

Capitolul 1

Șiruri și serii numerice

1.1 Șiruri de numere reale

1.1.1 Breviar teoretic

Definiția 1.1.1 Formal, un *șir* de numere reale este o funcție $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ care asociază fiecărui număr natural n numărul real x_n , numit *termenul general* al șirului sau *termenul de rang n* al șirului. Notăția utilizată frecvent pentru un șir este $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sau $(x_n)_{n \geq 0}$.

În anumite situații, un șir de numere reale este considerat ca fiind o funcție cu valori reale definită pe mulțimea

$$\mathbb{N}_{n_0} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\},$$

unde $n_0 \in \mathbb{N}$ este un număr natural fixat, de exemplu, $x_n = \frac{1}{n(n-1)}$, pentru $n \geq 2$, caz în care șirul va fi notat $(x_n)_{n \geq n_0}$.

Orice șir de numere reale $(x_n)_{n \geq n_0}$ poate fi prelungit la un șir $(x_n)_{n \geq 0}$, de aceea, în prezentarea teoretică a rezultatelor din acest subcapitol, vom considera șiruri de forma $(x_n)_{n \geq 0}$. Pentru a nu complica notațiile, un șir va fi notat simplu (x_n) . Prin abuz de notație, de multe ori, este convenabil ca în loc de “șirul cu termenul general x_n ” să scriem “șirul x_n ”.

Definiția 1.1.2 Un șir de numere reale (x_n) se numește *șir mărginit* dacă există un număr real pozitiv $M > 0$ astfel încât

$$|x_n| \leq M, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

Un șir care nu este mărginit se numește *șir nemărginit*. Șirul (x_n) este nemărginit dacă și numai dacă pentru orice $M > 0$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n| > M$.

Remarca 1.1.1 Pentru ca un șir (x_n) să fie mărginit este suficient ca relația (1.1) să fie verificată începând de la un anumit rang n_0 , adică șirul (x_n) este mărginit dacă și numai dacă există $M > 0$ și $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_n| \leq M, \text{ pentru orice } n \geq n_0.$$

Exemplul 1.1.1 Șirul cu termenul general $x_n = \sin n$, $n \in \mathbb{N}$, este mărginit, căci $|\sin n| \leq 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pe de altă parte, șirul definit prin $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, este nemărginit, căci pentru orice $M > 0$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $n > M$, echivalent cu $|x_n| > M$.

Remarca 1.1.2 Șirul (x_n) este mărginit dacă și numai dacă există $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a \leq b$ astfel încât

$$a \leq x_n \leq b, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, \quad (1.2)$$

ceea ce este echivalent cu faptul că șirul (x_n) este atât *mărginit inferior* (există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_n \geq a$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$), cât și *mărginit superior* (există $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_n \leq b$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$).

Exemplul 1.1.2 Șirul cu termenul general $x_n = \{\sqrt{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a unui număr real x , este mărginit, căci $0 \leq x_n < 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pe de altă parte, șirul definit prin $x_n = [\sqrt{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x , este mărginit inferior, căci $x_n \geq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dar nu este mărginit superior. Într-adevăr, pentru orice $b \in \mathbb{R}$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{n} \geq b + 1$, de unde $x_n = [\sqrt{n}] > \sqrt{n} - 1 \geq b$.

Definiția 1.1.3 Spunem că un șir (x_n) este

- (*monoton*) *crescător* dacă $x_n \leq x_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- (*monoton*) *descrescător* dacă $x_n \geq x_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- *monoton* dacă (x_n) este fie crescător, fie descrescător;
- *strict crescător* dacă $x_n < x_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- *strict descrescător* dacă $x_n > x_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- *strict monoton* dacă (x_n) este fie strict crescător, fie strict descrescător.

Exemplul 1.1.3 Șirul cu termenul general $x_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, este strict crescător, căci

$$x_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > n^2 = x_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pe de altă parte, șirul definit prin $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$, nu este monoton, căci $x_1 = -1 < x_2 = \frac{1}{2} > x_3 = -\frac{1}{3}$.

Remarca 1.1.3 Pentru ca un șir (x_n) să fie crescător/descrescător este necesar ca toți termenii săi să fie în ordine crescătoare/descrescătoare. De exemplu, dacă un șir este strict crescător pentru un număr finit de termeni și apoi strict descrescător, nu rezultă că șirul dat este descrescător.

Definiția 1.1.4 Fie (x_n) un șir de numere reale și $(k_n) \subset \mathbb{N}$ un șir **strict crescător** de numere **naturale**, adică

$$0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_n < \dots \in \mathbb{N}.$$

Șirul (y_n) , definit prin $y_n = x_{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$, se numește *subșir* al șirului (x_n) .

Remarca 1.1.4 Dacă (x_{k_n}) este un subșir al șirului (x_n) , atunci

$$k_n \geq n, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Exemplul 1.1.4 Șirurile (x_{2n}) , (x_{2n+1}) sunt, de exemplu, două subșiruri ale șirului (x_n) . Pe de altă parte, șirul cu termenul general

$$y_n = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

nu este un subșir al șirului $x_n = \cos n$, căci $k_n = n\pi \notin \mathbb{N}$ pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

Definiția 1.1.5 Spunem că un șir de numere reale (x_n) are *limită finită* sau este *convergent* dacă există un număr real $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_n - x| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq n_0. \quad (1.3)$$

În cazul în care există, numărul real x din definiția precedentă este unic și se numește *limita* șirului (x_n) . Vom spune, în acest caz, că șirul (x_n) *converge la* x și vom nota $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ sau $x_n \rightarrow x$. Un șir care nu este convergent se numește *divergent*.

Remarca 1.1.5 Pentru a demonstra că un șir (x_n) converge la x este suficient să arătăm că relația (1.3) are loc pentru orice ε pozitiv, **suficient de mic**, adică este suficient să demonstrăm că dacă pentru orice $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, unde ε_0 este o constantă reală pozitivă, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_0$, atunci $x_n \rightarrow x$.

Exemplul 1.1.5 Șirul cu termenul general $x_n = \frac{n}{3n+5}$ converge la $\frac{1}{3}$.

Soluție. Folosind remarca precedentă, este suficient să considerăm $\varepsilon \in (0, \frac{5}{6}]$. Au loc următoarele echivalențe:

$$\left| x_n - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon \iff \frac{5}{3(3n+5)} < \varepsilon \iff n > \frac{5}{3} \left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1 \right).$$

Definim $n_0 = \left[\frac{5}{3} \left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1 \right) \right] + 1$. Cum $\varepsilon \in (0, \frac{5}{6}]$, rezultă că $\frac{5}{3} \left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1 \right) \geq -1$, ceea ce implică $n_0 \in \mathbb{N}$. Pe de altă parte, cum

$$[x] \leq x < [x] + 1,$$

pentru orice $n \geq n_0$ are loc $n > \frac{5}{3} \left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1 \right)$, de unde, pe baza echivalențelor de mai sus, obținem $|x_n - \frac{1}{3}| < \varepsilon$, adică ceea ce trebuia să demonstrăm. \square

Definiția 1.1.6 Spunem că un șir (x_n) are *limita* $+\infty$ și notăm $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ sau $x_n \rightarrow +\infty$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_0$.

În mod analog, un șir (x_n) are *limita* $-\infty$ și notăm $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ sau $x_n \rightarrow -\infty$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural $n = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n < -\varepsilon$, pentru orice $n \geq n_0$.

Spunem că un șir (x_n) are *limită* dacă (x_n) are limită finită (este convergent) sau (x_n) are limită infinită, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \{\pm\infty\}$.

Remarca 1.1.6 Un șir de numere reale (x_n) este divergent dacă fie are limită infinită, fie nu are limită.

Propoziția 1.1.1 Dacă șirul (x_n) are limită, atunci orice subșir al său are aceeași limită.

Remarca 1.1.7 Dacă un șir admite două subșiruri care au limite diferite, atunci șirul dat nu are limită, deci este divergent. De exemplu, șirul $x_n = (-1)^n$ nu are limită, căci $x_{2n} = 1 \rightarrow 1$ și $x_{2n+1} = -1 \rightarrow -1$.

Remarca 1.1.8 Atât limita unui șir, cât și convergența sa nu sunt influențate de un număr finit de termeni ai șirului respectiv. Cu alte cuvinte, dacă înlocuim sau eliminăm un număr finit de termeni ai unui șir, respectiv dacă adăugăm un număr finit de termeni șirului, atunci șirul astfel obținut are aceeași natură din punct de vedere al convergenței ca șirul inițial și aceeași limită, în cazul în care aceasta există.

Propoziția 1.1.2 Dacă un șir (x_n) are limită, atunci șirul modulelor termenilor săi, $(|x_n|)$, are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right|.$$

În particular, are loc:

$$x_n \rightarrow 0 \iff |x_n| \rightarrow 0.$$

Remarca 1.1.9 În general, reciproca propoziției de mai sus nu este adevărată. De exemplu, șirul $x_n = (-1)^n$ nu are limită, dar șirul modulelor termenilor săi este convergent, căci $|x_n| = 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Propoziția 1.1.3 (Operații cu șiruri convergente)

- Dacă (x_n) este un șir convergent și α este un număr real, atunci șirul (αx_n) este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

- Dacă șirurile (x_n) , (y_n) sunt convergente, atunci șirurile $(x_n + y_n)$, $(x_n y_n)$ sunt convergente și au loc relațiile:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

În plus, dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$, atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n} \right)$ este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

Propoziția 1.1.4 (Trecerea la limită în inegalități) Fie (x_n) și (y_n) două șiruri de numere reale care au limită.

- Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \leq y_n$ pentru orice $n \geq n_0$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

- Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n < y_n$ pentru orice $n \geq n_0$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Reciproc, dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$x_n < y_n, \text{ pentru orice } n \geq n_0.$$

Propoziția 1.1.5 Orice șir convergent este mărginit.

Remarca 1.1.10 Reciproca propoziției de mai sus nu este adevărată, deoarece există șiruri mărginite care nu sunt convergente. De exemplu, șirul definit prin

$$x_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

este mărginit, dar nu este convergent (nu are nici măcar limită).

Ne punem acum următoarea întrebare: *Ce proprietate suplimentară îi trebuie unui șir mărginit pentru a fi convergent?*

Răspunsul este dat în propoziția de mai jos:

Propoziția 1.1.6 Orice șir monoton și mărginit este convergent.

Într-adevăr, se poate arăta că dacă $(x_n)_{n \geq n_0}$ este un șir crescător și mărginit superior, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \geq n_0} x_n,$$

iar dacă $(x_n)_{n \geq n_0}$ este un șir descrescător și mărginit inferior, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \geq n_0} x_n.$$

Remarca 1.1.11 Există șiruri convergente care nu sunt monotone. De exemplu, șirul $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$, este convergent, căci $|x_n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, deci $x_n \rightarrow 0$, dar (x_n) nu este monoton.

Propoziția 1.1.7 *Orice șir monoton are limită.*

Propoziția 1.1.8 (Lema lui Newman) *Orice șir de numere reale conține un subșir monoton.*

Teorema 1.1.1 (Teorema Bolzano-Weierstrass) *Orice șir mărginit conține un subșir convergent.*

Definiția 1.1.7 Un punct $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se numește *punct limită* al unui șir (x_n) dacă există un subșir (x_{k_n}) al șirului (x_n) astfel încât $x_{k_n} \rightarrow x$. Mulțimea punctelor limită ale șirului (x_n) se notează cu $\mathcal{L}(x_n)$.

Remarca 1.1.12 Din lema lui Newman și Propoziția 1.1.7 rezultă că orice șir de numere reale conține un subșir care are limită, deci $\mathcal{L}(x_n)$ este o mulțime nevidă. Mai mult, dacă șirul (x_n) are limită, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, atunci $\mathcal{L}(x_n) = \{x\}$.

Definiția 1.1.8 *Limita inferioară* a unui șir (x_n) se definește ca fiind $\inf \mathcal{L}(x_n)$ și se notează cu $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$. În mod analog, *limita superioară* a șirului (x_n) este $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \mathcal{L}(x_n)$.

Remarca 1.1.13 Spre deosebire de limita unui șir, care s-ar putea să nu existe, atât limita inferioară, cât și cea superioară există tot timpul (de exemplu, limita inferioară a șirului $x_n = (-1)^n$ este -1 , iar cea superioară este 1).

Propoziția 1.1.9 *Un șir de numere reale (x_n) are limită dacă și numai dacă $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, caz în care*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Propoziția 1.1.10 (Criteriul cleștelui) Fie (x_n) un șir de numere reale. Dacă există două șiruri $(a_n)_{n \geq n_0}$ și $(b_n)_{n \geq n_0}$ care au aceeași limită,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x,$$

astfel încât

$$a_n \leq x_n \leq b_n, \text{ pentru } n \geq n_0,$$

atunci șirul (x_n) are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Propoziția 1.1.11 (Criteriul majorării) Fie (x_n) un șir de numere reale.

- (1) Dacă există un număr real $x \in \mathbb{R}$ și există un șir de numere reale nenegative $(y_n)_{n \geq n_0} \subset \mathbb{R}_+$ cu $y_n \rightarrow 0$ astfel încât

$$|x_n - x| \leq y_n, \text{ pentru } n \geq n_0,$$

atunci $x_n \rightarrow x$.

- (2) Dacă există un șir $(y_n)_{n \geq n_0}$ cu $y_n \rightarrow -\infty$ astfel încât

$$x_n \leq y_n, \text{ pentru } n \geq n_0,$$

atunci $x_n \rightarrow -\infty$.

- (3) Dacă există un șir $(y_n)_{n \geq n_0}$ cu $y_n \rightarrow +\infty$ astfel încât

$$x_n \geq y_n, \text{ pentru } n \geq n_0,$$

atunci $x_n \rightarrow +\infty$.

Propoziția 1.1.12 (Criteriul raportului) Fie (x_n) un șir de numere reale pozitive astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0, \infty].$$

- a) Dacă $l < 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
b) Dacă $l > 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Dacă limita l din enunțul criteriului raportului este 1, atunci limita șirului (x_n) nu poate fi calculată cu ajutorul acestui criteriu, caz în care vom încerca să determinăm limita șirului (x_n) folosind criteriul raportului generalizat.

Propoziția 1.1.13 (Criteriul raportului generalizat) Fie (x_n) un șir de numere reale pozitive astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^n \right] = l \in [0, \infty].$$

- a) Dacă $l < 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
- b) Dacă $l > 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Propoziția 1.1.14 (Lema Stolz-Cesàro) Fie $x_n = \frac{a_n}{b_n}$ cu $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ și $b_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dacă:

- (b_n) este un șir strict monoton,
- $b_n \rightarrow +\infty$ sau $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$,
- există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Propoziția 1.1.15 (Criteriul rădăcinii) Fie (x_n) un șir de numere reale pozitive. Dacă există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = x \in [0, \infty],$$

atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = x.$$

Propoziția 1.1.16 Pentru orice număr real $x \in \mathbb{R}$ există un șir $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ și un șir $(y_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel ca $x_n \rightarrow x$ și $y_n \rightarrow x$.

Definiția 1.1.9 Un șir (x_n) se numește *șir Cauchy* sau *șir fundamental* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \text{ pentru orice } m, n \geq n_0.$$

Conceptul de șir Cauchy înseamnă, de fapt, că începând de la un moment dat diferența dintre oricare doi termeni ai șirului poate să fie oricât de mică.

Remarca 1.1.14 Un șir (x_n) este un șir Cauchy dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq n_0 \text{ și } p \in \mathbb{N}^*.$$

Propoziția 1.1.17 Dacă există un șir $(a_n)_{n \geq n_0}$ de numere reale nenegative cu $a_n \rightarrow 0$ astfel încât

$$|x_{n+p} - x_n| \leq a_n, \text{ pentru orice } n \geq n_0 \text{ și } p \in \mathbb{N}^*,$$

atunci (x_n) este un șir Cauchy.

Propoziția 1.1.18 Orice șir Cauchy este mărginit.

Teorema 1.1.2 (Criteriul general de convergență al lui Cauchy) Un șir de numere reale (x_n) este convergent dacă și numai dacă (x_n) este șir Cauchy.

Demonstrație. Presupunem mai întâi că (x_n) este un șir convergent, adică există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_n \rightarrow x$. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \varepsilon/2$, pentru orice $n \geq n_0$. Pentru $m, n \geq n_0$ are loc

$$|x_m - x_n| = |x_m - x + x - x_n| \leq |x_m - x| + |x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ceea ce arată că (x_n) este un șir Cauchy.

Reciproc, dacă presupunem că (x_n) este un șir Cauchy, din Propoziția 1.1.18 rezultă că (x_n) este un șir mărginit. Aplicând teorema Bolzano-Weierstrass, se

obține că șirul (x_n) conține un subșir convergent, de exemplu, presupunem că $x_{k_n} \rightarrow x \in \mathbb{R}$. Fie $\varepsilon > 0$. Cum (x_n) este un șir Cauchy, rezultă că există $n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_m - x_n| < \varepsilon/2, \text{ pentru orice } m, n \geq n_1. \quad (1.4)$$

Pe de altă parte, din $x_{k_n} \rightarrow x$, există $n_2 = n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_{k_n} - x| < \varepsilon/2, \text{ pentru orice } n \geq n_2. \quad (1.5)$$

Definim $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ și considerăm $n \geq n_0$. Ținând cont de faptul că dacă $n \geq n_0$, atunci $k_n \geq n \geq n_0$, și, aplicând inegalitățile (1.4) și (1.5), are loc

$$|x_n - x| = |x_n - x_{k_n} + x_{k_n} - x| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ceea ce implică $x_n \rightarrow x$, deci (x_n) este un șir convergent. □

În cele ce urmează, vom reaminti câteva limite de șiruri pe care le vom utiliza frecvent în studiul convergenței unor serii:

(1)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot n^p + a_{p-1} \cdot n^{p-1} + \dots + a_0}{b \cdot n^q + b_{q-1} \cdot n^{q-1} + \dots + b_0} \\ &= \begin{cases} \frac{a}{b} & , \text{ dacă } p = q \\ 0 & , \text{ dacă } p < q \\ \text{sign}\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \infty & , \text{ dacă } p > q \end{cases} \end{aligned}$$

unde P și Q sunt polinoame cu coeficienți reali, de grad p , respectiv q .

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} \text{nu există} & , \text{ dacă } a \leq -1 \\ 0 & , \text{ dacă } a \in (-1, 1) \\ 1 & , \text{ dacă } a = 1 \\ +\infty & , \text{ dacă } a > 1 \end{cases}$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } \alpha < 0 \\ 1 & , \text{ dacă } \alpha = 0 \\ +\infty & , \text{ dacă } \alpha > 0 \end{cases}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Mai mult, au loc dubla inegalitate:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \text{ pentru } n \in \mathbb{N}^*.$$

(6) Dacă (a_n) este un șir de numere reale nenule astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

(7) Dacă $(x_n) \subset \mathbb{R}^*$ este un șir de numere reale nenule astfel încât $x_n \rightarrow 0$, atunci:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin x_n}{x_n} = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n} = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x_n)}{x_n} = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \ln a, \quad a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + x_n)^r - 1}{x_n} = r, \quad r \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e.$

Următoarele identități vor fi utile în studiul convergenței unor serii:

$$\cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \text{ dacă } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \text{ dacă } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

1.1.2 Probleme rezolvate

Exercițiul 1 Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{n^2 + 2n} \right\} = 1$, unde $\{x\}$ notează partea fracționară a numărului real x .

Soluție. Reamintim că $\{x\} = x - [x]$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x . Cum $n^2 \leq n^2 + 2n < (n+1)^2$, rezultă $n \leq \sqrt{n^2 + 2n} < n+1$, deci $[\sqrt{n^2 + 2n}] = n$. Atunci

$$\left\{ \sqrt{n^2 + 2n} \right\} = \sqrt{n^2 + 2n} - n = \frac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} \rightarrow 1.$$

□

Exercițiul 2 Să se arate că șirul

$$x_n = \sin n, \quad n \in \mathbb{N},$$

nu are limită.

Soluție. Presupunem că (x_n) are limită. Cum $\sin n \in [-1, 1]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă că există $x \in [-1, 1]$ astfel încât $x_n \rightarrow x$. Atunci

$$\cos(2n) = 1 - 2\sin^2 n \rightarrow 1 - 2x^2.$$

Făcând $n \rightarrow \infty$ în relația $\sin(4n) = 2\sin(2n)\cos(2n)$, obținem

$$x = 2x(1 - 2x^2) \iff x(1 - 4x^2) = 0 \iff x = 0 \text{ sau } x^2 = \frac{1}{4}.$$

Din identitatea $\sin^2(2n) + \cos^2(2n) = 1$ rezultă $x^2 + (1 - 2x^2)^2 = 1$. Dacă $x^2 = \frac{1}{4}$, se obține o contradicție, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$, deci $x = 0$. În acest caz, $\cos(2n) \rightarrow 1$. Atunci

$$\begin{aligned} \sin(2n+2) - \sin(2n) &= 2\sin 1 \cos(2n+1) \\ &= 2\sin 1 [\cos(2n)\cos 1 - \sin(2n)\sin 1] \rightarrow 2\sin 1 \cos 1, \end{aligned}$$

ceea ce este fals, căci $\sin(2n+2) - \sin(2n) \rightarrow 0 \neq 2\sin 1 \cos 1$. Rezultă astfel că șirul (x_n) nu are limită, deci este divergent.

□

Exercițiul 3 Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Soluție. Deoarece $|\sin n| \leq 1$, avem

$$\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

de unde, aplicând criteriul majorării, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$. □

Exercițiul 4 Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

Soluție. Cum

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \text{ pentru } k = 1, 2, \dots, n,$$

rezultă

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Ținând cont de faptul că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$ și folosind criteriul cleștelui obținem limita cerută. □

Exercițiul 5 Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, unde

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Soluție. *Metoda 1.* Cum

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} > 0, \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

rezultă că (x_n) este un șir strict crescător, iar din Propoziția 1.1.7 se obține că (x_n) are limită, pe care o notăm cu x . Cum $x_n \geq 1$ pentru orice $n \geq 1$, rezultă

că $x \in [1, \infty]$. Presupunem că x este un număr real, adică presupunem că (x_n) are limită finită. Cum (x_{2n}) este un subșir al șirului (x_n) , rezultă $x_{2n} \rightarrow x$, ceea ce implică

$$x_{2n} - x_n \rightarrow x - x = 0. \quad (1.6)$$

Pe de altă parte,

$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{\text{de } n \text{ ori}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

ceea ce contrazice relația (1.6). Am demonstrat că presupunerea făcută este falsă, deci $x = +\infty$.

Metoda 2. Fie $m = m(n) \in \mathbb{N}$ cel mai mare număr natural astfel încât $2^m \leq n$. Atunci

$$\begin{aligned} x_n &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2 \text{ termeni}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{2^2 \text{ termeni}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}}_{2^{m-1} \text{ termeni}} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2^2}{8} + \cdots + \frac{2^{m-1}}{2^m} \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{\text{de } m \text{ ori}} = 1 + \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Este evident că dacă $n \rightarrow \infty$, atunci $m = m(n) \rightarrow \infty$ și, deci, $1 + \frac{m}{2} \rightarrow \infty$ dacă $n \rightarrow \infty$. Din Propoziția 1.1.11 (3) și inegalitatea precedentă rezultă $x_n \rightarrow +\infty$. \square

Exercițiul 6 Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a > 0.$$

Soluție. Fie $x_n = \frac{a^n}{n!} > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Calculăm

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0 < 1.$$

Din criteriul raportului rezultă că $x_n \rightarrow 0$. \square

Exercițiul 7 Să se arate că

$$x_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \rightarrow 0.$$

Soluție. Reamintim mai întâi că $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$, respectiv $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)$.

Metoda 1. Calculăm

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)(2n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} = \frac{2n+1}{2n+2} \rightarrow 1,$$

deci nu putem determina limita șirului (x_n) folosind criteriul raportului. Are loc

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n &= \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right)^n \\ &= \left[\left(1 + \frac{1}{-(2n+2)}\right)^{-(2n+2)}\right]^{\frac{n}{-(2n+2)}} \rightarrow e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1. \end{aligned}$$

Din criteriul raportului generalizat rezultă că $x_n \rightarrow 0$.

Metoda 2. Se observă că

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \dots, \frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}, \text{ deci } x_n < \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n-2) \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)}.$$

Cum $x_n > 0$, înmulțind inegalitatea precedentă cu x_n , se obține

$$0 < x_n^2 < \frac{1}{2n+1}.$$

Din criteriul cleștelui rezultă că $x_n^2 \rightarrow 0$, ceea ce este echivalent cu $x_n \rightarrow 0$. □

Exercițiul 8 Să se determine limita șirului

$$x_n = \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}, \text{ unde } p \in \mathbb{N}.$$

Soluție. Pentru $p \in \mathbb{N}$ fixat, considerăm șirurile

$$a_n = 1^p + 2^p + \cdots + n^p \text{ și } b_n = n^{p+1}.$$

Șirul (b_n) este strict crescător cu $b_n \rightarrow \infty$. Folosind binomul lui Newton, se obține

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} \\ &= \frac{C_p^0 n^p + C_p^1 n^{p-1} + \dots + C_p^p n^0}{C_{p+1}^0 n^{p+1} + C_{p+1}^1 n^p + \dots + C_{p+1}^{p+1} n^0 - n^{p+1}} \\ &= \frac{n^p + p n^{p-1} + \dots + 1}{n^{p+1} + (p+1)n^p + \dots + 1 - n^{p+1}} \\ &= \frac{n^p + p n^{p-1} + \dots + 1}{(p+1)n^p + \frac{p(p+1)}{2} n^{p-1} + \dots + 1} \rightarrow \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

Din lema Stolz-Cesàro rezultă că $x_n = \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{1}{p+1}$.

□

Exercițiul 9 Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Soluție. Are loc $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$. Considerând $x_n = \frac{n!}{n^n}$, avem

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e}.$$

Din criteriul rădăcinii se obține astfel că $\sqrt[n]{x_n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \rightarrow \frac{1}{e}$.

□

Exercițiul 10 Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = 1.$$

Soluție. Folosind exercițiul precedent, se obține

$$\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1} \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{n+1}{n} \rightarrow \frac{1}{e} \cdot e \cdot 1 = 1.$$

□

Exercițiul 11 (Șirul lui Lalescu) Să se arate că șirul

$$L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}, \quad n \geq 2,$$

converge la $\frac{1}{e}$.

Această problemă a fost propusă de Traian Lalescu în Gazeta Matematică, Nr. 6 (1901) (problema 549). Demonstrația dată de Lalescu în G.M. 7 (1902) a fost greșită, acesta utilizând reciproca lemei Stolz-Cesàro, care, în general, nu este adevărată.

Soluție. Succesiv, se obține

$$\begin{aligned} L_n &= \sqrt[n]{n!} \left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} - 1 \right) = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} - 1 \right) n \\ &= \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \cdot \frac{e^{\ln \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}} - 1}{\ln \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} \right)^n \rightarrow \frac{1}{e} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Într-adevăr, primul șir din produsul de mai sus are limita $\frac{1}{e}$ (vezi Exercițiul 9). Al doilea șir converge la 1, căci $\frac{e^{x_n}-1}{x_n} \rightarrow 1$, dacă $x_n \rightarrow 0$. În cazul nostru,

$$x_n = \ln \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0,$$

deoarece $\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 1$ (vezi Exercițiul 10). Rămâne să calculăm limita celui de-al treilea șir din produs. Are loc

$$\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} \right)^n = \left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n+1}} (n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \right)^n = \left(\frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{(n!)^{\frac{1}{n(n+1)}}} \right)^n = \sqrt[n+1]{\frac{(n+1)^n}{n!}}.$$

Considerând $a_n = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$, avem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow e.$$

Din criteriul rădăcinii se obține astfel că $\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} \right)^n \rightarrow e$, ceea ce implică

$$\ln \left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} \right)^n \rightarrow 1.$$

□

Exercițiul 12 (Constanta Euler-Mascheroni) Să se arate că șirul al cărui termen general este

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad n \geq 2,$$

este convergent.

Limita șirului (γ_n) se notează cu γ și se numește constanta Euler-Mascheroni (aceasta a apărut pentru prima dată într-un articol din 1735 al matematicianului Leonhard Euler, fiind folosită mai apoi, în 1790, de către matematicianul italian Lorenzo Mascheroni). Notăția γ pentru această constantă nu apare în notele lui Euler sau ale lui Mascheroni, fiind folosită mai târziu datorită conexiunii acesteia cu funcția gamma. Din demonstrația pe care o vom da mai jos va rezulta că $\gamma \in [0, 1)$ (nu s-a demonstrat până acum dacă γ este un număr algebric sau transcendent, de fapt nu se știe nici măcar dacă această constantă este un număr irațional).

Soluție. Logaritmând relația $(1 + \frac{1}{k})^k < e < (1 + \frac{1}{k})^{k+1}$, se obține

$$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (1.7)$$

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Considerând $k = 1, 2, \dots, n-1$ în relația (1.7) și însumând după k , are loc

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1},$$

de unde rezultă

$$\gamma_n < 1, \text{ respectiv } \gamma_n > \frac{1}{n} > 0,$$

deci (γ_n) este un șir mărginit. Vom demonstra în cele ce urmează că acest șir este strict descrescător. Într-adevăr, avem

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0.$$

Ultima inegalitate rezultă din relația $e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$. Am obținut astfel că (γ_n) este un șir monoton și mărginit, deci convergent.

□

Exercițiul 13 Să se arate că șirul

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1,$$

este convergent.

Soluție. *Metoda 1.* Are loc $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, pentru orice $n \geq 1$, deci (x_n) este un șir strict crescător. Prin inducție matematică vom demonstra că

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \quad (1.8)$$

pentru orice $n \geq 1$. Într-adevăr, este evident că inegalitatea de mai sus este adevărată pentru $n = 1$. Presupunem acum că (1.8) are loc pentru $k \in \mathbb{N}^*$ fixat, adică

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{k}.$$

Atunci

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} = 2 - \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)^2} \right].$$

Cum $\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)^2} \geq \frac{1}{k+1}$, avem

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1}.$$

Folosind metoda inducției matematice, deducem că relația (1.8) este adevărată pentru orice $n \geq 1$, ceea ce implică $x_n < 2$, pentru $n \geq 1$, deci (x_n) este un șir mărginit superior. Din Propoziția 1.1.6 rezultă că (x_n) este convergent.

Metoda 2. Fie $n, p \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\ &\leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Cum $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, din Propoziția 1.1.17 rezultă că (x_n) este un șir Cauchy, iar din Teorema 1.1.2 se obține că (x_n) este un șir convergent.

□

Remarca 1.1.15 Se poate arăta că șirul definit mai sus converge la $\frac{\pi^2}{6}$, adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercițiul 14 Să se arate că șirul

$$x_n = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin(2x)}{2^2} + \cdots + \frac{\sin(nx)}{2^n}, \quad n \geq 1,$$

este convergent pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Soluție. Fie $x \in \mathbb{R}$. Pentru orice $n, p \in \mathbb{N}^*$ are loc:

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \\ &\leq \frac{|\sin(n+1)x|}{2^{n+1}} + \frac{|\sin(n+2)x|}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{|\sin(n+p)x|}{2^{n+p}} \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p} \right) \leq \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Cum $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$, rezultă că (x_n) este un șir Cauchy, deci convergent.

□

1.1.3 Probleme propuse

Exercițiul 1 Să se calculeze limita șirului

$$x_n = \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercițiul 2 Să se determine parametrul real p astfel încât șirul

$$x_n = n^p \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1} \right), \quad n \geq 1,$$

să fie convergent și apoi să se calculeze limita sa.

Exercițiul 3 Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Indicație: Se poate utiliza, eventual, lemma Stolz-Cesàro.

Exercițiul 4 Să se determine limita următoarelor șiruri:

$$\text{a) } x_n = \frac{n \cos(n\pi x)}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}, x \in \mathbb{R} \quad \text{b) } x_n = \frac{[nx]}{n}, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{c) } x_n = \frac{n^{n+1}}{(n!)^2} \quad \text{d) } x_n = \frac{(2n)^n}{(2n)!}$$

$$\text{e) } x_n = \sqrt[n]{5^n + 6^n} \quad \text{f) } x_n = \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}{n^n}}$$

$$\text{g) } x_n = \left(1 + \frac{\sqrt[n]{n^{2n+1}}}{n!}\right)^{\frac{n!}{e^n}} \quad \text{h) } x_n = n^2 (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}), a > 0$$

$$\text{i) } x_n = \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + 3n + 4}) \quad \text{j) } x_n = \sqrt{n} \arcsin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Exercițiul 5 Folosind *criteriul cleștelui* sau *criteriul majorării*, să se determine limita următoarelor șiruri:

$$\text{a) } x_n = \frac{\cos 1}{n^2 + 1} + \frac{\cos 2}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{\cos n}{n^2 + n}, n \in \mathbb{N}^*;$$

$$\text{b) } x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}, n \in \mathbb{N}^*;$$

$$\text{c) } x_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+n}} \right), n \geq 2;$$

$$\text{d) } x_n = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n^2+1)} + \frac{\ln(n+2)}{\ln(n^2+2)} + \cdots + \frac{\ln(n+n)}{\ln(n^2+n)}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Indicație: d) Se folosește inegalitatea

$$(n+k)^2 \geq n^2 + k, \text{ pentru } k = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercițiul 6 Folosind *lema Stolz-Cesàro*, să se determine limita următoarelor

șiruri:

$$\text{a) } x_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n}, \quad n \geq 2;$$

$$\text{b) } x_n = \frac{2 \sin 1 + 2^2 \sin 2 + \cdots + 2^n \sin n}{1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n}, \quad n \geq 1.$$

Exercițiul 7 Utilizând *constanta Euler-Mascheroni*, să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

Exercițiul 8 Să se studieze convergența șirului

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}, \quad n \geq 1.$$

Indicație: Se demonstrează că șirul (x_n) este strict descrescător și mărginit cu $x_n \in (-2, -1)$ pentru $n \geq 2$. Se ține cont de relația

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Exercițiul 9 Folosind *criteriul general de convergență al lui Cauchy*, să se arate că șirul

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

este convergent pentru orice $p \geq 2$.

Exercițiul 10 Folosind *criteriul general de convergență al lui Cauchy*, să se arate că șirul

$$E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

este convergent.

Indicație: Se folosește inegalitatea

$$n! \geq 2^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 4.$$

Observație: Se poate arăta că șirul (E_n) converge la e .

1.2 Serii de numere reale

1.2.1 Breviar teoretic

Conceptul de serie a fost introdus pentru a da sens sumelor cu o infinitate de termeni. Oricărui șir $(x_n)_{n \geq n_0}$ i se poate asocia un șir $(S_n)_{n \geq n_0}$, definit prin

$$S_n = x_{n_0} + x_{n_0+1} + \cdots + x_n, \quad n \geq n_0.$$

Perechea de șiruri $((x_n), (S_n))$ se numește *serie* de numere reale cu termenul general x_n și se notează prin $\sum_{n \geq n_0} x_n$. Șirul $(S_n)_{n \geq n_0}$ se numește *șirul sumelor parțiale* asociat seriei $\sum_{n \geq n_0} x_n$. În cazul în care nu contează alegerea lui n_0 , o serie va fi notată simplu prin $\sum_n x_n$.

Definiția 1.2.1 O serie $\sum_n x_n$ se spune *convergentă* dacă șirul sumelor parțiale (S_n) este convergent, adică dacă există un număr real $S \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Dacă o serie nu este convergentă, atunci ea se numește *divergentă*.

În cazul în care există, limita șirului $(S_n)_{n \geq n_0}$ se numește *suma seriei* $\sum_{n \geq n_0} x_n$ și se notează cu $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$.

Remarca 1.2.1 Dacă schimbăm ordinea unui număr finit de termeni ai unei serii sau dacă adăugăm/înlăturăm un număr finit de termeni, aceasta își păstrează natura (dacă este convergentă, rămâne convergentă, iar dacă este divergentă, rămâne divergentă), adică un număr finit de termeni nu influențează convergența unei serii.

Exemplul 1.2.1 (Seria geometrică) Fie r un număr real fixat. Seria

$$\sum_{n \geq 0} r^n$$

este convergentă dacă și numai dacă $r \in (-1, 1)$. În caz de convergență, suma seriei este

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}. \quad (1.9)$$

Numărul r se numește *rația* seriei geometrice.

Soluție. Dacă $r = 1$, atunci

$$S_n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\text{de } n+1 \text{ ori}} = n + 1 \rightarrow +\infty,$$

iar dacă $r \neq 1$, atunci

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$$

este suma unei progresii geometrice de rație r , deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \begin{cases} \text{nu există} & , \text{dacă } r \leq -1 \\ \frac{1}{1 - r} & , \text{dacă } r \in (-1, 1) \\ +\infty & , \text{dacă } r > 1 \end{cases}.$$

Singura situație în care șirul (S_n) este convergent este cea în care $r \in (-1, 1)$, caz în care $S_n \rightarrow \frac{1}{1 - r}$, ceea ce trebuia să arătăm. □

Propoziția 1.2.1 Dacă seria $\sum_n x_n$ este convergentă, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Demonstrație. Dacă presupunem că seria $\sum_n x_n$ este convergentă, atunci șirul sumelor parțiale (S_n) este convergent. Notăm cu $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, S fiind un număr real. Avem

$$x_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0,$$

ceea ce încheie demonstrația. □

O consecință imediată, dar importantă a propoziției precedente este:

Propoziția 1.2.2 (Criteriul de divergență) Dacă șirul (x_n) are limită nenulă sau nu are limită, ceea ce vom nota prin $x_n \nrightarrow 0$, atunci seria $\sum_n x_n$ este divergentă.

Remarca 1.2.2 Reciproca Propoziției 1.2.1 nu este adevărată, adică dacă șirul (x_n) are limita zero, nu rezultă că seria $\sum_n x_n$ este convergentă, ceea ce se poate observa din exemplul următor.

Exemplul 1.2.2 (Seria armonică) Seria

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$

nu este convergentă, cu toate că șirul $x_n = \frac{1}{n}$ converge la zero.

Soluție. Dacă presupunem că seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ este convergentă, atunci șirul sumelor parțiale asociat, (S_n) , este convergent, adică există $S \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_n \rightarrow S$. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S,$$

de unde rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) = 0$. Pe de altă parte, avem

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{\text{de } n \text{ ori}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

ceea ce este fals, căci $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) = 0$. Presupunerea făcută fiind falsă, rezultă că seria armonică nu este convergentă. □

Aplicând criteriul general de convergență al lui Cauchy șirului sumelor parțiale asociat unei serii, se poate deduce următorul criteriu de convergență a unei serii:

Teorema 1.2.1 (Criteriul de convergență al lui Cauchy) O serie $\sum_{n \geq n_0} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural $N = N(\varepsilon) \geq n_0$ astfel încât

$$|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq N \text{ și orice } p \in \mathbb{N}^*. \quad (1.10)$$

Definiția 1.2.2 O serie $\sum_n x_n$ se numește *absolut convergentă* dacă seria $\sum_n |x_n|$ este convergentă.

Propoziția 1.2.3 Orice serie absolut convergentă este convergentă.

Demonstrație. Presupunem că seria $\sum_{n \geq n_0} x_n$ este absolut convergentă, adică seria $\sum_{n \geq n_0} |x_n|$ este convergentă. Din criteriul de convergență al lui Cauchy rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon) \geq n_0$ astfel încât

$$||x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p}|| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq N \text{ și } p \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci

$$|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p}| = ||x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p}|| < \varepsilon,$$

pentru orice $n \geq N$ și $p \in \mathbb{N}^*$. Folosind din nou criteriul de convergență al lui Cauchy rezultă că seria $\sum_{n \geq n_0} x_n$ este convergentă. □

Reciproca propoziției anterioare nu este adevărată, după cum va rezulta din Exemplul 1.2.4. O serie convergentă care nu este absolut convergentă se numește serie *semiconvergentă*.

Criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi

Remarca 1.2.3 Dacă (x_n) este un șir de numere reale nenegative, adică $x_n \geq 0$, atunci șirul sumelor parțiale (S_n) asociat seriei $\sum_n x_n$ este crescător, deci $\sum_n x_n$ este convergentă dacă și numai dacă șirul (S_n) este mărginit superior.

Din remarca precedentă se poate trage concluzia că o serie $\sum_n x_n$ pentru care $x_n \geq 0$ (în literatura de specialitate o astfel de serie se numește *serie cu termeni pozitivi*) are întotdeauna o sumă, care este fie finită, dacă (S_n) este mărginit superior, fie este egală cu $+\infty$, dacă (S_n) este nemărginit superior.

Teorema 1.2.2 (Criteriul comparației) Considerăm (x_n) și (y_n) două șiruri de numere reale nenegative cu proprietatea că există $c > 0$ și $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$x_n \leq c y_n, \text{ pentru orice } n \geq n_0.$$

- a) Dacă seria $\sum_n y_n$ este convergentă, atunci $\sum_n x_n$ este convergentă.
- b) Dacă seria $\sum_n x_n$ este divergentă, atunci $\sum_n y_n$ este divergentă.

Demonstrație. Pentru a nu complica notațiile, vom presupune, dacă nu se precizează explicit, că seriile ce intervin în demonstrație sunt de forma $\sum_{n \geq 0} u_n$.

a) Presupunem că seria $\sum_n y_n$ este convergentă. Din criteriul de convergență al lui Cauchy rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|y_{n+1} + \cdots + y_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{c}, \text{ pentru orice } n \geq N_0, p \in \mathbb{N}^*.$$

Fie $\varepsilon > 0$ și $N = \max\{n_0, N_0\}$. Cum $x_n, y_n \geq 0$, avem

$$\begin{aligned} |x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}| &= x_{n+1} + \cdots + x_{n+p} \\ &\leq c(y_{n+1} + \cdots + y_{n+p}) \\ &= c|y_{n+1} + \cdots + y_{n+p}| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

pentru orice $n \geq N$ și $p \in \mathbb{N}^*$. Aplicând din nou criteriul de convergență al lui Cauchy, rezultă că seria $\sum_n x_n$ este convergentă.

b) Presupunem că seria $\sum_n x_n$ nu este convergentă, de unde rezultă că șirul sumelor parțiale asociat este nemărginit superior, adică

$$S_n^x = x_0 + x_1 + \cdots + x_n \rightarrow +\infty.$$

Fie

$$S_n^y = y_{n_0} + y_{n_0+1} + \cdots + y_n.$$

Atunci

$$S_n^y \geq \frac{1}{c}(x_{n_0} + x_{n_0+1} + \cdots + x_n) = \frac{1}{c}(S_n^x - S_{n_0-1}^x) \rightarrow +\infty,$$

ceea ce implică faptul că $\sum_{n \geq n_0} y_n$ nu este convergentă, deci nici seria $\sum_{n \geq 0} y_n$ nu este convergentă. □

Fără a restrânge generalizarea, constanta c din enunțul criteriului comparației poate fi luată $c = 1$.

Remarcăm faptul că pentru a demonstra convergența/divergența unei serii folosind criteriul comparației este nevoie să ne dăm seama, în prealabil, de natura seriei studiate. Astfel, pentru a demonstra că seria $\sum_n x_n$ este convergentă trebuie

să găsim un șir (y_n) cu $x_n \leq y_n$ și seria $\sum_n y_n$ să fie convergentă, în timp ce pentru a arăta că seria $\sum_n x_n$ este divergentă trebuie să determinăm un șir (y_n) cu $x_n \geq y_n$ și seria $\sum_n y_n$ să fie divergentă.

Teorema 1.2.3 (Criteriul comparației: forma la limită) Considerăm (x_n) și (y_n) două șiruri de numere reale pozitive cu proprietatea că există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in [0, \infty].$$

- a) Dacă $l \in (0, \infty)$, atunci $\sum_n x_n$ este convergentă dacă și numai dacă $\sum_n y_n$ este convergentă, adică cele două serii au aceeași natură și notăm $\sum_n x_n \sim \sum_n y_n$.
- b) Dacă $l = 0$ și $\sum_n y_n$ este convergentă, atunci $\sum_n x_n$ este convergentă.
- c) Dacă $l = \infty$ și $\sum_n y_n$ este divergentă, atunci $\sum_n x_n$ este divergentă.

Teorema 1.2.4 (Criteriul raportului al lui D'Alembert) Fie (x_n) un șir de numere reale pozitive astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0, \infty].$$

- a) Dacă $l < 1$, atunci $\sum_n x_n$ este convergentă.
- b) Dacă $l > 1$, atunci $\sum_n x_n$ este divergentă.

Dacă șirul $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ are limita 1, atunci nu putem trage nici o concluzie asupra convergenței seriei $\sum_n x_n$ folosind criteriul raportului.

Teorema 1.2.5 (Criteriul Raabe-Duhamel) Fie (x_n) un șir de numere reale pozitive astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

- a) Dacă $l < 1$, atunci $\sum_n x_n$ este divergentă.
- b) Dacă $l > 1$, atunci $\sum_n x_n$ este convergentă.

Criteriul Raabe-Duhamel este mai puternic decât criteriul raportului, acesta aplicându-se de obicei când limita șirului $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ este 1.

Teorema 1.2.6 (Criteriul rădăcinii) Fie (x_n) un șir de numere reale nenegative astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in [0, \infty].$$

- a) Dacă $l < 1$, atunci $\sum_n x_n$ este convergentă.
- b) Dacă $l > 1$, atunci $\sum_n x_n$ este divergentă.

Teorema 1.2.7 (Criteriul de condensare al lui Cauchy) Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir descrescător de numere reale nenegative. Atunci seriile $\sum_{n \geq 1} x_n$ și $\sum_{n \geq 0} 2^n x_{2^n}$ au aceeași natură, adică seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă seria $\sum_{n \geq 0} 2^n x_{2^n}$ este convergentă.

O aplicație importantă a criteriului de condensare al lui Cauchy este:

Exemplul 1.2.3 (Seria armonică generalizată) Fie $p \in \mathbb{R}$. Seria numerică

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$$

este convergentă dacă și numai dacă $p > 1$.

Soluție. Dacă $p \leq 0$, atunci $x_n \not\rightarrow 0$, iar din criteriul de divergență rezultă că seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$ este divergentă. Dacă $p > 0$, atunci șirul $x_n = \frac{1}{n^p} > 0$ este descrescător. Din criteriul de condensare al lui Cauchy rezultă că seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă seria $\sum_{n \geq 0} 2^n x_{2^n}$ este convergentă. Calculăm

$$\sum_{n \geq 0} 2^n x_{2^n} = \sum_{n \geq 0} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^n,$$

care este seria geometrică de rație $r = \frac{1}{2^{p-1}}$. Aceasta este convergentă dacă și numai dacă $r \in (-1, 1)$, ceea ce este echivalent cu $p > 1$.

□

Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare

Teorema 1.2.8 (Criteriul raportului) Fie (x_n) un șir de numere reale nenule astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = l \in [0, \infty].$$

- a) Dacă $l < 1$, atunci $\sum_n x_n$ este absolut convergentă.
- b) Dacă $l > 1$, atunci $\sum_n x_n$ este divergentă.

Teorema 1.2.9 (Criteriul rădăcinii) Fie (x_n) un șir de numere reale cu proprietatea că există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = l \in [0, \infty].$$

- a) Dacă $l < 1$, atunci $\sum_n x_n$ este absolut convergentă.
- b) Dacă $l > 1$, atunci $\sum_n x_n$ este divergentă.

Teorema 1.2.10 (Criteriul lui Dirichlet) Considerăm o serie de forma $\sum_n \alpha_n u_n$. Dacă:

- (α_n) este un șir descrescător de numere reale nenegative,
- $\alpha_n \rightarrow 0$,
- (u_n) este un șir de numere reale cu proprietatea că șirul sumelor parțiale asociat seriei $\sum_n u_n$ este mărginit,

atunci seria $\sum_n \alpha_n u_n$ este convergentă.

Teorema 1.2.11 (Criteriul lui Abel) Considerăm seria $\sum_n \alpha_n u_n$.

Dacă:

- (α_n) este un șir de numere reale monoton și mărginit,
- (u_n) este un șir cu proprietatea că $\sum_n u_n$ este o serie convergentă,

atunci seria $\sum_n \alpha_n u_n$ este convergentă.

Serii alternante

Definiția 1.2.3 O *serie alternantă* este o serie numerică ce verifică proprietatea că produsul oricăror doi termeni consecutivi ai săi este negativ. Pentru a pune mai bine în evidență semnele termenilor, o serie alternantă poate să fie scrisă sub forma

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \alpha_n = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \cdots + (-1)^n \alpha_n + \cdots$$

sau

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} \alpha_n = -\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots + (-1)^{n+1} \alpha_n + \cdots,$$

unde $\alpha_n > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.2.12 (Criteriul lui Leibniz) Dacă (α_n) este un șir de numere reale pozitive descrescător și convergent la zero, atunci seria $\sum_n (-1)^n \alpha_n$ este convergentă.

Exemplul 1.2.4 (Seria armonică alternantă) Seria alternantă

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{n+1}$$

este convergentă.

Seria armonică alternantă este un exemplu de serie semiconvergentă, căci este convergentă, dar nu este absolut convergentă, seria modulelor termenilor săi $\sum_{n \geq 1} |(-1)^{n-1} \frac{1}{n}| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă, fiind seria armonică.

Operații cu serii convergente

Propoziția 1.2.4 Dacă $\sum_{n \geq n_0} x_n$ este o serie convergentă, atunci seria $\sum_{n \geq n_0} (\alpha x_n)$ este convergentă pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ și

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (\alpha x_n) = \alpha \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n.$$

Propoziția 1.2.5 Dacă $\sum_{n \geq n_0} x_n$ și $\sum_{n \geq n_0} y_n$ sunt două serii convergente, atunci seria $\sum_{n \geq n_0} (x_n + y_n)$ este convergentă. În plus, are loc

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} y_n.$$

Definiția 1.2.4 Fie $\sum_{n \geq 0} x_n$ și $\sum_{n \geq 0} y_n$ două serii convergente. Seria $\sum_{n \geq 0} z_n$, unde șirul (z_n) este definit prin

$$z_n = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.11)$$

se numește *produsul seriilor* $\sum_{n \geq 0} x_n$ și $\sum_{n \geq 0} y_n$ (sub forma lui Cauchy). Pentru serii de forma $\sum_{n \geq n_0} x_n$, respectiv $\sum_{n \geq n_0} y_n$, șirul (z_n) se definește astfel:

$$z_n = \sum_{k=n_0}^n x_k y_{n+n_0-k}, \quad n \geq n_0. \quad (1.12)$$

Remarca 1.2.4 Produsul a două serii convergente nu este, în general, o serie convergentă.

Exemplul 1.2.5 Seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ este convergentă (rezultă din criteriul lui Leibniz). Vom arăta că produsul acestei serii cu ea însăși este o serie divergentă.

Notăm $x_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Vom determina mai întâi termenul general al seriei produs. Aplicând formula (1.12), avem

$$\begin{aligned} z_n &= x_1 x_n + x_2 x_{n-1} + \cdots + x_k x_{n+1-k} + \cdots + x_n x_1 \\ &= (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1} \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k} \sqrt{n+1-k}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{1}} \right). \end{aligned}$$

Cum $\frac{1}{\sqrt{k} \sqrt{n+1-k}} > \frac{1}{n}$ pentru orice $k = 1, 2, \dots, n$, rezultă că $|z_n| > 1$, deci $z_n \not\rightarrow 0$. Din criteriul de divergență se obține că seria $\sum_{n \geq 1} z_n$ nu este convergentă.

□

Teorema 1.2.13 (Teorema lui Mertens) *Dacă $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ sunt două serii convergente și cel puțin una dintre ele este absolut convergentă, atunci produsul celor două serii este o serie convergentă a cărei sumă este egală cu produsul sumelor celor două serii.*

Determinarea aproximativă a sumei unei serii convergente

Dacă un număr real necunoscut S (în general, un număr irațional sau chiar transcendent) este suma unei serii convergente,

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} x_k,$$

unde $x_k, k \in \mathbb{N}$, sunt numere reale ușor de calculat (de obicei, raționale), atunci S se poate aproxima cu $S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$ (și scriem $S \simeq S_n$) pentru n suficient de mare. În plus, dacă n este destul de mare, atunci eroarea de aproximare,

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k,$$

devine suficient de mică. Rezultă astfel că este important să găsim metode de evaluare a erorii r_n prin care S_n va aproxima pe S cu orice precizie a priori fixată.

Teorema 1.2.14 Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale pozitive. Dacă există $c \in (0, 1)$ astfel încât

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq c, \quad n \in \mathbb{N},$$

atunci seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ este convergentă, iar suma sa se poate aproxima astfel:

$$S \simeq S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n, \quad (1.13)$$

eroarea $r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k$ satisfăcând inegalitatea

$$r_n \leq \frac{x_{n+1}}{1-c}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.14)$$

Exemplul 1.2.6 Să se arate că seria

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)2^n}$$

este convergentă și apoi să se aproximeze suma sa cu două zecimale exacte.

Soluție. Fie $x_n = \frac{1}{(n+1)2^n}$. Avem

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{2(n+2)} \leq \frac{1}{2} = c \in (0, 1).$$

Din teorema precedentă rezultă că seria dată este convergentă și are loc

$$r_n \leq \frac{x_{n+1}}{1-c} = \frac{1}{(n+2)2^n}.$$

Impunem condiția

$$\frac{1}{(n+2)2^n} < \frac{1}{10^2} \iff (n+2)2^n > 100.$$

Cel mai mic număr natural care verifică inegalitatea precedentă este $n = 5$, deci suma seriei poate fi aproximată prin

$$S \simeq x_0 + x_1 + \cdots + x_5 \simeq 1,38.$$

□

Teorema 1.2.15 Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale. Dacă există $c \in (0, 1)$ astfel încât

$$\sqrt[n]{|x_n|} \leq c, \quad n \in \mathbb{N},$$

atunci seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ este convergentă și suma sa poate fi aproximată utilizând formula (1.13), eroarea satisfăcând relația

$$|r_n| \leq \frac{c^{n+1}}{1-c}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.15)$$

Teorema 1.2.16 Se consideră seria $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \alpha_n$, unde (α_n) este un șir de numere reale pozitive descrescător care converge la 0. Suma seriei poate fi aproximată prin

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \alpha_k \simeq \alpha_0 - \alpha_1 + \cdots + (-1)^n \alpha_n,$$

cu eroarea satisfăcând relația $|r_n| \leq \alpha_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

1.2.2 Probleme rezolvate

Exercițiul 1 Folosind *definiția convergenței unei serii*, să se stabilească natura următoarelor serii, calculându-se suma acestora:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Soluție. a) Avem

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

deci

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1.$$

De aici rezultă că seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă și suma ei este $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

b) Folosind proprietățile logaritmului, obținem

$$x_n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n,$$

ceea ce implică

$$S_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1) \rightarrow +\infty.$$

Deci, $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ este divergentă și $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = +\infty$.

□

Exercițiul 2 Folosind *criteriul de convergență al lui Cauchy*, să se studieze convergența seriei

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

Soluție. Considerăm $x_n = \frac{1}{n^2}$. Pentru orice $n, p \in \mathbb{N}^*$, avem

$$\begin{aligned} |x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\ &\leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Cum $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{n} < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_0$, deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq n_0 \text{ și orice } p \in \mathbb{N}^*.$$

Din criteriul de convergență al lui Cauchy rezultă că seria dată este convergentă. \square

Remarca 1.2.5 Analizând raționamentul de mai sus, se observă că pentru a demonstra convergența seriei $\sum_n x_n$ cu ajutorul criteriului de convergență al lui Cauchy este suficient să arătăm că există un șir $(a_n)_{n \geq n_0} \subset \mathbb{R}_+$ cu $a_n \rightarrow 0$ astfel încât

$$|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}| \leq a_n, \text{ pentru orice } n \geq n_0 \text{ și orice } p \in \mathbb{N}^*.$$

Exercițiul 3 Să se studieze prin mai multe metode convergența seriei

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(nx)}{2^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluție. Pentru $x \in \mathbb{R}$ fixat, considerăm șirul $x_n = \frac{\cos(nx)}{2^n}$, $n \geq 0$.

Metoda 1: Criteriul de convergență al lui Cauchy. Fie $n \in \mathbb{N}$ și $p \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$\begin{aligned} |x_{n+1} + \dots + x_{n+p}| &= \left| \frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\cos(n+2)x}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \\ &\leq \frac{|\cos(n+1)x|}{2^{n+1}} + \frac{|\cos(n+2)x|}{2^{n+2}} + \dots + \frac{|\cos(n+p)x|}{2^{n+p}} \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^p - 1}{\frac{1}{2} - 1} \\ &= \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \leq \frac{1}{2^n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Din Remarca 1.2.5 rezultă că seria $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(nx)}{2^n}$ este convergentă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Metoda 2: Criteriul lui Dirichlet. Fie $\alpha_n = \frac{1}{2^n} \searrow 0$ (este un șir de numere reale nenegative descrescător la zero) și $u_n = \cos(nx)$. Succesiv, se obține

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= 1 + \cos x + \cos(2x) + \dots + \cos(nx) \\ &= 1 + \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \text{ dacă } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Cazul 1. Pentru $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, are loc

$$\begin{aligned} |S_n| &= \left| 1 + \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq 1 + \left| \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \\ &= 1 + \frac{\left| \sin \frac{nx}{2} \right| \left| \cos \frac{(n+1)x}{2} \right|}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \\ &\leq 1 + \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

ceea ce implică faptul că (S_n) este un șir mărginit. Din criteriul lui Dirichlet rezultă că seria $\sum_n x_n = \sum_n \alpha_n u_n$ este convergentă.

Cazul 2. Dacă $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci $x_n = \frac{1}{2^n}$, caz în care seria $\sum_n x_n = \sum_n \frac{1}{2^n}$ este seria geometrică de rație $r = \frac{1}{2} \in (-1, 1)$, care este convergentă.

Metoda 3: Legătura cu seriile absolut convergente. Are loc

$$|x_n| = \frac{|\cos(nx)|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} = y_n.$$

Seria $\sum_n y_n = \sum_n \frac{1}{2^n}$ este convergentă, fiind seria geometrică de rație $\frac{1}{2} \in (-1, 1)$. Din criteriul comparației rezultă că seria $\sum_n |x_n|$ este și ea convergentă, adică $\sum_n x_n$ este absolut convergentă. Cum orice serie absolut convergentă este convergentă, se obține că seria $\sum_n x_n$ este convergentă.

□

Exercițiul 4 Folosind *criteriile comparației*, să se studieze convergența seriilor:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{2n-1}{3n^4-2n+1} \quad \text{b) } \sum_{n \geq 0} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n+1}} \quad \text{c) } \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+3^n} \quad \text{d) } \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(1+2^n)}{n^2}.$$

Soluție. a) Definim $x_n = \frac{2n-1}{3n^4-2n+1}$ și $y_n = \frac{1}{n^3}$. Avem

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{2n-1}{3n^4-2n+1}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{2n^4 - n^3}{3n^4 - 2n + 1} \rightarrow \frac{2}{3} \in (0, \infty).$$

Din *criteriul comparației*: *forma la limită* rezultă că $\sum_n x_n \sim \sum_n y_n$. Cum $\sum_n y_n$ este convergentă (este seria armonică generalizată cu $p = 3 > 1$), rezultă că $\sum_n x_n$ este convergentă.

b) Considerăm $x_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n+1}}$ și $y_n = \frac{1}{n^{1/2-1/3}} = \frac{1}{n^{1/6}}$. Atunci

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{n^{1/3}}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n+1}}}{\frac{1}{n^{1/6}}} = \frac{n^{1/3+1/6}}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n+1}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n+1}} \rightarrow 1 \in (0, \infty),$$

deci $\sum_n x_n \sim \sum_n y_n$. Cum $\sum_n y_n$ este divergentă (este seria armonică generalizată cu $p = \frac{1}{6} < 1$), obținem că și seria $\sum_n x_n$ este divergentă.

c) Cum $n + 3^n \geq 3^n$, rezultă

$$x_n = \frac{1}{n + 3^n} \leq \frac{1}{3^n} = y_n.$$

Seria $\sum_n y_n$ este convergentă, căci este seria geometrică de rație $r = 1/3 \in (-1, 1)$.

Din *criteriul comparației* rezultă că și seria $\sum_n x_n$ este convergentă.

d) Avem

$$x_n = \frac{\ln(1+2^n)}{n^2} \geq \frac{\ln(2^n)}{n^2} = \frac{\ln 2}{n} = (\ln 2) y_n.$$

Dar cum seria $\sum_{n \geq 1} y_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă, din *criteriul comparației* rezultă că seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.

□

Exercițiul 5 Folosind *criteriul raportului* sau *criteriul Raabe-Duhamel*, să se studieze convergența următoarelor serii:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}, \quad a > 0 \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} \quad \text{c) } \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{(a+1)(a+2) \cdots (a+n)}, \quad a > -1.$$

Soluție. a) Fie $x_n = \frac{a^n}{n!}$. Atunci

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0 < 1.$$

Din *criteriul raportului* rezultă că seria $\sum_n x_n$ este convergentă pentru orice $a > 0$.

b) Pentru $x_n = \frac{n!}{n^n}$ obținem

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-(n+1) \cdot \frac{n}{-(n+1)}} \rightarrow e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{-n-1}} = e^{-1} < 1. \end{aligned}$$

Din *criteriul raportului* rezultă că seria $\sum_n x_n$ este convergentă.

c) Considerăm $x_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2) \cdots (a+n)}$. Atunci

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(n+1)!}{(a+1)(a+2) \cdots (a+n)(a+n+1)} \cdot \frac{(a+1)(a+2) \cdots (a+n)}{n!} \\ &= \frac{n+1}{a+n+1} \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Cum criteriul raportului nu stabilește natura seriei date, vom aplica criteriul Raabe-Duhamel. Avem

$$n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = n \left(\frac{a + n + 1}{n + 1} - 1 \right) = \frac{an}{n + 1} \rightarrow a.$$

Dacă $a \in (-1, 1)$, atunci $\sum_n x_n$ este divergentă, iar dacă $a > 1$, atunci $\sum_n x_n$ este convergentă. Rămâne să studiem cazul $a = 1$. Pentru $a = 1$ obținem $x_n = \frac{1}{n+1}$, deci seria $\sum_n x_n$ este divergentă (are aceeași natură ca și seria armonică; de fapt, este seria armonică indexată după $n \geq 2$).

□

Exercițiul 6 Folosind *criteriul rădăcinii*, să se studieze dacă următoarele serii sunt convergente:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{2n-1} \right)^n \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \frac{\sin^n a}{n}, \quad a \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right).$$

Soluție. a) Fie $x_n = \left(\frac{n}{2n-1} \right)^n$. Atunci

$$\sqrt[n]{x_n} = \frac{n}{2n-1} \rightarrow \frac{1}{2} < 1,$$

de unde rezultă că seria dată este convergentă.

b) Considerăm șirul $x_n = \frac{\sin^n a}{n}$. Atunci

$$\sqrt[n]{x_n} = \frac{\sin a}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow \sin a < 1,$$

căci $a \in (0, \frac{\pi}{2})$. Din criteriul rădăcinii rezultă că seria $\sum_n x_n$ este convergentă.

□

Exercițiul 7 Să se studieze în funcție de parametrul real $a > 0$ convergența seriilor:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 2} \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}} \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} a^n \quad \text{c) } \sum_{n \geq 1} a^{\ln n}.$$

Soluție. a) Fie $a > 0$. Considerăm șirul

$$x_n = \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}, \quad n \geq 2.$$

Pentru a studia convergența seriei $\sum_{n \geq 2} x_n$ vom încerca, pentru început, să aplicăm criteriul raportului ($x_n > 0$). Avem

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} \cdot \frac{\sqrt[n]{n!}}{a^n} = a \cdot \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} \rightarrow a,$$

căci $\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} \rightarrow 1$. Din criteriul raportului obținem că dacă $a \in (0, 1)$, seria $\sum_{n \geq 2} x_n$ este convergentă, iar dacă $a > 1$, atunci $\sum_{n \geq 2} x_n$ este divergentă. Criteriul raportului nu se poate utiliza pentru $a = 1$, caz în care șirul $(x_n)_{n \geq 2}$ devine $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$. Pentru a studia în acest caz convergența seriei date vom aplica criteriul comparației: forma la limită. Considerăm șirul $y_n = \frac{1}{n}$. Cum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e},$$

obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}} = e \in (0, \infty),$$

deci seria $\sum_{n \geq 2} x_n$ are aceeași natură ca și seria $\sum_{n \geq 2} y_n$. Cum seria $\sum_{n \geq 2} y_n$ este divergentă, rezultă că și seria $\sum_{n \geq 2} x_n$ este divergentă. În concluzie, seria $\sum_{n \geq 2} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă $a \in (0, 1)$.

b) Pentru $a > 0$ (fixat) definim șirul

$$x_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} a^n, \quad n \geq 1.$$

Pentru a studia convergența seriei date vom încerca să aplicăm criteriul rădăcinii ($x_n > 0$). Avem

$$\sqrt[n]{x_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n a \rightarrow \frac{a}{e},$$

căci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e}. \quad (1.16)$$

Dacă $\frac{a}{e} < 1$, adică $a \in (0, e)$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă, iar dacă $a > e$, atunci aceasta este divergentă. Dacă $a = e$, se obține

$$x_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} e^n = \left[\left(\frac{n}{n+1} \right)^n e \right]^n = \left[\frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \right]^n.$$

Din inegalitatea

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e, \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

deducem că $x_n > 1$, ceea ce implică $x_n \not\rightarrow 0$ și, deci, din criteriul de divergență rezultă că seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ nu este convergentă.

c) Fie $a > 0$. Considerăm șirul $x_n = a^{\ln n}$, $n \geq 1$.

Metoda 1. Are loc

$$x_n = a^{\ln n} = n^{\ln a} = \frac{1}{n^{-\ln a}},$$

deci $\sum_{n \geq 1} x_n$ este seria armonică generalizată cu $p = -\ln a$, care este convergentă dacă și numai dacă $p > 1$, adică

$$-\ln a > 1 \iff \ln a < \ln(e^{-1}) \iff a \in \left(0, \frac{1}{e} \right).$$

Metoda 2. Pentru $a \in (0, 1)$ șirul (x_n) este descrescător (la zero), deci putem aplica criteriul de condensare al lui Cauchy, din care rezultă că seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ are

aceeași natură ca și seria $\sum_{n \geq 0} 2^n x_{2^n}$. Calculăm

$$\sum_{n \geq 0} 2^n x_{2^n} = \sum_{n \geq 0} 2^n a^{\ln(2^n)} = \sum_{n \geq 0} 2^n a^{n \ln 2} = \sum_{n \geq 0} \left(2 a^{\ln 2} \right)^n.$$

Cea din urmă serie este seria geometrică de rație $r = 2 a^{\ln 2}$, care este convergentă dacă și numai dacă $r \in (-1, 1)$. Dar cum în cazul nostru avem $r > 0$, pentru ca seria de mai sus să fie convergentă este suficient să punem condiția $2 a^{\ln 2} < 1$. Au loc următoarele echivalențe:

$$2 a^{\ln 2} < 1 \iff a^{\ln 2} < \frac{1}{2} \iff \ln 2 \cdot \ln a < -\ln 2 \iff \ln a < -1 \iff a < e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Deci, dacă $a \in (0, 1)$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă $a \in (0, 1/e)$. Dacă $a = 1$, atunci $x_n = 1 \not\rightarrow 0$, ceea ce implică faptul că seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ nu este convergentă. Pe de altă parte, dacă $a > 1$, atunci $x_n \rightarrow +\infty \neq 0$, deci și în acest caz seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ nu este convergentă.

Metoda 3. Vom încerca pentru început să studiem convergența seriei date folosind criteriul raportului. Avem

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{\ln(n+1)}}{a^{\ln n}} = a^{\ln \frac{n+1}{n}} \rightarrow 1.$$

Deci, criteriul raportului nu ne ajută. Calculăm

$$\begin{aligned} R_n &= n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = n \left(a^{\ln \frac{n}{n+1}} - 1 \right) \\ &= \frac{a^{\ln \frac{n}{n+1}} - 1}{\ln \frac{n}{n+1}} \cdot n \cdot \ln \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{a^{\ln \frac{n}{n+1}} - 1}{\ln \frac{n}{n+1}} \cdot \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \rightarrow -\ln a = \ln \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Am folosit relația (1.16) și următoarea limită remarcabilă ($x(n) = \ln \frac{n}{n+1} \rightarrow 0$ pentru $n \rightarrow +\infty$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Din criteriul Raabe-Duhamel rezultă că seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ nu este convergentă pentru

$\ln \frac{1}{a} < 1$, adică pentru $a > \frac{1}{e}$, și este convergentă dacă $\ln \frac{1}{a} > 1$, adică dacă $a \in (0, \frac{1}{e})$. Criteriul Raabe-Duhamel nu stabilește natura seriei dacă $a = \frac{1}{e}$. În acest caz șirul (x_n) devine

$$x_n = e^{-\ln n} = e^{\ln(n^{-1})} = \frac{1}{n},$$

caz în care seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este seria armonică, care nu este convergentă.

□

Exercițiul 8 Fie $x_0 \in [0, 1]$. Se consideră șirul (x_n) , definit prin

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2, \quad n \geq 0.$$

Să se studieze convergența șirului (x_n) și a seriei $\sum_n x_n$.

Soluție. Dacă $x_0 = 0$, se observă că $x_n = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci $x_n \rightarrow 0$ și $\sum_n x_n$ este o serie convergentă. Dacă $x_0 = 1$, atunci $x_1 = 0$ și, deci, $x_n = 0$ pentru orice $n \geq 1$. Și în acest caz $x_n \rightarrow 0$ și seria asociată este convergentă. Rămâne să studiem cazul $x_0 \in (0, 1)$. Cum $x_1 = x_0(1 - x_0)$ și $x_0, 1 - x_0 \in (0, 1)$, rezultă că $x_1 \in (0, 1)$. Inductiv, ținând cont de relația de recurență care poate fi scrisă sub forma $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, se arată că $x_n \in (0, 1)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci (x_n) este un șir mărginit. Pe de altă parte,

$$x_{n+1} - x_n = -x_n^2 < 0, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

ceea ce implică faptul că (x_n) este un șir strict descrescător. Din cele de mai sus rezultă astfel că (x_n) este convergent. Atunci există $x \in [0, 1)$ astfel încât $x_n \rightarrow x$. Trecând la limită în relația de recurență, se obține

$$x = x - x^2 \iff x = 0.$$

În continuare vom studia convergența seriei $\sum_n x_n$. Calculăm

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n - x_n^2}{x_n} = 1 - x_n \rightarrow 1,$$

deci criteriul raportului nu poate stabili natura seriei studiate. Vom încerca să aplicăm criteriul Raabe-Duhamel. Avem

$$R_n = n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = n \left(\frac{1}{1 - x_n} - 1 \right) = \frac{n x_n}{1 - x_n} = \frac{n}{\frac{1 - x_n}{x_n}} = \frac{n}{\frac{1}{x_n} - 1}.$$

Pentru a studia convergența șirului (R_n) vom utiliza lema Stolz-Cesàro. Fie $a_n = n$ și $b_n = \frac{1}{x_n} - 1 \rightarrow +\infty$ (strict crescător). Succesiv, se obține

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \frac{x_n(x_n - x_n^2)}{x_n - x_n + x_n^2} = 1 - x_n \rightarrow 1,$$

ceea ce implică $R_n \rightarrow 1$. Astfel, nici criteriul Raabe-Duhamel nu stabilește natura seriei $\sum_n x_n$. Vom încerca acum să studiem convergența seriei folosind criteriul comparației: forma la limită. Considerând $y_n = \frac{1}{n}$, are loc $\frac{x_n}{y_n} = n x_n = \frac{n}{\frac{1}{x_n}}$. Cum

$$\frac{n + 1 - n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = 1 - x_n \rightarrow 1,$$

rezultă $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 1 \in (0, \infty)$. Din criteriul comparației: forma la limită deducem că $\sum_n x_n \sim \sum_n y_n$, dar cum seria $\sum_n y_n$ este divergentă (este seria armonică), se obține că și seria $\sum_n x_n$ este divergentă.

□

1.2.3 Probleme propuse

Exercițiul 1 Folosind *definiția* convergenței unei serii numerice, să se stabilească natura următoarelor serii, calculându-se suma acestora:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-1)(n+1)} & \text{b) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{9n^2 - 3n - 2} & \text{c) } \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ \text{d) } \sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!} & \text{e) } \sum_{n \geq 2} \frac{2^{n-1}(n-1)}{(n+1)!} & \text{f) } \sum_{n \geq 1} \operatorname{arctg} \frac{a}{1 + n(n+1)a^2}, a > 0. \end{array}$$

Indicație: Se folosesc următoarele relații:

$$\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\frac{1}{9n^2 - 3n - 2} = \frac{1}{(3n+1)(3n-2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\frac{2^{n-1}(n-1)}{(n+1)!} = \frac{2^{n-1}(n+1-2)}{(n+1)!} = \frac{2^{n-1}}{n!} - \frac{2^n}{(n+1)!}$$

$$\operatorname{arctg} \frac{a}{1 + n(n+1)a^2} = \operatorname{arctg} \frac{(n+1)a - na}{1 + ((n+1)a)(na)} = \operatorname{arctg}(n+1)a - \operatorname{arctg}(na).$$

Exercițiul 2 Folosind *criteriul de divergență*, să se arate că următoarele serii sunt divergente:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{n}{n+1} \quad \text{b) } \sum_{n \geq 2} \frac{n}{\sqrt[n]{n}} \quad \text{c) } \sum_{n \geq 0} \cos(n\pi).$$

Exercițiul 3 Folosind natura seriei geometrice sau a celei armonice generalizate, să se precizeze care din următoarelor serii sunt convergente:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{b) } \sum_{n \geq 0} (-2)^n \quad \text{c) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \sqrt[3]{n}} \quad \text{d) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} \quad \text{e) } \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{5^n}.$$

Exercițiul 4 Folosind *criteriul de convergență al lui Cauchy*, să se studieze convergența următoarelor serii:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(n\pi x)}{5^n}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n(n+1)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercițiul 5 Folosind *criteriul raportului* sau *criteriul Raabe-Duhamel*, să se studieze convergența următoarelor serii:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n 2^n} \quad \text{b) } \sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{5^n} \quad \text{c) } \sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}.$$

Exercițiul 6 Folosind, eventual, *criteriul rădăcinii*, să se studieze convergența următoarelor serii:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2n + \sqrt{n}}{2n + 1} \right)^{n\sqrt{n}} \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \left(1 - \frac{a}{n} \right)^{n^2}, \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{c) } \sum_{n \geq 1} \left(\frac{an}{bn + 1} \right)^n, \quad a, b > 0.$$

Exercițiul 7 Folosind *criteriile comparației*, să se studieze convergența seriilor:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} \quad & \text{b) } \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n^2 \sqrt{n} + 1} \quad \text{c) } \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-n}}{n} \quad \text{d) } \sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n + \sqrt{n}} \\ \text{e) } \sum_{n \geq 2} (\sqrt[n]{n} - 1) \quad & \text{f) } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \quad \text{g) } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} \quad \text{h) } \sum_{n \geq 2} \sin \frac{\pi}{n^2}. \end{aligned}$$

Indicație: e) Are loc $\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n}} - 1$; f) Se folosește, eventual, relația $(\ln n)^{\ln n} = n^{\ln(\ln n)} \geq n^2$, pentru n suficient de mare.

Exercițiul 8 Folosind *criteriul de condensare al lui Cauchy*, să se studieze dacă următoarele serii sunt convergente:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n} \quad \text{b) } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n} \quad \text{c) } \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n \ln(\ln n)} \quad \text{d) } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln^p(n)}, p > 0.$$

Exercițiul 9 Folosind *criteriul lui Dirichlet*, să se arate că seriile

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n(n+1)}} \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n} \quad \text{c) } \sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{\ln 2} + \cdots + \frac{1}{\ln n} \right) \frac{\sin(nx)}{n-1}$$

sunt convergente pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Exercițiul 10 Folosind *criteriul lui Leibniz*, să se arate că următoarele serii sunt convergente:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{n^2 + 1} \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad \text{c) } \sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

Exercițiul 11 Să se studieze în funcție de parametrul real $a > 0$ convergența următoarelor serii:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + a^n} \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \frac{a^n n!}{n^n} \quad \text{c) } \sum_{n \geq 1} a^{\sqrt{n}} \quad \text{d) } \sum_{n \geq 1} a^{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} \quad \text{e) } \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(1 + a^n)}{n^2}.$$

Exercițiul 12 Câți termeni trebuie însumați pentru ca suma seriei

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{n!}$$

să poată fi calculată cu patru zecimale exacte?

Exercițiul 13 Să se studieze dacă există funcții injective $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ astfel încât seria

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^2}$$

să fie convergentă.

Indicație: Se arată că dacă există o funcție f care să verifice proprietățile din enunț, atunci $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{4n^2} (1 + 2 + \cdots + n) \geq \frac{1}{8}$.

Exercițiul 14 Fie $x_0 \in (0, 1)$. Se consideră șirul (x_n) , definit prin:

$$\text{a) } x_{n+1} = x_n - x_n^3, \text{ pentru } n \geq 0;$$

$$\text{b) } x_{n+1} = x_n - nx_n^2, \text{ pentru } n \geq 0.$$

Să se studieze convergența șirului (x_n) și a seriei $\sum_{n \geq 0} x_n$.

Indicație: a) Se arată că $x_n \rightarrow 0$ și apoi, din criteriul Raabe-Duhamel, rezultă că seria asociată nu este convergentă; b) Se arată inductiv că $x_n \in (0, \frac{1}{n})$, pentru $n \geq 1$, deci $x_n \rightarrow 0$. Convergența seriei rezultă din criteriul comparației: forma la limită, ținând cont de limita $n^2 x_n \rightarrow 2$ (se aplică lema Stolz-Cesàro).

Exercițiul 15 Să se studieze convergența șirului (x_n) și a seriei $\sum_n x_n$, unde:

$$\text{a) } x_{n+1} = 2x_n - x_n^2, \text{ pentru } n \geq 0, x_0 \in \mathbb{R};$$

$$\text{b) } x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + nx_n^2}, \text{ pentru } n \geq 1, x_1 > 0;$$

$$\text{c) } x_{n+1} + e^{x_{n+1}} = 1 + x_n, \text{ pentru } n \geq 0, x_0 \in \mathbb{R}.$$

Indicație: a) Se arată că șirul (x_n) este convergent pentru $x_0 \in [0, 2]$, iar seria asociată este convergentă pentru $x_0 \in \{0, 2\}$; b) Se arată că $x_n \rightarrow 0$ (strict descrescător) și $n x_n \rightarrow 1$; c) Dacă $x_0 = 0$, atunci $x_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$, iar dacă $x_0 \neq 0$, se arată că $x_n \rightarrow 0$ și apoi $\frac{x_n}{x_{n+1}} \rightarrow 2$.