Soluzioni agli esercizi aggiuntivi di

Fondamenti di Ricerca Operativa

di Teo Bucci e Filippo Cipriani

Politecnico di Milano
A.A. 2020/2021

Revisione del 31 Gennaio 2022

Contents

Chapter 1

Programmazione Lineare

1.1 Esercizio 1

Parametri

P porti, $i = 1, 2, 3$

c_i costo per porto per ogni vettura $(150, 250, 200)$

t_i costo fisso porto

S centri di smistamento, $j = 1, \ldots, 4$

k_i costo di invio dal porto i al km

a_{ij} distanza dal porto i al centro j

r_j richiesta del centro j

d_i capacità del porto i

Variabili

$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \mathbb{Z}$ numero di automobili dal porto i al centro j

$y_i \in \{0, 1\}$, uguali a 1 se uso il porto i

$z_{ij} \in \{0, 1\}$, uguali a 1 se il porto i rifornisce il centro j

Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \underbrace{\sum_{ij} c_i x_{ij}}_{\text{auto}} + \underbrace{\sum_{i} t_i y_i}_{\text{porto}} + \underbrace{\sum_{ij} a_{ij} k_i x_{ij}}_{\text{trasporto}} \right\}$$

Vincoli

$$\begin{aligned}
&\sum_i x_{ij} \geq r_j \qquad \forall j \in S && \text{richiesta} \\
&\sum_j x_{ij} \leq d_i y_i \qquad \forall i \in P && \text{bigM + capacità} \\
&\sum_i z_{i,3} = 1 && \text{centro 3} \\
&x_{ij} \leq d_i z_{ij} \qquad \forall i \in P, \forall j \in S && \text{bigM} \\
&z_{22} \leq z_{24} && \text{logico}
\end{aligned}$$

1.2 Esercizio 2

Parametri

A aeroporti

H hangar

c_j, s_j, t_j operatori $\forall j \in H$

g_1 costo squadra 1

g_2 costo squadra 2

g_3 costo squadra 3

1c	1s	1t
3c	1s	X
3c	2s	2t

Variabili

$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}$ squadre tipo 1

$y_j \geq 0, y_j \in \mathbb{Z}$ squadre tipo 2

$z_j \geq 0, z_j \in \mathbb{Z}$ squadre tipo 3

$\varphi \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se uso 3 squadre di tipo 2

$w_{ij} \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se aereo i in hangar j, $\forall i \in A, \forall j \in H$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_j (x_j g_1 + y_j g_2 + z_j g_3)$$

Vincoli

$$\begin{aligned}
\sum_j w_{ij} &= 1 \qquad \forall i \in A && \text{assegnazione} \\
x_j + 3y_j + 3z_j &\geq \sum_i c_j w_{ij} \qquad \forall j \in H && \text{operai} \\
x_j + \ \ y_j + 2z_j &\geq \sum_i s_j w_{ij} \qquad \forall j \in H && \text{operai} \\
x_j \qquad + \ \ z_j &\geq \sum_i t_j w_{ij} \qquad \forall j \in H && \text{operai} \\
\sum_j y_j - 2 &\leq M\varphi && \text{(A)} \\
2\varphi &\leq \sum_j z_j && \text{(B)}
\end{aligned}$$

Gli ultimi due vincoli servono per realizzare:

$$y_j \geq 3 \overset{(A)}{\Rightarrow} \varphi = 1 \overset{(B)}{\Rightarrow} z_j \geq 2$$

1.3 Esercizio 3

Parametri

$p_j, \ j = 1, 2$

r_j prezzo vendita

d_j domanda

I materie prime $i \in I$

c_i disponibilità

g_i costo unitario materie prima

g_{ji} materia i necessaria per j

o_1 ore p_1 da materia prima

o_2 ore p_2 da materia prima

oppure ottengo p_2 con

b unità di p_1 per p_2

o_3 ore lavorazione (p_2 da p_1)

k costo fisso attivazione

O ore a disposizione

Variabili

$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}$ unità di prodotto j da materie prime

$y \geq 0, y \in \mathbb{Z}$ unità di prodotto 2 da prodotto 1

$z \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se attivo processo produttivo

Funzione obiettivo

$$\max \left\{ [r_1(x_1 - by) + r_2(x_2 + y)] - \left[\sum_{ij} g_i q_{ji} x_j + kz \right] \right\}$$

Vincoli

$$\begin{aligned}
y &\leq Mz & & \text{bigM} \\
(x_1 - by) &\geq d_1 & & \text{richiesta} \\
(x_2 - y) &\geq d_2 & & \text{richiesta} \\
\sum_j q_{ji} x_j &\leq c_i & \forall i \in I & \quad \text{disponibilità} \\
o_1 x_1 + o_2 x_2 + o_3 y &\leq O & & \text{disponibilità}
\end{aligned}$$

1.4 Esercizio 4

Parametri

T gruppi $i \in T$

p_i persone

J aerei $j \in J$

c_j costo noleggio

B_j capienza aereo

A aeroporto $k \in A$

G_k max voli per aeroporto

l_{jk} costo di far partire j da k

R sottoinsiemi di aeroporti vicini

S_r con $r = 1, \ldots, R$, al più un aeroporto

Variabili

$x_{ij} \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se gruppo i ad aereo j

$y_{jk} \in \{0,1\}$, uguale a 1 se aereo j parte da k
$z_j \in \{0,1\}$, uguale a 1 se uso aereo j
$w_k \in \{0,1\}$, uguale a 1 se uso aeroporto k
Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \sum_j c_j z_j + \sum_{jk} l_{jk} y_{jk} \right\}$$

Vincoli

$$\begin{aligned}
&\sum_i x_{ij} \leq M z_j \qquad \forall j \in J && \text{bigM} \\
&\sum_i p_i x_{ij} \leq B_j \qquad \forall j \in J && \text{capacità} \\
&\sum_j y_{jk} \leq G_k w_k \qquad \forall k \in K && \text{bigM + capienza voli} \\
&\sum_{k \in S_r} w_k \leq 1 \qquad \forall r = 1, \dots, R && \text{no aeroporti vicini} \\
&\sum_j x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in I && \text{assegnamento} \\
&\sum_k y_{jk} = z_j \qquad \forall j \in J && \text{un aereo per aeroporto, se usato}
\end{aligned}$$

1.5 Esercizio 5

Parametri
P domande iscrizione $i \in P$
$M \subset P, F \subset P$, uomini, donne ($M \cup F = P, M \cap F = \varnothing$)
n max persone per classe
d massimo classi ($D = 1, \dots, d$ insieme classi)
b_i preparazione di i
q livello minimo per classe
C coppie formate $(i,j) \in C, i \in M, j \in F$
Variabili
$x_{ik} \in \{0,1\}$, uguale a 1 se persona i in classe k
$y_i \in \{0,1\}$, uguale a 1 se accetto domanda
Funzione obiettivo

$$\max \sum_i y_i$$

Vincoli

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \in P} x_{ik} \leq n \qquad \forall k \in D && \text{capacità classe} \\
&\sum_{i \in M} x_{ik} = \sum_{i \in F} x_{ik} \qquad \forall k \in D && \text{uguali } M/F
\end{aligned}$$

$$\sum_{i\in P} x_{ik}b_i \geq q\sum_{i\in P} x_{ik} \qquad \forall k \in D \qquad \text{preparazione}$$

$$y_i \leq \sum_{k\in D} x_{ik} \qquad \forall i \in P \qquad \text{bigM}$$

$$\sum_{k\in D} x_{ik} \leq 1 \qquad \forall i \in P \qquad \text{massimo 1 corso per persona}$$

$$x_{ik} = x_{jk} \qquad \forall (i,j) \in C, \forall k \in D \qquad \text{coppie}$$

1.6 Esercizio 6

Parametri

A insieme altiforni $i = 1 \dots N, i \in A$

m_i max quintali per altiforno

P prodotti $j \in P$

q_{1j} prodotto j da 1 quintale di materia prime con processo 1 (prodotto/quintale)

q_{2j} prodotto j da 1 quintale di materia prime con processo 2 (prodotto/quintale)

r_j richiesto prodotto

c_{1i} costo lavorazione al quintale in altiforno i con processo 1 (euro/quintale)

c_{2i} costo lavorazione al quintale in altiforno i con processo 2 (euro/quintale)

f_i costo attivazione processo 2 in altiforno i

Variabili

$w_i \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se lavoro più di q

$y_i \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se uso processo 2

$x_{ij1} \geq 0, x_{ij1} \in \mathbb{Z}$ prodotto j con processo 1 in altiforno i

$x_{ij2} \geq 0, x_{ij2} \in \mathbb{Z}$ prodotto j con processo 2 in altiforno i

Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \sum_i y_i f_i + \sum_{ij} \left[c_{1i}\frac{x_{ij1}}{q_{1j}} + c_{2i}\frac{x_{ij2}}{q_{2j}} \right] \right\}$$

Vincoli

$$\sum_j x_{ij2} \leq My_i \qquad \forall i \in A \qquad \text{bigM}$$

$$\sum_j \left[\frac{x_{ij1}}{q_{1j}} + \frac{x_{ij2}}{q_{2j}} \right] \leq m_i \qquad \forall i \in A \qquad \text{capacità}$$

$$\sum_i [x_{ij1} + x_{ij2}] \geq r_j \qquad \forall j \in P \qquad \text{richiesta}$$

$$\sum_i y_i \leq N - 1 \qquad \text{no processo 2 su tutti gli altiforni}$$

$$\sum_i w_i \geq 1 \qquad \text{almeno 1 usa più di } q \text{ quintali}$$

$$qw_i \leq \sum_{ij} \left[\frac{x_{ij1}}{q_{1j}} + \frac{x_{ij2}}{q_{2j}} \right] \qquad \forall i \in A \qquad \text{vincolo logico}$$

1.7 Esercizio 7

Parametri

C cioccolatini $i \in C$

S confezioni regalo $j \in S$

r_{ij} richieste cioccolatini i in confezione j

g_i costo cioccolatino

m_i max produzione

p_i vendita cioccolatino sfuso i

d_j vendita confezione j

b_j costo scatola j

Variabili

$x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}$ numero cioccolatini i prodotti

$y_j \geq 0, y_j \in \mathbb{Z}$ numero confezioni j prodotte

$z \in \{0,1\}$, uguale a 1 se acquisto almeno q scatole

Funzione obiettivo

$$\max \left\{ \underbrace{\sum_j d_j y_j}_{\text{confezioni}} + \underbrace{\sum_i p_i \left(x_i - \sum_j r_{ij} y_j \right)}_{\text{sfusi}} - \underbrace{\sum_i g_i x_i}_{\text{costo prod.}} - \underbrace{\sum_j b_j y_j}_{\text{costo scatole}} + \underbrace{zB}_{\text{sconto}} \right\}$$

Vincoli

$$\begin{aligned}
x_i &\geq \sum_j r_{ij} y_j \qquad \forall i \in I && \text{richiesta} \\
x_i &\leq m_i \qquad \forall i \in I && \text{capacità} \\
\sum_j y_j &\geq Qz && \text{sconto} \\
x_1 &\geq 0.2 \cdot \sum_i x_i && \text{qualità}
\end{aligned}$$

1.8 Esercizio 8

Parametri

D difensori

A attaccanti

G giocatori $i \in G$

$r_i \in \{0,1\}$, uguale a 1 se giocatore i è attaccante

v_i valore giocatore

B valore complessivo formazione

q giocatori non giocanti

K formazioni $|K| = 2$

Variabili

$z \geq 0, z \in \mathbb{Z}$ valore formazione di minimo valore

$x_{ik} \in \{0,1\}$, uguale a 1 se giocatore i è nelle formazione k

$y_i \in \{0,1\}$, uguale a 1 se i gioca in entrambe

Funzione obiettivo

$$\max z$$

Vincoli

$$\sum_i r_i x_{ik} = A \qquad \forall k \in K$$

$$\sum_i (1-r_i) x_{ik} = D \qquad \forall k \in K$$

$$\sum_i v_i x_{ik} \geq B \qquad \forall k \in K \qquad \text{minimo valore richiesto}$$

$$\left(|G| - \sum_i y_i\right) \geq q \qquad \text{almeno } q \text{ non giocanti entrambe}$$

$$\left(\sum_k x_{ik} - 1\right) \leq M y_i \qquad \forall i \in I \qquad \text{bigM}$$

$$z \leq \sum_i v_i x_{ik} \qquad \forall k \in K \qquad \text{bottleneck}$$

1.9 Esercizio 9

Parametri

B beni $i \in B$

M magazzino $j \in M$

A luoghi distribuzione $k \in A$

c_i costo bene i

v_i spazio occupato da i in magazzino

b_j capacità

f_j costo fisso magazzino se usato

g_{jk} costo trasporto bene da j a k

d_{ik} richiesta bene i a k

Variabili

$y_j \in \{0,1\}$, uguale a 1 se uso j

$z_{ijk} \geq 0, z_{ijk} \in \mathbb{Z}$ numero di beni i da j a k

Funzione obiettivo

$$\min \left\{ \sum_{ijk} c_i z_{ijk} + \sum_j f_j y_j + \sum_{ijk} z_{ijk} g_{jk} \right\}$$

Vincoli

$$\sum_j z_{ijk} \geq d_{ik} \qquad \forall i \in I, \forall k \in K \qquad \text{richiesta}$$

$$\sum_{ik} v_i z_{ijk} \leq b_j y_j \qquad \forall j \in J \qquad \text{bigM e capacità}$$

1.10 Esercizio 10

Parametri

C analisi $i \in C, i = 1, \dots, 4$

O ospedali $j \in O, j = 1, \dots, 5$

d_{ij} tempo da i a j

r_j richieste analisi

b_i max analisi nel centro i

Variabili

$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \mathbb{Z}$ numero analisi al centro i per ospedale j

$z_{2i} \in \{0, 1\}$, uguale a 1 se 2 si serve da i

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{ij} a_{ij} x_{ij}$$

Vincoli

$$\begin{aligned}
\sum_j x_{1j} &\leq 0.8 \cdot \left(\sum_j x_{2j} + x_{3j} \right) && \text{qualità} \\
\sum_j x_{2j} &\leq 0.6 \cdot \left(\sum_j x_{ij} + x_{3j} \right) && \text{qualità} \\
\sum_j (x_{3j} + x_{4j}) &\leq 0.5 \cdot \sum_{ij} x_{ij} && \text{qualità} \\
\sum_i x_{ij} &= r_j \qquad \forall j \in J && \text{richiesta} \\
\sum_j x_{ij} &\leq b_i \qquad \forall i \in I && \text{capacità} \\
\sum z_{2i} &= 1 && \text{un solo centro per 2} \\
x_{i2} &\leq b_i z_{2i} \qquad \forall i \in I && \text{bigM}
\end{aligned}$$

Chapter 2

Programmazione Lineare e Dualità

2.1 Esercizio 1

$$
\begin{aligned}
\min 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\
-x_1 + 4x_2 - 2x_3 + s_1 = 8 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 12 \\
x_i, s_i \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix} \quad c = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{s_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix}$	$x_2 = 2$	$s_1 = 0$
iter. 2	$\{x_2, s_2\}$	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_3 & s_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$	$x_3 = 4$	$s_2 = 0$
iter. 3	$\{x_2, x_3\}$	$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & s_1 & s_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{13}{2} & \frac{1}{10} & \frac{7}{5} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$				

$z^* = -20.$

2.2 Esercizio 2

$$
\begin{aligned}
\min -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\
x_1 - 2x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\
3x_1 - x_2 + 2x_3 + s_2 = 6 \\
x_i, s_i \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad c = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix}\vartheta_1\\\vartheta_2\end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{s_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1&2&-3\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1&x_2&x_3\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&-2&1\\3&-1&2\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}1&-2&1\\3&-1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1&2&-3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$	$x_1 = 2$	$s_1 = 0$
iter. 2	$\{x_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\-3&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&-3&0\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_2&x_3&s_1\end{matrix}\\\begin{bmatrix}-2&1&1\\-1&2&0\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}-2&1&1\\5&-1&-3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&-2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$	$x_3 = 2$	$x_1 = 0$
iter. 3	$\{x_3, s_2\}$	$\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-3&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1&2&0\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1&x_2&s_1\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&-2&1\\3&-1&0\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}1&-2&1\\1&3&-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&-4&3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\2/3\end{bmatrix}$	$x_2 = \frac{2}{3}$	$s_2 = 0$
iter. 4	$\{x_2, x_3\}$	$\begin{bmatrix}-2&1\\-1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&-3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1&s_1&s_2\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{5}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{10}{3}&\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{10}{3}\end{bmatrix}$				

$z^* = -\frac{26}{3}$.

2.3 Esercizio 3

$$\begin{gathered}\min -2x_1 - x_2 - 3x_3\\ x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2\\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + s_2 = 12\\ x_i, s_i \geq 0\end{gathered}$$

$$A = \begin{array}{c}\begin{matrix}x_1&x_2&x_3&s_1&s_2\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\2&3&8&0&1\end{bmatrix}\end{array} \quad b = \begin{bmatrix}2\\12\end{bmatrix} \quad c = \begin{array}{c}\begin{matrix}x_1&x_2&x_3&s_1&s_2\end{matrix}\\\begin{bmatrix}-2&-1&-3&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix}\vartheta_1\\\vartheta_2\end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{s_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2&-1&-3\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1&x_2&x_3\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&8\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2&-1&-3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\12\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$	$x_1 = 2$	$s_1 = 0$
iter. 2	$\{x_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1&-3&0\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_2&x_3&s_1\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&1&1\\3&8&0\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&6&-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&-1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\4/3\end{bmatrix}$	$x_3 = \frac{4}{3}$	$s_2 = 0$
iter. 3	$\{x_1, x_3\}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{4}{3}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2&-3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_2&s_1&s_2\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}\frac{5}{6}&\frac{4}{3}&-\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{7}{6}&\frac{5}{3}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\end{bmatrix}$				

$z^* = \frac{16}{3}$.

2.4 Esercizio 4

$$\begin{gathered}\min -2x_1 + 2x_2 - 2x_3\\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + s_1 = 2\\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + s_2 = 3\\ x_i, s_i \geq 0\end{gathered}$$

$$A = \begin{array}{c}\begin{matrix}x_1&x_2&x_3&s_1&s_2\end{matrix}\\\begin{bmatrix}2&-2&-1&1&0\\-3&3&2&0&1\end{bmatrix}\end{array} \quad b = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} \quad c = \begin{array}{c}\begin{matrix}x_1&x_2&x_3&s_1&s_2\end{matrix}\\\begin{bmatrix}-2&2&-2&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix}\vartheta_1\\\vartheta_2\end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{s_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2&2&-2\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1&x_2&x_3\end{matrix}\\\begin{bmatrix}2&-2&-1\\-3&3&2\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}2&-2&-1\\-3&3&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2&2&-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$	$x_1 = 2$	$s_1 = 0$
iter. 2	$\{x_1, s_2\}$	$\begin{bmatrix}2&0\\-3&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&-2&0\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_2&x_3&s_1\end{matrix}\\\begin{bmatrix}-2&-1&1\\3&2&0\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&-3&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\12\end{bmatrix}$	$x_3 = 12$	$s_2 = 0$
iter. 3	$\{x_1, x_3\}$	$\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2&-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{array}{c}\begin{matrix}x_2&s_1&s_2\end{matrix}\\\begin{bmatrix}-2&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\end{array}$	$\begin{bmatrix}-1&2&1\\0&3&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}12&10&6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7\\12\end{bmatrix}$				

$z^* = -38$.

2.5 Esercizio 5

$$\begin{aligned} &\min x_1 - 2x_2 + x_3 \\ &x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ &2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ &x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Fase 1.

$$\begin{aligned} &\min w_1 + w_2 \\ &x_1 - x_2 + 3x_3 + w_1 = 5 \\ &2x_1 + x_2 + x_3 + w_2 = 4 \\ &x_i \geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & w_1 & w_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad c = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & w_1 & w_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{w_1, w_2\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$	$x_1 = 2$	$w_2 = 0$
iter. 2	$\{x_1, w_1\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_3 & w_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix}$	$x_3 = \frac{6}{5}$	$w_1 = 0$

Inizio.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad c = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{x_1, x_3\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c} x_2 \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{11}{5} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ -2 \end{bmatrix}$	$x_2 = \frac{7}{4}$	$x_1 = 0$
iter. 2	$\{x_2, x_3\}$	$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c} x_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{11}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{9}{4} \end{bmatrix}$				

$z^* = -\frac{5}{4}$.

2.6 Esercizio 6

$$\begin{aligned} &\min 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 10x_5 \\ &x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 5 \\ &x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 9 \\ &x_i \geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} \quad c = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{x_1, x_2\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$	$x_3 = \frac{9}{2}$	$x_2 = 0$
iter. 2	$\{x_1, x_3\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$				

$z^* = \frac{29}{2}$.

2.7 Esercizio 7

$$\begin{aligned} \min -3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_i \geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad c = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{x_1, x_4\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$	$x_2 = \frac{1}{3}$	$x_4 = 0$
iter. 2	$\{x_1, x_2\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$				

$z^* = \frac{14}{3}$.

2.8 Esercizio 8

$$\begin{aligned} \min -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 4x_4 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_i \geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} \quad c = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \end{array}$$

	B	A_B	A_B^{-1}	c_B^T	c_N^T	A_N	$A_B^{-1}A_N$	r_N^T	x_B	$(A_B^{-1}A_N)_i$	$\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$	IN	OUT
iter. 1	$\{x_1, x_2\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{3}{11} & -\frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{10}{11} \\ 0 & -\frac{3}{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{52}{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{10}{11} \\ -\frac{3}{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{22}{3} \end{bmatrix}$	$x_4 = \infty$	$x_2 = 0$

$z^* = -\infty$.

2.9 Esercizio 9

Problema duale.

$$\begin{aligned} \min -y_1 + y_2 + 17y_3 + 5y_4 + 4y_5 \\ -2y_1 + y_2 + 4y_3 - 5y_5 \geq 2 \\ -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 1 \\ y_i \geq 0 \end{aligned}$$

Scarti complementari.

	$(3, 5)$	$(4, 1)$
$(-2x_1 - x_2 + 1)y_1 = 0$	$y_1 = 0$	
$(x_1 - x_2 - 3)y_2 = 0$	$y_2 = 0$	
$(4x_1 + x_2 - 17)y_3 = 0$	y_3	
$(x_2 - 5)y_4 = 0$	y_4	
$(-x_1 - x_2 - 4)y_5 = 0$	$y_5 = 0$	
$(-2y_1 + y_2 + 4y_3 - 5y_5 - 2)x_1 = 0$	$y_3 = 1/2$	
$(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + y_5 - 1)x_2 = 0$	$y_4 = 1/2$	
	Ottimo	Non ottimo

2.10 Esercizio 10

Problema duale.

$$\min -\frac{3}{2}y_1 - \frac{3}{2}y_2 + 7y_3 + 6y_4$$
$$y_1 + y_3 + y_4 = 3$$
$$y_2 + y_3 - y_4 = 0$$
$$y_1, y_2 \leq 0, y_3, y_4 \geq 0$$

Scarti complementari.

	$\left(\frac{13}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{3}{2}, \frac{17}{2}\right)$
$\left(x_1 + \frac{3}{2}\right) y_1 = 0$	$y_1 = 0$	y_1
$\left(x_2 + \frac{3}{2}\right) y_2 = 0$	$y_2 = 0$	$y_2 = 0$
$(x_1 + x_2 - 7)y_3 = 0$	y_3	y_3
$(x_1 - x_2 - 6)y_4 = 0$	y_4	$y_4 = 0$
$(y_1 + y_3 + y_4 - 3)x_1 = 0$	$y_3 + y_4 = 3$	$y_1 + y_3 = 3$
$(y_2 + y_3 - y_4)x_2 = 0$	$y_3 - y_4 = 0$	$y_3 = 0$
	$y_3 = 3/2$	$y_1 = 3$
	$y_4 = 3/2$	
	Ottimo	Non ottimo

2.11 Esercizio 11

Problema duale.

$$\min 4y_1 + 5y_2 + y_3 + 4y_4$$
$$-3y_1 + y_3 + 2y_4 = 1$$
$$y_1 + y_2 - y_3 + y_4 = 2$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0, y_4 \leq 0$$

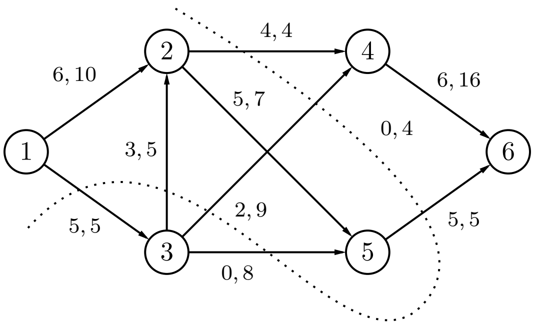
Scarti complementari.

	$(6, 5)$	$(0, 4)$
$(-3x_1 + x_2 - 4)y_1 = 0$	$y_1 = 0$	y_1
$(x_2 - 5)y_2 = 0$	y_2	$y_2 = 0$
$(x_1 - x_2 - 1)y_3 = 0$	y_3	$y_3 = 0$
$(2x_1 + x_2 - 4)y_4 = 0$	$y_4 = 0$	y_4
$(-3y_1 + y_3 + 2y_4 - 1)x_1 = 0$	$y_3 = 1$	$-3y_1 + 2y_4 = 1$
$(y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - 2)x_2 = 0$	$y_2 = 3$	$y_1 + y_4 = 2$
		$y_1 = 3/5$
		$y_4 = 7/5$
	Ottimo	Non ottimo

Chapter 3

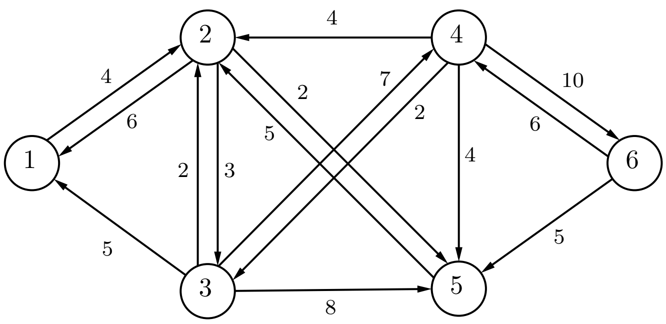
Grafi

3.1 Esercizio 1

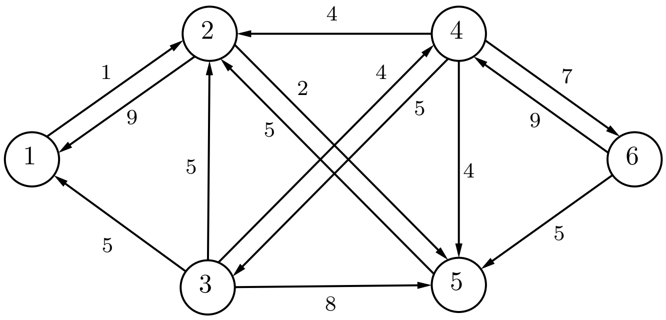


$s = 1, t = 6.$

$N_s = \{1, 2, 5\}, N_t = \{3, 4, 6\}.$

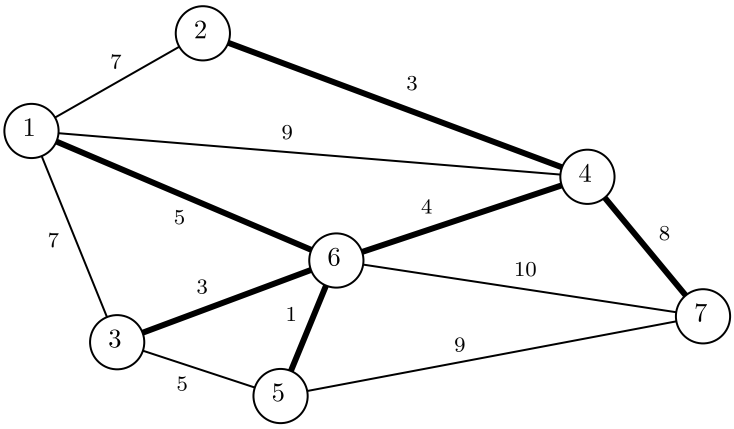


$(1) - (2) - (3) - (4) - (6)$
$(1, 2)\ \lambda^+ = 4$
$(2, 3)\ \lambda^- = 3$
$(3, 4)\ \lambda^+ = 7$
$(4, 6)\ \lambda^+ = 10$
$\lambda_{\min} = 3$



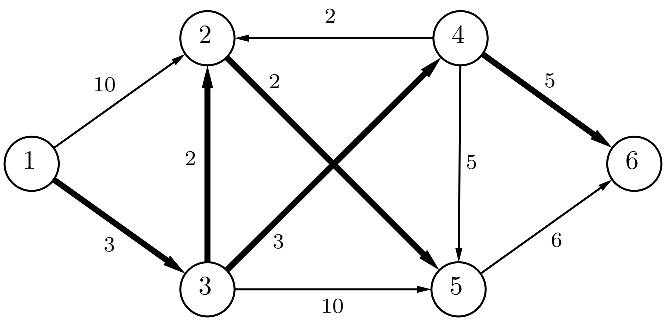
$\nexists$ cammino aumentante
$v = 9 + 15 = 14$

3.2 Esercizio 2



Lato	Costo	Accettato	$\|T\|$
$(5,6)$	1	✓	1
$(3,6)$	3	✓	2
$(2,4)$	3	✓	3
$(4,6)$	4	✓	4
$(1,6)$	5	✓	5
$(3,5)$	5	✗	
$(1,2)$	7	✗	
$(1,3)$	7	✗	
$(4,7)$	8	✓	6
$(5,7)$	9		
$(1,4)$	9		
$(6,7)$	10		

3.3 Esercizio 3



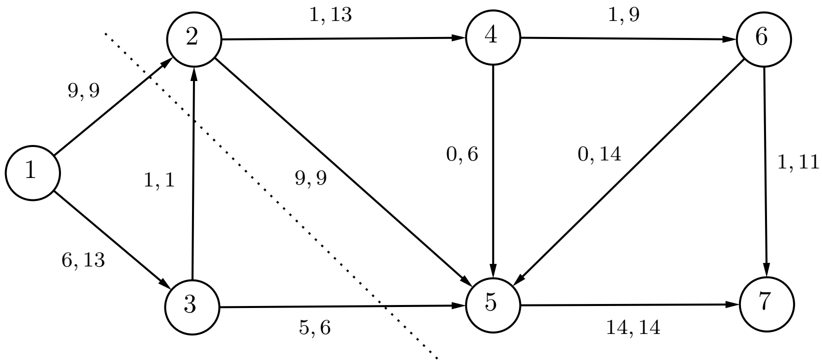
Enumerazione topologica.

Nodo	Etichetta
(1)	1
(3)	2
(4)	3
(2)	4
(5)	5
(6)	6

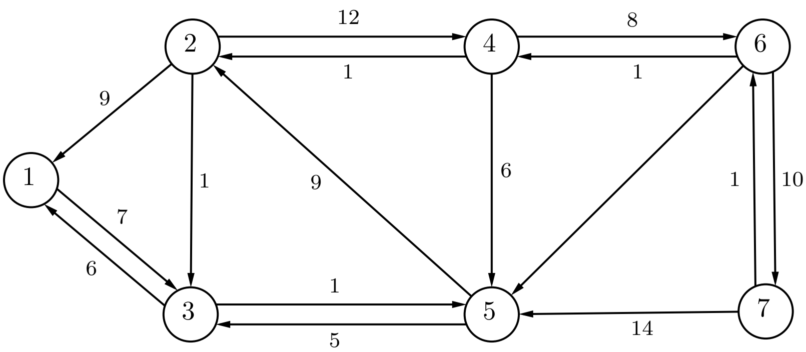
SPT-aciclico.

i	d, P	d, P	d, P	d, P	d, P	d, P
1	$0, 1$					
2	$M, 1$	$10, 1$	$5, 3$			
3	$M, 1$	$3, 1$				
4	$M, 1$		$6, 3$			
5	$M, 1$		$13, 3$	$11, 4$	$7, 2$	
6	$M, 1$			$11, 4$		
i	1	3	4	2	5	6

3.4 Esercizio 4

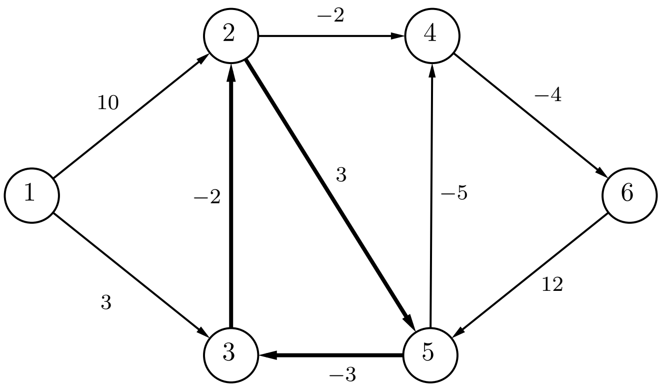


$N_s = \{1, 3\}, N_t = \{2, 4, 5, 6, 7\}, U(N_s, N_t) = 16 = v.$



$(1) - (3) - (5) - (2) - (4) - (6) - (7)$
$(1, 3)\ \lambda^+ = 7$
$(3, 5)\ \lambda^+ = 1$
$(5, 2)\ \lambda^- = 9$
$(2, 4)\ \lambda^+ = 12$
$(4, 6)\ \lambda^+ = 8$
$(6, 7)\ \lambda^+ = 10$
$\lambda_{\min} = 1$

3.5 Esercizio 5



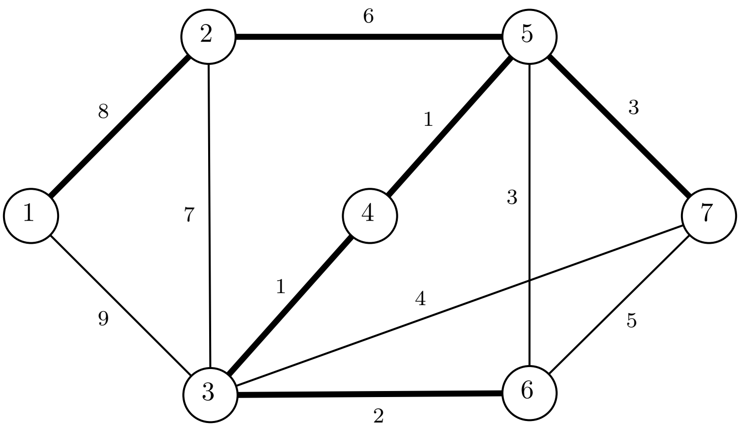
Cicli, costi negativi: Bellman-Ford.

i	d,P,k	d,P,k	d,P,k	d,P,k	d,P,k	d,P,k	d,P,k	d,P,k
1	$0,1,1$							
2	$M,1,0$	$10,1,1$	$1,3,1$					$-1,3,2$
3	$M,1,0$	$3,1,1$					$1,5,2$	
4	$M,1,0$			$-1,2,1$				
5	$M,1,0$			$4,2,1$				
6	$M,1,0$				$-5,4,1$			
Q	1	$2,3$	2	$4,5$	$5,6$	5	3	2
i	1	3	2	4	6	5	3	2

E così via finché k di $2,3$ non supera il numero soglia. Esiste un ciclo negativo

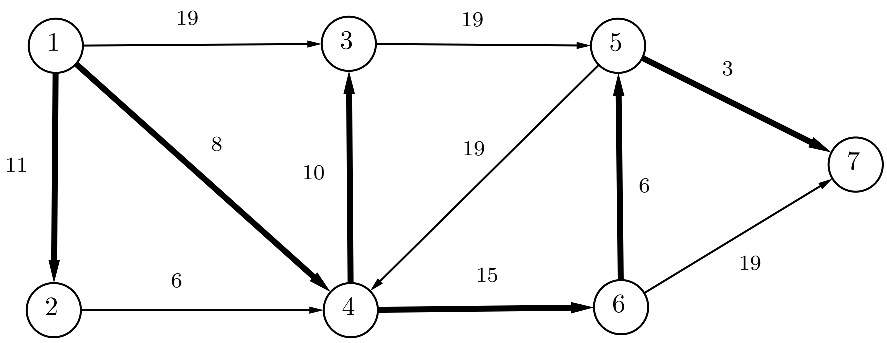
$$(2) - (5) - (3)$$

3.6 Esercizio 6



Lato	Costo	Accettato	$\|T\|$
$(3,4)$	1	✓	1
$(4,5)$	1	✓	2
$(3,6)$	2	✓	3
$(5,7)$	3	✓	4
$(5,6)$	3	✗	
$(3,7)$	4	✗	
$(6,7)$	5	✗	
$(2,5)$	6	✓	5
$(3,2)$	7	✗	
$(1,2)$	8	✓	6
$(1,3)$	9		

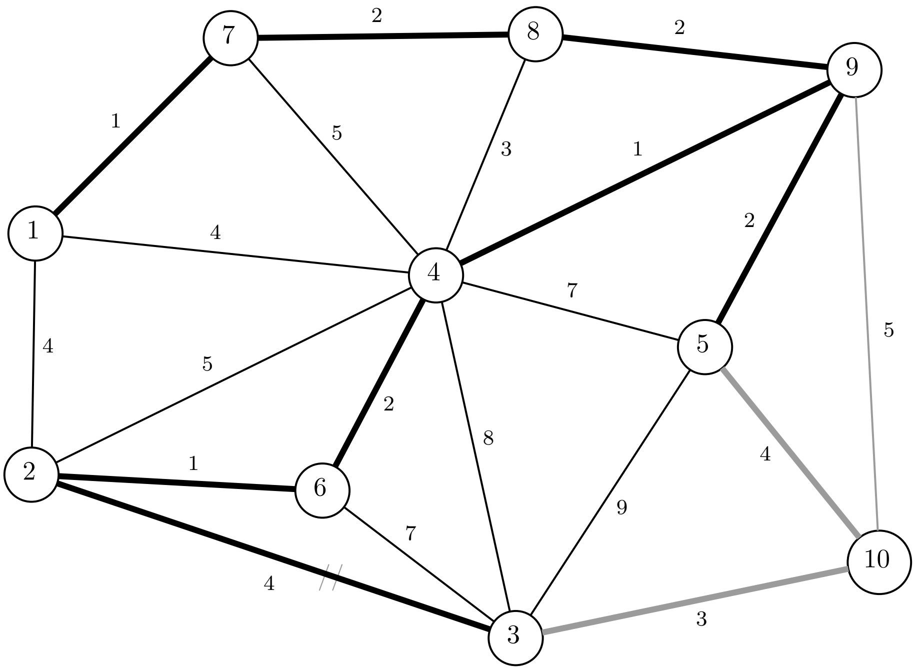
3.7 Esercizio 7



Dijkstra.

i	d, P	d, P	d, P	d, P	d, P	d, P
1	$0, 1$					
2	$M, 1$	$11, 1$				
3	$M, 1$	$19, 1$	$18, 4$			
4	$M, 1$	$8, 1$				
5	$M, 1$			$37, 3$	$29, 6$	
6	$M, 1$		$23, 4$			
7	$M, 1$				$42, 6$	$32, 5$
Q	1	$2, 3, 4$	$2, 3, 6$	$5, 6$	$5, 7$	7
i	1	4	$2, 3$	6	5	7

3.8 Esercizio 8



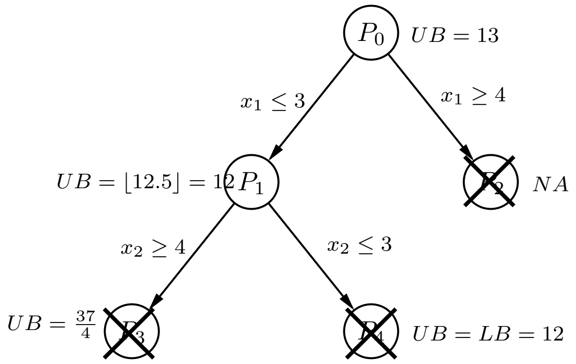
Lato	Costo	Accettato	$\lvert T \rvert$
$(1,7)$	1	✓	1
$(2,6)$	1	✓	2
$(4,9)$	1	✓	3
$(4,6)$	2	✓	4
$(5,9)$	2	✓	5
$(8,9)$	2	✓	6
$(7,8)$	2	✓	7
$(8,4)$	3	✗	
$(3,10)$	3	✓	8
$(1,4)$	4	✗✗	
$(2,1)$	4	✗✗	
$(5,10)$	4	✓	9 (stop!)
$(2,3)$	4	✓	8
$(4,10)$	5		
$(7,4)$	5		
$(2,4)$	5		
$(4,5)$	7		
$(6,3)$	7		
$(4,3)$	8		
$(3,5)$	9		

Chapter 4

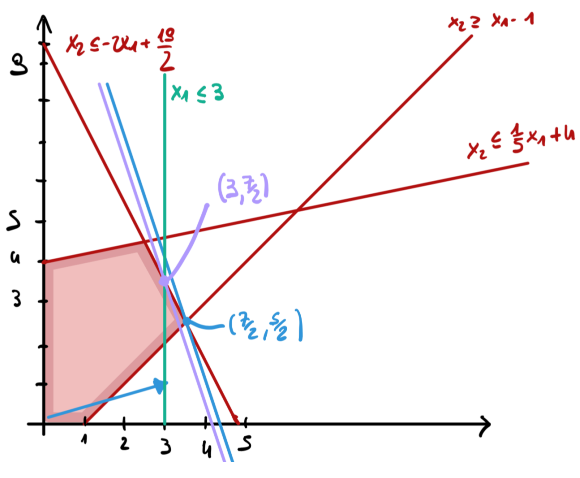
Programmazione Lineare Intera

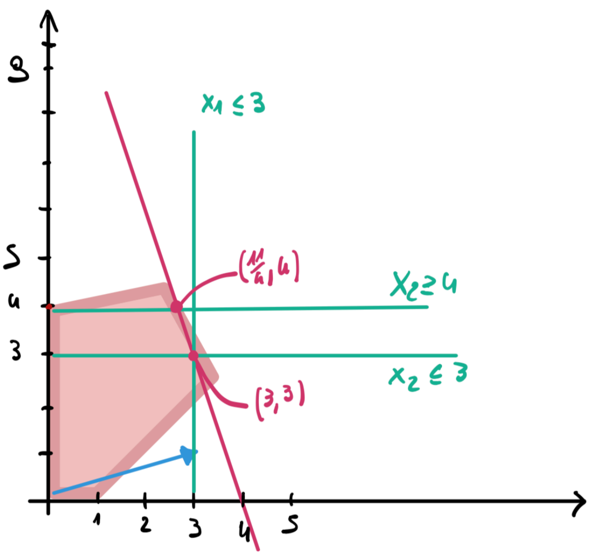
4.1 Esercizio 1

$$x_2 \leq \frac{1}{5}x_1 + 4$$
$$x_2 \leq -2x_1 + \frac{19}{2}$$
$$x_2 \geq x_1 - 1$$

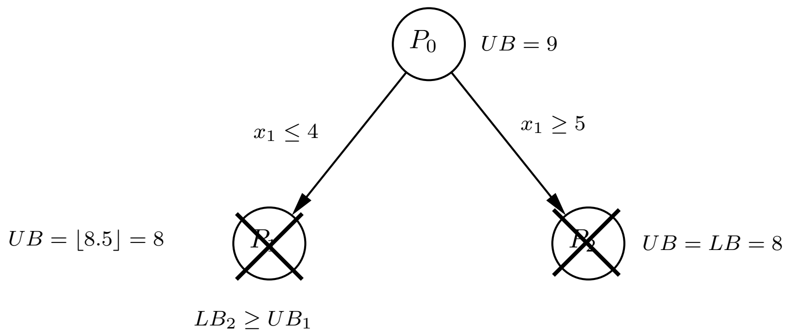


Ottimo: $12, (3, 3)$.

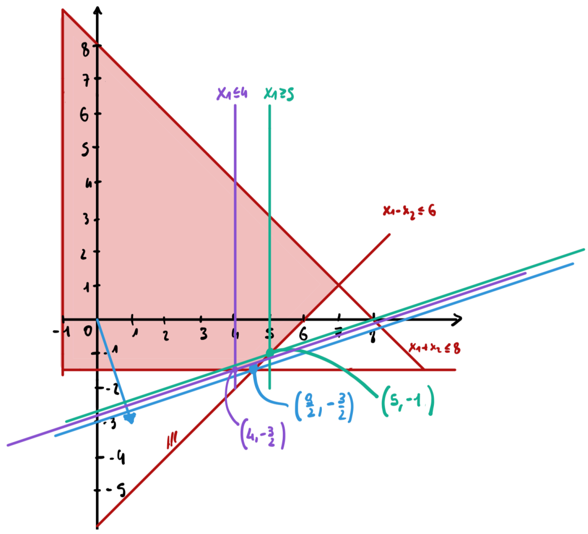




4.2 Esercizio 2



Ottimo: $8, (5, -1)$.



4.3 Esercizio 3

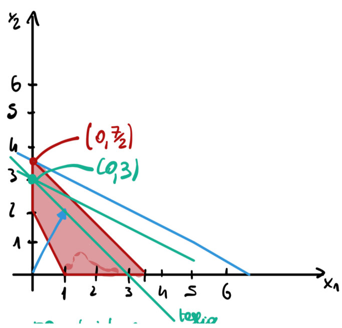
Rilassamento continuo:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{7}{2} \quad s_1 = 0 \quad s_2 = \frac{3}{2}$$

Equazioni dei tagli:

$$\begin{array}{lclcll}
x_2 + x_1 + \frac{1}{2}s_1 = \frac{7}{2} & \rightarrow & x_2 + x_1 + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor s_1 \leq \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor & \rightarrow & x_2 + x_1 \leq 3 & \boxed{x_1 + x_2 \leq 3} \\
s_2 - x_1 + \frac{1}{2}s_1 = \frac{3}{2} & \rightarrow & s_2 - x_1 + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor s_1 \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor & \rightarrow & s_2 - x_1 \leq 1 & \\
 & & & & s_2 = 2x_1 + x_2 - 2 &
\end{array}$$

Ottimo: $-6, (0, 3)$.



4.4 Esercizio 4

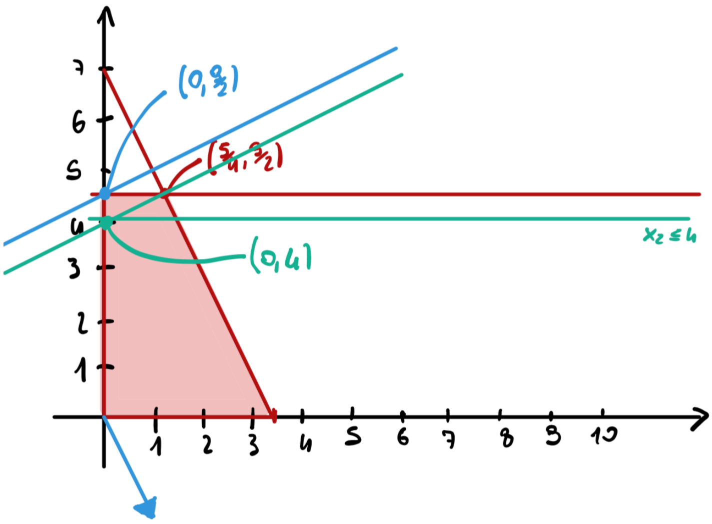
Rilassamento continuo:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{9}{2} \quad s_1 = 0 \quad s_2 = \frac{5}{2}$$

Equazioni dei tagli:

$$\begin{array}{llllll}
x_2 + \frac{1}{2}s_1 = \frac{9}{2} & \rightarrow & x_2 + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor s_1 \leq \left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor & \rightarrow & x_2 \leq 4 & \boxed{x_2 \leq 4} \\
s_2 + 2x_1 - \frac{1}{2}s_1 = \frac{5}{2} & \rightarrow & s_2 + 2x_1 - \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor s_1 \leq \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor & \rightarrow & s_2 + 2x_1 - s_1 \leq 2 &
\end{array}$$

Ottimo: $-8, (0, 4)$.



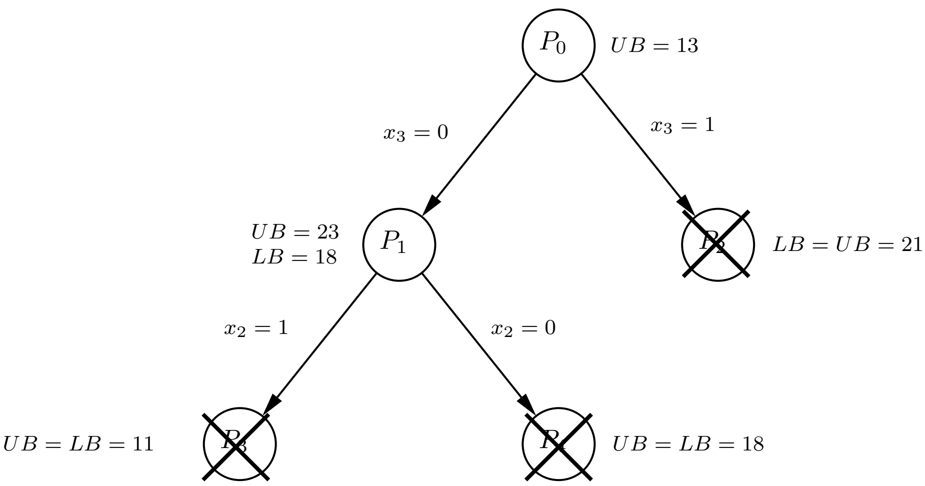
4.5 Esercizio 5

$B = 13$.

p_i	16	9	12	2
w_i	8	6	7	2
$\frac{p_i}{w_i}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{12}{7}$	1
	x_1	x_2	x_3	x_4

Ordino

$$x_1, x_3, x_2, x_4$$



P_0:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \quad \overline{B} = 5 \\ x_3 &= \frac{5}{7} \quad \overline{B} = 0 \\ x_2, x_4 &= 0 \\ UB_0 &= \left\lfloor 16 + \frac{60}{7} \right\rfloor = 24 \\ LB_0 &= 16 + 2 = 18 \end{aligned}$$

P_1:

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 \quad \overline{B} = 13 \\ x_1 &= 1 \quad \overline{B} = 5 \\ x_2 &= \frac{5}{6} \quad \overline{B} = 0 \\ UB_1 &= \left\lfloor 16 + \frac{45}{6} \right\rfloor = 23 \\ LB_1 &= 16 + 2 = 18 \end{aligned}$$

P_2:

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 \quad \overline{B} = 6 \\ x_1 &= 0 \quad \overline{B} = 6 \\ x_2 &= 1 \quad \overline{B} = 0 \\ UB_2 &= LB_2 = 21 \end{aligned}$$

P_3:

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 \quad \overline{B} = 7 \\ x_2 &= 1 \quad \overline{B} = 7 \\ x_1 &= 0 \quad \overline{B} = 7 \\ x_4 &= 1 \quad \overline{B} = 5 \\ UB_3 &= LB_3 = 11 \end{aligned}$$

P_4:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \quad \overline{B} = 13 \\ x_3 &= 0 \quad \overline{B} = 13 \\ x_1 &= 1 \quad \overline{B} = 5 \\ x_4 &= 1 \quad \overline{B} = 3 \\ UB_4 &= LB_4 = 18 \end{aligned}$$

Schema esercizi

Lo schema seguente è incredibilmente utile, tuttavia non siamo riusciti a trovare la voglia di finirlo, aiutateci.

Tipologie esercizi

1. Modelli
2. Program. lineare - simplesso
3. Program. lineare - risol. grafica
4. Program. lineare - dualità
5. Grafi - albero copertura
6. Grafi - albero cammini minimi
   - 6.A Spt-aciclico/ordinam. topologico
   - 6.B Dijkstra
   - 6.C Bellman-Ford
7. Grafi - Flusso massimo
8. PLI - tagli di Gomory
9. PLI - branch and bound
10. PLI - branch and bound zaino

② Simplesso

- Dato un problema (PL), riportarlo in forma standard:

FORMA STANDARD

$$\min\ c^T x \qquad Ax = b \qquad x \geq 0$$

TRASFORMAZIONI

$\max \rightarrow -\min$

$x_i \leq 0 \rightarrow -x_i \geq 0$

vincolo $\leq K$ → aggiungo $+S_i$ var slack, $S_i \geq 0$, vincolo =

vincolo $\geq K$ → sottraggo $-S_i$ var slack, $S_i \geq 0$, vincolo =

Se ho $I \subset A$, ho una base di partenza $\mathcal{B} = \{S_1, S_2\}$ $A_B = I$ (di solito)

Se non ho sottomatrice I in A uso fase 1 per trovare base ammissibile (vedi sotto)

- ALGORITMO

↳ dato $\mathcal{B}$, calcolo $x_B = A_B^{-1} b$, c_N^T, c_B^T, z^*

A_B, A_B^{-1}, $A_B^{-1} A_N$, $r_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$ costi ridotti

↳ $r_N \geq 0 \rightsquigarrow x_B, z^*$ ottimi, TERMINO

↳ altrimenti scelgo il primo i tc $r_N[i] < 0$ ⇒ entra la var. associata a i — BLAND 1977

divido x_B con $(A_B^{-1} A_N)_i$ componente per componente

- $\exists\ \theta_{min} > 0$, esce var. associata a θ_i, entra var. con valore θ_{min} REITERO
- tutti $\theta \leq 0$, ottimo illimitato

NB inversa 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- FASE 1

risolvo con simplesso

$\min\ W_1 + W_2$, aggiungo al primo vincolo W_1, al secondo W_2 (non avrò mai più di 2 vincoli in esame)

$W_i \geq 0$, se trovo soluzione ottima tc W_i fuori base $\forall i$ ⟶ ho $\mathcal{B}$ per simplesso

, se sol. ottima ha W_i in base ⟶ (PL) non ammette soluzioni

③ Risol. grafica

Dato (PL) in qualsiasi forma, disegno sul piano le zone ammissibili

se min → - gradiente

se max → + gradiente

→ Traccio la perpendicolare al gradiente e traslo nella direz. di $\overset{+\max,\ -\min}{\pm}$ gradiente fino a quando interseco ultimo vertice

→ Alternativamente, traccio le normali ai vincoli in ogni vertice, se gradiente ⊂ cono delle normali ⇒ ho ottimo

④ Dualità

Dato (PL) costruisco duale:

max → min, min → max

(PL) $\min/\max\ C^T x$

$Ax \gtreqless b$

$x \gtreqless 0$

↳ ∀ vincolo di PL c'è y_i duale il cui dominio è determinato da vincolo
∀ variabile di PL c'è vincolo duale il cui segno è determinato da dominio variabile

↳ coeff. di f. obiettivo: vettore colonna b del (PL) per var duali

↳ termini noti vincoli duali: c^T del problema (PL)
Coeff. di y_i nel vincolo duale associato a var k-esima di (PL): colonna k-esima di A

→ **SEGNI**

(PL) max → (duale) min
var → vinc uguale
vinc → var opposti

(PL) min → (duale) max
var → vinc opposti
vinc → var uguali

se x_i libera → vincolo con =
se vincolo = → y_i libera

→ **SCARTI COMPLEMENTARI**

(vincolo PL) $y_i = 0$
(vincolo duale) $x_i = 0$

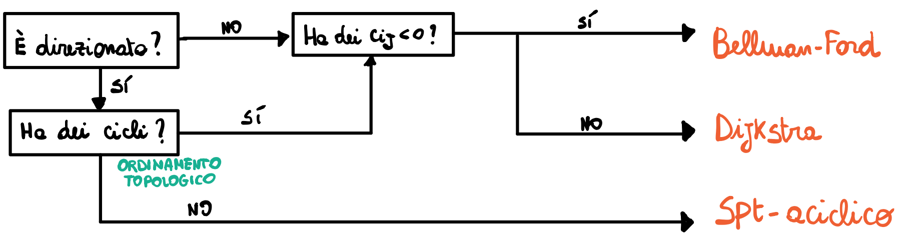
data $\bar{x}$, se sostituendo nel sistema trovo $\bar{y}$ ammissibile, allora $\bar{x}$ ottimo

⑤ Albero di copertura
(DI COSTO MINIMO)

Dato grafo non direzionato, uso algoritmo Kruskal: |T| numero di nodi, c_{ij} costo
Ordino (i,j) crescentemente per c_{ij}, aggiungo uno a uno solo se non formano ciclo, mi fermo a |T|-1 archi aggiunti

⑥ Albero dei cammini minimi (r = radice)

∃ modello??



- **ORDINAMENTO TOPOLOGICO**

  Dato T, cerco nodo senza predecessore, se ∃ gli assegno etichetta progressiva, lo rimuovo da |T|, REITERO
  se ∄ allora c'è un ciclo

- **SPT-ACICLICO**

  Esploro nodi nell'ordine dell'ordinam. topologico. Inizializzo d[r]=0, P[r]=r e tutti gli altri d[i]=M P[i]=1
  Esamino FS(i), se c_{ij} + d[i] < d[j] aggiorno d[j] = c_{ij} + d[i] e P[j] = i
  Al termine costruisco albero coi predecessori

- **Dijkstra**

  Inizializzo come SPT. Esploro partendo da r.
  Esamino FS(i) per nodi j non estratti (fissati), aggiungo j a lista Q e aggiorno se c_{ij} + d[i] < d[j] d[j] = c_{ij} + d[i] e P[j] = i. Fisso i e d[i]
  Estraggo i da lista t.c. d[i] è il minimo tra gli i ∈ lista REITERO → IMPORTANTE
  Quando lista Q = ∅ termino.

- **Bellman-Ford**

  Inizializzo come SPT. K[i]=0 ∀i, K[r]=1 → n entrate in lista Q. Parto da r
  Esamino FS(i), se c_{ij} + d[i] < d[j] aggiorno come Dijkstra e se j ∉ Q lo aggiungo e incremento K[j] di 1 (SOLO se ho aggiornato d[j] altrimenti NON entra in lista!!)
  Se K[j] ≥ |T| c'è ciclo negativo, altrimenti REITERO (estraggo i da Q a caso)
  Se Q = ∅ concludo.

MODELLO PL FLUSSO

7 Flusso massimo

Dato albero direzionato, capacità e condizione iniziale:

Costruisco grafo residuale, cerco cammino aumentante da s a t

Modifico le capacità di $\min_{(i,j)} \lambda$ del grafo → se concorde incremento
→ se discorde decremento

REITERO, se ∄ cammino aumentante $v = \max flow$

Cerco taglio N_s, N_t tc archi in avanti saturi
archi indietro scarichi → $U(N_s, N_t) = v = \max flow = mincut$

MODELLO PLI

8 Tagli di Gomory

Dato (PLI), risolvo rilassamento (PL) via metodo grafico.

Se trovo ottimo intero concludo.

Altrimenti riporto il problema in forma standard:

→ scrivo i vincoli ciascuno dipendente da una sola variabile in base, con coefficiente 1

→ oppure ricavo il sistema sopra con $A_B^{-1}A_N$ coefficienti, x_B termini noti e le variabili in base dall'inizio

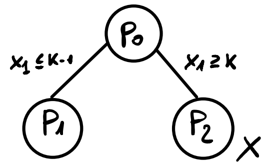
USO PARTE INTERA (floor) sui coeff del sistema trovato, sostituisco = con ≤, sono le eq. dei tagli

NB $\lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = -1 \quad \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$

Se i tagli contengono var. di slack s_i sostituisco i vincoli (dalla forma standard) per ottenere equazioni in x_i (disegnabili nel piano x_1, x_2)

Risolvo con i tagli per via grafica → potrei non trovare soluzione!? Controllo

9 Branch and bound (binario)



Dato (PLI), risolvo rilassamento (PL) via metodo grafico.

Se trovo ottimo intero concludo

altrimenti ottimo con sol. non intera: stima = UB (max) o LB (min)

applico branch su una delle variabili frazionarie

Risolvo il (PLI) rilassato con le condizioni del branch, aggiorno la stima per i nuovi nodi, REITERO

Posso chiudere nodo i se → trovo ottimo intero per P_i $LB_i = UB_i =$ stima
→ $\exists j$ tc → $LB_j \geq UB_i$ (max)
→ $UB_j \leq LB_i$ (min)
→ regione ammissibile vuota

NB ∀ branch la stima deve peggiorare o rimanere uguale (aumentare LB per minimo, diminuire UB per massimo)

NB se mi dà già un albero di branch con LB e UB già calcolati e mi chiede intervallo più stringente per ottimo: max maggior LB ≤ OTTIMO ≤ maggior UB di nodi ancora aperti *

min minor LB ≤ OTTIMO ≤ minor UB di nodi ancora aperti *

* o nodi genitori con figli con UB/LB non ancora calcolati

10 Branch and bound zaino (binario)

MODELLO ZAINO