Regressione Lineare e Anova Progetto di Inferenza Statistica

T. Bucci, G. Corbo, D. Fabroni

Politecnico di Milano

Luglio 2021



Table of Contents

- 1 Presentazione del dataset
- 2 Obiettivo
- 3 Modello lineare
- 4 ANOVA

Scelta del dataset: Biomechanical features of orthopedic patients

Fonte: Lichman, M. (2013). UCI Machine Learning Repository [http://archive.ics.uci.edu/ml]. Irvine, CA: University of California, School of Information and Computer Science

Presentazione del dataset

0000

Covariate presenti

Presentazione del dataset

0000

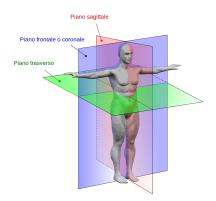
- pelvic incidence (continua)
- pelvic tilt (continua)
- lumbar lordosis angle (continua)
- sacral slope (continua)
- pelvic radius (continua)
- grade of spondylolisthesis (continua)
- class (categorica)

con 310 osservazioni.



Modello lineare

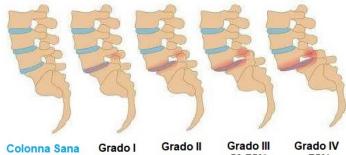
Sono indici dell'inclinazione del bacino sul piano sagittale.



Le classi sono Hernia, Spondylolisthesis, Normal.



Classificazione



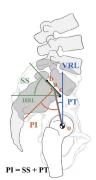
<25%

25-50%

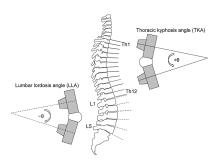
50-75%

>75%

Modello lineare



... per poter stimare il **lumbar lordosis angle**, un parametro che riguarda la sezione medio-bassa della schiena che misura la concavità della zona lombare della schiena.



Vantaggi di questo approccio

- Poter prevedere una caratteristica della schiena senza fare una radiografia completa della schiena
- Risparmio di costi della radiografia
- Riduzione della quantità di raggi X a cui il paziente è esposto

Overview dei dati

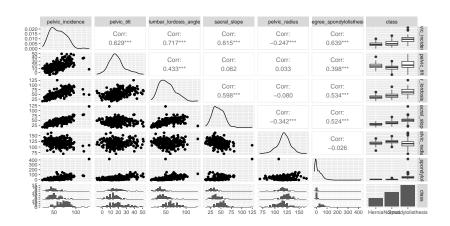
Presentazione del dataset

```
pelvic_incidence pelvic_tilt lumbar_lordosis_angle sacral_slope pelvic_radius
         63.02782
                     22.552586
                                            39.60912
                                                          40.47523
                                                                        98.67292
         39.05695
                   10.060991
                                            25.01538
                                                          28.99596
                                                                       114.40543
3
          68 83202
                     22.218482
                                            50.09219
                                                          46.61354
                                                                       105.98514
4
         69.29701
                     24.652878
                                            44.31124
                                                          44.64413
                                                                       101.86850
         49.71286
                      9.652075
                                            28.31741
                                                         40.06078
                                                                       108.16872
         40.25020
                     13.921907
                                            25.12495
                                                          26.32829
                                                                       130.32787
 degree_spondylolisthesis class
1
                 -0.254400 Hernia
                  4.564259 Hernia
3
                 -3.530317 Hernia
                 11.211523 Hernia
                  7.918501 Hernia
                  2.230652 Hernia
```

Non ci sono degli NA.



Presentazione del dataset



Modello lineare

Modello lineare

Generiamo il primo modello lineare, come risposta lumbar_lordosis_angle. Escludiamo class, che è la categorica.

```
Call:
lm(formula = lumbar lordosis angle ~ . - class. data = biomech)
Residuals:
   Min
            10 Median
                                 Max
-76.720 -7.415 -1.261
                        6.878 70.183
Coefficients: (1 not defined because of singularities)
                        Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
                       -10.55489
                                   8.59928 -1.227
                                                    0.2206
(Intercept)
pelvic_incidence
                        0.76884 0.06996 10.989 <2e-16 ***
pelvic tilt
                        -0.11410 0.09650 -1.182
                                                   0.2380
sacral_slope
                             NA
                                               NA
                                                        NA
                                        NA
                                   0.05911 2.384
                                                    0.0177 *
pelvic_radius
                         0.14092
degree spondvlolisthesis 0.05166 0.02555 2.022
                                                    0.0441 *
Signif. codes: 0 '*** 0.001 '** 0.01 '* 0.05 '.' 0.1 ' 1
Residual standard error: 12.76 on 305 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5334, Adjusted R-squared: 0.5272
```

F-statistic: 87.15 on 4 and 305 DF, p-value: < 2.2e-16

 R_{adi}^2 iniziale abbastanza buono come punto di partenza: 0.5272. Molto significativo pelvic_incidence.

p-value dell'F-test 2.2e-16, c'è evidenza per dire che almeno una covariata sia significativa.

Ci sono NA in corrispondenza di sacral_slope, scopriamo che è indice di lineare dipendenza da altre covariate, procediamo quindi subito con l'analisi di questo aspetto.

Prevediamo sacral_slope in funzione di tutto il resto, tranne la risposta originale e la categorica.

```
Call:
lm(formula = sacral_slope ~ . - class - lumbar_lordosis_angle,
   data = biomech)
Residuals:
                        Median
-1.091e-08 -5.072e-10 1.020e-10 3.703e-10 1.057e-08
Coefficients:
                         Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)
                        6.414e-10 3.159e-09 2.030e-01
                                                         0.839
pelvic incidence
                       1.000e+00 2.570e-11 3.891e+10 <2e-16 ***
pelvic_tilt
                       -1.000e+00 3.545e-11 -2.821e+10 <2e-16 ***
pelvic_radius
                       -8.878e-12 2.171e-11 -4.090e-01 0.683
degree spondylolisthesis 4.338e-12 9.388e-12 4.620e-01 0.644
Signif. codes: 0 '*** 0.001 '** 0.01 '* 0.05 '.' 0.1 ' 1
Residual standard error: 4.687e-09 on 305 degrees of freedom
Multiple R-squared: 1,Adjusted R-squared:
F-statistic: 6.337e+20 on 4 and 305 DF. p-value: < 2.2e-16
```

 R_{adi}^2 vale 1, osservando i β scopriamo che

sacralslope + pelvictilt = pelvicincidence

In ambito medico abbiamo conferma di guesta cosa: Pelvic tilt and sacral slope are two angles directly correlated with the pelvic incidence angle. The angle of incidence is the algebraic sum of two angles: pelvic tilt (PT) and sacral slope (SS)¹ Escludiamo questa covariata.

¹https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3175921/

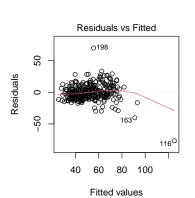
Procediamo con il nostro modello escludendo la sacral_slope e la categorica.

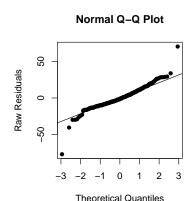
```
Call:
lm(formula = lumbar_lordosis_angle ~ . - class - sacral_slope,
   data = biomech)
Residuals:
    Min
            1Q Median
                                  Max
-76.720 -7.415 -1.261
                        6.878 70.183
Coefficients:
                        Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)
                        -10.55489
                                    8.59928 -1.227
                                                     0.2206
pelvic incidence
                         0.76884
                                                    <20-16 ***
                                    0.06996 10.989
pelvic_tilt
                        -0.11410 0.09650 -1.182 0.2380
pelvic_radius
                         0.14092
                                    0.05911 2.384
                                                     0.0177 *
degree spondylolisthesis 0.05166
                                    0.02555 2.022
                                                     0.0441 *
Signif. codes: 0 '*** 0.001 '** 0.01 '* 0.05 '.' 0.1 ' 1
Residual standard error: 12.76 on 305 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5334, Adjusted R-squared: 0.5272
F-statistic: 87.15 on 4 and 305 DF, p-value: < 2.2e-16
```

Controlliamo le ipotesi

Presentazione del dataset

L'omoschedasticità non è fantastica e lo Shapiro test rifiuta la normalità con un p-value di 3.878e-11.





Im(lumbar lordosis angle ~ - class - sacral 4

Procediamo dapprima con la pulizia del dataset, controllando se migliorano le ipotesi di lavoro, e nel caso procediamo con la trasformazione box cox.

I **punti leva** $(h_{ii} > 2p/n)$ risultano:

Vediamo anche residui studentizzati e standardizzati.

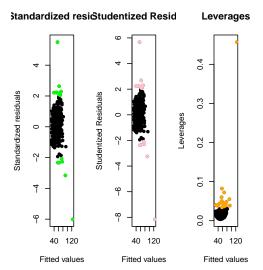


Modello lineare

Presentazione del dataset

52 72 75 83 94 99 113 116 125 135 143 163 183 198 202 203

e coincidono con gli studentizzati.

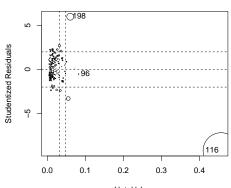


Modello lineare

Punti influenti

Presentazione del dataset

influential Plot



Hat-Values Circle size is proportial to Cook's Distance



Dopo aver tolto i leverage:

```
Call:
lm(formula = lumbar_lordosis_angle ~ . - class - sacral_slope,
   data = biomech, subset = (lev < 2 * p/n))
Residuals:
   Min
            10 Median
                           30
                                  Max
-38 740 -6 327 -0 724 5 792 26 955
Coefficients:
                        Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)
                        -14 65892
                                    7 78281 -1 884 0 06065
pelvic_incidence
                         0.82717 0.06289 13.152 < 2e-16 ***
pelvic_tilt
                        -0.37281 0.09005 -4.140 4.58e-05 ***
                                    0.05499 2.853 0.00465 **
pelvic radius
                         0.15686
degree spondylolisthesis 0.20055
                                    0.03096 6.477 4.08e-10 ***
Signif. codes: 0 '*** 0.001 '** 0.01 '* 0.05 '.' 0.1 ' 1
Residual standard error: 10.12 on 285 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.6929, Adjusted R-squared: 0.6886
F-statistic: 160.7 on 4 and 285 DF, p-value: < 2.2e-16
```

Dopo aver tolto gli studentizzati:

```
Call:
lm(formula = lumbar_lordosis_angle ~ . - class - sacral_slope,
   data = biomech, subset = (abs(stud) < 2))
Residuals:
    Min
              10 Median
                                       Max
-24 7494 -6 7045 -0 8731 6 1216 25 1839
Coefficients:
                       Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)
                       -7.11477
                                   6.20910 -1.146
                                                    0.2528
pelvic_incidence
                       0.87282 0.05160 16.914 < 2e-16 ***
pelvic_tilt
                       -0.39784
                                  0.07492 -5.310 2.19e-07 ***
pelvic radius
                        0.08100
                                   0.04293 1.887
                                                    0.0602
degree spondylolisthesis 0.13697
                                   0.02437
                                            5 621 4 48e-08 ***
Signif. codes: 0 '*** 0.001 '** 0.01 '* 0.05 '.' 0.1 ' 1
Residual standard error: 9.021 on 289 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.7298, Adjusted R-squared: 0.7261
```

F-statistic: 195.2 on 4 and 289 DF, p-value: < 2.2e-16

Modello lineare

Dopo aver tolto i leverage e gli studentizzati:

```
Call:
lm(formula = lumbar_lordosis_angle ~ . - class - sacral_slope,
   data = biomech, subset = (abs(stud) < 2 \mid lev < 2 * p/n))
Residuals:
   Min
            10 Median
                           30
                                  Max
-34 290 -7 025 -0 731 5 986 31 766
Coefficients:
                        Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)
                        -6.11635
                                   6 98922 -0.875 0.3822
pelvic_incidence
                       0.83386 0.05816 14.337 < 2e-16 ***
pelvic_tilt
                        -0.40375
                                   0.08410 -4.801 2.50e-06 ***
pelvic radius
                        0.09063
                                   0.04823 1.879
                                                    0.0612
                                   0.02716 6.077 3.71e-09 ***
degree spondylolisthesis 0.16506
Signif. codes: 0 '*** 0.001 '** 0.01 '* 0.05 '.' 0.1 ' 1
Residual standard error: 10.32 on 300 degrees of freedom
```

Multiple R-squared: 0.6759, Adjusted R-squared: 0.6716 F-statistic: 156.4 on 4 and 300 DF, p-value: < 2.2e-16 Aggiungiamo il calcolo dell'AIC.

```
> AIC(g_post_lev)
[1] 2172.373
> AIC(g_post_rs)
[1] 2134.629
> AIC(g_post_both)
[1] 2296.307
```

Presentazione del dataset

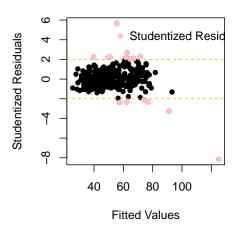
Il modello migliore è quello senza i punti influenti trovati coi residui studentizzati, avendo R_{adi}^2 maggiore e AIC minore.

 $L'R_{adi}^2$ aumenta notevolmente a 0.7261.

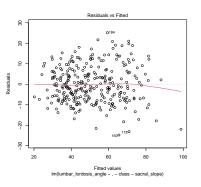
p-value è 2.2e-16, ci sono ancora covariate non significative, stavolta diverse da prima.

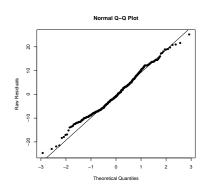


Studentized Residuals



L'omoschedasticità migliora, lo Shapiro test rifiuta la normalità con un p-value di 0.04041.

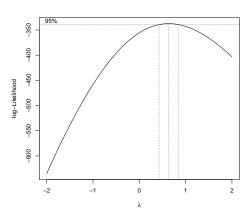




Trasformazione box cox

Presentazione del dataset

Otteniamo $\lambda = 0.6262626$



Modello lineare

Generiamo il nuovo ML dove modelliamo $\frac{Y^{\lambda}-1}{\lambda}$

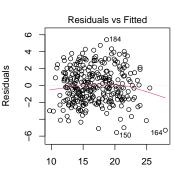
```
Call:
lm(formula = (lumbar_lordosis_angle^best_lambdagl - 1)/best_lambdagl ~
   . - class - sacral slope, data = biomech, subset = (abs(stud) <
   2))
Residuals:
   Min
           10 Median
                                 Max
-5.5750 -1.5905 -0.1978 1.4263 5.4229
Coefficients:
                       Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
                       3.517005 1.436634
(Intercept)
                                            2.448
                                                   0.0150 *
pelvic incidence
                       pelvic_tilt
                       -0.096457 0.017334 -5.565 6.00e-08 ***
pelvic_radius
                       0.017717 0.009934 1.784
                                                   0.0755 .
degree spondvlolisthesis 0.030430 0.005638 5.397 1.41e-07 ***
Signif. codes: 0 '*** 0.001 '** 0.01 '* 0.05 '.' 0.1 ' 1
Residual standard error: 2.087 on 289 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.7288, Adjusted R-squared: 0.725
F-statistic: 194.1 on 4 and 289 DF, p-value: < 2.2e-16
```

 R_{adi}^2 diminuisce da 0.7261 a 0.725.

Verifichiamo se ora le ipotesi di normalità sono soddisfatte.

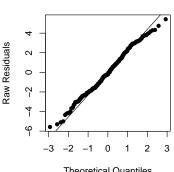
L'omoschedasticità rimane la stessa, lo Shapiro test non rifiuta la normalità con un p-value di 0.196.

Modello lineare



Fitted values rdosis angle^best lambdagl - 1)/best lambdag





Theoretical Quantiles

Selezione delle covariate

Presentazione del dataset

Rimuoviamo pelvic_radius che ha un p-value *one-at-a-time* di 0.0755, c'è evidenza per dire che non è significativo.

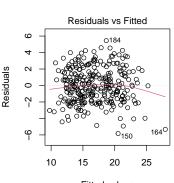
```
Call:
lm(formula = (lumbar_lordosis_angle^best_lambdagl - 1)/best_lambdagl ~
   . - class - sacral_slope - pelvic_radius, data = biomech,
   subset = (abs(stud) < 2))
Residuals:
   Min
            10 Median
                                 Max
-5 8320 -1 6205 -0 0449 1 4739 5 4439
Coefficients:
                        Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)
                       5.902680 0.526115 11.219 < 2e-16 ***
pelvic_incidence
                       pelvic_tilt
                       -0.089619 0.016969 -5.282 2.52e-07 ***
degree_spondylolisthesis 0.031657 0.005617 5.635 4.13e-08 ***
Signif. codes: 0 '*** 0.001 '** 0.01 '* 0.05 '.' 0.1 ' 1
Residual standard error: 2.095 on 290 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.7258.Adjusted R-squared: 0.723
F-statistic: 255.9 on 3 and 290 DF, p-value: < 2.2e-16
```

 R_{adi}^2 scende da 0.725 a 0.723, ma semplifica di molto il modello, quindi procediamo con questa modifica.

Verifichiamo come cambiano le ipotesi di normalità e omoschedasticità.

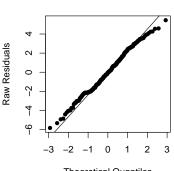
L'omoschedasticità rimane la stessa, lo Shapiro test migliora con un p-value di 0.22.

Modello lineare



Fitted values rdosis angle^best lambdagl - 1)/best lambdag

Normal Q-Q Plot



Theoretical Quantiles

Modello conclusivo

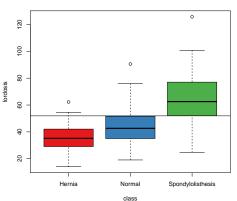
Presentazione del dataset

$$\frac{\textit{LLA}^{\lambda} - 1}{\lambda} = 5.902680 + 0.196926 \cdot \text{PI} - 0.089619 \cdot \text{PT} + 0.031657 \cdot \text{DS}$$

dove $\lambda = 0.6262626$.

Procediamo ora con l'ANOVA, siamo interessati a capire se la media della nostra risposta LLA è diversa tra le classi.

lumbar lordosis angle according to class





Lo Shapiro test ci porta tuttavia a rifiutare la normalità nei gruppi.

Hernia 0.68493698

Normal Spondylolisthesis 0.01650640

0.07089939

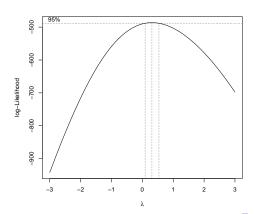
Sia il Levene test che il Bartlett test ci portano a rifiutare anche l'omoschedasticità tra i gruppi.

```
> leveneTest(biomech$lumbar_lordosis_angle, biomech$class)
Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
       Df F value
                     Pr(>F)
      2 9.8185 7.357e-05 ***
group
      307
> bartlett.test(biomech$lumbar_lordosis_angle, biomech$class)
Bartlett test of homogeneity of variances
data: biomech$lumbar_lordosis_angle and biomech$class
Bartlett's K-squared = 23.183, df = 2, p-value = 9.242e-06
```

Trasformazione box cox

Presentazione del dataset

Otteniamo $\lambda = 0.31$



Lo Shapiro test ci porta ora a non rifiutare la normalità nei gruppi.

Hernia 0.1834879

Normal Spondylolisthesis 0.9761894 0.7439135

Sia il Levene test che il Bartlett test ora confermano l'omoschedasticità.

```
> leveneTest( (biomech$lumbar lordosis angle^best lambda -1)/best lambda .biomech$class )
Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
      Df F value Pr(>F)
group 2 0.5628 0.5702
      307
> bartlett.test( (biomech$lumbar_lordosis_angle^best_lambda -1)/best_lambda ,biomech$class )
Bartlett test of homogeneity of variances
      (biomech$lumbar lordosis angle^best lambda - 1)/best lambda and biomech$class
Bartlett's K-squared = 0.49971, df = 2, p-value = 0.7789
```

Generiamo ora il modello.

```
Call:
```

```
lm(formula = (biomech$lumbar lordosis angle^best lambda - 1)/best lambda ~
    class, data = biomech)
```

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

Residuals:

Presentazione del dataset

```
Min
              10 Median
                                       Max
                               30
-2.91535 -0.59753 0.01302 0.66488 2.80340
```

Coefficients:

```
(Intercept)
                      6.4423
                                0.1179 54.623 < 2e-16 ***
classNormal
                      0.6371
                                0.1492 4.271 2.6e-05 ***
classSpondylolisthesis
                     1.9655 0.1395 14.084 < 2e-16 ***
Signif. codes: 0 '*** 0.001 '** 0.01 '* 0.05 '.' 0.1 ' 1
```

```
Residual standard error: 0.9136 on 307 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.4449.Adjusted R-squared: 0.4413
F-statistic: 123 on 2 and 307 DF, p-value: < 2.2e-16
```

 $L'R_{adi}^2$ non è altissimo, 0.4413, ma procediamo comunque con l'ANÓVA.

```
Analysis of Variance Table
```

Presentazione del dataset

```
Response: (biomech$lumbar lordosis angle^best lambda - 1)/best lambda
          Df Sum Sq Mean Sq F value
class
           2 205.39 102.695 123.05 < 2.2e-16 ***
Residuals 307 256.22
                    0.835
Signif. codes: 0 '*** 0.001 '** 0.01 '* 0.05 '.' 0.1 ' 1
```

Il p-value 2.2e-16 è basso e ci porta a rifiutare l'ipotesi nulla che le medie siano tutte uguali.