \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{m+1}}{m} e^{-m^2\pi^2 \frac{D}{L^2} t} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)}_{\rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow \infty} \end{aligned}$$

A regime notiamo che la supposizione iniziale era corretta, la temperatura si assesta a una soluzione stazionaria fatta come una retta

$$u(x, t) = u_0 + [u_1 - u_0]\frac{x}{L} - [u_1 - u_0] \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{m+1}}{m} e^{-m^2\pi^2 \frac{D}{L^2} t} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)}_{\rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow \infty}$$

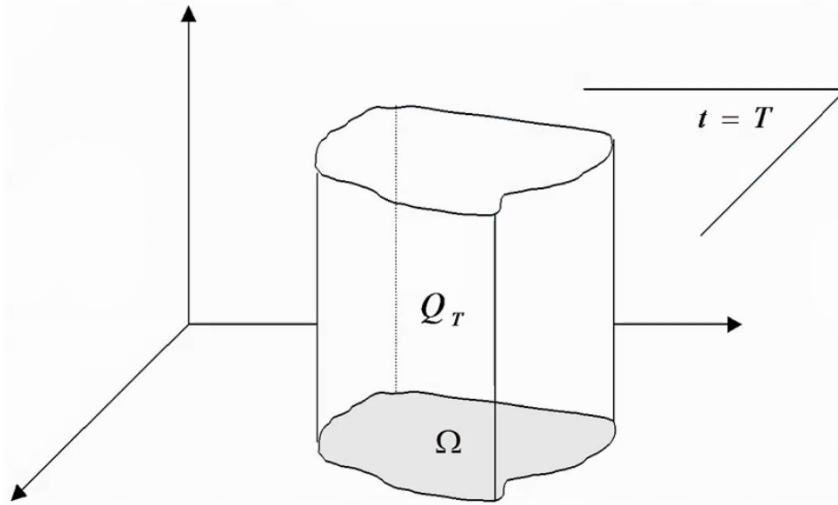


## 2.4 Problemi in dimensione $n > 1$

Sia  $\Omega$  un dominio<sup>3</sup>. La temperatura sarà una  $u = u(\mathbf{x}, t)$  che soddisfa  $u_t - D\Delta u = f$  nel cilindro spazio-temporale

$$Q_T = \Omega \times (0, T)$$

<sup>3</sup>ovvero un aperto connesso in  $\mathbb{R}^n$ .



Occorre assegnare

- *condizione iniziale*

$$u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}$$

- *condizioni sul bordo*  $\partial\Omega$

– **Dirichlet**, si assegna la temperatura

$$u(\boldsymbol{\sigma}, t) = h(\boldsymbol{\sigma}, t) \quad \boldsymbol{\sigma} \in \partial\Omega, t \in (0, T]$$

– **Neumann**, si assegna il flusso attraverso  $\partial\Omega$ . Indichiamo con  $\boldsymbol{\nu}$  il versore normale al bordo in funzione del punto. Ricordiamo che  $\partial_{\boldsymbol{\nu}} u = \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}$ . Si assegna

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}} u(\boldsymbol{\sigma}, t) = h(\boldsymbol{\sigma}, t) \quad \boldsymbol{\sigma} \in \partial\Omega, t \in (0, T] \quad (2.4)$$

– **Robin**, si assegna  $(\alpha > 0)$

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}} u(\boldsymbol{\sigma}, t) + \alpha u(\boldsymbol{\sigma}, t) = \beta \quad \boldsymbol{\sigma} \in \partial\Omega, t \in (0, T]$$

Le condizioni al bordo possono essere miste, per esempio  $\partial\Omega = \gamma_1 \cup \gamma_2$  e possiamo avere una condizione su  $\gamma_1$  e una diversa condizione su  $\gamma_2$ .

Il problema è quindi determinare  $u$  tale che

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = f & \text{in } Q_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) & \text{in } \bar{\Omega} \\ + \text{condizioni al bordo} & \text{su } \partial\Omega \times (0, T] \end{cases}$$

**Problema di Cauchy globale.**

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = f & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ + \text{condizioni all'}\infty \end{cases}$$

**DEFINIZIONE 2.1 — Frontiera parabolica.** Le condizioni sono assegnate sulla frontiera parabolica del cilindro, cioè l'unione della base e della parte laterale  $S_T = \partial\Omega \times (0, T]$

$$\partial_p Q_T = (\bar{\Omega} \times \{t = 0\}) \cup S_T$$

## 2.5 Principi di massimo

Il calore fluisce verso regioni dove la temperatura è più bassa, da ciò segue che la soluzione omogenea assume massimi e minimi globali sulla frontiera parabolica. Inoltre, risente di una irreversibilità temporale, il futuro non influenza il passato.

Indichiamo con  $C^{2,1}(Q_T)$  l'insieme delle funzioni di classe

$$\begin{array}{ll} C^2 & \text{rispetto a } x \\ C^1 & \text{rispetto a } t \end{array}$$

*su misura* per l'equazione del calore.

**TEOREMA 2.2 — Principio di massimo (risp. minimo) debole.** Sia  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Omega$  dominio limitato. Sia  $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$  tale che

$$u_t - D\Delta u = q \leq 0 \quad \text{in } Q_T \quad (\text{risp. } \geq 0)$$

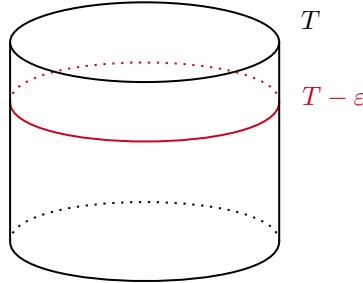
Allora il massimo (risp. minimo) di  $u$  è assunto sulla frontiera parabolica di  $Q_T$

$$\max_{\bar{Q}_T} u = \max_{\partial_p Q_T} u \quad \left( \text{risp. } \min_{\bar{Q}_T} u = \min_{\partial_p Q_T} u \right)$$

La dicitura *debole* è dovuta al fatto che garantisce che il massimo viene certamente assunto sulla frontiera parabolica, ma non esclude che sia assunto anche dentro. Per questo, servirà il Massimo Forte.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\varepsilon > 0$ , definiamo  $w = u - \varepsilon t$ , allora

$$w_t - D\Delta w = q - \varepsilon < 0 \tag{2.5}$$



Supponiamo che esista un punto  $(x_0, t_0) \in \bar{Q}_{T-\varepsilon} \setminus \partial_p Q_{T-\varepsilon}$  punto di massimo per  $w$ , tale punto può trovarsi o all'interno o sul tappo superiore. Quindi, per definizione stessa di massimo:

$$\begin{array}{ll} \text{all'interno} & w_t = 0 \quad \Delta w \leq 0 \\ \text{sul tappo} & w_t \geq 0 \quad \Delta w \leq 0 \end{array}$$

sul tappo è  $w_t \geq 0$  perché potrebbe star crescendo ancora. Tuttavia in entrambi i casi

$$w_t - D\Delta w \geq 0 \tag{2.6}$$

le (2.5) e (2.6) sono in contraddizione, quindi il massimo sta sulla frontiera parabolica:

$$\max_{\bar{Q}_{T-\varepsilon}} w = \max_{\partial_p Q_{T-\varepsilon}} w$$

Inoltre  $w \leq u$  e  $u = w + \varepsilon t \leq w + \varepsilon T$

$$\begin{aligned} \max_{\overline{Q}_{T-\varepsilon}} u &\leq \max_{\overline{Q}_{T-\varepsilon}} w + \varepsilon T \\ &= \max_{\partial_p Q_{T-\varepsilon}} w + \varepsilon T \\ &\leq \max_{\partial_p Q_{T-\varepsilon}} u + \varepsilon T \end{aligned}$$

Facendo tendere  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\max_{\overline{Q}_T} u \leq \max_{\partial_p Q_T} u$$

d'altro canto, essendo l'insieme a destra compreso in quello di sinistra, il massimo di sinistra deve essere almeno tanto quanto quello di destra

$$\max_{\overline{Q}_T} u \geq \max_{\partial_p Q_T} u$$

da cui la tesi. ■

*Lezione Salsa 6 (8/3/2021)*

## 2.6 Conseguenze del principio di massimo debole

Sia  $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$  soluzione di

$$u_t - D\Delta u = 0 \quad \text{in } Q_T$$

allora

$$\min_{\partial_p Q_T} u \leq \min_{\overline{Q}_T} u \leq \max_{\overline{Q}_T} u \leq \max_{\partial_p Q_T} u$$

### 2.6.1 Corollario del massimo debole

Siano  $f_1, f_2$  funzioni limitate in  $Q_T$  e  $u, v$  soluzioni di

$$\begin{aligned} u_t - D\Delta u &= f_1 \\ v_t - D\Delta v &= f_2 \end{aligned}$$

Allora

1. *Confronto.* Se  $f_1 \leq f_2$  in  $Q_T$  e  $u \leq v$  su  $\partial_p Q_T$  allora

$$u \leq v \quad \text{in tutto } Q_T$$

2. Vale la stima

$$\max_{\overline{Q}_T} |u - v| \leq \max_{\partial_p Q_T} |u - v| + T \sup_{Q_T} |f_1 - f_2|$$

È una stabilità in norma  $L^\infty$

$$\|u - v\|_{L^\infty(\overline{Q}_T)} \leq \|u - v\|_{L^\infty(\partial_p Q_T)} + T \|f_1 - f_2\|_{L^\infty(Q_T)}$$

Questo implica l'**unicità e la dipendenza continua dai dati per il problema di Cauchy-Dirichlet** in  $C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ . Se uguali dati sulla frontiera e stessa sorgente esogena, allora  $u = v$ , infatti sia  $u$  soluzione di

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = f & \text{in } Q_T \\ u = h & \text{su } S_T \\ u = g & \text{per } t = 0 \text{ in } \overline{\Omega} \end{cases}$$

se  $v$  è un'altra soluzione allora  $w = u - v$  soddisfa

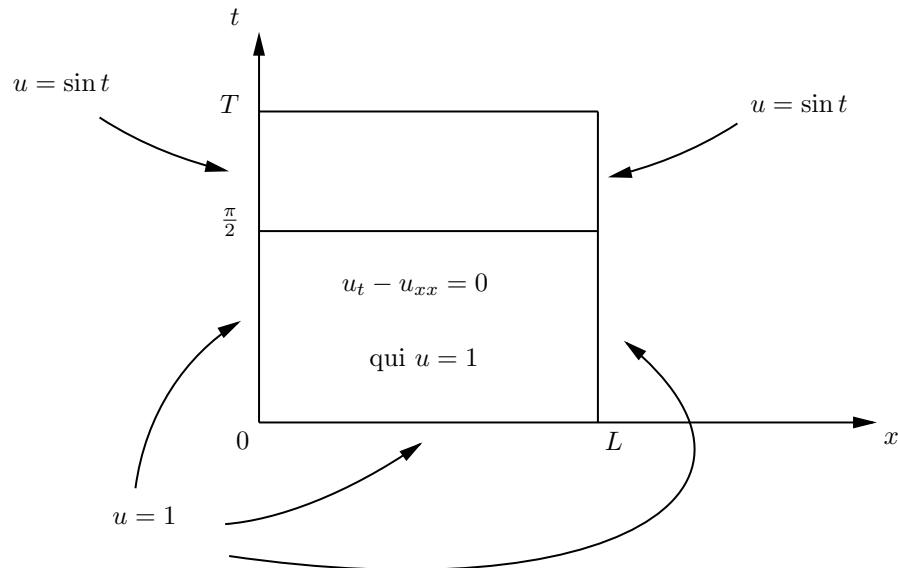
$$\begin{cases} w_t - D\Delta w = 0 & \text{in } Q_T \\ w = 0 & \text{su } S_T \\ w = 0 & \text{per } t = 0 \text{ in } \bar{\Omega} \end{cases}$$

allora (2) diventa

$$\|w\|_{L^\infty(\bar{Q}_T)} \leq 0 + 0 \Rightarrow u = v.$$

### 2.6.2 Principio di massimo forte

Se prendiamo un problema del tipo



$$u = 1 \text{ per } 0 \leq t \leq \pi/2$$

Il massimo di  $u$  sulla frontiera parabolica è

$$\max_{\partial_p Q_T} u = 1$$

e il massimo di  $u$  su tutto è

$$\max_{\bar{Q}_T} u = 1$$

Tuttavia nel rettangolo fino a che  $t = \pi/2$  il massimo non è assunto solo sulla frontiera, ma anche tutto all'interno. Si dimostra che è l'unica possibilità affinché avvenga, ovvero che **il massimo può essere assunto all'interno solo se fino a quel punto  $u$  è rimasto costante (Principio di Massimo Forte)**.

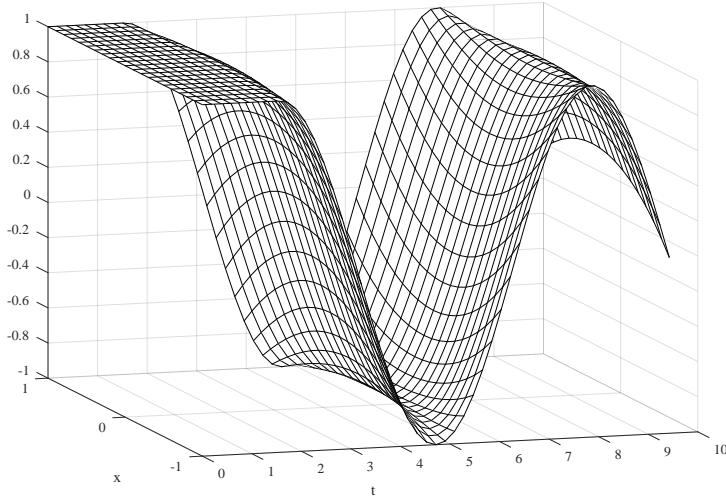


Figura 2.2: Principio di massimo forte. Si può notare come una volta usciti dalla zona dove si assume il massimo, non viene più raggiunto nei tempi successivi.

## 2.7 Soluzione fondamentale $n = 1$

In  $x = 0$  sia concentrata una sorgente di calore **istantanea**. Indichiamo con  $u^*$  la temperatura della sbarra, vogliamo determinare l'evoluzione di  $u^*, t \geq 0$ .

$$\xrightarrow{\hspace{10cm}} \bullet \quad x$$

Non ci sono sorgenti esogene ( $f = 0$ ) quindi sicuramente soddisfa l'equazione del calore omogenea

$$u_t^* - Du_{xx}^* = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Vi è assenza di produzione o assorbimento di calore, allora l'energia si conserva

$$\int_{\mathbb{R}} \rho c_v u^*(x, t) dx = E \text{ costante}, \quad t > 0$$

Se scriviamo  $Q = \frac{E}{\rho c_v}$  diventa

$$\int_{\mathbb{R}} u^*(x, t) dx = Q, \quad t > 0$$

La grandezza  $Q$  ha le dimensioni di una temperatura per una lunghezza.

Inoltre  $u^*(x, t)$  è una funzione pari in  $x$  e non negativa

$$u^*(-x, t) = u^*(x, t) \quad u^* \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0$$

Per determinare  $u^*$  useremo 2 passi

### 2.7.1 Passo 1

Dimostriamo che  $u^*$  è della forma

$$u^*(x, t) = \frac{Q}{\sqrt{Dt}} \cdot U\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right)$$

ponendo  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $U(\xi) \geq 0, \forall \xi$  la parità di  $u^*$  si riflette su  $U$

$$U(\xi) = U(-\xi)$$

La cosa importante è che per questo primo passo non useremo l'equazione differenziale, ma useremo l'**analisi dimensionale**.

**OSSERVAZIONE — sull'Analisi Dimensionale.** Supponiamo di essere in un sistema fisico, abbiamo una classe di sistemi di unità di misura, in riferimento ad alcune grandezze che riteniamo fondamentali. Per esempio *lunghezza, massa e tempo* si possono misurare in

$$\begin{array}{ccc} L & M & T \\ m & kg & sec \\ cm & g & sec \end{array}$$

Ad esempio

$$[\rho] = L^{-3}M^1T^0$$

possiamo associare a tale scrittura un vettore le cui componenti sono gli esponenti

$$\begin{pmatrix} L \\ M \\ T \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'analisi dimensionale è basata sul seguente teorema.

**TEOREMA 2.3 — Pi di Buckingham.** Sia

$$q = f(q_1, \dots, q_n) \quad (\text{R})$$

una relazione **completa** (invariante al cambio di sistema di unità di misura nell'ambito di una stessa classe).

Sia  $1 \leq k \leq n$  il massimo numero di grandezze dimensionalmente indipendenti tra le  $q_1, \dots, q_n$ <sup>a</sup>. Siano per esempio le prime  $q_1, \dots, q_k$  (si dicono **quantità primarie**).

Allora (R) si può scrivere nella forma

$$\Pi = \mathcal{F}(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k})$$

dove  $\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$  sono **adimensionali**, ovvero numericamente non cambiano in qualunque modo si scalano il sistema o le unità di misura (il vettore è nullo), espresse in termini di  $q_1, \dots, q_n$ .

<sup>a</sup>poi si vedrà come determinare quali sono, ci avvarremo dell'algebra lineare.

Applichiamo il tutto alla nostra situazione. Le grandezze fondamentali sono  $\Theta, L, T$ .

$$u^* = f(x, t, D, Q) \quad n = 4$$

Abbiamo

$$(x) = \Theta^0 L^1 T^0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(t) = \Theta^0 L^0 T^1 \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(D) = \Theta^0 L^2 T^{-1} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(Q) = \Theta^1 L^1 T^0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$t, D, Q$  sono linearmente indipendenti, di conseguenza li sceglieremo come grandezze primarie. Esprimiamo le dimensioni delle grandezze secondarie in termini di quelle delle primarie

- Per la  $x$

$$[x] \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \gamma = 0, \beta = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{1}{2}$$

Questo vuol dire che

$$[x] = [t]^{1/2}[D]^{1/2}[Q]^0$$

ma quindi  $\frac{x}{\sqrt{Dt}} = \Pi_1$  è adimensionale.

- Per la  $u^*$

$$[u^*] \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \gamma = 1, \alpha = \beta = -\frac{1}{2}$$

Questo vuol dire che

$$[u^*] = [t]^{-1/2}[D]^{-1/2}[Q]^1$$

ma quindi  $\frac{u^*}{\frac{Q}{\sqrt{Dt}}} = \Pi$  è adimensionale

Riscriviamo ciò che abbiamo

$$\Pi \frac{Q}{\sqrt{Dt}} = f(\Pi_1 \sqrt{Dt}, t, D, Q) \Rightarrow \Pi = \frac{\sqrt{Dt}}{Q} f(\Pi_1 \sqrt{Dt}, t, D, Q)$$

che è della forma

$$\Pi = U(\Pi_1, t, D, Q)$$

**Punto cruciale.** Anche  $U$  deve essere adimensionale, ma se io cambio  $t, D, Q$  cambiano numericamente le grandezze, per cui **non può dipendere** da  $t, D, Q$ .

$$\Rightarrow \Pi = U(\Pi_1)$$

Torniamo alle variabili originali

$$\frac{u^*}{\frac{Q}{\sqrt{Dt}}} = U\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right) \Rightarrow u^* = \frac{Q}{\sqrt{Dt}} U\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right)$$

### 2.7.2 Passo 2

Dimostriamo che

$$U(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$$

Dobbiamo usare l'equazione del calore imponendo che  $u^*$  sia soluzione, poniamo  $\xi = \frac{x}{\sqrt{Dt}}$ , allora

$$\begin{aligned} u_t^* &= \frac{Q}{\sqrt{D}} \left[ -\frac{1}{2} t^{-3/2} U(\xi) + t^{-1/2} U'(\xi) \frac{x}{\sqrt{D}} \left( -\frac{1}{2} \right) t^{-3/2} \right] \\ &= -\frac{Q}{\sqrt{D}} \frac{1}{2} t^{-3/2} [U(\xi) + U'(\xi) \xi] \end{aligned}$$

$$u_x^* = \frac{Q}{\sqrt{Dt}} U'(\xi) \cdot \frac{1}{\sqrt{Dt}} = \frac{Q}{Dt} U'(\xi)$$

$$u_{xx}^* = \frac{Q}{Dt} U''(\xi) \cdot \frac{1}{\sqrt{Dt}} = \frac{Q}{\sqrt{Dt}} t^{-3/2} \frac{1}{D} U''(\xi)$$

Sostituiamo nell'equazione del calore omogenea

$$u_t^* - Du_{xx}^* = \frac{Q}{\sqrt{D}} t^{-3/2} \left[ -\frac{1}{2} U(\xi) - \frac{1}{2} U'(\xi) \xi - U''(\xi) \right] = 0$$

$$\Rightarrow U''(\xi) + \frac{1}{2}\xi U'(\xi) + \frac{1}{2}U(\xi) = 0$$

Tale termine può essere visto come una derivata

$$\frac{d}{d\xi} \left[ U'(\xi) + \frac{1}{2}\xi U(\xi) \right] = 0 \Rightarrow U'(\xi) + \frac{1}{2}\xi U(\xi) = \text{costante}$$

Ma sappiamo che  $U$  è pari e regolare in un certo senso, allora  $U'(0) = 0$ . Imponendo quindi  $\xi = 0$  scopriamo che anche la costante è nulla. Abbiamo dunque

$$U'(\xi) + \frac{1}{2}\xi U(\xi) = 0$$

È un'equazione a variabili separabili

$$\frac{U'}{U} = -\frac{1}{2}\xi \Rightarrow \log U = -\frac{1}{4}\xi^2 + k \Rightarrow U = ce^{-\frac{1}{4}\xi^2}$$

Cos'è  $c$ ? Non abbiamo ancora usato la conservazione dell'energia

$$\int_{\mathbb{R}} u^*(x, t) dx = Q$$

che si riduce a

$$Q = \int_{\mathbb{R}} \frac{Q}{\sqrt{Dt}} U \left( \frac{x}{\sqrt{Dt}} \right) dx = \left\{ \xi = \frac{x}{\sqrt{Dt}} \right\} = Q \int_{\mathbb{R}} U(\xi) d\xi$$

Allora possiamo procedere a determinare  $c$

$$\int_{\mathbb{R}} U(\xi) d\xi = 1 \Rightarrow c \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi = 1 \Rightarrow \begin{cases} \xi = 2z \\ d\xi = 2dz \end{cases}$$

Ricordando l'integrale di Gauss

$$2c \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz}_{\sqrt{\pi}} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

Infine

$$u^*(x, t) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

Nel caso in cui  $Q = 1$  si ottiene la **soluzione fondamentale**.

$$\Gamma_D(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

Che ricorda la densità di probabilità di una normale di media  $\mu = 0$  e varianza  $\sigma^2 = 2Dt$ .

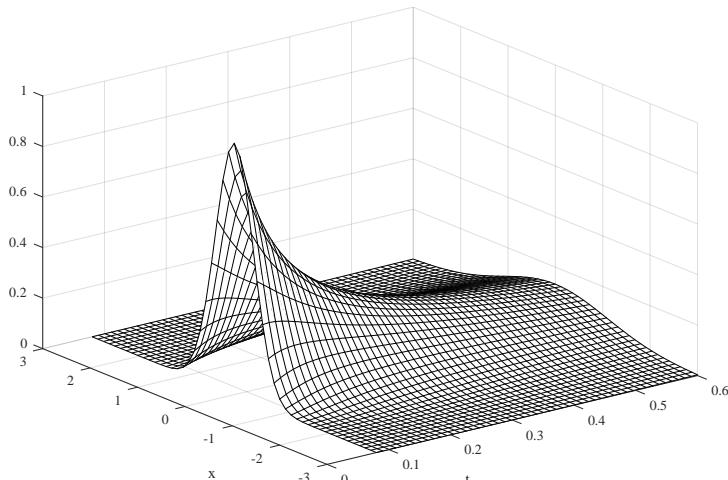
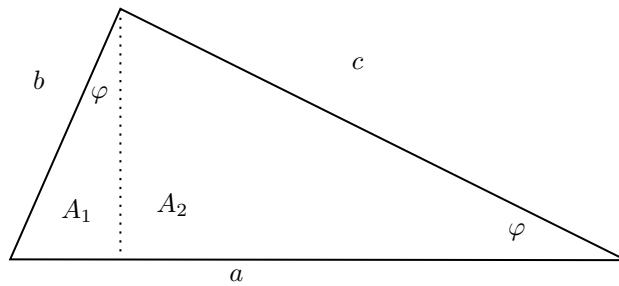


Figura 2.3: Soluzione fondamentale con  $D = 1$ . Si può notare il picco iniziale che viene poi smussato.

**Dimostrazione in due righe del Teorema di Pitagora.<sup>4</sup>**



$$A = A_1 + A_2 \quad \begin{cases} A = \mathcal{F}(a, \varphi) \\ A_1 = \mathcal{F}(b, \varphi) \\ A_2 = \mathcal{F}(c, \varphi) \end{cases} \quad [A] = L^2$$

Usiamo l'analisi dimensionale

$$\frac{A}{a^2} = \mathcal{F}^*(\varphi) \text{ adimensionale}, \quad A_1 = b^2 \mathcal{F}^*(\varphi), \quad A_2 = c^2 \mathcal{F}^*(\varphi)$$

La funzione è la stessa perché i triangoli sono *simili*. Quindi

$$a^2 \mathcal{F}^*(\varphi) = b^2 \mathcal{F}^*(\varphi) + c^2 \mathcal{F}^*(\varphi) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

■

*Lezione Salsa 7 (9/3/2021)*

### 2.7.3 Modellazione matematica della sorgente d'origine

Per giungere alla soluzione fondamentale siamo partiti dall'evoluzione della temperatura causata da una sorgente istantanea e concentrata nell'origine. Qual è il modello matematico più adatto a descriverla?

Per la conservazione dell'energia

$$\int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x, t) = 1, \quad \forall t > 0$$

Inoltre possiamo studiare il comportamento della soluzione fondamentale per  $t \rightarrow 0^+$

$$\Gamma_D(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{t \rightarrow 0^+} \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

Nessuna funzione ha queste proprietà, ma si può modellare matematicamente la sorgente con una funzione generalizzata, una distribuzione: la **delta di Dirac** (nell'origine)  $\delta_0$

$$\text{“ } \Gamma_D(x, 0) = \delta_0(x) \text{ ”}$$

diventa la condizione iniziale.

**DEFINIZIONE 2.4 — delta di Dirac.** Si chiama distribuzione di Dirac nell'origine la funzione generalizzata che si indica con  $\delta_0$  e che agisce su una funzione test  $\varphi$  nel seguente modo

$$\int \delta(x) \varphi(x) dx = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

Il limite che abbiamo fatto sopra è un limite nel senso delle distribuzioni, in  $D'(\mathbb{R})$

$$\langle \Gamma_D(\cdot, t), \varphi \rangle \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{t \rightarrow 0^+} \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

Se anziché nell'origine, la sorgente unitaria fosse concentrata in un punto  $y$ , dovrei modellarla con la distribuzione di Dirac in  $y$ ,  $\delta(x - y)$ , e la funzione  $\Gamma_D(x - y, t)$  è l'unica soluzione (grazie all'invarianza per traslazione spaziale) che soddisfi la condizione iniziale

$$\text{“ } \Gamma_D(x - y, 0) = \delta(x - y) \text{ ”}$$

<sup>4</sup>Ovvero: come sparare a una mosca con un cannone (cit. S. Salsa).

### 2.7.4 Interpretazione della $\Gamma_D(x, t)$

- *Unit source solution:*  $\Gamma_D$  descrive la **concentrazione** di una sostanza nel punto  $x$  al tempo  $t$  generata dalla diffusione di una massa unitaria inizialmente concentrata nell'origine
- Altro punto di vista: sia una massa unitaria composta da un **numero  $N$  di particelle**
  - $\Gamma_D(x, t)dx$  fornisce probabilità di trovare una particella in un intervallo del tipo  $(x, x + dx)$  al tempo  $t$ .
  - $\Gamma_D(x, t)dx$  fornisce la percentuale di particelle fra le  $N$  che si trova in  $(x, x + dx)$  al tempo  $t$ .

**NB.** Come già osservato in precedenza, per  $t > 0$   $\Gamma_D$  è  $C^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ . Si dimentica immediatamente della singolarità ed è positiva  $\forall t > 0$ : la diffusione del calore è istantanea in tutta la sbarra.

### 2.7.5 Soluzione fondamentale in $n > 1$

Con ragionamenti analoghi otteniamo

$$\Gamma_D(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4Dt}}$$

e come condizione iniziale

$$\begin{aligned} & ``\Gamma_D(\mathbf{x}, 0) = \delta_n(\mathbf{0})" \\ & \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x}, 0) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle \delta_n, \varphi \rangle = \varphi(\mathbf{0}) \end{aligned}$$

l'interpretazione della soluzione fondamentale è analoga e la conservazione dell'energia si esprime come

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 1, \quad \forall t > 0$$

## 2.8 Passeggiata aleatoria simmetrica (unidimensionale)

Esploriamo ora la connessione tra modelli **deterministici** analizzati fin'ora e **probabilistici**. Vogliamo costruire modelli **continui** (nel nostro caso del tipo del moto browniano) come limite di modelli **discreti stocastici**.

Nel realizzare il procedimento si vede come l'equazione del calore possa essere approssimata con un'equazione alle differenze, risultato utile per alcuni metodi numerici che permettono il calcolo approssimato delle soluzioni.

Il nostro modello discreto, dato un passo spaziale di lunghezza  $h$  e un intervallo temporale di durata  $\tau$ , prevede **una** particella di **massa unitaria** in moto lungo un asse ( $asse x$ ) con le seguenti regole

1. la particella si muove, in un tempo  $\tau$ , di  $h$ , partendo da  $x = 0$ .
2. la particella si muove verso destra o sinistra con probabilità  $1/2$ , in modo indipendente dai passi precedenti.

La particella al tempo  $t = N\tau$  (dopo  $N$  passi) si troverà in

$$x = mh, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad -N \leq m \leq N$$

$x, m$  sono variabili aleatorie.

Voglio calcolare

$$p(x, t) = \text{probabilità di trovare la particella in } x \text{ al tempo } t$$

Se  $x = mh$  è la posizione della particella dopo  $N$  passi, avrò fatto:

- $k$  passi a destra ( $k$  è una variabile aleatoria)
- $N - k$  passi a sinistra

con  $0 \leq k \leq N$ .

$$m = k - (N - k) = 2k - N$$

dunque

$$\begin{aligned} p(x, t) = p_k &= \frac{\#\text{cammini con } k \text{ passi a destra}}{\#\text{cammini con } N \text{ passi}} \\ &= \frac{\binom{N}{k}}{2^N} = \binom{N}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{N-k} \end{aligned}$$

$k$  ha legge binomiale di parametri  $Bi\left(N, \frac{1}{2}\right)$ .

- valore atteso di  $k$

$$\mathbb{E}[k] = \langle k \rangle = Np = \frac{N}{2}$$

- varianza di  $k$

$$\text{Var}[k] = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = np(1-p) = \frac{N}{4}$$

- momento secondo di  $k$

$$\mathbb{E}[k^2] = \langle k^2 \rangle = \frac{N}{4} + \langle k \rangle^2 = \frac{N + N^2}{4}$$

Da cui si possono calcolare media e varianza di  $x$ :

- media di  $x$

$$\langle x \rangle = h\langle m \rangle = h\langle 2k - N \rangle = h(2\langle k \rangle - N) = 0$$

- varianza di  $x$

$$\begin{aligned} \text{Var}[x] &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = h^2 \langle m^2 \rangle = h^2 \langle 4k^2 - 4Nk + N^2 \rangle \\ &= h^2 (4\langle k^2 \rangle - 4N\langle k \rangle + N^2) \\ &= h^2 \left(4\frac{N + N^2}{4} - 4N\frac{N}{2} + N^2\right) \\ &= h^2 (N^2 + N - 2N^2 + N^2) \\ &= h^2 N \end{aligned}$$

Questi due valori sono **caratteristiche essenziali della passeggiata** da cui posso ricavare

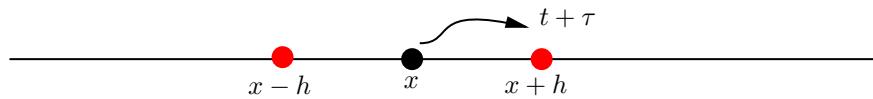
$$\frac{\text{Var}[x]}{t} = \frac{\langle x^2 \rangle}{t} = \frac{h^2 N}{\tau N} = \frac{h^2}{\tau}$$

prendendo la deviazione standard

$$d = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \frac{h}{\sqrt{\tau}} \sqrt{t} \Rightarrow d \sim \sqrt{t}$$

questa relazione mi dice che le particelle diffondono dell'ordine della radice di  $t$ : in pratica, dopo 100 secondi, mi sono mosso dell'ordine di 10.

Per arrivare ad un modello continuo ora devo ricavare un'equazione alle differenze finite su cui fare un passaggio al limite per  $h, \tau \rightarrow 0$  (mantenendo tuttavia le stesse caratteristiche della passeggiata: il rapporto  $d, t$ )



Usando il teorema delle probabilità totali posso esprimere  $p(x, t + \tau)$  in funzione dell'istante precedente

$$p(x, t + \tau) = \frac{1}{2}p(x - h, t) + \frac{1}{2}p(x + h, t)$$

Passando al limite ottengo  $0 = 0$ , occorre quindi uno sviluppo di Taylor

$$p(x, t + \tau) = p(x, t) + \tau p_t(x, t) + o(\tau)$$

$$p(x \pm h, t) = p(x, t) \pm h p_x(x, t) + \frac{h^2}{2} p_{xx}(x, t) + o(h^2)$$

sostituendo nell'equazione

$$\cancel{p} + \tau p_t + o(\tau) = \cancel{\frac{1}{2}p} - \cancel{\frac{1}{2}hp_x} + \frac{h^2}{4} p_{xx} + \cancel{\frac{1}{2}p} + \cancel{\frac{1}{2}hp_x} + \frac{h^2}{4} p_{xx} + o(h^2)$$

dividendo per  $\tau$  e portando  $o(\tau)$  a destra

$$p_t = \frac{1}{2} \frac{h^2}{\tau} p_{xx} + o\left(\frac{h^2}{\tau}\right) + o(1)$$

Se voglio ottenere una cosa sensata, facendo il limite, il rapporto  $h^2/\tau$  deve mantenersi finito e positivo (così da mantenere le caratteristiche della passeggiata). Faccio il limite per  $h, \tau \rightarrow 0$ , assumendo

$$\frac{h^2}{\tau} = 2D, \quad (D > 0)$$

fisso e sotto controllo. Allora  $o(h^2/\tau)$  è come se fosse un  $o(1)$  visto che  $h^2/\tau$  è costante. Passando al limite ottengo l'**equazione di diffusione**:

$$p_t = D p_{xx}$$

Tornando alla passeggiata aleatoria

$$\frac{\langle x^2 \rangle}{t} = 2D \Rightarrow \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{t2D}$$

che significa che, nell'unità di tempo  $t = 1$ , la particella diffonde di una distanza media  $\sqrt{2D}$ : è questa la caratteristica della passeggiata aleatoria che si conserva passando al limite. Abbiamo dunque dato un significato al coefficiente di diffusione!

Inoltre

$$\frac{h}{\tau} \rightarrow \infty$$

la velocità di spostamento diventa sempre più elevata.

### 2.8.1 Dalla passeggiata aleatoria al moto browniano

Che cosa è diventata la passeggiata aleatoria? Poniamo  $x_j = x(jh)$  la posizione raggiunta dopo  $j \geq 1$  passi. Introduco la variabile aleatoria

$$\xi_j = \frac{x_j - x_{j-1}}{h} = \begin{cases} 1, & p = \frac{1}{2} \\ -1, & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Da cui

$$\langle \xi_j \rangle = 0, \quad \langle \xi_j^2 \rangle = 1$$

Le  $\xi_j$  sono una famiglia di variabili aleatorie iid. La posizione della particella dopo  $N$  passi è

$$X_N = h \sum_{j=1}^N \xi_j, \quad h = \sqrt{\frac{2Dt}{N}}$$

dove la scelta di  $h$  è tale che

$$\frac{h^2}{\tau} = 2D, \quad t = N\tau$$

Ricordiamo il TCL

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \sigma^2 = \text{Var}[X_i], \quad \mu = \mathbb{E}[X_i] \Rightarrow \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Nel nostro caso

$$\frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j - 0}{1/\sqrt{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

ovvero:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \xi_j &\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \\ \frac{\sqrt{2Dt}}{\sqrt{2Dt}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \xi_j &\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \\ \frac{\sqrt{2Dt}}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \xi_j &\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 2Dt) \end{aligned}$$

Quindi

$$X_N \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 2Dt). \quad (2.7)$$

che ha come densità proprio la soluzione fondamentale  $\Gamma_D$ .

La passeggiata aleatoria è diventata al limite un moto continuo che, per  $D = 1/2$ , prende il nome di **moto browniano**.

Di solito si usa la notazione  $B(t)$  per indicare la posizione di una particella che si muove di moto Browniano. In realtà al variare del tempo le variabili aleatorie sono definite su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , con

1.  $\Omega$  insieme degli eventi elementari
2.  $\mathcal{F}$  una  $\sigma$ -algebra degli eventi misurabili in  $\Omega$
3.  $P$  un'opportuna misura di probabilità in  $\mathcal{F}$

La notazione corretta sarebbe dunque  $B(t, \omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ .

- Bloccando  $t$ , otteniamo la variabile aleatoria

$$\omega \mapsto B(t, \omega)$$

- Bloccando  $\omega$ , otteniamo la funzione reale

$$t \mapsto B(t, \omega)$$

che descrive uno dei possibili cammini di una particella Browniana.

### 2.8.2 Passeggiata aleatoria non simmetrica

Cosa succederebbe se, mantenendo tutte le altre regole uguali, la probabilità che la particella si sposti verso sinistra o verso destra non sia  $1/2$ ?

Sia  $p_0$  la probabilità che la particella vada a destra e  $q_0$  quella che vada a sinistra. Per il teorema delle probabilità totali posso riscrivere l'equazione alle differenze finite

$$p(x, t + \tau) = p_0 p(x - h, t) + q_0 p(x + h, t)$$

sviluppando in serie di Taylor in modo analogo

$$\begin{aligned} p + \tau p_t + o(\tau) &= p_0 \left( p - h p_x + \frac{h^2}{2} p_{xx} \right) + q_0 \left( p + h p_x + \frac{h^2}{2} p_{xx} \right) + o(h^2) \\ &= \underbrace{(p_0 + q_0)}_{=1} p + \frac{h^2}{2} p_{xx} + (q_0 - p_0) h p_x + o(h^2) \end{aligned}$$

Da cui

$$p_t = \frac{1}{\tau} \frac{h^2}{2} p_{xx} + \frac{(q_0 - p_0)h}{\tau} p_x + o\left(\frac{h^2}{\tau}\right) + o(1)$$

Il termine  $\frac{h^2}{\tau}$ , come prima, sarà mantenuto costante e lo assumiamo uguale a  $2D$ . Questa volta però c'è anche un nuovo termine da tenere sotto controllo:

$$\frac{(q_0 - p_0)h}{\tau} = \frac{q_0 - p_0}{h} \frac{h^2}{\tau}$$

Assumiamo dunque

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{q_0 - p_0}{h} = \beta, \quad \beta \text{ finito} \quad (2.8)$$

Questo equivale a chiedere che

$$p_0 = \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2}h + o(h), \quad q_0 = \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2}h + o(h)$$

Passando al limite per  $h, \tau \rightarrow 0$  sotto queste ipotesi otteniamo

$$p_t = Dp_{xx} + vp_x \quad v = 2\beta D$$

Che cos'è il termine  $v$  che abbiamo definito? Le sue dimensioni sono quelle di una velocità

$$[v] = LT^{-1} \quad v = \lim_{h \rightarrow 0} 2D \frac{q_0 - p_0}{h}$$

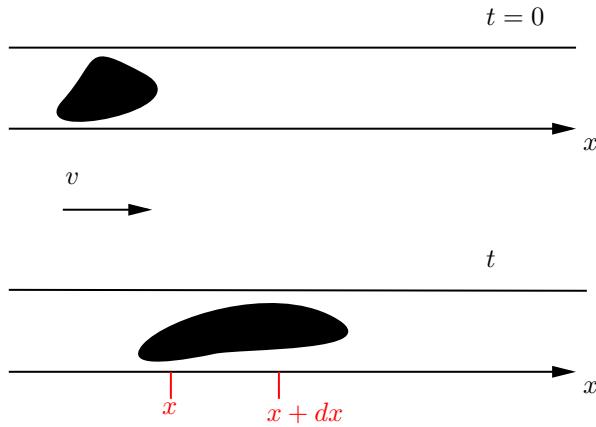
$q_0 - p_0$  codifica la tendenza del moto continuo ad andare verso una direzione privilegiata: se  $v > 0$  il moto tenderà al limite ad andare verso sinistra, se  $v < 0$  invece tenderà verso destra. In altre parole, esiste una corrente di intensità  $|v|$  che trasporta la particella in una direzione mentre questa diffonde con costante  $D$ .

$$p_t = \underbrace{Dp_{xx}}_{\text{diffusione}} + \underbrace{vp_x}_{\text{trasporto}}$$

La passeggiata aleatoria è diventata un processo di **diffusione con deriva**.

## 2.9 Inquinante in un canale

Esaminiamo un semplice modello di trasporto e diffusione: in un canale con corrente che si muove con velocità  $v$  costante lungo la direzione positiva dell'asse  $x$  è presente un inquinante. L'inquinante galleggia sulla superficie e il canale è molto stretto: possiamo trascurare larghezza e profondità ed approssimarla ad un modello *unidimensionale*.



Vogliamo derivare un modello matematico per descrivere l'evoluzione della concentrazione  $c = c(x, t)$  della sostanza. Il tasso di variazione della massa che si trova nell'intervalle  $[x, x + \Delta x]$  è dato da

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} c(y, t) dy = \int_x^{x+\Delta x} c_t(y, t) dy$$

è pari alla differenza tra il flusso in entrata attraverso  $x$  e il flusso in uscita attraverso  $x + \Delta x$ . Indicando con  $q = q(x, t)$  il flusso di massa che entra nell'intervallo attraverso il punto  $x$  al tempo  $t$  posso scrivere la conservazione della massa

$$\int_x^{x+\Delta x} c_t(y, t) dy = q(x, t) - q(x + \Delta x, t)$$

Dividendo per  $\Delta x$  e passando al limite per  $\Delta x \rightarrow 0$  si ottiene

$$c_t = -q_x \quad (2.9)$$

Ora bisogna decidere con che tipo di flusso di massa abbiamo a che fare o, in altri termini, stabilire una **legge costitutiva** per  $q$ :

- Per **convezione** o trasporto, il flusso è determinato dalla sola corrente d'acqua, come se l'inquinante fosse trasportato dal fluido senza espandersi o deformarsi

$$q(x, t) = vc(x, t)$$

- Per **diffusione**, similmente alla legge di Fourier per il calore, la legge di Fick stabilisce che la diffusione avviene da zone ad alta concentrazione verso zone a bassa concentrazione

$$q(x, t) = -Dc_x(x, t)$$

Poiché nel caso dell'inquinante sono presenti sia trasporto che diffusione, sovrapporremo i due effetti:

$$q = \text{diffusione} + \text{trasporto} = vc - Dc_x, \quad [q] = MT^{-1}$$

Sostituendo in (2.9) si trova

$$c_t = Dc_{xx} - vc_x$$

*Lezione Salsa 8 (15/03/2021)*

Consideriamo un modello del tipo

$$u_t = Du_{xx} + bu_x + cu \quad (2.10)$$

I vari termini rappresentano

- $Du_{xx}$ , **diffusione**
- $bu_x$ , **trasporto** o deriva (drift) con velocità  $v = -b$  nella direzione positiva dell'asse  $x$
- $cu$ , **reazione** ( $c > 0$ , crescita, oppure  $c < 0$  decadimento, esponenziale)

Qual'è la soluzione fondamentale per (2.10), cioè quella soluzione che al tempo iniziale assume distribuzione Dirac in  $x = 0$ ? Si può dimostrare che è

$$\Gamma^*(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{ct} \exp \left\{ -\frac{(x + bt)^2}{4Dt} \right\} \quad (2.11)$$

Se  $c = 0$  abbiamo la solita  $\Gamma$  che si trasporta, se  $c \gtrless 0$  la  $\Gamma$  viene accentuata o smorzata esponenzialmente. L'equazione generale in  $n$  dimensioni è

$$u_t = \underbrace{\text{div}(A\nabla u)}_{\text{diffusione}} + \underbrace{\text{div}(\mathbf{b}u)}_{\text{trasporto}} + \underbrace{cu}_{\text{reazione}}$$

dove i termini dipendono in questo modo

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(x, t) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t) \quad c = c(x, t)$$

## 2.10 Problema di Cauchy globale ( $n = 1$ )

Consideriamo il problema di Cauchy globale in  $n = 1$  dimensioni. La generalizzazione a dimensione  $n > 1$  è standard, quindi lavoriamo in  $n = 1$  per semplicità.

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, T) \quad T \leq +\infty \\ u(x, 0) = g(x) & \text{in } \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{PCG}_{\text{diffusione}, 1D})$$

dove  $g$  è il *dato iniziale* assegnato.

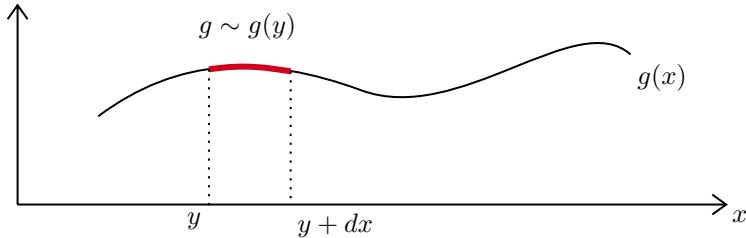
Interpretiamo  $u$  come una **concentrazione di massa**, o **densità lineare di massa**, nel senso che  $u(x, t)dx$  è la massa che si trova nell'intervallo  $(x, x + dx)$  al tempo  $t$ .

Sappiamo risolvere (PCG<sub>diffusione, 1D</sub>) nel caso di impulso nell'origine  $g(x) = \delta(x)$  e di conseguenza anche nel caso di  $g(x) = \delta(x - y)$ .<sup>5</sup> In questa situazione, la soluzione è data da

$$u(x, t) = \Gamma_D(x - y, t)$$

È una *unit-source solution*, nel senso che descrive come si evolve una massa unitaria inizialmente concentrata in  $y$ . Se avessimo una massa totale di  $Q$  anziché unitaria avremmo

$$u(x, t) = Q \cdot \Gamma_D(x - y, t)$$



La massa presente in  $(y, y + dy)$  è  $g(y)dy$ . L'evoluzione della singola massa  $Q = g(y)dy$  è

$$u(x, t) = \Gamma_D(x - y, t)g(y)dy$$

Per il principio di sovrapposizione possiamo sommare tutti i contributi

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x - y, t)g(y)dy$$

che è una **convoluzione** del dato iniziale con la gaussiana

$$u(x, t) = (\Gamma_D(\cdot, t) * g)(x)$$

è la *candidata* soluzione di (PCG<sub>diffusione, 1D</sub>).

### 2.10.1 Esistenza

**Problemi.**

1. L'integrale è ben definito? Se  $g(x) \sim e^{|x|^m}$ ,  $m > 2$  per  $|x| \rightarrow +\infty$ , la gaussiana compensa potenze fino al 2, quindi ci si aspetta che l'integrale non converga! Non posso scegliere  $g$  come voglio, ma dovrò dare delle opportune condizioni all'infinito.
2. Supponiamo che converga, è vero che  $u$  è soluzione dell'equazione differenziale? In altre parole posso passare sotto il segno di integrale?
3. Supponiamo che sia soluzione, in che senso  $u(x, 0) = g(x)$ ?
4. Se tutto sopra va bene,  $u$  è anche l'unica?

Si trova risposta all'esistenza nel seguente fondamentale teorema, dalla dimostrazione piuttosto lunga, che omettiamo.

<sup>5</sup>Non è corretto usare l'uguaglianza, intendiamo che le distribuzioni hanno lo stesso effetto tramite il prodotto di dualità.

**TEOREMA 2.5 — di Esistenza.** Sia  $g$  una funzione con un numero **finito** di punti di **discontinuità** e tale che  $\exists c, a$  che la limitano secondo

$$|g(x)| \leq ce^{ax^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{G})$$

Sia

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x - y, t) g(y) dy$$

Allora

1.  $u$  è ben definita e di classe  $C^\infty$  in ogni striscia del tipo  $\mathbb{R} \times (0, T)$ , con  $T < \frac{1}{4aD}$  e inoltre in tale striscia  $u_t - Du_{xx} = 0$ .
2. Se  $x_0$  è un punto di continuità per  $g$ , allora

$$u(x, t) \rightarrow g(x_0) \quad \text{se } (x, t) \rightarrow (x_0, 0)$$

In particolare se  $g \in C(\mathbb{R})$ , allora  $u \in C(\mathbb{R} \times [0, T])$ , **chiuso** a sinistra.

3. Esistono due costanti  $C, A$  tali che

$$|u(x, t)| \leq Ce^{Ax^2} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$$

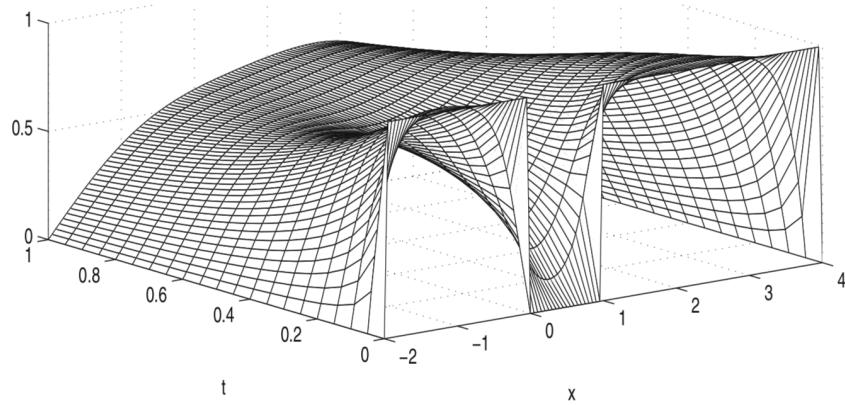
Questo risponde a 1, 2, 3. Occupiamoci dell'unicità.

**OSSERVAZIONE.** In molti casi il dato iniziale  $g$  è polinomiale, e il teorema è quindi soddisfatto per ogni scelta di  $a$  e  $c$ , in particolare ci permette di estendere l'intervallo temporale quanto vogliamo essendo  $T < \frac{1}{4Da}$ , con  $a$  arbitrariamente piccolo.

**OSSERVAZIONE — Processo regolarizzante.** Il primo enunciato sottolinea che anche se il dato iniziale è discontinuo da qualche parte (può esserlo in un numero finito di punti), subito dopo il primo istante la soluzione diventa continua e  $C^\infty$ .

Per il dato iniziale

$$g(x) = \chi_{(-2, 0)}(x) + \chi_{(1, 4)}(x)$$



**OSSERVAZIONE.** Se  $g$  è limitata (cioè  $a = 0$  in (G)) allora  $u$  è definita in  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ .

## 2.10.2 Unicità

In generale non c'è unicità, vediamo il controsenso di Tychonov. Sia  $h$  la funzione definita da:

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t^{-2}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad \text{cioè tale che } h^{(k)}(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

La funzione costruita come

$$\mathcal{T}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k} \quad (\text{Tychonov})$$

è soluzione dell'equazione del calore  $\mathcal{T}_t - \mathcal{T}_{xx} = 0$  col dato iniziale  $\mathcal{T}(x, 0) = 0$  assunto con continuità.

**DIMOSTRAZIONE.**

(DE) Si verifica che

$$\mathcal{T}_t(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k+1)}(t)}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{(k)}(t)}{(2k-2)!} x^{2k-2} = \mathcal{T}_{xx}(x, t)$$

(IC) Si dimostra per induzione che  $\exists \vartheta > 0$  tale che  $\forall t > 0$

$$|h^{(k)}(t)| \leq \frac{k!}{(\vartheta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-2}\right)$$

possiamo eseguire una maggiorazione

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}(x, t)| &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} |h^{(k)}(t)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \frac{k!}{(\vartheta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-2}\right) \quad (\text{usando la maggiorazione}) \\ &< \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2k} \frac{1}{(\vartheta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-2}\right) \quad \frac{k!}{(2k)!} < \frac{1}{k!} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{\vartheta t}\right)^k}{k!}}_{\exp\left(\frac{x^2}{\vartheta t}\right)} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{x^2}{\vartheta t} - \frac{1}{2}t^{-2}\right) \quad (\text{serie esponenziale}) \end{aligned}$$

Per  $x$  fissato e  $t \rightarrow 0$ , allora  $|\mathcal{T}(x, t)| \rightarrow 0$ .

■

Quindi  $\mathcal{T}(x, t)$  rispetta l'equazione differenziale e anche il teorema di esistenza. Tuttavia **anche la soluzione identicamente nulla è, ovviamente, soluzione del problema**. Segue che **in generale la soluzione non è unica**.

Il problema è che  $\mathcal{T}$  cresce troppo quando  $x \rightarrow \pm\infty$  per tempi  $t$  piccoli a causa del termine

$$\frac{x^2}{\vartheta t}$$

Se al posto di  $\vartheta t$  ci fosse una costante andrebbe meglio: si definisce una classe di soluzioni a crescita controllata che garantisce l'unicità.

**DEFINIZIONE 2.6 — Classe di Tychonov.**

$$|u(x, t)| \leq C e^{Ax^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]$$

**TEOREMA 2.7 — Principio di massimo globale.** Sia  $u \in C(\mathbb{R} \times [0, T])$ , con  $u_t, u_x, u_{xx}$  continue in  $\mathbb{R} \times (0, T)$ , tale che in  $\mathbb{R} \times (0, T)$

1. Sia una sottosoluzione dell'equazione del calore

$$u_t - Du_{xx} \leq 0 \quad (\geq)$$

2. Sia dominata da un esponenziale,  $C > 0$

$$u(x, t) \leq Ce^{Ax^2} \quad (\geq -Ce^{Ax^2})$$

Allora

$$\sup_{\mathbb{R} \times [0, T]} u(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}} u(x, 0) \quad \left( \inf_{\mathbb{R} \times [0, T]} u(x, t) \geq \inf_{\mathbb{R}} u(x, 0) \right)$$

Se  $u$  fosse soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, T) \\ u \text{ nella classe di Tychonov} \end{cases}$$

allora

$$u(x, 0) = 0 \text{ implica } u(x, t) = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times [0, T]$$

**Conseguenza.**

La

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x - y, t) g(y) dy$$

definita nel teorema di Esistenza è unica all'interno della Classe di Tychonov, che era comunque richiesta in tale teorema al punto 3, pertanto fornisce non solo esistenza, ma anche unicità!



## Capitolo 3

# Equazione di Laplace-Poisson

**DEFINIZIONE 3.1 — Equazione di Poisson.** Si definisce

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \text{ dominio limitato in } \mathbb{R}^n$$

da dove viene fuori?

- Temperatura a regime stazionario  $u_t = 0$  con  $D = 1$  dell'equazione del calore.
- **E** campo elettrostatico generato da una distribuzione di carica  $\rho$  in  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  in unità *Mks*:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

$\varepsilon$  costante dielettrica.

Se il campo è conservativo esiste uno scalare  $u$ , detto potenziale elettrostatico, tale che  $\nabla u = -\mathbf{E}$  allora

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = -\operatorname{div}(\nabla u) = -\Delta u = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

In assenza di cariche  $\rho = 0$  e quindi il potenziale è armonico  $\Delta u = 0$ .

- Le parti reali e immaginarie di una funzione olomorfa sono armoniche. Poiché per esempio le funzioni al variare di  $m \in \mathbb{N}$

$$z^m = \rho^m(\cos m\vartheta + i \sin m\vartheta)$$

sono olomorfe in  $\mathbb{C}$ , di conseguenza le funzioni

$$\begin{cases} u(\rho, \vartheta) = \rho^m \cos m\vartheta \\ v(\rho, \vartheta) = \rho^m \sin m\vartheta \end{cases}$$

sono armoniche. Tra esse per esempio

$$m = 2, \quad z^2 = (x^2 - y^2) + ixy \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = xy \end{cases}$$

### 3.1 Tipici problemi al bordo

Sono le condizioni che troviamo nell'equazione del calore nella parte laterale

- **Dirichlet**  $u = g$  su  $\partial\Omega$
- **Neumann**  $\partial_\nu u = h$  su  $\partial\Omega$
- **Robin**  $\partial_\nu u + \alpha u = h$ , con  $\alpha > 0$

- miste

*Lezione Salsa 9 (16/03/2021)*

**TEOREMA 3.2 — Unicità.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio **limitato** regolare. Allora esiste al più una funzione  $u$  di classe  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  soluzione di  $-\Delta u = f$  in  $\Omega$  con condizioni di Dirichlet o Robin. Nel caso di Neumann, due soluzioni differiscono per una costante.

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $u$  e  $v$  soluzioni di uno dei problemi indicati con lo stesso dato al bordo  $g$ . Sia  $w = u - v$ , allora  $w$  è armonica in  $\Omega$

$$\Delta w = \Delta u - \Delta v = -f + f = 0$$

con dato al bordo  $g = 0$ . Moltiplicando per  $w$  e integrando su  $\Omega$

$$\int_{\Omega} w \Delta w = 0$$

Da cui, utilizzando l'identità di Green (1.2)

$$-\int_{\Omega} |\nabla w|^2 + \int_{\partial\Omega} w \partial_{\nu} w \, d\sigma = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla w|^2 = \int_{\partial\Omega} w \partial_{\nu} w \, d\sigma$$

Ora analizziamo nello specifico i tre possibili casi:

- **Dirichlet**

$$w = 0 \text{ su } \partial\Omega \Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla w|^2 = 0 \Rightarrow \nabla w = 0 \text{ in } \Omega \Rightarrow w = \text{cost. in } \Omega$$

Ma dato che  $w = 0$  su  $\partial\Omega$  ed essendo  $C^1$  fino al bordo, la costante deve essere 0, da cui  $w \equiv 0$ .

- **Robin**

$$\partial_{\nu} w = -\alpha w \text{ su } \partial\Omega \Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla w|^2 = -\alpha \int_{\partial\Omega} w^2 \, d\sigma \leq 0$$

ma essendo il primo integrale  $\geq 0$ , allora deve essere nullo come prima:

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 = 0 \Rightarrow \nabla w = 0 \text{ in } \Omega \Rightarrow w = \text{cost. in } \Omega$$

Ma dato che è costante, la derivata normale sul bordo è nulla  $\partial_{\nu} w = 0 = -\alpha w$ , quindi  $w = 0$  sul bordo e, come prima, essendo  $C^1$  fino al bordo, la costante è nulla, da cui  $w \equiv 0$ .

- **Neumann**

$$\partial_{\nu} w = 0 \text{ su } \partial\Omega \Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla w|^2 = 0 \Rightarrow \nabla w = 0 \text{ in } \Omega \Rightarrow w = \text{cost. in } \Omega$$

Non posso fare alcuna affermazione aggiuntiva. ■

Nel caso Neumann non vale l'unicità, ma in generale non vale neanche l'esistenza, infatti da

$$-\Delta u = f, \quad \partial_{\nu} u = g \text{ su } \partial\Omega$$

integrando su  $\Omega$  si trova

$$-\int_{\Omega} \Delta u = \int_{\Omega} f$$

e applicando il teorema di Gauss (1.3)

$$-\int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u \, d\sigma = \int_{\Omega} f$$

Abbiamo trovato una **condizione necessaria per la risolubilità del problema di Neumann**:

$$\boxed{\int_{\Omega} f + \int_{\partial\Omega} g d\sigma = 0} \quad (3.1)$$

Per esempio:

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega \\ \partial_{\nu} u = 0 \end{cases}$$

non ha soluzione! La condizione necessaria che abbiamo trovato infatti darebbe

$$\int_{\Omega} 1 = 0$$

## 3.2 Funzioni armoniche nel discreto

Per esaminare le proprietà delle funzioni armoniche torniamo ad esplorare il legame tra modelli discreti e continui, probabilistici e deterministici. Ritorniamo alla passeggiata aleatoria, lavorando questa volta in dimensione  $n = 2$ . Allora detti  $h > 0$  passo spaziale, e  $\tau > 0$  passo temporale, introduciamo  $h\mathbb{Z}^2$  il reticolo dei punti

$$\begin{cases} \mathbf{x} = (x_1, x_2) \\ x_1 = mh & m \in \mathbb{Z} \\ x_2 = nh & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La particella si muove in ciascuna delle quattro direzioni con probabilità identica  $1/4$ , e i versori degli assi  $x_1, x_2$  sono rispettivamente  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ .

Sia  $p(\mathbf{x}, t) = p(x_1, x_2, t)$  la probabilità di trovare la particella nel punto  $\mathbf{x}$  al tempo  $t$ . Come nella precedente passeggiata cerchiamo di ricavare un'equazione alle differenze finite per  $p$  col teorema delle probabilità totali.

$$p(x_1, x_2, t + \tau) = \frac{1}{4} \{p(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_1, t) + p(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_1, t) + p(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_2, t) + p(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_2, t)\}$$

Quella che troviamo è esattamente la media aritmetica dei valori di  $p(\cdot, t)$  nei punti dell'intorno discreto di  $\mathbf{x}$  di raggio  $h$ .

Trascurando per ora il tempo, definisco l'operatore di media su una generica funzione  $u = u(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in h\mathbb{Z}^2$

$$M_h u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} \sum_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=h} u(\mathbf{y})$$

In questo modo posso riscrivere l'equazione alle differenze sfruttando l'operatore

$$p(x_1, x_2, t + \tau) = M_h p(\mathbf{x}, t)$$

Sviluppando fino al secondo ordine con Taylor e elidendo opportunamente i termini:

$$M_h u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} \left[ 4u(\mathbf{x}) + \underbrace{h^2 u_{x_1 x_1}(\mathbf{x}) + h^2 u_{x_2 x_2}(\mathbf{x})}_{h^2 \Delta u(\mathbf{x})} \right] + o(h^2)$$

passando al limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{M_h u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})}{h^2} = \frac{1}{4} \Delta u(\mathbf{x})$$

In base a questo risultato è coerente definire il **laplaciano discreto**

$$\Delta_h^* u(\mathbf{x}) = \frac{4}{h^2} (M_h u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})) \quad (3.2)$$

Se  $\Delta_h^* u = 0$  (ovvero se in ogni punto  $\mathbf{x}$  la funzione coincide con la media dei propri valori nei punti dell'intorno discreto di  $\mathbf{x}$  di raggio  $h$ ) la funzione verrà chiamata **d-armonica** (dove 'd' sta per discreto).

Cerchiamo ora di definire il problema di Dirichlet discreto nel reticolo: per farlo servono prima delle nozioni di topologia discreta.

Sia  $A \subset h\mathbb{Z}^2$ . Diciamo che  $\mathbf{x} \in A$  è

- **interno** ad  $A$  se il suo intorno discreto di raggio  $h$  è contenuto in  $A$ ;
- **punto di frontiera** se non è interno ad  $A$  ma il suo intorno discreto di raggio  $h$  contiene almeno un punto interno;
- **isolato** se non è interno o di frontiera.

$A$  è detto **connesso** se non ha punti isolati e  $\forall x_0, x_1 \in A$   $x_0, x_1$  possono essere collegati da un cammino discreto contenuto interamente in  $A$

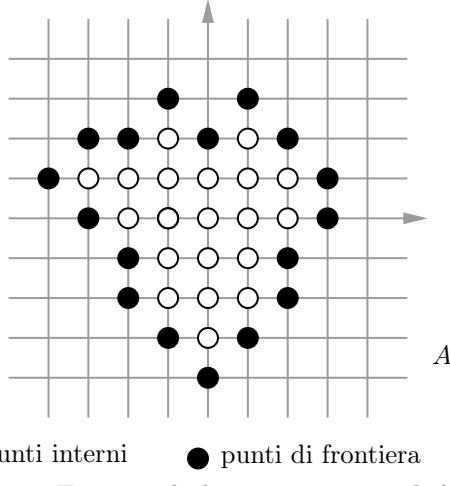


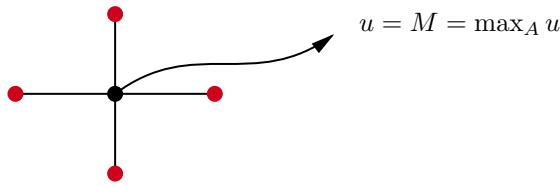
Figura 3.1: Esempio di dominio connesso di  $h\mathbb{Z}^2$

**Problema di Dirichlet discreto:** sia  $A$  dominio limitato e connesso di  $h\mathbb{Z}^2$ , sia  $g$  definita su  $\partial A$ . Determinare  $u$ , definito su  $A$ , tale che

$$\begin{cases} \Delta_h^* u = 0 & \text{nei punti interni ad } A \\ u = g & \text{su } \partial A \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{h,\text{Dirichlet}})$$

Proprietà di una soluzione di  $(\mathcal{P}_{h,\text{Dirichlet}})$ :

1. **Principio di massimo.** Se  $u$  assume massimo o minimo in un punto interno ad  $A$ , allora  $u$  è costante. Infatti



Se  $u = M$  al centro e  $u$  è la media dei punti del suo intorno discreto, anch'essi devono essere punti di massimo. Reiterando il ragionamento per ogni altro punto dell'intorno posso propagarlo fino alla frontiera.

2.  $u$  assume massimo e minimo su  $\partial A$  (immediata conseguenza del punto 1)<sup>1</sup>.
3. La soluzione di  $(\mathcal{P}_{h,\text{Dirichlet}})$  è unica. Infatti se fossero 2, la differenza  $w = v - u$  sarebbe armonica e nulla al bordo, ma essendo il massimo e minimo assunti sul bordo, segue che  $w = 0$  in tutto il dominio.

Penso risolvere il problema di Dirichlet discreto con metodi probabilistici, tornando alla passeggiata aleatoria.

Interpretiamo  $g$  come una sorta di **guadagno**: se la particella parte da  $\mathbf{x}$  e raggiunge la frontiera di  $A$  per la prima volta in  $\mathbf{y}$  otteniamo un guadagno  $g(\mathbf{y})$ . Voglio dimostrare che, qualunque sia il punto di

<sup>1</sup>Se lo assume dentro, è costante e quindi lo assume anche sul bordo. Se lo assume sul bordo... lo assume sul bordo. Ma vā?

partenza  $\mathbf{x}$ , la particella raggiunge  $\partial A$  con probabilità 1 e che il valore di  $u(\mathbf{x})$ , la soluzione che vogliamo costruire, è il valore atteso del guadagno  $g$  rispetto ad un'opportuna distribuzione di probabilità su  $\partial A$ .

Indichiamo con  $\Gamma$  un qualunque sottoinsieme di  $\partial A$  e con  $P(\mathbf{x}, \Gamma)$  la probabilità che la particella che parte da  $\mathbf{x}$  raggiunga per la prima volta la  $\partial A$  in un punto  $\mathbf{y} \in \Gamma$ .

Dobbiamo dimostrare che  $P(\mathbf{x}, \partial A) = 1 \forall \mathbf{x} \in A$ . Indico con  $w_\Gamma(\mathbf{x})$  la funzione che ottengo al variare di  $\mathbf{x}$  in  $P(\mathbf{x}, \Gamma)$  con  $\Gamma$  fissato:

$$\mathbf{x} \mapsto w_\Gamma(\mathbf{x}) \equiv P(\mathbf{x}, \Gamma), \quad \Gamma \text{ fissato}$$

Facciamo vedere che è d-armonica nei punti interni ad  $A$ , cioè che  $\Delta_h^* w_\Gamma = 0$ . Usando il teorema delle probabilità totali

$$w_\Gamma(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}, \Gamma) = \frac{1}{4} \sum_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=h} P(\mathbf{y}, \Gamma) = \frac{1}{4} \sum_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=h} w_\Gamma(\mathbf{y}) = M_h w_\Gamma(\mathbf{x})$$

Da cui

$$M_h w_\Gamma(\mathbf{x}) - w_\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_h^* w_\Gamma = \frac{4}{h^2} (M_h w_\Gamma(\mathbf{x}) - w_\Gamma(\mathbf{x})) = 0$$

in tutti i punti interni ad  $A$ !

Quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \Gamma &\Rightarrow P(\mathbf{x}, \Gamma) = 1 \\ \mathbf{x} \in \partial A \setminus \Gamma &\Rightarrow P(\mathbf{x}, \Gamma) = 0 \end{aligned}$$

In particolare se  $\Gamma = \partial A$ ,  $w_{\partial A}(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}, \partial A)$  è soluzione del problema di Dirichlet discreto con valore 1 sul bordo ( $g \equiv 1$ )

$$\begin{cases} \Delta_h^* w_{\partial A}(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \text{ interno ad } A \\ w_{\partial A}(\mathbf{x}) = 1 & \mathbf{x} \in \partial A \end{cases}$$

Ma anche la funzione  $z(\mathbf{x}) \equiv 1$  è d-armonica, con gli stessi valori al bordo e soluzione dello stesso problema di Dirichlet. Poiché per la terza proprietà, la soluzione è unica

$$w_{\partial A}(\mathbf{x}) = z(\mathbf{x}) \equiv 1 \quad \forall \mathbf{x} \in A \quad \Rightarrow \quad w_{\partial A}(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}, \partial A) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in A$$

La probabilità di raggiungere la frontiera di  $A$  partendo da un **qualsiasi punto interno di  $A$**  è uguale a 1. Se invece prendiamo la funzione

$$\Gamma \mapsto P(\mathbf{x}, \Gamma), \quad \mathbf{x} \text{ fissato}$$

con  $P(\mathbf{x}, \partial A) = 1$ , prendendo  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \partial A$ ,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$

$$P(\mathbf{x}, \Gamma_1 \cup \Gamma_2) = P(\mathbf{x}, \Gamma_1) + P(\mathbf{x}, \Gamma_2)$$

è additiva e definisce dunque una misura di probabilità su  $\partial A$ ,  $\forall \mathbf{x} \in A$  fissato. Fatti tutti questi passaggi possiamo ora costruire la soluzione  $u$ .

**TEOREMA 3.3.** Il valore della soluzione  $u$  di  $(P_{h, \text{Dirichlet}})$  è il valore atteso dei guadagni  $g(\mathbf{y})$  rispetto alla distribuzione di probabilità  $P(\mathbf{x}, \Gamma)$  cioè

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in \partial A} g(\mathbf{y}) P(\mathbf{x}, \{\mathbf{y}\})$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo in due passi.

- Ogni addendo

$$g(\mathbf{y}) P(\mathbf{x}, \{\mathbf{y}\}) = g(\mathbf{y}) w_{\{\mathbf{y}\}}(\mathbf{x})$$

è d-armonico in  $A$ , quindi anche  $u$  lo è.

- Se  $\mathbf{x} \in \partial A$ , notiamo che

$$\begin{cases} P(\mathbf{x}, \{\mathbf{y}\}) = 1 & \mathbf{x} = \mathbf{y}, \\ P(\mathbf{x}, \{\mathbf{y}\}) = 0 & \mathbf{x} \neq \mathbf{y}. \end{cases}$$

Nella soluzione in esame

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in \partial A} g(\mathbf{y}) P(\mathbf{x}, \{\mathbf{y}\})$$

per le  $\mathbf{x}$  sul bordo, ogni termine nella somma è uguale a  $g(\mathbf{x})$  se  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$  oppure a zero se  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$  (*accendi e spegni*). La condizione al bordo  $u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$  è quindi rispettata. ■

### 3.3 Funzioni armoniche

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un dominio,  $u$  è armonica in  $\Omega$  se  $u \in C^2(\Omega)$  e  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ .

Quando il passo spaziale  $h \rightarrow 0$  le funzioni d-armoniche “diventano” armoniche: è ragionevole che versioni appropriate delle proprietà per funzioni d-armoniche continuino a valere nel caso continuo. La prima è la proprietà di media.

#### 3.3.1 Proprietà di media

Le funzioni d-armoniche sono definite in termini di proprietà di media, quindi ci aspettiamo che le funzioni armoniche ereditino una proprietà di media del tipo: il valore al centro di ogni sfera  $B_R(x) \subset \subset \Omega^2$  è uguale alla media artimetica dei valori al bordo della sfera  $\partial B_R$ .

Indichiamo con  $w_n$  la misura di  $\partial B_1$ , la superficie della sfera in  $n$  dimensioni di raggio 1. Quindi  $w_n = |\partial B_1|$ :

$$\begin{aligned} w_2 &= 2\pi \\ w_3 &= 4\pi \\ w_n &= \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \end{aligned}$$

Dove la funzione Gamma di Eulero è definita come

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

**TEOREMA 3.4.** Sia  $u$  armonica ( $u \in C^2(\Omega)$  e  $\Delta u = 0$ ) con  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Allora per ogni sfera  $B_R(\mathbf{x}) \subset \subset \Omega$  valgono le seguenti formule:<sup>a</sup>

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{w_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(\mathbf{x})} u(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma} \quad (\text{PDM}_{\text{sup}})$$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{n}{w_n R^n} \int_{B_R(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (\text{PDM}_{\text{vol}})$$

<sup>a</sup>Nota che  $w_n R^{n-1}$  è la misura  $|\partial B_R(\mathbf{x})|$ , mentre  $\frac{w_n R^n}{n}$  è semplicemente la misura  $|B_R(\mathbf{x})|$ . I due coefficienti moltiplicativi nelle formule non fanno altro che riscalare rispettivamente per la misura della superficie della sfera e per la misura della sfera stessa: da questo deriva l’interpretazione di “proprietà di media”.

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo prima la (PDM<sub>sup</sub>). Per  $0 < r < R$  definiamo

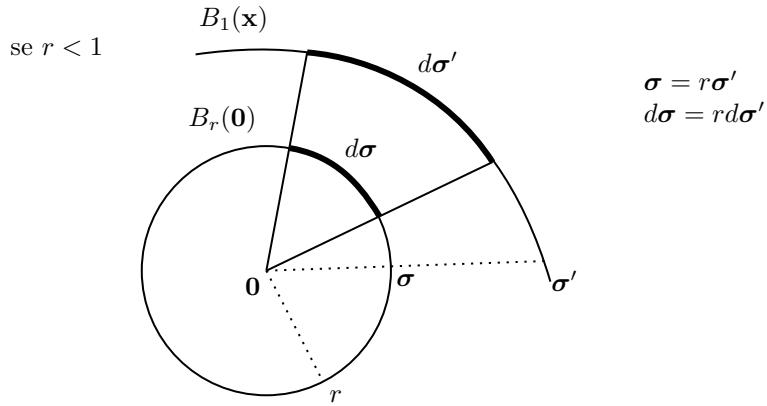
$$g(r) = \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma}$$

Voglio dimostrare che  $g(r)$  è costante e quindi che  $g'(r) = 0$  per  $0 < r < R$ . Effettuo un cambio di variabili  $\boldsymbol{\sigma}' = \frac{\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{x}}{r}$ , ovvero  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{x} + r\boldsymbol{\sigma}'$ , in modo tale che  $\boldsymbol{\sigma}' \in \partial B_1(\mathbf{0})$  e

$$d\boldsymbol{\sigma} = r^{n-1} d\boldsymbol{\sigma}'$$

<sup>2</sup>Questa notazione è equivalente a  $\overline{B_R}(x) \subset \Omega$ , indica che la superficie della sfera non tocca la frontiera di  $\Omega$ .

quest'ultima considerazione si può intuire considerando la seguente figura



Il concetto si estende opportunamente a  $n$  dimensioni: le lunghezze diventano superfici, poi volumi, ecc.

$$g(r) = \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} r^{n-1} u(\mathbf{x} + r\boldsymbol{\sigma}') d\boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{w_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} u(\mathbf{x} + r\boldsymbol{\sigma}') d\boldsymbol{\sigma}'$$

La regione di integrazione ora non dipende da  $r$ . Calcoliamo la derivata:

$$g'(r) = \frac{1}{w_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} \frac{d}{dr} u(\mathbf{x} + r\boldsymbol{\sigma}') d\boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{w_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} \nabla u(\mathbf{x} + r\boldsymbol{\sigma}') \cdot \boldsymbol{\sigma}' d\boldsymbol{\sigma}'$$

Sulla sfera  $\partial B_1(\mathbf{0})$ , il vettore coincide col vettore normale  $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\nu}$ . Poniamo:

$$v(\mathbf{y}) = u(\mathbf{x} + r\mathbf{y}) \quad \Rightarrow \quad \nabla v(\mathbf{y}) = r\nabla u(\mathbf{x} + r\mathbf{y}) \quad \Delta v(\mathbf{y}) = r^2 \Delta u(\mathbf{x} + r\mathbf{y})$$

Dobbiamo pensare  $\mathbf{x}$  come fissato. Usando il teorema della divergenza e ricordando che  $u$  è armonica:

$$g'(r) = \frac{1}{w_n r} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} \nabla v(\boldsymbol{\sigma}') \cdot \boldsymbol{\sigma}' d\boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{w_n r} \int_{B_1(\mathbf{0})} \Delta v(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} d\mathbf{y} = \frac{r}{w_n} \int_{B_1(\mathbf{0})} \Delta u(\mathbf{x} + r\mathbf{y}) d\mathbf{y} \stackrel{\Delta u=0}{=} 0.$$

Dunque  $g$  è costante. Quindi per continuità di  $u$ :

$$\begin{aligned} g(r) &\xrightarrow{r \rightarrow 0^+} u(\mathbf{x}) \\ g(r) &\xrightarrow{r \rightarrow R} \frac{1}{w_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(\mathbf{x})} u(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma} \end{aligned}$$

Eguagliando i due termini otteniamo la (PDM<sub>sup</sub>).

Per ottenere la (PDM<sub>vol</sub>) enunciamo ulteriori risultati separatamente per mettere in luce alcuni aspetti.

■

**DEFINIZIONE 3.5 — PDM.** Più in generale si dice che una funzione  $u \in C(\Omega)$  in  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  soddisfa la proprietà di media superficiale se vale (PDM<sub>sup</sub>) e soddisfa la proprietà di media volumetrica se vale (PDM<sub>vol</sub>).

**TEOREMA 3.6.** Se  $u \in C(\Omega)$  allora le due (PDM<sub>sup</sub>) e (PDM<sub>vol</sub>) sono equivalenti.

**DIMOSTRAZIONE.** Partiamo da

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma}$$

moltiplichiamo per  $r^{n-1}$  e integriamo tra 0 ed  $R$ :<sup>a</sup>

$$\begin{aligned} \int_0^R r^{n-1} u(\mathbf{x}) dr &= \frac{1}{w_n} \int_0^R dr \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma} \\ u(\mathbf{x}) \left[ \frac{r^n}{n} \right]_0^R &= \frac{1}{w_n} \int_{B_R(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (\text{Fubini}) \\ u(\mathbf{x}) \frac{R^n}{n} &= \frac{1}{w_n} \int_{B_R(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Da cui

$$u(\mathbf{x}) = \frac{n}{w^n R^n} \int_{B_R(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Il risultato inverso si ottiene ripercorrendo i passaggi all'indietro.

■

<sup>a</sup>Riordinando gli integrali con fubini sul membro di destra otteniamo una formula di "riduzione per bucce"

$$\int_{B_R(x)} f(y) dy = \int_0^R \left( \int_{\partial B_r(x)} f d\sigma \right) dr$$

Abbiamo quindi dimostrato che sotto ipotesi più generali, ovvero  $u$  solo continua, le due sono equivalenti. È chiaro che sotto ipotesi più strette,  $u \in C^2$ , devono ancora essere equivalenti, pertanto lo sono anche nel contesto del teorema 3.4, questo ne conclude la dimostrazione.

Abbiamo dimostrato che se una funzione è armonica allora vale la proprietà di media, ma è vero anche il contrario:

**TEOREMA 3.7.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio limitato. Se  $u \in C(\Omega)$  e ha la proprietà di media in  $\Omega$ , allora  $u \in C^\infty(\Omega)$  e  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ .

Rimarchiamo il fatto che come ipotesi è sufficiente la continuità e la proprietà di media.

**DIMOSTRAZIONE.** Basta dimostrare che  $u \in C^\infty(B)$  e  $\Delta u = 0$  in  $B$ , dove  $B$  è una qualunque sfera contenuta in  $\Omega$ . Sia dunque  $B \subset\subset \Omega$  e sia  $v$  la soluzione di

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B \\ v = u & \text{su } \partial B \end{cases}$$

$v \in C^\infty(B) \cap C(\overline{B})$  perchè soluzione del problema di Poisson<sup>a</sup>. Anche  $v$ , essendo armonica in  $B$ , ha la proprietà di media in  $B$ . Definisco

$$w = u - v$$

Anch'essa ha la proprietà della media in  $B$ , essendo la pdm additiva. Dal teorema 3.8 segue che  $w$  assume massimo e minimo su  $\partial B$ , ma essendo  $w = 0$  su  $\partial B$ , allora

$$w = 0 \text{ in } \overline{B} \Rightarrow u = v \text{ in } \overline{B}.$$

■

<sup>a</sup>Vedi il prossimo capitolo su formula di Poisson.

### 3.3.2 Principio di massimo

**TEOREMA 3.8 — Principio di massimo.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $u \in C(\Omega)$ . Se  $u$  ha la proprietà della media in  $\Omega$ , e  $u$  assume massimo o minimo in un punto di  $\Omega$ , allora  $u$  è costante. Inoltre, se  $\Omega$  è limitato e  $u \in C(\overline{\Omega})$  (non costante) allora assume il massimo sul bordo:

$$u(\mathbf{x}) < \max_{\partial\Omega} u, \quad u(\mathbf{x}) > \min_{\partial\Omega} u \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

È implicito che in un dominio illimitato, non essendoci bordo, la soluzione è per forza costante.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathbf{p} \in \Omega$  punto di minimo

$$m = u(\mathbf{p}) \leq u(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega$$

Vogliamo dimostrare che  $u(x) = m \quad \forall x \in \Omega$ .

Sia  $\mathbf{q} \in \Omega$  arbitrario. Poiché  $\Omega$  è connesso, possiamo trovare una sequenza finita di sfere  $B(\mathbf{x}_j) \subset\subset \Omega$ ,  $j = 0, \dots, N$  tali che

- $\mathbf{x}_0 = \mathbf{p}$ ,  $x_N = \mathbf{q}$
- $\mathbf{x}_j \in B(\mathbf{x}_{j-1})$

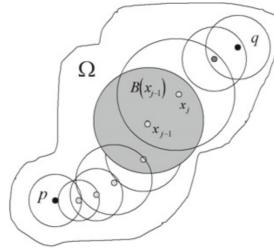
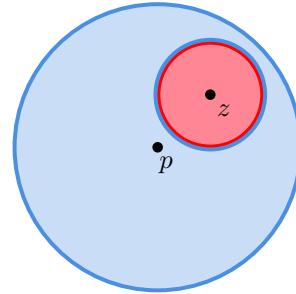


Figura 3.2: Sequenza di cerchi sovrapposti che connettono i punti  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$

Per assurdo supponiamo esista  $\mathbf{z} \in B(\mathbf{p})$  tale che  $u(\mathbf{z}) > m$ . Sia  $B_r(\mathbf{z}) \subset B(\mathbf{p})$



Dalla proprietà della media so che

$$m = u(\mathbf{p}) = \frac{1}{|B(\mathbf{p})|} \int_{B(\mathbf{p})} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{1}{|B(\mathbf{p})|} \left[ \int_{B(\mathbf{p}) \setminus B_r(z)} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{B_r(\mathbf{z})} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right]$$

Sul primo integrale  $u(y) \geq m$ .

Sul secondo integrale posso sfruttare ancora la proprietà della media:

$$\int_{B_r(\mathbf{z})} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = u(\mathbf{z}) |B_r(\mathbf{z})| > m |B_r(\mathbf{z})|$$

Ma allora ottengo una contraddizione

$$m > \frac{1}{|B(\mathbf{p})|} \{ m |B(\mathbf{p}) \setminus B_r(\mathbf{z})| + m |B_r(\mathbf{z})| \} = m$$

Deduco che  $u = m$  in tutto  $B(\mathbf{p})$  e quindi anche in  $\mathbf{x}_1$  (poiché  $\mathbf{x}_j \in B(\mathbf{x}_{j-1})$ ) allora posso ripetere il ragionamento che ho fatto trovando  $u = m$  in  $B(\mathbf{x}_1)$  ed iterando fino all'ultima sfera trovo  $u(\mathbf{q}) = m$ . ■

### 3.3.3 Conseguenze del principio di massimo

Dal principio di massimo segue l'unicità per il problema di Dirichlet.

**TEOREMA 3.9.** Sia  $\Omega$  dominio limitato e  $g \in C(\partial\Omega)$ . Il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ha al massimo una soluzione  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . Inoltre, siano  $g_1, g_2 \in C(\partial\Omega)$ , e  $u_1, u_2$  le corrispondenti soluzioni. Allora

1. **Confronto:** se  $g_1 \geq g_2$  su  $\partial\Omega$  e  $g_1 \neq g_2$  in almeno un punto di  $\Omega$ , allora  $u_1 \geq u_2$  su  $\Omega$ .
2. **Stabilità** (in norma  $L^\infty(\Omega)$ ):

$$\max_{\partial\Omega} |u_1 - u_2| \leq \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2| \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \quad (3.3)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Procediamo coi vari passi

1. Sia  $w = u_1 - u_2$ . Allora  $w$  è armonica e uguale a  $w = g_1 - g_2$  sul bordo  $\partial\Omega$ . Poiché  $g_1$  e  $g_2$  differiscono in almeno un punto di  $\partial\Omega$ ,  $w$  non è costante e per il principio di massimo

$$w(x) > \min_{\partial\Omega} w = \min_{\partial\Omega} (g_1 - g_2) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$$

Quindi

$$w(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow u_1 \geq u_2 \text{ su } \Omega$$

2. Sempre dal principio di massimo

$$\begin{aligned} u_1(x) - u_2(x) &\leq \max_{\partial\Omega} (g_1 - g_2) \leq \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2| \\ u_2(x) - u_1(x) &\leq \max_{\partial\Omega} (g_2 - g_1) \leq \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2| \\ \Rightarrow |u_1(x) - u_2(x)| &\leq \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2| \end{aligned}$$

Ora se  $g_1 = g_2$  la (3.3) diventa

$$|u_1(x) - u_2(x)| = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

da cui l'unicità. ■

*Lezione Salsa 10 (18/03/2021)*

Se abbiamo  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$  abbiamo la proprietà di media in  $\Omega \Rightarrow$  principio di massimo  $\Rightarrow$  unicità per il problema di Dirichlet.

### 3.4 Laplaciano in coordinate cilindriche

Consideriamo  $p_1 = p_2 = 0$  per comodità.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \vartheta = \frac{y}{x}$$

Derivando  $r, \vartheta$

$$\begin{aligned} r_x &= \cos \vartheta & r_y &= \sin \vartheta \\ \vartheta_x &= -\frac{\sin \vartheta}{r} & \vartheta_y &= \frac{\cos \vartheta}{r} \\ \\ r_{xx} &= \frac{\sin^2 \vartheta}{r} & r_{yy} &= \frac{\cos^2 \vartheta}{r} \\ \vartheta_{xx} &= \frac{2 \cos \vartheta \sin \vartheta}{r^2} & \vartheta_{yy} &= -\frac{2 \cos \vartheta \sin \vartheta}{r^2} \end{aligned}$$

Possiamo derivare  $u(r, \vartheta)$  una prima volta

$$\begin{aligned} u_x &= u_r r_x + u_\vartheta \vartheta_x \\ &= \cos \vartheta u_r - \frac{\sin \vartheta}{r} u_\vartheta \\ u_y &= u_r r_y + u_\vartheta \vartheta_y \\ &= \sin \vartheta u_r + \frac{\cos \vartheta}{r} u_\vartheta \end{aligned}$$

e una seconda volta

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{rx} r_x + u_r r_{xx} + u_{\vartheta x} \vartheta_x + u_\vartheta \vartheta_{xx} \\ &= u_{rr} r_x^2 + 2u_{r\vartheta} r_x \vartheta_x + u_{rr} r_{xx} + u_{\vartheta\vartheta} \vartheta_x^2 + u_\vartheta \vartheta_{xx} \\ &= \cos^2 \vartheta u_{rr} - \frac{2 \cos \vartheta \sin \vartheta}{r} u_{r\vartheta} + \frac{\sin^2 \vartheta}{r} u_r + \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} u_{\vartheta\vartheta} + \frac{2 \cos \vartheta \sin \vartheta}{r^2} u_\vartheta \\ u_{yy} &= u_{ry} r_y + u_r r_{yy} + u_{\vartheta y} \vartheta_y + u_\vartheta \vartheta_{yy} \\ &= u_{rr} r_y^2 + 2u_{r\vartheta} r_y \vartheta_y + u_{rr} r_{yy} + u_{\vartheta\vartheta} \vartheta_y^2 + u_\vartheta \vartheta_{yy} \\ &= \sin^2 \vartheta u_{rr} + \frac{2 \cos \vartheta \sin \vartheta}{r} u_{r\vartheta} + \frac{\cos^2 \vartheta}{r} u_r + \frac{\cos^2 \vartheta}{r^2} u_{\vartheta\vartheta} - \frac{2 \cos \vartheta \sin \vartheta}{r^2} u_\vartheta. \end{aligned}$$

mettendo insieme otteniamo

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\vartheta\vartheta}$$

### 3.5 Formula di Poisson per il cerchio

Lavoreremo per tutta la sezione in  $\mathbb{R}^2$  per poi generalizzare. Abbiamo visto l'unicità del problema di Dirichlet nel teorema 3.9, vediamo ora anche l'esistenza nel caso di domini radiali, il caso della Formula di Poisson.

**TEOREMA 3.10.** L'unica soluzione  $u \in C^2(B_R(\mathbf{p})) \cap C(\overline{B_R(\mathbf{p})})$  del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } B_R(\mathbf{p}) \\ u = g, & \text{su } \partial B_R(\mathbf{p}) \end{cases}$$

dove  $g$  è continua sul bordo  $g \in C(\partial B_R(\mathbf{p}))$ , è data dalla **Formula di Poisson**

$$u(\mathbf{x}) = \frac{R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{p}|^2}{2\pi R} \int_{\partial B_R(\mathbf{p})} \frac{g(\boldsymbol{\sigma})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|^2} d\boldsymbol{\sigma} \quad (3.4)$$

**DIMOSTRAZIONE.** L'unicità segue dal principio di massimo. Passiamo in coordinate polari

$$x = (x_1, x_2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = p_1 + r \cos \vartheta \\ x_2 = p_2 + r \sin \vartheta \end{cases}$$

Le funzioni del problema diventano

$$\begin{aligned} U(r, \vartheta) &= u(p_1 + r \cos \vartheta, p_2 + r \sin \vartheta) \\ G(\vartheta) &= g(p_1 + R \cos \vartheta, p_2 + R \sin \vartheta) \end{aligned}$$

L'equazione  $\Delta u = 0$  in  $B_R(p)$  diventa<sup>a</sup>

$$U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\vartheta\vartheta} = 0, \quad \text{in } 0 < r < R, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

La condizione di Dirichlet diventa

$$U(R, \vartheta) = G(\vartheta), \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

Deve inoltre essere:

$$\begin{aligned} U &\text{ continua in } [0, R] \times [0, 2\pi] \\ G &\text{ continua in } [0, 2\pi] \end{aligned}$$

e periodiche di periodo  $2\pi$ .

Usiamo il **metodo di separazione delle variabili**, cerchiamo soluzioni della forma

$$U(r, \vartheta) = v(r)w(\vartheta) \tag{3.5}$$

con  $v, w$  continue in  $[0, R]$  e  $[0, 2\pi]$  rispettivamente e  $w$  funzione  $2\pi$ -periodica. Sostituendo

$$v''(r)w(\vartheta) + \frac{1}{r}v'(r)w(\vartheta) + \frac{1}{r^2}v(r)w''(\vartheta) = 0$$

dividiamo per  $v(r)w(\vartheta)$  e separiamo

$$-\frac{r^2v''(r) + rv'(r)}{v(r)} = \frac{w''(\vartheta)}{w(\vartheta)} = \lambda \text{ costante}$$

La trattazione si spezza in due sottoproblemi

$$(1) \quad r^2v''(r) + rv'(r) + \lambda v(r) = 0$$

$$(2) \quad \begin{cases} w''(\vartheta) - \lambda w(\vartheta) = 0 & \text{in } (0, 2\pi) \\ w(0) = w(2\pi) \end{cases}$$

(2) se  $\lambda \geq 0$  non ci sono soluzioni non banali

(a)  $\lambda > 0$ , allora

$$w(\vartheta) = ae^{-\sqrt{\lambda}\vartheta} + be^{\sqrt{\lambda}\vartheta}$$

nessuna scelta di  $a, b$  mi dà soluzioni periodiche.

(b)  $\lambda = 0$ , allora

$$w(\vartheta) = a\vartheta + b \Rightarrow a = b = 0$$

la soluzione è banale.

consideriamo quindi solo il caso  $\lambda = -\mu^2$ ,  $\mu > 0$ , l'integrale generale sarà

$$w(\vartheta) = a \cos \mu\vartheta + b \sin \mu\vartheta, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

la periodicità  $w(\vartheta) = w(\vartheta + 2\pi)$  implica che  $\mu$  deve essere intero  $\mu = m = 0, 1, 2 \dots$

(1) Qui vi è un'equazione di Eulero

$$r^2v''(r) + rv'(r) - m^2v(r) = 0 \tag{3.6}$$

Poniamo  $s = \log r$ , ossia  $r = e^s$ , e poniamo  $z(s) = v(e^s)$ , allora<sup>b</sup>

$$\begin{aligned}\Rightarrow z'(s) &= v'(e^s) \cdot e^s = v'(r)r \\ \Rightarrow z''(s) &= v''(e^s)e^{2s} + v'(e^s)e^s = v''(r)r^2 + v'(r)r\end{aligned}$$

pertanto nella (3.6) ci siamo ricondotti a un problema agli autovalori

$$z''(s) - m^2 z(s) = 0 \Rightarrow z(s) = c_1 e^{-ms} + c_2 e^{ms}$$

tornando alla funzione  $v$  e ricordando che  $r = e^s$

$$v(r) = c_1 r^{-m} + c_2 r^m \quad 0 < r < R$$

elidiamo il primo termine ( $c_1 = 0$ ) poiché  $v$  deve essere continua nel cerchio, se quel termine fosse presente, sarebbe illimitata nell'origine.

Abbiamo così le infinite soluzioni armoniche sostituendo le due soluzioni in (3.5)

$$U_m(r, \vartheta) = r^m \{a_m \cos m\vartheta + b_m \sin m\vartheta\}, \quad m = 0, 1, 2 \dots$$

sovrapponendo le quali abbiamo la candidata soluzione

$$U(r, \vartheta) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \{a_m \cos m\vartheta + b_m \sin m\vartheta\} \quad (3.7)$$

con la condizione al bordo da soddisfare

$$\lim_{(r, \vartheta) \rightarrow (R, \xi)} U(r, \vartheta) = G(\xi), \quad \forall \xi \in [0, 2\pi] \quad (3.8)$$

**Limitiamoci ora a studiare il caso con  $G \in C^1([0, 2\pi])$**

Si può sviluppare  $G$  in serie di Fourier

$$G(\xi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{\alpha_m \cos m\xi + \beta_m \sin m\xi\} \quad (\text{F})$$

dove

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \cos m\varphi \, d\varphi \quad \beta_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \sin m\varphi \, d\varphi$$

ed essendo  $G \in C^1([0, 2\pi])$ abbiamo

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\alpha_m| \quad \sum_{m=1}^{\infty} |\beta_m| \quad \text{convergenti}$$

allora la serie di Fourier (F) è uniformemente convergente in  $[0, 2\pi]$ .

La (3.8) è soddisfatta purché scegliamo

$$a_0 = \frac{\alpha_0}{2} \quad a_m = R^{-m} \alpha_m \quad b_m = R^{-m} \beta_m$$

Sostituendo nella (3.7)

$$U(r, \vartheta) = \frac{\alpha_0}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^m \int_0^{2\pi} G(\varphi) \underbrace{\{\cos m\varphi \cos m\vartheta + \sin m\varphi \sin m\vartheta\}}_{\cos m(\varphi - \vartheta)} \, d\varphi$$

Per  $r < R$ , grazie alla convergenza uniforme della serie possiamo scambiare serie e integrale

$$U(r, \vartheta) = \sum \int = \int \sum$$

Ricordiamo anche che

$$\frac{\alpha_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) d\varphi$$

in questo modo possiamo sviluppare ulteriormente il termine accorpando tutto dentro un unico integrale e raccogliendo  $\frac{1}{\pi}$

$$\begin{aligned} U(r, \vartheta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^m G(\varphi) \cos m(\varphi - \vartheta) d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^m \cos m(\varphi - \vartheta) \right\} d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \left\{ \frac{1}{2} - 1 + 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^m \cos m(\varphi - \vartheta) \right\} d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \left\{ -\frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^m \cos m(\varphi - \vartheta) \right\} d\varphi \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo aggiunto il termine 1 per far partire la serie da  $m = 0$ . Notiamo che la serie può essere vista come la parte reale di una serie geometrica

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^m \cos m(\varphi - \vartheta) = \operatorname{Re} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} e^{i(\varphi-\vartheta)}\right)^m \right]$$

Che possiamo sviluppare

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} e^{i(\varphi-\vartheta)}\right)^m \right] &= \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{1 - \frac{r}{R} e^{i(\varphi-\vartheta)}} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ R \frac{1}{R - r(\cos(\varphi - \vartheta) + i \sin(\varphi - \vartheta))} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ R \frac{1}{R - r \cos(\varphi - \vartheta) + ir \sin(\varphi - \vartheta)} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ R \frac{R - r \cos(\varphi - \vartheta) - ir \sin(\varphi - \vartheta)}{(R - r \cos(\varphi - \vartheta))^2 - i^2 r^2 \sin^2(\varphi - \vartheta)} \right] \\ &= R \frac{R - r \cos(\varphi - \vartheta)}{R^2 + r^2 \cos^2(\varphi - \vartheta) - 2rR \cos(\varphi - \vartheta) + r^2 \sin^2(\varphi - \vartheta)} \\ &= R \frac{R - r \cos(\varphi - \vartheta)}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\varphi - \vartheta)} \end{aligned}$$

possiamo sostituire nella (3.9)

$$\begin{aligned} U(r, \vartheta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{R^2 - rR \cos(\varphi - \vartheta)}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\varphi - \vartheta)} \right\} d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \left\{ \frac{-(R^2 + r^2 - 2rR \cos(\varphi - \vartheta)) + 2R^2 - 2rR \cos(\varphi - \vartheta)}{2(R^2 + r^2 - 2rR \cos(\varphi - \vartheta))} \right\} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \left\{ \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\varphi - \vartheta)} \right\} d\varphi \\ &= \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{G(\varphi)}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\varphi - \vartheta)} d\varphi \end{aligned}$$

Osserviamo che il valore al centro del cerchio

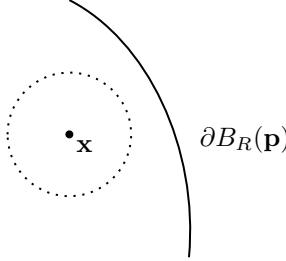
$$U(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) d\varphi$$

non è altro che la media dei valori assunti da  $G$  sul bordo.

Tornando alle variabili originali<sup>c</sup>

$$u(\mathbf{x}) = \frac{R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{p}|^2}{2\pi R} \int_{\partial B_R(\mathbf{p})} \frac{g(\boldsymbol{\sigma})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|^2} d\boldsymbol{\sigma} \quad (3.10)$$

Se  $\mathbf{x} \in B_R(\mathbf{p})$ , cioè dentro e non sul bordo



possiamo passare al limite sotto il segno di integrale perché il denominatore non si annulla mai, e in particolare risulta  $u \in C^\infty(B_R(p))$ .<sup>d</sup>

**Caso con  $G \in C([0, 2\pi])$ ,** solamente continua. La (3.10) definisce  $u \in C^\infty(B_R(p))$  e armonica in  $B_R(p)$ . L'unica cosa un po' delicata sono le condizioni al bordo, che comunque si possono verificare.

■

<sup>a</sup>si veda la sezione precedente.

<sup>b</sup>ricordando che l'argomento è  $e^s = r$ .

<sup>c</sup>Denotiamo con  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$  il centro del cerchio, con  $\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} p_1 + R \cos \varphi \\ p_2 + R \sin \varphi \end{pmatrix}$  un punto sul bordo, con  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} p_1 + r \cos \vartheta \\ p_2 + r \sin \vartheta \end{pmatrix}$  un punto del cerchio. Il differenziale si trova come determinante dello Jacobiano  $d\boldsymbol{\sigma} = Rd\varphi$ . Questo ci permette anche di riscrivere il denominatore

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|^2 &= (R \cos \varphi - r \cos \vartheta)^2 + (R \sin \varphi - r \sin \vartheta)^2 \\ &= R^2 \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \vartheta - 2rR \cos \varphi \cos \vartheta + R^2 \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \vartheta - 2rR \sin \varphi \sin \vartheta \\ &= R^2 + r^2 - 2rR(\cos \varphi \cos \vartheta - \sin \varphi \sin \vartheta) \\ &= R^2 + r^2 - 2rR \cos(\varphi - \vartheta) \end{aligned}$$

<sup>d</sup>"Why are we still here? Just to suffer?".

*Lezione Salsa 11 (22/03/2021)*

Possiamo generalizzare la (3.4) per un numero generico  $n$  di dimensioni

$$u(\mathbf{x}) = \frac{R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{p}|^2}{w_n R} \int_{\partial B_R(\mathbf{p})} \frac{g(\boldsymbol{\sigma})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|^n} d\boldsymbol{\sigma}$$

con  $u \in C^\infty(B_R(\mathbf{p})) \cap C(\overline{B_R}(\mathbf{p}))$ .

## 3.6 Soluzione fondamentale per l'operatore di Laplace

Come abbiamo trovato e costruito una soluzione fondamentale per l'operatore del calore, cerchiamo una soluzione con proprietà simili per l'operatore di Laplace: questa soluzione fondamentale, armonica in tutto  $\mathbb{R}^n$  tranne che in un punto, ci servirà per costruire una formula di rappresentazione per la soluzione del problema di Dirichlet che coinvolge dei potenziali.

Sia  $u = u(x)$  armonica in  $\mathbb{R}^n$  e sia  $M$  una matrice di rotazione, cioè tale che

$$M^T = M^{-1} \quad \wedge \quad \det M = 1$$

Iniziamo osservando che, definita  $D^2u$  l'Hessiana di  $u$ , possiamo scrivere

$$\Delta u = \text{Tr} D^2 u$$

Definiamo  $v(x) = u(Mx)$ , allora

$$D^2 v(x) = M^T D^2 u(Mx) M$$

inoltre

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= \text{Tr} [M^T D^2 u(Mx) M] \\ &= \text{Tr} D^2 u(Mx) \quad M \text{ ortogonale non varia traccia} \\ &= \Delta u(Mx) = 0 \end{aligned}$$

$v$  è ancora armonica: il **Laplaciano commuta con le rotazioni** e dunque  $\Delta$  è invariante per rotazioni. Si dimostra facilmente che  $\Delta$  è anche **invariante per traslazione**: se  $u(x)$  è armonica,  $v(x) = u(x-y)$ , per ogni  $y$  fissato, è armonica.

Per l'operatore del calore la soluzione fondamentale (in  $n = 3$ ) era

$$\Gamma_D(x, t) = \frac{1}{(4\pi D t)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{|x|^2}{4Dt} \right\}$$

Il blocco  $\frac{|x|^2}{t}$  è invariante per dilatazioni paraboliche della forma

$$\begin{aligned} x &\mapsto ax \\ t &\mapsto a^2 t \end{aligned}$$

Dove il tempo *conta* come il quadrato dello spazio: questo non è altro che il riflesso dell'operatore del calore stesso, dove una derivata temporale *compensava* una derivata seconda spaziale

$$u_t - Du_{xx} = 0$$

Per analogia ci aspettiamo che, essendo l'operatore di Laplace invariante per rotazioni, anche la soluzione fondamentale per l'operatore Laplaciano sia invariante per rotazioni. Cerchiamo quindi una soluzione della forma

$$u = u(|x|)$$

Poniamo  $r = |x|$  e cerchiamo  $u = u(r)$  tale che

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad n = 2, 3$$

In 0 non può essere armonica perché non è derivabile. Dato che la soluzione è radiale conviene passare alle coordinate polari

- $n = 2$

$$\Delta_{\text{polare}} u(r) = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} \cancel{u_{\theta\theta}} = 0$$

Risolvendo separando le variabili

$$\begin{aligned} \frac{u_{rr}}{u_r} &= -\frac{1}{r} \\ \log |u_r| &= -\log r + c_1 \end{aligned}$$

Definendo  $k = e^{c_1} > 0$

$$|u_r| = k \frac{1}{r}$$

Liberandoci infine del modulo ( $k \in \mathbb{R}$ )

$$u_r = k \frac{1}{r}$$

Otteniamo la soluzione

$$u(r) = k \log r + k_1 \quad (r \neq 0)$$

- $n = 3$

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{sferico}} u(r) &= u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = 0 \\ (ru)_{rr} &= 0 \\ ru &= Ar + B\end{aligned}$$

Che dà come soluzione

$$u(r) = A + \frac{B}{r} \quad (r \neq 0)$$

Per ottenere la soluzione fondamentale devo scegliere le costanti in modo tale che<sup>3</sup>

$$-\Delta u = \delta_n \text{ in } \mathbb{R}^n$$

Da cui ricaviamo la **soluzione fondamentale**

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & n = 2 \\ \frac{1}{4\pi|x|} & n = 3 \end{cases} \quad (3.11)$$

$\Phi$  è definita per  $x \neq 0$  e ha significato fisico. Se  $n = 3$ ,  $4\pi\Phi$  rappresenta il potenziale elettrostatico generato da una carica posta nell'origine che si annulla all'infinito. Se  $n = 2$ ,  $2\pi\Phi$  rappresenta il potenziale generato da una carica di densità totale 1, distribuita lungo l'asse  $x_3$ .

Se la carica è posta in un punto  $y$  fissato possiamo sfruttare l'invarianza per traslazione

$$\Delta_x \Phi(x - y) = -\delta_y$$

E per simmetria, con  $x$  fissato

$$\Delta_y \Phi(x - y) = -\delta_x$$

Generalizzando per dimensione  $n > 3$  la soluzione fondamentale è

$$\Phi(x) = \frac{1}{(n-2)w_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}$$

### 3.7 Il potenziale Newtoniano

Torniamo in dimensione  $n = 3$ . Supponiamo che  $\frac{1}{4\pi}f(y)$  rappresenti la densità di una carica localizzata all'interno di un compatto di  $\mathbb{R}^3$ . Il potenziale in  $x$  generato dalla carica presente in un piccolo volumetto  $dy$ , centrata in  $y$ , è dato da

$$\Phi(x - y)f(y)dy$$

Il potenziale totale si ottiene sommando tutti i contributi

$$\mathcal{N}_f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x - y)f(y)dy = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x - y|} dy = (\Phi * f)(x) \quad (3.12)$$

Questo potenziale è detto **potenziale Newtoniano** di  $f$ . Formalmente, nel senso delle distribuzioni e sotto opportune ipotesi per  $f^4$ :

$$-\Delta \mathcal{N}_f(x) = (-\Delta \Phi * f)(x) = (\delta_3 * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \delta_3(x - y)f(y)dy = f(x)$$

Formalizziamo in un teorema

---

<sup>3</sup>Il procedimento per la scelta delle costanti sarà svolto nella parte di analisi funzionale, nella sezione 7.2.

<sup>4</sup>Per  $x$  fissato  $\frac{1}{|x - y|} \in L^1(B(0))$ , quindi dovrò controllare solo il comportamento di  $f(y)$ .

**TEOREMA 3.11.** Sia  $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$  a supporto compatto. Allora  $\mathcal{N}_f \in C^2(\mathbb{R}^3)$  ed è l'unica soluzione dell'equazione di Poisson

$$-\Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^3$$

che si annulla all'infinito.

In generale anche  $\mathcal{N}_f + c$  è soluzione, ma questa è quella che si annulla all'infinito.

**NB.** Per  $n = 2$  il potenziale Newtoniano si chiama potenziale logaritmico

$$\mathcal{L}_f(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log|x-y| f(y) dy \quad (3.13)$$

e vale un risultato simile: se  $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , allora  $\mathcal{L}_f \in C^2(\mathbb{R}^2)$  ed è l'unica soluzione di

$$-\Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^2$$

con andamento asintotico

$$u(x) = -\frac{M}{2\pi} \log|x| + o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty$$

Dove  $M$  è la carica totale

$$M = \int_{\mathbb{R}^2} f(y) dy$$

### 3.8 La funzione di Green

Abbiamo considerato tutto  $\mathbb{R}^n$ , ma se invece consideriamo una regione finita dobbiamo tenere conto del bordo. Richiediamo che sia regolare in modo da considerare le derivate normali.

**TEOREMA 3.12.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un **dominio limitato e regolare**, sia  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ . Allora la soluzione del problema di Dirichlet  $\Delta u = f$  con  $u = g$  al bordo è:

$$u(x) = \underbrace{- \int_{\Omega} \Phi(x-y) f(y) dy}_{\begin{array}{c} \text{potenziale Newtoniano di} \\ f = \Delta u \end{array}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \Phi(x-\sigma) \partial_{\nu} u(\sigma) d\sigma}_{\begin{array}{c} \text{potenziale di strato semplice} \\ \text{con densità } \partial_{\nu} u \end{array}} + \underbrace{- \int_{\partial\Omega} u(\sigma) \partial_{\nu} \Phi(x-\sigma) d\sigma}_{\begin{array}{c} \text{potenziale di doppio strato} \\ \text{con momento } \mu \end{array}}$$

In pratica, ogni funzione regolare  $u$  può essere scritta come somma di un potenziale di volume (Newtoniano) con densità  $-\Delta u$ , di un potenziale di strato semplice causato da una densità di cariche  $\partial_{\nu} u$  superficiali sul bordo  $\partial\Omega$  e da un potenziale di doppio strato generato da dei dipoli elettrici con momento  $\mu$ .

Vediamo la dimostrazione del teorema.

**DIMOSTRAZIONE.** Ricordiamo innanzitutto l'identità di Green con  $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$

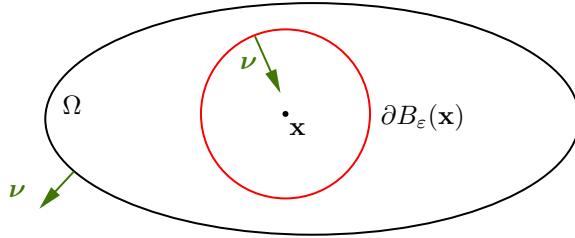
$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (v \partial_{\nu} u - u \partial_{\nu} v) d\sigma$$

Applichiamo l'identità di Green utilizzando come funzione  $u$  la stessa dell'enunciato del teorema. Per la funzione  $v$  dobbiamo trovare un'alternativa, infatti, con  $\mathbf{x}$  fissato

$$v(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \notin C^2(\Omega)$$

Con  $\Omega$  dominio limitato, definisco

$$\Omega_{\varepsilon} = \Omega \setminus \overline{B}_{\varepsilon}(\mathbf{x})$$



In  $\Omega_\varepsilon$ ,  $v(\mathbf{y}) \in C^2(\overline{\Omega_\varepsilon})$  e inoltre  $\Delta v = 0$  in  $\Omega_\varepsilon$ .

Si trova tutto a partire dall'identità di Green con questa scelta di  $u$  e  $v$  si elide il termine  $u\Delta v = 0$ .

$$\frac{1}{4\pi} \underbrace{\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}}_{(1)} = \frac{1}{4\pi} \underbrace{\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|} \partial_\nu u(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma}}_{(2)} - \frac{1}{4\pi} \underbrace{\int_{\partial\Omega_\varepsilon} u(\boldsymbol{\sigma}) \partial_\nu \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|} d\boldsymbol{\sigma}}_{(3)}$$

Inoltre

$$\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon(\mathbf{x})$$

E su  $\partial B_\varepsilon(\mathbf{x})$

$$\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|} = \frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}}{\varepsilon}$$

Studiamo come si comporta ciascun termine dell'identità al limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$

- **Termine 1**

$$(1) = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \underbrace{\chi_{\Omega_\varepsilon}(\mathbf{y}) \frac{f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}}_{g_\varepsilon(\mathbf{y})} d\mathbf{y}$$

Con

$$|g_\varepsilon(\mathbf{y})| \leq \max \frac{|f|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

Posso usare il teorema di convergenza dominata e passare al limite sotto il segno di integrale, il primo termine tende a

$$(1) \rightarrow \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

A meno del coefficiente, questo è diventato il potenziale Newtoniano.

- **Termine 2**

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial_\nu u(\boldsymbol{\sigma})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|} d\boldsymbol{\sigma} = \left( \int_{\partial\Omega} + \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{x})} \right) \frac{\partial_\nu u(\boldsymbol{\sigma})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|} d\boldsymbol{\sigma}$$

Di questi, quello sul bordo della palla andrà a zero.

Ricordando che

$$|\partial_\nu u(\boldsymbol{\sigma})| = |\nabla u(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{\nu}| \leq \max |\nabla u|$$

maggioriamo

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{x})} \frac{\partial_\nu u(\boldsymbol{\sigma})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|} d\boldsymbol{\sigma} \right| &\leq \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{x})} \underbrace{\frac{|\partial_\nu u(\boldsymbol{\sigma})|}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|}}_{=\varepsilon} d\boldsymbol{\sigma} \\
 &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{x})} \max |\nabla u| d\boldsymbol{\sigma} \\
 &= \frac{\max |\nabla u|}{\varepsilon} \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{x})} d\boldsymbol{\sigma} \\
 &= \frac{\max |\nabla u|}{\varepsilon} \cdot 4\pi\varepsilon^2 \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

L'altro non dipende da  $\varepsilon$  quindi rimane così.

$$(2) \rightarrow \int_{\partial\Omega} \frac{\partial_\nu u(\boldsymbol{\sigma})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|} d\boldsymbol{\sigma}$$

A meno del coefficiente, questo è diventato il potenziale di strato semplice.

### • Termine 3

Da qui spunteranno sia il potenziale di doppio strato, che la  $u$  stessa.

$$(3) = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u(\boldsymbol{\sigma}) \partial_\nu \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|} d\boldsymbol{\sigma} = \left( \int_{\partial\Omega} + \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{x})} \right) u(\boldsymbol{\sigma}) \partial_\nu \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|} d\boldsymbol{\sigma}$$

L'integrale su  $\partial\Omega$  è già il potenziale di doppio strato, ci manca da far vedere che l'altro tende a  $u$ , a meno del coefficiente. Calcolo la derivata normale su  $\partial B_\varepsilon(\mathbf{x})$  con la regola della catena

$$\nabla_{\boldsymbol{\sigma}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|} = -\frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|^2} \cdot \frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|} (-1) = \frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|^3} = \frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}}{\varepsilon^3}$$

quindi

$$\partial_\nu \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|} = \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|} \cdot \boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}}{\varepsilon^3} \cdot \frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

Da cui

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{x})} u(\boldsymbol{\sigma}) \partial_\nu \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|} d\boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{x})} u(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma} \\
 &= \frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{x})} u(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma}}_{\rightarrow u(\mathbf{x})} \rightarrow 4\pi u(\mathbf{x})
 \end{aligned}$$

quindi

$$(3) \rightarrow \int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{\sigma}) \partial_\nu \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|} d\boldsymbol{\sigma} + 4\pi u(\mathbf{x})$$

Riassemblando i vari pezzi si ottiene la tesi. ■

### 3.9 Funzione di Green e formula di rappresentazione

Richiamiamo la formula della lezione scorsa

$$u(x) = - \int_{\Omega} \Phi(x-y) \Delta u(y) dy + \int_{\partial\Omega} \underbrace{\Phi(x-\sigma) \partial_{\nu} u(\sigma)}_{?} d\sigma - \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} \Phi(x-\sigma) u(\sigma) d\sigma \quad (3.14)$$

che ci proponiamo di usare per ottenere una formula di rappresentazione **in funzione dei dati** del seguente problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = \varphi, & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.15)$$

Non so nulla del termine  $\partial_{\nu} u(\sigma)$ , l'idea è di andare a cercare una funzione  $G$  tale che *si annulli sul bordo*, così che il termine centrale si annulli. Sia  $g(x, y)$  la soluzione di un certo problema

$$\begin{cases} -\Delta_y g = 0, & \text{in } \Omega \\ g(x, \sigma) = \Phi(x-\sigma) & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.16)$$

Basta definire la seguente **funzione di Green per l'operatore di Laplace in  $\Omega$**

$$G(x, y) = \Phi(x-y) - g(x, y)$$

ottenendo, siccome il laplaciano di  $g$  è nullo,

$$\begin{cases} -\Delta_y G(x, y) = \delta(x) & \text{in } \Omega \\ G(x, \sigma) = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Dall'identità di Green (1.2) applicata a  $u$  e

$$v(y) = g(x, y) \text{ con } x \text{ fissato} \quad (3.17)$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx &= - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u + \int_{\partial\Omega} v \partial_{\nu} u - \left( - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega} u \partial_{\nu} v \right) \\ &= \int_{\partial\Omega} (v \partial_{\nu} u - u \partial_{\nu} v) d\sigma \end{aligned}$$

sostituiamo le relazioni (3.15), (3.16), (3.17) e ricordiamo che  $\Delta v = \Delta_y g = 0$

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \underbrace{g(x, y)}_v \underbrace{f(y)}_{\Delta u} dy &= \int_{\partial\Omega} \underbrace{\Phi(x-\sigma)}_v \partial_{\nu} u d\sigma - \int_{\partial\Omega} \underbrace{\varphi(\sigma)}_u \underbrace{\partial_{\nu} g(x, \sigma)}_v d\sigma \\ 0 &= \int_{\Omega} g(x, y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} \Phi(x-\sigma) \partial_{\nu} u d\sigma - \int_{\partial\Omega} \varphi(\sigma) \partial_{\nu} g(x, \sigma) d\sigma \end{aligned}$$

facendo la differenza tra (3.14) e questa scompare il termine con la derivata normale sul bordo

$$u(x) = \int_{\Omega} \underbrace{[\Phi(x-y) - g(x, y)]}_{G(x, y)} f(y) dy + 0 - \int_{\partial\Omega} \varphi(\sigma) \partial_{\nu} \underbrace{[\Phi(x-\sigma) - g(x, \sigma)]}_{G(x, \sigma)} d\sigma$$

cioè abbiamo ottenuto la **formula di rappresentazione di Green**<sup>5</sup>

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} \varphi(\sigma) \partial_{\nu} G(x, \sigma) d\sigma$$

questa formula è utile perché per risolvere qualunque problema di Dirichlet per qualunque coppia di dati  $f, \varphi$  è sufficiente risolvere un solo problema, il (3.16), da cui si costruisce la  $G$  e si trova  $u$ .

<sup>5</sup>Si noti che anche se  $G$  è nulla sul bordo, non è detto che la sua derivata normale sia nulla, è facile rendersene conto pensando al caso unidimensionale.



# Capitolo 4

## Leggi di conservazioni scalari

Sono equazioni differenziali del tipo

$$u = u(x, t) \quad [u_t + q(u)_x = 0] \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (4.1)$$

se  $q$  e  $u$  sono regolari, per la regola della catena  $q(u)_x = q'(u) \cdot u_x$ .

- $u$  è da pensare come concentrazione di una sostanza (massa su lunghezza per esempio)
- $\mathbf{q}$  è il vettore di flusso, mentre  $q(u)$  funzione di flusso.

$$\mathbf{q} = q(u)\mathbf{i} \quad (4.2)$$

Se consideriamo un tratto dell'ipotetico canale dove stiamo studiando la concentrazione, la variazione nel tempo della massa è data dalla differenza tra il flusso agli estremi, ed una eventuale sorgente

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(y, t) dy = q(u(x_1, t)) - q(u(x_2, t)) + \underbrace{\left( \int_{x_1}^{x_2} f(y, t) dy \right)}_{\text{sorgente non omogenea}}$$

*Nel caso in cui fosse possibile passare sotto il segno di integrale,* l'integrale diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(y, t) dy = \int_{x_1}^{x_2} u_t(y, t) dy \quad (4.3)$$

mentre l'altro termine si può scrivere naturalmente come<sup>1</sup>

$$-q(u(x_1, t)) + q(u(x_2, t)) = \int_{x_1}^{x_2} q(u)_x dx$$

che per arbitrarietà dell'intervallo implica proprio la legge di conservazione:

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t + q(u)_x] dx = 0, \quad \forall x_1, x_2 \Rightarrow u_t + q(u)_x = 0$$

Capito il contesto, dobbiamo scegliere con quale  $q$  decidiamo di lavorare, in altre parole dobbiamo scegliere una legge costitutiva per  $q$ .

Consideriamo in particolare il **trasporto lineare**, anche se in generale la dipendenza da  $u$  è non lineare (vedremo più avanti modelli per questi casi). Nel trasporto lineare,  $q$  è fatta come segue, con  $v$  costante

$$q(u) = vu \quad (4.4)$$

da cui  $q(u)_x = vu_x$ .

L'equazione differenziale si scrive nei due casi

---

<sup>1</sup>Teorema fondamentale del calcolo integrale.

- **omogeneo**

$$\begin{cases} u_t + vu_x = \boxed{0} & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = g(x) & \text{in } \mathbb{R} \end{cases}$$

- **non omogeneo**

$$\begin{cases} u_t + vu_x = \boxed{f(x, t)} & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = g(x) & \text{in } \mathbb{R} \end{cases}$$

## 4.1 Caso omogeneo

Introduciamo il vettore  $\mathbf{w} = v\mathbf{i} + \mathbf{j}$ , allora l'equazione differenziale si può scrivere come

$$0 = u_t + vu_x = (u_x \quad u_t) \cdot \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \nabla u \cdot \mathbf{w}$$

ma il gradiente  $\nabla u$  è per proprietà sempre ortogonale alle linee di livello di  $u$ , ovvero i valori in cui è costante, date da

$$\{x : u(x, t) = \text{costante per un tempo fissato}\}$$

poiché  $\mathbf{w}$  è costante, le **linee di livello sono rette nella direzione  $\mathbf{w}$** :

$$x = vt + x_0 \quad (4.5)$$

Su tali rette  $u$  è costante e le chiamiamo **rette caratteristiche**.

Per risolvere il problema di Cauchy, si calcola  $u$  in  $(\bar{x}, \bar{t})$  nel seguente modo

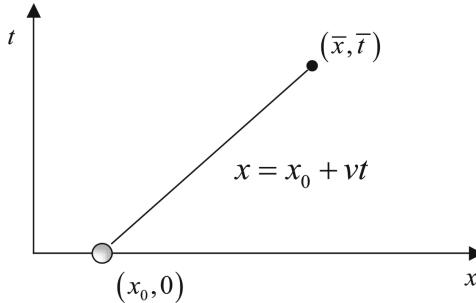


Figura 4.1: Caratteristica del trasporto lineare.

calcoliamo la retta caratteristica per quel punto e la mandiamo indietro nel tempo finché non incontra l'asse  $x$  su tale retta  $u$  è costante e uguale al dato iniziale  $g(x_0)$

$$u(\bar{x}, \bar{t}) = g(x_0) = g(x - vt)$$

In conclusione, la soluzione del problema di Cauchy è data da

$$u(x, t) = g(x - vt) \quad (4.6)$$

questa è un'*onda progressiva*, viaggiante, che si muove verso destra con velocità  $v$ .

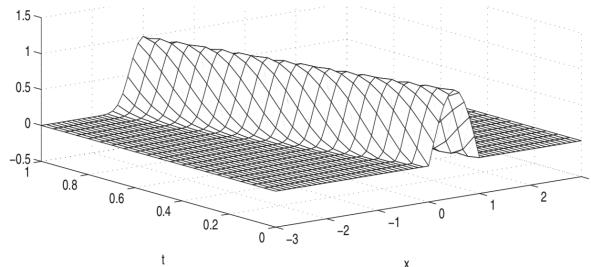


Figura 4.2: Onda progressiva.

Il profilo di  $u$  si mantiene inalterato. In generale la regola del segno è

$$u_t \pm vu_x = 0 \Rightarrow g(x \mp vt)$$

## 4.2 Caso non omogeneo

Non possiamo aspettarci che lungo la caratteristica  $u$  sia costante, ciò nonostante consideriamo una caratteristica e consideriamo come varia in funzione di  $t$  denotando una nuova funzione  $w$

$$u(x, t) = u(vt + x_0, t) = w(t)$$

andiamo a calcolare  $w'$ , che dovrà essere uguale a  $f$  sulla caratteristica

$$w'(t) = u_t(vt + x_0, t) + u_x(vt + x_0, t) \cdot v = f(vt + x_0, t)$$

abbiamo l'equazione differenziale per  $w$

$$\begin{cases} w'(t) = f(vt + x_0, t) \\ w(0) = g(x_0) \end{cases}$$

qui si può mettere tranquillamente il pilota automatico e dire che

$$w(t) = g(x_0) + \int_0^t f(vs + x_0, s) ds$$

tornando ad  $u$ , notiamo che  $vs + x_0 = vs + x - vt = x - v(t - s)$

$$u(x, t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t - s), s) ds \quad (4.7)$$

è la soluzione se  $g \in C^1(\mathbb{R})$  e  $f, f_x \in C(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ . Si può confrontare facilmente col caso omogeneo e notare che il risultato è il medesimo se  $f = 0$ .

## 4.3 Modelli di dinamica del traffico

Studiamo il traffico lungo un tratto rettilineo (autostrada per esempio), visto da molto in alto, come un fluido in movimento, descritto da 3 variabili

- $\rho$  densità di auto (auto/km), la nostra incognita
- $v$  velocità media delle auto (km/tempo)
- $q$  funzione di flusso (auto/tempo)

Per le ultime due avremo bisogno di relazioni costitutive.

Ipotesi di base

- una sola corsia, senza sorpassi
- assenza di caselli (assenza di *sorgenti* o *pozzi* di auto), quindi problema *omogeneo*
- la velocità è funzione di  $\rho$ , cioè  $v = v(\rho)$ , è un'ipotesi un po' controversa perché bisognerebbe considerare un tempo di reazione dei guidatori. Se aumenta la densità diminuisce la velocità  $\frac{dv}{d\rho} \leq 0$ .

Abbiamo

$$\begin{cases} \rho_t + q(\rho)_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \rho(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.8)$$

**Legge costitutiva per  $q$ .** Nell'ipotesi di trasporto convettivo (senza diffusione)

$$q = \rho v \quad (4.9)$$

**Legge costitutiva per  $v$ .** Prendiamo la legge più semplice, ci saranno

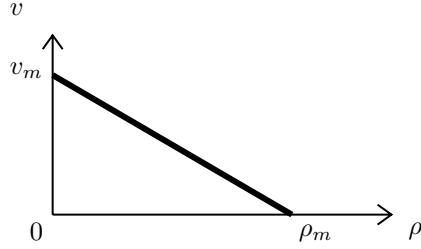
- $v_m$  velocità massima
- $\rho_m$  densità massima

ci aspettiamo che

$$v(0) = v_m \quad v(\rho_m) = 0$$

il modello più semplice è l'interpolazione lineare che realizza queste due condizioni

$$v(\rho) = v_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right) \quad (4.10)$$



di conseguenza

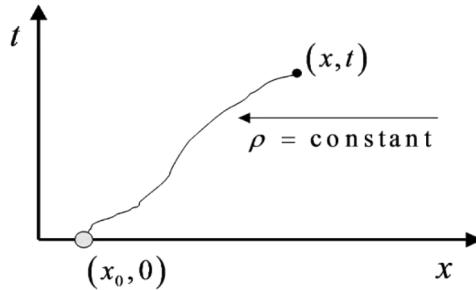
$$q(\rho) = \rho v(\rho) = v_m \left(\rho - \frac{\rho^2}{\rho_m}\right) \Rightarrow q'(\rho) = v_m \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right) \Rightarrow q''(\rho) = -\frac{2v_m}{\rho_m} < 0$$

da cui

$$\begin{cases} \rho_t + \underbrace{v_m \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right)}_{q'(\rho)} \rho_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \rho(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Cerchiamo di imitare il metodo delle caratteristiche.

Idea: dato  $(x, t)$  determinare una linea  $x = x(t)$  lungo la quale  $\rho$  sia costante, che connetta  $(x, t)$  ad un punto  $(x_0, 0)$



Se tutto va in porto allora  $\rho(x, t) = g(x_0)$ .

**Il problema sarà se riusciremo ad esprimere  $x_0$  in funzione di  $x, t$**  così da ottenere qualcosa di generale. Notiamo anche che non sappiamo nemmeno se sarà una retta.

Imponiamo che lungo  $x = x(t)$ ,  $\rho$  sia costante

$$\rho(x(t), t) = g(x_0) \quad (4.11)$$

deriviamo nel tempo

$$\rho_t(x(t), t) + \dot{x}(t) \cdot \rho_x(x(t), t) = 0$$

ho anche l'equazione differenziale, valutata lungo la curva, imponendo (4.11)

$$\rho_t(x(t), t) + q'(\rho(x(t), t)) \rho_x(x(t), t) = 0$$

$$\rho_t(x(t), t) + q'(g(x_0))\rho_x(x(t), t) = 0$$

sottraggo

$$[\dot{x}(t) - q'(g(x_0))] \rho_x(x(t), t) = 0$$

ma  $\rho_x = 0$  non è ragionevole<sup>2</sup>, quindi

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = q'(g(x_0)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

quindi le equazioni delle caratteristiche **sono ancora rette**, ma il coefficiente angolare dipende dal dato iniziale. Si noti che solitamente esprimiamo  $x$  in funzione di  $t$ , mentre i grafici hanno nelle ascisse  $x$  e nelle ordinate  $t$ , al contrario di come usualmente si fa. Nel pensare alla *pendenza* del grafico bisogna quindi fare riferimento alle ordinate.

$$x = q'(g(x_0))t + x_0 \quad (4.12)$$

Il punto è quindi determinare  $x_0$  in funzione dei generici  $x, t$ , per poi tornare a  $\rho$  in (4.11)

$$\rho(x, t) = g(x_0) = g(x - q'(g(x_0))t) \quad (4.13)$$

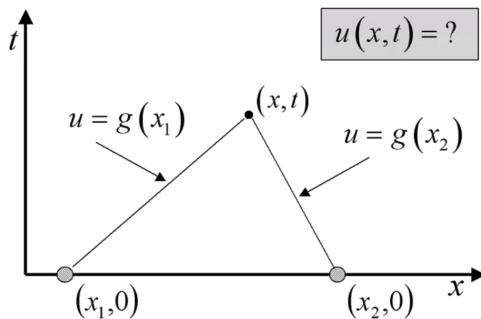
è ancora un'onda progressiva, ma la velocità non è costante con  $x_0$ , infatti  $q'(g(x_0))$  si chiama **velocità locale dell'onda**. È la velocità di un segnale che si propaga, non del traffico.

Si noti infatti che:

$$\underbrace{q'(\rho)}_{\text{vel.segnale}} = \frac{d}{d\rho} q(\rho) = \frac{d}{d\rho} (\rho v) = \underbrace{\frac{d\rho}{d\rho}}_{=1} v + \rho \underbrace{\frac{dv}{d\rho}}_{\leq 0} \leq \underbrace{v}_{\text{vel.traffico}}$$

Notiamo anche che in questo modello di traffico la velocità delle macchine sarà sempre maggiore o uguale a zero, mentre disegnando il grafico di  $q'(\rho)$  ci si rende facilmente conto che la velocità locale dell'onda può facilmente essere negativa (un segnale che si propaga all'indietro, come vedremo nell'esempio della coda al semaforo).

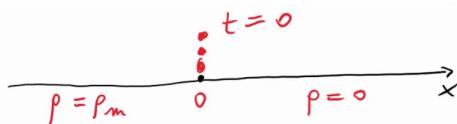
Problema: (4.13) dà sempre soluzione? No.



Se due caratteristiche si intersecano, il valore **nell'intersezione non è determinato**: sono in presenza di un'ambiguità. Motiviamo con due esempi.

### 4.3.1 Coda al semaforo

Modellizziamo il problema come



<sup>2</sup>Se lo fosse, allora la PDE si ridurrebbe a  $\rho_t = 0$ , ovvero la soluzione sarebbe costante ovunque. Se già il dato iniziale non è costante, è chiaro che ciò non può tornare.

Abbiamo già tutto il modello pronto, dobbiamo solo scegliere il dato iniziale

$$g(x) = \begin{cases} \rho_m & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Una possibile strategia è:

1. Calcolare la velocità locale dell'onda  $q'(g(x_0))$  al variare di  $x_0$ ;
2. Determinare e tracciare nel piano  $(x, t)$  le caratteristiche;
3. Calcolare la soluzione  $\rho(x, t)$ .

A  $t = 0$  il semaforo diventa verde, come evolve il traffico? Ci aspettiamo che le macchine davanti al semaforo si inizino a muovere velocità massima, le altre rimangono un po' ferme e poi partano.

1. Velocità locale dell'onda, ricordiamo che

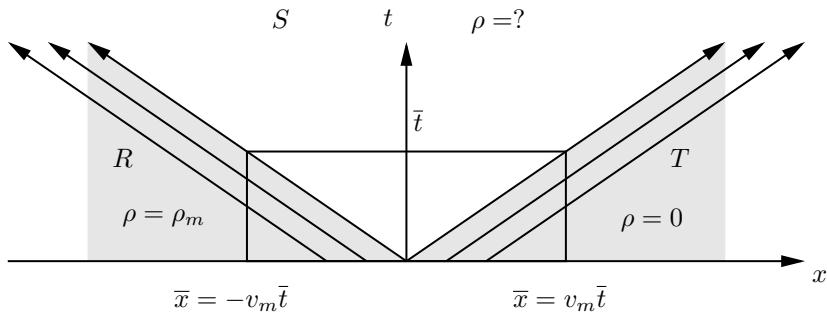
$$q'(\rho) = v_m \left( 1 - \frac{2\rho}{\rho_m} \right)$$

dobbiamo distinguere per i due valori di  $\rho$

$$q'(g(x_0)) = \begin{cases} -v_m & x_0 < 0 \\ v_m & x_0 > 0 \end{cases}$$

2. Le caratteristiche sono

$$\begin{cases} x = -v_m t + x_0 & x_0 < 0 \\ x = v_m t + x_0 & x_0 > 0 \end{cases}$$



3. Le rette  $x = \pm v_m t$  delimitano 3 settori:  $R, S, T$

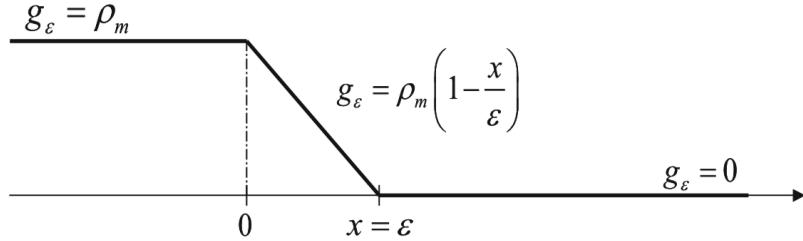
$$\begin{cases} \text{in } R : & x < -v_m t \Rightarrow \rho = \rho_m \\ \text{in } T : & x > v_m t \Rightarrow \rho = 0 \end{cases}$$

La prima macchina, che si muove a velocità massima, dopo un tempo  $\bar{t}$  si troverà in posizione  $\bar{x}$ . Il segnale di *via libera* viaggia all'indietro. In  $S$  non so nulla, dobbiamo ingegnarci.

Strategia per costruire **una**<sup>3</sup> soluzione in  $S$ :

1. Approssimare  $g$  con un dato  $g_\varepsilon$  **continuo** tale che  $g_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} g$ .
2. Costruire la soluzione  $\rho_\varepsilon$  col dato  $g_\varepsilon$ .
3. Calcolare la soluzione come  $\rho = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon$ .

<sup>3</sup>Nessuno ci dice che sia l'unica, vedremo poi dei teoremi, ma dobbiamo prima analizzare altri aspetti



1. Poniamo

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \rho_m & x \leq 0 \\ \rho_m \left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right) & 0 < x < \varepsilon \\ 0 & x \geq \varepsilon \end{cases}$$

segue naturalmente che<sup>4</sup>

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(x) = g(x) \quad \forall x \neq 0$$

2. Calcoliamo la velocità locale  $q'(g_\varepsilon(x_0))$  per l'unico caso dubbio:  $0 < x < \varepsilon$

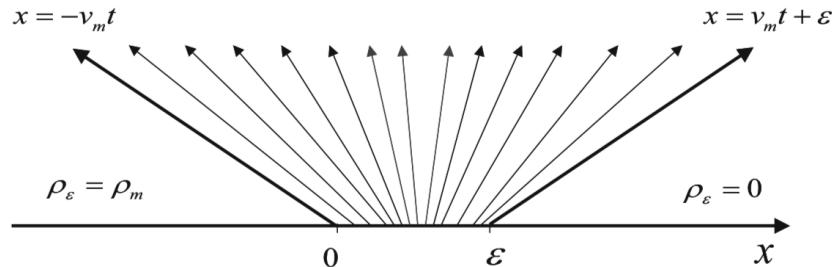
$$q'(g_\varepsilon(x_0)) = v_m \left(1 - \frac{2g_\varepsilon(x_0)}{\rho_m}\right) = v_m \left(1 - 2 \left(1 - \frac{x_0}{\varepsilon}\right)\right) = -v_m \left(1 - \frac{2x_0}{\varepsilon}\right)$$

le caratteristiche sono quindi

$$\begin{cases} x = -v_m t + x_0 & x_0 < 0 \\ x = -v_m \left(1 - \frac{2x_0}{\varepsilon}\right) t + x_0 & 0 < x_0 < \varepsilon \\ x = v_m t + x_0 & x_0 > \varepsilon \end{cases}$$

Le caratteristiche nel caso dubbio risultano un ventaglio di rette al variare di  $x_0$ . Possiamo ricavare  $x_0$  in funzione di  $x, t$  nella regione intermedia

$$x = -v_m t + \left(v_m \frac{2}{\varepsilon} t + 1\right) x_0 \Rightarrow x_0 = \varepsilon \frac{x + v_m t}{2v_m t + \varepsilon}$$



nella regione intermedia

$$\rho_\varepsilon(x, t) = g_\varepsilon(x_0) = \rho_m \left(1 - \frac{x_0}{\varepsilon}\right) = \rho_m \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{x + v_m t}{2v_m t + \varepsilon}\right)$$

3. Mandiamo al limite

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon(x, t) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_m \left(1 - \frac{x + v_m t}{2v_m t + \varepsilon}\right) \\ &= \rho_m \left(1 - \frac{x + v_m t}{2v_m t}\right) \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Il valore in 0 è del tutto irrilevante.

$$\begin{aligned}
 &= \rho_m \left( 1 - \frac{x}{2v_m t} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{\rho_m}{2} \left( 1 - \frac{1}{v_m} \frac{x}{t} \right)
 \end{aligned}$$

In conclusione

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_m & x \leq -v_m t \\ \frac{\rho_m}{2} \left( 1 - \frac{1}{v_m} \frac{x}{t} \right) & -v_m t < x < v_m t \\ 0 & x \geq v_m t \end{cases}$$

abbiamo messo in evidenza il rapporto  $\frac{x}{t}$ , questa è infatti una funzione  $r\left(\frac{x}{t}\right)$  che rappresenta un'**onda di rarefazione**.

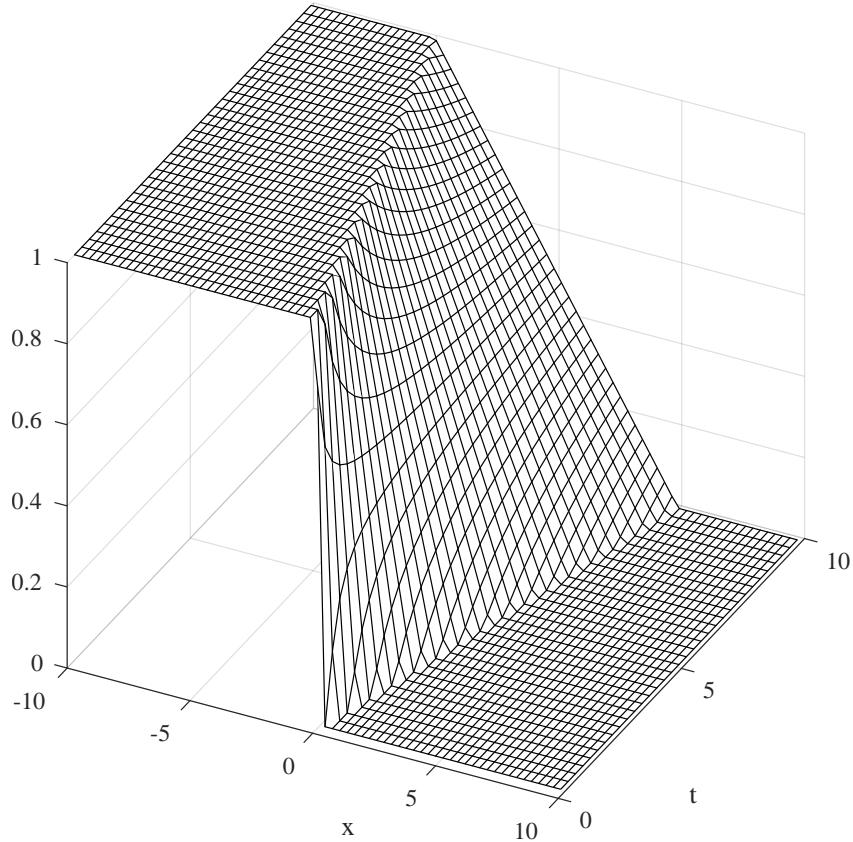


Figura 4.3: Soluzione del modello del traffico al semaforo.

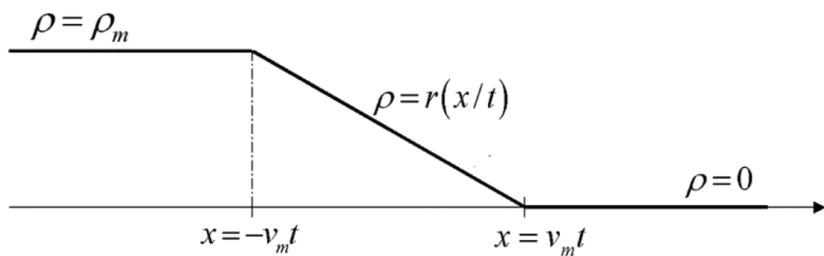


Figura 4.4: Profilo di un'onda di rarefazione al tempo  $t$ .

Si verifica che questa funzione  $r$  non è nient'altro che la funzione inversa di  $q'$ ,<sup>5</sup>

$$r(s) = \frac{\rho_m}{2} \left( 1 - \frac{1}{v_m} s \right) = (q')^{-1}(s)$$

Problemi:

- $\rho$  è l'unica soluzione del problema di Cauchy?
- Nei punti di raccordo  $\rho$  non è derivabile, bisogna dare un senso alla soluzione.

### 4.3.2 Traffico fermo a valle

Stavolta le auto si avvicinano e prima del punto di blocco la densità sarà una frazione della densità massima

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}\rho_m & x < 0 \\ \rho_m & x > 0 \end{cases}$$

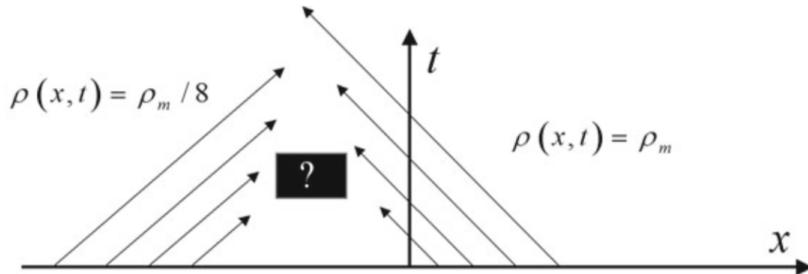
La velocità locale dell'onda è

$$q'(g(x_0)) = v_m \left( 1 - \frac{2g(x_0)}{\rho_m} \right) = \begin{cases} \frac{3}{4}v_m & x_0 < 0 \\ -v_m & x_0 > 0 \end{cases}$$

La configurazione delle caratteristiche è

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}v_m t + x_0 & x_0 < 0 \\ x = -v_m t + x_0 & x_0 > 0 \end{cases}$$

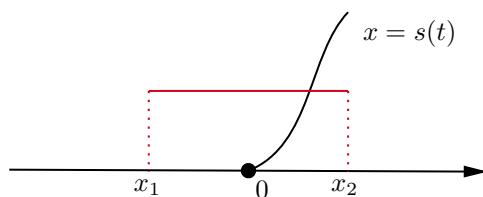
Siamo proprio nel caso in cui si intersecano! Vediamo come sbrogliare il mistero facendo un discorso del tutto generale.



Dobbiamo ammettere soluzioni discontinue, la *linea di discontinuità* sarà una funzione  $x = s(t)$ . Non possiamo più fare come all'inizio in (4.3) e portare la derivata dentro, perché  $\rho$  è **discontinua**. Tuttavia vale sempre la relazione generale:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(y, t) dy = q(\rho(x_1, t)) - q(\rho(x_2, t))$$

Se l'intervallo  $(x_1, x_2)$  è a cavallo della linea di continuità possiamo spezzarlo



$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(y, t) dy = \frac{d}{dt} \left( \int_{x_1}^{s(t)} + \int_{s(t)}^{x_2} \right)$$

<sup>5</sup>che esiste essendo  $q'' < 0 \Rightarrow q'$  strettamente monotona.

$$= \int_{x_1}^{s(t)} \rho_t(y, t) dy + \rho(s(t)^-, t) \cdot \dot{s}(t) \\ + \int_{s(t)}^{x_2} \rho_t(y, t) dy - \rho(s(t)^+, t) \cdot \dot{s}(t)$$

Riaccorpando l'integrale e sostituendo

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho_t(y, t) dy + [\rho(s(t)^-, t) - \rho(s(t)^+, t)] \cdot \dot{s}(t) = q(\rho(x_1, t)) - q(\rho(x_2, t))$$

facendo il limite per  $x_2 \rightarrow s(t)^+, x_1 \rightarrow s(t)^-$

$$\underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \rho_t(y, t) dy}_{\rightarrow 0} + [\rho(s(t)^-, t) - \rho(s(t)^+, t)] \cdot \dot{s}(t) = q(\rho(s(t)^-, t)) - q(\rho(s(t)^+, t))$$

allora

$$\dot{s}(t) = \frac{q(\rho(s(t)^-, t)) - q(\rho(s(t)^+, t))}{\rho(s(t)^-, t) - \rho(s(t)^+, t)} = \frac{[q(\rho)]_-^+}{[\rho]_-^+} \quad (4.15)$$

Questa si chiama **condizione di Rankine-Hugoniot**, e rappresenta la legge di conservazione per la linea di discontinuità.

Nel caso del traffico<sup>6</sup>

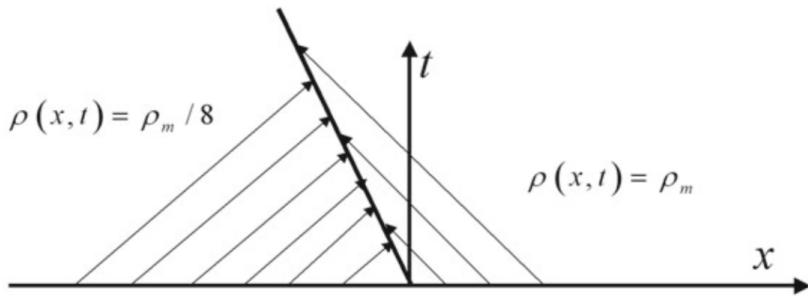
$$\rho^+ = \rho_m \quad \rho^- = \frac{1}{8}\rho_m \quad q(\rho^+) = 0 \quad q(\rho^-) = v_m \left( \frac{1}{8}\rho_m - \frac{1}{64}\rho_m \right) = \frac{7}{64}v_m\rho_m$$

quindi

$$\dot{s}(t) = \frac{q(\rho^-) - q(\rho^+)}{\rho^- - \rho^+} = \frac{\frac{7}{64}v_m\rho_m - 0}{\frac{1}{8}\rho_m - \rho_m} = -\frac{1}{8}v_m$$

Siccome  $s(0) = 0$  la linea d'urto è data da

$$s(t) = -\frac{1}{8}v_m \cdot t$$



$$\rho(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{8}\rho_m & x < -\frac{1}{8}v_mt \\ \rho_m & x > -\frac{1}{8}v_mt \end{cases}$$

La linea d'urto rappresenta *l'ingorgo* che si propaga all'indietro.

---

<sup>6</sup>ricordiamo che era  $q(\rho) = v_m \left( \rho - \frac{\rho^2}{\rho_m} \right)$

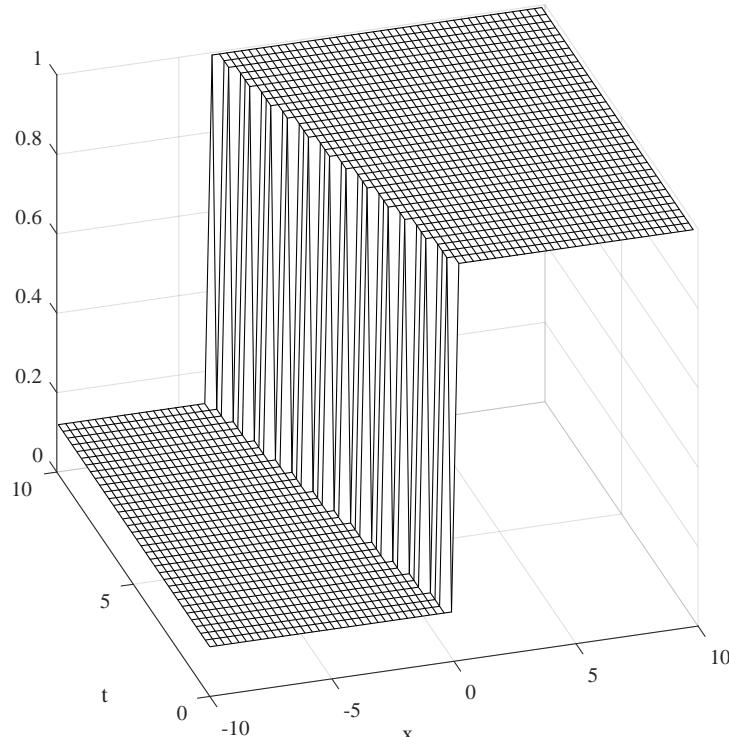


Figura 4.5: Soluzione del traffico a valle.

Lezione Salsa 13 (25/03/2021)

#### 4.4 Ritorno al metodo delle caratteristiche

Riprendiamo la soluzione dell'onda progressiva con velocità locale ottenuta dal metodo delle caratteristiche. Dato il problema di Cauchy

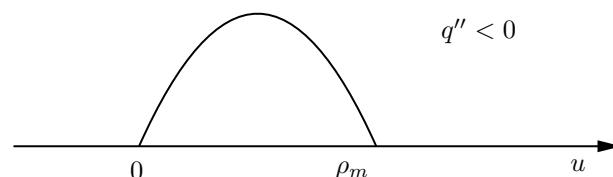
$$\begin{cases} u_t + q(u)_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

la soluzione

$$\begin{aligned} u(x, t) &= g[x - q'(g(\xi))t] \text{ con } q'(g(\xi)) \text{ velocità locale} \\ x &= q'(g(\xi))t + \xi \text{ caratteristica uscente da } \xi \end{aligned}$$

non è sempre valida. Nel caso del traffico ad esempio  $q$  è concava

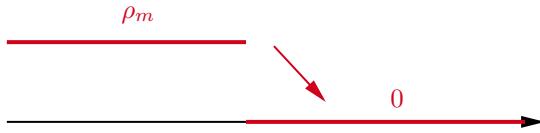
$$q(u) = \left( u - \frac{u^2}{\rho_m} \right) v_m$$



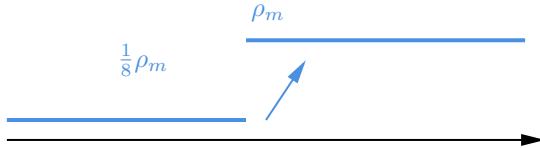
E abbiamo esaminato due casi

1. Onda di rarefazione (dato decrescente): “ $g' < 0$ ”<sup>7</sup>

<sup>7</sup>uso le virgolette perché nel senso delle distribuzioni.



2. Onda d'urto (dato crescente): “ $g' > 0$ ”



La linea di shock è determinabile tramite la relazione di Rankine-Hugoniot.

Notiamo che se  $g'$  è concorde con  $q''$  abbiamo un'onda di rarefazione, se sono discordi un'onda d'urto. Cerchiamo di generalizzare questa affermazione.

Prendiamo la soluzione

$$u(x, t) = g(x - q'(g(\xi))t)$$

Sulla caratteristica

$$x = q'(g(\xi))t + \xi$$

abbiamo che

$$u = g(\xi)$$

perché il dato che trasporta la caratteristica è proprio  $g(\xi)$ . Quindi posso riscrivere

$$u(x, t) = g(x - q'(g(\xi))t) = g(x - q'(u)t)$$

Se prendo la funzione

$$G(x, t, u) = u - g(x - q'(u)t) = 0$$

e la pongo uguale a 0 ottengo un'equazione che, nel caso in cui il metodo delle caratteristiche funziona, definisce **implicitamente**  $u = u(x, t)$ .

**TEOREMA 4.1 — Teorema del Dini.** Sia  $A \subset \mathbb{R}^2$  aperto,  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $C^1(A)$ . Consideriamo un punto  $(x_0, y_0) \in A$  e supponiamo che  $g(x_0, y_0) = 0$  e che  $g_y(x_0, y_0) \neq 0$ . Allora esistono due intervalli reali  $I, J$  tali da contenere  $x_0, y_0$  ed esiste unica una funzione  $y(x) : I \rightarrow J, y \in C^1(I)$  tale che  $y(x_0) = y_0$  e che  $y'(x_0) = -\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}$  e che per ogni  $x, y$  nei due intervalli  $I, J$  risulti che  $g(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = y(x)$

Ma quando va “tutto bene”?

Possiamo rispondere a questa domanda col **teorema di Dini**:  $u$  è definita e regolare come funzione di  $(x, t)$  se  $g$  e  $q'$  sono regolari e

$$G_u(x, t, u) = 1 + g' \underbrace{(x - q'(u)t)}_{\xi} q''(u)t \neq 0$$

possiamo riscrivere la condizione essendo  $u = g(\xi)$  lungo la caratteristica:

$$\boxed{G_u = 1 + g'(\xi)q''(g(\xi))t \neq 0} \quad (4.16)$$

- La condizione sarà **sempre** soddisfatta se

$$g'(\xi)q''(g(\xi)) \geq 0 \text{ in } \mathbb{R}$$

- Avrà problemi (**da un certo tempo in poi**) se

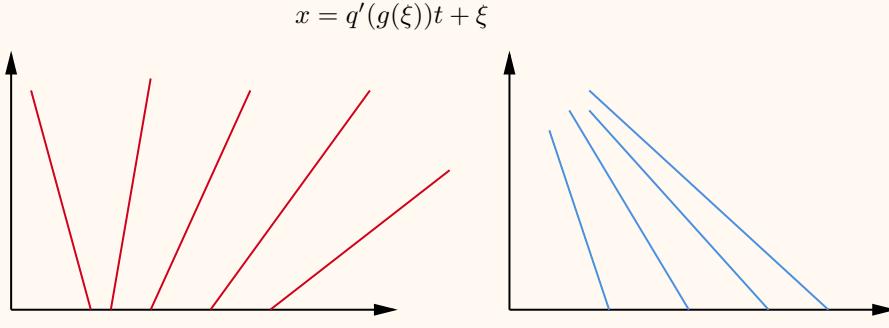
$$g'(\xi)q''(g(\xi)) < 0$$

**NB.** La pendenza della caratteristica è  $q'(g(\xi))$ . La condizione (4.4) equivale a:

$$\frac{d}{d\xi} q'(g(\xi)) = g'(\xi)q''(g(\xi)) \geq 0$$

ovvero richiediamo che le pendenze delle caratteristiche siano crescenti con  $\xi$ : le caratteristiche non si incontrano mai (se la derivata della pendenza è 0, rimangono parallele, se è  $< 0$  si intersecheranno dando origine ad una linea di shock).

In figura si vede prima un caso di pendenza in aumento, quindi di condizione verificata (onda di rarefazione), poi un caso di pendenza che diminuisce (shock).



Formalizziamo in un teorema.

**TEOREMA 4.2.** Sia  $q \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $g \in C^1(\mathbb{R})$  e  $g'(\xi)q''(g(\xi)) \geq 0 \forall \xi \in \mathbb{R}$ . Allora l'equazione

$$G(x, t, u) = u - g(x - q'(u)t) = 0$$

definisce univocamente (**esistenza e unicità**)  $u = u(x, t) \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ .

Qui abbiamo sia esistenza che unicità. Sebbene per il traffico abbiamo trovato delle soluzioni, non possiamo stabilire se sono uniche, perché i dati non sono regolari, in particolare  $g$  non era  $C^1$ , era discontinua. Vedremo che l'unicità non è garantita, a meno di cercare particolari soluzioni, dette *entropiche*, che saranno uniche sotto certe ipotesi.

**DIMOSTRAZIONE.**  $u$  è definita univocamente per il teorema del Dini. Dimostriamo che  $u \in C^1$ . Sempre usando il teorema del Dini

$$u_t = -\frac{G_t(x, t, u)}{G_u(x, t, u)} = -\frac{g'(x - q'(u)t)q'(u)}{1 + \underbrace{tq''(u)g'(x - q'(u)t)}_{\geq 0}}$$

$$u_x = -\frac{G_x(x, t, u)}{G_u(x, t, u)} = \frac{g'(x - q'(u)t)}{1 + \underbrace{tq''(u)g'(x - q'(u)t)}_{\geq 0}}$$

allora

$$u_t, u_x \in C(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$$

essendo continue (il denominatore non si annulla) perché rapporti di funzioni continue. ■

Se invece

$$g'(\xi)q''(g(\xi)) < 0 \text{ in } [a, b]$$

$$G_u = 1 + \underbrace{g'(\xi)q''(g(\xi))}_< 0 t$$

ci aspettiamo l'**intersezione** delle caratteristiche e la formazione di uno shock. Ci poniamo il problema

di determinare l'istante  $t_s$  (breaking time) e il punto  $x_s$  in cui parte la linea d'urto.

$$G_u = 0 \quad \text{se} \quad t(\xi) = \underbrace{\frac{1}{-g'(\xi)q''(g(\xi))}}_{=z(\xi)}$$

Per ogni  $\xi$  trovo un tempo in cui  $G_u = 0$ . Ma allora  $t_s$  sarà il più piccolo tra questi tempi  $t(\xi)$ : assumiamo che in  $[a, b]$   $z$  abbia un solo punto di massimo  $\xi_M$ , allora il tempo di prima formazione dello shock sarà

$$t_s = \min_{\xi \in [a, b]} \frac{1}{z(\xi)} = \frac{1}{z(\xi_M)}$$

$x_s$  si trova lungo la caratteristica che esce da  $\xi_M$  al tempo  $t_s$

$$x_s = q'(g(\xi_M))t_s + \xi_M = q'(g(\xi_M))\frac{1}{z(\xi_M)} + \xi_M$$

Il punto  $(x_s, t_s)$  ha un interessante significato geometrico, esaminiamo il seguente esempio. **Esempio.**

$$\begin{cases} u_t + (1 - 2u)u_x = 0 \\ u(x, 0) = \arctan x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} q(u) &= u - u^2 & g(\xi) &= \arctan \xi \\ q'(u) &= 1 - 2u & g'(\xi) &= \frac{1}{1 + \xi^2} \\ q''(u) &= -2 \end{aligned}$$

Abbiamo  $g' > 0, q'' < 0$  discordi, ci aspettiamo uno shock.

$$z(\xi) = -\underbrace{g'(\xi)}_{\frac{1}{1+\xi^2}} \underbrace{q''(g(\xi))}_{-2} = \frac{2}{1 + \xi^2} \Rightarrow \xi_M = 0$$

Allora  $z(\xi_M) = 2$  e lo shock parte da

$$t_s = \frac{1}{z(\xi_M)} = \frac{1}{2}, \quad x_s = q'(g(\xi_M))\frac{1}{2} + 0 = q'(0)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Geometricamente,  $u$  è definita da

$$G(x, t, u) = u - g(x - q'(u)t) = u - \arctan(x - (1 - 2u)t) = 0, \quad \text{per } t < \frac{1}{2}$$

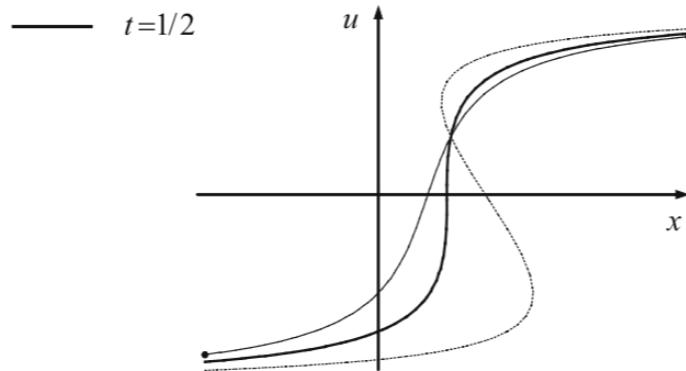


Figura 4.6: Breaking time per il problema

Dopo  $t_s$  la linea di livello di  $G$  non definisce più il grafico di una funzione.

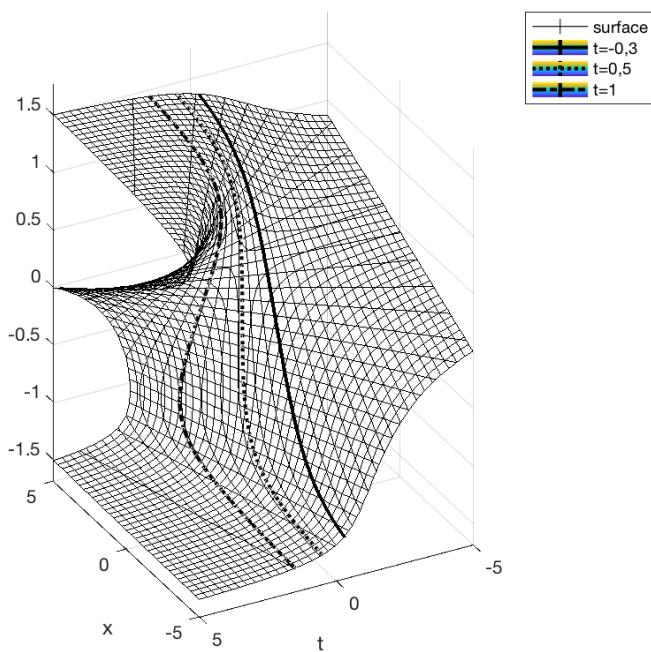


Figura 4.7: Plot del problema

Si può dimostrare però che se tracciamo una retta verticale (tagliando due aree  $A$  e  $B$  di ugual area) otteniamo  $s(t)$  dato dalle condizioni di Rankine-Hugoniot.

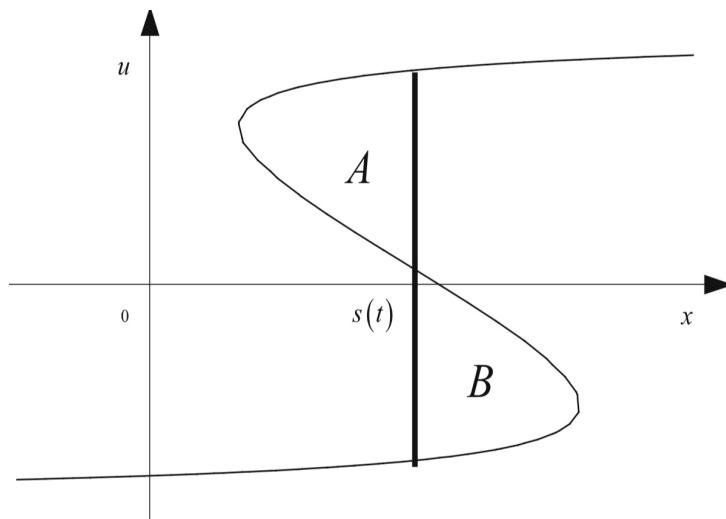


Figura 4.8: Inserimento di uno shock con la regola di Whitham.

## 4.5 Soluzione debole

Abbiamo notato una serie di problemi nel determinare la soluzione di  $(P_{\text{cons,forte}})$  nel caso in cui  $g$  avesse una qualche discontinuità

$$\begin{cases} u_t + q(u)_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (P_{\text{cons,forte}})$$

1. Dobbiamo dare **senso** al concetto di soluzione quando si presentano discontinuità (*onde di rarefazione, onde d'urto o shock*).
2. Abbiamo costruito, nel caso di rarefazione, una soluzione con approssimazioni. Questo tuttavia non garantisce **unicità**. Se siamo in presenza di più soluzioni dobbiamo fornire un criterio di *selezione* che possa individuare (preferibilmente) un'unica soluzione che ha **senso fisico**.

Allarghiamo il concetto di soluzione introducendo la **soluzione debole** (o **soluzione integrale**, o **soluzione generalizzata**).

**DEFINIZIONE 4.3 — Soluzione classica o regolare.**  $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ .

**DEFINIZIONE 4.4 — Funzione test.**  $v \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$  a supporto compatto.

Sia  $u$  soluzione classica,  $v$  funzione test, moltiplichiamo  $(P_{\text{cons,forte}})$  con la funzione test e integriamo

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} vu_t \, dx dt}_A + \underbrace{\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} vq(u)_x \, dx dt}_B = 0$$

Integriamo  $A$  per parti rispetto a  $t$  e usiamo il supporto compatto

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{R}} [vu]_0^{+\infty} dx - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} uv_t \, dx dt \\ &= \cancel{\int_{\mathbb{R}} v(x, \infty) u(x, \infty) dx} - \int_{\mathbb{R}} v(x, 0) \underbrace{u(x, 0)}_{g(x)} dx - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} uv_t \, dx dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} v(x, 0) g(x) dx - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} uv_t \, dx dt \end{aligned}$$

Integriamo  $B$  per parti rispetto a  $x$

$$B = \cancel{\int_0^{+\infty} [vq(u)]_{-\infty}^{+\infty} dt} - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} v_x q(u) \, dx dt$$

Segue che

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} [uv_t + q(u)v_x] \, dx dt + \int_{\mathbb{R}} v(x, 0) g(x) dx = 0 \quad \forall v \quad (P_{\text{cons,debole}})$$

che chiameremo **formulazione debole**. Notiamo che *non compaiono le derivate di  $u$* . Quindi

$$u \text{ regolare} \Rightarrow \text{implica la formulazione debole}$$

Possiamo tornare indietro? Sì.

Partendo dalla formulazione debole  $(P_{\text{cons,debole}})$  e integrando per parti in senso inverso il primo termine, stavolta coi ruoli delle funzioni invertiti rispetto al primo passaggio

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} [u_t + q(u)_x] v \, dx dt + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} v(x, 0) u(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}} v(x, 0) g(x) dx}_{\int_{\mathbb{R}} [u(x, 0) - g(x)] v(x, 0) dx} = 0 \quad (4.17)$$

Che è valida per ogni funzione test, scelgo quindi  $v$  test con supporto in  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ , annullando tutto il secondo termine

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} [u_t + q(u)_x] v \, dx dt = 0 \quad \forall \text{ funzione test}$$

Per il lemma di annullamento ritroviamo la prima parte di  $(P_{\text{cons,forte}})$

$$u_t + q(u)_x = 0$$

La inseriamo nella (4.17)

$$\int_{\mathbb{R}} [g(x) - u(x, 0)] v(x, 0) dx = 0 \quad \forall \text{ funzione test}$$

Sempre per il lemma di annullamento ritroviamo la seconda parte (la condizione iniziale) di  $(P_{\text{cons,forte}})$

$$u(x, 0) = g(x)$$

In conclusione

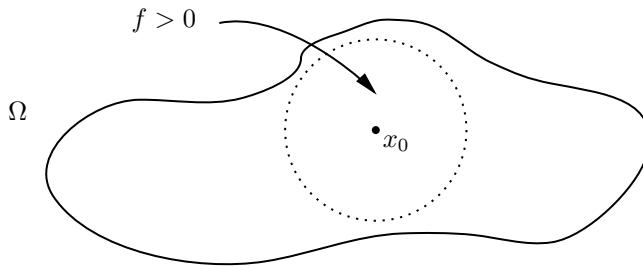
$$u \text{ regolare} \Leftrightarrow \text{implica la formulazione debole} \quad (4.18)$$

**TEOREMA 4.5 — Lemma di annullamento.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto, sia  $f \in C(\Omega)$  tale che

$$\int_{\Omega} f v \, dx = 0, \quad \forall v \in C^1(\Omega) \text{ a supporto compatto} \quad (4.19)$$

allora  $f = 0$  in  $\Omega$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Se per assurdo  $f(x_0) \neq 0$ , per esempio  $f(x_0) > 0$ , allora possiamo considerare  $B_r(x_0) \subset \Omega$  tale che  $f(x) > 0$  in  $B_r(x_0)$ .



Possiamo allora sempre trovare una  $v \in C^1(\Omega)$  tale che  $v > 0$  in  $B_r(x_0)$  e  $v = 0$  in  $\Omega \setminus \overline{B_r(x_0)}$  ma allora

$$0 \stackrel{\text{hp}}{=} \int_{\Omega} f v \, dx = \int_{B_r(x_0)} f v \, dx > 0$$

assurdo. ■

**DEFINIZIONE 4.6 — Soluzione debole.** Sia  $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  localmente limitata<sup>a</sup>. Diciamo che  $u$  è **soluzione debole** del problema

$$\begin{cases} u_t + q(u)_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

se vale la  $(P_{\text{cons,debole}})$ , cioè se

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} [uv_t + q(u)v_x] dx dt + \int_{\mathbb{R}} v(x, 0)g(x) dx = 0 \quad \forall \text{ funzione test}$$

<sup>a</sup>cioè in ogni compatto.

#### 4.5.1 Condizione di Rankine-Hugoniot

**TEOREMA 4.7.** Sia  $u$  soluzione debole tale che

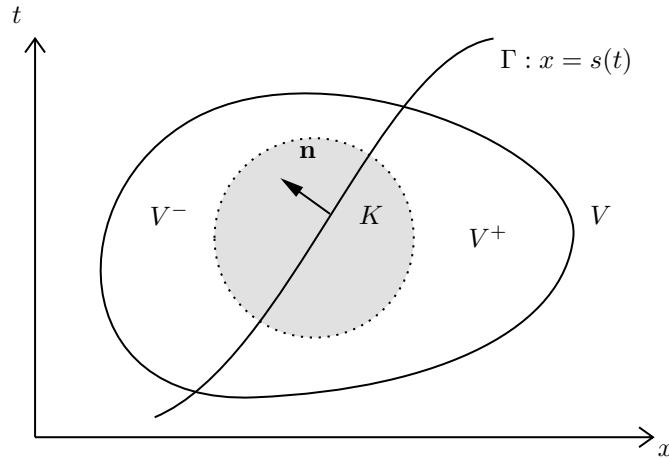
1. ha una linea di discontinuità a salto  $x = s(t)$  di classe  $C^1$
2. fuori da  $\Gamma$  è soluzione classica di  $u_t + q(u)_x = 0$
3. il salto  $[u^+ - u^-]_{|\Gamma}$  varia con continuità

Allora

$$\dot{s}(t) = \frac{q(u^+) - q(u^-)}{u^+ - u^-} \quad (4.20)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo un aperto  $V$  contenuto nel semipiano  $t > 0$ , diviso in due parti  $V^+, V^-$  da una linea  $\Gamma$ , definita da un'equazione  $x = s(t)$ , in cui  $u(x, t)$  presenta una discontinuità di tipo salto, mentre al di fuori è soluzione classica.

Consideriamo  $v$  funzione test di supporto  $K \subset V$ , a cavallo di  $\Gamma$ .



Essendo  $V$  nel semipiano con  $t > 0$ , e  $K \subset V$ , allora  $v(x, t = 0) = 0$ , allora la FD<sup>a</sup> diventa

$$0 = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} [uv_t + q(u)v_x] dx dt + \int_{\mathbb{R}} v(x, 0) \overbrace{g(x)}^{} dx = \int_V = \int_{V^+} + \int_{V^-}$$

Lavoriamo separatamente. Notiamo subito che possiamo scrivere la formula di derivata per parti

$$\begin{aligned} uv_t &= (uv)_t - u_t v \\ q(u)v_x &= (q(u)v)_x - q(u)_x v \end{aligned}$$

che possiamo sostituire

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \int_{V^+} + \int_{V^-} \right) [uv_t + q(u)v_x] dx dt \\ &= \left( \int_{V^+} + \int_{V^-} \right) [(uv)_t + (q(u)v)_x - u_t v - q(u)_x v] dx dt \end{aligned}$$

sistemiamo i termini e raccogliamo  $v$

$$0 = \left( \int_{V^+} + \int_{V^-} \right) [(uv)_t + (q(u)v)_x] dx dt - \left( \int_{V^+} + \int_{V^-} \right) [u_t + q(u)_x] v dx dt$$

notiamo ora che  $u$  al di fuori di  $\Gamma$  è regolare e quindi soluzione classica<sup>b</sup>  $u_t + q(u)_x = 0$ . Questo ci permette di cancellare il secondo termine

$$0 = \left( \int_{V^+} + \int_{V^-} \right) [(uv)_t + (q(u)v)_x] dx dt$$

Ciò che è in parentesi quadra altro non è che la divergenza di una funzione!

$$\mathbf{v}(x, t) = \begin{pmatrix} q(u)v \\ uv \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v} = (q(u)v)_x + (uv)_t$$

$$\left( \int_{V^+} + \int_{V^-} \right) [(uv)_t + (q(u)v)_x] dxdt = \left( \int_{V^+} + \int_{V^-} \right) [\operatorname{div} \mathbf{v}] dxdt$$

pertanto possiamo applicare il Teorema della Divergenza. Consideriamo  $\mathbf{n} = (n_x, n_t)$  normale,  $n_x$  in  $x$ ,  $n_t$  in  $t$ , e ricordiamoci che

- la normale è entrante in  $V^-$
- $v = 0$  al di fuori di  $K$
- quando scriviamo  $u$  integrata su  $\Gamma$  dobbiamo specificare se stiamo facendo il limite da destra o sinistra

$$\int_{V^+} [\operatorname{div} \mathbf{v}] dxdt = \int_{\partial V^+} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dl = \left[ \int_{\partial V^+ \setminus K} + \int_{K \cap \Gamma} \right] \begin{pmatrix} q(u)v \\ uv \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_t \end{pmatrix} dl$$

$$= \int_{K \cap \Gamma} [q(u^+) n_x + u^+ n_t] v dl$$

$$\int_{V^-} [\operatorname{div} \mathbf{v}] dxdt = \int_{\partial V^-} \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{n}) dl = \left[ \int_{\partial V^- \setminus K} + \int_{K \cap \Gamma} \right] \begin{pmatrix} q(u)v \\ uv \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -n_x \\ -n_t \end{pmatrix} dl$$

$$= \int_{K \cap \Gamma} [-q(u^-) n_x - u^- n_t] v dl$$

A questo punto mettiamo insieme, possiamo tranquillamente portare tutto sotto lo stesso integrale

$$0 = \int_{K \cap \Gamma} [q(u^+) n_x + u^+ n_t - q(u^-) n_x - u^- n_t] v dl \quad \forall v$$

l'arbitrarietà di  $v$  e il fatto che *il salto varia con continuità*, fondamentale per usare il lemma di annullamento, ci fa concludere che

$$q(u^+) n_x + u^+ n_t - q(u^-) n_x - u^- n_t = 0$$

A questo punto lo studente può rilassarsi, il peggio è passato, ci basta effettuare qualche passaggio algebrico per arrivare al risultato

$$0 = q(u^+) n_x + u^+ n_t - q(u^-) n_x - u^- n_t = \{q(u^+) - q(u^-)\} n_x + \{u^+ - u^-\} n_t$$

Ci dobbiamo solo ricordare che  $\Gamma$  si può esprimere tramite  $x = s(t)$  ed essendo  $C^1$  il versore tangente alla curva è

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\dot{s}(t))^2}} \begin{pmatrix} \dot{s}(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui si trova quello normale, sempre facendo riferimento alla figura

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\dot{s}(t))^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ \dot{s}(t) \end{pmatrix}$$

Sostituiamo e moltiplichiamo tranquillamente per la radice, il cui unico e triste scopo era quello di avere dei versori

$$0 = \{q(u^+) - q(u^-)\} n_x + \{u^+ - u^-\} n_t$$

$$= \{q(u^+) - q(u^-)\} (-1) + \{u^+ - u^-\} (\dot{s}(t))$$

Allora

$$\dot{s}(t) = \frac{q(u^+) - q(u^-)}{u^+ - u^-}$$

che è Rankine-Hugoniot.

■

<sup>a</sup>Formulazione Debole.

<sup>b</sup>questo passaggio lo abbiamo potuto fare solo grazie al fatto che i due integrali sono separati su  $V^+, V^-$ .

*Controesempio all'unicità.*

Consideriamo l'equazione di Burgers

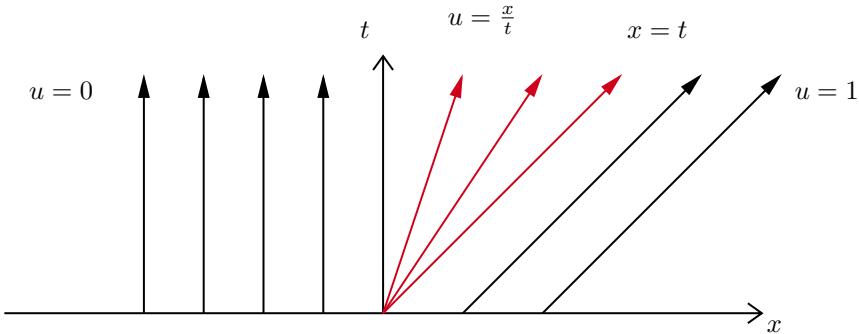
$$u_t + uu_x = 0 \quad q(u) = \frac{u^2}{2}, \quad q'(u) = u, \quad q''(u) = 1 \quad (4.21)$$

risolviamo il seguente problema di Cauchy

$$(P1) \quad \begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Secondo quanto detto prima, essendo  $g'$  e  $q''$  concordi **non ci aspettiamo uno shock**. le caratteristiche sono della forma

$$x = q'(g(x_0))t + x_0 = \begin{cases} x_0 & x_0 < 0 \\ t + x_0 & x_0 > 0 \end{cases}$$



inoltre  $q'(u) = u$ , allora  $r(s) = (q'(u))^{-1}(s) = s$  quindi

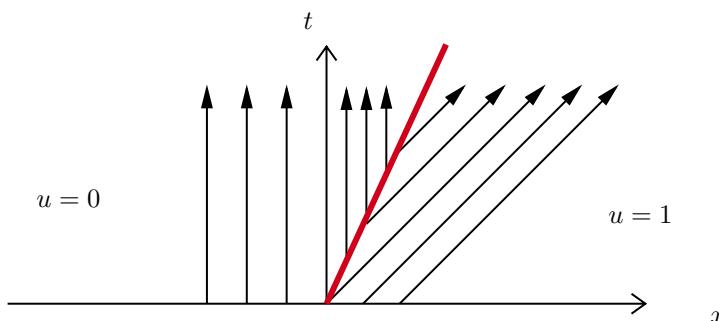
$$u(x, t) = r\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t}$$

abbiamo un'onda di rarefazione dove  $u = x$ . Ma c'è un'altra soluzione.

$$u^+ = 1 \quad u^- = 0 \quad q(u^+) = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} \quad q(u^-) = \frac{0^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad RH : \dot{s}(t) = \frac{\frac{1}{2} - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2}$$

quindi esiste una linea d'urto di equazione

$$x = \frac{1}{2}t \quad (4.22)$$



Questo è uno **shock non fisico**. È come se partendo da un punto su una caratteristica e tornando indietro nel tempo potessi ricostruire la linea d'urto. Un po' fidandoci e un po' appellandoci al secondo principio della termodinamica che riguarda l'aumento di entropia, accettiamo questa denominazione.

*Lezione Salsa 15 (30/03/2021)*

#### 4.5.2 Condizione di entropia

Abbiamo risposto al primo quesito, dando un senso al concetto di soluzione quando si presentano discontinuità (grazie alle soluzioni deboli e Rankine-Hugoniot), e dimostrato che l'unicità non è garantita. Ora dobbiamo definire un criterio di selezione che individui possibilmente un'unica soluzione accettabile dal punto di vista del significato fisico del problema.

*Esaminiamo prima un caso ideale:* sia  $g' > 0$ ,  $q'' \geq q''_{\min} > 0$ , l'unica soluzione è assegnata dalla formula

$$G(x, t, u) = u - g(x - q'(u)t) = 0 \quad (4.23)$$

Grazie al teorema del Dini

$$u_x = -\frac{G_x}{G_u} = \frac{g'(x - q'(u)t)}{1 + g'(x - q'(u)t)q''(u)t} \leq \frac{1}{q''(u)} \frac{1}{t} \leq \frac{E}{t} \quad \text{dove } E = \frac{1}{q''_{\min}}$$

$$\geq \underbrace{g'(x - q'(u)t)q''(u)t}_{\geq g'(x - q'(u)t)q''(u)t}$$

Per il teorema del valor medio, se  $x, z \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0, z > 0$

$$u(x+z, t) - u(x, t) = u_x(\xi_{z,x}, t)z \leq \frac{E}{t}z$$

Perché questa diseguaglianza valga basta che  $u$  sia definita, non è richiesta nessuna regolarità

**DEFINIZIONE 4.8 — Condizione di entropia.** Nel caso  $q'' > 0$ , la condizione di entropia è rispettata se  $\exists E > 0$  tale che per ogni  $x, z \in \mathbb{R}$ ,  $z > 0$  e per ogni  $t > 0$ :

$$u(x+z, t) - u(x, t) \leq \frac{E}{t}z \quad (4.24)$$

Il nome deriva da una particolare intepretazione fisica valida solo nel modello della dinamica di un gas, dove questa diseguaglianza significa che attraverso la linea di shock l'entropia aumenta.

La (4.24) ha senso anche per soluzioni discontinue (in particolare, quelle **deboli**) e non coinvolge operazioni di derivazione. Una soluzione debole che soddisfa la condizione di entropia sarà chiamata **soluzione entropica**.

Conseguenze:

- La funzione

$$x \mapsto u(x, t) - \frac{E}{t}x, \quad t \text{ fissato}$$

è **non crescente**. Poniamo  $x_2 = x + z$ ,  $x_1 = x$ ,  $z = x_2 - x_1 > 0$ , se  $x_2 > x_1$  la (4.24) diventa

$$u(x_2, t) - u(x_1, t) \leq \frac{E}{t}(x_2 - x_1)$$

ovvero

$$u(x_2, t) - \frac{E}{t}x_2 \leq u(x_1, t) - \frac{E}{t}x_1 \quad (4.25)$$

- Per il punto precedente  $u$  (essendo monotona) ha solo discontinuità a salto. Inoltre se  $(x, t)$  è punto di salto per  $u$

$$u_+(x, t) < u_-(x, t)$$

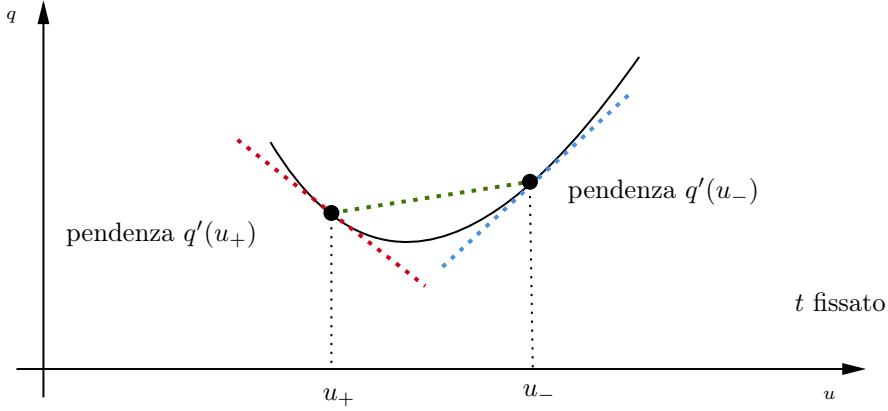
ovvero

$$u(x_+, t) < u(x_-, t)$$

Infatti dalla (4.25) con  $x_1 < x < x_2$  facendo tendere  $x_1 \rightarrow x_-$  e  $x_2 \rightarrow x_+$  si ottiene che il salto è decrescente.

- Poiché  $q'' > 0$ , si ha  $q'$  strettamente crescente

$$q'(u_+) < \frac{q(u_+) - q(u_-)}{u_+ - u_-} < q'(u_-)$$



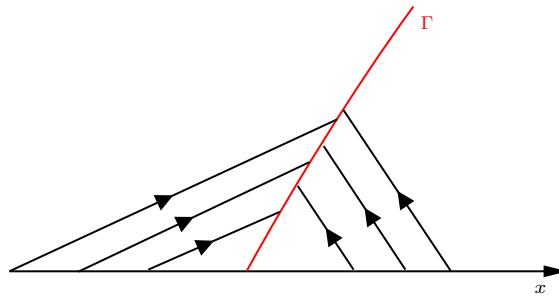
definiamo

$$\sigma(u_+, u_-) = \frac{q(u_+) - q(u_-)}{u_+ - u_-}$$

ma se  $x = s(t)$  è linea d'urto  $\sigma(u_+, u_-) = \dot{s}(t)$  è la pendenza della retta tangente sulla linea d'urto (ovvero la velocità con cui si muove la discontinuità lungo la linea d'urto) data da Rankine-Hugoniot. Ottengo la **diseguaglianza dell'entropia**

$$q'(u_+) < \dot{s} < q'(u_-)$$

**La pendenza di una linea d'urto è minore di quella delle caratteristiche che vi arrivano da sinistra e maggiore di quella delle caratteristiche che vi arrivano da destra:** le caratteristiche **entrano** nella linea d'urto, non è possibile percorrere a ritroso nel tempo una caratteristica e imbattersi in uno shock



**NB.** Nel caso  $q'' \leq q''_{\max} < 0$  la condizione di entropia diventa

$$u(x+z, t) - u(x, t) \geq -\frac{E}{t}z, \quad E = \frac{1}{|q''_{\max}|} \quad (4.26)$$

quindi in un punto  $(x, t)$  di discontinuità

$$u_+(x, t) > u_-(x, t)$$

Ma la diseguaglianza d'entropia essendo  $q'$  decrescente rimane invariata

**TEOREMA 4.9.** Se  $q \in C^2(\mathbb{R})$ , strettamente concava o convessa, e  $g$  è limitata allora **esiste unica** la

soluzione (integrale, cioè debole) del problema

$$\begin{cases} u_t + q(u)_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.27)$$

che soddisfi la condizione di entropia.

Possiamo applicare questo teorema per risolvere il problema (4.27) con dati al bordo

$$g(x) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0 \end{cases}$$

noto come **Problema di Riemann**, con  $u_L \neq u_R$  e costanti.

Questo è proprio il caso della coda al semaforo e del traffico a valle, non c'è soluzione classica, ma ce n'è una unica in senso debole che ha senso fisico.

**TEOREMA 4.10.** Sia  $q$  strettamente convessa o concava con  $q'' \geq h > 0$  o  $q'' \leq -h < 0$ . Allora l'unica soluzione entropica del problema di Riemann è data da:

- Se  $q'' \geq h > 0$  e  $u_R < u_L$ , oppure  $q'' \leq -h < 0$  e  $u_R > u_L$

**onda d'urto**

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & x < \sigma(u_L, u_R)t = s(t) \\ u_R & x > \sigma(u_L, u_R)t = s(t) \end{cases}$$

dove

$$\sigma(u_L, u_R) = \dot{s} = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L}, \quad s(0) = 0$$

- Se  $q'' \geq h > 0$  e  $u_R > u_L$  oppure  $q'' \leq -h < 0$  e  $u_R < u_L$

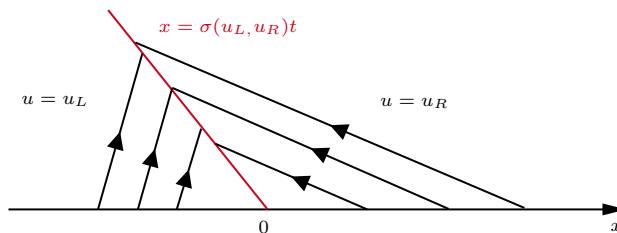
**onda di rarefazione**

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \frac{x}{t} \leq q'(u_L) \\ r\left(\frac{x}{t}\right) & q'(u_L) < \frac{x}{t} < q'(u_R) \\ u_R & \frac{x}{t} \geq q'(u_R) \end{cases}$$

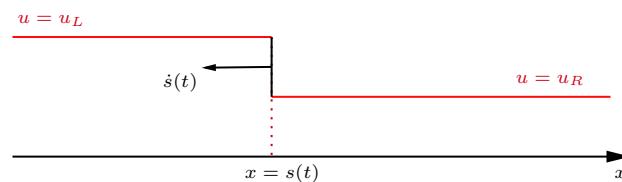
Dove  $r(s) = (q')^{-1}(r(s))$  è la funzione inversa di  $q'$

Prima di fare la dimostrazione esaminiamo i vari casi con dei grafici

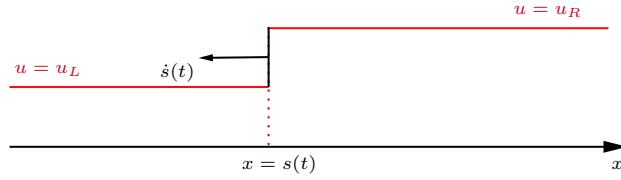
- Nel caso dell'**onda d'urto**  $\dot{s}$  può essere sia positivo che negativo, assumiamo  $\dot{s}$  negativo. Il segno di  $\dot{s}$  definisce da che parte si muove la discontinuità.



Fissato  $t$ , posso avere  $u_R < u_L$  e  $q$  convessa ( $q'' > 0$ )



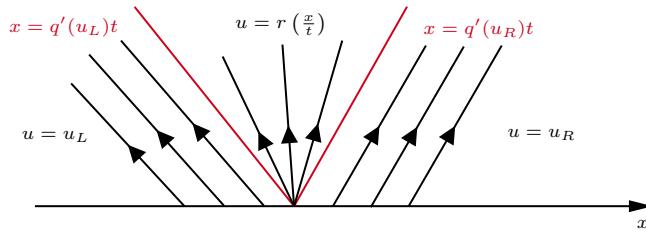
oppure  $u_R > u_L$  e  $q$  concava ( $q'' < 0$ )



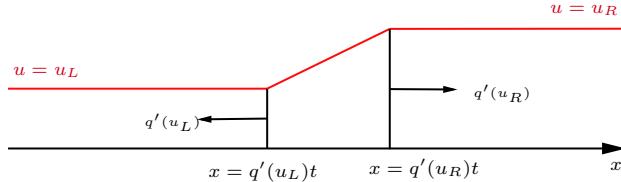
Se  $\dot{s}$  è positiva la trattazione è analoga ma la linea di discontinuità si muove verso destra con velocità  $\dot{s}(t)$ .

- Nel caso dell'**onda di rarefazione**  $q'(u_L)$ ,  $q'(u_R)$  possono essere positivi o negativi, concordi o discordi.

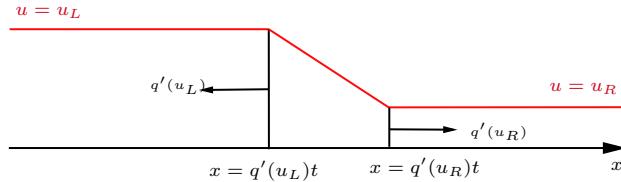
Supponiamoli **discordi** e assumiamo  $q'(u_L) < 0$ ,  $q'(u_R) > 0$



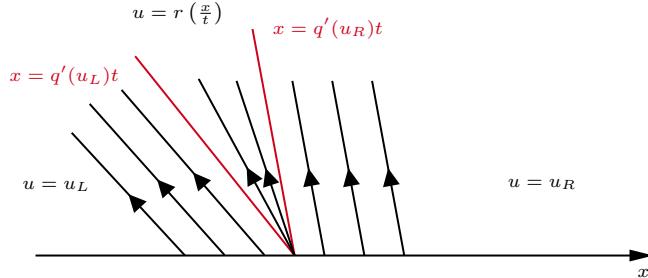
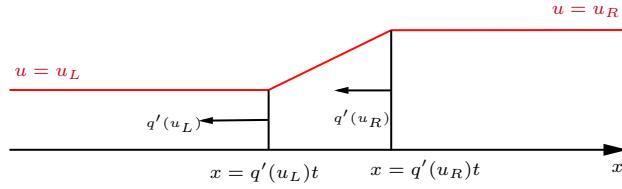
Fissato  $t$ , posso avere  $u_R > u_L$  e  $q$  convessa



oppure  $u_R < u_L$  e  $q$  concava

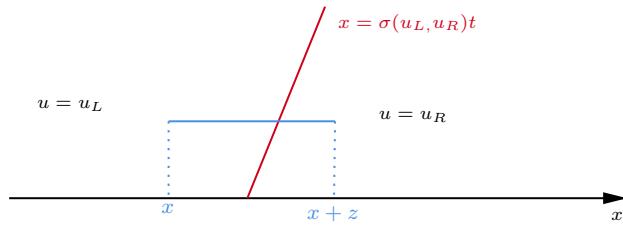


Se invece  $q'(u_L)$  e  $q'(u_R)$  fossero **concordi** avremmo che le linee vanno nella stessa direzione, ma ciò non causerebbe problemi perché una sarebbe più veloce dell'altra e si creerebbe comunque un ventaglio.



**DIMOSTRAZIONE.** Nel caso \$q'' \geq h > 0\$

- Poiché abbiamo supposto \$q\$ convessa siamo nel caso \$u\_R < u\_L\$



\$u\$ è ovviamente soluzione integrale. La condizione di entropia è soddisfatta banalmente per due punti nella zona di sinistra o di destra. Per due punti a cavallo si verifica:

$$u(x+z, t) - u(x, t) = u_R - u_L < 0 < \frac{E}{t}z$$

- Poiché abbiamo supposto \$q\$ convessa siamo nel caso \$u\_R > u\_L\$. La condizione è soddisfatta banalmente nelle zone laterali. Verifichiamo la condizione di entropia all'interno del settore centrale dove \$u(x, t) = r\left(\frac{x}{t}\right)

Innanzitutto verifichiamo che soddisfa la PDE, ricordando che \$r = (q')^{-1}\$

$$u_t + q(u)_x = -r'\left(\frac{x}{t}\right)\frac{x}{t^2} + q'(r)r'\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t} = r'\left(\frac{x}{t}\right)\underbrace{\frac{1}{t}\left[q'(r) - \frac{x}{t}\right]}_{=0} \equiv 0$$

Quindi \$u\$ è soluzione integrale. Per la condizione di entropia

$$\begin{aligned} u(x+z, t) - u(x, t) &= r\left(\frac{x+z}{t}\right) - r\left(\frac{x}{t}\right) \\ &= r'\left(\frac{\xi_{z,t}}{t}\right)\frac{z}{t} \leq (\text{qualcosa}) \quad (\text{Teorema del valor medio}) \end{aligned}$$

dove \$\xi\_{z,t} \in \left(\frac{x}{t}, \frac{x}{t} + \frac{z}{t}\right)\$.

Per trovare un maggiorante, ricordando che  $r = (q')^{-1}$  e usando la regola per la derivata dell'inversa ( $r$  è l'inversa di  $q'$ , quindi  $r'$  è la derivata di un'inversa)

$$r'(s) = \frac{1}{q''(r)} \quad \text{con} \quad s = q'(r) \quad \Rightarrow \quad r'(s) \leq \frac{1}{h} \quad \text{essendo } q'' \geq h$$

Quindi

$$r' \left( \frac{\xi_{z,t}}{t} \right) \frac{z}{t} \leq \frac{1}{h} \frac{z}{t} = E \frac{z}{t}$$

e la condizione di entropia è soddisfatta con  $E = \frac{1}{h}$ .

■

# Capitolo 5

## Le onde

Equazioni delle onde

- $n = 1, u_{tt} - c^2 u_{xx} = f.$

Onde trasversali di una corda di piccola ampiezza.

- $n = 2, 3, u_{tt} - c^2 \Delta u = f.$

Onde d'acqua *lineari*, acustiche, elettromagnetiche nel vuoto.

### 5.1 Equazione della corda vibrante in $n = 1$

Ricaviamo ora l'equazione della corda vibrante unidimensionale (tipicamente corda di violino o chitarra). Lavoriamo sotto le seguenti ipotesi:

1. Vibrazioni della corda **piccole** (relativamente alla lunghezza): i cambiamenti del profilo della corda rispetto all'orizzontale sono *piccoli*.
2. Lo spostamento di ogni punto della corda è **verticale**.
3. Lo spostamento verticale  $u$  di un punto dipende solo dalla sua posizione sulla corda  $x$  e dal tempo  $t$ . Quindi

$$u = u(x, t)$$

e dalla prima ipotesi deduciamo  $|u_x(x, t)| \ll 1$ .

4. La corda è **perfettamente flessibile**: non offre resistenza alla flessione. L'unica forza agente sulla corda è la tensione  $T$ , diretta tangenzialmente, di intensità  $\tau (= |T|)$ .
5. Gli attriti sono **trascurabili**.

#### Leggi generali

- Conservazione della massa.
- Bilancio del momento lineare (ovvero 2a legge della dinamica).

Sia  $\rho = \rho(x, t)$  la densità lineare di massa al tempo  $t$  e  $\rho_0 = \rho_0(x)$  la densità a riposo. Prendiamo in esame un tratto di corda corrispondente ad un intervallo arbitrario  $[x, x + \Delta x]$  e indichiamo con  $\Delta s$  l'elemento di lunghezza corrispondente, al tempo  $t$ . La legge di conservazione della massa impone

$$\rho_0(x)\Delta x = \rho(x, t)\Delta s, t \geq 0$$

L'equazione del bilancio del momento si ricava uguagliando la forza totale agente sul generico tratto considerato al tasso di variazione del momento lineare. Poiché il moto è verticale, le componenti orizzontali delle forze devono bilanciarsi:  $R_x = 0$ . Indicando con  $\tau(x, t)$  la tensione (scalare, ma non adimensionale) in  $x$

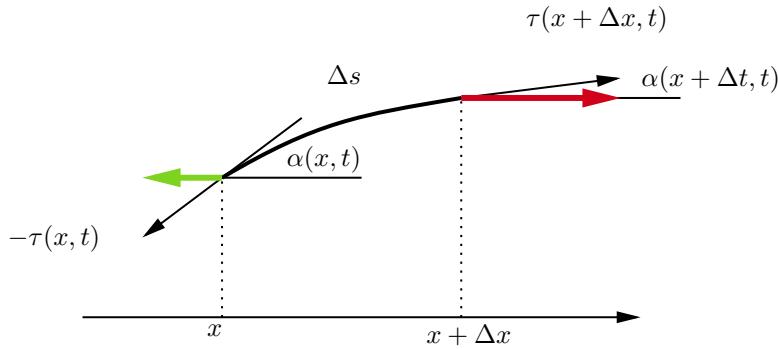


Figura 5.1: Tensione agli estremi di un piccolo arco di corda.

$$0 = R_x = \tau(x + \Delta x, t) \cos \alpha(x + \Delta x, t) - \tau(x, t) \cos \alpha(x, t)$$

Dividendo per  $\Delta x$  e facendo il limite per  $\Delta x \rightarrow 0$  diventa una derivata

$$\frac{\partial}{\partial x} [\tau(x, t) \cos \alpha(x, t)] = 0$$

Questa è la tensione orizzontale, e risulta costante per  $x$  fissato

$$\tau_{oriz}(x, t) = \tau(x, t) \cos \alpha(x, t) = \tau_0(t)$$

dove  $\tau_0(t) \geq 0$  perché un'intensità.

Calcoliamo le componenti verticali delle forze agenti sul tratto considerato

$$\tau_{vert}(x, t) = \tau(x, t) \sin \alpha(x, t) = \underbrace{\tau(x, t) \cos \alpha(x, t)}_{\tau_0(t)} \underbrace{\tan \alpha(x, t)}_{u_x(x, t)} = \tau_0(t) u_x(x, t)$$

Dunque la risultante verticale è

$$\begin{aligned} \text{tensioni} &= \tau_{vert}(x + \Delta x, t) - \tau_{vert}(x, t) \\ &= \tau_0(t) [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] \end{aligned}$$

Consideriamo ora le forze esterne di **volume verticali** come il peso o carichi esterni. Sia  $f = f(x, t)$  l'intensità per unità di massa della risultante di tali forze. Per la legge di conservazione della massa, la forza agente sul tratto di corda esaminato è

$$\begin{aligned} \text{forze di volume} &= \rho(x, t) f(x, t) \Delta s \\ &= \rho_0(x) f(x, t) \Delta x \end{aligned}$$

Applichiamo ora la seconda legge di Newton: le forze agenti sono

$$\text{forze risultanti} = \text{tensioni} + \text{forze di volume}$$

mentre

$$\begin{aligned} \text{massa} \cdot \text{accelerazione} &= \rho(x) u_{tt} \Delta s \\ &= \rho_0(x) u_{tt} \Delta x \end{aligned}$$

osservando che  $u_{tt}$  è l'accelerazione scalare.

Quindi

$$\text{massa} \cdot \text{accelerazione} = \text{forze risultanti}$$

da cui si ricava

$$\rho_0(x) u_{tt} \Delta x = \tau_0(t) [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + \rho_0(x) f(x, t) \Delta x$$

dividendo per  $\Delta x$  e passando al limite per  $\Delta x \rightarrow 0$  ottengo

$$\rho_0(x)u_{tt} = \tau_0(t)u_{xx} + \rho_0(x)f(x, t)$$

Da cui, definita

$$c^2 = \frac{\tau_0(t)}{\rho_0(x)}$$

arrivo all'equazione della corda vibrante

$$\boxed{u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t)} \quad (5.1)$$

**NB.** Le dimensioni di  $c^2$  e  $c$  sono

$$[c]^2 = \frac{[F]}{[M]/[L]} = \frac{[\mathcal{M}] \frac{[L]}{[T]^2}}{[\mathcal{M}]/[L]} = \frac{[L]^2}{[T]^2} \Rightarrow [c] = \frac{[L]}{[T]}$$

quelle di una velocità

**NB.** Se la corda è omogenea

$$\rho_0(x) = \rho_0 \text{ costante}$$

Se la corda è perfettamente elastica

$$\tau_0(t) = \tau_0 \text{ costante}$$

Allora sotto entrambe le ipotesi

$$c^2 = \frac{\tau_0(t)}{\rho_0(x)} \text{ costante}$$

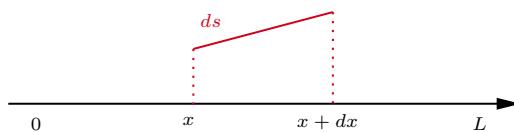
D'ora in poi lavoreremo sempre sotto queste ipotesi.

## 5.2 Energia

Consideriamo una corda a riposo (al tempo  $t = 0$ ) in posizione orizzontale sull'asse  $x$ , occupante un segmento  $[0, L]$ . Essendo  $u_t(x, t)$  la velocità di vibrazione verticale della particella di corda in  $x$ , l'**energia cinetica totale** durante la vibrazione è

$$E_{\text{cin}}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_0 u_t^2 dx \quad (5.2)$$

La corda immagazzina anche **energia potenziale** dovuta al lavoro delle forze elastiche. In un elemento di corda con lunghezza a riposo  $dx$ , l'allungamento dovuto alle forze elastiche è pari a



$$\text{allungamento} = ds - dx = \sqrt{1 + u_x^2} dx - dx = \underbrace{\left( \sqrt{1 + u_x^2} - 1 \right) dx}_{|u_x| \ll 1} \cong {}^1 \frac{1}{2} u_x^2 dx$$

Quindi il lavoro compiuto da tali forze elastiche<sup>2</sup> è

$$dW = \text{forza} \cdot \text{allungamento} = \frac{1}{2} \tau_0 u_x^2 dx$$

<sup>1</sup>Per  $\varepsilon \ll 1$ ,  $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \varepsilon/2$

<sup>2</sup>Stiamo trattando piccole vibrazioni,  $\tau$  non dipende da  $x$ .

Sommendo i contributi di tutti gli elementi ottengo l'energia potenziale totale

$$E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \tau_0 u_x^2 dx \quad (5.3)$$

L'**energia meccanica totale** della corda risulta essere

$$E(t) = E_{\text{cin}}(t) + E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho_0 u_t^2 + \tau_0 u_x^2] dx \quad (5.4)$$

*Lezione Salsa 16 (01/04/2021)*

Abbiamo calcolato l'energia totale al tempo  $t$  immagazzinata nella corda

$$E_{\text{tot}}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho_0 u_t^2 + \tau_0 u_x^2] dx$$

La variazione dell'energia totale risulta

$$\dot{E}_{\text{tot}}(t) = \int_0^L [\rho_0 u_t u_{tt} + \tau_0 u_x u_{xt}] dx = \int_0^L \rho_0 u_t u_{tt} dx + \int_0^L \tau_0 u_x u_{xt} dx \quad (5.5)$$

integriamo per parti il secondo integrale

$$\int_0^L u_x u_{xt} dx = [u_x u_t]_0^L - \int_0^L u_{xx} u_t dx$$

da cui (5.5) diventa

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\text{tot}}(t) &= \int_0^L u_t \underbrace{[\rho_0 u_{tt} - \tau_0 u_{xx}]}_{\rho_0 [u_{tt} - c^2 u_{xx}] = \rho_0 f} dx + \tau_0 [u_x(L, t) u_t(L, t) - u_x(0, t) u_t(0, t)] \\ &= \int_0^L u_t \rho_0 f dx + \tau_0 [u_x(L, t) u_t(L, t) - u_x(0, t) u_t(0, t)] \end{aligned}$$

Se per esempio  $f = 0$  e la corda è fissata agli estremi, cioè se

$$\forall t > 0, \quad u(L, t) = 0 = u(0, t) \Rightarrow u_t(L, t) = 0 = u_t(0, t)$$

allora

$$\dot{E}_{\text{tot}}(t) = 0 \text{ conservazione dell'energia meccanica}$$

Presentiamo i problemi associati all'equazione della corda vibrante<sup>3</sup>

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f & x \in (0, L), \quad t > 0 \\ u(x, 0) = g(x), & x \in [0, L] \\ u_t(x, 0) = h(x) & \\ + \text{condizioni al bordo} \end{cases}$$

Le condizioni al bordo possono essere

- **Dirichlet**

Imponiamo le posizioni degli estremi,  $t > 0$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= a(t), \\ u(L, t) &= b(t), \end{aligned}$$

- **Neumann**

Imponiamo una tensione scalare verticale agli estremi,  $t > 0$

$$\begin{aligned} \tau_0 u_x(0, t) &= a(t), \\ \tau_0 u_x(L, t) &= b(t), \end{aligned}$$

nel caso omogeneo  $a = b = 0$ , gli estremi della corda sono liberi di muoversi lungo una guida verticale.

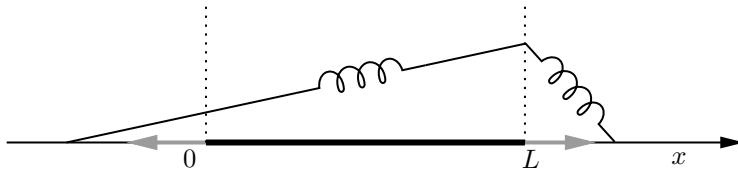
---

<sup>3</sup>ci vuole anche  $u_t$  iniziale, cioè la velocità, un ipotetico impulso per esempio.

• **Robin**

Si assegna un tipo di attacco elastico agli estremi, quello lineare (cioè la molla segue perfettamente la legge di Hooke), con  $k > 0$  costante elastica,  $t > 0$

$$\begin{aligned}-\tau_0 u_x(0, t) &= -ku(0, t), \\ \tau_0 u_x(L, t) &= -ku(L, t),\end{aligned}$$



Osserviamo che se  $k = 0$  ritroviamo le condizioni di Neumann omogenee, ciò ha senso dato che è come avere una molla che pone una resistenza nulla, ovvero la corda è libera di scorrere in verticale. Viceversa se  $k \gg \{u, u_x\}$  allora  $u$  per compensare deve essere molto piccolo, è come avere una molla rigidissima che sostanzialmente impone di fissare gli estremi, come nella condizione di Dirichlet.<sup>4</sup>

### 5.3 Problema di Cauchy globale ( $n = 1$ )

Si dice problema di Cauchy globale

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = h(x) & \end{cases}$$

Risolviamo il Problema di Cauchy *omogeneo* ( $f = 0$ ) per arrivare alla **Formula di d'Alembert**.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = h(x) & \end{cases}$$

**NB.** Come visto in Sezione 4.2, la soluzione di un'equazione del tipo

$$u_t \pm cu_x = f(x, t) \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

è data da

$$u(x, t) = \varphi(x \mp ct) + \int_0^t f(x \mp c(t-s), s) ds \quad (5.6)$$

Fattorizziamo l'equazione della corda e definiamo una funzione  $v$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = (\partial_t - c\partial_x) \underbrace{(\partial_t + c\partial_x)}_v u = 0$$

allora

$$v_t - cv_x = 0$$

ma noi la sappiamo risolvere grazie a (5.6)

$$v(x, t) = \varphi(x + ct)$$

a questo punto dobbiamo semplicemente risolvere

$$\underbrace{u_t + cu_x}_{(\partial_t + c\partial_x)u} = \underbrace{\varphi(x + ct)}_{v(x, t)}$$

<sup>4</sup>Si veda <https://youtu.be/AEBdyFG3bz4> per ulteriori chiarificazioni.

sempre grazie a (5.6)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \psi(x - ct) + \int_0^t \varphi(x - c(t-s) + cs) ds \\ &= \psi(x - ct) + \int_0^t \varphi(x - ct + 2cs) ds \end{aligned}$$

per sostituzione

$$x - ct + 2cs = y \Rightarrow \begin{cases} ds = \frac{1}{2c} dy \\ s = 0 : \quad y = x - ct \\ s = t : \quad y = x + ct \end{cases}$$

allora

$$u(x, t) = \psi(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \varphi(y) dy \quad (5.7)$$

Il problema è ora determinare  $\varphi, \psi$  in modo che siano verificate le condizioni iniziali

$$u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x)$$

da cui

$$u(x, 0) = \psi(x) = g(x) \Rightarrow \boxed{\psi(x) = g(x)}$$

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= -cg'(x - ct) + \frac{1}{2c} [\varphi(x + ct)c - \varphi(x - ct)(-c)] \\ &= -cg'(x - ct) + \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] \end{aligned}$$

$$u_t(x, 0) = -cg'(x) + \varphi(x) = h(x) \Rightarrow \boxed{\varphi(x) = h(x) + cg'(x)}$$

Sostituendo nella (5.7)

$$u(x, t) = g(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} [h(y) + cg'(y)] dy$$

Ma separando i due termini dell'integrale, per il Teorema Fondamentale del Calcolo

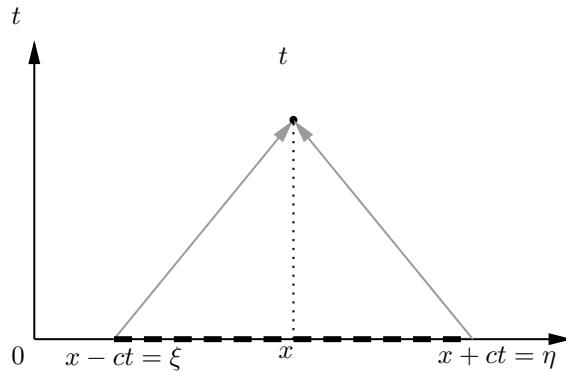
$$\begin{aligned} u(x, t) &= g(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} g'(y) dy \\ &= g(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy + \frac{1}{2} [g(x + ct) - g(x - ct)] \end{aligned}$$

Ottengo la **formula di d'Alembert**

$$\boxed{u(x, t) = \frac{1}{2} [g(x - ct) + g(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy} \quad (5.8)$$

$u, g$  sono lunghezze,  $h$  è una velocità, l'integrale è spazio<sup>2</sup>/tempo, ma è diviso per  $c$  che è spazio/tempo, quindi torna uno spazio.

Il valore di  $u$  nel punto  $(x, t)$  dipende dalla media dei valori di  $g$  in  $x \pm ct$  + la media integrale dei valori di  $h$  sull'intervallo  $[x \pm ct]$ , che si chiama **dominio di dipendenza**.



La formula di d'Alembert si può scrivere come sovrapposizione di onde progressive

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

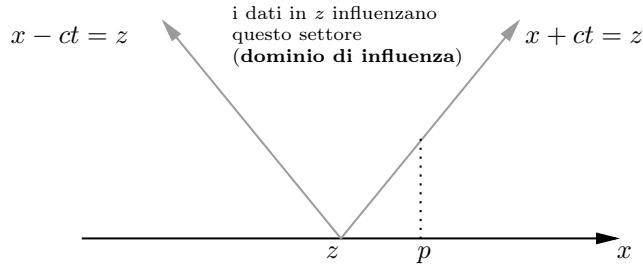
- $F$  che viaggia verso *destra* con velocità  $c$
- $G$  che viaggia verso *sinistra* con velocità  $c$

$F, G$  sono costanti lungo le rette del tipo

$$\begin{aligned} F &\Rightarrow \gamma^+ : x - ct = \xi \\ G &\Rightarrow \gamma^- : x + ct = \eta \end{aligned}$$

sono dette **rette caratteristiche**. Il dato iniziale viene trasportato lungo queste due rette per contribuire al valore in  $(x, t)$ .

Da un altro punto di vista, se facciamo partire le due caratteristiche da  $z$



Una perturbazione inizialmente localizzata in  $z$  non viene avvertita nel punto  $p$  fino al tempo

$$\bar{t} = \frac{|p - z|}{c}$$

e poi viene continuata ad essere avvertita anche per tempi successivi perché rimane nel settore.

Nel caso invece in cui il dato è trasportato esclusivamente lungo la caratteristica il segnale è istantaneo, tale caso si ha quando  $h = 0$ .

Questo evidenzia la caratteristica intermedia del caso in dimensione  $n = 1$ , mentre vedremo che la caratteristica di ammettere segnali istantanei dipende dalla dimensione  $n$  dello spazio, se è pari o dispari.

*Lezione Salsa 17 (08/04/2021)*

Riprendiamo il **problema di Cauchy globale** omogeneo.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = h(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{PCG}_{\text{onde},1D})$$

la soluzione è data dalla **formula di d'Alembert**

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[g(x + ct) + g(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy \quad (5.9)$$

Esaminiamo alcune conseguenze di questa formula:

1. Il (PCG<sub>onde,1D</sub>) ha un'**unica** soluzione *regolare* data da (5.9). Notiamo che deve essere:

$$g \in C^2(\mathbb{R}), \quad h \in C^1(\mathbb{R}),$$

affinché  $u$  sia **soluzione classica**. Non c'è regolarizzazione all'avanzare del tempo.

2. Posso ricavare una stima di stabilità in norma  $L^\infty$  con la formula di d'Alembert. Consideriamo

$$g_1, g_2, \quad h_1, h_2 \rightarrow u_1, u_2$$

allora

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + T \|h_1 - h_2\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]$ .

3. La  $u$  si può esprimere come somma di due funzioni

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

per esempio

$$\begin{aligned} F(x + ct) &= \frac{1}{2}g(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} h(y) dy \\ G(x - ct) &= \frac{1}{2}g(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^0 h(y) dy \end{aligned}$$

quindi  $u$  è sovrapposizione di due onde progressive.

4. Nonostante abbiamo assunto  $g \in C^2, h \in C^1$  la Formula di d'Alembert (5.9) ha senso anche per  $g$  continua e  $h$  limitata e soddisfa l'equazione in un senso *debole*

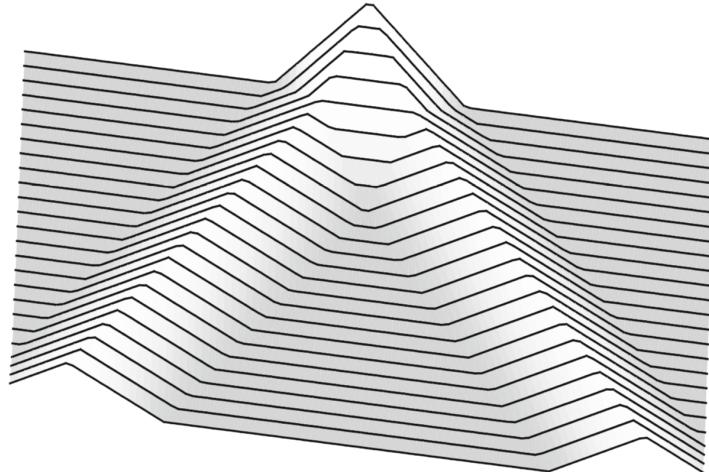
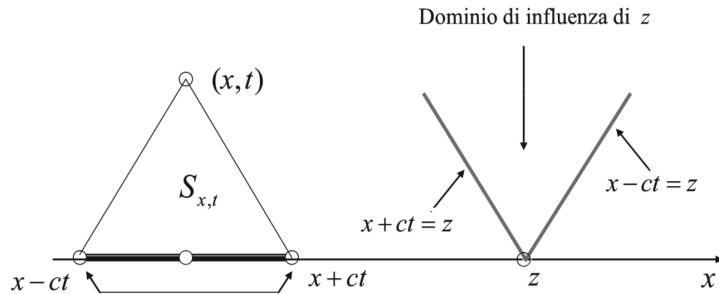


Figura 5.2: Corda pizzicata in un punto

5. Domini di **dipendenza** e di **influenza**:



Dominio di dipendenza di  $(x, t)$

Figura 5.3: Domini di dipendenza e di influenza

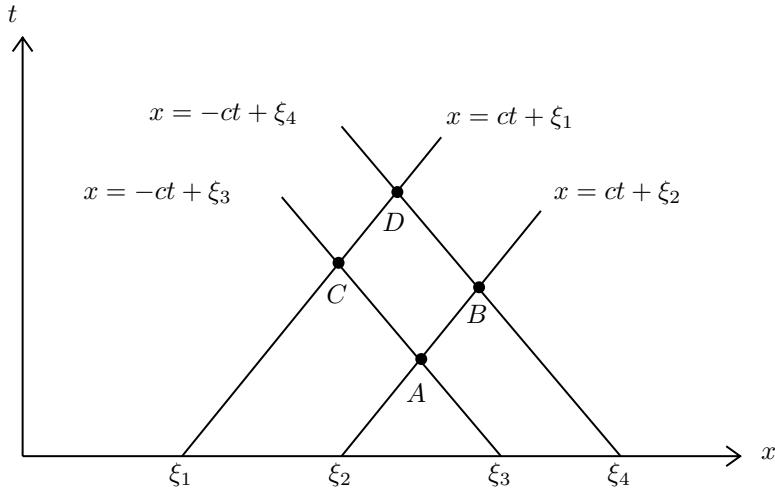
$g$  influisce sul valore  $u(x, t)$  solo dai punti  $(x - ct, 0), (x + ct, 0)$ .

I valori di  $h$  che influiscono su  $u(x, t)$  sono quelli dell'intero intervallo  $[x - ct, x + ct]$ , detto **dominio di dipendenza** del punto  $(x, t)$ .

#### 6. Quadrilatero caratteristico.

$$\begin{aligned} x - ct &= \xi \\ x + ct &= \mu \end{aligned}$$

sono le rette caratteristiche *che trasportano i dati iniziali*



ricordando che

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

deduciamo che sulle rette  $x = -ct + \xi$ ,  $G$  è costante, sulle rette  $x = ct + \xi$ ,  $F$  è costante. Ma allora:

$$F(A) = F(B)$$

$$G(A) = G(C)$$

$$F(D) = F(C)$$

$$G(D) = G(B)$$

sommo membro a membro e ottengo

$$\underbrace{F(A) + G(A)}_{u(A)} + \underbrace{F(D) + G(D)}_{u(D)} = \underbrace{F(B) + G(B)}_{u(B)} + \underbrace{F(C) + G(C)}_{u(C)}$$

cioè:

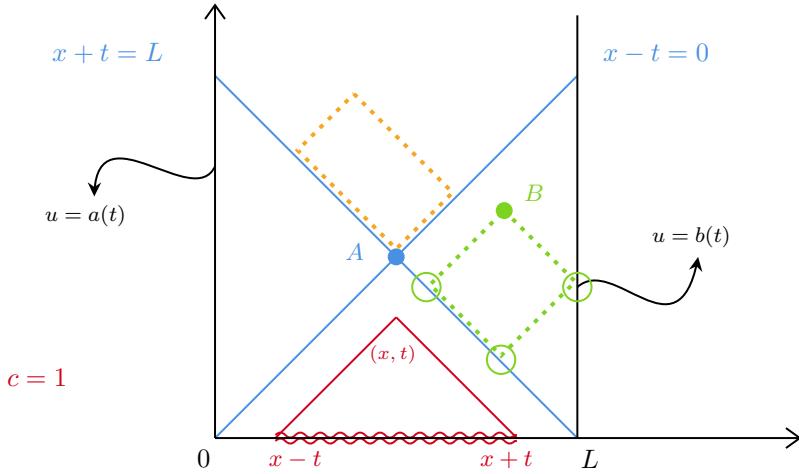
$$u(A) + u(D) - u(B) - u(C) = 0. \quad (5.10)$$

Se è verificata per ogni coppia di caratteristiche questa esprime l'equazione delle onde **in forma debole**.

Usiamo la (5.10) per risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & 0 < x < L, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & 0 \leq x \leq L \\ u_t(x, 0) = h(x) & 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) = a(t) & t > 0 \\ u(L, t) = b(t) & t > 0 \end{cases}$$

con un'argomentazione puramente *visuale*:



nel triangolo  $(0, L, A)$   $u$  è determinata dalla Formula di d'Alembert. Nel triangolo di destra costruisco il quadrilatero caratteristico verde: conosco il valore di  $u$  nei punti cerchiati in verde e (5.10) mi permette di trovare anche il valore di  $u(B)$ . Posso fare lo stesso ragionamento per ogni punto del triangolo di destra e di sinistra. Per il triangolo sopra il procedimento è analogo, costruendo un quadrilatero come quello arancione.

### 5.3.1 Metodo di Duhamel per il problema non omogeneo con IC omogenee.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (5.11)$$

**OSSERVAZIONE.** Ripassiamo il metodo di variazione delle costanti per il problema:

$$\begin{cases} y'(t) + ay(t) = f(t) & t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

La formula risolutiva è data da:

$$y(t) = \int_0^t \underbrace{e^{-a(t-s)} f(s)}_{w(t;s)} ds,$$

esaminiamo l'integrandina, trattando  $s$  come parametro ( $0 \leq s \leq t$ ):

$$w(t; s) = e^{-a(t-s)} f(s). \quad (5.12)$$

$w$  soddisfa il problema di Cauchy *omogeneo* con dato iniziale il secondo membro dell'equazione (5.12) calcolato in  $t = s$  (e non  $t = 0$ ):

$$\begin{cases} w_t + aw = 0 & t > s \\ w(s, s) = f(s) & t = s \end{cases}$$

allora possiamo risolvere prima il problema in  $w$  e poi calcolare la soluzione

$$y(t) = \int_0^t w(t; s) ds.$$

**TEOREMA 5.1 — Metodo di Duhamel.** Se  $w(x, t; s)$ , con  $0 \leq s \leq t$ , è soluzione di

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > s \\ w(x, s; s) = 0 & x \in \mathbb{R}, t = s \\ w_t(x, s; s) = f(x, s) & x \in \mathbb{R}, t = s \end{cases}$$

allora

$$u(x, t) = \int_0^t w(x, t; s) ds \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

è soluzione di

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Calcoliamo i vari termini

$$u_t(x, t) = \underbrace{w(x, t; t)}_{=0} + \int_0^t w_t(x, t; s) ds$$

$$u_{tt}(x, t) = \underbrace{w_t(x, t; t)}_{=f(x, t)} + \int_0^t w_{tt}(x, t; s) ds$$

$$c^2 u_{xx}(x, t) = \int_0^t \underbrace{c^2 w_{xx}(x, t; s)}_{w_{tt}(x, t; s)} ds$$

Quindi l'equazione non omogenea è rispettata

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t) + \int_0^t w_{tt}(x, t; s) ds - \int_0^t w_{tt}(x, t; s) ds = f(x, t)$$

e anche le condizioni al bordo

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \int_0^0 w(x, t; s) ds = 0 \\ u_t(x, 0) &= \int_0^0 w_t(x, t; s) ds = 0 \end{aligned}$$

■

Ottimo, ma noi tale problema lo sappiamo risolvere lo sappiamo risolvere quando  $s = 0$ . Tuttavia l'equazione delle onde è **invariante per traslazioni temporali**, quindi usiamo la formula di d'Alembert (partendo da  $s$  e non da 0):

$$w(x, t; s) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy$$

allora grazie a Duhamel

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t w(x, t; s) ds \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy ds \\ &= \frac{1}{2c} \int_{S_{x,t}} f(y, s) dy ds \end{aligned}$$

dove ricordiamo che  $S_{x,t}$  è il settore.

*Lezione Salsa 18 (12/04/2021)*

## 5.4 Equazione delle onde in più dimensioni, $n \geq 2$

Affrontiamo l'equazione delle onde in più dimensioni. Studieremo l'evoluzione di  $u = u(\mathbf{x}, t)$ . L'equazione delle onde prende la forma:

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = f, \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0, \quad (5.13)$$

$c$  ha le dimensioni di una velocità anche in questo caso, e sarà la velocità di propagazione del segnale. Vi sono **particolari soluzioni**, specialmente nei casi  $n = 2, 3$ . Analizziamo il caso delle **onde sferiche** in  $n = 3$  e studiamo il **caso omogeneo**. La soluzione prende la forma, dipendente solo dal raggio:

$$u(\mathbf{x}, t) = w(r, t), \quad r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Lavoriamo in coordinate sferiche:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \sin \psi \\ r \sin \vartheta \sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix}.$$

**NB.** Consideriamo le coordinate sferiche in  $n$  dimensioni generiche e una funzione:

$$w = w(r, \boldsymbol{\vartheta}), \quad \boldsymbol{\vartheta} \in \partial B_1 = \mathbb{S}^{n-1},$$

tralasciamo la dipendenza dal tempo.  $\boldsymbol{\vartheta}$  è un vettore di angoli e  $\mathbb{S}^{n-1}$  indica la sfera  $(n-1)$ -dimensionale di raggio unitario. Il laplaciano in coordinate sferiche generiche risulta:

$$\Delta w = w_{rr} + \frac{n-1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} w, \quad (5.14)$$

il termine  $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$  è detto *operatore di Laplace-Beltrami*, ed è un mostro. Nel caso particolare di  $n = 3$  tale operatore prende la forma:

$$\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} = \Delta_{\mathbb{S}^2} = \frac{1}{(\sin \psi)^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\cos \psi}{\sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi}. \quad (5.15)$$

La cosa positiva è che stiamo studiando un tipo particolare di onde, quelle sferiche, dove  $w$  dipende solo dal raggio e dal tempo, non dagli angoli, per cui tutti quei termini si annullano.

L'equazione omogenea prende quindi la forma:

$$w_{tt} - c^2 \left( w_{rr} + \frac{2}{r} w_r + 0 \right) = 0. \quad (5.16)$$

Quello che stiamo per fare funziona solo in dimensione 3 perché nella parentesi c'è il 2, che viene da  $n-1 = 3-1 = 2$ . La magia è che in questa dimensione l'equazione si può riscrivere come funzione di  $(rw)$ . Moltiplichiamo per  $r$ :

$$rw_{tt} - c^2(rw_{rr} + 2w_r) = 0,$$

se chiamiamo  $v(r, t) = rw(r, t)$ , allora:

$$\begin{aligned} v_{tt} &= rw_{tt} \\ v_r &= rw_r + w \\ v_{rr} &= rw_{rr} + w_r + w_r = rw_{rr} + 2w_r \end{aligned}$$

possiamo quindi riscrivere la (5.16) come:

$$(rw)_{tt} - c^2(rw)_{rr} = 0, \quad (5.17)$$

cioè:

$$v_{tt} - c^2 v_{rr} = 0. \quad (5.18)$$

È come studiare l'equazione in 1-dimensione, abbiamo quindi la formula di d'Alembert:

$$v(r, t) = F(r + ct) + G(r - ct), \quad (5.19)$$

e infine tornando  $w$ :

$$w(r, t) = \underbrace{\frac{F(r + ct)}{r}}_{w_i(r, t)} + \underbrace{\frac{G(r - ct)}{r}}_{w_o(r, t)} = w_i(r, t) + w_o(r, t). \quad (5.20)$$

Qui  $r$  deve essere  $\geq 0$ , ed è una limitazione forte.

I due termini prendono i nomi di:

- *outgoing wave*,  $w_o$  è costante se  $|\mathbf{x}| - ct$  è costante, sono delle superfici sferiche con raggio che si allarga.
- *incoming wave*,  $w_i$  è costante se  $|\mathbf{x}| + ct$  è costante. Anche qui sono sfere ma succede qualcosa di poco rassicurante, il raggio tende a 0 e diventa addirittura negativo, perde di significato. È indice di sorgenti all'infinito e spesso viene scartata ("condizione di radiazione").

#### 5.4.1 Problemi ben posti: unicità.

Sia  $Q_T = \Omega \times (0, T)$  il *cilindro spazio-temporale*, dove  $\Omega$  è un dominio *limitato* di  $\mathbb{R}^n$ . I problemi hanno la forma:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f & \text{in } Q_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = g & \text{in } \bar{\Omega} \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = h & \text{in } \bar{\Omega} \\ + \text{condizioni al bordo} & \text{su } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (5.21)$$

Le condizioni al bordo possono essere Dirichlet, Neumann, Robin o miste, come già visto.

Mostriamo ora un semplice risultato, che useremo subito dopo nel teorema per l'unicità. Usiamo il 'metodo dell'energia', definendo appunto l'energia tramite la formula:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2\} d\mathbf{x}, \quad (5.22)$$

Deriviamo rispetto al tempo e supponiamo di poter fare tutto in modo lecito, formalizzeremo dopo nell'enunciato del teorema:

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= \int_{\Omega} \{u_t u_{tt} + c^2 \nabla u \cdot \nabla u_t\} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} u_t u_{tt} d\mathbf{x} + c^2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_t d\mathbf{x} = (*), \end{aligned}$$

il secondo termine si può integrare per parti:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_t d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u_t u_{\nu} d\sigma - \int_{\Omega} u_t \underbrace{\text{div}(\text{grad } u)}_{\Delta u} d\mathbf{x},$$

sostituendo:

$$(*) = c^2 \int_{\partial\Omega} u_t u_{\nu} d\sigma + \int_{\Omega} u_t [u_{tt} - c^2 \Delta u] d\mathbf{x},$$

otteniamo infine:

$$\dot{E}(t) = c^2 \int_{\partial\Omega} u_t u_{\nu} d\sigma + \int_{\Omega} u_t f d\mathbf{x}. \quad (5.23)$$

**TEOREMA 5.2.** Esiste al più una soluzione di (5.21) di classe  $C^2(Q_T) \cap C^1(\bar{Q}_T)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $u_1, u_2$  due soluzioni di (5.21) con gli stessi dati iniziali e al bordo, allora  $v = u_1 - u_2$  è soluzione dell'*omogeneo*, cioè con dati nulli. Dimostriamo che  $v \equiv 0$ .

- Caso di condizioni di Neumann/Dirichlet/misti.

Neumann garantisce che  $v_\nu = 0$  su  $\partial\Omega \times (0, T)$ , Dirichlet dice che  $v = 0$  su  $\partial\Omega \times (0, T)$ , cioè anche che  $v_t = 0$  sul bordo nei punti in cui vale una condizione di Dirichlet. Essendo omogeneo, la  $f$  vale 0, pertanto in questo framework si annullano sempre tutti i termini della (5.23):

$$\dot{E}(t) = 0,$$

quindi è costante, in particolare è sempre uguale al suo valore iniziale:

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{v_t^2(\mathbf{x}, 0) + c^2 |\nabla v(\mathbf{x}, 0)|^2\} d\mathbf{x}.$$

Siccome siamo con **condizioni iniziali nulle**:

$$\begin{cases} v(\mathbf{x}, 0) = 0, & \text{in } \bar{\Omega} \\ v_t(\mathbf{x}, 0) = 0, & \text{in } \bar{\Omega} \end{cases}$$

la prima ci permette anche di concludere inizialmente che il gradiente è il vettore nullo

$$\nabla v(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}.$$

Quindi l'energia iniziale è nulla  $E(0) = 0$  e pertanto, essendo costante:

$$E(t) = 0, \quad \forall t.$$

Notiamo anche che l'integrale è la somma di due contributi non negativi. Affinché  $E(t)$  sia sempre nulla, deve per forza essere che entrambi i due integrali sono nulli<sup>a</sup>:

$$\int_{\Omega} v_t^2 \equiv 0, \quad \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \equiv 0, \quad \forall t,$$

essendo valida per ogni  $\Omega$  e per ogni tempo, per forza  $v_t = 0 = \nabla v$ , cioè  $v$  è una quantità costante, e in particolare uguale alla condizione iniziale, che è nulla, come osservato. Quindi:

$$v = 0 \Rightarrow u_1 = u_2.$$

- Caso di condizioni di Robin.

Il problema ha la forma:

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 \Delta v = 0 \\ \partial_\nu v + \alpha v = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0, T), \quad \alpha \geq 0 \\ v(\mathbf{x}, 0) = 0 & \text{in } \bar{\Omega} \\ v_t(\mathbf{x}, 0) = 0 & \text{in } \bar{\Omega} \end{cases}$$

Sappiamo già che  $E(0) = 0$  e che  $E(t) \geq 0$ , vediamo cosa succede questa volta alla derivata temporale di  $E(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= c^2 \int_{\partial\Omega} v_t \partial_\nu v \, d\sigma + \int_{\Omega} v_t f \, d\mathbf{x} \\ &= c^2 \int_{\partial\Omega} v_t (-\alpha v) \, d\sigma && \text{(sostituendo la condizione)} \\ &= -c^2 \alpha \int_{\partial\Omega} v v_t \, d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{c^2\alpha}{2} \int_{\partial\Omega} \partial_t(v^2) d\sigma && \text{(riconoscendo una derivata)} \\
&= -\frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega} \frac{c^2\alpha}{2} v^2 d\sigma, && \text{(scambiando derivata e integrale)}
\end{aligned}$$

allora:

$$E(t) + \frac{c^2\alpha}{2} \int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma = \text{costante} = 0.$$

Ragionando come prima si conclude analogamente, ricordando  $\alpha \geq 0$ . ■

---

<sup>a</sup>Non può essere altrimenti: se uno desse contributo positivo, l'altro dovrebbe dare contributo negativo per compensare, ma danno entrambi contributo positivo.

Passiamo al problema di Cauchy globale.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(\mathbf{x}, 0) = g & \text{in } \mathbb{R}^n \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = h & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (5.24)$$

Facciamo ora un'osservazione, ragionando in  $n = 2$ . Supponiamo di star considerando una perturbazione governata da un'equazione delle onde omogenea ( $f \equiv 0$ ). Questa perturbazione è avertita nel punto  $\mathbf{x}_0$  all'istante  $t_0$ .

Ammesso che  $c$  sia la velocità di propagazione, possiamo intuire che c'è un intero cono, detto **cono retrogrado**, che influenza il valore di  $u(\mathbf{x}_0, t_0)$

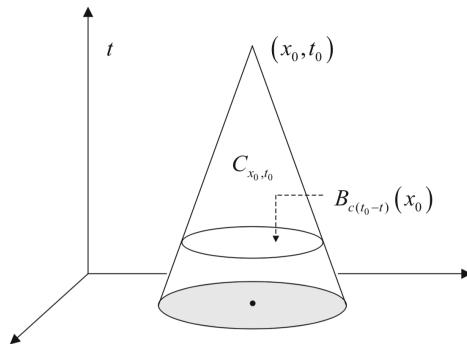


Figura 5.4: Cono retrogrado.

Il **dominio di influenza** all'istante  $t$  è  $B_{c(t_0-t)}(\mathbf{x}_0)$ , cioè gli  $\mathbf{x}$  tali che  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq c|t - t_0|$ , quelli che mi permettono di raggiungere quel punto. L'intero dominio di influenza è questo cono retrogrado:

$$C_{\mathbf{x}_0, t_0} = \{(\mathbf{x}, t) : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq c|t - t_0|, 0 \leq t \leq t_0\} \quad (5.25)$$

Non possiamo aspettarci di definire un'energia esattamente come prima, perché essendo in  $\Omega = \mathbb{R}^n$  gli integrali sarebbero illimitati. Vogliamo qualcosa di più limitato: integrando su questi cerchi e otteniamo una specie di energia. Si definisce

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{B_{c(t_0-t)}(\mathbf{x}_0)} [u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2] d\mathbf{x} \quad (5.26)$$

**TEOREMA 5.3.** Se  $u \in C^2$  è soluzione del problema di Cauchy globale (5.24) con  $f = 0$  (omogeneo),

allora per ogni  $t \in [0, t_0]$ :

$$\dot{e}(t) \leq 0. \quad (5.27)$$

Questo ci assicurerà l'unicità per il problema di Cauchy globale. Facciamo un richiamo di Analisi 2 che ci servirà nella dimostrazione del teorema.

**NB.** Dimostreremo che:

$$\frac{d}{dt} \int_{h(t)}^{f(t)} g(r, t) dr = g(f(t), t) \cdot f'(t) - g(h(t), t) \cdot h'(t) + \int_{h(t)}^{f(t)} g_t(r, t) dr.$$

Cominciamo applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale, sottintendendo  $f = f(t)$  e  $h = h(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{h(t)}^{f(t)} g(r, t) dr &= \frac{d}{dt} [G(f, t) - G(h, t)] \\ &= \frac{d}{dt} G(f, t) - \frac{d}{dt} G(h, t), \end{aligned}$$

applichiamo la regola della catena e ricordiamo che è una derivata totale, infatti stiamo derivando totalmente  $G$  rispetto al tempo, ma il tempo compare sia dentro  $f$  che nella  $t$  al secondo argomento banalmente. Quindi ci sarà la somma di due termini per ogni derivata:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G(f, t) - \frac{d}{dt} G(h, t) &= g(f, t) \cdot f' + \frac{\partial}{\partial t} G(f, t) - g(h, t) \cdot h' - \frac{\partial}{\partial t} G(h, t) \\ &= g(f, t) \cdot f' - g(h, t) \cdot h' - \frac{\partial}{\partial t} [G(f, t) - G(h, t)]. \end{aligned}$$

L'ultimo termine si può scrivere come:

$$\frac{\partial}{\partial t} [G(f, t) - G(h, t)] = \frac{\partial}{\partial t} \int_h^f g(r, t) dr = \int_h^f g_t(r, t) dr,$$

in quanto il passaggio di integrazione con il TFCI si riferisce al primo argomento di  $g$ , mentre possiamo portare la derivata dentro all'integrale perché essa si riferisce al secondo argomento di  $g$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Bisogna stare attenti perché in (5.26) la  $t$  sta sia nel dominio di integrazione che nell'ingrandita. Sfogliamo la cipolla<sup>a</sup>:

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_0^{c(t_0-t)} dr \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} [u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2] d\sigma.$$

Ricordando che:

$$\frac{d}{dt} \int_a^{f(t)} g(r, t) dr = g(f(t), t) \cdot f'(t) + \int_a^{f(t)} g_t(r, t) dr,$$

possiamo derivare  $e(t)$ , ricordando che nel secondo termine l'integrale si può ricomporre:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\partial B_{c(t_0-t)}(\mathbf{x}_0)} [\cancel{u_t^2} + c^2 |\nabla u|^2] d\sigma \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} c(t_0 - t)}_{-c} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{B_{c(t_0-t)}(\mathbf{x}_0)} [\cancel{2u_t u_{tt}} + \cancel{2c^2 \nabla u \cdot \nabla u_t}] d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Integriamo per parti il termine rosso:

$$\int_{B_{c(t_0-t)}(\mathbf{x}_0)} \nabla u \cdot \nabla u_t d\mathbf{x} = \int_{\partial B_{c(t_0-t)}(\mathbf{x}_0)} u_t \underbrace{u_\nu}_{\nabla u \cdot \nu} d\sigma - \int_{B_{c(t_0-t)}(\mathbf{x}_0)} u_t \underbrace{\Delta u}_{\operatorname{div}(\nabla u)} d\mathbf{x}$$

e usiamo l'equazione delle onde omogenea:

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \int_{B_{c(t_0-t)}(\mathbf{x}_0)} u_t \overbrace{(u_{tt} - c^2 \Delta u)}^{f=0} d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{c}{2} \int_{\partial B_{c(t_0-t)}(\mathbf{x}_0)} [u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2] d\sigma + c^2 \int_{\partial B_{c(t_0-t)}(\mathbf{x}_0)} u_t \partial_\nu u d\mathbf{x} \\ &= -\frac{c}{2} \int_{\partial B_{c(t_0-t)}(\mathbf{x}_0)} [u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 - 2c u_t \partial_\nu u] d\sigma \\ &\leq -\frac{c}{2} \int_{\partial B_{c(t_0-t)}(\mathbf{x}_0)} [u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 - 2c |u_t| |\nabla u|] d\sigma \\ &= -\frac{c}{2} \int_{\partial B_{c(t_0-t)}(\mathbf{x}_0)} [|u_t| - c |\nabla u|]^2 d\sigma \leq 0.\end{aligned}$$

Nell'effettuare la maggiorazione abbiamo usato che:

$$u_t \partial_\nu u \leq |u_t \partial_\nu u| = |u_t| |\partial_\nu u| = |u_t| |\nabla u \cdot \nu| \leq |u_t| |\nabla u| \underbrace{|\nu|}_1.$$

■

<sup>a</sup>Cit. Gianmaria Verzini.

### Corollario.

Se  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$  è soluzione di problema di Cauchy globale, allora:

1. se  $g \equiv h \equiv 0$  sulla palla iniziale  $B_{ct_0}(\mathbf{x}_0)$  e  $f \equiv 0$  su  $C_{\mathbf{x}_0, t_0}$  allora  $u \equiv 0$  su  $C_{\mathbf{x}_0, t_0}$ ;
2. l'eventuale soluzione è unica.

Lezione Salsa 19 (13/04/2021)

## 5.5 Problema di Cauchy globale ( $n = 2, n = 3$ )

Riprendiamo e risolviamo il Problema di Cauchy globale

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (\text{PCG}_{\text{onde}, 3D})$$

sappiamo già che la soluzione nella classe  $C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty))$  è unica, dobbiamo dimostrarne l'esistenza.

**OSSERVAZIONE.** In  $n = 1$  la formula di d'Alembert per lo stesso problema forniva la soluzione:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g(x + ct) + g(x - ct)] + \underbrace{\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy}_{w_h} \quad (5.28)$$

ma  $w_h$  soddisfa il  $(\text{PCG}_{\text{onde}, 1D})$  con profilo iniziale nullo e impulso iniziale  $h$

$$\begin{aligned}w_h(x, 0) &= 0, \\ \partial_t w_h(x, 0) &= h(x),\end{aligned}$$

calcolando la derivata per un tempo  $t$  generico

$$\partial_t w_h(x, t) = \frac{1}{2c} [h(x + ct)c + ch(x - ct)] = \frac{1}{2} [h(x + ct) + h(x - ct)]$$

ottengo un'espressione identica al primo termine di (5.28), con  $h$  al posto di  $g$ .

Allora posso riscrivere la formula di d'Alembert nel seguente modo

$$u(x, t) = \partial_t w_g(x, t) + w_h(x, t)$$

**TEOREMA 5.4 — Lemma A.** In dimensione  $n$  generica, sia  $w_h$  la soluzione di

$$\begin{cases} w_{tt}v - c^2\Delta w = 0 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ w(\mathbf{x}, 0) = 0 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ w_t(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

se  $w_g$  è sufficientemente regolare (qui ad esempio basta  $C^3$ ) allora

$$v = \partial_t w_g$$

è soluzione di:

$$\begin{cases} \partial_{tt}v - c^2\Delta v = 0 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ v(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ v_t(\mathbf{x}, 0) = 0 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Come corollario, essendo il problema **omogeneo** possiamo sommare le soluzioni. La soluzione del problema di Cauchy globale in  $n$  dimensioni è data da:

$$\begin{aligned} u &= v + w_h \\ &= \partial_t w_g + w_h. \end{aligned}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Deriviamo l'equazione delle onde rispetto a  $t$  ipotizzando  $w_g$  sufficientemente regolare da giustificare gli scambi di derivate:

$$0 = \partial_t \underbrace{(\partial_{tt}w_g - c^2\Delta w_g)}_{=0 \text{ per ipotesi}} = (\partial_{tt} - c^2\Delta) \partial_t w_g = (\partial_{tt} - c^2\Delta) v,$$

quindi  $v$  è soluzione dell'equazione delle onde. Verifichiamo i dati iniziali:

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}, 0) &= \partial_t w_g(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}), \\ v_t(\mathbf{x}, 0) &= \partial_{tt} w_g(\mathbf{x}, 0) = c^2 \Delta \underbrace{w_g(\mathbf{x}, 0)}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

■

Di conseguenza, per risolvere il problema di Cauchy globale, mi basta risolverlo con  $g = 0$  e  $h$  qualunque, per poi costruire la soluzione come appena visto.

### 5.5.1 Caso $n = 3$

D'ora in poi omettiamo il pedice in  $w_h$  per comodità.

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2\Delta w = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty) \\ w(\mathbf{x}, 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \\ w_t(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) & \text{in } \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (\text{PCG}_{\text{onde}, 3D})$$

La strategia risolutiva si compone di due passi:

- Risolvo nel caso particolare:

$$h(\mathbf{x}) = \delta_3(\mathbf{x})$$

2. Risolvo nel caso generale con:

$$h(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) h(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

**Passo 1.**

Caso  $h(\mathbf{x}) = \delta_3(\mathbf{x})$ . La soluzione corrispondente che costruiamo si chiama **soluzione fondamentale dell'equazione delle onde** in  $n = 3$ . Per risolvere cerchiamo di approssimare prima la delta con un'altra funzione: dall'equazione del calore sappiamo che, con  $D = 1$ ,  $t = \varepsilon$  la soluzione fondamentale in  $n = 3$  è:

$$\Gamma(\mathbf{x}, \varepsilon) = \frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4\varepsilon}\right\} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta_3(\mathbf{x}).$$

Sia  $w_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$  la soluzione di

$$\begin{cases} \partial_{tt} w_\varepsilon - c^2 \Delta w_\varepsilon = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty) \\ w_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \\ \partial_t w_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \Gamma(\mathbf{x}, \varepsilon) & \text{in } \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (\text{PCG}_{\text{onde}, 3D, \varepsilon})$$

Notiamo che  $(\text{PCG}_{\text{onde}, 3D, \varepsilon})$  ha soluzione unica e che  $\Gamma$  è a **simmetria radiale** (invariante per rotazioni in  $\mathbb{R}^3$ ). Per l'unicità della soluzione possiamo scrivere:

$$w_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = w_\varepsilon(r, t), \quad r = |\mathbf{x}|$$

quindi la soluzione è un'onda sferica. Ma abbiamo visto che le onde sferiche in tre dimensioni hanno una forma particolare, data dalla **formula di Laplace**, sovrapposizione di due onde progressive (una che si allontana dall'origine e una che vi si avvicina) smorzate dal fattore  $1/r$ . La forma generale della  $w_\varepsilon$  è:

$$w_\varepsilon(r, t) = \frac{F(r - ct)}{r} + \frac{G(r + ct)}{r}$$

Non ci resta che imporre i dati iniziali per determinare  $F$  e  $G$ . Cominciamo imponendo il dato a  $t = 0$ :

$$w_\varepsilon(r, 0) = 0 \Rightarrow F(r) + G(r) = 0 \Rightarrow G = -F,$$

calcoliamo la derivata nel tempo:

$$\partial_t w_\varepsilon(r, t) = \frac{1}{r} \{-cF'(r - ct) - cG'(r + ct)\},$$

e imponiamola in  $t = 0$ :

$$\partial_t w_\varepsilon(r, 0) = -\frac{2c}{r} F'(r) = \Gamma(r, \varepsilon) = \frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{r^2}{4\varepsilon}\right\},$$

allora:

$$F'(r) = -\frac{r}{2c} \Gamma(r, \varepsilon),$$

quest'equazione ci darà  $F$  a meno di una costante additiva. Tuttavia, essendo  $G = -F$ , la costante si eliderà in ogni caso alla fine.

$$\begin{aligned} F(r) &= \int_0^r -\frac{s}{2c(4\pi\varepsilon)^{3/2}} e^{-\frac{s^2}{4\varepsilon}} ds \\ &= \frac{1}{4\pi c \sqrt{4\pi\varepsilon}} \left[ e^{-\frac{s^2}{4\varepsilon}} \right]_0^r \\ &= \frac{1}{4\pi c \sqrt{4\pi\varepsilon}} \left[ e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Concludendo:

$$w_\varepsilon(r, t) = \frac{1}{4\pi c r} \left\{ \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} e^{-\frac{(r-ct)^2}{4\varepsilon}} - \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} e^{-\frac{(r+ct)^2}{4\varepsilon}} \right\},$$

ora facendo limite per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ :

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} e^{-\frac{(r+ct)^2}{4\varepsilon}} \rightarrow \delta(r + ct) = 0 \quad \text{essendo } r + ct > 0$$

$\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}e^{-\frac{(r-ct)^2}{4\varepsilon}}$  →  $\delta(r-ct)$  è la soluzione fondamentale del calore in  $n=1$

quindi<sup>5</sup>

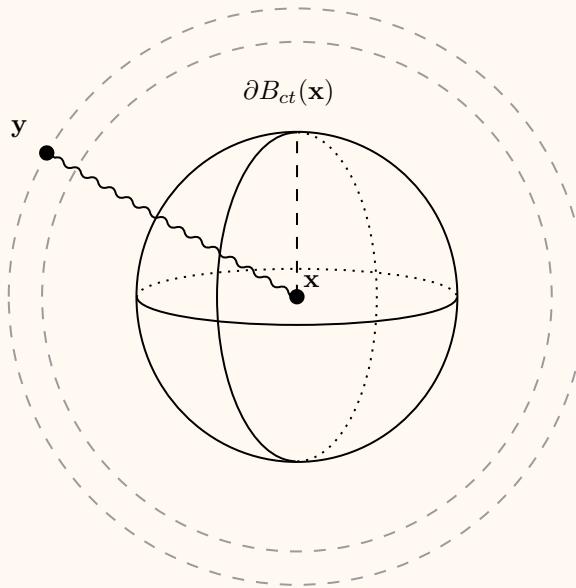
$$w_\varepsilon(r,t) \rightarrow \frac{\delta(r-ct)}{4\pi cr}, \quad \delta_1 = \delta$$

Se  $h(\mathbf{x}) = \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  allora  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  e la **soluzione fondamentale** diventa:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - ct)}{4\pi c|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (5.29)$$

**OSSERVAZIONE.** Il supporto di  $K$  per ogni  $t$  è:

$$\partial B_{ct}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = ct\}, \quad (5.30)$$



al variare del tempo ho delle onde sferiche con supporto sul bordo della palla di centro  $\mathbf{x}$  e raggio  $ct$ : un osservatore posto in  $\mathbf{y}$  avverrà la perturbazione solo all'istante:

$$t = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c},$$

quindi:

$$\bigcup_{t>0} \partial B_{ct}(\mathbf{x}) = \partial C_{(\mathbf{x},0)}^* \quad (5.31)$$

prende il nome di **cono caratteristico in avanti**, è il dominio di influenza del punto  $\mathbf{x}$ . Una conseguenza di quest'osservazione è che in dimensione  $n=3$  esistono i **segnali sharp** (istantanei).

## Passo 2.

Sia  $h = h(\mathbf{x})$  qualunque. Scriviamo  $h$  come sovrapposizione di impulsi:

$$\text{“ } h(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y})h(\mathbf{y})d\mathbf{y} \text{ ”}$$

o più formalmente:

$$\langle \delta_3(\mathbf{x} - \cdot), h \rangle = h(\mathbf{x}).$$

<sup>5</sup>Prestare attenzione al fatto che la delta ora è unidimensionale.

Per il **Passo 1** a  $\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  corrisponde la soluzione:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - ct)}{4\pi c |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}.$$

Se non uso un impulso unitario ma un impulso di intensità  $h(\mathbf{y})$  la soluzione diventa:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)h(\mathbf{y}).$$

Se uso  $h$  espressa come somma di tutti gli impulsi mi basta fare l'integrale:

$$w_h(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)h(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - ct)}{4\pi c |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} h(\mathbf{y})d\mathbf{y} = (*)$$

passando in **coordinate polari** ( $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = r$ ) e usando una sorta di teorema di Fubini in coordinate polari:

$$(*) = \int_0^{+\infty} \frac{\delta(r - ct)}{4\pi cr} dr \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} h(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma} = (**)$$

**OSSERVAZIONE.** Ricordiamo che, per definizione della delta:

$$\int_0^{+\infty} \delta(r - ct) f(r) dr = f(ct). \quad (5.32)$$

Nel nostro caso possiamo scrivere:

$$(**) = \int_0^{+\infty} \delta(r - ct) \underbrace{\left[ \frac{1}{4\pi cr} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} h(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma} \right]}_{f(r)} dr,$$

applicando la formula (5.32)<sup>6</sup>:

$$w_h(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} h(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma} = t \overline{\int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} h(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma}}.$$

**TEOREMA 5.5 — Formula di Kirchoff.** Siano  $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ ,  $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$ . Allora:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} g(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma} \right] + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} h(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma} \quad (5.33)$$

è l'unica soluzione  $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty))$  del (P<sub>CG<sub>onde,3D</sub></sub>).

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$  la funzione

$$w_g(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} g(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma}$$

soddisfa le ipotesi del Lemma A 5.4 e quindi è sufficiente controllare che

$$w_h(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} h(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma}$$

soddisfa l'equazione delle onde e le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} w_h(\mathbf{x}, 0) &= 0, \\ \partial_t w_h(\mathbf{x}, 0) &= h(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Il simbolo  $\overline{\int}$  indica il valor medio sulla superficie della sfera.

Notiamo che  $h \in C^2(\mathbb{R}^3) \Rightarrow w_h \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty))$ .

Effettuando il cambio di variabili

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{x} + ct\mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \in \partial B_1(\mathbf{0}), \quad d\boldsymbol{\sigma} = c^2 t^2 d\mathbf{w}$$

possiamo scrivere

$$w_h(\mathbf{x}, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} h(\mathbf{x} + ct\mathbf{w}) d\mathbf{w}.$$

Cominciamo coi dati iniziali

$$\begin{aligned} w_h(\mathbf{x}, 0) &= 0, \\ \partial_t w_h(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} h(\mathbf{x} + ct\mathbf{w}) d\mathbf{w} + \frac{ct}{4\pi} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} \nabla h(\mathbf{x} + ct\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} d\mathbf{w}, \\ \partial_t w_h(\mathbf{x}, 0) &= h(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'equazione torniamo alle variabili originali:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \text{versore normale esterno} \\ \frac{ct}{4\pi} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} \nabla h(\mathbf{x} + ct\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} d\mathbf{w} &= \frac{1}{4\pi ct} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} \underbrace{\nabla h(\mathbf{x} + ct\mathbf{w})}_{\nabla h(\mathbf{x} + ct\mathbf{w}) = \nabla h(\boldsymbol{\sigma})} \cdot \mathbf{w} \underbrace{c^2 t^2 d\mathbf{w}}_{d\boldsymbol{\sigma}} \\ &= \frac{1}{4\pi ct} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} \nabla h(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{\nu} d\boldsymbol{\sigma} \\ &= \frac{1}{4\pi ct} \int_{B_{ct}(\mathbf{x})} \Delta h(\mathbf{y}) d\mathbf{y} && (\text{Teo. divergenza}) \\ &= \frac{1}{4\pi ct} \int_0^{ct} dr \int_{\partial B_r} \Delta h(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma}, && (\text{coord. polari}) \end{aligned}$$

quindi:

$$\partial_{tt} w_h(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{4\pi} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} \nabla h(\mathbf{x} + ct\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} d\mathbf{w} - \frac{1}{4\pi ct^2} \int_{B_{ct}(\mathbf{x})} \Delta h(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \frac{c^2}{4\pi ct^2} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} \Delta h(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma},$$

i primi due termini sono uguali (si vede svolgendo i passaggi di prima per tornare indietro), pertanto:

$$\partial_{tt} w_h(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} \Delta h(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma}.$$

Calcoliamo il laplaciano di  $w_h$ :

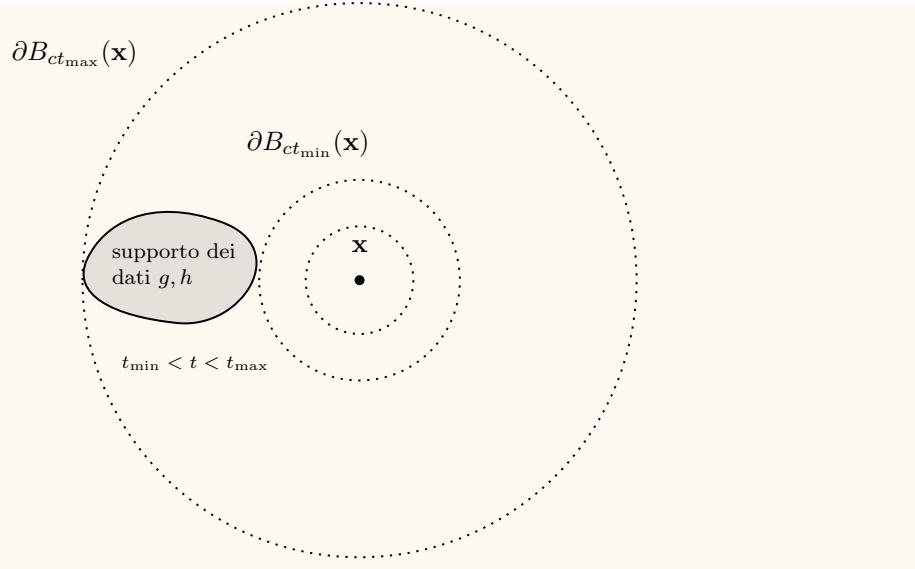
$$\begin{aligned} \Delta w_h(\mathbf{x}, t) &= \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} \Delta h(\mathbf{x} + ct\mathbf{w}) d\mathbf{w} \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x})} \Delta h(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma}, \end{aligned}$$

ma allora:

$$\partial_{tt} w_h - c^2 \Delta w_h = 0.$$

■

**OSSERVAZIONE** — In  $\mathbb{R}^3$ . Supponiamo di essere in  $\mathbf{x}$  e interpretiamo  $u(\mathbf{x}, t)$  come perturbazione avvertita in  $\mathbf{x}$  al tempo  $t$ :



La formula di Kirchoff ci dice che la perturbazione dipende dai valori di  $g$  ed  $h$  su  $\partial B_{ct}(\mathbf{x})$ .

Se  $t$  è piccolo non avverto nulla, il tempo minimo per cui avverto la perturbazione sarà nell'istante  $t_{\min}$  quando il bordo della sfera interseca per la prima volta il supporto, fino all'istante  $t_{\max}$  oltre al quale non avverto più nulla. Questo fenomeno prende il nome di **principio di Huygens forte** (esistenza di segnali Sharp).

### 5.5.2 Caso $n = 2$

Risolviamo il problema di Cauchy globale in dimensione  $n = 2$ :

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, t > 0, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (\text{PCG}_{\text{onde},2D})$$

utilizzando il metodo della **discesa di Hadamard**: considero (PCG<sub>onde,2D</sub>) come un problema in dimensione 3:

$$(\mathbf{x}, x_3) \in \mathbb{R}^3, h(\mathbf{x}, x_3) = h(\mathbf{x}) \quad (5.34)$$

Cerco  $w = w(\mathbf{x}, x_3)$  soluzione di

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 \Delta_3 w(\mathbf{x}, x_3) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3, t > 0 \\ w(\mathbf{x}, x_3, 0) = 0 \\ w_t(\mathbf{x}, x_3, 0) = h(\mathbf{x}) \end{cases}$$

questo problema lo so risolvere grazie alla formula di Kirchoff

$$w(\mathbf{x}, x_3, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(\mathbf{x}, x_3)} h(\boldsymbol{\sigma}) d\sigma d\sigma_3, \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2)$$

devo far vedere che in realtà  $w(\mathbf{x}, x_3) = w(\mathbf{x})$ , cioè che non c'è reale dipendenza da  $x_3$ .

Osservo che la superficie sferica  $\partial B_{ct}(\mathbf{x}, x_3)$  è unione dei due emisferi di equazione:

$$y_3 = F_{\pm}(\mathbf{y}) = x_3 \pm \sqrt{c^2 t^2 - r^2}$$

dove

$$r^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2.$$

Su entrambi gli emisferi  $h$  non dipende da  $x_3$ , quindi abbiamo due integrali uguali. Inoltre possiamo riportare l'integrale sulla semi-superficie della sfera a un integrale doppio sul piano, a tutti gli effetti

facendo una *discesa*. Dal punto di vista dell'elemento infinitesimo la trasformazione è:

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla F_{\pm}(\mathbf{y})|^2} d\mathbf{y} = \sqrt{1 + \frac{r^2}{c^2 t^2 - r^2}} d\mathbf{y} = \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} d\mathbf{y}, \quad (d\mathbf{y} = dy_1 dy_2)$$

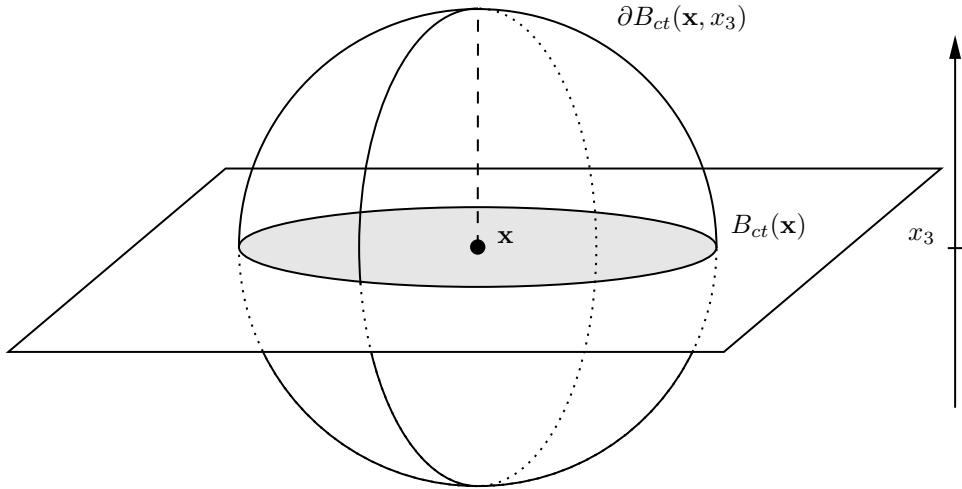


Figura 5.5: Discesa di Hadamard.

quindi

$$w(\mathbf{x}, x_3, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{B_{ct}(\mathbf{x})} \frac{h(\mathbf{y})}{\sqrt{c^2 t^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}} d\mathbf{y}$$

non dipende da  $x_3$ ! Allora usando ancora una volta il Lemma A 5.4 otteniamo il seguente teorema.

**TEOREMA 5.6 — Formula di Poisson.** Siano  $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$  e  $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Allora:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi c} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_{B_{ct}(\mathbf{x})} \frac{g(\mathbf{y})}{\sqrt{c^2 t^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}} d\mathbf{y} + \int_{B_{ct}(\mathbf{x})} \frac{h(\mathbf{y})}{\sqrt{c^2 t^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}} d\mathbf{y} \right\} \quad (5.35)$$

è l'unica soluzione  $\in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty))$  del (PCG<sub>onde,2D</sub>).

Una differenza fondamentale è che gli integrali sono su tutta la sfera piena, non solo sulla superficie come in tre dimensioni: dopo  $t_{\max}$  continuo a percepire la perturbazione. Di conseguenza *il principio di Huygens forte non vale in dimensione 2* e non esistono segnali *istantanei*.

Il fenomeno si può osservare ponendo un turacciolo in acqua calma e lasciando cadere un sasso poco distante. Il tappo rimane in quiete fino all'arrivo del primo fronte d'onda ma persiste nell'oscillazione anche dopo che questo è passato.

## **Parte II**

# **Analisi Funzionale**



# Capitolo 6

## Introduzione

*Lezione Verzini 1 (25/02/2021)*

Sia  $X$  spazio vettoriale normato reale, stiamo chiedendo due cose: combinazioni lineari e la presenza di una norma.

**DEFINIZIONE 6.1 — Norma.** Una norma è un operatore  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$  e  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

La norma permette di definire

- la distanza  $\text{dist}(x, y) = \|x - y\|$
- le palle aperte  $B_r(x) = \{y \in X : \|x - y\| < r\}$ 
  - di conseguenza la topologia (aperto, chiuso, ...)

**NB.** In  $\dim(X) = +\infty$  la nozione di compatto è solo quella definizione

chiuso e limitato  $\not\Rightarrow K$  compatto

La completezza di uno spazio è importante per costruire successioni approssimanti di una soluzione che *tendano* effettivamente a qualcosa.

Sia  $\{x_n\}_n \subset X$  successione.

**DEFINIZIONE 6.2.** Definiamo la convergenza e la continuità

1.  $x_n \rightarrow \bar{x}$  per  $n \rightarrow +\infty$  se  $\|x_n - \bar{x}\| \rightarrow 0$
  2. avendo la convergenza, possiamo definire la continuità
- $f : X \rightarrow Y$  è continua se  $x_n \rightarrow \bar{x} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$

*Esercizio.* Dimostrare che la norma  $\|\cdot\|$  è una funzione continua

Per la diseguaglianza triangolare:

$$\begin{aligned}\|x\| &= \|x - x_0 + x_0\| \\ &\leq \|x - x_0\| + \|x_0\|\end{aligned}$$

quindi

$$\left| \|x\| - \|x_0\| \right| \leq \|x - x_0\|$$

Pertanto se  $x \rightarrow x_0$  allora  $\|x\| \rightarrow \|x_0\|$ .

**DEFINIZIONE 6.3.**  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  si dice di Cauchy (o fondamentale) se

$$\|x_n - x_m\| \rightarrow 0 \quad \text{per } n, m \rightarrow \infty$$

$\{x_n\}_n$  convergente  $\Rightarrow \{x_n\}_n$  è di Cauchy, infatti

$$0 \leq \|x_n - x_m\| = \|x_n - \bar{x} + \bar{x} - x_m\| \leq \|x_n - \bar{x}\| + \|\bar{x} - x_m\| \rightarrow 0$$

questa è la parte inutile, è più utile il contrario, vedere il comportamento delle approssimazioni e dedurre se c'è convergenza a qualcosa! In generale non è vero che una successione di Cauchy è convergente, per questo motivo lavoriamo in Spazi di Banach.

**DEFINIZIONE 6.4.** Se “di Cauchy” implica convergente, allora  $X$  è completo.

**DEFINIZIONE 6.5.**  $X$  si dice Spazio di Banach se è uno spazio vettoriale normato e completo rispetto a quella norma.

Esempi di spazi di Banach.

- $\mathbb{R}^n$  con la norma euclidea è completo
- $L^p(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$  dominio<sup>1</sup> con la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty$$

- $C(\bar{\Omega})$ , con  $\Omega$  limitato con la norma

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{\bar{\Omega}} |u|$$

**DEFINIZIONE 6.6.** Supponiamo di avere due norme  $\|\cdot\|_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\|\cdot\|_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dicono **equivalenti** se inducono la stessa convergenza, cioè se  $\exists 0 < c_1 \leq c_2$ , non dipendenti da  $x$ , tali che

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

**N.B.** In  $\mathbb{R}^n$  non abbiamo insistito su questa cosa perché tutte le norme sono equivalenti, gli spazi sono tutti isomorfi.

*Esempio.*

Consideriamo lo spazio delle funzioni continue in  $[-1, 1]$

$$X = C([-1, 1])$$

e vediamolo come sottospazio di  $L^2$

$$X \subset L^2([-1, 1])$$

Possiamo scegliere due diverse norme, la norma delle funzioni continue, ovvero il massimo, oppure la norma di  $L^2$ .

$$\|\cdot\|_{C([-1, 1])} \quad \|\cdot\|_{L^2([-1, 1])}$$

- Con la norma  $\|\cdot\|_{C([-1, 1])}$

$X$  è uno spazio **completo**, per dirlo ci serve far vedere che tutte le successioni di Cauchy sono convergenti. In particolare, per ogni  $x$  fissato si hanno delle successioni di numeri in  $\mathbb{R}$ , che è completo, quindi il candidato limite della successione di Cauchy è il limite puntuale  $f(x)$

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 : \|f_n - f_m\|_{C([-1, 1])} < \varepsilon \text{ per } n, m \geq M}_{\text{Cauchy}}$$

<sup>1</sup>cioè aperto e connesso.

allora

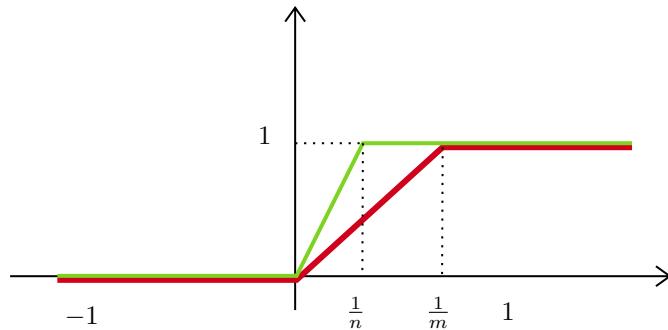
$$\begin{aligned}\forall m > M, \forall x \in [-1, 1], \quad |f(x) - f_m(x)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{[-1, 1]} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_{C([-1, 1])} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$

- Con la norma  $\|\cdot\|_{L^2([-1, 1])}$

$X$  non è completo, perché possiamo trovare una successione di Cauchy che non converge (o meglio, che converge a qualcosa che non appartiene allo spazio).

Consideriamo la seguente successione

$$v_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Verifichiamo che è di Cauchy, supponiamo  $m \leq n$

$$\begin{aligned}\|v_n - v_m\|_2^2 &= \int_{-1}^1 (v_n(x) - v_m(x))^2 dx \\ &= \int_{-1}^0 + \int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{1/m} + \int_{1/m}^1 \\ &= \int_0^{1/n} (n-m)^2 x^2 dx + \int_{1/n}^{1/m} (1-mx)^2 dx \rightarrow 0\end{aligned}$$

Tuttavia è convergente a Heaviside, che non è continua.

Se inoltre consideriamo la norma solita delle funzioni continue notiamo che non è nemmeno di Cauchy

$$\|v_n - v_m\|_{C([-1, 1])} = \max_{x \in [-1, 1]} (v_n(x) - v_m(x)) = 1 - \frac{m}{n} \not\rightarrow 0$$

per  $n, m \rightarrow \infty$ , infatti se scegliamo  $n = 2m$  il limite tenderebbe a  $1/2$ .

In questo esempio:

- Con  $\|\cdot\|_{L^2}$ 
  - La successione è di Cauchy ma non converge, quindi non è completo.
- Con  $\|\cdot\|_C$ 
  - La successione non è di Cauchy.
  - In generale lo spazio è completo.
- Deduciamo anche che le due norme non sono equivalenti, dato che inducono convergenze diverse sulla stessa successione.

**DEFINIZIONE 6.7 — Prodotto scalare.**  $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- $(v, v) \geq 0$  e  $(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- $(u, v) = (v, u), \forall u, v \in X$
- $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1(u_1, v) + \lambda_2(u_2, v), \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall u_1, u_2, v \in X$

**DEFINIZIONE 6.8.** Norma indotta dal prodotto scalare

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}$$

Esercizio. Verificare che il prodotto scalare è continuo rispetto alla norma indotta e che  $\|\cdot\|$  è una norma.

**TEOREMA 6.9.** Alcune proposizioni

1. Cauchy-Schwarz  $|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$
2. Identità del parallelogramma<sup>a</sup>  $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ , vale solo se la norma è indotta da un prodotto scalare

<sup>a</sup>la somma dei quadrati sulle diagonali è uguale alla somma dei quadrati su tutti i lati.

**DEFINIZIONE 6.10.** Uno spazio vettoriale  $X$ , con prodotto scalare, che sia completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare si dice **Spazio di Hilbert**.

*Esempi.*

$\mathbb{R}^n, L^2(\Omega)$  con la norma indotta dal prodotto scalare  $(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv dx$

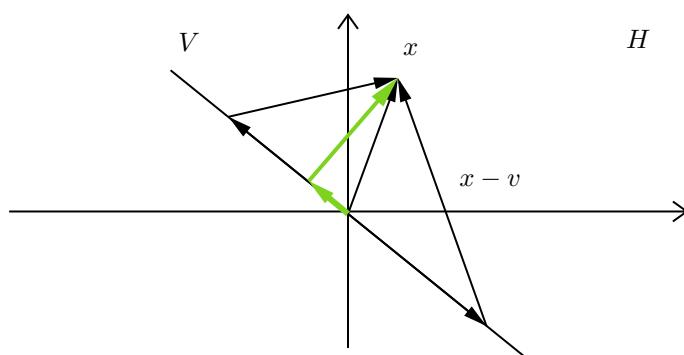
In uno spazio con prodotto scalare possiamo definire l'**ortogonalità**

$$u \perp v \Leftrightarrow (u, v) = 0$$

## 6.1 Approssimazione di vettori (Teorema delle Proiezioni)

Chiameremo  $H$  un generico spazio di Hilbert. Considerando  $H$  e  $V \subset H$  sottospazio<sup>2</sup>,  $x \in H$ , vogliamo trovare il vettore di  $V$  che meglio approssima  $x$ . Stiamo cercando  $\bar{v} \in V$  tale che

$$\|x - \bar{v}\| = \inf_{v \in V} \|x - v\|$$



$\bar{v}$  è la proiezione su  $V$  di  $x$ , che indicheremo come  $P_V x$ , è l'elemento di minima distanza (*se esiste*).

- in  $\dim < +\infty$  esiste sempre (Gram-Schmidt).
- in  $\dim = \infty$  non è detto, servono ipotesi in più, che sia **chiuso**.

Nel caso di prima possiamo approssimare Heaviside con le approssimanti introdotte, ma non c'è *la migliore*, questo ci dice che le funzioni continue non sono un sottospazio *chiuso*.

<sup>2</sup> $u, v \in V \Rightarrow \lambda u + \mu v \in V$ .

**TEOREMA 6.11 — delle Proiezioni.** Sia  $H$  di Hilbert,  $V$  sottospazio vettoriale di  $H$  **chiuso**<sup>a</sup>,  $x \in H$ . Allora  $\exists! P_V x \in V$  tale che

$$\|P_V x - x\| = \inf_{v \in V} \|v - x\|$$

Lezione Verzini 2 (04/03/2021)

Inoltre:

1.  $x \in V \Leftrightarrow x = P_V x$
2. Definendo  $Q_V x = x - P_V x$  si ha  $(Q_V x, v) = 0 \forall v \in V$ , cioè  $Q_V x \in V^\perp$

Inoltre vale un teorema di Pitagora generalizzato:  $\|x\|^2 = \|P_V x\|^2 + \|Q_V x\|^2$ .

<sup>a</sup>in senso topologico, deve contenere tutti i suoi punti di frontiera.

**NB.** Se  $\dim H = +\infty$  non è detto che i sottospazi siano chiusi, a differenza di spazi a dimensione finita, però se

$$\dim V < +\infty, V \subset H \Rightarrow V \text{ chiuso}$$

e in ogni caso  $V^\perp$  è chiuso, infatti:

$$\text{se } y_n \rightarrow y, \{y_n\} \subset V^\perp \Rightarrow \forall x \in V, (y, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n, x) = 0 \Rightarrow y \in V^\perp$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo per passi, prima l'esistenza, poi l'unicità e infine i vari punti aggiuntivi.

- Esistenza

$$d = \inf_{v \in V} \|v - x\|, d \geq 0$$

ovvero, per definizione di inf

1.  $\|v - x\| \geq d, \forall v \in V$
2.  $\forall \varepsilon \exists v_\varepsilon \in V$  tale che  $\|v_\varepsilon - x\| \leq d + \varepsilon$

uso la definizione per costruire una “successione minimizzante”

$$(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V : d \leq \|x - v_n\| \leq d + \frac{1}{n} \quad \left( \varepsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right) \quad (6.1)$$

voglio dimostrare che la successione converge. Per farlo devo prima dimostrare che è una successione di Cauchy. Uso l'identità del parallelogramma riscritta nel seguente modo

$$\|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 - \|a + b\|^2$$

con  $a = v_n - x$ ,  $b = v_m - x$ , i termini dell'identità diventano:

$$\begin{aligned} \|a - b\|^2 &= \|v_n - v_m\|^2 \\ \|a + b\|^2 &= \|v_n + v_m - 2x\|^2 = 4 \left\| \underbrace{\frac{v_n + v_m}{2}}_{\in V} - x \right\|^2 \geq 4d^2 \end{aligned}$$

dove l'ultima diseguaglianza vale perché  $\|v - x\| \geq d, \forall v \in V$  (definizione di inf) e  $\frac{v_n + v_m}{2} \in V$ , essendo  $V$  un sottospazio.

La norma di  $a$  e di  $b$  tenderà a  $d$  per il teorema dei carabinieri e per (6.1). Sostituendo nell'identità

$$0 \leq \|v_n - v_m\|^2$$

$$\begin{aligned}
&= 2\|v_n - x\|^2 + 2\|v_m - x\|^2 - 4 \left\| \frac{v_n + v_m}{2} - x \right\|^2 \\
&\leq 2\|v_n - x\|^2 + 2\|v_m - x\|^2 - 4d^2 \\
&\xrightarrow[n,m \rightarrow \infty]{} 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0
\end{aligned}$$

Quindi la mia successione minimizzante è di Cauchy. Ma poiché  $H$  è di Hilbert, ogni successione di Cauchy è convergente

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{v} \in H$$

e poiché  $V$  è chiuso,  $\bar{v} \in V$ . Allora prendendo la definizione della mia successione

$$d \leq \|x - v_n\| \leq d + \frac{1}{n}$$

e facendone il limite per  $n \rightarrow \infty$  ottengo, per continuità della norma

$$d \leq \|x - \bar{v}\| \leq d$$

Definisco la proiezione di  $x$  su  $V$ :  $P_V x = \bar{v}$

- Unicità

Per assurdo

$$\bar{v}, \bar{w} \in V, \quad \|\bar{v} - x\| = \|\bar{w} - x\| = d$$

Usando l'identità del parallelogramma con  $a = \bar{v} - x$ ,  $b = \bar{w} - x$ :

$$\|\bar{v} - \bar{w}\|^2 + \|\bar{v} + \bar{w} - 2x\|^2 = 4d^2$$

Sfruttando gli stessi passaggi dell'esistenza osservo che  $\|\bar{v} + \bar{w} - 2x\|^2 \geq 4d^2$ . Allora perché l'identità sia soddisfatta deve essere  $\|\bar{v} - \bar{w}\|^2 \leq 0$

$$\Rightarrow \|\bar{v} - \bar{w}\|^2 = 0 \Rightarrow \bar{v} = \bar{w}$$

- Inoltre (punto 1)

conseguenza banale, se  $x \in V$

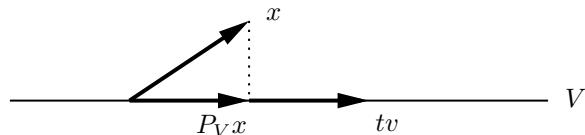
$$d = \inf_{v \in V} \|v - x\| = 0$$

$$\Rightarrow \|x - P_V x\| = 0 \Rightarrow x = P_V x$$

- Inoltre (punto 2)

$$Q_V x = x - P_V x$$

Osservo che  $\forall v \in V, t \in \mathbb{R} \implies (P_V x - tv) \in V$



$$\begin{aligned}
d^2 &\leq \|-(P_V x - tv) + x\|^2 = \|Q_V x + tv\|^2 \\
&= \|Q_V x\|^2 + 2t(Q_V x, v) + t^2\|v\|^2 \\
&= d^2 + 2t(Q_V x, v) + t^2\|v\|^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|v\|^2 t^2 + 2(Q_V x, v)t \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}, \forall v \in V$$

Per analogia con l'equazione di una parabola

$$at^2 + bt + c \geq 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow b^2 - 4ac \leq 0$$

Con  $a = \|v\|^2$ ,  $b = 2(Q_V x, v)$

Ma se  $c = 0 \Rightarrow b = 0$ , da cui la tesi.

- Teorema di Pitagora

$$\|x\|^2 = \|P_V x + Q_V x\|^2 = \|P_V x\|^2 + 2(P_V x, Q_V x) + \|Q_V x\|^2$$

dove il prodotto scalare è nullo per l'ortogonalità appena dimostrata. ■

## 6.2 Operatori lineari

**DEFINIZIONE 6.12 — Operatore lineare.**  $H_1, H_2$  di Hilbert,  $L : H_1 \rightarrow H_2$  è lineare se  $L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v)$ ,  $u, v \in H_1$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

**NB.** In spazi infinito dimensionali  $L$  lineare  $\not\Rightarrow L$  continuo, per cui lo richiederò come ipotesi.

**DEFINIZIONE 6.13 — Operatore limitato.**  $L$  (lineare) si dice limitato se  $\exists c \geq 0$  t.c.  $\|Lx\|_{H_2} \leq c\|x\|_{H_1} \forall x \in H_1$

Osserviamo che

$$c \geq \frac{\|Lx\|_{H_2}}{\|x\|_{H_1}} = \left\| \frac{1}{\|x\|_1} Lx \right\|_2 = \left\| L \left( \frac{x}{\|x\|_1} \right) \right\|_2$$

dove  $\frac{x}{\|x\|_1}$  ha norma 1, quindi  $L$  è limitato se e solo se

$$\sup_{\|x\|=1} \|Lx\|_2 = k < +\infty$$

$k$  è la miglior costante di limitatezza e prende il nome di **norma operatoriale**.

**TEOREMA 6.14.** Sia  $L$  un operatore lineare. Allora

$$L \text{ continuo} \Leftrightarrow L \text{ limitato} \tag{6.2}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Vediamo i due sensi

( $\Leftarrow$ )  $L$  è limitato, allora  $\|Lx\|_2 \leq C\|x\|_1$ , sia  $x = v - v_0$

$$0 \leq \|Lv - Lv_0\|_2 = \|L(v - v_0)\|_2 \leq c\|v - v_0\|_1$$

quindi se  $v \rightarrow v_0$  allora  $Lv \rightarrow Lv_0$ .

( $\Rightarrow$ )  $L$  è continuo, cioè per definizione

$$\text{se } \|x - x_0\|_1 \rightarrow 0 \text{ allora } \|Lx - Lx_0\|_2 \rightarrow 0$$

in particolare se  $x_0 = 0$ ,

$$\text{se } \|x\|_1 \rightarrow 0 \text{ allora } \|Lx\|_2 \rightarrow 0$$

quindi, scegliendo un certo arbitrario  $\varepsilon = 1$  segue che

$\exists \delta > 0$  tale che se  $\|x\|_1 \leq \delta$  allora  $\|Lx\|_2 \leq 1 = \varepsilon$

allora per proprietà della norma

$$\|Lx\|_2 = \left\| \frac{\|x\|_1}{\delta} L\left(\frac{\delta}{\|x\|_1} x\right) \right\|_2 = \frac{\|x\|_1}{\delta} \left\| L\left(\frac{\delta}{\|x\|_1} x\right) \right\|_2 = (*)$$

l'argomento dell'operatore ha norma minore o uguale di  $\delta$  e quindi rispetta la considerazione di prima

$$\left\| \delta \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \leq \|\delta\| \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| = \delta$$

pertanto la norma dell'operatore è minore o uguale di 1

$$(*) \leq \frac{\|x\|_1}{\delta} \cdot 1 = \frac{1}{\delta} \|x\|_1$$

che è la definizione di limitatezza.

■

**DEFINIZIONE 6.15.**  $\mathcal{L}(H_1, H_2) = \{L : H_1 \rightarrow H_2 \text{ lineari e continui}\}$

$$\|L\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} = (\text{miglior costante di limitatezza}) = \sup_{\|x\|_1=1} \|Lx\|_2$$

**TEOREMA 6.16.**  $\mathcal{L}(H_1, H_2)$  è di Banach.

### Esempio importante (immersione)

$H_1 \subset H_2$  sottospazio (eventualmente con norme non equivalenti)

Consideriamo un certo operatore che a  $x$  associa se stesso, ma in due spazi con norme differenti:

$$L : \underbrace{x}_{\in H_1} \rightarrow \underbrace{x}_{\in H_2}$$

Data un'immersione  $L(x) = x$ , quando è continua? Per (6.2), è continua se e solo se è limitata, ovvero se  $\|x\|_{H_2} \leq c\|x\|_{H_1} \forall x \in H_1$ . In questo caso l'immersione prende il nome di **immersione continua**.

Un esempio pratico è lo spazio  $C([0, 1]) \subset L^2(0, 1)$ , nel primo usiamo come norma il max, nel secondo la norma  $(\int |\cdot|^2)^{1/2}$ , quindi possiamo misurare gli elementi di  $C([0, 1])$  con entrambe le norme. La notazione per indicare l'immersione con continuità è

$$C([0, 1]) \hookrightarrow L^2(0, 1)$$

Dimostriamo ora la limitatezza dell'immersione in questo esempio (e quindi che è continua)

$$\|u\|_{L^2(0,1)} = \sqrt{\int_0^1 u^2(x) dx} \leq \sqrt{\left(\max_{[0,1]} u\right)^2 \cdot \int_0^1 dx} = \max_{[0,1]} |u|$$

**DEFINIZIONE 6.17 — Funzionale.** Sia  $H_1 = H$  spazio di Hilbert,  $H_2 = \mathbb{R}$ , allora  $L : H \rightarrow \mathbb{R}$  è detto funzionale.

**DEFINIZIONE 6.18 — Spazio duale.** È detto spazio duale di  $H$ , denotato con  $H^*$

$$H^* = \mathcal{L}(H, \mathbb{R}) = \{L : H \rightarrow \mathbb{R} \text{ funzionali lineari e continui}\}$$

con norma

$$\|L\|_{H^*} = \|L\|_* = \sup_{\|v\|=1} |Lv|$$

### Esempio 1.

Sia  $H = L^2(0, 1)$ ,  $L : L^2(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Lv = \int_0^{1/2} v(x)dx$ . Verifico che  $L \in H^*$ , ovvero che sia lineare, ben definito e continuo (limitato). L'operatore è chiaramente lineare perché definito con integrale, è ben definito e continuo perché

$$|Lv| = \left| \int_0^{1/2} v(x)dx \right| \leq \int_0^{1/2} |v(x)|dx \leq \int_0^1 |v(x)|dx$$

Utilizzando la diseguaglianza di Holder posso maggiorare l'ultimo termine

$$\leq \left( \int_0^1 1^2 \right)^{1/2} \left( \int_0^1 v^2 \right)^{1/2} = \|v\|_{L^2(0,1)}$$

Quindi  $L \in H^*$ ,  $\|L\|_* \leq 1$ .

### Esempio 2.

Sia  $H$  spazio di Hilbert,  $u \in H$  fissato. Definisco  $L_u v = Lv = (u, v)$

$L : v \rightarrow (u, v)$  è lineare (per linearità del prodotto scalare), inoltre

$$|Lv| = |(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$$

per Cauchy-Schwartz. Quindi  $L$  è lineare e continuo (limitato) allora  $L \in H^*$ , e  $\|L\|_* \leq \|u\|$ . Ma possiamo anche osservare che

$$\|L\|_* = \sup_{\|v\|=1} |Lv| \geq \left| L \left( \frac{u}{\|u\|} \right) \right| = \frac{1}{\|u\|} (u, u) = \frac{1}{\|u\|} \|u\|^2 = \|u\|$$

Quindi  $\|L\|_* \leq \|u\|$ ,  $\|L\|_* \geq \|u\|$  allora  $\|L\|_* = \|u\|$ . Il teorema che vedremo ora ci confermerà che questo non è solo un esempio, ma l'unico caso possibile.

*Lezione Verzini 3 (18/03/2021)*

## 6.2.1 Teorema di rappresentazione di Riesz

**TEOREMA 6.19 — di rappresentazione di Riesz.** Sia  $H$  uno spazio di Hilbert, allora  $\forall L \in H^*$  esiste un unico vettore  $u \in H$  tale che

$$Lv = (u, v), \quad \forall v \in H$$

Inoltre

$$\|u\| = \|L\|_*$$

**OSSERVAZIONE.** Il teorema di rappresentazione di Riesz è in realtà un teorema di buona posizione, dimostra infatti che

$$\langle \langle \text{dato } L \in H^* \text{ trovare } u \in H \text{ tale che } Lv = (u, v), \forall v \in H \rangle \rangle$$

è ben posto: garantisce l'esistenza e unicità di  $u$ , inoltre dati  $L_1, L_2$  e le soluzioni  $u_1, u_2$

$$\begin{aligned} (u_1, v) &= L_1 v \\ (u_2, v) &= L_2 v \end{aligned}$$

Per il principio di sovrapposizione (il problema è lineare):

$$(u_1 - u_2, v) = (L_1 - L_2)v \Rightarrow \|u_1 - u_2\| = \|L_1 - L_2\|_*$$

il problema è stabile (dipende con continuità dai dati).

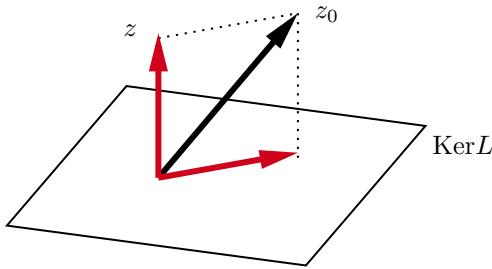
**DIMOSTRAZIONE.** L'ultima affermazione in realtà l'abbiamo già dimostrata nell'esempio 2. *Esistenza.*

- Caso 1:  $\text{Ker}L = H$

ovvero  $Lv = 0, \forall v$ , in tal caso scelgo  $u = 0$ .

- Caso 2:  $\text{Ker}L \subsetneq H$

ovvero esiste un vettore  $z_0 \in H$  che non appartiene al nucleo  $Lz_0 \neq 0$ . L'idea geometrica è molto semplice, vogliamo usare il teorema delle proiezioni e scegliere come  $u$  il vettore ortogonale al nucleo, normalizzato



Sceglieremo quindi  $H, V = \text{Ker}L, x = z_0$ , dobiamo verificare che  $V$  è un sottospazio chiuso topologicamente per applicare le proiezioni.

- È un sottospazio, vogliamo dimostrare che

$$v_1, v_2 \in \text{Ker}L \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \text{Ker}L$$

ovvero che

$$Lv_1 = Lv_2 = 0 \Rightarrow L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = 0$$

ma per **linearità** di  $L$  è soddisfatta

$$L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 Lv_1 + \lambda_2 Lv_2 = 0$$

- Che sia chiuso è leggermente più delicato, osserviamo intanto che per definizione

$$\text{chiuso} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (v_n)_n \subset \text{Ker}L \\ v_n \rightarrow \bar{v} \in H \end{array} \Rightarrow \bar{v} \in \text{Ker}L \right\}$$

nel nostro caso

$$(v_n)_n \subset \text{Ker}L \Leftrightarrow Lv_n = 0$$

è vero che  $L\bar{v} = 0$ ? Sì grazie alla **continuità**.

Allora possiamo applicare il teorema delle proiezioni

$$z = \frac{z_0 - P_{\text{Ker}L} z_0}{\|z_0 - P_{\text{Ker}L} z_0\|}$$

con questa scelta, si ha  $[z \in (\text{Ker}L)^\perp]$  e  $\|z\| = 1$ . Abbiamo

$$v \in H \quad z \in (\text{Ker}L)^\perp$$

costruiamo  $w \in \text{Ker}L$  che sia combinazione di quei due

$$w = v - \frac{Lv}{Lz}z \Rightarrow Lw = L\left(v - \frac{Lv}{Lz}z\right) = Lv - \frac{Lv}{Lz}Lz = 0$$

Notiamo che dato che  $w \in \text{Ker}L$ ,  $z \in (\text{Ker}L)^\perp$  allora  $(w, z) = 0$ , pertanto

$$0 = (w, z) = \left(v - \frac{Lv}{Lz}z, z\right) = (v, z) - \frac{Lv}{Lz} \underbrace{(z, z)}_{\|z\|^2=1}$$

infine

$$Lv = Lz(z, v) = \underbrace{((Lz)z, v)}_u, \quad \forall v \in H$$

*Unicità.*

Supponiamo che questo vettore  $u$  non sia unico, cioè che ne esistano due  $u_1, u_2 \in H$  tali che

$$\begin{aligned} (u_1, v) &= Lv, \quad \forall v \in H \\ (u_2, v) &= Lv, \quad \forall v \in H \end{aligned}$$

sottraiamo membro a membro

$$(u_1 - u_2, v) = 0, \quad \forall v \in H$$

questo implica che  $u_1 - u_2 = 0$ .<sup>a</sup> ■

<sup>a</sup>Questa ultima implicazione non può essere fatta con troppa leggerezza, infatti siamo in uno spazio astratto e l'unica cosa che abbiamo sono le definizioni e i teoremi. Il fatto che quella cosa valga per ogni  $v$ , significa in particolare che vale anche per  $v = u_1 - u_2$ , degli altri infiniti  $v$  non ci interessa. Con tale scelta

$$0 = (u_1 - u_2, u_1 - u_2) = \|u_1 - u_2\|^2$$

Per la proprietà di annullamento della norma

$$\|u_1 - u_2\|^2 = 0 \Leftrightarrow u_1 - u_2 = 0$$

Alternativamente per la proprietà di annullamento del prodotto scalare

$$(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0 \Leftrightarrow u_1 - u_2 = 0$$

**DEFINIZIONE 6.20.** La scrittura  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  denota una **forma bilineare** se

- fissato  $u$ ,

$v \mapsto a(u, v)$  è lineare in  $v$

- fissato  $v$ ,

$u \mapsto a(u, v)$  è lineare in  $u$

**DEFINIZIONE 6.21.** Inoltre

- $a$  si dice **simmetrica** se

$$a(u, v) = a(v, u), \quad \forall v, u \in H$$

in generale non lo sarà, ma un esempio ne è il prodotto scalare.

- $a$  si dice **continua (limitata)** se

$$\exists M : |a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\|, \quad \forall v, u$$

- $a$  si dice **coerciva/coercitiva** se

$$\exists \alpha > 0 \text{ (costante di coercività)} : a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$$

Segnaliamo una domanda che ogni tanto viene fatta agli orali di Salsa: nella continuità e nella coercività serve il modulo nella forma bilineare?

Se siamo nei numeri complessi, sempre in entrambe, altrimenti la quantità non sarebbe correttamente definita per una diseguaglianza. Se siamo nei numeri reali, come da definizione non serve per la coercività, ma in realtà non serve nemmeno nella continuità, infatti certamente quella col modulo implica quella senza modulo, ma quella senza modulo implica quella col modulo:

$$\begin{aligned} a(u, v) \leq M \|u\| \|v\|, \forall u, v &\Rightarrow a(-u, v) \leq M \underbrace{\|-u\|}_{\|u\|} \|v\| \\ -a(u, v) \leq M \|u\| \|v\| & \\ a(u, v) \geq -M \|u\| \|v\|, & \end{aligned}$$

che messe assieme implicano quella col modulo.<sup>3</sup>

Il prodotto scalare è un caso particolare di forma bilineare simmetrica  $a(u, v) = (u, v)$ , vediamo quanto valgono le costanti  $M$  e  $\alpha$ . Per Cauchy-Schwarz

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \Rightarrow M = 1$$

Per definizione di norma indotta dal prodotto scalare

$$(u, u) = \|u\|^2 \Rightarrow \alpha = 1$$

Il teorema di Lax-Milgram generalizza queste nozioni e ci permette di risolvere<sup>4</sup> il seguente problema.

**DEFINIZIONE 6.22 — Problema Variazionale Astratto, (PVA).** Dato  $L \in H^*$  trovare  $u \in H$  tale che

$$a(u, v) = Lv, \quad \forall v \in H \tag{PVA}$$

dove  $a$  è una forma bilineare.

Nel caso di prodotto scalare  $a(u, v) = (u, v)$ , (PVA) diventa  $(u, v) = Lv$  che è ben posto per il teorema di Riesz.

### 6.2.2 Teorema di Lax-Milgram

**TEOREMA 6.23 — di Lax-Milgram.** Siano

- $H$  spazio di Hilbert
- $a$  forma bilineare **continua** e **coerciva**
- $L \in H^*$

Allora  $\exists! \bar{u} \in H$  soluzione di (PVA). Inoltre (**stima di stabilità**)

$$\|\bar{u}\| \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_*$$

dove  $\alpha$  è la costante di coercività, ci interessa che sia più grande possibile.

**OSSERVAZIONE.** La stabilità è utile considerando due dati vicini e due soluzioni vicine. Prendiamo ad esempio due soluzioni  $u_1, u_2$  soluzioni del (PVA) coi dati  $L_1 v, L_2 v$

$$a(u_1, v) = L_1 v, \quad \forall v \in H$$

<sup>3</sup>Uno degli autori del documento si è giocato la lode (non la laurea) su questa domanda, quindi studiatela.

<sup>4</sup>esistenza, unicità e dipendenza continua.

$$a(u_2, v) = L_2 v, \quad \forall v \in H$$

Facciamo la differenza e usiamo la linearità

$$a(u_1 - u_2, v) = (L_1 - L_2)v$$

La stima di stabilità ci dice che

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\alpha} \|L_1 - L_2\|_*$$

Ovvero a *dati vicini* sono associate *soluzioni vicine*, a patto che  $\alpha$  sia sufficientemente grande.

**DIMOSTRAZIONE.** Proponiamo un'overview dei passi della dimostrazione

- (0) Riscrittura del problema in termini di  $A$
- (1)  $A$  è lineare
- (2)  $A$  è continuo (ovvero limitato)
- (3)  $A$  è iniettivo (ovvero  $\text{Ker } A = \{0\}$ )
- (3.5) l'immagine  $R(A)$  è un sottospazio chiuso, cosa **non** vera in generale
- (4)  $A$  è suriettivo (ovvero  $R(A) = H$ )

Procediamo quindi con la dimostrazione

- (0) Notiamo che la  $v$  è una sorta di *funzione test*, infatti vogliamo ottenere una cosa che vale per infiniti  $v$ . Al secondo membro del (PVA), per ipotesi  $L \in H^*$ , allora per Riesz  $\exists! z \in H$  tale che  $Lv = (z, v), \forall v$  e inoltre  $\|z\| = \|L\|_*$ . Vogliamo applicarlo anche al primo membro. Per definizione di forma bilineare,  $\forall u$  fissato, l'applicazione  $v \mapsto a(u, v)$  è lineare e inoltre per ipotesi continua in  $v$ :

$$\text{continua} \Leftrightarrow |a(u, v)| \leq \underbrace{M\|u\|}_{C} \|v\| \leq C\|v\|$$

allora per Riesz per ogni  $u$  fissato  $\exists! h = A(u) \in H$  tale che

$$a(u, v) = (h, v), \quad \forall v$$

cioè ho definito un'applicazione  $A : H \rightarrow H$  tale che

$$a(u, v) = (A(u), v), \quad \forall v \in H$$

noi vogliamo dimostrare su  $A$ , ma abbiamo proprietà su  $a$ , questa relazione è la **chiave!**

Avendo così usato due volte il teorema di Riesz per passare da due operatori lineari a due prodotti scalari, il (PVA) diventa

$$(A(u), v) = (z, v) \quad \forall v \in H$$

Sottraiamo membro a membro e deduciamo, con la proprietà di annullamento del prodotto scalare

$$(A(u) - z, v) = 0, \quad \forall v \in H \Rightarrow A(u) = z$$

risolvere (PVA) quindi è come trovare l'operatore *inverso* di  $A$ .

- (1) Dobbiamo sempre lavorare con il prodotto scalare di  $A$  per qualcosa, in modo da usare la chiave trovata al passo precedente

$$(A(\lambda u_1 + \mu u_2), v) = a(\lambda u_1 + \mu u_2, v) = (*)$$

da qui è tutto automatico

$$\begin{aligned} (*) &= \lambda a(u_1, v) + \mu a(u_2, v) \\ &= \lambda(A(u_1), v) + \mu(A(u_2), v) \\ &= (\lambda A(u_1) + \mu A(u_2), v) \quad \forall v \in H \end{aligned}$$

cioè  $A(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda A(u_1) + \mu A(u_2)$ .

D'ora in poi useremo la **notazione**

$$A(u) = Au$$

(2) Notiamo che

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = a(u, Au) \leq |a(u, Au)| \leq M\|u\|\|Au\|$$

l'ultima maggiorazione grazie al fatto che  $a$  è limitata; allora

$$\|Au\| \leq M\|u\|$$

Se  $\|Au\|$  fosse stato 0 non avrei avuto nulla dimostrare, per cui ho potuto semplificare.

(3) È l'unico in cui non possiamo mettere il pilota automatico. Qui troveremo anche la **stima di stabilità**. Per farlo dobbiamo partire dalla coercività

$$\alpha\|u\|^2 \leq a(u, u) = (Au, u) \leq |(Au, u)| \underbrace{\leq}_{\text{C.S.}} \|Au\|\|u\| \quad \alpha > 0$$

Possiamo dividere per  $u$  perché se fosse 0 sarebbe soddisfatta già, otteniamo la stima di stabilità

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|Au\|$$

Nel nuovo (PVA)  $Au = z$  e ricordiamo che  $z$  era il vettore che rappresentava  $L$  (come visto al passo 0)

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|Au\| = \frac{1}{\alpha}\|z\| = \frac{1}{\alpha}\|L\|_*$$

Se  $u \in \text{Ker } A$  allora  $Au = 0$ , usando la stima  $\|u\| \leq 0$ , allora  $u = 0$ . Quindi  $\text{Ker } A = \{0\}$ , ovvero  $A$  è iniettivo.

(3.5) L'immagine è un sottospazio, analogo a come visto prima.

Dimostriamo che è chiuso, ovvero che considerando ogni successione contenuta nell'immagine  $(y_n)_n \subset R(A)$  che tende a un certo valore  $y_n \rightarrow \bar{y}$  allora quel valore sta nell'immagine  $\bar{y} \in R(A)^a$ .

Questi valori dell'immagine sono associati agli elementi del dominio  $y_n = Au_n$ , ci piacerebbe dire che  $\bar{y} = A\bar{u}$ , con  $\bar{u} = \lim u_n$ , **ma questo limite non è detto che esista! In un sacco di situazioni concrete salta!**

Ci rivolgiamo nuovamente alla completezza dello spazio, dimostrando che è una successione di Cauchy, usando la stima di stabilità del passo (3)

$$0 \leq \|u_n - u_m\| \underbrace{\leq}_{(3)} \frac{1}{\alpha}\|A(u_n - u_m)\| \underbrace{\leq}_{\text{lin.}} \frac{1}{\alpha}\|Au_n - Au_m\| = \frac{1}{\alpha}\|y_n - y_m\|$$

la successione  $y_n$  è convergente, quindi anche di Cauchy, allora l'ultimo termine tende a 0, in particolare quindi anche  $u_n$  è di Cauchy, ma essendo  $H$  completo è anche convergente a un certo  $\bar{u} \in H$ .

Usando la continuità di  $A$ ,  $Au_n \rightarrow A\bar{u}$ , quindi  $\bar{y} = A\bar{u} \in R(A)$ .

(4) Supponiamo per assurdo che

$$R(A) \not\subseteq H$$

cioè esiste  $z_0 \in H$ ,  $z_0 \notin R(A)$ . Per il teorema delle proiezioni<sup>b</sup>

$$z = \frac{z_0 - P_{R(A)}z_0}{\|z_0 - P_{R(A)}z_0\|} \Rightarrow z \in (R(A))^\perp, \|z\| = 1$$

A questo punto notiamo che

$$z \in (R(A))^\perp, Az \in R(A) \Rightarrow (z, Az) = 0$$

Andando alla definizione di  $A$  e usando la coercività

$$(z, Az) = a(z, z) \geq \alpha \|z\|^2 = \alpha > 0$$

Ma ciò è assurdo, è quindi negata la supposizione iniziale e  $R(A) = H$ . ■

<sup>a</sup>ricordiamo che la definizione è *interessante* se consideriamo i punti del bordo in particolare.

<sup>b</sup>che possiamo applicare avendo dimostrato che l'immagine  $R(A)$  è un sottospazio chiuso al passo (3.5)



# Capitolo 7

## Distribuzioni e spazi di Sobolev

Lezione Verzini 4 (25/03/21)

### 7.1 Richiami su funzioni test e distribuzioni

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ .

**DEFINIZIONE 7.1 — Funzioni test.**

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, C^\infty(\Omega) \text{ a supporto compatto}\}$$

Ricordiamo che il supporto di una funzione è la chiusura dell'insieme dove essa non si annulla.

L'insieme  $\mathcal{D}(\Omega)$  è incluso in  $L^p(\Omega) \forall p$ , in particolare per  $p = 2$

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

e l'inclusione è **densa**, ovvero per ogni elemento di  $L^2$  posso trovare una successione approssimante di funzioni in  $\mathcal{D}$ , più *belle*:

$$\forall v \in L^2(\Omega) \exists (\varphi_k)_k \subset \mathcal{D}(\Omega) \text{ t.c. } \varphi_n \xrightarrow{L^2} v$$

o, alternativamente

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}} = L^2(\Omega)$$

**DEFINIZIONE 7.2 — Convergenza di funzioni test.** Diciamo che

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{D}(\Omega)$$

Se:

1.  $\exists K \subset \Omega$  compatto tale che  $\text{supp} \varphi_n \subset K$  per ogni  $n$ .
2.  $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi_n^{(k)} \rightarrow \varphi^{(k)}$  uniformemente per  $n \rightarrow \infty$ .

**DEFINIZIONE 7.3 — Distribuzioni.** Sono gli elementi del **duale** delle funzioni test il duale, cioè in funzionali (ovvero che vanno in  $\mathbb{R}$ ) lineari e continui partenti da  $\mathcal{D}$ :

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{F : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineari, continui}\}$$

Indichiamo *l'azione di F su φ*:

$$F(\varphi) = F\varphi = \langle F, \varphi \rangle =_{\mathcal{D}'} \langle F, \varphi \rangle_{\mathcal{D}}$$

**NB.** La notazione

$$\langle F, \varphi \rangle = \int_{\Omega} F \varphi$$

è formalmente errata, poiché col simbolo di integrale non si intende l'integrale che siamo soliti fare. Svolgiamo effettivamente un integrale se  $u \in L^2(\Omega)$ , in questo caso allora  $Lu \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e quando scriviamo

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

sottointendiamo in realtà

$$\langle Lu, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Esistono distribuzioni che non sono funzioni, come la  $\delta_n$ , ma nel caso in cui coincidano con delle funzioni il minimo sindacale è

$$u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

che è anche un'immersione continua.

**DEFINIZIONE 7.4 — Derivata debole o distribuzionale.** Data  $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$  si definisce  $\partial_{x_i} F \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\langle \partial_{x_i} F, \varphi \rangle = -\langle F, \partial_{x_i} \varphi \rangle$$

Se  $F \in C^1(\bar{\Omega})$ , quindi anche

$$F \in C^1(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

allora possiamo scrivere

$$\langle F, \varphi \rangle = \int_{\Omega} F \varphi d\mathbf{x},$$

e derivata debole e *classica coincidono* (il – salta fuori dall'integrazione per parti)

$$\begin{aligned} \langle \underbrace{\partial_{x_i} F}_{\text{classica}}, \varphi \rangle &= \int_{\Omega} \partial_{x_i} F(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \underbrace{F(\mathbf{x})}_{\varphi \text{ supp. comp.}} \underbrace{\partial_{x_i} \varphi}_{\dots \varphi} - \int_{\Omega} F(\mathbf{x}) \partial_{x_i} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= -\langle F, \partial_{x_i} \varphi \rangle = \langle \underbrace{\partial_{x_i} F}_{\text{debole}}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Estendiamo ora il nostro campo di lavoro alle **distribuzioni a valori vettoriali**, ovvero vettori di distribuzioni

$$\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n) = [\mathcal{D}'(\Omega)]^n \quad \mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n) \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

L'azione di  $\mathbf{F}$  su  $\boldsymbol{\varphi}$  è

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle F_i, \varphi_i \rangle$$

Da cui<sup>1</sup>:

- il gradiente diventa divergenza

$$\langle \nabla F, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \partial_{x_i} F, \varphi_i \rangle = - \sum_{i=1}^n \langle F, \partial_{x_i} \varphi_i \rangle = -\langle F, \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \varphi_i \rangle$$

cioè

$$\boxed{\langle \nabla F, \boldsymbol{\varphi} \rangle = -\langle F, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \rangle}$$

- Con passaggi analoghi

$$\boxed{\langle \operatorname{div} \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = -\langle \mathbf{F}, \nabla \boldsymbol{\varphi} \rangle}$$

<sup>1</sup>Prestare attenzione all'utilizzo alternato, nei vari punti, di scalari o vettori.

- mettendo insieme i risultati, otteniamo che il laplaciano può spostarsi liberamente dall'altra parte senza cambio di segno

$$\langle \Delta F, \varphi \rangle = \langle \operatorname{div}(\nabla F), \varphi \rangle = -\langle \nabla F, \nabla \varphi \rangle = \langle F, \operatorname{div}(\nabla \varphi) \rangle$$

cioè

$$\boxed{\langle \Delta F, \varphi \rangle = \langle F, \Delta \varphi \rangle}$$

## 7.2 Esercizio (controesempio derivata debole-classica)

Svolgiamo ora un esercizio (in buona parte di Analisi 2) per dimostrare come derivata debole e derivata classica possano non coincidere. Sia

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Sia

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Vogliamo trovare  $\Delta u$ .

### 7.2.1 Derivata classica

Osserviamo inanzitutto

$$\partial_{x_i} |\mathbf{x}| = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_i}{|x|} \Rightarrow \nabla |\mathbf{x}| = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

E per la regola della funzione composta

$$\nabla f(|\mathbf{x}|) = f'(|\mathbf{x}|) \nabla |\mathbf{x}| = f'(|\mathbf{x}|) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \tag{7.1}$$

Allora possiamo calcolare  $\Delta u$  usando (7.1):

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \Delta \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) = \operatorname{div} \left( \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \right) = \operatorname{div} \left( -\frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) = -\operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right)$$

Usiamo ora l'identità di Leibniz

$$\operatorname{div}(g\mathbf{F}) = \nabla g \cdot \mathbf{F} + g \operatorname{div} \mathbf{F} \quad \text{con } g = \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \text{ e } \mathbf{F} = \mathbf{x}$$

$$-\operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right) = - \left( \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \right) \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{x}}_{=3} \right) = - \left( -\frac{3}{|\mathbf{x}|^4} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} 3 \right)$$

e troviamo

$$\Delta u(\mathbf{x}) = - \left( -\frac{3}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{3}{|\mathbf{x}|^3} \right) = 0$$

Quindi  $u$  è armonica in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ .

### 7.2.2 Derivata distribuzionale

Per poter fare la derivata distribuzionale dobbiamo prima chiederci

$$u \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)?$$

L'unico problema della funzione è, ovviamente, nell'origine. Se l'integrale su una palla unitaria centrata nell'origine convergerà la condizione sarà soddisfatta.

$$\int_{B_1(\mathbf{0})} \frac{1}{|\mathbf{x}|} d\mathbf{x} = \int_0^1 \left( \int_{\partial B_r} \frac{1}{|\mathbf{x}|} d\sigma \right) dr = \int_0^1 \frac{1}{r} 4\pi r^2 dr < +\infty$$

Abbiamo utilizzato una formula di coarea (o integrazione per bucce)

$$\int_{B_R} f d\mathbf{x} = \int_0^R \left( \int_{\partial B_r} f d\sigma \right) dr$$

Quindi  $u \in L^1_{loc}$  ed è pertanto associata a una distribuzione  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ .

Per calcolare  $\Delta u$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  prendiamo una funzione test  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = \underbrace{\langle u, \Delta \varphi \rangle}_{u \in L^1_{loc}} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \Delta \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

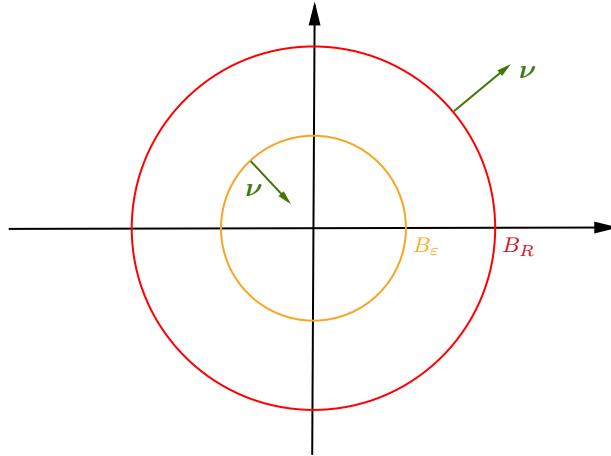
Quest'integrale presenta due problemi

1. Il dominio è **illimitato**: in realtà dato che

$$\text{supp } \varphi \subset B_R(\mathbf{0})$$

poiché  $\varphi$  è a supporto compatto mi basterà limitare il dominio di integrazione a tale palla

2. Ho una **singolarità** nell'origine: aggiriamo il problema integrando su un dominio  $B_R(\mathbf{0}) \setminus B_\varepsilon(\mathbf{0})$  e facendo il limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$



$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \Delta \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \Delta \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (7.2)$$

Ora  $\frac{1}{|\mathbf{x}|}$  è  $C^\infty$  nel dominio di integrazione e posso applicare la formula di integrazione per parti che ricordiamo qua sotto

$$\int_{\Omega} u \Delta v = \int_{\partial\Omega} u \partial_{\nu} v - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\partial\Omega} u \partial_{\nu} v - \int_{\partial\Omega} v \partial_{\nu} u + \int_{\Omega} v \Delta u$$

con

$$u = \frac{1}{|\mathbf{x}|}, \quad v = \varphi(\mathbf{x}), \quad \partial\Omega = \partial B_R \cup \partial B_\varepsilon$$

La normale  $\nu$  sarà diretta verso l'esterno o l'interno a seconda che mi trovi rispettivamente su  $\partial B_R$  o  $\partial B_\varepsilon$ .

Osserviamo inoltre che essendo  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$

$$\partial_{\nu} \varphi \equiv \varphi \equiv 0 \text{ su } \partial B_R$$

Pertanto gli integrali sul bordo esterno si semplificano subito

$$\int_{\partial B_R} \quad \int_{\partial B_R}$$

Applicando il tutto a (7.2) otteniamo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \partial_\nu \varphi(\mathbf{x}) d\sigma - \int_{\partial B_\varepsilon} \varphi(\mathbf{x}) \partial_\nu \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) d\sigma + \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} \varphi(\mathbf{x}) \Delta \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) d\mathbf{x} \right] \quad (7.3)$$

Di questi termini

- essendo  $\Delta u = 0$  il laplaciano classico in  $B_R \setminus B_\varepsilon$ :

$$\int_{B_R \setminus B_\varepsilon} \varphi(\mathbf{x}) \Delta \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) d\mathbf{x} = 0$$

- $\partial_\nu \varphi = \nabla \varphi \cdot \nu$ , dove  $\nu = -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$  essendo orientata in dentro

$$\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \partial_\nu \varphi(\mathbf{x}) d\sigma = - \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} d\sigma$$

- $\partial_\nu \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) = \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \cdot \nu$ , con  $\nu$  identica a prima

$$\int_{\partial B_\varepsilon} \varphi(\mathbf{x}) \partial_\nu \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) d\sigma = - \int_{\partial B_\varepsilon} \varphi(\mathbf{x}) \left( -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right) \cdot \left( -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) d\sigma = - \int_{\partial B_\varepsilon} \varphi(\mathbf{x}) \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} d\sigma$$

Inoltre su  $\partial B_\varepsilon$ :  $|\mathbf{x}| = \varepsilon$ . Possiamo riscrivere (7.3):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} d\sigma - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} \varphi(\mathbf{x}) d\sigma \right]$$

Se entrambi i termini tendono a 0 allora la mia derivata distribuzionale coinciderà con quella classica. Esaminiamoli separatamente:

- primo termine

$$\left| -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} d\sigma \right| \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} |\nabla \varphi(\mathbf{x})| \cdot |\mathbf{x}| d\sigma$$

$|\nabla \varphi| \leq c$  essendo  $\varphi$  una funzione test e su  $\partial B_\varepsilon$ :  $|\mathbf{x}| = \varepsilon$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} \underbrace{|\nabla \varphi(\mathbf{x})|}_{\leq c} \cdot \underbrace{|\mathbf{x}|}_{=\varepsilon} d\sigma \leq \frac{c}{\varepsilon} \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon} d\sigma}_{4\pi\varepsilon^2} = \frac{c}{\varepsilon} 4\pi\varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

- secondo termine

Posso usare il teorema della media integrale essendo  $\varphi$  continua

$$-\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} \varphi(\mathbf{x}) d\sigma = -4\pi \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} \varphi(\mathbf{x}) d\sigma = -4\pi \underbrace{\frac{1}{|\partial B_\varepsilon|} \int_{\partial B_\varepsilon} \varphi(\mathbf{x}) d\sigma}_{=\varphi(\mathbf{x}_\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -4\pi \varphi(\mathbf{0})$$

per un certo  $\mathbf{x}_\varepsilon \in \partial B_\varepsilon$ .

Riassumendo<sup>2</sup>

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = -4\pi \varphi(\mathbf{0}) = -4\pi \langle \delta_3, \varphi \rangle \Rightarrow -\Delta \left( \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) = \delta_3 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

La derivata classica e debole non coincidono.

---

<sup>2</sup>il simbolo  $\delta_3$  non indica la Delta centrata in 3, ma la delta tridimensionale centrata in 0.

### 7.3 Spazi di Sobolev

*Lezione Verzini 5 (01/04/2021)*

Gli spazi di Sobolev sono “spazi di funzioni  $L^p$  aventi derivate  $L^p$ ”. Lavoreremo con due spazi di Sobolev, il primo sarà  $H^1$  e il secondo  $H_0^1 \subseteq H^1$ .

Consideriamo  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dominio (cioè aperto connesso)<sup>3</sup>.

**DEFINIZIONE 7.5.**

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)\}$$

$\nabla v$  è inteso nel senso delle distribuzioni.

Questo spazio è dotato di prodotto scalare

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} [\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})] d\mathbf{x}$$

In particolare vale il seguente risultato delle norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \begin{cases} \|u\|_{L^2}^2 \\ \|\nabla u\|_{L^2}^2 \end{cases}$$

misurando le norme in  $H^1$  stiamo contemporaneamente controllando sia la norma della funzione, che delle sue derivate parziali.

**TEOREMA 7.6 — Microteorema.** Valgono i seguenti enunciati:

1.  $H^1(\Omega)$  è uno spazio di Hilbert<sup>a</sup>,
2.  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ,  $H^1$  si immerge in  $L^2$  con continuità, cioè come abbiamo appena scritto che la norma di  $H^1$  è più forte della norma di  $L^2$ ,
3.  $\nabla : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  è lineare e continuo.

<sup>a</sup>si può dimostrare verificando tutte le proprietà di uno spazio di Hilbert, sfruttando il fatto che  $L^2$  è di Hilbert.

Notiamo che  $H^1$  è, oltre che un sottoinsieme, anche un **sottospazio chiuso** di  $L^2$ .

In generale, anche se non li useremo, si definiscono gli spazi

$$H^k(\Omega) = \{v \in L^2 : D^\alpha v \in L^2, \forall |\alpha| \leq k\}$$

La notazione  $D^\alpha$  significa che intendiamo le derivate prime, seconde, terze, ecc, fino alla  $n$ -esima derivazione

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \Rightarrow D^\alpha v = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} v$$

Useremo solitamente solo  $H^1, H^2$ .

Ancora più in generale gli **spazi di Sobolev** sono

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) : D^\alpha v \in L^p, \forall |\alpha| \leq k\}$$

Facciamo un po' la conoscenza di questi spazi:

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega),$$

$$C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega) \text{ se } |\Omega| < +\infty, \text{ non in generale perché devono stare in } L^2$$

$H^1(\Omega)$  può contenere anche delle funzioni discontinue.

*Esempio.*

$$B_1(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^3, \quad u(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-a} \quad (a > 0)$$

È una funzione non definita in  $\mathbf{0}$ , per quali valori di  $a$  si ha che  $u \in H^1(B_1)$ ?

<sup>3</sup>di solito saranno limitati, ma possiamo tranquillamente immaginare che siano tutto  $\mathbb{R}^n$ .

1.  $u \stackrel{?}{\in} L^2(B_1)$  :

$$\begin{aligned}\int_{B_1} u^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{B_1} |\mathbf{x}|^{-2a} d\mathbf{x} = \int_0^1 \left[ \int_{\partial B_r} |\mathbf{x}|^{-2a} d\sigma \right] dr \\ &= \int_0^1 |r|^{-2a} \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi \int_0^1 r^{2-2a} dr \\ &< +\infty \Leftrightarrow 2 - 2a > -1 \Leftrightarrow a < \frac{3}{2}\end{aligned}$$

2. Calcoliamo il gradiente

$$\nabla u(\mathbf{x}) = -a|\mathbf{x}|^{-a-1} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = -a|\mathbf{x}|^{-a-2} \mathbf{x}$$

per quali valori sta in  $L^2$ ?  $\nabla u \stackrel{?}{\in} L^2(B_1)$  :

$$\begin{aligned}\int_{B_1} a^2 |\mathbf{x}|^{-2a-4+2} d\mathbf{x} &= \int_0^1 [a^2 r^{-2a-2} \cdot 4\pi r^2] dr \\ &= a^2 4\pi \int_0^1 r^{-2a} dr \\ &< +\infty \Leftrightarrow -2a > -1 \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}\end{aligned}$$

mettendo assieme

$$u \in H^1(B_1) \Leftrightarrow \left\{ a > 0 \wedge a < \frac{3}{2} \wedge a < \frac{1}{2} \right\} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{2}$$

**Verzini ci ha burlati**, ha calcolato il **gradiente classico**, invece andava calcolato come

$$\langle \nabla u, \varphi \rangle = -\langle u, \operatorname{div} \varphi \rangle$$

a questo punto  $u \in L^1_{\text{loc}}$ , scrivo l'integrale, tolgo la palla nell'origine, ecc. come l'altra volta. Facendo i conti si trova che era sufficiente che  $a$  fosse minore di  $\frac{3}{2}$ .

L'obiettivo finale sarà risolvere

$$\begin{cases} -\Delta u = f(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ u = 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases}$$

**OSSERVAZIONE.** Come interpretare le condizioni al contorno? Dato che le funzioni di  $H^1$  sono *quasi* funzioni di  $L^2$ , ci dobbiamo ricordare che le funzioni non erano proprio funzioni, ma **classi di equivalenza di funzioni**. Cioè due funzioni sono equivalenti se sono uguali a meno di un insieme di misura nulla e spesso

$$|\partial\Omega|_{n\text{-dimensionale}} = 0$$

Che senso ha dire che  $u = 0$  su un insieme di misura nulla? Lo scopriremo più avanti (Teoria delle Tracce: sotto ipotesi su  $\Omega$ , bordo lipschitziano, se  $u \in H^1(\Omega)$  allora  $u$  sul bordo di  $\Omega$  ha senso. La *traccia* di  $u$  è la restrizione di  $u$  al bordo  $u|_{\partial\Omega}$ ).

Noi tratteremo 2 situazioni facili:

- $n = 1, \Omega = (a, b)$ . Daremo un senso alla traccia, cioè quanto vale  $u(a), u(b)$ .
- $n = n, \Omega = \Omega$ , ma  $u|_{\partial\Omega} = 0$ . Non discuteremo se  $u = g$ .

$H^1$  è più piccolo e gode di più proprietà: in dimensione  $n = 1$  le funzioni di  $H^1$  sono continue fino al bordo<sup>4</sup>. Questo fatto non è vero in dimensione più alta, abbiamo visto un esempio.

<sup>4</sup>o meglio, ammettono un *rappresentante* continuo fino al bordo.

**TEOREMA 7.7 — Microteorema.** In dimensione  $n = 1$ ,  $u \in L^2(a, b)$ . Allora

$$u \in H^1(a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in C([a, b]), & \text{(cioè esiste un rappresentante continuo)} \\ \exists w \in L^2(a, b) \text{ t.c.} & \forall x, y \in [a, b] \\ u(x) - u(y) = \int_y^x w(s)ds & \text{(essenzialmente il TFCI)} \end{cases}$$

Inoltre

$$u' = w$$

sia nel senso  $\mathcal{D}'$  che quasi ovunque, derivata debole e classica coincidono quasi ovunque.

Per esempio Heaviside, che in effetti non sta in  $H^1$ , non ha derivata classica e debole coincidenti.

Il punto del teorema che ci interessa è dire che se  $u \in H^1$  allora è continua fino al bordo e possiamo dare un senso ai valori che assume in  $a, b$ .

**DIMOSTRAZIONE.** ( $\Rightarrow$ )  $u \in H^1(a, b)$  allora la sua derivata debole  $u' \in L^2(a, b)$ .

Definisco

$$v(x) = \int_a^x u'(s)ds$$

Attenzione: posso dire che  $v(x) = u(x) - u(a)$ ? Non per forza, per applicare il TFCI l'integrandina  $u'$  deve essere continua, ma sta solo in  $L^2$ . Dimostreremo che sarà vero.

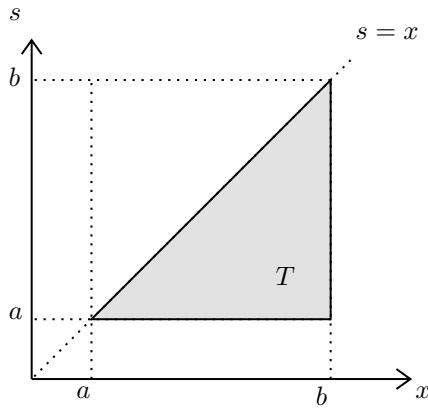
$v$  è continua fino al bordo:

$$\begin{aligned} x_n \rightarrow x \Rightarrow |v(x_n) - v(x)| &= \left| \int_x^{x_n} 1 \cdot u'(s)ds \right| \\ &\leq |x_n - x|^{1/2} \left( \int_x^{x_n} (u')^2 ds \right)^{1/2} && \text{(Cauchy-Schwarz)} \\ &\leq \underbrace{|x_n - x|^{1/2}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\left( \int_a^b (u')^2 ds \right)^{1/2}}_{\leq C, u' \in L^2} && \text{(l'integrale è positivo)} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$v$  continua implica che è funzione di  $L^1_{loc}$ , quindi associata a una distribuzione.

Calcolo  $v'$  (in  $\mathcal{D}'(a, b)$ ).  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(a, b)$

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle &= -\langle v, \varphi' \rangle \\ &= - \int_a^b v(x) \varphi'(x) dx \\ &= - \int_a^b \underbrace{\left[ \int_a^x u'(s)ds \right]}_{v(x)} \varphi'(x) dx \\ &= - \iint_T [u'(s) \varphi'(x)] ds dx = (*) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (*) &= - \int_a^b \left[ \int_s^b u'(s) \varphi'(x) dx \right] ds \\
 &= - \int_a^b u'(s) \left[ \int_s^b \varphi'(x) dx \right] ds \\
 &= - \int_a^b u'(s) [\varphi(b) - \varphi(s)] ds \\
 &= \int_a^b u'(s) \varphi(s) ds \\
 &= \langle u', \varphi \rangle
 \end{aligned}
 \quad \text{anche } u' \in L^2$$

ho dimostrato che  $v' = u'$  in  $\mathcal{D}'(a, b)$ .

Qui interviene un teorema importante

Se abbiamo una distribuzione e la sua derivata è nulla  $\forall \varphi$  allora è una **funzione costante**.

ovvero, formalizzato<sup>a</sup>

$$\begin{cases} F \in \mathcal{D}'(a, b), \\ \langle F', \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in D(a, b) \end{cases} \Rightarrow F \text{ è una funzione costante.}$$

Nel nostro caso

$$\langle v' - u', \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi$$

Allora

$v - u$  è una funzione costante

cioè  $v(x) - u(x) = C, \quad \forall x \in [a, b]$ .

Siccome  $v$  è continua, anche  $u(x) = v(x) - C$  è continua essendo differenza di funzioni continue.

In realtàabbiamo dimostrato anche la seconda parte

$$\begin{aligned}
 u(x) - u(y) &= [v(x) - C] - [v(y) - C] = v(x) - v(y) \\
 &= \int_a^x u'(s) ds - \int_a^y u'(s) ds \\
 &= \int_y^x u'(s) ds
 \end{aligned}$$

■  
la parte notevole è che è una **funzione**. Questo ci dice che non esistono distribuzioni-non-funzioni (tipo la Delta) la cui derivata faccia zero.

Definiamo il secondo spazio di Sobolev: un sottospazio di funzioni *nulle al bordo*.

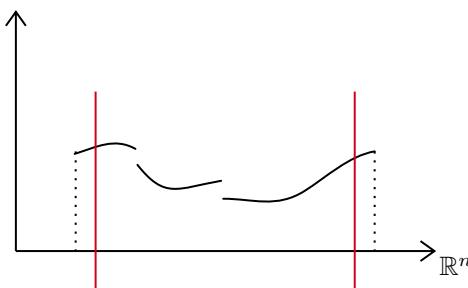
**DEFINIZIONE 7.8.** La chiusura di  $\mathcal{D}(\Omega)$  rispetto alla norma  $H^1$  prende il nome di spazio  $H_0^1$ :

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}} = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \exists (\varphi_k)_k \subset \mathcal{D}(\Omega) \text{ t.c. } \underbrace{\varphi_k \rightarrow u \text{ in } L^2, \nabla \varphi_k \rightarrow \nabla u \text{ in } L^2}_{\text{cioè } \varphi_k \rightarrow u \text{ in } H^1} \right\}$$

Commento per capire questo oggetto

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}} = L^2(\Omega)$$

questo equivale a dire che  $\mathcal{D}(\Omega)$  è denso in  $L^2(\Omega)$ . L'idea della dimostrazione di questa roba è la seguente. Ci sono due parti. Una parte è che posso approssimare le funzioni di  $L^2$  con funzioni  $C^\infty$  (questa è la parte facile). Per quanto brutta sia una funzione, discontinua o anche peggio, se invece che lei prendiamo delle *medie* di lei in delle palle molto piccole, sostanzialmente la media varia in modo più regolare.



Il vero problema è il supporto compatto. La funzione di  $L^2$  è tipicamente diversa da 0 fino al bordo. Dobbiamo pensare che la funzione sia estesa a 0 fuori per poter fare la media in prossimità del bordo. La fregatura è di trovare con delle cose ben diverse da 0, anche fuori dal bordo.

Come si ottiene il supporto compatto? Si segano via preventivamente le parti finali, moltiplicando per una funzione indicatrice. La parte di norma che perdiamo è trascurabile in  $L^2$ .

Se lo facciamo in  $H^1$  non ci basta misurare quello che perdiamo nella funzione, ma anche quello che perdiamo nella derivata. E questo ci impedisce di fare il gioco.

Se prendiamo la Heaviside *rattoppata* la norma delle funzioni che perdiamo è poca, ma la norma delle derivate delle funzioni esplode.

Si può dimostrare che

$$u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \Rightarrow \{u \in H_0^1(\Omega) \Leftrightarrow u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

In poche parole non possiamo dire davvero che una funzione fa 0 al bordo, ma possiamo dire se è o non è approssimabile da funzioni a supporto compatto; e se lo è, moralmente è come se facesse 0 al bordo.

Quindi  $H_0^1(\Omega)$  è un sottospazio chiuso di  $H^1(\Omega)$ .

### 7.3.1 Disuguaglianza di Poincaré

**TEOREMA 7.9 — Disuguaglianza di Poincaré.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio **limitato**. Allora  $\exists C_P > 0$  (costante di Poincaré) tale che

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \tag{7.4}$$

A priori per controllare le funzioni di  $H^1$  bisogna controllare loro e le loro derivate<sup>5</sup>. In  $H_0^1$  la **funzione è sempre controllata dalla derivata**.

<sup>5</sup>Funzione che oscilla moltissimo, ma di valori bassi, e funzione costante a valore altissimo, sono due esempi estremi in cui vediamo che è necessario controllarle entrambe.

**OSSERVAZIONE.** Un'immmediata conseguenza è che l'unica costante che può appartenere ad  $H_0^1$  è la costante nulla, ulteriore indice che *ci stanno le cose che si annullano al bordo*.

Ovvero, se consideriamo un dominio limitato ( $|\Omega| < +\infty$ ), le costanti stanno in  $H^1$ :  $u(x) \equiv c, u \in H^1(\Omega)$ , ma

$$u \in H_0^1(\Omega) \Leftrightarrow c = 0$$

Lezione Verzini 6 (08/04/2021)

**OSSERVAZIONE.** La diseguaglianza di Poincaré non vale in  $H^1$  proprio perché ci basta prendere una costante dove otterremmo la sua norma  $L^2$ , generalmente maggiore di zero, maggiorata da 0.

**DIMOSTRAZIONE.** Si svolge in due passi. Sfruttiamo il fatto che  $\mathcal{D}(\Omega)$  è denso in  $H_0^1(\Omega)$ :

1. dimostro la Diseguaglianza di Poincaré in  $\mathcal{D}(\Omega)$ ,
2. per approssimazione estendo ad  $H_0^1(\Omega)$ .

**Passo 1.**

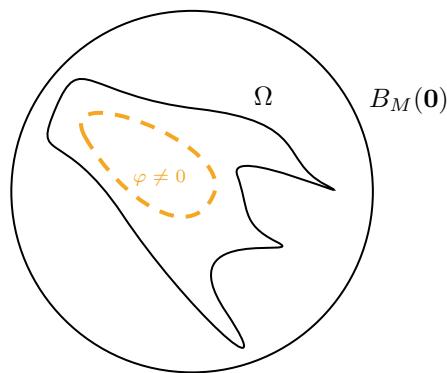
Fisso una funzione test  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  e costruisco un apposito campo vettoriale  $\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \varphi^2(\mathbf{x})\mathbf{x}}$  su cui applicare il teorema della divergenza

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma$$

Per applicare il teorema della divergenza devo controllare due cose:

1. Il campo deve essere di classe  $C^1$  fino al bordo: in questo caso  $\varphi$  è  $C^\infty$  fino al bordo quindi non ho problemi.
2. Il bordo del dominio deve essere sufficientemente regolare, ad esempio Lipschitziano (in modo tale che la normale sia definita quasi ovunque). Non ho alcuna ipotesi però sul dominio  $\Omega$  nel teorema: so solo che  $\varphi$  è a supporto compatto, eventualmente molto brutto, contenuto in  $\Omega$  *limitato*, allora esiste una palla (centrata nell'origine, ma non importa) che contiene  $\Omega$

$$B_M(\mathbf{0}) \supset \Omega$$



allora  $\varphi \in \mathcal{D}(B_M(\mathbf{0}))$  (basta estenderla a 0 fuori) e posso applicare il teorema della divergenza direttamente su  $B_M(\mathbf{0})$ .

Ma allora essendo  $\varphi$  a supporto compatto anche il campo è supporto compatto e si annulla sul bordo:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mathbf{x} = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma}_{=0} = 0 \quad (7.5)$$

Ricordiamo la formula di derivazione di Leibniz:

$$\operatorname{div}(f\mathbf{G}) = \nabla f \cdot \mathbf{G} + f \operatorname{div}\mathbf{G}.$$

Potrei modificare la (7.5):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{F} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi^2(\mathbf{x})\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \left[ \underbrace{2\varphi \nabla \varphi \cdot \mathbf{x}}_{\nabla(\varphi^2)} + \varphi^2 \underbrace{\operatorname{div}\mathbf{x}}_{=n} \right] d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

cioè, usando Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} n \int_{\Omega} \varphi^2 d\mathbf{x} &= -2 \int_{\Omega} \varphi \nabla \varphi \cdot \mathbf{x} d\mathbf{x} \leq 2 \left| \int_{\Omega} \varphi \nabla \varphi \cdot \mathbf{x} d\mathbf{x} \right| \\ &\leq 2 \int_{\Omega} |\varphi| |\nabla \varphi| |\mathbf{x}| d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

per ipotesi, se il dominio è limitato,  $\Omega \subset B_M(\mathbf{0})$ , per cui se  $\mathbf{x} \in \Omega$  allora il suo modulo è maggiorato da una certa costante  $|\mathbf{x}| \leq M$ . Infine per Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} n \int_{\Omega} \varphi^2 d\mathbf{x} &\leq 2M \int_{\Omega} |\varphi| |\nabla \varphi| d\mathbf{x} \\ &\leq 2M \left( \int_{\Omega} \varphi^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

quindi semplificando una norma  $L^2$  di  $\varphi$  ottengo:

$$\left( \int_{\Omega} \varphi^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \leq \underbrace{\frac{2M}{n}}_{C_P} \left( \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \right)^{1/2}.$$

## Passo 2.

Per il passo 1 so che

$$\exists C_P : \|\varphi\|_{L^2} \leq C_P \|\nabla \varphi\|_{L^2}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ma per inclusione densa:

$$u \in H_0^1(\Omega) \Leftrightarrow \varphi_n \xrightarrow{L^2} u, \quad \nabla \varphi_n \xrightarrow{L^2} \nabla u,$$

allora per continuità della norma, facendo il limite ottengo

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\|_{L^2} &\leq C_P \|\nabla \varphi_n\|_{L^2} \\ &\downarrow \\ \|u\|_{L^2} &\leq C_P \|\nabla u\|_{L^2} \end{aligned}$$

■

Si noti che in realtà<sup>6</sup> per ipotesi serve che  $\Omega$  sia limitato almeno in una direzione, ma non per forza tutte. Quando costruiamo il campo ausiliario, è sufficiente scegliere un  $\mathbf{x}$  tale che abbia componenti nulle direzioni illimitate e  $x_i$  nella  $i$ -esima direzione in cui è limitato. I calcoli si svolgono analogamente. Attenzione che in quel caso la divergenza di  $\mathbf{x}$  non è più  $n$ , ma  $1, 2, \dots$  a seconda del caso. Si noti che la stima *peggiora* dato che non dividiamo per  $n$ , ma per qualcosa di più piccolo.

<sup>6</sup>e questa è una chicca per l'orale.

**OSSERVAZIONE.** Con la dimostrazione ho trovato anche una stima della costante  $C_P$ :

$$C_P = \frac{2M}{n}.$$

Tuttavia non è la migliore costante possibile. Quest'ultima si trova pensando a:

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq C_P^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

che è equivalente a dire che

$$\frac{1}{C_P^2} \leq \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^2}^2},$$

la migliore costante si trova per il valore che minimizza  $C_P$ , cioè che massimizza  $1/C_P^2$ , cioè che minimizza il secondo termine:

$$\frac{1}{C_P^2} = \lambda_1(\Omega) = \min_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} u^2} \quad (7.6)$$

$\lambda_1$  è il primo autovalore di  $-\Delta$  con condizione di Dirichlet e assume significati fisici importanti:

- la frequenza di base di vibrazione di  $\Omega$ ,
- è legato alla *sopravvivenza* in fenomeni di reazione-diffusione.

**OSSERVAZIONE.** In generale:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Se  $u \in H_0^1(\Omega)$ , grazie a Poincaré

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \underbrace{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2}_{\|u\|_{H^1(\Omega)}^2} \leq (C_P^2 + 1) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (7.7)$$

Quindi in  $H_0^1$  (che ricordiamo è spazio di Hilbert essendo sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert) ci sono due norme equivalenti<sup>a</sup>:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

<sup>a</sup>Ce ne sono tante, ma ne abbiamo messe in evidenza due.

A seconda che si preferisca un'analisi numerica o teorica si usano, rispettivamente, la prima o la seconda norma.



## Capitolo 8

# Un'applicazione: formulazione variazionale per l'equazione di Poisson

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dominio limitato,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , sia dato il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \mathbf{x} \in \Omega \\ u = 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (8.1)$$

### Nozioni di soluzione.

$u$ soluzione classica	$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e verifica il sistema. Questo forza che $f \in C(\Omega)$ , ci impedisce di studiare forzanti con discontinuità.
$u$ soluzione debole (o variazionale)	useremo questa!
$u$ soluzione forte	$u \in H^2(\Omega)$ , $f \in L^2(\Omega)$ Non si usano molto.
$u$ soluzione distribuzionale	$u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ L'identità vale nel senso delle distribuzioni. Non possiamo formalizzare quanto vale al bordo.

La nozione di soluzione debole permette di scaricare eventuali *debolezze* della funzione su proprietà più regolari delle funzione test, tramite integrazione per parti.

Come si costruisce la **formulazione variazionale**?

- Scelgo uno spazio di funzioni test adatto al problema. Con Dirichlet si usa  $\mathcal{D}(\Omega)$ .
- Suppongo  $u$  soluzione classica di (8.1), allora  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  moltiplico e integro:

$$-\Delta u = f \Rightarrow \int_{\Omega} -\Delta u \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \varphi \, d\mathbf{x}$$

integro per parti

$$-\underbrace{\int_{\partial\Omega} \varphi \partial_{\nu} u \, d\sigma}_{=0 \text{ (supp. comp.)}} + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \varphi \, d\mathbf{x}$$

e ottengo<sup>1</sup>

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \varphi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (8.2)$$

Ora vorrei passare dallo spazio delle funzioni test a uno spazio di Hilbert: ambientiamo in **spazi di Sobolev**. So che l'insieme delle funzioni test è denso in  $H_0^1(\Omega)$ . Adesso bastano le derivate prime di  $u$ , e non serve che siano continue, basta che siano integrabili.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi_n \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} f \varphi_n \, d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega) \\ &\downarrow \varphi_n \xrightarrow{H^1} v \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Allora ho finalmente trovato la mia **formulazione debole (o variazionale)** del problema (8.1):

$$\boxed{\text{Trovare } u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)} \quad (8.3)$$

questa formulazione ha senso per funzioni molto *meno regolari* di quelle richieste dal problema classico (basta  $u \in H_0^1(\Omega)$ ).

Posso risolvere il problema (ovvero dimostrarne unicità ed esistenza) con Lax-Milgram o Riesz. Riscrivendo la formulazione variazionale in termini dei teoremi, dobbiamo trovare:

$$u \in V \text{ t.c. } a(u, v) = Fv, \quad \forall v \in V$$

con:

- $V = H_0^1(\Omega)$  (Hilbert)
- $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}$  (forma bilineare)
- $Fv = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}$  (lineare)

Abbiamo due punti di vista, come detto anche prima nell'equivalenza tra le norme:

1. Punto di vista “**analitico**”:

$$\|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|_{L^2} \Rightarrow a(u, v) = (u, v)_{H_0^1}.$$

Per il teorema di **Riesz** se  $F \in V^{*2}$

$$\exists! u, \|u\| = \|F\|_*$$

<sup>1</sup>Vale anche il **principio di coerenza**: partendo dalla formulazione variazionale posso tornare indietro. Sia  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  e tale che:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Posso integrare per parti

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}} u \varphi d\sigma - \int_{\Omega} \Delta u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \Rightarrow \int_{\Omega} (-\Delta u - f) \varphi = 0, \quad \forall \varphi$$

Ho una proprietà vera per tutte le funzioni test, che sono dense in  $L^2(\Omega)$ , posso *portare* questa proprietà in  $L^2$ :

$$(-\Delta u - f, w)_{L^2} = \int_{\Omega} (-\Delta u - f) w = 0, \quad \forall w \in L^2(\Omega).$$

Quindi

$$-\Delta u - f = 0 \text{ q.o. in } \Omega,$$

ma essendo  $u$  di classe  $C^2$  (quindi  $\Delta u$  continuo) e  $f$  continua, allora abbiamo due *funzioni continue uguali quasi ovunque*, quindi sono *uguali ovunque*:

$$-\Delta u = f \text{ ovunque in } \Omega.$$

<sup>2</sup>La notazione indica il duale.

2. Punto di vista “numerico”:

$$\|u\|_{H_0^1} = \|u\|_{H^1}$$

cioè anche

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

Applico Lax-Milgram. Devo verificare:<sup>3</sup>

- $a$  continua

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

- $a$  coerciva

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \stackrel{?}{\geq} \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

per Poincaré usato come in (7.7)

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq \underbrace{\frac{1}{1+C_P^2}}_{\alpha} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

In entrambi i casi mi manca in realtà un ultimo tassello:  $F$  deve essere **lineare e continuo**.

È chiaramente lineare, quindi dimostro la continuità con la limitatezza. Facendo la nostra ultima ipotesi, ovvero  $f \in L^2(\Omega)$ , e applicando **Cauchy-Schwartz**

$$\begin{aligned} |Fv| &= \left| \int_{\Omega} fv \, d\mathbf{x} \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} = (*) \\ (*) &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} && \text{(per approccio numerico)} \\ (*) &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} && \text{(per approccio analitico)} \end{aligned}$$

In entrambi i casi possiamo concludere:

**TEOREMA 8.1.** Data  $f \in L^2(\Omega)$   $\exists! u \in H_0^1(\Omega)$  soluzione variazionale del problema di Dirichlet e ho anche una *stima di stabilità*:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq (1 + C_P^2) \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Dove la stima di stabilità è ricavata da

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_*, \quad \text{con } \alpha = \frac{1}{1+C_P^2}, \quad \|F\|_* \leq \|f\|_{L^2}.$$

Notiamo anche che  $f \in L^2$  è una richiesta molto ragionevole e consente, oltre che funzioni discontinue, anche funzioni che esplodono! È già molto meno bella rispetto a quanto chiedevamo che fosse continua.

Il fatto è che se  $f \in L^2$  allora esiste un'unica soluzione in  $H_0^1$ , ma se è continua non è detto che esista (se esiste è unica).

Solo per completezza (questo argomento sarà trattato nella parte numerica) vediamo cosa succede con condizioni al bordo diverse. Lavoriamo in  $n = 1$  con un'equazione di diffusione-reazione lineare

$$\begin{cases} -u''(x) + \mu(x)u = f(x) & a < x < b \\ u'(b) + \alpha u(b) = u_1 \\ -u'(a) + \alpha u(a) = u_0 & \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Con  $\alpha = 0$  ho Neumann, con  $\alpha > 0$  ho Robin.

Sia  $v \in C^\infty([a, b])$  (molto regolare, ma non si annulla al bordo), moltiplico l'equazione e integro

$$\int_a^b -u''v + \mu uv = \int_a^b fv$$

<sup>3</sup>Con Riesz non era necessario usando il prodotto scalare.

integrandi per parti

$$-u'(b)v(b) + u'(a)v(a) + \underbrace{\int_a^b [u'v' + \mu uv]}_{\text{forma bilineare}} = \underbrace{\int_a^b fv}_{\text{forma lineare}}$$

per tentare di dare una formulazione debole devo prendere

$$\begin{aligned} u &\in H^1(a, b) \\ v &\in H^1(a, b) \end{aligned}$$

allora  $v(a), v(b)$  hanno senso (essendo  $v$  continua fino al bordo). Le derivate di  $u, v$  sono funzioni di  $L^2$  quindi il problema sta nei termini  $u'(a), u'(b)$  che non hanno senso. Posso risolvere utilizzando le condizioni al bordo:

$$-\underbrace{(u_1 - \alpha u(b))v(b)}_{u'(b)} + \underbrace{(\alpha u(a) - u_0)v(a)}_{u'(a)} + \underbrace{\int_a^b [u'v' + \mu uv]}_{\text{forma bilineare}} = \underbrace{\int_a^b fv}_{\text{forma lineare}}$$

ora possiamo distinguere cose che sono bilineari e cose che sono semplicemente lineari. Ciò che contiene  $u$  va a sinistra, ciò che è senza  $u$  va a destra:

$$\underbrace{\alpha u(b)v(b) + \alpha u(a)v(a) + \int_a^b [u'v' + \mu uv]}_{a(u,v)} = \underbrace{u_1 v(b) + u_0 v(a) + \int_a^b fv}_{Fv}.$$