Notes of

Game Theory

From Prof. Gianni Arioli's lectures
for the MSc in Mathematical Engineering

by Teo Bucci

Politecnico di Milano
A.Y. 2021/2022

Contents

Chapter 1

Programmazione Lineare

1.1 Esercizio 1

Parametri

P porti, $i = 1, 2, 3$

c_i costo per porto per ogni vettura $(150, 250, 200)$

t_i costo fisso porto

S centri di smistamento, $j = 1, \dots, 4$

k_i costo di invio dal porto i al km

a_{ij} distanza dal porto i al centro j

r_j richiesta del centro j

d_i capacità del porto i

Variabili

$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \mathbb{Z}$ numero di automobili dal porto i al centro j

$y_i \in \{0, 1\}$, uguali a 1 se uso il porto i

$z_{ij} \in \{0, 1\}$, uguali a 1 se il porto i rifornisce il centro j

Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \underbrace{\sum_{ij} c_i x_{ij}}_{\text{auto}} + \underbrace{\sum_{i} t_i y_i}_{\text{porto}} + \underbrace{\sum_{ij} a_{ij} k_i x_{ij}}_{\text{trasporto}} \right\}$$

Vincoli

$\sum_i x_{ij} \geq r_j, \forall j \in S$

$\sum_j x_{ij} \leq d_i y_i, \forall i \in P$

$\sum_i z_{i,3} = 1$

$x_{ij} \leq d_i z_{ij}, \forall i \in P, \forall j \in S$

$z_{22} \leq z_{24}$

1.2 Esercizio 2

Parametri

A aeroporti

H hangar

c_j, s_j, t_j operatori $\forall j \in H$

g_1 costo squadra 1

g_2 costo squadra 2

g_3 costo squadra 3

1c	1s	1t
3c	1s	X
3c	2s	2t

Variabili

$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}$ squadre tipo 1

$y_j \geq 0, y_j \in \mathbb{Z}$ squadre tipo 2

$z_j \geq 0, z_j \in \mathbb{Z}$ squadre tipo 3

$\varphi \in \{0,1\}$, uguale a 1 se uso 3 squadre di tipo 2

$w_{ij} \in \{0,1\}$, uguale a 1 se aereo i in hangar j, $\forall i \in A, \forall j \in H$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_j (x_j g_1 + y_j g_2 + z_j g_3)$$

Vincoli

$\sum_j w_{ij} = 1, \forall i \in A$

$$\left.\begin{array}{lllll} x_j & +3y_j & +3z_j & \geq \sum_i c_j w_{ij} & \forall j \in H \\ x_j & +y_j & +2z_j & \geq \sum_i s_j w_{ij} & \forall j \in H \\ x_j & & +z_j & \geq \sum_i t_j w_{ij} & \forall j \in H \end{array}\right\} \text{operai}$$

$y_j \geq 3 \overset{(A)}{\Rightarrow} \varphi = 1 \overset{(B)}{\Rightarrow} z_j \geq 2$

(A) $\sum_j y_j - 2 \leq M\varphi$

(B) $2\varphi \leq \sum_j z_j$

1.3 Esercizio 3

Parametri

$p_j,\ j = 1,2$

r_j pretto vendita

d_j domanda

I materie prime $i \in I$

c_i disponibilità

g_i costo unitario materie prima

g_{ji} materia i necessaria per j

o_1 ore p_1 da materia prima

o_2 ore p_2 da materia prima

oppure ottengo p_2 con

b unità di p_1 per p_2

o_3 ore lavorazione (p_2 da p_1)

k costo fisso attivazione

O ore a disposizione

Variabili

$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}$ unità di prodotto j da materie prime

$y \geq 0, y \in \mathbb{Z}$ unità di prodotto 2 da prodotto 1

$z \in \{0,1\}$, uguale a 1 se attivo processo produttivo**Funzione obiettivo**

$$\max \left\{ [r_1(x_1 - by) + r_2(x_2 + y)] - \left[\sum_{ij} g_i q_{ji} x_j + kz \right] \right\}$$

Vincoli

$y \leq Mz$

$(x_1 - by) \geq d_1$

$(x_2 - y) \geq d_2$

$\sum_j q_{ji} x_j \leq c_i, \forall i \in I$

$o_1 x_1 + o_2 x_2 + o_3 y \leq O$

1.4 Esercizio 4

Parametri

T gruppi $i \in T$

p_i persone

J aerei $j \in J$

c_j costo noleggio

B_j capienza aereo

A aeroporto $k \in A$

G_k max voli per aeroporto

l_{jk} costo di far partire j da k

R sottoinsiemi di aeroporti vicini

S_r con $r = 1, \ldots, R$, al più un aeroporto

Variabili

$x_{ij} \in \{0,1\}$, uguale a 1 se gruppo i ad aereo j

$y_{jk} \in \{0,1\}$, uguale a 1 se aereo j parte da k

$z_j \in \{0,1\}$, uguale a 1 se uso aereo j

$w_k \in \{0,1\}$, uguale a 1 se uso aeroporto k

Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \sum_j c_j z_j + \sum_{jk} l_{jk} y_{jk} \right\}$$

Vincoli

$\sum_i x_{ij} \leq M z_j, \forall j \in J$

$\sum_i p_i x_{ij} \leq B_j, \forall j \in J$

$\sum_j y_{jk} \leq G_k w_k, \forall k \in K$

$\sum_{k \in S_r} w_k \leq 1, \forall r = 1, \ldots, R$

$\sum_j x_{ij} = 1, \forall i \in I$

$\sum_k y_{jk} = z_j, \forall j \in J$

1.5 Esercizio 5

Parametri

P domande iscrizione $i \in P$

$M \subset P, F \subset P$, uomini, donne ($M \cup F = P, M \cap F = \varnothing$)

n max persone per classe

d massimo classi ($D = 1, \ldots, d$ insieme classi)

b_i preparazione di i

q livello minimo per classe

C coppie formate $(i, j) \in C, i \in M, j \in F$

Variabili

$x_{ik} \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se persona i in classe k

$y_i \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se accetto domanda

Funzione obiettivo

$$\max \sum_i y_i$$

Vincoli

$\sum_{i \in P} x_{ik} \leq n, \forall k \in D$ capacità classe

$\sum_{i \in M} x_{ik} = \sum_{i \in F} x_{ik}, \forall k \in D$ uguali M/F

$\sum_{i \in P} x_{ik} b_i \geq q \sum_{i \in P} x_{ik}, \forall k \in D$ preparazione

$y_i \leq \sum_{k \in D} x_{ik}, \forall i \in P$ bigM

$\sum_{k \in D} x_{ik} \leq 1, \forall i \in P$ massimo 1 corso per persona

$x_{ik} = x_{jk}, \forall (i, j) \in C, \forall k \in D$ coppie

1.6 Esercizio 6

Parametri

A insieme altiforni $i = 1 \ldots N, i \in A$

m_i max quintali per altiforno

P prodotti $j \in P$

q_{1j} prodotto j da 1 quintale di materia prime con processo 1 (prodotto/quintale)

q_{2j} prodotto j da 1 quintale di materia prime con processo 2 (prodotto/quintale)

r_j richiesto prodotto

c_{1i} costo lavorazione al quintale in altiforno i con processo 1 (euro/quintale)

c_{2i} costo lavorazione al quintale in altiforno i con processo 2 (euro/quintale)

f_i costo attivazione processo 2 in altiforno i**Variabili**

$w_i \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se lavoro più di q

$y_i \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se uso processo 2

$x_{ij1} \geq 0, x_{ij1} \in \mathbb{Z}$ prodotto j con processo 1 in altiforno i

$x_{ij2} \geq 0, x_{ij2} \in \mathbb{Z}$ prodotto j con processo 2 in altiforno i

Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \sum_i y_i f_i + \sum_{ij} \left[c_{1i} \frac{x_{ij1}}{q_{1j}} + c_{2i} \frac{x_{ij2}}{q_{2j}} \right] \right\}$$

Vincoli

$\sum_j x_{ij2} \leq My_i, \forall i \in A$ bigM

$\sum_j \left[\frac{x_{ij1}}{q_{1j}} + \frac{x_{ij2}}{q_{2j}}\right] \leq m_i, \forall i \in A$ capacità

$\sum_i [x_{ij1} + x_{ij2}] \geq r_j, \forall j \in P$ richiesta

$\sum_i y_i \leq N - 1$ no processo 2 su tutti gli altiforni

$\sum_i w_i \geq 1$ almeno 1 usa più di q quintali

$qw_i \leq \sum_{ij} \left[\frac{x_{ij1}}{q_{1j}} + \frac{x_{ij2}}{q_{2j}}\right], \forall i \in A$ vincolo logico

1.7 Esercizio 7

Parametri

C cioccolatini $i \in C$

S confezioni regalo $j \in S$

r_{ij} richieste cioccolatini i in confezione j

g_i costo cioccolatino

m_i max produzione

p_i vendita cioccolatino sfuso i

d_j vendita confezione j

b_j costo scatola j**Variabili**

$x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}$ numero cioccolatini i prodotti

$y_j \geq 0, y_j \in \mathbb{Z}$ numero confezioni j prodotte

$z \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se acquisto almeno q scatole

Funzione obiettivo

$$\max \left\{ \underbrace{\sum_j d_j y_j}_{\text{confezioni}} + \underbrace{\sum_i p_i \left(x_i - \sum_j r_{ij} y_j \right)}_{\text{sfusi}} - \underbrace{\sum_i g_i x_i}_{\text{costo prod.}} - \underbrace{\sum_j b_j y_j}_{\text{costo scatole}} + \underbrace{zB}_{\text{sconto}} \right\}$$

Vincoli

$x_i \geq \sum_j r_{ij} y_j, \forall i \in I$ richiesta

$x_i \leq m_i, \forall i \in I$ capacità

$\sum_j y_j \geq Qz$ sconto

$x_1 \geq 0.2 \cdot \sum_i x_i \quad$ quolità

1.8 Esercizio 8

Parametri

D difensori

A attaccanti

G giocatori $i \in G$

$r_i \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se giocatore i è attaccante

v_i valore giocatore

B valore complessivo formazione

q giocatori non giocanti

K formazioni $|K| = 2$

Variabili

$z \geq 0, z \in \mathbb{Z}$ valore formazione di minimo valore

$x_{ik} \in \{0,1\}$, uguale a 1 se giocatore i è nelle formazione k

$y_i \in \{0,1\}$, uguale a 1 se i gioca in entrambe

Funzione obiettivo

$$\max z$$

Vincoli

$\sum_i r_i x_{ik} = A, \forall k \in K$

$\sum_i (1 - r_i) x_{ik} = D, \forall k \in K$

$\sum_i v_i x_{ik} \geq B, \forall k \in K$ minimo valore richiesto

$(|G| - \sum_i y_i) \geq q$ almeno q non giocanti entrambe

$(\sum_k x_{ik} - 1) \leq M y_i, \forall i \in I$ bigM

$z \leq \sum_i v_i x_{ik}, \forall k \in K$ bottleneck

1.9 Esercizio 9

Parametri

B beni $i \in B$

M magazzino $j \in M$

A luoghi distribuzione $k \in A$

c_i costo bene i

v_i spazio occupato da i in magazzino

b_j capacità

f_j costo fisso magazzino se usato

g_{jk} costo trasporto bene da j a k

d_{ik} richiesta bene i a k

Variabili

$y_j \in \{0,1\}$, uguale a 1 se uso j

$z_{ijk} \geq 0, z_{ijk} \in \mathbb{Z}$ numero di beni i da j a k

Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \sum_{ijk} c_i z_{ijk} + \sum_j f_j y_j + \sum_{ijk} z_{ijk} g_{jk} \right\}$$

Vincoli

$\sum_j z_{ijk} \geq d_{ik}, \forall i \in I, \forall k \in K$ richiesta

$\sum_{ik} v_i z_{ijk} \leq b_j y_j, \forall j \in J$ bigM e capacità

1.10 Esercizio 10

Parametri

C analisi $i \in C, i = 1, \ldots, 4$

O ospedali $j \in O, j = 1, \ldots, 5$

d_{ij} tempo da i a j

r_j richieste analisi

b_i max analisi nel centro i

Variabili

$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \mathbb{Z}$ numero analisi al centro i per ospedale j

$z_{2i} \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se 2 si serve da i

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{ij} a_{ij} x_{ij}$$

Vincoli

$$\left.\begin{array}{l} \sum_j x_{1j} \leq 0.8 \cdot \left(\sum_j x_{2j} + x_{3j}\right) \\ \sum_j x_{2j} \leq 0.6 \cdot \left(\sum_j x_{ij} + x_{3j}\right) \\ \sum_j (x_{3j} + x_{4j}) \leq 0.5 \cdot \sum_{ij} x_{ij} \end{array}\right\} \text{qualità}$$

$\sum_i x_{ij} = r_j, \forall j \in J$ richiesta

$\sum_j x_{ij} \leq b_i, \forall i \in I$ capacità

$\sum z_{2i} = 1$

$x_{i2} \leq b_i z_{2i}, \forall i \in I$ bigM