Cap. 1 Măsura

σ-Algebră

Fie X o mulțime. O colecție de părți ale lui X → $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ s.n. σ-Algebră dacă:

(σA_1) $\cancel{X} \in \mathcal{M}$ ($\emptyset \in \mathcal{M}$) — $X \in \mathcal{M}$

(σA_2) $\forall A \in \mathcal{M}$ avem că $A^c = X \setminus A \in \mathcal{M}$ — e închisă la luarea complementului

(σA_3) $\forall (A_n)_n \subseteq \mathcal{M}$ șir, avem că $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ — și la reuniune numărabilă

(!) 1) Fie $(A_n)_n \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow A_n^c \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{M} \Rightarrow \cancel{\bigcap_{n=1}^{\infty}}$

$\Rightarrow \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right]^c \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

$\left[\bigcup_{i\in J} E_i\right]^c = \bigcap_{i\in J} E_i$; $\left[\bigcap_{i\in J} E_i\right]^c = \bigcup_{i\in J} E_i$ ... desen......

Închisă la intersecție numărabilă

2) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow B^c \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B^c \in \mathcal{M} \Rightarrow \boxed{A \setminus B \in \mathcal{M}}$

3) $X \to \mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ cea mai mare, $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$ cea mai mică

Prop $\bigcap_{i\in J} \mathcal{M}_i = \{A \subseteq X \mid A \in \mathcal{M}_i, \forall i \in J\}$ e σ-Alg pe X

σ-Algebră generată

X - mulțime, F - familie de părți ale lui X

$\sigma(F) = \bigcap \mathcal{M}$

$\mathcal{M}$ - σ alg pe X

$\underline{F \subseteq \mathcal{M}}$

σ alg generată de F

- $\sigma(F)$ e σ-Alg pe F
- $F \subseteq \sigma(F)$
- dacă $\mathcal{M}$ σ-alg pe X cu $F \subseteq \mathcal{M}$, $\sigma(F) \subseteq \mathcal{M}$.

- trb F să îl conțină pe X?

nu.

$\sigma(F)$ trb să îl conțină pe X. în $\mathcal{M}$ luăm și complementul elm din F, și $\cup$ și $\cap$ num de ele, și $\setminus$:)

σ-Algebra Borel (Boreliene)

1) $(\mathbb{R}^n; \tau)$; τ - fam. deschișilor din $\mathbb{R}^n$. τ $\underline{\underline{nu}}$ e σ-alg.

$\sigma(\tau) \overset{notăm}{=} \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ cea mai „mică" σ alg pe $\mathbb{R}^n$ ce îl conține pe τ

Măsura

Fie X o mulțime, $\mathcal{M}$ σ-alg pe X. o funcție μ

$\boxed{\mu : \mathcal{M} \to [0;\infty]}$ m măsură dacă

$A \to \mu(A)$

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\forall (A_n)_n$ șir $\subseteq \mathcal{M}$ cu $\underbrace{A_n \cap A_m = \emptyset}$, $\forall n \neq m \in \mathbb{N}$

termenii → mulțimi distincte?? disjuncte

avem că $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$

Fie $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spațiu cu măsură. proprietăți

$\boxed{1}$ monotonia: dacă $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

$\boxed{2}$ σ-subaditivitate: dacă $(A_n)_n \subseteq \mathcal{M}$ atunci $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

mulțimile A_n nu mai sunt neapărat disjuncte

$\boxed{3}$ „continuitate în sus" fie $(A_n)_n \subseteq \mathcal{M}$, $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\to \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$ → marginea

$\boxed{4}$ „cont. în jos pe ~~măsură~~ mulțimi de măs. finită" $A_n \supseteq A_{n+1}$

(3) $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$ → centrul $\qquad \mu(A_1) < \infty$

$\mu(B), \mu(A) < \infty$

$A \subseteq B$

$B = A \cup (B \setminus A)$

$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sp cu măsură

Scop: $\exists !$ o măsură $\lambda_N : \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \to [0,\infty]$ cu prop că

$$\lambda_N\left(\prod_{i=1}^{N} (a_i; b_i)\right) = \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i), \quad \forall a_i < b_i \in \mathbb{R} \quad i = \overline{1, \dots, N}$$

Măsură exterioară

Fie X o mulțime, o aplic $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0;\infty]$ s.n. măs ext dacă:

1) $\mu(\emptyset) = 0$;

2) dacă $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

3) dacă $(A_n) \subseteq \mathcal{P}(X) \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

(care-i dif (T.T))

$\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$

$\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0;\infty]$

① fixăm $L \subseteq X$. $\forall A \subseteq X$, $A = (A \cap L) \cup (A \cap L^c)$ da.

$\overset{3)}{\Rightarrow} \mu^*(A) \le \mu^*(A \cap L) + \mu^*(A \cap L^c)$? de $\le$?

Mulțime μ^*-măsurabilă

$L \subseteq X$, L este μ^*-măsurabilă dacă, $\forall A \subseteq X$

$$\boxed{\mu^*(A) = \mu^*(A \cap L) + \mu^*(A \cap L^c)}$$

$\mathcal{M}(\mu^*) = \{L \subseteq X \mid L - \mu^* \text{ măsurabilă}\}$

Teoremă Caratheodory

$\mathcal{M}(\mu^*)$ este σ-alg pe X și $\mu^* : \mathcal{M}(\mu^*) \to [0;\infty]$ este măsură

de ce tip? ext?

Dacă $L \subseteq X$ cu $\underbrace{\mu^*(L) = 0}_{L \text{ este } \mu^* \text{ neglijabilă}}$ atunci $\underbrace{L \in \mathcal{M}(\mu^*)}_{\text{e } \mu^* \text{ măsurabilă}}$

Dem: vrem $\mu^*(A) \ge \mu^*(A \cap L) + \mu^*(A \cap L^c)$

3) Dacă $L_1, L_2 \in \mathcal{M}(\mu^*)$ sunt μ^* măsurabile, arătăm că $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{M}(\mu^*)$

~~Vrem~~ Fixăm $A \subseteq X$, analizăm $\mu^*(A \cap (L_1 \cap L_2))$

⑤ $L_1 - \mu^*$ măs $\Rightarrow \mu^*(A \cap (L_1 \cap L_2)$

Clasă monotonă

Fie X o mulțime. O familie $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(X)$ s.n. clasă monotonă dacă:

(CM1) $\emptyset, X \in \mathcal{N}$

(CM2) dacă $A, B \in \mathcal{N}$ cu $A \subseteq B$, atunci $B \setminus A \in \mathcal{N}$

(CM3) dacă $(A_n)_n \subseteq \mathcal{N}$ cu $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ șir crescător

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{N}$$

(!) orice σ-alg e clasă monotonă

(!!) $A \in \mathcal{N} \Rightarrow A^c \in \mathcal{N}$, $A^c = X \setminus A$

(!!!) $\mathcal{N}$ e clasă monotonă a.î. $\forall A, B \in \mathcal{N}$ să avem că $A \cap B \in \mathcal{N}$ atunci $\mathcal{N}$ e σ-algebră (deci nu e mereu închisă la intersecție)

(IV) $\bigcap_{i \in J} \mathcal{N}_i = \{A \subseteq X,\ A \in \mathcal{N}_i,\ \forall i \in J\}$ e clasă monotonă

(V) $\mathcal{N}(\mathcal{F}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{N} \text{ c.m.} \\ \mathcal{N} \supseteq \mathcal{F}}} \mathcal{N}$ clasa monotonă generată de $\mathcal{F}$

(V!) în general, X, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$: $\sigma(\mathcal{F}) \supseteq \mathcal{N}(\mathcal{F})$

Lema clasei monotone | Fie X mulțime, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{F}$ ps. la $\cap$ finită ($A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$)

$$\Rightarrow \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{N}(\mathcal{F})$$

(nu prea am înțeles)

Teoremă de egalitate a două măsuri

Măsura Lesbegue pe $\mathbb{R}$