

SOLUZIONI DI

FONDAMENTI DI RICERCA OPERATIVA

Contents

1	Programmazione Lineare	1
1.1	Esercizio 1	1
1.2	Esercizio 2	2
1.3	Esercizio 3	2
1.4	Esercizio 4	3
1.5	Esercizio 5	4
1.6	Esercizio 6	5
1.7	Esercizio 7	6
1.8	Esercizio 8	6
1.9	Esercizio 9	7
1.10	Esercizio 10	8
2	Grafi	9
2.1	Esercizio 1	9
2.2	Esercizio 2	10
2.3	Esercizio 3	10
2.4	Esercizio 4	11
2.5	Esercizio 5	11
2.6	Esercizio 6	12
2.7	Esercizio 7	13

Chapter 1

Programmazione Lineare

1.1 Esercizio 1

Parametri

P porti, $i = 1, 2, 3$

c_i costo per porto per ogni vettura (150, 250, 200)

t_i costo fisso porto

S centri di smistamento, $j = 1, \dots, 4$

k_i costo di invio dal porto i al km

a_{ij} distanza dal porto i al centro j

r_j richiesta del centro j

d_i capacità del porto i

Variabili

$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \mathbb{Z}$ numero di automobili dal porto i al centro j

$y_i \in \{0, 1\}$, uguali a 1 se uso il porto i

$z_{ij} \in \{0, 1\}$, uguali a 1 se il porto i rifornisce il centro j

Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \underbrace{\sum_{ij} c_i x_{ij}}_{\text{auto}} + \underbrace{\sum_i t_i y_i}_{\text{porto}} + \underbrace{\sum_{ij} a_{ij} k_i x_{ij}}_{\text{trasporto}} \right\}$$

Vincoli

$$\begin{array}{lll} \sum_i x_{ij} \geq r_j & \forall j \in S & \text{richiesta} \\ \sum_j x_{ij} \leq d_i y_i & \forall i \in P & \text{bigM + capacità} \\ \sum_i z_{i,3} = 1 & & \text{centro 3} \\ x_{ij} \leq d_i z_{ij} & \forall i \in P, \forall j \in S & \text{bigM} \\ z_{22} \leq z_{24} & & \text{logico} \end{array}$$

1.2 Esercizio 2

Parametri

A aeroporti

H hangar

c_j, s_j, t_j operatori $\forall j \in H$

g_1 costo squadra 1

g_2 costo squadra 2

g_3 costo squadra 3

1c	1s	1t
3c	1s	X
3c	2s	2t

Variabili

$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}$ squadre tipo 1

$y_j \geq 0, y_j \in \mathbb{Z}$ squadre tipo 2

$z_j \geq 0, z_j \in \mathbb{Z}$ squadre tipo 3

$\varphi \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se uso 3 squadre di tipo 2

$w_{ij} \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se aereo i in hangar j , $\forall i \in A, \forall j \in H$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_j (x_j g_1 + y_j g_2 + z_j g_3)$$

Vincoli

$$\begin{aligned} \sum_j w_{ij} &= 1 \quad \forall i \in A && \text{assegnazione} \\ x_j + 3y_j + 3z_j &\geq \sum_i c_j w_{ij} \quad \forall j \in H && \text{operai} \\ x_j + y_j + 2z_j &\geq \sum_i s_j w_{ij} \quad \forall j \in H && \text{operai} \\ x_j + z_j &\geq \sum_i t_j w_{ij} \quad \forall j \in H && \text{operai} \\ \sum_j y_j - 2 &\leq M\varphi && \text{(A)} \\ 2\varphi &\leq \sum_j z_j && \text{(B)} \end{aligned}$$

Gli ultimi due vincoli servono per realizzare:

$$y_j \geq 3 \stackrel{\text{(A)}}{\Rightarrow} \varphi = 1 \stackrel{\text{(B)}}{\Rightarrow} z_j \geq 2$$

1.3 Esercizio 3

Parametri

$p_j, j = 1, 2$

r_j prezzo vendita

d_j domanda

I materie prime $i \in I$

c_i disponibilità

g_i costo unitario materie prima

g_{ji} materia i necessaria per j

o_1 ore p_1 da materia prima

o_2 ore p_2 da materia prima

oppure ottengo p_2 con

b unità di p_1 per p_2

o_3 ore lavorazione (p_2 da p_1)

k costo fisso attivazione

O ore a disposizione

Variabili

$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}$ unità di prodotto j da materie prime

$y \geq 0, y \in \mathbb{Z}$ unità di prodotto 2 da prodotto 1

$z \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se attivo processo produttivo

Funzione obiettivo

$$\max \left\{ [r_1(x_1 - by) + r_2(x_2 + y)] - \left[\sum_{ij} g_i q_{ji} x_j + kz \right] \right\}$$

Vincoli

$$\begin{array}{ll} y \leq Mz & \text{bigM} \\ (x_1 - by) \geq d_1 & \text{richiesta} \\ (x_2 - y) \geq d_2 & \text{richiesta} \\ \sum_j q_{ji} x_j \leq c_i & \forall i \in I \quad \text{disponibilità} \\ o_1 x_1 + o_2 x_2 + o_3 y \leq O & \text{disponibilità} \end{array}$$

1.4 Esercizio 4

Parametri

T gruppi $i \in T$

p_i persone

J aerei $j \in J$

c_j costo noleggio

B_j capienza aereo

A aeroporto $k \in A$

G_k max voli per aeroporto

l_{jk} costo di far partire j da k

R sottoinsiemi di aeroporti vicini

S_r con $r = 1, \dots, R$, al più un aeroporto

Variabili

$x_{ij} \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se gruppo i ad aereo j

$y_{jk} \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se aereo j parte da k

$z_j \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se uso aereo j

$w_k \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se uso aeroporto k

Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \sum_j c_j z_j + \sum_{jk} l_{jk} y_{jk} \right\}$$

Vincoli

$$\begin{array}{llll} \sum_i x_{ij} \leq M z_j & \forall j \in J & \text{bigM} \\ \sum_i p_i x_{ij} \leq B_j & \forall j \in J & \text{capacità} \\ \sum_j y_{jk} \leq G_k w_k & \forall k \in K & \text{bigM} + \text{capienza voli} \\ \sum_{k \in S_r} w_k \leq 1 & \forall r = 1, \dots, R & \text{no aeroporti vicini} \\ \sum_j x_{ij} = 1 & \forall i \in I & \text{assegnamento} \\ \sum_k y_{jk} = z_j & \forall j \in J & \text{un aereo per aeroporto, se usato} \end{array}$$

1.5 Esercizio 5

Parametri

P domande iscrizione $i \in P$

$M \subset P, F \subset P$, uomini, donne ($M \cup F = P, M \cap F = \emptyset$)

n max persone per classe

d massimo classi ($D = 1, \dots, d$ insieme classi)

b_i preparazione di i

q livello minimo per classe

C coppie formate $(i, j) \in C, i \in M, j \in F$

Variabili

$x_{ik} \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se persona i in classe k

$y_i \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se accetto domanda

Funzione obiettivo

$$\max \sum_i y_i$$

Vincoli

$$\begin{array}{llll} \sum_{i \in P} x_{ik} \leq n & \forall k \in D & \text{capacità classe} \\ \sum_{i \in M} x_{ik} = \sum_{i \in F} x_{ik} & \forall k \in D & \text{uguali } M/F \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in P} x_{ik} b_i &\geq q \sum_{i \in P} x_{ik} & \forall k \in D & \text{preparazione} \\
y_i &\leq \sum_{k \in D} x_{ik} & \forall i \in P & \text{bigM} \\
\sum_{k \in D} x_{ik} &\leq 1 & \forall i \in P & \text{massimo 1 corso per persona} \\
x_{ik} &= x_{jk} & \forall (i, j) \in C, \forall k \in D & \text{coppie}
\end{aligned}$$

1.6 Esercizio 6

Parametri

A insieme altiforni $i = 1 \dots N, i \in A$

m_i max quintali per altiforno

P prodotti $j \in P$

q_{1j} prodotto j da 1 quintale di materia prime con processo 1 (prodotto/quintale)

q_{2j} prodotto j da 1 quintale di materia prime con processo 2 (prodotto/quintale)

r_j richiesto prodotto

c_{1i} costo lavorazione al quintale in altiforno i con processo 1 (euro/quintale)

c_{2i} costo lavorazione al quintale in altiforno i con processo 2 (euro/quintale)

f_i costo attivazione processo 2 in altiforno i

Variabili

$w_i \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se lavoro più di q

$y_i \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se uso processo 2

$x_{ij1} \geq 0, x_{ij1} \in \mathbb{Z}$ prodotto j con processo 1 in altiforno i

$x_{ij2} \geq 0, x_{ij2} \in \mathbb{Z}$ prodotto j con processo 2 in altiforno i

Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \sum_i y_i f_i + \sum_{ij} \left[c_{1i} \frac{x_{ij1}}{q_{1j}} + c_{2i} \frac{x_{ij2}}{q_{2j}} \right] \right\}$$

Vincoli

$$\begin{aligned}
\sum_j x_{ij2} &\leq M y_i & \forall i \in A & \text{bigM} \\
\sum_j \left[\frac{x_{ij1}}{q_{1j}} + \frac{x_{ij2}}{q_{2j}} \right] &\leq m_i & \forall i \in A & \text{capacità} \\
\sum_i [x_{ij1} + x_{ij2}] &\geq r_j & \forall j \in P & \text{richiesta} \\
\sum_i y_i &\leq N - 1 & & \text{no processo 2 su tutti gli altiforni} \\
\sum_i w_i &\geq 1 & & \text{almeno 1 usa più di } q \text{ quintali} \\
q w_i &\leq \sum_{ij} \left[\frac{x_{ij1}}{q_{1j}} + \frac{x_{ij2}}{q_{2j}} \right] & \forall i \in A & \text{vincolo logico}
\end{aligned}$$

1.7 Esercizio 7

Parametri

C cioccolatini $i \in C$

S confezioni regalo $j \in S$

r_{ij} richieste cioccolatini i in confezione j

g_i costo cioccolatino

m_i max produzione

p_i vendita cioccolatino sfuso i

d_j vendita confezione j

b_j costo scatola j

Variabili

$x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}$ numero cioccolatini i prodotti

$y_j \geq 0, y_j \in \mathbb{Z}$ numero confezioni j prodotte

$z \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se acquisto almeno q scatole

Funzione obiettivo

$$\max \left\{ \underbrace{\sum_j d_j y_j}_{\text{confezioni}} + \underbrace{\sum_i p_i \left(x_i - \sum_j r_{ij} y_j \right)}_{\text{sfusi}} - \underbrace{\sum_i g_i x_i}_{\text{costo prod.}} - \underbrace{\sum_j b_j y_j}_{\text{costo scatole}} + \underbrace{zB}_{\text{sconto}} \right\}$$

Vincoli

$$\begin{aligned} x_i &\geq \sum_j r_{ij} y_j & \forall i \in I & & \text{richiesta} \\ x_i &\leq m_i & \forall i \in I & & \text{capacità} \\ \sum_j y_j &\geq Qz & & & \text{sconto} \\ x_1 &\geq 0.2 \cdot \sum_i x_i & & & \text{qualità} \end{aligned}$$

1.8 Esercizio 8

Parametri

D difensori

A attaccanti

G giocatori $i \in G$

$r_i \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se giocatore i è attaccante

v_i valore giocatore

B valore complessivo formazione

q giocatori non giocanti

K formazioni $|K| = 2$

Variabili

$z \geq 0, z \in \mathbb{Z}$ valore formazione di minimo valore

$x_{ik} \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se giocatore i è nelle formazione k

$y_i \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se i gioca in entrambe

Funzione obiettivo

$$\max z$$

Vincoli

$$\begin{aligned} \sum_i r_i x_{ik} &= A & \forall k \in K \\ \sum_i (1 - r_i) x_{ik} &= D & \forall k \in K \\ \sum_i v_i x_{ik} &\geq B & \forall k \in K & \text{minimo valore richiesto} \\ \left(|G| - \sum_i y_i \right) &\geq q & & \text{almeno } q \text{ non giocatori entrambe} \\ \left(\sum_k x_{ik} - 1 \right) &\leq M y_i & \forall i \in I & \text{bigM} \\ z &\leq \sum_i v_i x_{ik} & \forall k \in K & \text{bottleneck} \end{aligned}$$

1.9 Esercizio 9

Parametri

B beni $i \in B$

M magazzino $j \in M$

A luoghi distribuzione $k \in A$

c_i costo bene i

v_i spazio occupato da i in magazzino

b_j capacità

f_j costo fisso magazzino se usato

g_{jk} costo trasporto bene da j a k

d_{ik} richiesta bene i a k

Variabili

$y_j \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se uso j

$z_{ijk} \geq 0, z_{ijk} \in \mathbb{Z}$ numero di beni i da j a k

Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \sum_{ijk} c_i z_{ijk} + \sum_j f_j y_j + \sum_{ijk} z_{ijk} g_{jk} \right\}$$

Vincoli

$$\begin{aligned} \sum_j z_{ijk} &\geq d_{ik} & \forall i \in I, \forall k \in K & \text{richiesta} \\ \sum_{ik} v_i z_{ijk} &\leq b_j y_j & \forall j \in J & \text{bigM e capacità} \end{aligned}$$

1.10 Esercizio 10

Parametri

C analisi $i \in C, i = 1, \dots, 4$

O ospedali $j \in O, j = 1, \dots, 5$

d_{ij} tempo da i a j

r_j richieste analisi

b_i max analisi nel centro i

Variabili

$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \mathbb{Z}$ numero analisi al centro i per ospedale j

$z_{2i} \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se 2 si serve da i

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{ij} a_{ij} x_{ij}$$

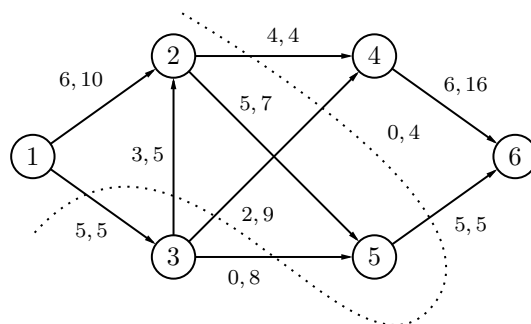
Vincoli

$$\begin{aligned} \sum_j x_{1j} &\leq 0.8 \cdot \left(\sum_j x_{2j} + x_{3j} \right) && \text{qualità} \\ \sum_j x_{2j} &\leq 0.6 \cdot \left(\sum_j x_{ij} + x_{3j} \right) && \text{qualità} \\ \sum_j (x_{3j} + x_{4j}) &\leq 0.5 \cdot \sum_{ij} x_{ij} && \text{qualità} \\ \sum_i x_{ij} &= r_j \quad \forall j \in J && \text{richiesta} \\ \sum_j x_{ij} &\leq b_i \quad \forall i \in I && \text{capacità} \\ \sum z_{2i} &= 1 && \text{un solo centro per 2} \\ x_{i2} &\leq b_i z_{2i} \quad \forall i \in I && \text{bigM} \end{aligned}$$

Chapter 2

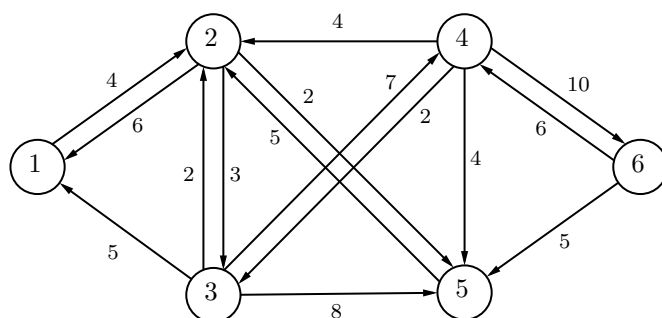
Grafi

2.1 Esercizio 1

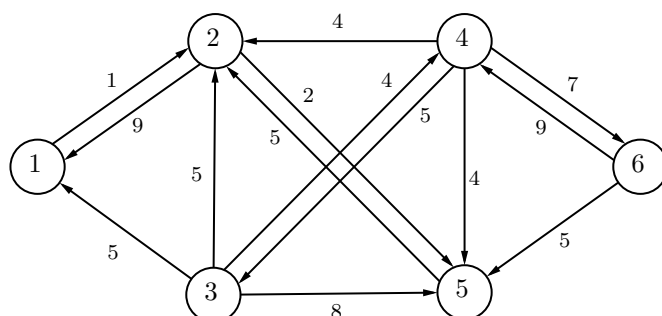


$s = 1, t = 6$.

$N_s = \{1, 2, 5\}, N_t = \{3, 4, 6\}$.

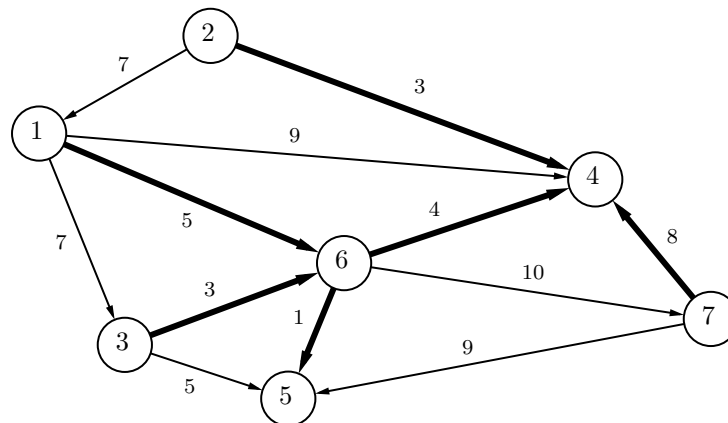


$(1) - (2) - (3) - (4) - (6)$
 $(1, 2) \lambda^+ = 4$
 $(2, 3) \lambda^- = 3$
 $(3, 4) \lambda^+ = 5$
 $(4, 6) \lambda^+ = 10$
 $\lambda_{\min} = 3$



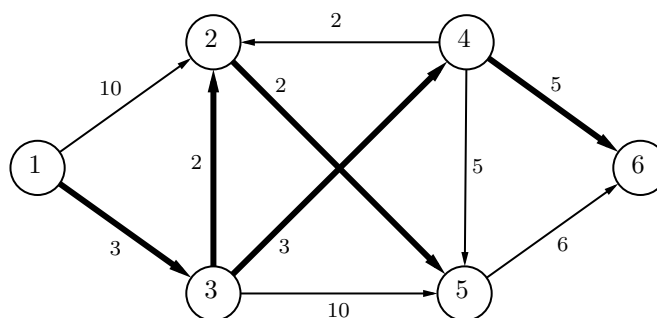
\nexists cammino aumentante
 $v = 9 + 15 = 14$

2.2 Esercizio 2



Lato	Costo	Accettato	$ T $
(5, 6)	1	✓	1
(3, 6)	3	✓	2
(2, 4)	3	✓	3
(4, 6)	4	✓	4
(1, 6)	5	✓	5
(3, 5)	5	✗	
(1, 2)	7	✗	
(1, 3)	7	✗	
(4, 7)	8	✓	6
(5, 7)	9		
(1, 4)	9		
(6, 7)	10		

2.3 Esercizio 3



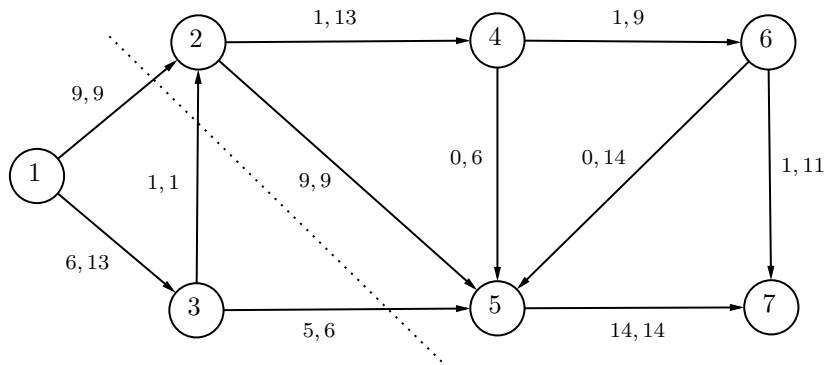
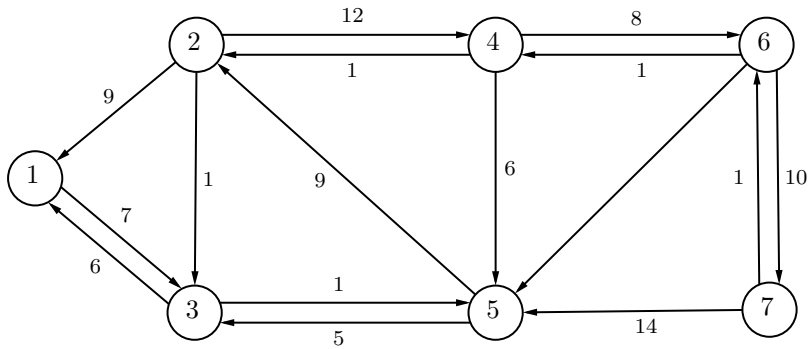
Enumerazione topologica.

Nodo	Etichetta
(1)	1
(3)	2
(4)	3
(2)	4
(5)	5
(6)	6

SPT-aciclico.

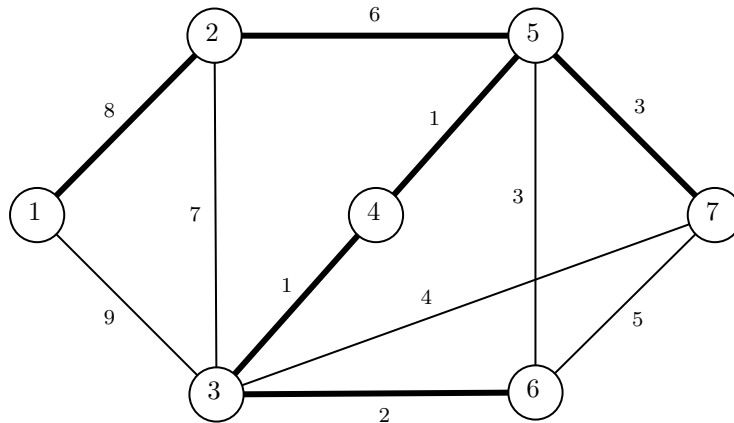
i	d, P	d, P	d, P	d, P	d, P	d, P
1	0, 1					
2	$M, 1$	10, 1	5, 3			
3	$M, 1$	3, 1				
4	$M, 1$		6, 3			
5	$M, 1$		13, 3	11, 4	7, 2	
6	$M, 1$			11, 4		
i	1	3	4	2	5	6

2.4 Esercizio 4


 $N_s = \{1, 3\}, N_t = \{2, 4, 5, 6, 7\}, U(N_s, N_t) = 16 = v.$


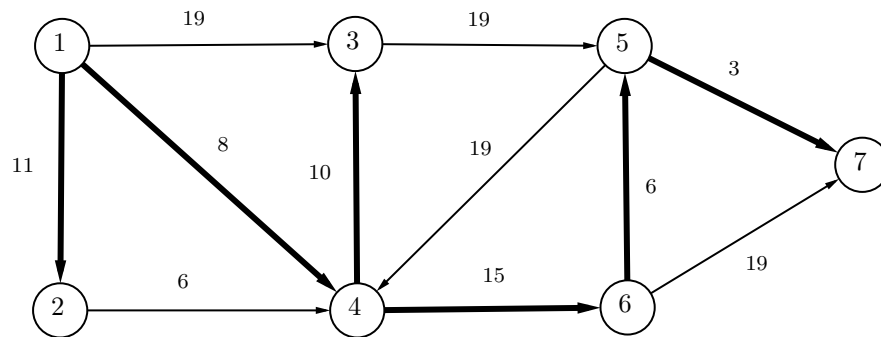
$(1) - (3) - (5) - (2) - (4) - (6) - (7)$
 $(1, 3) \lambda^+ = 7$
 $(3, 5) \lambda^+ = 1$
 $(5, 2) \lambda^- = 9$
 $(2, 4) \lambda^+ = 12$
 $(4, 6) \lambda^+ = 8$
 $(6, 7) \lambda^+ = 10$
 $\lambda_{\min} = 1$

2.5 Esercizio 5



Lato	Costo	Accettato	$ T $
(3, 4)	1	✓	1
(4, 5)	1	✓	2
(3, 6)	2	✓	3
(5, 7)	3	✓	4
(5, 6)	3	✗	
(3, 7)	4	✗	
(6, 7)	5	✗	
(2, 5)	6	✓	5
(3, 2)	7	✗	
(1, 2)	8	✓	6
(1, 3)	9		

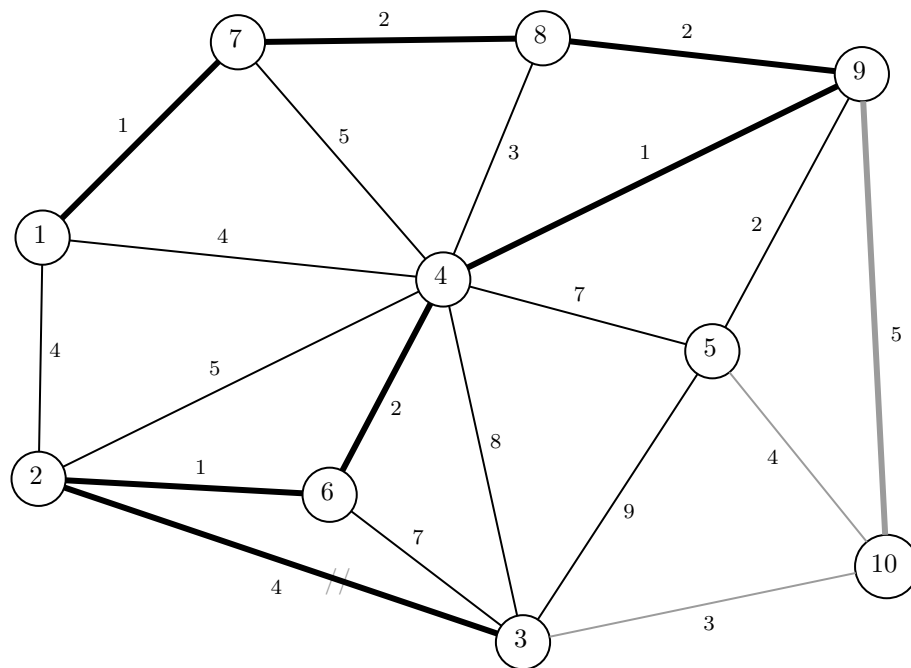
2.6 Esercizio 6



Dijkstra.

i	d, P	d, P	d, P	d, P	d, P	d, P
1	0, 1					
2	$M, 1$	11, 1				
3	$M, 1$	19, 1	18, 4			
4	$M, 1$	8, 1				
5	$M, 1$			37, 3	29, 6	
6	$M, 1$		23, 4			
7	$M, 1$				42, 6	32, 5
Q	1	2, 3, 4	2, 3, 6	5, 6	5, 7	7
i	1	4	2, 3	6	5	7

2.7 Esercizio 7



Lato	Costo	Accettato	$ T $
(1, 7)	1	✓	1
(2, 6)	1	✓	2
(4, 9)	1	✓	3
(4, 6)	2	✓	4
(5, 9)	2	✓	5
(8, 9)	2	✓	6
(7, 8)	2	✓	7
(8, 4)	3	✗	
(3, 10)	3	3	8
(1, 4)	4	✗✗	
(2, 1)	4	✗✗	
(5, 10)	4	3	9 (stop!)
(2, 3)	4	✓	8
(4, 10)	5		
(7, 4)	5		
(2, 4)	5		
(4, 5)	7		
(6, 3)	7		
(4, 3)	8		
(3, 5)	9		

