Soluzioni agli esercizi aggiuntivi di

Fondamenti di Ricerca Operativa

di Teo Bucci e Filippo Cipriani

Contents

1 Programmazione Lineare **1**
- 1.1 Esercizio 1 1
- 1.2 Esercizio 2 2
- 1.3 Esercizio 3 2
- 1.4 Esercizio 4 3
- 1.5 Esercizio 5 4
- 1.6 Esercizio 6 5
- 1.7 Esercizio 7 6
- 1.8 Esercizio 8 6
- 1.9 Esercizio 9 7
- 1.10 Esercizio 10 8

2 Programmazione Lineare e Dualità **9**
- 2.1 Esercizio 1 9
- 2.2 Esercizio 2 9
- 2.3 Esercizio 3 10
- 2.4 Esercizio 4 10
- 2.5 Esercizio 5 11
- 2.6 Esercizio 6 11
- 2.7 Esercizio 7 12
- 2.8 Esercizio 8 12
- 2.9 Esercizio 9 12
- 2.10 Esercizio 10 13
- 2.11 Esercizio 11 13

3 Grafi **15**
- 3.1 Esercizio 1 15
- 3.2 Esercizio 2 16
- 3.3 Esercizio 3 16
- 3.4 Esercizio 4 17
- 3.5 Esercizio 5 17
- 3.6 Esercizio 6 18
- 3.7 Esercizio 7 19
- 3.8 Esercizio 8 20

4 Programmazione Lineare Intera **21**
- 4.1 Esercizio 1 21
- 4.2 Esercizio 2 22
- 4.3 Esercizio 3 22
- 4.4 Esercizio 4 23
- 4.5 Esercizio 5 23

Chapter 1

Programmazione Lineare

1.1 Esercizio 1

Parametri

P porti, $i = 1, 2, 3$

c_i costo per porto per ogni vettura $(150, 250, 200)$

t_i costo fisso porto

S centri di smistamento, $j = 1, \dots, 4$

k_i costo di invio dal porto i al km

a_{ij} distanza dal porto i al centro j

r_j richiesta del centro j

d_i capacità del porto i

Variabili

$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \mathbb{Z}$ numero di automobili dal porto i al centro j

$y_i \in \{0, 1\}$, uguali a 1 se uso il porto i

$z_{ij} \in \{0, 1\}$, uguali a 1 se il porto i rifornisce il centro j

Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \underbrace{\sum_{ij} c_i x_{ij}}_{\text{auto}} + \underbrace{\sum_{i} t_i y_i}_{\text{porto}} + \underbrace{\sum_{ij} a_{ij} k_i x_{ij}}_{\text{trasporto}} \right\}$$

Vincoli

$$\begin{aligned}
&\sum_i x_{ij} \geq r_j \qquad \forall j \in S && \text{richiesta} \\
&\sum_j x_{ij} \leq d_i y_i \qquad \forall i \in P && \text{bigM + capacità} \\
&\sum_i z_{i,3} = 1 && \text{centro 3} \\
&x_{ij} \leq d_i z_{ij} \qquad \forall i \in P, \forall j \in S && \text{bigM} \\
&z_{22} \leq z_{24} && \text{logico}
\end{aligned}$$

1.2 Esercizio 2

Parametri

A aeroporti

H hangar

c_j, s_j, t_j operatori $\forall j \in H$

g_1 costo squadra 1

g_2 costo squadra 2

g_3 costo squadra 3

1c	1s	1t
3c	1s	X
3c	2s	2t

Variabili

$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}$ squadre tipo 1

$y_j \geq 0, y_j \in \mathbb{Z}$ squadre tipo 2

$z_j \geq 0, z_j \in \mathbb{Z}$ squadre tipo 3

$\varphi \in \{0,1\}$, uguale a 1 se uso 3 squadre di tipo 2

$w_{ij} \in \{0,1\}$, uguale a 1 se aereo i in hangar j, $\forall i \in A, \forall j \in H$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_j (x_j g_1 + y_j g_2 + z_j g_3)$$

Vincoli

$$\begin{aligned}
\sum_j w_{ij} &= 1 \qquad \forall i \in A && \text{assegnazione} \\
x_j + 3y_j + 3z_j &\geq \sum_i c_j w_{ij} \qquad \forall j \in H && \text{operai} \\
x_j + \ \ y_j + 2z_j &\geq \sum_i s_j w_{ij} \qquad \forall j \in H && \text{operai} \\
x_j \qquad + \ \ z_j &\geq \sum_i t_j w_{ij} \qquad \forall j \in H && \text{operai} \\
\sum_j y_j - 2 &\leq M\varphi && \text{(A)} \\
2\varphi &\leq \sum_j z_j && \text{(B)}
\end{aligned}$$

Gli ultimi due vincoli servono per realizzare:

$$y_j \geq 3 \overset{(A)}{\Rightarrow} \varphi = 1 \overset{(B)}{\Rightarrow} z_j \geq 2$$

1.3 Esercizio 3

Parametri

$p_j,\ j = 1,2$

r_j prezzo vendita

d_j domanda

I materie prime $i \in I$

c_i disponibilità

g_i costo unitario materie prima

g_{ji} materia i necessaria per j

o_1 ore p_1 da materia prima

o_2 ore p_2 da materia prima

oppure ottengo p_2 con

b unità di p_1 per p_2

o_3 ore lavorazione (p_2 da p_1)

k costo fisso attivazione

O ore a disposizione

Variabili

$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}$ unità di prodotto j da materie prime

$y \geq 0, y \in \mathbb{Z}$ unità di prodotto 2 da prodotto 1

$z \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se attivo processo produttivo

Funzione obiettivo

$$\max \left\{ [r_1(x_1 - by) + r_2(x_2 + y)] - \left[\sum_{ij} g_i q_{ji} x_j + kz \right] \right\}$$

Vincoli

$$\begin{aligned}
y &\leq Mz & & \text{bigM} \\
(x_1 - by) &\geq d_1 & & \text{richiesta} \\
(x_2 - y) &\geq d_2 & & \text{richiesta} \\
\sum_j q_{ji} x_j &\leq c_i \qquad \forall i \in I & & \text{disponibilità} \\
o_1 x_1 + o_2 x_2 + o_3 y &\leq O & & \text{disponibilità}
\end{aligned}$$

1.4 Esercizio 4

Parametri

T gruppi $i \in T$

p_i persone

J aerei $j \in J$

c_j costo noleggio

B_j capienza aereo

A aeroporto $k \in A$

G_k max voli per aeroporto

l_{jk} costo di far partire j da k

R sottoinsiemi di aeroporti vicini

S_r con $r = 1, \ldots, R$, al più un aeroporto

Variabili

$x_{ij} \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se gruppo i ad aereo j

$y_{jk} \in \{0,1\}$, uguale a 1 se aereo j parte da k
$z_j \in \{0,1\}$, uguale a 1 se uso aereo j
$w_k \in \{0,1\}$, uguale a 1 se uso aeroporto k
Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \sum_j c_j z_j + \sum_{jk} l_{jk} y_{jk} \right\}$$

Vincoli

$$\sum_i x_{ij} \leq M z_j \qquad \forall j \in J \qquad \text{bigM}$$
$$\sum_i p_i x_{ij} \leq B_j \qquad \forall j \in J \qquad \text{capacità}$$
$$\sum_j y_{jk} \leq G_k w_k \qquad \forall k \in K \qquad \text{bigM + capienza voli}$$
$$\sum_{k \in S_r} w_k \leq 1 \qquad \forall r = 1, \ldots, R \qquad \text{no aeroporti vicini}$$
$$\sum_j x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in I \qquad \text{assegnamento}$$
$$\sum_k y_{jk} = z_j \qquad \forall j \in J \qquad \text{un aereo per aeroporto, se usato}$$

1.5 Esercizio 5

Parametri
P domande iscrizione $i \in P$
$M \subset P, F \subset P$, uomini, donne ($M \cup F = P, M \cap F = \varnothing$)
n max persone per classe
d massimo classi ($D = 1, \ldots, d$ insieme classi)
b_i preparazione di i
q livello minimo per classe
C coppie formate $(i,j) \in C, i \in M, j \in F$
Variabili
$x_{ik} \in \{0,1\}$, uguale a 1 se persona i in classe k
$y_i \in \{0,1\}$, uguale a 1 se accetto domanda
Funzione obiettivo

$$\max \sum_i y_i$$

Vincoli

$$\sum_{i \in P} x_{ik} \leq n \qquad \forall k \in D \qquad \text{capacità classe}$$
$$\sum_{i \in M} x_{ik} = \sum_{i \in F} x_{ik} \qquad \forall k \in D \qquad \text{uguali } M/F$$

$$\sum_{i \in P} x_{ik} b_i \geq q \sum_{i \in P} x_{ik} \qquad \forall k \in D \qquad \text{preparazione}$$

$$y_i \leq \sum_{k \in D} x_{ik} \qquad \forall i \in P \qquad \text{bigM}$$

$$\sum_{k \in D} x_{ik} \leq 1 \qquad \forall i \in P \qquad \text{massimo 1 corso per persona}$$

$$x_{ik} = x_{jk} \qquad \forall (i,j) \in C, \forall k \in D \qquad \text{coppie}$$

1.6 Esercizio 6

Parametri

A insieme altiforni $i = 1 \dots N, i \in A$

m_i max quintali per altiforno

P prodotti $j \in P$

q_{1j} prodotto j da 1 quintale di materia prime con processo 1 (prodotto/quintale)

q_{2j} prodotto j da 1 quintale di materia prime con processo 2 (prodotto/quintale)

r_j richiesto prodotto

c_{1i} costo lavorazione al quintale in altiforno i con processo 1 (euro/quintale)

c_{2i} costo lavorazione al quintale in altiforno i con processo 2 (euro/quintale)

f_i costo attivazione processo 2 in altiforno i

Variabili

$w_i \in \{0,1\}$, uguale a 1 se lavoro più di q

$y_i \in \{0,1\}$, uguale a 1 se uso processo 2

$x_{ij1} \geq 0, x_{ij1} \in \mathbb{Z}$ prodotto j con processo 1 in altiforno i

$x_{ij2} \geq 0, x_{ij2} \in \mathbb{Z}$ prodotto j con processo 2 in altiforno i

Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \sum_i y_i f_i + \sum_{ij} \left[c_{1i} \frac{x_{ij1}}{q_{1j}} + c_{2i} \frac{x_{ij2}}{q_{2j}} \right] \right\}$$

Vincoli

$$\sum_j x_{ij2} \leq M y_i \qquad \forall i \in A \qquad \text{bigM}$$

$$\sum_j \left[\frac{x_{ij1}}{q_{1j}} + \frac{x_{ij2}}{q_{2j}} \right] \leq m_i \qquad \forall i \in A \qquad \text{capacità}$$

$$\sum_i [x_{ij1} + x_{ij2}] \geq r_j \qquad \forall j \in P \qquad \text{richiesta}$$

$$\sum_i y_i \leq N - 1 \qquad \text{no processo 2 su tutti gli altiforni}$$

$$\sum_i w_i \geq 1 \qquad \text{almeno 1 usa più di } q \text{ quintali}$$

$$q w_i \leq \sum_{ij} \left[\frac{x_{ij1}}{q_{1j}} + \frac{x_{ij2}}{q_{2j}} \right] \qquad \forall i \in A \qquad \text{vincolo logico}$$

1.7 Esercizio 7

Parametri

C cioccolatini $i \in C$

S confezioni regalo $j \in S$

r_{ij} richieste cioccolatini i in confezione j

g_i costo cioccolatino

m_i max produzione

p_i vendita cioccolatino sfuso i

d_j vendita confezione j

b_j costo scatola j

Variabili

$x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}$ numero cioccolatini i prodotti

$y_j \geq 0, y_j \in \mathbb{Z}$ numero confezioni j prodotte

$z \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se acquisto almeno q scatole

Funzione obiettivo

$$\max \left\{ \underbrace{\sum_j d_j y_j}_{\text{confezioni}} + \underbrace{\sum_i p_i \left(x_i - \sum_j r_{ij} y_j \right)}_{\text{sfusi}} - \underbrace{\sum_i g_i x_i}_{\text{costo prod.}} - \underbrace{\sum_j b_j y_j}_{\text{costo scatole}} + \underbrace{zB}_{\text{sconto}} \right\}$$

Vincoli

$$\begin{aligned} x_i &\geq \sum_j r_{ij} y_j \qquad \forall i \in I && \text{richiesta} \\ x_i &\leq m_i \qquad \forall i \in I && \text{capacità} \\ \sum_j y_j &\geq Qz && \text{sconto} \\ x_1 &\geq 0.2 \cdot \sum_i x_i && \text{qualità} \end{aligned}$$

1.8 Esercizio 8

Parametri

D difensori

A attaccanti

G giocatori $i \in G$

$r_i \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se giocatore i è attaccante

v_i valore giocatore

B valore complessivo formazione

q giocatori non giocanti

K formazioni $|K| = 2$

Variabili

$z \geq 0, z \in \mathbb{Z}$ valore formazione di minimo valore

$x_{ik} \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se giocatore i è nelle formazione k

$y_i \in \{0,1\}$, uguale a 1 se i gioca in entrambe

Funzione obiettivo

$$\max z$$

Vincoli

$$\begin{aligned}
\sum_i r_i x_{ik} = A \qquad & \forall k \in K \\
\sum_i (1-r_i)x_{ik} = D \qquad & \forall k \in K \\
\sum_i v_i x_{ik} \geq B \qquad & \forall k \in K && \text{minimo valore richiesto} \\
\left(|G| - \sum_i y_i\right) \geq q \qquad & && \text{almeno } q \text{ non giocanti entrambe} \\
\left(\sum_k x_{ik} - 1\right) \leq M y_i \qquad & \forall i \in I && \text{bigM} \\
z \leq \sum_i v_i x_{ik} \qquad & \forall k \in K && \text{bottleneck}
\end{aligned}$$

1.9 Esercizio 9

Parametri

B beni $i \in B$

M magazzino $j \in M$

A luoghi distribuzione $k \in A$

c_i costo bene i

v_i spazio occupato da i in magazzino

b_j capacità

f_j costo fisso magazzino se usato

g_{jk} costo trasporto bene da j a k

d_{ik} richiesta bene i a k

Variabili

$y_j \in \{0,1\}$, uguale a 1 se uso j

$z_{ijk} \geq 0, z_{ijk} \in \mathbb{Z}$ numero di beni i da j a k

Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \sum_{ijk} c_i z_{ijk} + \sum_j f_j y_j + \sum_{ijk} z_{ijk} g_{jk} \right\}$$

Vincoli

$$\begin{aligned}
\sum_j z_{ijk} \geq d_{ik} \qquad & \forall i \in I, \forall k \in K && \text{richiesta} \\
\sum_{ik} v_i z_{ijk} \leq b_j y_j \qquad & \forall j \in J && \text{bigM e capacità}
\end{aligned}$$

1.10 Esercizio 10

Parametri

C analisi $i \in C, i = 1, \dots, 4$

O ospedali $j \in O, j = 1, \dots, 5$

d_{ij} tempo da i a j

r_j richieste analisi

b_i max analisi nel centro i

Variabili

$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \mathbb{Z}$ numero analisi al centro i per ospedale j

$z_{2i} \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se 2 si serve da i

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{ij} a_{ij} x_{ij}$$

Vincoli

$$\begin{aligned}
\sum_j x_{1j} &\leq 0.8 \cdot \left(\sum_j x_{2j} + x_{3j} \right) && \text{qualità} \\
\sum_j x_{2j} &\leq 0.6 \cdot \left(\sum_j x_{ij} + x_{3j} \right) && \text{qualità} \\
\sum_j (x_{3j} + x_{4j}) &\leq 0.5 \cdot \sum_{ij} x_{ij} && \text{qualità} \\
\sum_i x_{ij} &= r_j \qquad \forall j \in J && \text{richiesta} \\
\sum_j x_{ij} &\leq b_i \qquad \forall i \in I && \text{capacità} \\
\sum z_{2i} &= 1 && \text{un solo centro per 2} \\
x_{i2} &\leq b_i z_{2i} \qquad \forall i \in I && \text{bigM}
\end{aligned}$$

Chapter 2

Programmazione Lineare e Dualità

2.1 Esercizio 1

$$\begin{gathered}\min 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + s_1 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 12 \\ x_i, s_i \geq 0\end{gathered}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix} \quad c = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix}\vartheta_1 \\ \vartheta_2\end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{s_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5 & -2 & -3\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3\end{matrix} \\ \begin{bmatrix}-1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}-1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5 & -2 & -3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}8 \\ 12\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4 \\ 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2 \\ 12\end{bmatrix}$	$x_2 = 2$	$s_1 = 0$
iter. 2	$\{x_2, s_2\}$	$\begin{bmatrix}4 & 0 \\ 1 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5 & -3 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_3 & s_1\end{matrix} \\ \begin{bmatrix}-1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{9}{2} & -4 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2 \\ 10\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-4 \\ 4\end{bmatrix}$	$x_3 = 4$	$s_2 = 0$
iter. 3	$\{x_2, x_3\}$	$\begin{bmatrix}4 & -2 \\ 1 & 2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2 & -3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & s_1 & s_2\end{matrix} \\ \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{13}{2} & \frac{1}{10} & \frac{7}{5}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4 \\ 4\end{bmatrix}$				

$z^* = -20.$

2.2 Esercizio 2

$$\begin{gathered}\min -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + s_2 = 6 \\ x_i, s_i \geq 0\end{gathered}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad c = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix}\vartheta_1\\ \vartheta_2\end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{s_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\ 6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$	$x_1 = 2$	$s_1 = 0$
iter. 2	$\{x_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_2 & x_3 & s_1\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}$	$x_3 = 2$	$x_1 = 0$
iter. 3	$\{x_3, s_2\}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-3 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_2 & s_1\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2 & -4 & 3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\ 2/3\end{bmatrix}$	$x_2 = \frac{2}{3}$	$s_2 = 0$
iter. 4	$\{x_2, x_3\}$	$\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2 & -3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & s_1 & s_2\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{10}{3}\end{bmatrix}$				

$z^* = -\frac{26}{3}$.

2.3 Esercizio 3

$$\min -2x_1 - x_2 - 3x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + s_2 = 12$$
$$x_i, s_i \geq 0$$

$$A = \begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 8 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array} \quad b = \begin{bmatrix}2\\ 12\end{bmatrix} \quad c = \begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}-2 & -1 & -3 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix}\vartheta_1\\ \vartheta_2\end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{s_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2 & -1 & -3\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 8\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2 & -1 & -3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\ 12\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\ 6\end{bmatrix}$	$x_1 = 2$	$s_1 = 0$
iter. 2	$\{x_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1 & -3 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_2 & x_3 & s_1\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 8 & 0\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 6 & -2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\ 8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\ 6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\ 4/3\end{bmatrix}$	$x_3 = \frac{4}{3}$	$s_2 = 0$
iter. 3	$\{x_1, x_3\}$	$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2 & -3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_2 & s_1 & s_2\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}\frac{5}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{7}{6} & \frac{5}{3} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{4}{3}\end{bmatrix}$				

$z^* = \frac{16}{3}$.

2.4 Esercizio 4

$$\min -2x_1 + 2x_2 - 2x_3$$
$$2x_1 - 2x_2 - x_3 + s_1 = 2$$
$$-3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + s_2 = 3$$
$$x_i, s_i \geq 0$$

$$A = \begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}2 & -2 & -1 & 1 & 0\\ -3 & 3 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array} \quad b = \begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix} \quad c = \begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}-2 & 2 & -2 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix}\vartheta_1\\ \vartheta_2\end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{s_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2 & 2 & -2\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}2 & -2 & -1\\ -3 & 3 & 2\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}2 & -2 & -1\\ -3 & 3 & 2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2 & 2 & -2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$	$x_1 = 2$	$s_1 = 0$
iter. 2	$\{x_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_2 & x_3 & s_1\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}-2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}-1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & -3 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\ 6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ 12\end{bmatrix}$	$x_3 = 12$	$s_2 = 0$
iter. 3	$\{x_1, x_3\}$	$\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2 & -2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_2 & s_1 & s_2\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}12 & 10 & 6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7\\ 12\end{bmatrix}$				

$z^* = -38$.

2.5 Esercizio 5

$$\min x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_i \geq 0$$

Fase 1.

$$\min w_1 + w_2$$
$$x_1 - x_2 + 3x_3 + w_1 = 5$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 + w_2 = 4$$
$$x_i \geq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & w_1 & w_2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & w_1 & w_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix}\vartheta_1\\\vartheta_2\end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{w_1, w_2\}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\\1&-1&3\\2&1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&-1&3\\2&1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-3&0&-4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$	$x_1 = 2$	$w_2 = 0$
iter. 2	$\{x_1, w_1\}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}x_2&x_3&w_2\\-1&3&0\\1&1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4\\\frac{6}{5}\end{bmatrix}$	$x_3 = \frac{6}{5}$	$w_1 = 0$

Inizio.

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix}\vartheta_1\\\vartheta_2\end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{x_1, x_3\}$	$\begin{bmatrix}1&3\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}x_2\\-1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{3}{5}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{11}{5}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{7}{5}\\\frac{6}{5}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{3}{5}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{7}{4}\\-2\end{bmatrix}$	$x_2 = \frac{7}{4}$	$x_1 = 0$
iter. 2	$\{x_2, x_3\}$	$\begin{bmatrix}-1&3\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}x_1\\1\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{5}{4}\\\frac{3}{4}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{11}{4}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{7}{4}\\\frac{9}{4}\end{bmatrix}$				

$z^* = -\frac{5}{4}$.

2.6 Esercizio 6

$$\min 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 10x_5$$
$$x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 5$$
$$x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 9$$
$$x_i \geq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix}\vartheta_1\\\vartheta_2\end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{x_1, x_2\}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3&2&10\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}x_3&x_4&x_5\\1&-1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1&2&5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5\\\frac{9}{2}\end{bmatrix}$	$x_3 = \frac{9}{2}$	$x_2 = 0$
iter. 2	$\{x_1, x_3\}$	$\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2&10\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}x_2&x_4&x_5\\0&-1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-2&\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&3&\frac{11}{2}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{9}{2}\end{bmatrix}$				

$z^* = \frac{29}{2}$.

2.7 Esercizio 7

$$\begin{aligned} \min -3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_i \geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix}\vartheta_1 \\ \vartheta_2\end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{x_1, x_4\}$	$\begin{bmatrix}1 & 3 \\ 2 & 2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-3 & -1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}x_2 & x_3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2 & 4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{5}{4} \\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-5 \\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$	$x_2 = \frac{1}{3}$	$x_4 = 0$
iter. 2	$\{x_1, x_2\}$	$\begin{bmatrix}1 & 2 \\ 2 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-3 & -2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1 & -1 & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}x_3 & x_4 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{10}{3} & \frac{8}{3}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$				

$z^* = \frac{14}{3}$.

2.8 Esercizio 8

$$\begin{aligned} \min -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 4x_4 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_i \geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix}\vartheta_1 \\ \vartheta_2\end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{x_1, x_2\}$	$\begin{bmatrix}1 & 4 \\ -2 & 3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{3}{11} & -\frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2 & 4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2 & -4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1 & -2 \\ 2 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1 & -\frac{10}{11} \\ 0 & -\frac{3}{11}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & -\frac{52}{11}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 \\ 2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{10}{11} \\ -\frac{3}{11}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 \\ -\frac{22}{3}\end{bmatrix}$	$x_4 = \infty$	$x_2 = 0$

$z^* = -\infty$.

2.9 Esercizio 9

Problema duale.

$$\begin{aligned} \min -y_1 + y_2 + 17y_3 + 5y_4 + 4y_5 \\ -2y_1 + y_2 + 4y_3 - 5y_5 \geq 2 \\ -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 1 \\ y_i \geq 0 \end{aligned}$$

Scarti complementari.

	$(3, 5)$	$(4, 1)$
$(-2x_1 - x_2 + 1)y_1 = 0$	$y_1 = 0$	
$(x_1 - x_2 - 3)y_2 = 0$	$y_2 = 0$	
$(4x_1 + x_2 - 17)y_3 = 0$	y_3	
$(x_2 - 5)y_4 = 0$	y_4	
$(-x_1 - x_2 - 4)y_5 = 0$	$y_5 = 0$	
$(-2y_1 + y_2 + 4y_3 - 5y_5 - 2)x_1 = 0$	$y_3 = 1/2$	
$(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + y_5 - 1)x_2 = 0$	$y_4 = 1/2$	
	Ottimo	Non ottimo

2.10 Esercizio 10

Problema duale.

$$\min -\frac{3}{2}y_1 - \frac{3}{2}y_2 + 7y_3 + 6y_4$$
$$y_1 + y_3 + y_4 = 3$$
$$y_2 + y_3 - y_4 = 0$$
$$y_1, y_2 \leq 0, y_3, y_4 \geq 0$$

Scarti complementari.

	$\left(\frac{13}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{3}{2}, \frac{17}{2}\right)$
$\left(x_1 + \frac{3}{2}\right) y_1 = 0$	$y_1 = 0$	y_1
$\left(x_2 + \frac{3}{2}\right) y_2 = 0$	$y_2 = 0$	$y_2 = 0$
$(x_1 + x_2 - 7)y_3 = 0$	y_3	y_3
$(x_1 - x_2 - 6)y_4 = 0$	y_4	$y_4 = 0$
$(y_1 + y_3 + y_4 - 3)x_1 = 0$	$y_3 + y_4 = 3$	$y_1 + y_3 = 3$
$(y_2 + y_3 - y_4)x_2 = 0$	$y_3 - y_4 = 0$	$y_3 = 0$
	$y_3 = 3/2$	$y_1 = 3$
	$y_4 = 3/2$	
	Ottimo	Non ottimo

2.11 Esercizio 11

Problema duale.

$$\min 4y_1 + 5y_2 + y_3 + 4y_4$$
$$-3y_1 + y_3 + 2y_4 = 1$$
$$y_1 + y_2 - y_3 + y_4 = 2$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0, y_4 \leq 0$$

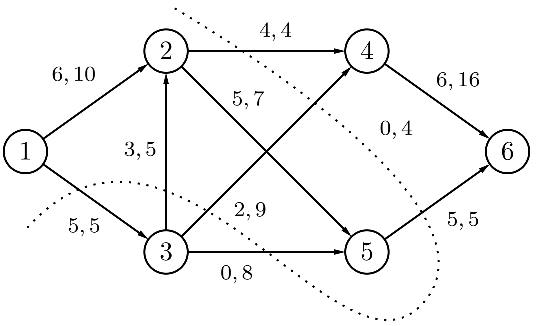
Scarti complementari.

	$(6, 5)$	$(0, 4)$
$(-3x_1 + x_2 - 4)y_1 = 0$	$y_1 = 0$	y_1
$(x_2 - 5)y_2 = 0$	y_2	$y_2 = 0$
$(x_1 - x_2 - 1)y_3 = 0$	y_3	$y_3 = 0$
$(2x_1 + x_2 - 4)y_4 = 0$	$y_4 = 0$	y_4
$(-3y_1 + y_3 + 2y_4 - 1)x_1 = 0$	$y_3 = 1$	$-3y_1 + 2y_4 = 1$
$(y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - 2)x_2 = 0$	$y_2 = 3$	$y_1 + y_4 = 2$
		$y_1 = 3/5$
		$y_4 = 7/5$
	Ottimo	Non ottimo

Chapter 3

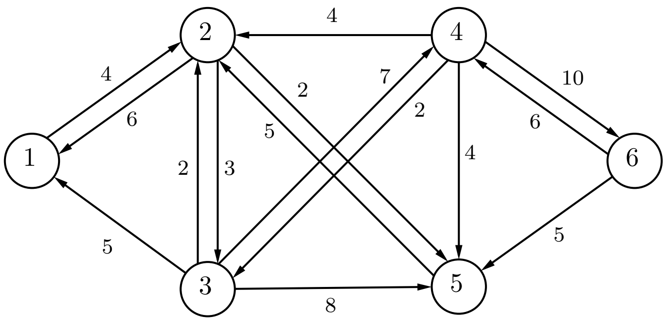
Grafi

3.1 Esercizio 1

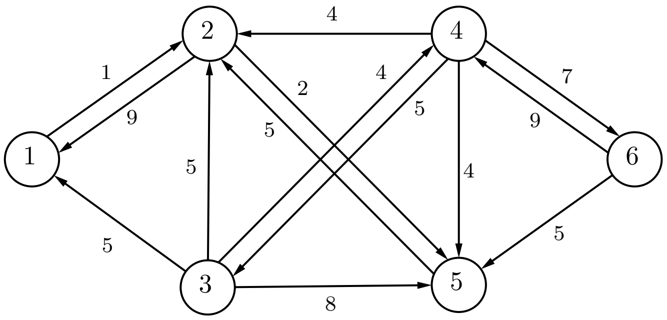


$s = 1, t = 6$.

$N_s = \{1, 2, 5\}, N_t = \{3, 4, 6\}$.

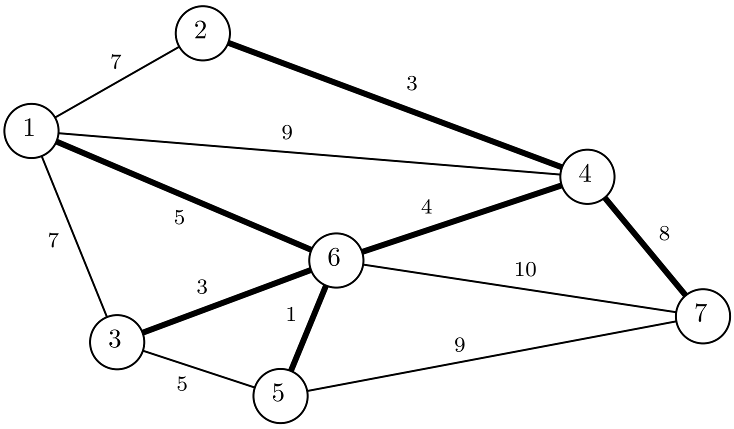


$(1) - (2) - (3) - (4) - (6)$
$(1, 2)\ \lambda^+ = 4$
$(2, 3)\ \lambda^- = 3$
$(3, 4)\ \lambda^+ = 7$
$(4, 6)\ \lambda^+ = 10$
$\lambda_{\min} = 3$



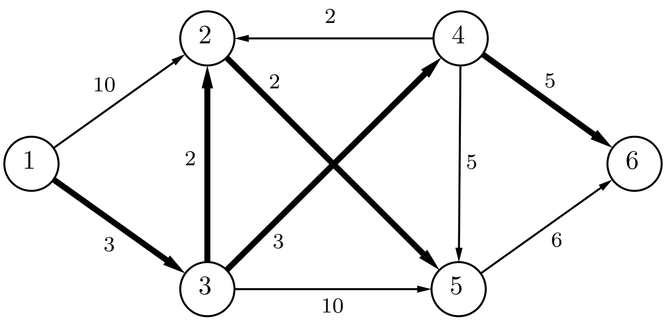
$\nexists$ cammino aumentante
$v = 9 + 15 = 14$

3.2 Esercizio 2



Lato	Costo	Accettato	$\|T\|$
$(5,6)$	1	✓	1
$(3,6)$	3	✓	2
$(2,4)$	3	✓	3
$(4,6)$	4	✓	4
$(1,6)$	5	✓	5
$(3,5)$	5	✗	
$(1,2)$	7	✗	
$(1,3)$	7	✗	
$(4,7)$	8	✓	6
$(5,7)$	9		
$(1,4)$	9		
$(6,7)$	10		

3.3 Esercizio 3



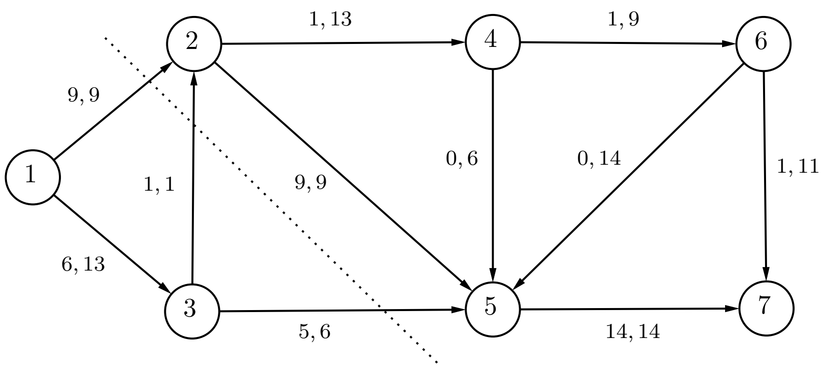
Enumerazione topologica.

Nodo	Etichetta
(1)	1
(3)	2
(4)	3
(2)	4
(5)	5
(6)	6

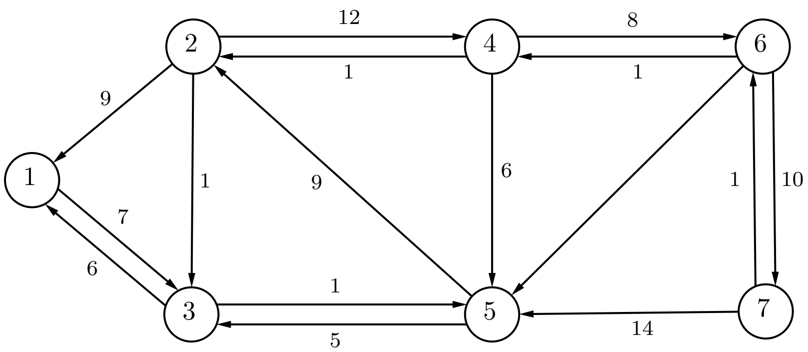
SPT-aciclico.

i	d, P	d, P	d, P	d, P	d, P	d, P
1	$0, 1$					
2	$M, 1$	$10, 1$	$5, 3$			
3	$M, 1$	$3, 1$				
4	$M, 1$		$6, 3$			
5	$M, 1$		$13, 3$	$11, 4$	$7, 2$	
6	$M, 1$			$11, 4$		
i	1	3	4	2	5	6

3.4 Esercizio 4

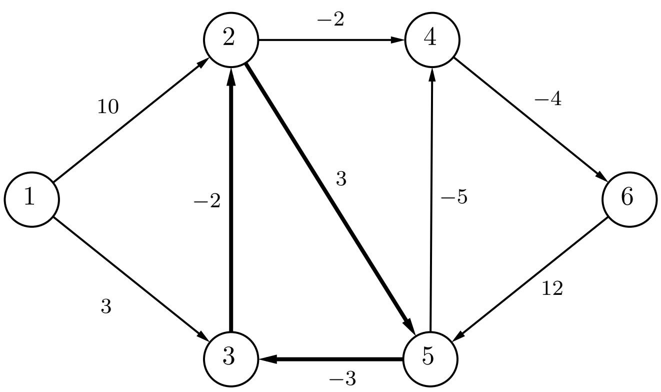


$N_s = \{1, 3\}, N_t = \{2, 4, 5, 6, 7\}, U(N_s, N_t) = 16 = v.$



$(1) - (3) - (5) - (2) - (4) - (6) - (7)$
$(1, 3)\ \lambda^+ = 7$
$(3, 5)\ \lambda^+ = 1$
$(5, 2)\ \lambda^- = 9$
$(2, 4)\ \lambda^+ = 12$
$(4, 6)\ \lambda^+ = 8$
$(6, 7)\ \lambda^+ = 10$
$\lambda_{\min} = 1$

3.5 Esercizio 5



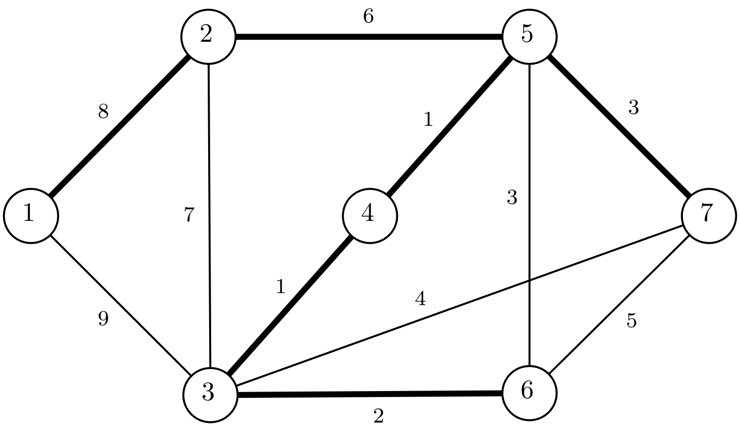
Cicli, costi negativi: Bellman-Ford.

i	d, P, k	d, P, k	d, P, k	d, P, k	d, P, k	d, P, k	d, P, k	d, P, k
1	$0, 1, 1$							
2	$M, 1, 0$	$10, 1, 1$	$1, 3, 1$					$-1, 3, 2$
3	$M, 1, 0$	$3, 1, 1$					$1, 5, 2$	
4	$M, 1, 0$			$-1, 2, 1$				
5	$M, 1, 0$			$4, 2, 1$				
6	$M, 1, 0$				$-5, 4, 1$			
Q	1	$2, 3$	2	$4, 5$	$5, 6$	5	3	2
i	1	3	2	4	6	5	3	2

E così via finché k di $2, 3$ non supera il numero soglia. Esiste un ciclo negativo

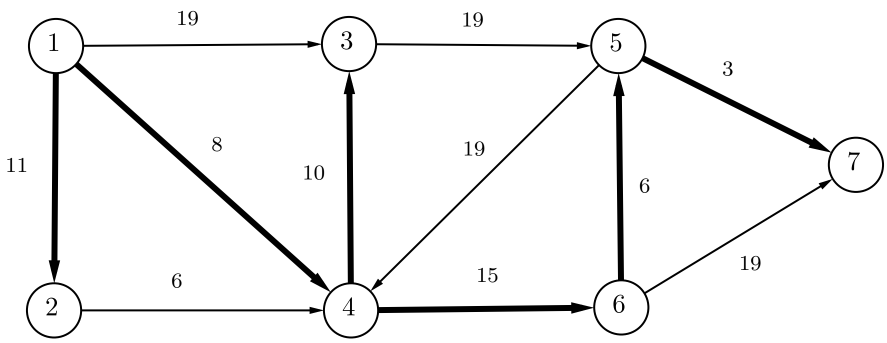
$$(2) - (5) - (3)$$

3.6 Esercizio 6



Lato	Costo	Accettato	$\lvert T \rvert$
$(3, 4)$	1	✓	1
$(4, 5)$	1	✓	2
$(3, 6)$	2	✓	3
$(5, 7)$	3	✓	4
$(5, 6)$	3	✗	
$(3, 7)$	4	✗	
$(6, 7)$	5	✗	
$(2, 5)$	6	✓	5
$(3, 2)$	7	✗	
$(1, 2)$	8	✓	6
$(1, 3)$	9		

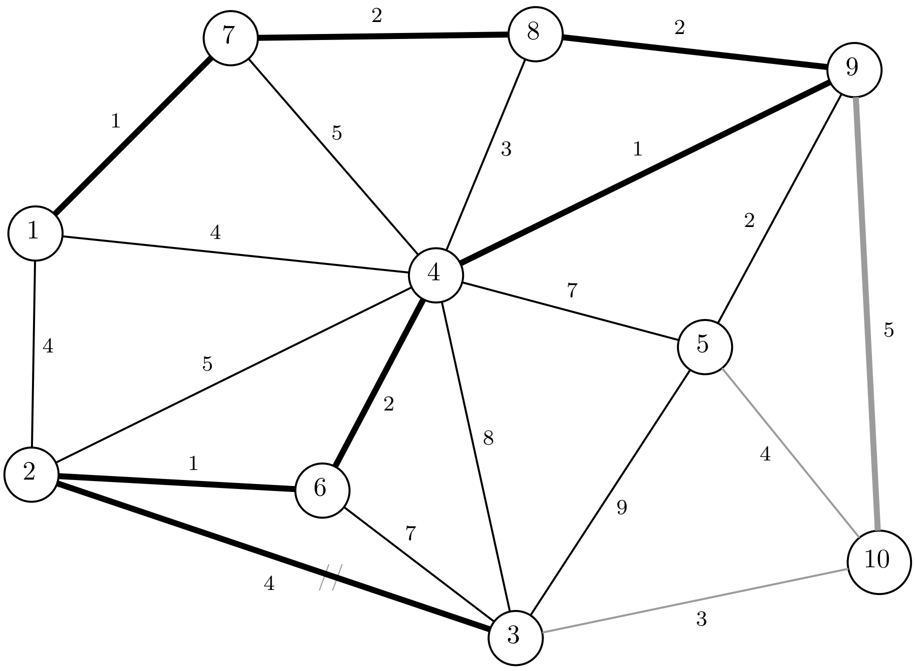
3.7 Esercizio 7



Dijkstra.

i	d, P	d, P	d, P	d, P	d, P	d, P
1	$0, 1$					
2	$M, 1$	$11, 1$				
3	$M, 1$	$19, 1$	$18, 4$			
4	$M, 1$	$8, 1$				
5	$M, 1$			$37, 3$	$29, 6$	
6	$M, 1$		$23, 4$			
7	$M, 1$				$42, 6$	$32, 5$
Q	1	$2, 3, 4$	$2, 3, 6$	$5, 6$	$5, 7$	7
i	1	4	$2, 3$	6	5	7

3.8 Esercizio 8



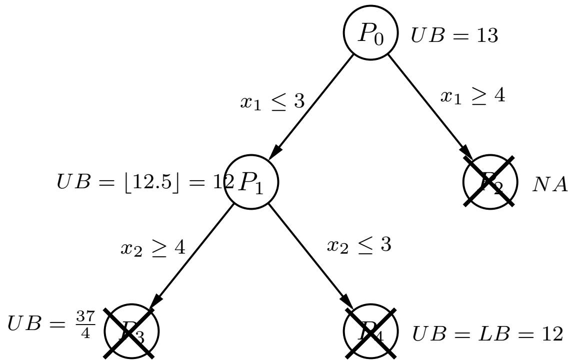
Lato	Costo	Accettato	$\|T\|$
$(1,7)$	1	✓	1
$(2,6)$	1	✓	2
$(4,9)$	1	✓	3
$(4,6)$	2	✓	4
$(5,9)$	2	✓	5
$(8,9)$	2	✓	6
$(7,8)$	2	✓	7
$(8,4)$	3	✗	
$(3,10)$	3	3	8
$(1,4)$	4	✗✗	
$(2,1)$	4	✗✗	
$(5,10)$	4	3	9 (stop!)
$(2,3)$	4	✓	8
$(4,10)$	5		
$(7,4)$	5		
$(2,4)$	5		
$(4,5)$	7		
$(6,3)$	7		
$(4,3)$	8		
$(3,5)$	9		

Chapter 4

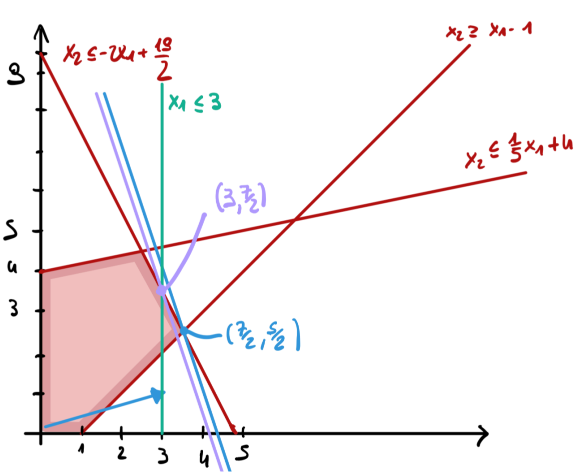
Programmazione Lineare Intera

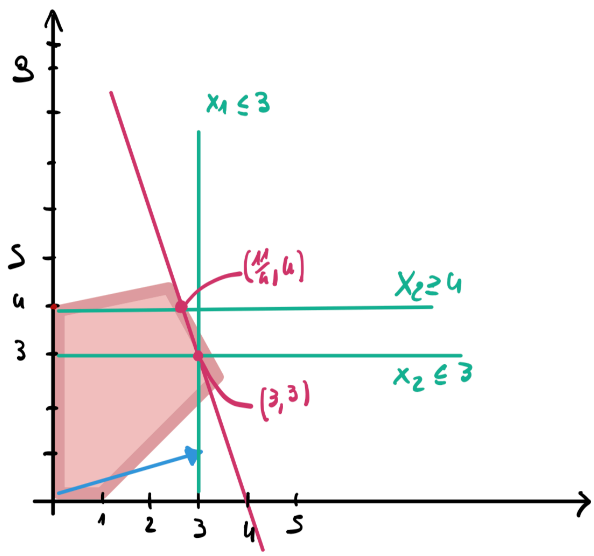
4.1 Esercizio 1

$$x_2 \leq \frac{1}{5}x_1 + 4$$
$$x_2 \leq -2x_1 + \frac{19}{2}$$
$$x_2 \geq x_1 - 1$$

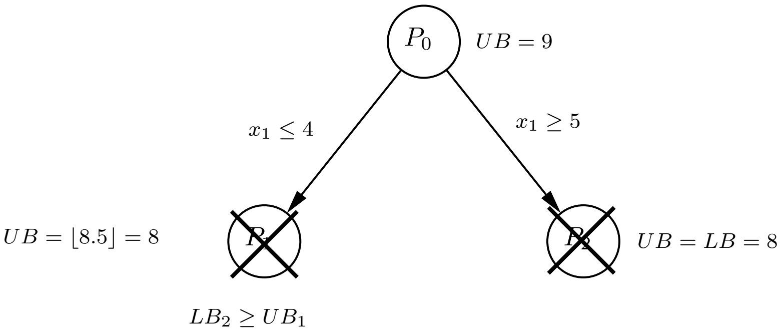


Ottimo: $12, (3, 3)$.

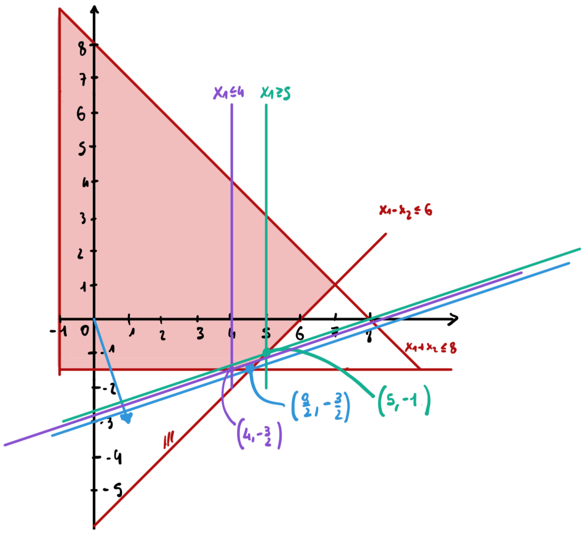




4.2 Esercizio 2



Ottimo: $8, (5, -1)$.



4.3 Esercizio 3

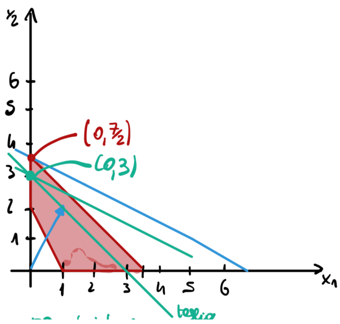
Rilassamento continuo:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{7}{2} \quad s_1 = 0 \quad s_2 = \frac{3}{2}$$

Equazioni dei tagli:

$$\begin{array}{lllll} x_2 + x_1 + \frac{1}{2}s_1 = \frac{7}{2} & \rightarrow & x_2 + x_1 + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor s_1 \leq \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor & \rightarrow & x_2 + x_1 \leq 3 \qquad \boxed{x_1 + x_2 \leq 3} \\ s_2 - x_1 + \frac{1}{2}s_1 = \frac{3}{2} & \rightarrow & s_2 - x_1 + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor s_1 \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor & \rightarrow & s_2 - x_1 \leq 1 \\ & & & & s_2 = 2x_1 + x_2 - 2 \end{array}$$

Ottimo: $-6, (0, 3)$.



4.4 Esercizio 4

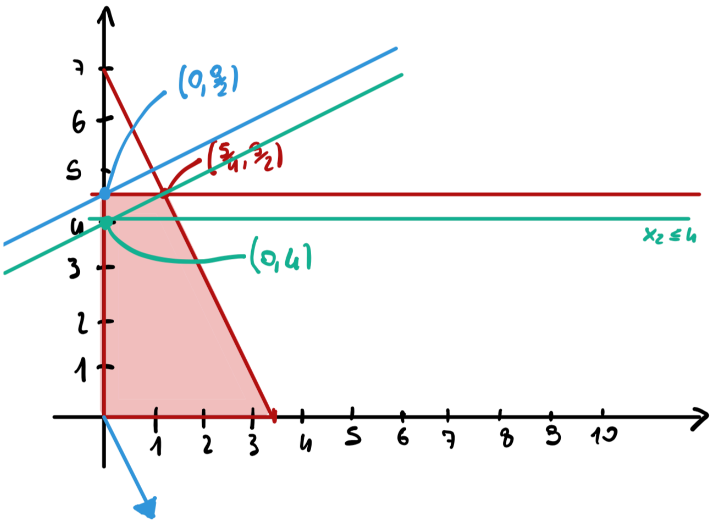
Rilassamento continuo:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{9}{2} \quad s_1 = 0 \quad s_2 = \frac{5}{2}$$

Equazioni dei tagli:

$$\begin{array}{llllll} x_2 + \frac{1}{2}s_1 = \frac{9}{2} & \rightarrow & x_2 + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor s_1 \leq \left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor & \rightarrow & x_2 \leq 4 & \boxed{x_2 \leq 4} \\ s_2 + 2x_1 - \frac{1}{2}s_1 = \frac{5}{2} & \rightarrow & s_2 + 2x_1 - \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor s_1 \leq \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor & \rightarrow & s_2 + 2x_1 - s_1 \leq 2 & \end{array}$$

Ottimo: $-8, (0, 4)$.



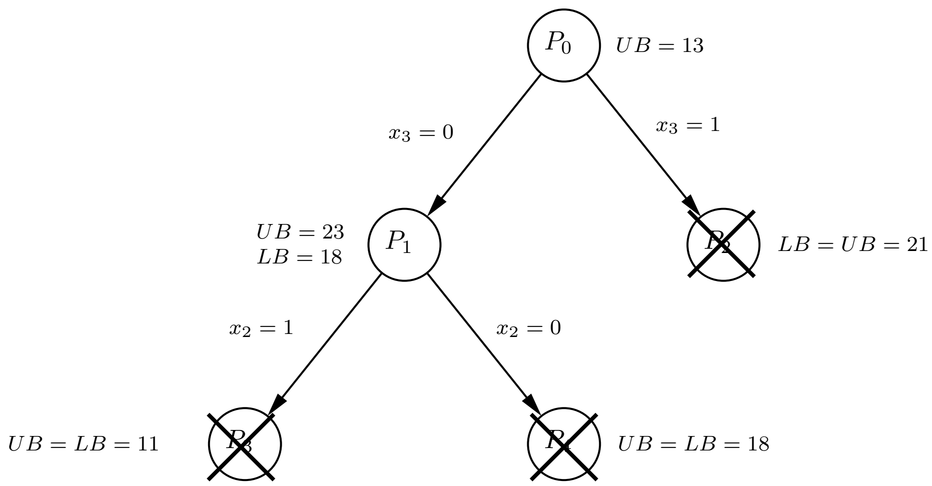
4.5 Esercizio 5

$B = 13$.

p_i	16	9	12	2
w_i	8	6	7	2
$\frac{p_i}{w_i}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{12}{7}$	1
	x_1	x_2	x_3	x_4

Ordino

$$x_1, x_3, x_2, x_4$$



P_0:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \quad \overline{B} = 5 \\ x_3 &= \frac{5}{7} \quad \overline{B} = 0 \\ x_2, x_4 &= 0 \\ UB_0 &= \left\lfloor 16 + \frac{60}{7} \right\rfloor = 24 \\ LB_0 &= 16 + 2 = 18 \end{aligned}$$

P_1:

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 \quad \overline{B} = 13 \\ x_1 &= 1 \quad \overline{B} = 5 \\ x_2 &= \frac{5}{6} \quad \overline{B} = 0 \\ UB_1 &= \left\lfloor 16 + \frac{45}{6} \right\rfloor = 23 \\ LB_1 &= 16 + 2 = 18 \end{aligned}$$

P_2:

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 \quad \overline{B} = 6 \\ x_1 &= 0 \quad \overline{B} = 6 \\ x_2 &= 1 \quad \overline{B} = 0 \\ UB_2 &= LB_2 = 21 \end{aligned}$$

P_3:

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 \quad \overline{B} = 7 \\ x_2 &= 1 \quad \overline{B} = 7 \\ x_1 &= 0 \quad \overline{B} = 7 \\ x_4 &= 1 \quad \overline{B} = 5 \\ UB_3 &= LB_3 = 11 \end{aligned}$$

P_4:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \quad \overline{B} = 13 \\ x_3 &= 0 \quad \overline{B} = 13 \\ x_1 &= 1 \quad \overline{B} = 5 \\ x_4 &= 1 \quad \overline{B} = 3 \\ UB_4 &= LB_4 = 18 \end{aligned}$$

Schema esercizi

Lo schema seguente è incredibilmente utile, tuttavia non siamo riusciti a trovare la voglia di finirlo, aiutateci.

Tipologie esercizi

↳ ① Modelli
② Program. lineare - simplesso
③ Program. lineare - risol. grafica
④ Program. lineare - dualità
⑤ Grafi - albero copertura
⑥ Grafi - albero cammini minimi → 6.A Spt-aciclico/ordinam. topologico; 6.B Dijkstra; 6.C Bellman-Ford
⑦ Grafi - Flusso massimo
⑧ PLI - tagli di Gomory
⑨ PLI - branch and bound
⑩ PLI - branch and bound zaino

② Simplesso

- Dato un problema (PL), riportarlo in forma standard:

FORMA STANDARD

$$\min \; c^T x \qquad Ax = b \qquad x \geq 0$$

TRASFORMAZIONI

max → - min
$x_i \leq 0 \to -x_i \geq 0$
vincolo $\leq K$ → aggiungo $+s_i$ var slack, $s_i \geq 0$, vincolo =
vincolo $\geq K$ → sottraggo $-s_i$ var slack, $s_i \geq 0$, vincolo =

Se ho $I \subset A$, ho una base di partenza $\mathcal{B} = \{s_1, s_2\}$ $A_B = I$ (di solito)

Se non ho sottomatrice I in A uso fase 1 per trovare base ammissibile (vedi sotto)

- ALGORITMO

↳ dato $\mathcal{B}$, calcolo $x_B = A_B^{-1} b$, c_N^T, c_B^T, z^*
A_B, A_B^{-1}, $A_B^{-1} A_N$, $r_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$ costi ridotti

↳ $r_N \geq 0$ ⇝ x_B, z^* ottimi, TERMINO

↳ altrimenti scelgo il primo i tc $r_N[i] < 0$ ⇒ entra la var. associata a i (BLAND 1977)
divido x_B con $(A_B^{-1} A_N)_i$ componente per componente
- $\exists\, \theta_{min} > 0$, esce var. associata a θ_i, entra var. con valore θ_{min} REITERO
- tutti $\theta \leq 0$, ottimo illimitato

NB inversa 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- FASE 1

risolvo con simplesso
min $w_1 + w_2$, aggiungo al primo vincolo w_1, al secondo w_2 (non avrò mai più di 2 vincoli in esame)
$w_i \geq 0$, se trovo soluzione ottima tc w_i fuori base $\forall i$ → ho $\mathcal{B}$ per simplesso
, se sol. ottima ho w_i in base → (PL) non ammette soluzioni

③ Risol. grafica

Dato (PL) in qualsiasi forma, disegno sul piano le zone ammissibili
se min → - gradiente
se max → + gradiente

→ Traccio la perpendicolare al gradiente e traslo nella direz. di ± gradiente (+ max, - min) fino a quando interseco ultimo vertice

→ Alternativamente, traccio le normali ai vincoli in ogni vertice, se gradiente $\subset$ cono delle normali ⇒ ho ottimo

④ Dualità

Dato (PL) costruisco duale:
max → min, min → max

(PL) $\min/\max \; c^T x$
$Ax \gtreqless b$
$x \gtreqless 0$

↳ ∀ vincolo di PL c'è y_i duale il cui dominio è determinato da vincolo
∀ variabile di PL c'è vincolo duale il cui segno è determinato da dominio variabile
↳ coeff. di f. obiettivo: vettore colonna b del (PL) per var duali
↳ termini noti vincoli duali: c^T del problema (PL)
Coeff. di y_i nel vincolo duale associato a var k-esima di (PL): colonna k-esima di A

→ SEGNI

(PL)	(duale)	(PL)	(duale)
max →	min	min →	max
var →	vinc uguale	var →	vinc opposti
vinc →	var opposti	vinc →	var uguali

se x_i libera → vincolo con =
se vincolo = → y_i libera

→ SCARTI COMPLEMENTARI

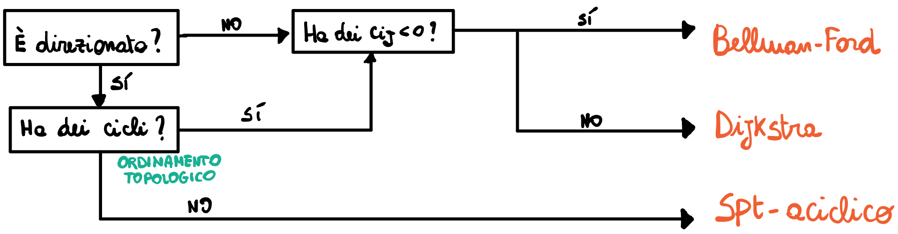
$\begin{cases} \text{(vincolo PL) } y_i = 0 \\ \text{(vincolo duale) } x_i = 0 \end{cases}$ data $\bar{x}$, se sostituendo nel sistema trovo $\bar{y}$ ammissibile, allora $\bar{x}$ ottimo

⑤ Albero di copertura
(DI COSTO MINIMO)

Dato grafo non direzionato, uso algoritmo Kruskal: |T| numero di nodi, c_{ij} costo
Ordino (i,j) crescentemente per c_{ij}, aggiungo uno a uno solo se non formano ciclo,
mi fermo a |T|-1 archi aggiunti

⑥ Albero dei cammini minimi (r = radice)

∃ modello??



- ORDINAMENTO TOPOLOGICO

  Dato T, cerco nodo senza predecessore, se ∃ gli assegno etichetta progressiva, lo rimuovo da |T|, REITERO
  se ∄ allora c'è un ciclo

- SPT-ACICLICO

  Esploro nodi nell'ordine dell'ordinam. topologico. Inizializzo d[r] = 0, P[r] = r e tutti gli altri d[i] = M P[i] = 1
  Esamino FS(i), se c_{ij} + d[i] < d[j] aggiorno d[j] = c_{ij} + d[i] e P[j] = i
  Al termine costruisco albero coi predecessori

- Dijkstra

  Inizializzo come SPT. Esploro partendo da r.
  Esamino FS(i) per nodi j non estratti (fissati), aggiungo j a lista Q e aggiorno se c_{ij} + d[i] < d[j] d[j] = c_{ij} + d[i] e P[j] = i. Fisso i e d[i]
  Estraggo i da lista t.c. d[i] è il minimo tra gli i ∈ lista REITERO
  → IMPORTANTE
  Quando lista Q = ∅ termino.

- Bellman-Ford

  Inizializzo come SPT. K[i] = 0 ∀i, K[r] = 1 → n entrate in lista Q. Parto da r
  Esamino FS(i), se c_{ij} + d[i] < d[j] aggiorno come Dijkstra e se j ∉ Q lo aggiungo e incremento K[j] di 1 (SOLO se ho aggiornato d[j] altrimenti NON entra in lista!!)
  Se K[j] ≥ |T| c'è ciclo negativo, altrimenti REITERO (estraggo i da Q a caso)
  Se Q = ∅ concludo.

MODELLO PL FLUSSO

7 Flusso massimo

Dato albero direzionato, capacità e condizione iniziale:

Costruisco grafo residuale, cerco cammino aumentante da s a t

Modifico le capacità di $\min_{(i,j)} \lambda$ del grafo → se concorde incremento
→ se discorde decremento

REITERO, se ∄ cammino aumentante $v = \max flow$

Cerco taglio N_s, N_t t.c. archi in avanti saturi
archi indietro scarichi → $U(N_s, N_t) = v = \max flow = \min cut$

MODELLO PLI

8 Tagli di Gomory

Dato (PLI), risolvo rilassamento (PL) via metodo grafico.

Se trovo ottimo intero concludo.

Altrimenti riporto il problema in forma standard:

→ scrivo i vincoli ciascuno dipendente da una sola variabile in base, con coefficiente 1

→ oppure ricavo il sistema sopra con $A_B^{-1} A_N$ coefficienti, x_B termini noti e le variabili in base dall'inizio

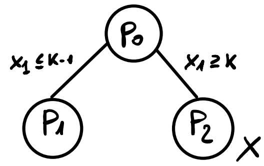
USO PARTE INTERA (floor) sui coeff del sistema trovato, sostituisco = con ≤, sono le eq. dei tagli

NB $\lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = -1 \quad \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$

Se i tagli contengono var. di slack s_i sostituisco i vincoli (della forma standard) per ottenere equazioni in x_i (disegnabili nel piano x_1, x_2)

Risolvo con i tagli per via grafica → potrei non trovare soluzione!? Controllo

9 Branch and bound (binario)



Dato (PLI), risolvo rilassamento (PL) via metodo grafico.

Se trovo ottimo intero concludo

altrimenti ottimo con sol. non intera: stima = UB (max) o LB (min)

applico branch su una delle variabili frazionarie

Risolvo il (PLI) rilassato con le condizioni del branch, aggiorno la stima per i nuovi nodi, REITERO

Posso chiudere nodo i se → trovo ottimo intero per P_i $LB_i = UB_i = stima$
→ ∃j t.c. → $LB_j \geq UB_i$ (max)
→ $UB_j \leq LB_i$ (min)
→ regione ammissibile vuota

NB ∀ branch la stima deve peggiorare o rimanere uguale
(aumentare LB per minimo
diminuire UB per massimo)

NB se mi dà già un albero di branch con LB e UB già calcolati e mi chiede intervallo più stringente per ottimo:

max maggior LB ≤ OTTIMO ≤ maggior UB di nodi ancora aperti *

min minor LB di nodi ancora aperti * ≤ OTTIMO ≤ minor UB

* o nodi genitori con figli con UB/LB non ancora calcolati

10 Branch and bound zaino (binario)

MODELLO ZAINO