

SOLUZIONI DI  
FONDAMENTI DI RICERCA OPERATIVA



# Contents

<b>1</b>	<b>Programmazione Lineare</b>	<b>1</b>
1.1	Esercizio 1 . . . . .	1
1.2	Esercizio 2 . . . . .	2
1.3	Esercizio 3 . . . . .	2
1.4	Esercizio 4 . . . . .	3
1.5	Esercizio 5 . . . . .	4
1.6	Esercizio 6 . . . . .	5
1.7	Esercizio 7 . . . . .	6
1.8	Esercizio 8 . . . . .	6
1.9	Esercizio 9 . . . . .	7
1.10	Esercizio 10 . . . . .	8



# Chapter 1

## Programmazione Lineare

### 1.1 Esercizio 1

#### Parametri

$P$  porti,  $i = 1, 2, 3$

$c_i$  costo per porto per ogni vettura (150, 250, 200)

$t_i$  costo fisso porto

$S$  centri di smistamento,  $j = 1, \dots, 4$

$k_i$  costo di invio dal porto  $i$  al km

$a_{ij}$  distanza dal porto  $i$  al centro  $j$

$r_j$  richiesta del centro  $j$

$d_i$  capacità del porto  $i$

#### Variabili

$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \mathbb{Z}$  numero di automobili dal porto  $i$  al centro  $j$

$y_i \in \{0, 1\}$ , uguali a 1 se uso il porto  $i$

$z_{ij} \in \{0, 1\}$ , uguali a 1 se il porto  $i$  rifornisce il centro  $j$

#### Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \underbrace{\sum_{ij} c_i x_{ij}}_{\text{auto}} + \underbrace{\sum_i t_i y_i}_{\text{porto}} + \underbrace{\sum_{ij} a_{ij} k_i x_{ij}}_{\text{trasporto}} \right\}$$

#### Vincoli

$$\begin{array}{lll} \sum_i x_{ij} \geq r_j & \forall j \in S & \text{richiesta} \\ \sum_j x_{ij} \leq d_i y_i & \forall i \in P & \text{bigM + capacità} \\ \sum_i z_{i,3} = 1 & & \text{centro 3} \\ x_{ij} \leq d_i z_{ij} & \forall i \in P, \forall j \in S & \text{bigM} \\ z_{22} \leq z_{24} & & \text{logico} \end{array}$$

## 1.2 Esercizio 2

### Parametri

$A$  aeroporti

$H$  hangar

$c_j, s_j, t_j$  operatori  $\forall j \in H$

$g_1$  costo squadra 1

$g_2$  costo squadra 2

$g_3$  costo squadra 3

1c	1s	1t
3c	1s	X
3c	2s	2t

### Variabili

$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}$  squadre tipo 1

$y_j \geq 0, y_j \in \mathbb{Z}$  squadre tipo 2

$z_j \geq 0, z_j \in \mathbb{Z}$  squadre tipo 3

$\varphi \in \{0, 1\}$ , uguale a 1 se uso 3 squadre di tipo 2

$w_{ij} \in \{0, 1\}$ , uguale a 1 se aereo  $i$  in hangar  $j$ ,  $\forall i \in A, \forall j \in H$

### Funzione obiettivo

$$\min \sum_j (x_j g_1 + y_j g_2 + z_j g_3)$$

### Vincoli

$$\begin{aligned} \sum_j w_{ij} &= 1 & \forall i \in A & \quad \text{assegnazione} \\ x_j + 3y_j + 3z_j &\geq \sum_i c_j w_{ij} & \forall j \in H & \quad \text{operai} \\ x_j + y_j + 2z_j &\geq \sum_i s_j w_{ij} & \forall j \in H & \quad \text{operai} \\ x_j + z_j &\geq \sum_i t_j w_{ij} & \forall j \in H & \quad \text{operai} \\ \sum_j y_j - 2 &\leq M\varphi & & \quad \text{(A)} \\ 2\varphi &\leq \sum_j z_j & & \quad \text{(B)} \end{aligned}$$

Gli ultimi due vincoli servono per realizzare:

$$y_j \geq 3 \stackrel{\text{(A)}}{\Rightarrow} \varphi = 1 \stackrel{\text{(B)}}{\Rightarrow} z_j \geq 2$$

## 1.3 Esercizio 3

### Parametri

$p_j, j = 1, 2$

$r_j$  prezzo vendita

$d_j$  domanda

$I$  materie prime  $i \in I$

$c_i$  disponibilità

$g_i$  costo unitario materie prima

$g_{ji}$  materia  $i$  necessaria per  $j$

$o_1$  ore  $p_1$  da materia prima

$o_2$  ore  $p_2$  da materia prima

oppure ottengo  $p_2$  con

$b$  unità di  $p_1$  per  $p_2$

$o_3$  ore lavorazione ( $p_2$  da  $p_1$ )

$k$  costo fisso attivazione

$O$  ore a disposizione

### Variabili

$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}$  unità di prodotto  $j$  da materie prime

$y \geq 0, y \in \mathbb{Z}$  unità di prodotto 2 da prodotto 1

$z \in \{0, 1\}$ , uguale a 1 se attivo processo produttivo

### Funzione obiettivo

$$\max \left\{ [r_1(x_1 - by) + r_2(x_2 + y)] - \left[ \sum_{ij} g_i q_{ji} x_j + kz \right] \right\}$$

### Vincoli

$$\begin{array}{ll} y \leq Mz & \text{bigM} \\ (x_1 - by) \geq d_1 & \text{richiesta} \\ (x_2 - y) \geq d_2 & \text{richiesta} \\ \sum_j q_{ji} x_j \leq c_i & \forall i \in I \quad \text{disponibilità} \\ o_1 x_1 + o_2 x_2 + o_3 y \leq O & \text{disponibilità} \end{array}$$

## 1.4 Esercizio 4

### Parametri

$T$  gruppi  $i \in T$

$p_i$  persone

$J$  aerei  $j \in J$

$c_j$  costo noleggio

$B_j$  capienza aereo

$A$  aeroporto  $k \in A$

$G_k$  max voli per aeroporto

$l_{jk}$  costo di far partire  $j$  da  $k$

$R$  sottoinsiemi di aeroporti vicini

$S_r$  con  $r = 1, \dots, R$ , al più un aeroporto

### Variabili

$x_{ij} \in \{0, 1\}$ , uguale a 1 se gruppo  $i$  ad aereo  $j$

$y_{jk} \in \{0, 1\}$ , uguale a 1 se aereo  $j$  parte da  $k$

$z_j \in \{0, 1\}$ , uguale a 1 se uso aereo  $j$

$w_k \in \{0, 1\}$ , uguale a 1 se uso aeroporto  $k$

**Funzione obiettivo**

$$\min \left\{ \sum_j c_j z_j + \sum_{jk} l_{jk} y_{jk} \right\}$$

**Vincoli**

$$\begin{array}{llll} \sum_i x_{ij} \leq M z_j & \forall j \in J & \text{bigM} \\ \sum_i p_i x_{ij} \leq B_j & \forall j \in J & \text{capacità} \\ \sum_j y_{jk} \leq G_k w_k & \forall k \in K & \text{bigM} + \text{capienza voli} \\ \sum_{k \in S_r} w_k \leq 1 & \forall r = 1, \dots, R & \text{no aeroporti vicini} \\ \sum_j x_{ij} = 1 & \forall i \in I & \text{assegnamento} \\ \sum_k y_{jk} = z_j & \forall j \in J & \text{un aereo per aeroporto, se usato} \end{array}$$

## 1.5 Esercizio 5

**Parametri**

$P$  domande iscrizione  $i \in P$

$M \subset P, F \subset P$ , uomini, donne ( $M \cup F = P, M \cap F = \emptyset$ )

$n$  max persone per classe

$d$  massimo classi ( $D = 1, \dots, d$  insieme classi)

$b_i$  preparazione di  $i$

$q$  livello minimo per classe

$C$  coppie formate ( $(i, j) \in C, i \in M, j \in F$ )

**Variabili**

$x_{ik} \in \{0, 1\}$ , uguale a 1 se persona  $i$  in classe  $k$

$y_i \in \{0, 1\}$ , uguale a 1 se accetto domanda

**Funzione obiettivo**

$$\max \sum_i y_i$$

**Vincoli**

$$\begin{array}{llll} \sum_{i \in P} x_{ik} \leq n & \forall k \in D & \text{capacità classe} \\ \sum_{i \in M} x_{ik} = \sum_{i \in F} x_{ik} & \forall k \in D & \text{uguali } M/F \end{array}$$



$\sum_{i \in P} x_{ik} b_i \geq q \sum_{i \in P} x_{ik} \quad \forall k \in D$	preparazione
$y_i \leq \sum_{k \in D} x_{ik} \quad \forall i \in P$	bigM
$\sum_{k \in D} x_{ik} \leq 1 \quad \forall i \in P$	massimo 1 corso per persona
$x_{ik} = x_{jk} \quad \forall (i, j) \in C, \forall k \in D$	coppie

## 1.6 Esercizio 6

### Parametri

$A$  insieme altiforni  $i = 1 \dots N, i \in A$

$m_i$  max quintali per altiforno

$P$  prodotti  $j \in P$

$q_{1j}$  prodotto  $j$  da 1 quintale di materia prime con processo 1 (prodotto/quintale)

$q_{2j}$  prodotto  $j$  da 1 quintale di materia prime con processo 2 (prodotto/quintale)

$r_j$  richiesto prodotto

$c_{1i}$  costo lavorazione al quintale in altiforno  $i$  con processo 1 (euro/quintale)

$c_{2i}$  costo lavorazione al quintale in altiforno  $i$  con processo 2 (euro/quintale)

$f_i$  costo attivazione processo 2 in altiforno  $i$  **Variabili**

$w_i \in \{0, 1\}$ , uguale a 1 se lavoro più di  $q$

$y_i \in \{0, 1\}$ , uguale a 1 se uso processo 2

$x_{ij1} \geq 0, x_{ij1} \in \mathbb{Z}$  prodotto  $j$  con processo 1 in altiforno  $i$

$x_{ij2} \geq 0, x_{ij2} \in \mathbb{Z}$  prodotto  $j$  con processo 2 in altiforno  $i$

### Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \sum_i y_i f_i + \sum_{ij} \left[ c_{1i} \frac{x_{ij1}}{q_{1j}} + c_{2i} \frac{x_{ij2}}{q_{2j}} \right] \right\}$$

### Vincoli

$\sum_j x_{ij2} \leq M y_i \quad \forall i \in A$	bigM
$\sum_j \left[ \frac{x_{ij1}}{q_{1j}} + \frac{x_{ij2}}{q_{2j}} \right] \leq m_i \quad \forall i \in A$	capacità
$\sum_i [x_{ij1} + x_{ij2}] \geq r_j \quad \forall j \in P$	richiesta
$\sum_i y_i \leq N - 1$	no processo 2 su tutti gli altiforni
$\sum_i w_i \geq 1$	almeno 1 usa più di $q$ quintali
$q w_i \leq \sum_{ij} \left[ \frac{x_{ij1}}{q_{1j}} + \frac{x_{ij2}}{q_{2j}} \right] \quad \forall i \in A$	vincolo logico

## 1.7 Esercizio 7

### Parametri

$C$  cioccolatini  $i \in C$

$S$  confezioni regalo  $j \in S$

$r_{ij}$  richieste cioccolatini  $i$  in confezione  $j$

$g_i$  costo cioccolatino

$m_i$  max produzione

$p_i$  vendita cioccolatino sfuso  $i$

$d_j$  vendita confezione  $j$

$b_j$  costo scatola  $j$

$x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}$  numero cioccolatini  $i$  prodotti

$y_j \geq 0, y_j \in \mathbb{Z}$  numero confezioni  $j$  prodotte

$z \in \{0, 1\}$ , uguale a 1 se acquisto almeno  $q$  scatole

### Funzione obiettivo

$$\max \left\{ \underbrace{\sum_j d_j y_j}_{\text{confezioni}} + \underbrace{\sum_i p_i \left( x_i - \sum_j r_{ij} y_j \right)}_{\text{sfusi}} - \underbrace{\sum_i g_i x_i}_{\text{costo prod.}} - \underbrace{\sum_j b_j y_j}_{\text{costo scatole}} + \underbrace{zB}_{\text{sconto}} \right\}$$

### Vincoli

$$\begin{aligned} x_i &\geq \sum_j r_{ij} y_j & \forall i \in I & \quad \text{richiesta} \\ x_i &\leq m_i & \forall i \in I & \quad \text{capacità} \\ \sum_j y_j &\geq Qz & & \quad \text{sconto} \\ x_1 &\geq 0.2 \cdot \sum_i x_i & & \quad \text{qualità} \end{aligned}$$

## 1.8 Esercizio 8

### Parametri

$D$  difensori

$A$  attaccanti

$G$  giocatori  $i \in G$

$r_i \in \{0, 1\}$ , uguale a 1 se giocatore  $i$  è attaccante

$v_i$  valore giocatore

$B$  valore complessivo formazione

$q$  giocatori non giocanti

$K$  formazioni  $|K| = 2$

### Variabili

$z \geq 0, z \in \mathbb{Z}$  valore formazione di minimo valore

$x_{ik} \in \{0, 1\}$ , uguale a 1 se giocatore  $i$  è nelle formazione  $k$

$y_i \in \{0, 1\}$ , uguale a 1 se  $i$  gioca in entrambe

**Funzione obiettivo**

$$\max z$$

**Vincoli**

$$\begin{aligned} \sum_i r_i x_{ik} &= A & \forall k \in K \\ \sum_i (1 - r_i) x_{ik} &= D & \forall k \in K \\ \sum_i v_i x_{ik} &\geq B & \forall k \in K & \text{minimo valore richiesto} \\ \left( |G| - \sum_i y_i \right) &\geq q & & \text{almeno } q \text{ non giocanti entrambe} \\ \left( \sum_k x_{ik} - 1 \right) &\leq M y_i & \forall i \in I & \text{bigM} \\ z &\leq \sum_i v_i x_{ik} & \forall k \in K & \text{bottleneck} \end{aligned}$$

**1.9 Esercizio 9****Parametri**

$B$  beni  $i \in B$

$M$  magazzino  $j \in M$

$A$  luoghi distribuzione  $k \in A$

$c_i$  costo bene  $i$

$v_i$  spazio occupato da  $i$  in magazzino

$b_j$  capacità

$f_j$  costo fisso magazzino se usato

$g_{jk}$  costo trasporto bene da  $j$  a  $k$

$d_{ik}$  richiesta bene  $i$  a  $k$

**Variabili**

$y_j \in \{0, 1\}$ , uguale a 1 se uso  $j$

$z_{ijk} \geq 0, z_{ijk} \in \mathbb{Z}$  numero di beni  $i$  da  $j$  a  $k$

**Funzione obiettivo**

$$\min \left\{ \sum_{ijk} c_i z_{ijk} + \sum_j f_j y_j + \sum_{ijk} z_{ijk} g_{jk} \right\}$$

**Vincoli**

$$\begin{aligned} \sum_j z_{ijk} &\geq d_{ik} & \forall i \in I, \forall k \in K & \text{richiesta} \\ \sum_{ik} v_i z_{ijk} &\leq b_j y_j & \forall j \in J & \text{bigM e capacità} \end{aligned}$$

## 1.10 Esercizio 10

### Parametri

$C$  analisi  $i \in C, i = 1, \dots, 4$

$O$  ospedali  $j \in O, j = 1, \dots, 5$

$d_{ij}$  tempo da  $i$  a  $j$

$r_j$  richieste analisi

$b_i$  max analisi nel centro  $i$

### Variabili

$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \mathbb{Z}$  numero analisi al centro  $i$  per ospedale  $j$

$z_{2i} \in \{0, 1\}$ , uguale a 1 se 2 si serve da  $i$

### Funzione obiettivo

$$\min \sum_{ij} a_{ij} x_{ij}$$

### Vincoli

$$\begin{aligned} \sum_j x_{1j} &\leq 0.8 \cdot \left( \sum_j x_{2j} + x_{3j} \right) && \text{qualità} \\ \sum_j x_{2j} &\leq 0.6 \cdot \left( \sum_j x_{ij} + x_{3j} \right) && \text{qualità} \\ \sum_j (x_{3j} + x_{4j}) &\leq 0.5 \cdot \sum_{ij} x_{ij} && \text{qualità} \\ \sum_i x_{ij} &= r_j \quad \forall j \in J && \text{richiesta} \\ \sum_j x_{ij} &\leq b_i \quad \forall i \in I && \text{capacità} \\ \sum z_{2i} &= 1 && \text{un solo centro per 2} \\ x_{i2} &\leq b_i z_{2i} \quad \forall i \in I && \text{bigM} \end{aligned}$$