

SOLUZIONI AGLI ESERCIZI AGGIUNTIVI DI
FONDAMENTI DI RICERCA OPERATIVA

di Teo Bucci e Filippo Cipriani

Politecnico di Milano
A.A. 2020/2021

Revisione del 31 Gennaio 2022

Contents

1	Programmazione Lineare	1
1.1	Esercizio 1	1
1.2	Esercizio 2	2
1.3	Esercizio 3	2
1.4	Esercizio 4	3
1.5	Esercizio 5	4
1.6	Esercizio 6	5
1.7	Esercizio 7	6
1.8	Esercizio 8	6
1.9	Esercizio 9	7
1.10	Esercizio 10	8
2	Programmazione Lineare e Dualità	9
2.1	Esercizio 1	9
2.2	Esercizio 2	9
2.3	Esercizio 3	10
2.4	Esercizio 4	10
2.5	Esercizio 5	11
2.6	Esercizio 6	11
2.7	Esercizio 7	12
2.8	Esercizio 8	12
2.9	Esercizio 9	12
2.10	Esercizio 10	13
2.11	Esercizio 11	13
3	Grafi	15
3.1	Esercizio 1	15
3.2	Esercizio 2	16
3.3	Esercizio 3	16
3.4	Esercizio 4	17
3.5	Esercizio 5	17
3.6	Esercizio 6	18
3.7	Esercizio 7	19
3.8	Esercizio 8	20
4	Programmazione Lineare Intera	21
4.1	Esercizio 1	21
4.2	Esercizio 2	22
4.3	Esercizio 3	22
4.4	Esercizio 4	23
4.5	Esercizio 5	23

Chapter 1

Programmazione Lineare

1.1 Esercizio 1

Parametri

P porti, $i = 1, 2, 3$

c_i costo per porto per ogni vettura (150, 250, 200)

t_i costo fisso porto

S centri di smistamento, $j = 1, \dots, 4$

k_i costo di invio dal porto i al km

a_{ij} distanza dal porto i al centro j

r_j richiesta del centro j

d_i capacità del porto i

Variabili

$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \mathbb{Z}$ numero di automobili dal porto i al centro j

$y_i \in \{0, 1\}$, uguali a 1 se uso il porto i

$z_{ij} \in \{0, 1\}$, uguali a 1 se il porto i rifornisce il centro j

Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \underbrace{\sum_{ij} c_i x_{ij}}_{\text{auto}} + \underbrace{\sum_i t_i y_i}_{\text{porto}} + \underbrace{\sum_{ij} a_{ij} k_i x_{ij}}_{\text{trasporto}} \right\}$$

Vincoli

$$\begin{aligned} \sum_i x_{ij} &\geq r_j & \forall j \in S && \text{richiesta} \\ \sum_j x_{ij} &\leq d_i y_i & \forall i \in P && \text{bigM + capacità} \\ \sum_i z_{i,3} &= 1 & && \text{centro 3} \\ x_{ij} &\leq d_i z_{ij} & \forall i \in P, \forall j \in S && \text{bigM} \\ z_{22} &\leq z_{24} & && \text{logico} \end{aligned}$$

1.2 Esercizio 2

Parametri

A aeroporti

H hangar

c_j, s_j, t_j operatori $\forall j \in H$

g_1 costo squadra 1

g_2 costo squadra 2

g_3 costo squadra 3

1c	1s	1t
3c	1s	X
3c	2s	2t

Variabili

$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}$ squadre tipo 1

$y_j \geq 0, y_j \in \mathbb{Z}$ squadre tipo 2

$z_j \geq 0, z_j \in \mathbb{Z}$ squadre tipo 3

$\varphi \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se uso 3 squadre di tipo 2

$w_{ij} \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se aereo i in hangar j , $\forall i \in A, \forall j \in H$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_j (x_j g_1 + y_j g_2 + z_j g_3)$$

Vincoli

$$\begin{aligned} \sum_j w_{ij} &= 1 && \forall i \in A && \text{assegnazione} \\ x_j + 3y_j + 3z_j &\geq \sum_i c_j w_{ij} && \forall j \in H && \text{operai} \\ x_j + y_j + 2z_j &\geq \sum_i s_j w_{ij} && \forall j \in H && \text{operai} \\ x_j + z_j &\geq \sum_i t_j w_{ij} && \forall j \in H && \text{operai} \\ \sum_j y_j - 2 &\leq M\varphi && && (\text{A}) \\ 2\varphi &\leq \sum_j z_j && && (\text{B}) \end{aligned}$$

Gli ultimi due vincoli servono per realizzare:

$$y_j \geq 3 \stackrel{(\text{A})}{\Rightarrow} \varphi = 1 \stackrel{(\text{B})}{\Rightarrow} z_j \geq 2$$

1.3 Esercizio 3

Parametri

$p_j, j = 1, 2$

r_j prezzo vendita

d_j domanda

I materie prime $i \in I$

c_i disponibilità

g_i costo unitario materie prime

g_{ji} materia i necessaria per j

o_1 ore p_1 da materia prima

o_2 ore p_2 da materia prima

oppure ottengo p_2 con

b unità di p_1 per p_2

o_3 ore lavorazione (p_2 da p_1)

k costo fisso attivazione

O ore a disposizione

Variabili

$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}$ unità di prodotto j da materie prime

$y \geq 0, y \in \mathbb{Z}$ unità di prodotto 2 da prodotto 1

$z \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se attivo processo produttivo

Funzione obiettivo

$$\max \left\{ [r_1(x_1 - by) + r_2(x_2 + y)] - \left[\sum_{ij} g_i q_{ji} x_j + kz \right] \right\}$$

Vincoli

$y \leq Mz$	bigM
$(x_1 - by) \geq d_1$	richiesta
$(x_2 - y) \geq d_2$	richiesta
$\sum_j q_{ji} x_j \leq c_i \quad \forall i \in I$	disponibilità
$o_1 x_1 + o_2 x_2 + o_3 y \leq O$	disponibilità

1.4 Esercizio 4

Parametri

T gruppi $i \in T$

p_i persone

J aerei $j \in J$

c_j costo noleggio

B_j capienza aereo

A aeroporto $k \in A$

G_k max voli per aeroporto

l_{jk} costo di far partire j da k

R sottoinsiemi di aeroporti vicini

S_r con $r = 1, \dots, R$, al più un aeroporto

Variabili

$x_{ij} \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se gruppo i ad aereo j

$y_{jk} \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se aereo j parte da k

$z_j \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se uso aereo j

$w_k \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se uso aeroporto k

Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \sum_j c_j z_j + \sum_{jk} l_{jk} y_{jk} \right\}$$

Vincoli

$\sum_i x_{ij} \leq M z_j$	$\forall j \in J$	bigM
$\sum_i p_i x_{ij} \leq B_j$	$\forall j \in J$	capacità
$\sum_j y_{jk} \leq G_k w_k$	$\forall k \in K$	bigM + capienza voli
$\sum_{k \in S_r} w_k \leq 1$	$\forall r = 1, \dots, R$	no aeroporti vicini
$\sum_j x_{ij} = 1$	$\forall i \in I$	assegnamento
$\sum_k y_{jk} = z_j$	$\forall j \in J$	un aereo per aeroporto, se usato

1.5 Esercizio 5

Parametri

P domande iscrizione $i \in P$

$M \subset P, F \subset P$, uomini, donne ($M \cup F = P, M \cap F = \emptyset$)

n max persone per classe

d massimo classi ($D = 1, \dots, d$ insieme classi)

b_i preparazione di i

q livello minimo per classe

C coppie formate $(i, j) \in C, i \in M, j \in F$

Variabili

$x_{ik} \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se persona i in classe k

$y_i \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se accetto domanda

Funzione obiettivo

$$\max \sum_i y_i$$

Vincoli

$\sum_{i \in P} x_{ik} \leq n$	$\forall k \in D$	capacità classe
$\sum_{i \in M} x_{ik} = \sum_{i \in F} x_{ik}$	$\forall k \in D$	uguali M/F

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in P} x_{ik} b_i &\geq q \sum_{i \in P} x_{ik} & \forall k \in D & \text{preparazione} \\
y_i &\leq \sum_{k \in D} x_{ik} & \forall i \in P & \text{bigM} \\
\sum_{k \in D} x_{ik} &\leq 1 & \forall i \in P & \text{massimo 1 corso per persona} \\
x_{ik} &= x_{jk} & \forall (i, j) \in C, \forall k \in D & \text{coppie}
\end{aligned}$$

1.6 Esercizio 6

Parametri

A insieme altiforni $i = 1 \dots N, i \in A$

m_i max quintali per altiforno

P prodotti $j \in P$

q_{1j} prodotto j da 1 quintale di materia prime con processo 1 (prodotto/quintale)

q_{2j} prodotto j da 1 quintale di materia prime con processo 2 (prodotto/quintale)

r_j richiesto prodotto

c_{1i} costo lavorazione al quintale in altiforno i con processo 1 (euro/quintale)

c_{2i} costo lavorazione al quintale in altiforno i con processo 2 (euro/quintale)

f_i costo attivazione processo 2 in altiforno i

Variabili

$w_i \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se lavoro più di q

$y_i \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se uso processo 2

$x_{ij1} \geq 0, x_{ij1} \in \mathbb{Z}$ prodotto j con processo 1 in altiforno i

$x_{ij2} \geq 0, x_{ij2} \in \mathbb{Z}$ prodotto j con processo 2 in altiforno i

Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \sum_i y_i f_i + \sum_{ij} \left[c_{1i} \frac{x_{ij1}}{q_{1j}} + c_{2i} \frac{x_{ij2}}{q_{2j}} \right] \right\}$$

Vincoli

$$\begin{aligned}
\sum_j x_{ij2} &\leq M y_i & \forall i \in A & \text{bigM} \\
\sum_j \left[\frac{x_{ij1}}{q_{1j}} + \frac{x_{ij2}}{q_{2j}} \right] &\leq m_i & \forall i \in A & \text{capacità} \\
\sum_i [x_{ij1} + x_{ij2}] &\geq r_j & \forall j \in P & \text{richiesta} \\
\sum_i y_i &\leq N - 1 & & \text{no processo 2 su tutti gli altiforni} \\
\sum_i w_i &\geq 1 & & \text{almeno 1 usa più di } q \text{ quintali} \\
q w_i &\leq \sum_{ij} \left[\frac{x_{ij1}}{q_{1j}} + \frac{x_{ij2}}{q_{2j}} \right] & \forall i \in A & \text{vincolo logico}
\end{aligned}$$

1.7 Esercizio 7

Parametri

C cioccolatini $i \in C$

S confezioni regalo $j \in S$

r_{ij} richieste cioccolatini i in confezione j

g_i costo cioccolatino

m_i max produzione

p_i vendita cioccolatino sfuso i

d_j vendita confezione j

b_j costo scatola j

Variabili

$x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}$ numero cioccolatini i prodotti

$y_j \geq 0, y_j \in \mathbb{Z}$ numero confezioni j prodotte

$z \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se acquisto almeno q scatole

Funzione obiettivo

$$\max \left\{ \underbrace{\sum_j d_j y_j}_{\text{confezioni}} + \underbrace{\sum_i p_i \left(x_i - \sum_j r_{ij} y_j \right)}_{\text{sfusi}} - \underbrace{\sum_i g_i x_i}_{\text{costo prod.}} - \underbrace{\sum_j b_j y_j}_{\text{costo scatole}} + \underbrace{zB}_{\text{sconto}} \right\}$$

Vincoli

$x_i \geq \sum_j r_{ij} y_j \quad \forall i \in I$	richiesta
$x_i \leq m_i \quad \forall i \in I$	capacità
$\sum_j y_j \geq Qz$	sconto
$x_1 \geq 0.2 \cdot \sum_i x_i$	qualità

1.8 Esercizio 8

Parametri

D difensori

A attaccanti

G giocatori $i \in G$

$r_i \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se giocatore i è attaccante

v_i valore giocatore

B valore complessivo formazione

q giocatori non giocanti

K formazioni $|K| = 2$

Variabili

$z \geq 0, z \in \mathbb{Z}$ valore formazione di minimo valore

$x_{ik} \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se giocatore i è nelle formazione k

$y_i \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se i gioca in entrambe

Funzione obiettivo

$$\max z$$

Vincoli

$$\begin{aligned}
 \sum_i r_i x_{ik} &= A && \forall k \in K \\
 \sum_i (1 - r_i) x_{ik} &= D && \forall k \in K \\
 \sum_i v_i x_{ik} &\geq B && \forall k \in K && \text{minimo valore richiesto} \\
 \left(|G| - \sum_i y_i \right) &\geq q && && \text{almeno } q \text{ non giocanti entrambe} \\
 \left(\sum_k x_{ik} - 1 \right) &\leq M y_i && \forall i \in I && \text{bigM} \\
 z &\leq \sum_i v_i x_{ik} && \forall k \in K && \text{bottleneck}
 \end{aligned}$$

1.9 Esercizio 9

Parametri

B beni $i \in B$

M magazzino $j \in M$

A luoghi distribuzione $k \in A$

c_i costo bene i

v_i spazio occupato da i in magazzino

b_j capacità

f_j costo fisso magazzino se usato

g_{jk} costo trasporto bene da j a k

d_{ik} richiesta bene i a k

Variabili

$y_j \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se uso j

$z_{ijk} \geq 0$, $z_{ijk} \in \mathbb{Z}$ numero di beni i da j a k

Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \sum_{ijk} c_i z_{ijk} + \sum_j f_j y_j + \sum_{ijk} z_{ijk} g_{jk} \right\}$$

Vincoli

$$\begin{aligned}
 \sum_j z_{ijk} &\geq d_{ik} && \forall i \in I, \forall k \in K && \text{richiesta} \\
 \sum_{ik} v_i z_{ijk} &\leq b_j y_j && \forall j \in J && \text{bigM e capacità}
 \end{aligned}$$

1.10 Esercizio 10

Parametri

C analisi $i \in C, i = 1, \dots, 4$

O ospedali $j \in O, j = 1, \dots, 5$

d_{ij} tempo da i a j

r_j richieste analisi

b_i max analisi nel centro i

Variabili

$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \mathbb{Z}$ numero analisi al centro i per ospedale j

$z_{2i} \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se 2 si serve da i

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{ij} a_{ij} x_{ij}$$

Vincoli

$\sum_j x_{1j} \leq 0.8 \cdot \left(\sum_j x_{2j} + x_{3j} \right)$	qualità
$\sum_j x_{2j} \leq 0.6 \cdot \left(\sum_j x_{ij} + x_{3j} \right)$	qualità
$\sum_j (x_{3j} + x_{4j}) \leq 0.5 \cdot \sum_{ij} x_{ij}$	qualità
$\sum_i x_{ij} = r_j \quad \forall j \in J$	richiesta
$\sum_j x_{ij} \leq b_i \quad \forall i \in I$	capacità
$\sum z_{2i} = 1$	un solo centro per 2
$x_{i2} \leq b_i z_{2i} \quad \forall i \in I$	bigM

Chapter 2

Programmazione Lineare e Dualità

2.1 Esercizio 1

$$\begin{aligned} & \min 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ & -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + s_1 = 8 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 12 \\ & x_i, s_i \geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 \\ -1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 \end{bmatrix}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{s_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[0 \ 0]$	$[5 \ -2 \ -3]$	$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$[5 \ -2 \ -3]$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix}$	$x_2 = 2$	$s_1 = 0$
iter. 2	$\{x_2, s_2\}$	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$	$[-2 \ 0]$	$[5 \ -3 \ 0]$	$\begin{bmatrix} x_1 & x_3 & s_1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$[\frac{9}{2} \ -4 \ \frac{1}{2}]$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$	$x_3 = 4$	$s_2 = 0$
iter. 3	$\{x_2, x_3\}$	$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$	$[-2 \ -3]$	$[5 \ 0 \ 0]$	$\begin{bmatrix} x_1 & s_1 & s_2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$	$[\frac{13}{2} \ \frac{1}{10} \ \frac{7}{5}]$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$				

$$z^* = -20.$$

2.2 Esercizio 2

$$\begin{aligned} & \min -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ & 3x_1 - x_2 + 2x_3 + s_2 = 6 \\ & x_i, s_i \geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 \end{bmatrix}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{s_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[0 \ 0]$	$[-1 \ 2 \ -3]$	$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$	$[-1 \ 2 \ -3]$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$x_1 = 2$	$s_1 = 0$
iter. 2	$\{x_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$	$[-1 \ 0]$	$[2 \ -3 \ 0]$	$\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & s_1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$	$[0 \ -2 \ 1]$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$x_3 = 2$	$x_1 = 0$
iter. 3	$\{x_3, s_2\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$	$[-3 \ 0]$	$[-1 \ 2 \ 0]$	$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & s_1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$	$[2 \ -4 \ 3]$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 2/3 \end{bmatrix}$	$x_2 = \frac{2}{3}$	$s_2 = 0$
iter. 4	$\{x_2, x_3\}$	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$	$[2 \ -3]$	$[-1 \ 0 \ 0]$	$\begin{bmatrix} x_1 & s_1 & s_2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$	$[\frac{10}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{4}{3}]$	$\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}$				

$$z^* = -\frac{26}{3}.$$

2.3 Esercizio 3

$$\begin{aligned} \min & -2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + s_1 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + s_2 &= 12 \\ x_i, s_i &\geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 \\ -2 & -1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{s_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[0 \ 0]$	$[-2 \ -1 \ -3]$	$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$	$[-2 \ -1 \ -3]$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$	$x_1 = 2$	$s_1 = 0$
iter. 2	$\{x_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$	$[-2 \ 0]$	$[-1 \ -3 \ 0]$	$\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & s_1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \end{bmatrix}$	$[1 \ -1 \ 2]$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4/3 \end{bmatrix}$	$x_3 = \frac{4}{3}$	$s_2 = 0$
iter. 3	$\{x_1, x_3\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$	$[-2 \ -3]$	$[-1 \ 0 \ 0]$	$\begin{bmatrix} x_2 & s_1 & s_2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$	$[\frac{7}{6} \ \frac{5}{3} \ \frac{1}{6}]$	$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$				

$$z^* = \frac{16}{3}.$$

2.4 Esercizio 4

$$\begin{aligned} \min & -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + s_1 &= 2 \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + s_2 &= 3 \\ x_i, s_i &\geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{s_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[0 \ 0]$	$[-2 \ 2 \ -2]$	$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	$[-2 \ 2 \ -2]$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$x_1 = 2$	$s_1 = 0$
iter. 2	$\{x_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$	$[-2 \ 0]$	$[2 \ -2 \ 0]$	$\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & s_1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$	$[0 \ -3 \ 1]$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 12 \end{bmatrix}$	$x_3 = 12$	$s_2 = 0$
iter. 3	$\{x_1, x_3\}$	$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	$[-2 \ -2]$	$[2 \ 0 \ 0]$	$\begin{bmatrix} x_2 & s_1 & s_2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	$[12 \ 10 \ 6]$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$				

$$z^* = -38.$$

2.5 Esercizio 5

$$\begin{aligned} \min & x_1 - 2x_2 + x_3 \\ & x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Fase 1.

$$\begin{aligned} \min & w_1 + w_2 \\ & x_1 - x_2 + 3x_3 + w_1 = 5 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + w_2 = 4 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & w_1 & w_2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & w_1 & w_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{w_1, w_2\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[1 \ 1]$	$[0 \ 0 \ 0]$	$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$[-3 \ 0 \ -4]$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$	$x_1 = 2$	$w_2 = 0$
iter. 2	$\{x_1, w_1\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$[0 \ 1]$	$[0 \ 0 \ 1]$	$\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & w_2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$[\frac{3}{2} \ -\frac{5}{2} \ \frac{3}{2}]$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix}$	$x_3 = \frac{6}{5}$	$w_1 = 0$

Inizio.

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{x_1, x_3\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$	$[1 \ 1]$	$[-2]$	$\begin{bmatrix} x_2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$	$[-\frac{11}{5}]$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ -2 \end{bmatrix}$	$x_2 = \frac{7}{4}$	$x_1 = 0$
iter. 2	$\{x_2, x_3\}$	$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$[-2 \ 1]$	$[1]$	$\begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$	$[\frac{11}{4}]$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$				

$$z^* = -\frac{5}{4}.$$

2.6 Esercizio 6

$$\begin{aligned} \min & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 10x_5 \\ & x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 5 \\ & x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 9 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{x_1, x_2\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[2 \ 1]$	$[3 \ 2 \ 10]$	$\begin{bmatrix} x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$[-1 \ 2 \ 5]$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$	$x_3 = \frac{9}{2}$	$x_2 = 0$
iter. 2	$\{x_1, x_3\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$[2 \ 3]$	$[1 \ 2 \ 10]$	$\begin{bmatrix} x_2 & x_4 & x_5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$[\frac{1}{2} \ 3 \ \frac{11}{2}]$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$				

$$z^* = \frac{29}{2}.$$

2.7 Esercizio 7

$$\begin{aligned} \min & -3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{x_1, x_4\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$[-3 \quad -1]$	$[-2 \quad -1]$	$\begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$[-2 \quad 4]$	$\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$	$x_2 = \frac{1}{3}$	$x_4 = 0$
iter. 2	$\{x_1, x_2\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$	$[-3 \quad -2]$	$[-1 \quad -1]$	$\begin{bmatrix} x_3 & x_4 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$	$[\frac{10}{3} \quad \frac{8}{3}]$	$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$				

$$z^* = \frac{14}{3}.$$

2.8 Esercizio 8

$$\begin{aligned} \min & -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 4x_4 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 &= 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{x_1, x_2\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{3}{11} & -\frac{4}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$	$[-2 \quad 4]$	$[2 \quad -4]$	$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{10}{11} \\ 0 & -\frac{11}{11} \end{bmatrix}$	$[0 \quad -\frac{52}{11}]$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{10}{11} \\ -\frac{3}{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{22}{3} \end{bmatrix}$	$x_4 = \infty$	$x_2 = 0$

$$z^* = -\infty.$$

2.9 Esercizio 9

Problema duale.

$$\begin{aligned} \min & -y_1 + y_2 + 17y_3 + 5y_4 + 4y_5 \\ -2y_1 + y_2 + 4y_3 - 5y_5 &\geq 2 \\ -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + y_5 &\geq 1 \\ y_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Scarti complementari.

	$(3, 5)$	$(4, 1)$	
$(-2x_1 - x_2 + 1)y_1 = 0$	$y_1 = 0$		
$(x_1 - x_2 - 3)y_2 = 0$	$y_2 = 0$		
$(4x_1 + x_2 - 17)y_3 = 0$	y_3		
$(x_2 - 5)y_4 = 0$	y_4		
$(-x_1 - x_2 - 4)y_5 = 0$	$y_5 = 0$		
$(-2y_1 + y_2 + 4y_3 - 5y_5 - 2)x_1 = 0$	$y_3 = 1/2$		
$(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + y_5 - 1)x_2 = 0$	$y_4 = 1/2$		
	Ottimo	Non ottimo	

2.10 Esercizio 10

Problema duale.

$$\begin{aligned} \min & -\frac{3}{2}y_1 - \frac{3}{2}y_2 + 7y_3 + 6y_4 \\ & y_1 + y_3 + y_4 = 3 \\ & y_2 + y_3 - y_4 = 0 \\ & y_1, y_2 \leq 0, y_3, y_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Scarti complementari.

	$(\frac{13}{2}, \frac{1}{2})$	$(-\frac{3}{2}, \frac{17}{2})$
$(x_1 + \frac{3}{2})y_1 = 0$	$y_1 = 0$	y_1
$(x_2 + \frac{3}{2})y_2 = 0$	$y_2 = 0$	$y_2 = 0$
$(x_1 + x_2 - 7)y_3 = 0$	y_3	y_3
$(x_1 - x_2 - 6)y_4 = 0$	y_4	$y_4 = 0$
$(y_1 + y_3 + y_4 - 3)x_1 = 0$	$y_3 + y_4 = 3$	$y_1 + y_3 = 3$
$(y_2 + y_3 - y_4)x_2 = 0$	$y_3 - y_4 = 0$	$y_3 = 0$
	$y_3 = 3/2$	$y_1 = 3$
	$y_4 = 3/2$	
	Ottimo	Non ottimo

2.11 Esercizio 11

Problema duale.

$$\begin{aligned} \min & 4y_1 + 5y_2 + y_3 + 4y_4 \\ & -3y_1 + y_3 + 2y_4 = 1 \\ & y_1 + y_2 - y_3 + y_4 = 2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0, y_4 \leq 0 \end{aligned}$$

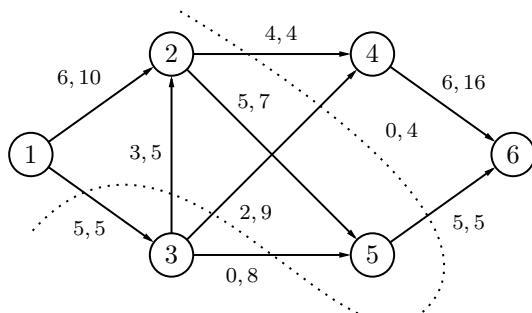
Scarti complementari.

	$(6, 5)$	$(0, 4)$
$(-3x_1 + x_2 - 4)y_1 = 0$	$y_1 = 0$	y_1
$(x_2 - 5)y_2 = 0$	y_2	$y_2 = 0$
$(x_1 - x_2 - 1)y_3 = 0$	y_3	$y_3 = 0$
$(2x_1 + x_2 - 4)y_4 = 0$	$y_4 = 0$	y_4
$(-3y_1 + y_3 + 2y_4 - 1)x_1 = 0$	$y_3 = 1$	$-3y_1 + 2y_4 = 1$
$(y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - 2)x_2 = 0$	$y_2 = 3$	$y_1 + y_4 = 2$
		$y_1 = 3/5$
		$y_4 = 7/5$
	Ottimo	Non ottimo

Chapter 3

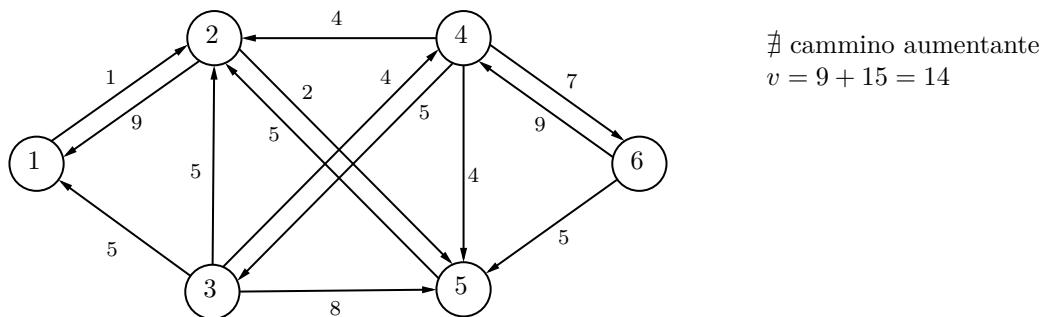
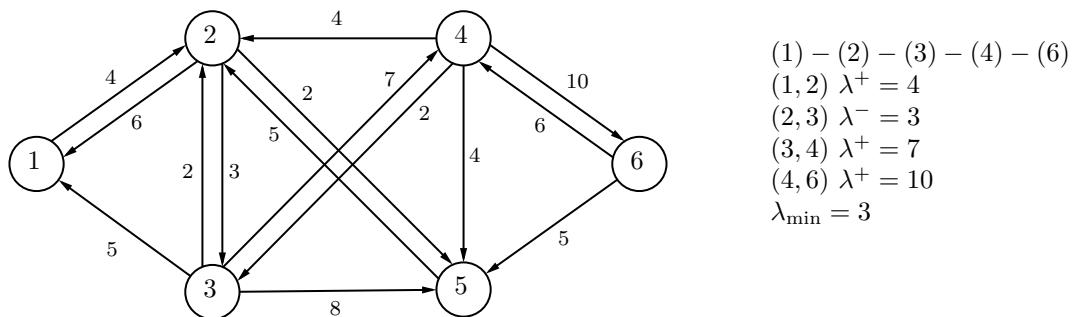
Grafi

3.1 Esercizio 1

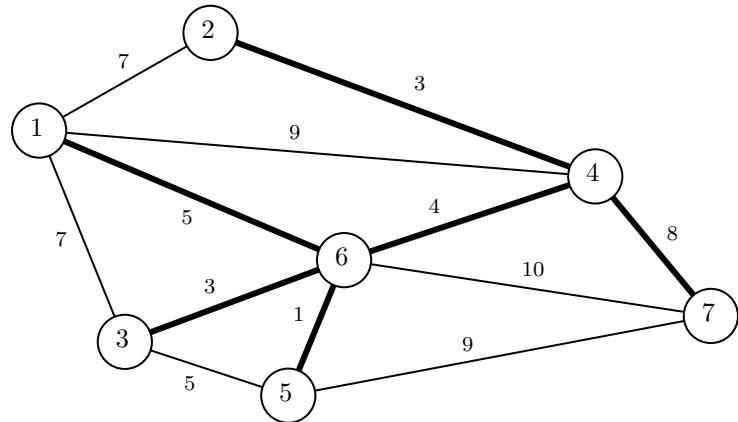


$$s = 1, t = 6.$$

$$N_s = \{1, 2, 5\}, N_t = \{3, 4, 6\}.$$

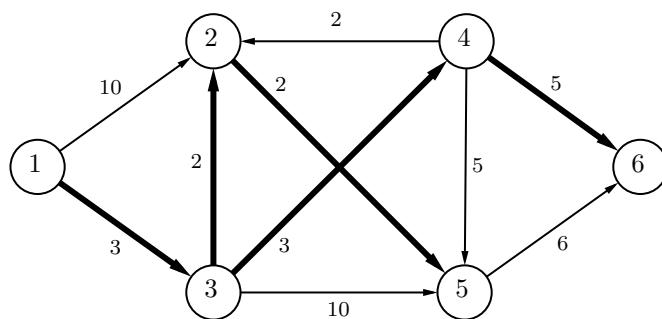


3.2 Esercizio 2



Lato	Costo	Accettato	$ T $
(5, 6)	1	✓	1
(3, 6)	3	✓	2
(2, 4)	3	✓	3
(4, 6)	4	✓	4
(1, 6)	5	✓	5
(3, 5)	5	✗	
(1, 2)	7	✗	
(1, 3)	7	✗	
(4, 7)	8	✓	6
(5, 7)	9		
(1, 4)	9		
(6, 7)	10		

3.3 Esercizio 3



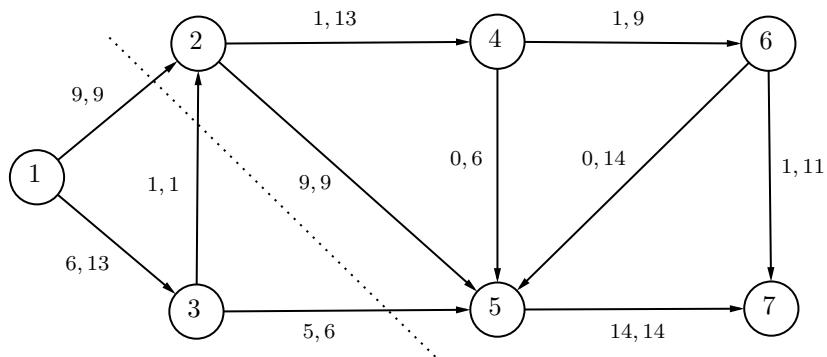
Enumerazione topologica.

Nodo	Etichetta
(1)	1
(3)	2
(4)	3
(2)	4
(5)	5
(6)	6

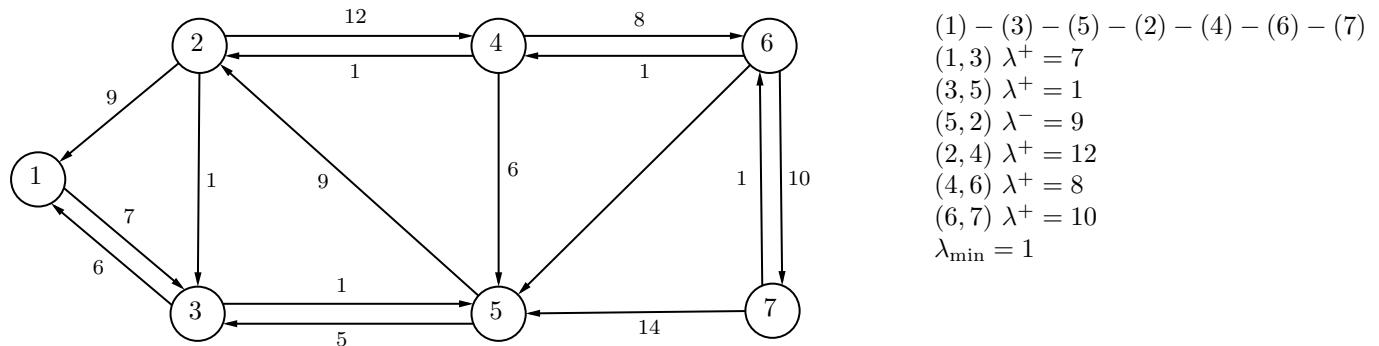
SPT-acyclico.

i	d, P					
1	0, 1					
2	$M, 1$	10, 1	5, 3			
3	$M, 1$	3, 1				
4	$M, 1$		6, 3			
5	$M, 1$		13, 3	11, 4	7, 2	
6	$M, 1$			11, 4		
i	1	3	4	2	5	6

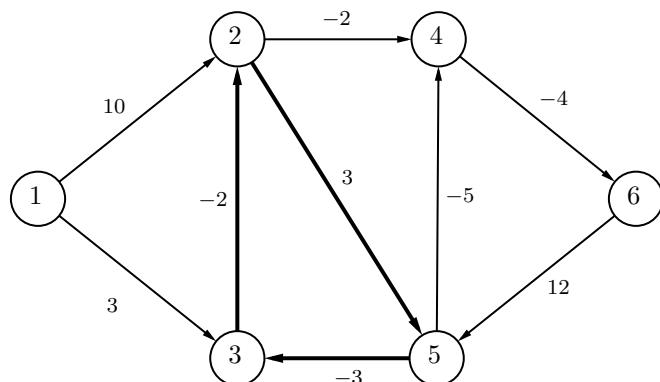
3.4 Esercizio 4



$$N_s = \{1, 3\}, N_t = \{2, 4, 5, 6, 7\}, U(N_s, N_t) = 16 = v.$$



3.5 Esercizio 5



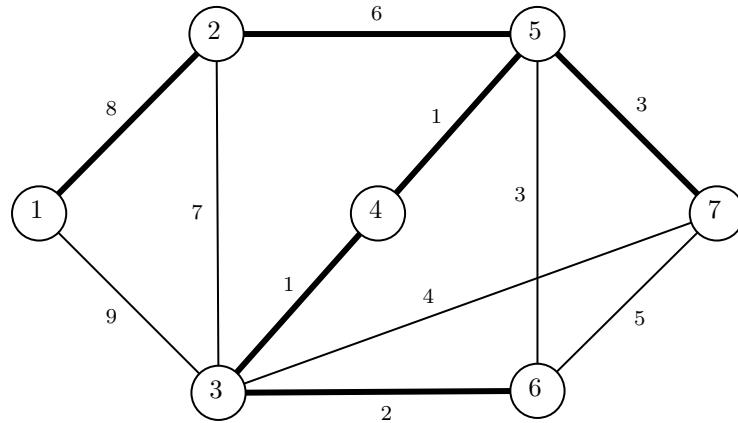
Cicli, costi negativi: Bellman-Ford.

i	d, P, k							
1	0, 1, 1							
2	$M, 1, 0$	10, 1, 1	1, 3, 1					-1, 3, 2
3	$M, 1, 0$	3, 1, 1					1, 5, 2	
4	$M, 1, 0$			-1, 2, 1				
5	$M, 1, 0$			4, 2, 1				
6	$M, 1, 0$				-5, 4, 1			
Q	1	2, 3	2	4, 5	5, 6	5	3	2
i	1	3	2	4	6	5	3	2

E così via finché k di 2, 3 non supera il numero soglia. Esiste un ciclo negativo

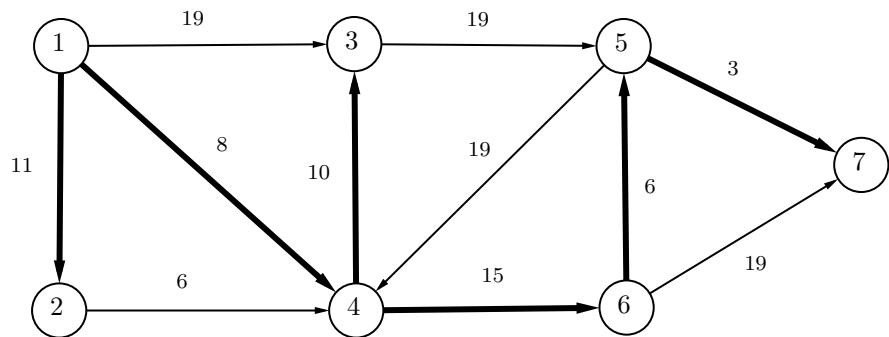
$$(2) - (5) - (3)$$

3.6 Esercizio 6



Lato	Costo	Accettato	$ T $
(3, 4)	1	✓	1
(4, 5)	1	✓	2
(3, 6)	2	✓	3
(5, 7)	3	✓	4
(5, 6)	3	✗	
(3, 7)	4	✗	
(6, 7)	5	✗	
(2, 5)	6	✓	5
(3, 2)	7	✗	
(1, 2)	8	✓	6
(1, 3)	9		

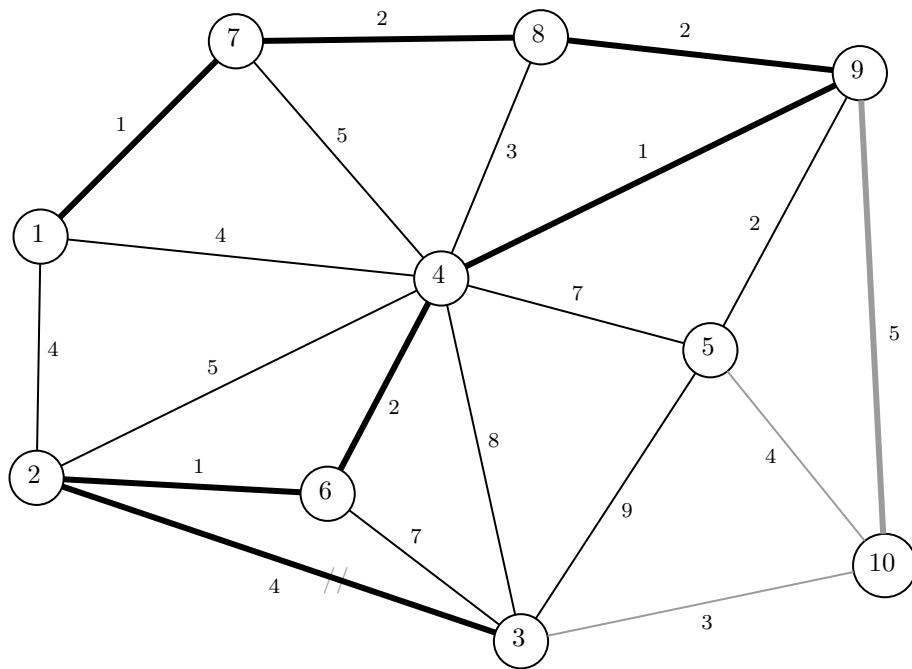
3.7 Esercizio 7



Dijkstra.

i	d, P	d, P	d, P	d, P	d, P	d, P
1	0, 1					
2	$M, 1$	11, 1				
3	$M, 1$	19, 1	18, 4			
4	$M, 1$	8, 1				
5	$M, 1$			37, 3	29, 6	
6	$M, 1$		23, 4			
7	$M, 1$				42, 6	32, 5
Q	1	2, 3, 4	2, 3, 6	5, 6	5, 7	7
i	1	4	2, 3	6	5	7

3.8 Esercizio 8



Lato	Costo	Accettato	$ T $
(1, 7)	1	✓	1
(2, 6)	1	✓	2
(4, 9)	1	✓	3
(4, 6)	2	✓	4
(5, 9)	2	✓	5
(8, 9)	2	✓	6
(7, 8)	2	✓	7
(8, 4)	3	✗	
(3, 10)	3	3	8
(1, 4)	4	✗✗	
(2, 1)	4	✗✗	
(5, 10)	4	3	9 (stop!)
(2, 3)	4	✓	8
(4, 10)	5		
(7, 4)	5		
(2, 4)	5		
(4, 5)	7		
(6, 3)	7		
(4, 3)	8		
(3, 5)	9		

Chapter 4

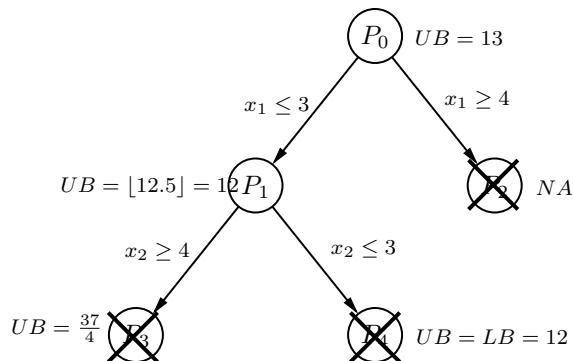
Programmazione Lineare Intera

4.1 Esercizio 1

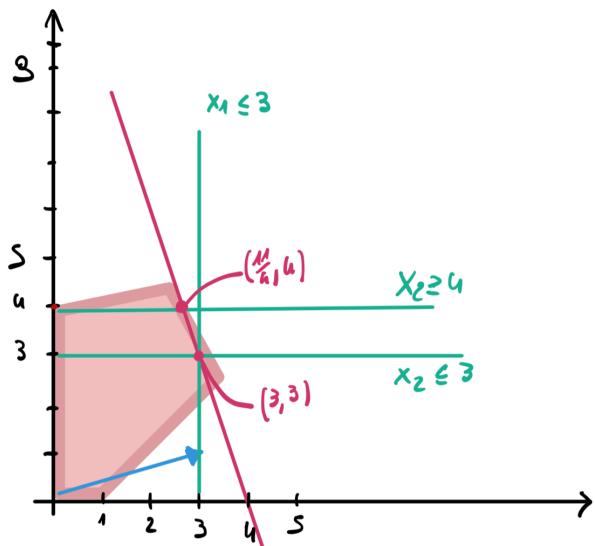
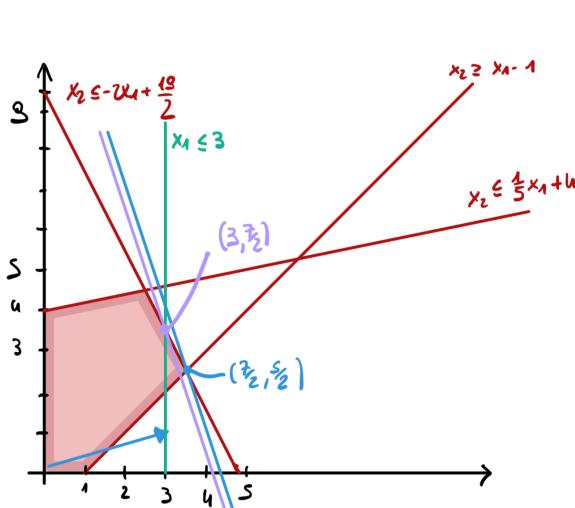
$$x_2 \leq \frac{1}{5}x_1 + 4$$

$$x_2 \leq -2x_1 + \frac{19}{2}$$

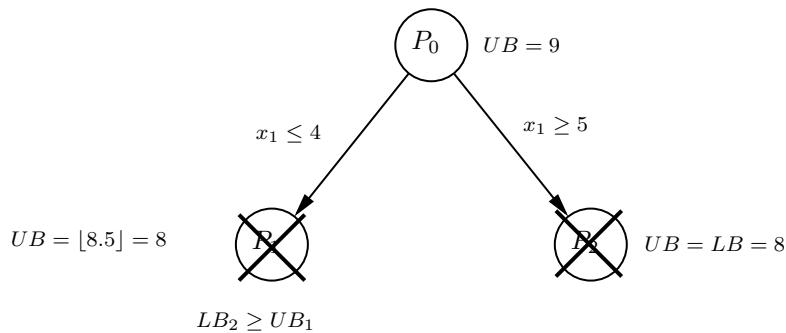
$$x_2 \geq x_1 - 1$$



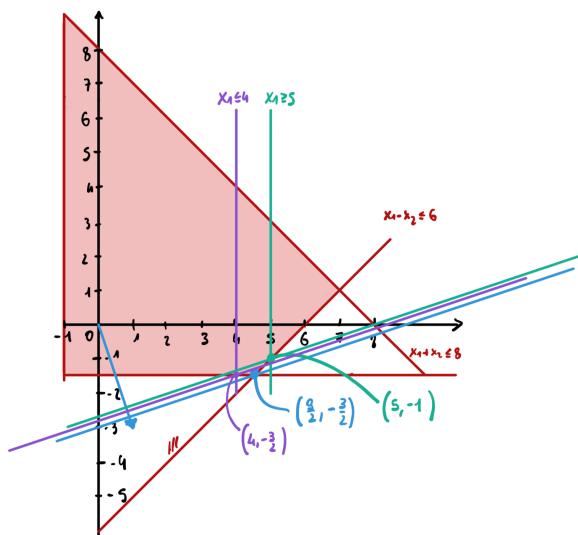
Ottimo: 12, (3, 3).



4.2 Esercizio 2



Ottimo: $8, (5, -1)$.



4.3 Esercizio 3

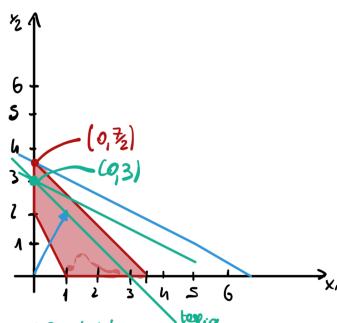
Rilassamento continuo:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{7}{2} \quad s_1 = 0 \quad s_2 = \frac{3}{2}$$

Equazioni dei tagli:

$$\begin{aligned} x_2 + x_1 + \frac{1}{2}s_1 &= \frac{7}{2} &\rightarrow x_2 + x_1 + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor s_1 \leq \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor &\rightarrow x_2 + x_1 \leq 3 && x_1 + x_2 \leq 3 \\ s_2 - x_1 + \frac{1}{2}s_1 &= \frac{3}{2} &\rightarrow s_2 - x_1 + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor s_1 \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor &\rightarrow s_2 - x_1 \leq 1 && \\ &&&& s_2 = 2x_1 + x_2 - 2 & \end{aligned}$$

Ottimo: $-6, (0, 3)$.



4.4 Esercizio 4

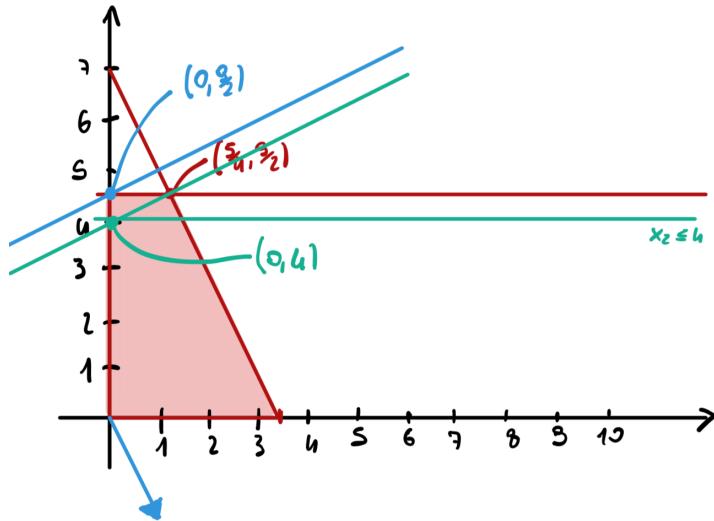
Rilassamento continuo:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{9}{2} \quad s_1 = 0 \quad s_2 = \frac{5}{2}$$

Equazioni dei tagli:

$$\begin{aligned} x_2 + \frac{1}{2}s_1 &= \frac{9}{2} & \rightarrow x_2 + \lfloor \frac{1}{2} \rfloor s_1 \leq \lfloor \frac{9}{2} \rfloor & \rightarrow x_2 \leq 4 & x_2 \leq 4 \\ s_2 + 2x_1 - \frac{1}{2}s_1 &= \frac{5}{2} & \rightarrow s_2 + 2x_1 - \lfloor \frac{1}{2} \rfloor s_1 \leq \lfloor \frac{5}{2} \rfloor & \rightarrow s_2 + 2x_1 - s_1 \leq 2 \end{aligned}$$

Ottimo: $(0, 4)$.



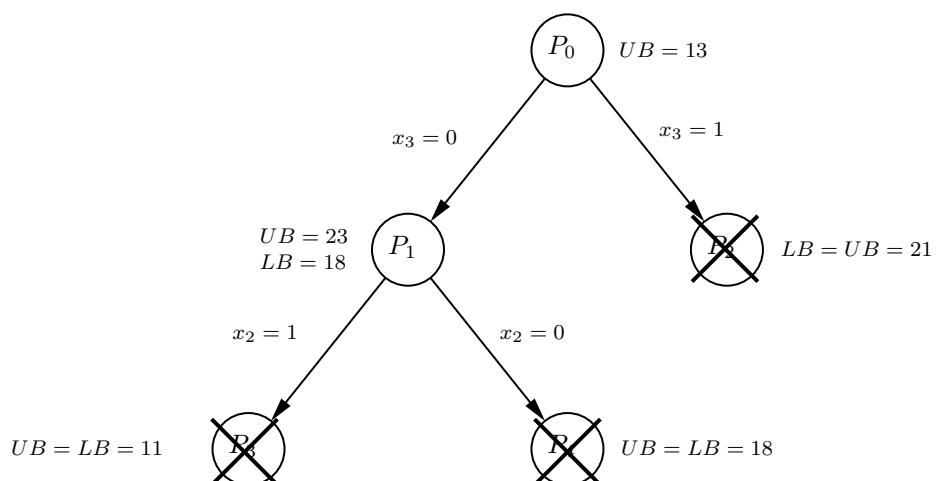
4.5 Esercizio 5

$B = 13$.

p_i	16	9	12	2
w_i	8	6	7	2
$\frac{p_i}{w_i}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{12}{7}$	1
	x_1	x_2	x_3	x_4

Ordino

x_1, x_3, x_2, x_4



P_0 :

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 \quad \bar{B} = 5 \\x_3 &= \frac{5}{7} \quad \bar{B} = 0 \\x_2, x_4 &= 0 \\UB_0 &= \left\lfloor 16 + \frac{60}{7} \right\rfloor = 24 \\LB_0 &= 16 + 2 = 18\end{aligned}$$

P_1 :

$$\begin{aligned}x_3 &= 0 \quad \bar{B} = 13 \\x_1 &= 1 \quad \bar{B} = 5 \\x_2 &= \frac{5}{6} \quad \bar{B} = 0 \\UB_1 &= \left\lfloor 16 + \frac{45}{6} \right\rfloor = 23 \\LB_1 &= 16 + 2 = 18\end{aligned}$$

P_2 :

$$\begin{aligned}x_3 &= 1 \quad \bar{B} = 6 \\x_1 &= 0 \quad \bar{B} = 6 \\x_2 &= 1 \quad \bar{B} = 0 \\UB_2 &= LB_2 = 21\end{aligned}$$

P_3 :

$$\begin{aligned}x_3 &= 0 \quad \bar{B} = 7 \\x_2 &= 1 \quad \bar{B} = 7 \\x_1 &= 0 \quad \bar{B} = 7 \\x_4 &= 1 \quad \bar{B} = 5 \\UB_3 &= LB_3 = 11\end{aligned}$$

P_4 :

$$\begin{aligned}x_2 &= 0 \quad \bar{B} = 13 \\x_3 &= 0 \quad \bar{B} = 13 \\x_1 &= 1 \quad \bar{B} = 5 \\x_4 &= 1 \quad \bar{B} = 3 \\UB_4 &= LB_4 = 18\end{aligned}$$

Schema esercizi

Lo schema seguente è incredibilmente utile, tuttavia non siamo riusciti a trovare la voglia di finirlo, aiutateci.

Tipologie esercizi

① Modelli

- ② Program. lineare - simplex
- ③ Program. lineare - risol. grafica
- ④ Program. lineare - dualità
- ⑤ Grafi - albero copertura
- ⑥ Grafi - albero cammini minimi
- ⑦ Grafi - Flusso massimo
- ⑧ PLI - tagli di Gomory
- ⑨ PLI - branch and bound
- ⑩ PLI - branch and bound zaino

6.A Spt-aciclico/ordinam. topologico
 6.B Dijkstra
 6.C Bellman-Ford

② Simplesso

- Dato un problema (PL), riportarlo in forma standard:

FORMA STANDARD	TRASFORMAZIONI
$\min C^T x$	$\max \rightarrow -\min$
$Ax = b$	$x_i \leq 0 \rightarrow -x_i \geq 0$
$x \geq 0$	$n_{impo} \leq k \rightarrow$ aggiunge $+s_i$ var Slack, $s_i \geq 0$, $n_{impo} = n_{impo} + 1$
	$n_{impo} \geq k \rightarrow$ sottraggi $-s_i$ var Slack, $s_i \geq 0$, $n_{impo} = n_{impo} - 1$

Se ho $I \subset A$, ho una base di partenza $B = \{s_1, s_2\}$ $A_B = I$ (di solito)

Se manca sottamatrice I in A uso forse i per trovare base ammessa (vedi sotto)

ALGORITMO

- dato (P) , calcolare $X_B = A_B^{-1}b$, C^T_B , Z^*
 $A_B, A_B^{-1}, A_B^T A_N, r_N^T = C^T - C^T_B A_B^{-1} A_N$ costi ridotti
- $r_N \geq 0 \rightarrow X_B, Z^*$ ottimi, **TERMINO** BLAND 1977
- altrimenti scelgo il primo i tc. $r_N[i] < 0 \Rightarrow$ entra la var. associata a i
 dividere X_B con $(A_B^T A_N)_i$ componenti per componenti
 $\leftarrow \exists \theta_{min} > 0$, esce var. associata a θ_i , entra var. con valore θ_{min} **REITERO**
 \leftarrow tutti $\theta \leq 0$, ottimo illimitato

NB inversa 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

FASE 1

risolvere con simplex

- $\min w_1 + w_2$, aggiungo al minimo rimedi w_1 , al secondo w_2 (non avrò mai più di 2 rimedi in esame)
- $w_i \geq 0$, se trovo soluzione ottima tc w_i fuori base $\forall i \rightarrow$ ho OB per simplex
- , se sol. ottima ha w_i in base \rightarrow (PL) non ammette soluzioni

③ Risol. grafica

Dato (PL) in qualsiasi forma, disegno sul piano le zone ammmissibili

se $\min \rightarrow -$ gradiente

se $\max \rightarrow +$ gradiente

- Traccio la perpendicolare al gradiente e tratta nelle direz. di \pm gradiente fino a quando interseca ultimo vertice
- Alternativamente, tocco le normali ai rimedi in ogni vertice, se gradiente c cosa delle normali \rightarrow la ottima

④ Dualità

Dato (PL) costruisco duale:
 $\max \rightarrow \min$, $\min \rightarrow \max$

(PL) $\min / \max C^T x$
 $Ax \geq b$
 $x \geq 0$

- ↳ Vincolo di PL c'è y_i duale il cui dominio è determinato da vincolo
- ↳ variabile di PL c'è vincolo duale il cui segno è determinato da dominio variabile
- ↳ coeff. di f. obiettivo: vettore colonna b del (PL) per var duali
- ↳ termini noti vincoli duali: C^T del problema (PL)
- ↳ coeff. di y_i^{ref} vincolo duale corrisponde a var k-eriva di (PL): colonna k-eriva di A

→ SEGNI

(PL)	vincoli	(PL)	vincoli	
Max	max	Min	max	Se x _i libera → vincolo con =
var → min	signo	var → min	opposti	Le vincole = → y _i libera
min → var	opposti	min → var	signo	

→ SCARTI COMPLEMENTARI

$$\begin{cases} (\text{vincolo PL}) y_i = 0 & \text{dato } \bar{x}, \text{ se sostituendo nel sistema trovo } \bar{y} \text{ ammesso,} \\ (\text{vincolo duale}) x_i = 0 & \text{allora } \bar{x} \text{ ottimo} \end{cases}$$

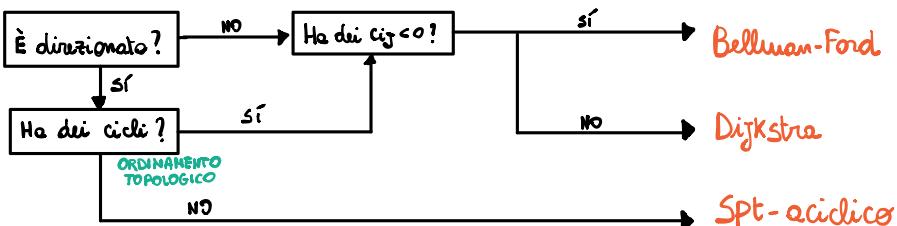
⑤ Albero di copertura (di costo minimo)

Dato grafo non direzionato, uso algoritmo Kruskal: |T| numero di nodi, C_{ij} costo

Ordino (i,j) crescentemente per C_{ij}, aggiungere uno a uno solo se non formano ciclo, mi ferma a |T|-1 archi aggiunti

⑥ Albero dei cammini minimi (r=radice)

È modello??



• ORDINAMENTO TOPOLOGICO

Dato T, cerco modo senza predecessore, se è gli assegno etichetta progressiva, lo rimuovo da ITI, REITERO
se no allora c'è un ciclo

• SPT-ACICLICO

Esploso modi nell'ordine dell'ordinamento topologico. Inizializzo d[r]=0, P[r]=r e tutti gli altri d[i]=M P[i]=1

Escrivo FS(i), se c_{ij}+d[i,j] < d[j] aggiorno d[j] = c_{ij}+d[i,j] e P[j]=i

Al termine costruisco albero coi predecessori

• Dijkstra

Inizializzo come SPT. Esploro partendo da r.

Escrivo FS(i) per modi j non estratti (fissati), aggiungo j a lista ^Q e aggiorno se c_{ij}+d[i,j] < d[j] d[j] = c_{ij}+d[i,j] e P[j]=i. Fissor i e d[i]

Estraggo i da lista tc d[i] è il minimo tra gli i in lista REITERO

Quando lista Q = Ø termine.

IMPORTANTE

• Bellman-Ford

Inizializzo come SPT. K[i]=0 $\forall i$, K[r]=1 → m entrate in lista ^Q. Parto da r

Escrivo FS(i), se c_{ij}+d[i,j] < d[j] aggiorno come Dijkstra e se j ∈ Q lo aggiungo e incremento K[j] di 1 (aggiornato d[i,j] SOLO SE NO altri numeri NON entra in lista!!)

Se K[i] ≥ ITI c'è ciclo negativo, altrimenti REITERO (estratto i da Q a caso)

Se Q = Ø concluso!

7) Flusso massimo

Dato albero direzionale, capacità e condizione iniziale:

Costruisco grafo residuale, cercar cammino aumentante da s a t

Modifico le capacità di $\lambda_{i,j}$ del grafo → se concorde incremento
→ se discorde decremento

REITERO, se è cammino aumentante $v = \max \text{ flow}$

Cercar taglio N_s, N_t tc archi in entrambi saturi → $V(N_s, N_t) = v = \max \text{ flow} = \min \text{ cut}$
archi indietro scarichi

8) Tagli di Gomory

Dato (PL), risolvere rilassamento (PL) via metodo grafico.

Se trovo ottimo intero conclude.

Altrimenti riporto il problema in **forme standard**:

→ scrivo i vincoli ciascuno dipendente da una sola variabile in base, con coefficiente 1

→ oppure ricavo il sistema sopra con \leq an coefficienti: x_0 termini noti e le variabili in base all'inizio

USO PARTE INTEGRA (floor) sui coeff del sistema trovato, sostituisco = con \leq , sono le eq. dei tagli

NB $\lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = -1 \quad \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$

Se i tagli contingono var di slack si sostituisce i vincoli (delle forme standard) per ottenere equazioni in x_i (disegnabili nel piano x_1, x_2)

Risolvere con i tagli per via grafica → **notri non trovare**

Soluzione!?

Controllo

9) Branch and bound (binario)

Dato (PL), risolvere rilassamento (PL) via metodo grafico.

Se trovo ottimo intero conclude

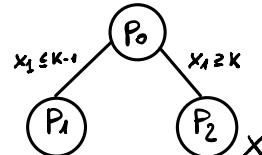
altrimenti ottino un sl. non intero: stima = **UB (max)** o **LB (min)**

applicare branch su una delle variabili frazionarie

Risolvere il (PL) rilassato con le condizioni del branch, aggiornare la stima per i nuovi nodi, **REITERO**

Potrei chiudere nodi se → trovo ottimo intero per P_i : $LB_i = UB_i = \text{stima}$

- $\exists j$ tc
 - $LB_j \geq UB_j$ (max)
 - $UB_j \leq LB_j$ (min)
 - regione ammessa vuota



NB ✓ branch la stima dove peggiorare o rimanere uguale
(aumentare LB per minimo)
(diminuire UB per massimo)

NB Se mi dà già un albero di branch con LB e UB già calcolati e mi chiede intervallo più stringente mi ottino: **max** maggiore LB \leq OTTIMO \leq maggior UB
di nodi ancora aperti *

min minor LB \leq OTTIMO \leq minor UB
di nodi ancora aperti *

* o nodi genitori con figli con UB/LB
non ancora calcolati

10) Branch and bound zaino (binario)