Appunti di

Meccanica dei Continui

Dalle lezioni del Prof. Maurizio Vianello
per il corso di Ingegneria Matematica

di Teo Bucci

Politecnico di Milano
A.A. 2020/2021

Appunti di Meccanica dei Continui

Revisione del 16 febbraio 2021
Developed by Teo Bucci - `teobucci8@gmail.com`

Compiled with ♡

Per segnalare eventuali errori o suggerimenti potete contattare gli autori.

Indice

Capitolo 1

Corpi e deformazioni

Studia i corpi deformabili. Abbiamo una **configurazione di riferimento**, poi il corpo viene collocato in un contesto e viene deformato in una **configurazione attuale**.

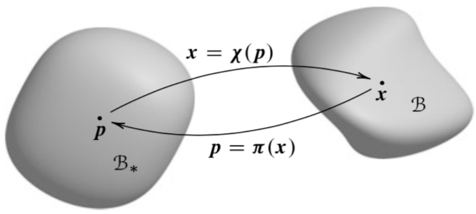


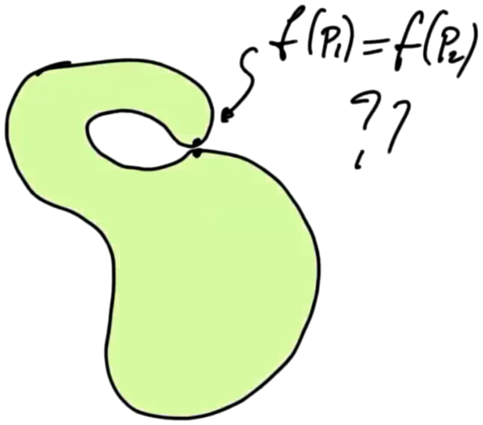
Figura 1: La deformazione e la sua inversa creano una corrispondenza biunivoca e regolare fra $\mathcal{B}_*$ e la configurazione deformata $\mathcal{B}$.

I punti della configurazione di riferimento li indico con p e con x quelli della configurazione attuale. C'è una **deformazione**, cioè una corrispondenza

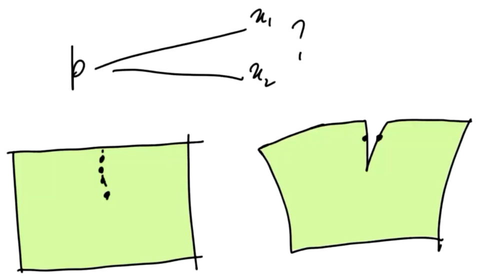
- uno a uno,
- regolare, almeno C^2

$$\mathbf{f} : \mathcal{B}_* \to \mathcal{E}^3 \qquad \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$$

Questa storia dell'uno a uno mi convince poco nel caso di autocontatto, quindi è uno a uno *all'interno*.



Questa storia del regolare mi convince poco nel caso di fratture



Dicendo $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, t)$ stiamo dicendo che il punto materiale $\mathbf{p}$ al tempo t va a collocarsi nel punto dello spazio $\mathbf{x}$. I punti materiali occupano punti dello spazio in funzione del tempo. Prendiamo un sistema di coordinate solidale all'osservatore, come assegnamo questa $\mathbf{f}$?

$$\mathbf{p} = (X_1, X_2, X_3) \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

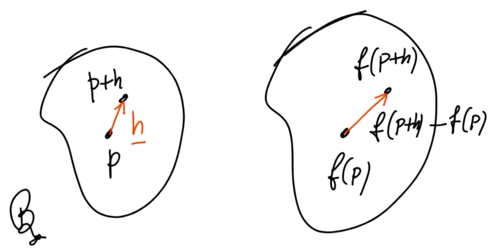
Quindi la deformazione in realtà è

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_2 &= f_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_3 &= f_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{aligned}$$

A volte indicata anche con $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{p}, t)$.

1.1 Gradiente di deformazione

Che relazione c'è tra le due frecce rosse?



$$\mathbf{f}(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{p}) = Df(\mathbf{p})[\mathbf{h}] + o(\mathbf{h})$$

Dove Df è la trasformazione lineare che rende vera quell'uguaglianza. Questo Df è chiamato **gradiente di deformazione**, che è un tensore.

$$Df : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

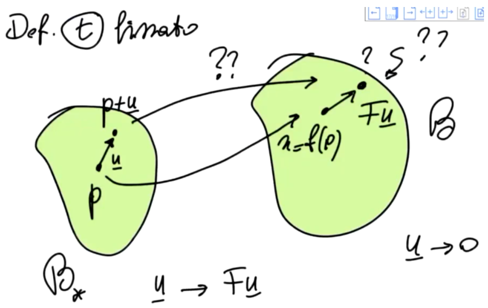
che chiamiamo $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

Le sue componenti sono

$$F_{ik} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]$$

Qui non c'è un campo, è un gradiente tra virgolette, matematicamente c'è un'analogia, ma non c'è un campo di cui fare il gradiente.



$\mathbf{p}+\mathbf{u}$ va a finire con buona approssimazione in $\mathbf{f}(\mathbf{p})$ più la trasformazione lineare $\mathbf{F}(\mathbf{u})$, questa cosa funziona meglio al tendere di $\mathbf{u} \to \mathbf{0}$.

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}+\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \mathbf{F}\mathbf{u} + o(\mathbf{u})$$

che posso scrivere anche come

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{F}\Delta\mathbf{p} + o(\Delta\mathbf{p})$$

Posso scriverli anche in forma infinitesima

$$\boxed{d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{p}}$$

che è un'uguaglianza esatta, cioè a meno di infinitesimi superiori.

Chiediamo a priori, per motivi successivi, che sia

$$\det\mathbf{F} > 0$$

in aggiunta alle proprietà di regolarità e uno a uno della deformazione.

Consideriamo delle deformazioni particolarmente semplici.

1.2 Deformazioni omogenee

In queste deformazioni $\mathbf{F}$ è costante, non c'è l'o piccolo. Sono la prima approssimazione di una deformazione.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \mathbf{F}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\cancel{+o(\mathbf{q}-\mathbf{p})}$$

In questo mondo ci concentreremo sulle deformazioni che lasciano fisso un punto.

1.3 Deformazioni omogenee con punto fisso

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{q}) &= {\color{red}\mathbf{f}(\overline{\mathbf{p}})} + \mathbf{F}(\mathbf{q}-\overline{\mathbf{p}}) \\ &= {\color{red}\overline{\mathbf{p}}} + \mathbf{F}(\mathbf{q}-\overline{\mathbf{p}})\end{aligned}$$

Se conosco il punto fisso e il gradiente di deformazione, allora conosco la deformazione. Ogni deformazione omogenea è pari a una traslazione + una deformazione omogenea con punto fisso, perciò ci concentriamo su queste ultime, dato che le transazioni non cambiano la vera e propria deformazione.

Tutti i punti vicino a $\mathbf{p}$ sono approssimabili a una trasformazione omogenea, tutte le deformazioni sono localmente omogenee.

1.4 Rotazioni

Indichiamo l'insieme dei tensori ortogonali con

$$\boxed{\mathbf{Q} \in \mathrm{Orth}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}}$$

e sono tensori che preservano il prodotto scalare

$$\mathbf{Q}\mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

Tutti i tensori ortogonali hanno determinante ± 1

$$\det(\mathbf{I}) = \det(\mathbf{Q}) \cdot \det\left(\mathbf{Q}^T\right) = [\det(\mathbf{Q})]^2 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{Q} = \pm 1$$

Diciamo che una **rotazione** è una trasformazione lineare su spazi vettoriali, un tensore

$$\boxed{\mathbf{R} \in \mathrm{Rot}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{R} \in \mathrm{Orth},\ \det \mathbf{R} = 1}$$

Se $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ sono due rotazioni allora $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2$ ed $\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1$ sono rotazioni composte.

1.4.1 Teorema di esistenza dell'asse di rotazione

Per ogni rotazione esiste un asse di rotazione.

È quell'asse $\mathbf{e}$ tale che $\mathbf{Re} = \mathbf{e}$.

Dimostrazione.

Infatti sapendo che $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$ e $\det \mathbf{R} = 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T(\mathbf{R} - \mathbf{I}) &= -(\mathbf{R} - \mathbf{I})^T \\ \mathbf{R}^T\mathbf{R} - \mathbf{R}^T &= -\mathbf{R}^T + \mathbf{I} \\ \mathbf{I} - \mathbf{R}^T &= -\mathbf{R}^T + \mathbf{I} \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \det\left[\mathbf{R}^T(\mathbf{R} - \mathbf{I})\right] &= \det\left[-(\mathbf{R} - \mathbf{I})^T\right] \\ \det\left(\mathbf{R}^T\right)\det(\mathbf{R} - \mathbf{I}) &= -\det(\mathbf{R} - \mathbf{I}) \\ \det(\mathbf{R} - \mathbf{I}) &= -\det(\mathbf{R} - \mathbf{I}) \end{aligned}$$

Allora per forza

$$\det(\mathbf{R} - \mathbf{I}) = 0$$

Allora $\lambda = 1$ è un autovalore di $\mathbf{R}$. Allora c'è un autovettore $\mathbf{v}$, e il suo corrispondente autoversore $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ tale che

$$\mathbf{Re} = \lambda\mathbf{e} = \mathbf{e}$$

L'asse di rotazione è l'autospazio di $\lambda = 1$.

Osservazione. Ricordiamo questo risultato di Algebra Lineare sul prodotto matrici vettori[a]

$$\mathbf{ABc} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{Bc} \cdot \mathbf{A}^T\mathbf{d} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\mathbf{d}$$

I vettori perpendicolari all'asse di rotazione, rimangono perpendicolari

$$\mathbf{a} \perp\!\!\!\perp \mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = 0 = \mathbf{Ia} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{R}^T\mathbf{Ra} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Ra} \cdot \mathbf{Re} = \mathbf{Ra} \cdot \mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Ra} \perp\!\!\!\perp \mathbf{e}$$

Le rotazioni non alterano il modulo dei vettori

$$|\mathbf{Ra}|^2 = \mathbf{Ra} \cdot \mathbf{Ra} = \mathbf{R}^T\mathbf{Ra} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

[a] ovvero possiamo spostare la matrice più a *sinistra* dall'altra parte del prodotto scalare, sempre a *sinistra*, facendone il trasposto.

Definiamo un **tensore simmetrico**

$$\boxed{\mathbf{S} \in \mathrm{Sym}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{S} = \mathbf{S}^T}$$

Definiamo un **tensore simmetrico positivo**

$$\boxed{\mathbf{S} \in \mathrm{Sym}^+} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{S} \in \mathrm{Sym} \ \wedge \ \mathbf{Sa} \cdot \mathbf{a} > 0 \quad \forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0}}$$

1.4.2 Teorema della radice quadrata

Sia $\mathbf{C} \in \mathrm{Sym}^+$ allora $\exists!\ \mathbf{U} \in \mathrm{Sym}^+$ tale che $\mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$, cioè $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$.

Dimostrazione.

- *Esistenza.*

  La matrice $\mathbf{C}$ essendo simmetrica e definita positiva si può diagonalizzare:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

  rispetto a una terna. Rispetto alla stessa definisco:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

- *Unicità.*

  L'unicità è garantita dal positivo. Supponiamo ne esista un'altro, diverso, $\overline{\mathbf{U}}$.

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{C} \quad \overline{\mathbf{U}}^2 = \mathbf{C} \quad \overline{\mathbf{U}} \neq \mathbf{U}$$

  Prendiamo un autovalore e un autovettore di $\mathbf{U}$

$$\mathbf{U}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e} \qquad \lambda > 0$$

  allora

$$\mathbf{U}^2\mathbf{e} = \mathbf{U}\mathbf{U}\mathbf{e} = \mathbf{U}\lambda\mathbf{e} = \lambda\mathbf{U}\mathbf{e} = \lambda^2\mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}\mathbf{e} = \lambda^2\mathbf{e}$$

  allora

$$\begin{aligned} (\overline{\mathbf{U}} + \lambda\mathbf{I})(\overline{\mathbf{U}} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e} &= \left(\overline{\mathbf{U}}^2 + \lambda\overline{\mathbf{U}} - \lambda\overline{\mathbf{U}} - \lambda^2\mathbf{I}\right)\mathbf{e} \\ &= \left(\mathbf{C} - \lambda^2\mathbf{I}\right)\mathbf{e} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{e} - \lambda^2\mathbf{e} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

  scriviamo questa uguaglianza come

$$(\overline{\mathbf{U}} + \lambda\mathbf{I})\underbrace{(\overline{\mathbf{U}} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e}}_{\mathbf{w}} = (\overline{\mathbf{U}} + \lambda\mathbf{I})\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{U}}\mathbf{w} = -\lambda\mathbf{w}$$

  ho due possibilità: $\mathbf{w} = \mathbf{0}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$.

  - Se $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ allora $\mathbf{w}$ sarebbe autovettore di $\overline{\mathbf{U}}$ con autovalore $-\lambda$. Ciò è impossibile perché $\overline{\mathbf{U}}$ avrebbe un autovalore negativo, mentre invece è un tensore simmetrico positivo.
  - Quindi $\mathbf{w} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{w} = (\overline{\mathbf{U}} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{U}}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$$

  ovvero ogni autovalore e autovettore di $\mathbf{U}$ sono autovalori e autovettori di $\overline{\mathbf{U}}$ e viceversa. Quindi hanno i medesimi autovalori e autovettori: dall'algebra, $\mathbf{U} = \overline{\mathbf{U}}$.

1.4.3 Teorema di decomposizione polare

Sia $\mathbf{F} \in \text{Lin}^{+1}$, allora $\exists!\ \mathbf{R}, \mathbf{U}, \mathbf{V}$, di cui $\mathbf{R} \in \text{Rot}$ e $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \text{Sym}^+$ tali che

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR}}$$

Dimostrazione.

Il tensore che definiamo

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}}$$

è simmetrico:

$$\mathbf{C}^T = \left(\mathbf{F}^T\mathbf{F}\right)^T = \mathbf{F}^T\left(\mathbf{F}^T\right)^T = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{C}$$

e definito positivo (ricordiamo che $\mathbf{F}$ è invertibile e $\mathbf{Fa} = \mathbf{0}$ solo se $\mathbf{a} = \mathbf{0}$):

$$\mathbf{Ca}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{F}^T\mathbf{Fa}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{Fa}\cdot\mathbf{Fa} = |\mathbf{Fa}|^2 > 0 \quad \forall\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$$

Quindi abbiamo $\mathbf{C} \in \text{Sym}^+$, allora per il teorema della radice quadrata

$$\exists!\ \mathbf{U} \in \text{Sym}^+ \text{ tale che } \boxed{\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T\mathbf{F}}}$$

Abbiamo quindi determinato $\mathbf{C}$ ed $\mathbf{U}$, per avere l'uguaglianza $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$ ci serve da determinare come è fatto $\mathbf{R}$, la sua unicità e il fatto che sia una rotazione.

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{FU}^{-1}}$$

Verifichiamo che sia una rotazione:

- è ortogonale

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^T\mathbf{R} &= \left(\mathbf{FU}^{-1}\right)^T\left(\mathbf{FU}^{-1}\right) = \mathbf{U}^{-T}\mathbf{F}^T\mathbf{FU}^{-1} \\ &= \mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}^2\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{UUU}^{-1} = \mathbf{II} = \mathbf{I}\end{aligned}$$

- essendo ortogonale il suo determinante può essere solo ± 1

$$\det\mathbf{R} = (\det\mathbf{F})\left(\det\mathbf{U}^{-1}\right) = \frac{\det\mathbf{F}}{\det\mathbf{U}}$$

  ma il determinante di $\mathbf{F}$ è positivo per ipotesi e il determinante di $\mathbf{U}$ è positivo essendo simmetrico e definito positivo, quindi per forza $\det\mathbf{R} = 1$.

Quindi $\mathbf{R}$ definita come sopra, è una rotazione, ed è unica per costruzione.

Passiamo alla seconda parte del teorema, per determinare $\mathbf{V}$ è sufficiente definirlo come

$$\boxed{\mathbf{V} = \mathbf{RUR}^T}$$

e far vedere che è Sym^+.

- È simmetrico, grazie alla simmetria di $\mathbf{U}$

$$\mathbf{V}^T = \left(\mathbf{RUR}^T\right)^T = \mathbf{RU}^T\mathbf{R}^T = \mathbf{RUR}^T = \mathbf{V}$$

- È positivo, grazie alla positività di $\mathbf{U}$ e al fatto che $\det\mathbf{R} \neq 0$

$$\mathbf{Va}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{RUR}^T\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{U}\left(\mathbf{R}^T\mathbf{a}\right)\cdot\left(\mathbf{R}^T\mathbf{a}\right) > 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$$

[1]Tensori a determinante positivo, come il gradiente di deformazione.

Osservazione. Essendo $\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T$, prendiamo $\lambda, \mathbf{e}$ tali che

$$\mathbf{U}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e} \quad \lambda > 0$$

se faccio

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}\mathbf{e}) = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T(\mathbf{R}\mathbf{e}) = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{e} = \mathbf{R}(\lambda\mathbf{e}) = \lambda(\mathbf{R}\mathbf{e})$$

quind λ e $\mathbf{R}\mathbf{e}$ sono autovalori e autovettori di $\mathbf{V}$, ovvero $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ *hanno gli stessi autovalori, mentre gli autovettori / autospazi si ottengono per rotazione tramite* $\mathbf{R}$. Inoltre vale

$$\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U} = \mathbf{R}^T\mathbf{V}\mathbf{R}$$

1.5 Deformazioni pure

Consideriamo $\mathbf{U} \in \mathrm{Sym}^+$. Supponiamo che $\mathbf{e}_i$ sia una terna ortonormale di autovettori di $\mathbf{U}$. Ricordiamo che la matrice del prodotto tensore è fatta così

$$[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}$$

In questo sistema di riferimento calcoliamo i prodotti tensori degli $\mathbf{e}_i$

$$\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e analogamente

$$\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando la terna di riferimento, la matrice del tensore $\mathbf{U}$ si può scrivere come

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ovvero

$$\mathbf{U} = \lambda_1[\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1] + \lambda_2[\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2] + \lambda_3[\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3] = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i[\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i]$$

Torniamo alle deformazioni omogenee con $\overline{\mathbf{p}}$ fisso e consideriamo due trasformazioni diverse

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{q}) = \overline{\mathbf{p}} + \mathbf{F}_1(\mathbf{q} - \overline{\mathbf{p}})$$
$$\mathbf{f}_2(\mathbf{q}) = \overline{\mathbf{p}} + \mathbf{F}_2(\mathbf{q} - \overline{\mathbf{p}})$$

cosa succede se faccio la composta?

$$\begin{aligned}(\mathbf{f}_2 \circ \mathbf{f}_1)(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_2(\mathbf{f}_1(\mathbf{q})) &= \mathbf{f}_2(\overline{\mathbf{p}} + \mathbf{F}_1(\mathbf{q} - \overline{\mathbf{p}})) \\ &= \overline{\mathbf{p}} + \mathbf{F}_2(\overline{\mathbf{p}} + \mathbf{F}_1(\mathbf{q} - \overline{\mathbf{p}}) - \overline{\mathbf{p}}) \\ &= \overline{\mathbf{p}} + \mathbf{F}_2(\mathbf{F}_1(\mathbf{q} - \overline{\mathbf{p}})) \\ &= \overline{\mathbf{p}} + \mathbf{F}_2\mathbf{F}_1(\mathbf{q} - \overline{\mathbf{p}})\end{aligned}$$

Leggiamo questa cosa nell'ottica della decomposizione polare

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \overline{\mathbf{p}} + \mathbf{F}(\mathbf{q} - \overline{\mathbf{p}}) = \overline{\mathbf{p}} + \mathbf{R}\mathbf{U}(\mathbf{q} - \overline{\mathbf{p}})$$

Quella $\mathbf{R}$ dà una rotazione, ma in che senso? Le rotazioni ruotano i *vettori*, qui siamo nello spazio e stiamo parlando di *punti*.

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}) = \overline{\mathbf{p}} + \mathbf{R}(\mathbf{q} - \overline{\mathbf{p}}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{r}(\mathbf{q}) - \overline{\mathbf{p}} = \mathbf{R}(\mathbf{q} - \overline{\mathbf{p}})$$

Stiamo ruotando il vettore $\mathbf{q} - \overline{\mathbf{p}}$ *attorno* a $\overline{\mathbf{p}}$. Ricordando

$$\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR}$$

e avendo capito che la $\mathbf{R}$ è una rotazione, deduciamo che $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono **deformazioni pure**. Per capirlo introduciamo una terna di riferimento e studiamo

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \overline{\mathbf{p}} + \mathbf{U}(\mathbf{q} - \overline{\mathbf{p}})$$

mettiamo il punto fisso nell'origine

$$\overline{\mathbf{p}} = (0,0,0) \qquad \mathbf{q} = (X_1, X_2, X_3) \qquad \mathbf{f}(\mathbf{q}) = (x_1, x_2, x_3)$$

Come assi prendo gli autovettori di $\mathbf{U}$ e ricordiamo che

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i [\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i]$$

allora

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \overline{\mathbf{p}} + \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i [\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i] \right) (\mathbf{q} - \overline{\mathbf{p}}) = \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i [\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i] \right) (\mathbf{q})$$

cioé

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = (\lambda_1 [\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1] + \lambda_2 [\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2] + \lambda_3 [\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3]) \underbrace{(X_1 \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3)}_{(\mathbf{q})}$$

Per farlo ricordiamoci che

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} \qquad \wedge \qquad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \ \forall i \neq j$$

Allora

$$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \lambda_1 X_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 X_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 X_3 \mathbf{e}_3}$$

cioé

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 X_1 \\ x_2 = \lambda_2 X_2 \\ x_3 = \lambda_3 X_3 \end{cases}$$

quindi per passare dalle coordinate di $\overline{\mathbf{p}}$ a quelle di $\mathbf{q}$ stiamo facendo **un'estensione (o contrazione) lungo gli assi coordinati scegli come autovettori** di $\mathbf{U}$. Quindi possiamo avere deformazione pura seguita da rotazione, o viceversa. La rotazione è sempre la stessa, ma la deformazione è diversa (ruotata).

1.5.1 Riassunto

- Ogni deformazione finita è localmente omogenea
- Ogni deformazione omogenea è a meno di una traslazione una deformazione omogenea con punto fisso
- Ogni deformazione omogenea con punto fisso è la composizione di una rotazione preceduta (o seguita) da una deformazione pura
- Ogni deformazione pura è l'insieme di 3 estensioni (o contrazioni) lungo tre assi ortogonali, gli autospazi di $\mathbf{U}$, o $\mathbf{V}$.