Tema 1, 1 noiembrie 2019

Termen de predare: 8 noiembrie 2019, 12:00-14:00 în C210

- **Tema poate fi rezolvată în echipe de câte doi studenţi.**
- **Pentru soluţii redactate în LaTeX se oferă un bonus de 1 punct.**
- **Soluţiile identice sau copiate conduc la anularea punctajelor.**
- **Soluţiile trebuie să conţină numele celui/celor care au redactat-o şi vor fi transmise pe hârtie, nu prin e-mail.**
- **Nu rescrieţi enunţurile! Nu este nevoie de mai mult de $1-2$ pagini pentru fiecare dintre probleme.**
- **ORICE SOLUŢIE COPIATĂ A UNEIA DINTRE PROBLEMELE DE MAI JOS VA FI PENALIZATĂ CU 2 PUNCTE.**

1. Se consideră reţeaua stradală a unui oraş care este conexă - din orice intersecţie se poate ajunge în orice altă intersecţie (pe toate străzile se poate circula în ambele sensuri).

(a) Primăria oraşului doreşte să transforme fiecare stradă într-un sens unic aşa încât reţeaua stradală să rămână conexă - din orice intersecţie să se poată ajunge în orice altă intersecţie. Arătaţi că acest lucru e posibil dacă şi numai dacă prin blocarea oricărei străzi reţeaua stradală nu se deconectează.

(b) Descrieţi un algoritm care să întreprindă o astfel de transformare dacă este posibilă. Care este complexitatea sa timp?

(2 + 2 = 4 puncte)

2. Fie $G = (V, E)$ un graf conex şi $u, v \in V$ două noduri distincte ale lui G. O submulţime de noduri X se numeşte uv**-separatoare minimală** dacă u şi v se află în componente conexe diferite ale lui $G - X$, dar pentru orice $X' \subsetneq X$, u şi v sunt în aceeaşi componentă a lui $G - X'$.

(a) Dovediţi că $X \subseteq V$ este muţime uv-separatoare minimală dacă şi numai dacă u şi v se află în componente diferite ale lui $G - X$, iar orice nod din X are vecini în ambele aceste componente.

(b) Dacă X_1 şi X_2 sunt două mulţimi uv-separatoare minimale din G astfel încât X_1 intersectează cel puţin două componente din $G - X_2$, atunci X_1 intersectează componentele lui $G - X_2$ care conţin pe u şi v.

(2 + 2 = 4 puncte)

3. Fie $G = (V, E)$ un graf cu n noduri şi m muchii. Considerăm următorul algoritm:

$G' \leftarrow G$;
while ($\exists u \in V(G')$ a. î. $d_{G'}(u) < m/n$) **do**
  $G' \leftarrow G' - u$;
return G';

(a) Determinaţi complexitatea timp a unei implementări eficiente a acestui algoritm.

(b) Arătaţi că graful returnat, G', este nenul (are şi noduri, dar şi muchii).

(c) Arătaţi că orice graf conţine un drum de lungime cel puţin m/n.

(2 + 1 + 1 = 4 puncte)

4. Fie $G = (V, E)$ un digraf, $a : E \to \mathbb{R}_+$ o funcţie de cost pe arcele sale şi $x_0 \in V$ un nod din care toate celelate noduri ale lui G sunt accesibile. Un **SP-arbore** pentru tripleta (G, a, x_0) este un arbore cu rădăcină al lui G, $T = (V, E')$, aşa încât costul (cu aceeaşi funcţie a) drumului de la x_0 la u în T este costul minim al unui drum de la x_0 la u în G, pentru orice $u \in V$.

(a) Arătaţi că un astfel de SP-arbore există întotdeauna.

(b) Descrieţi un algoritm care să determine un SP-arbore.

(2 + 1 = 3 puncte)

Tema 2, 15 noiembrie 2019

Termen de predare: 22 noiembrie 2019, 10:00-11:00 în C210

- **Tema poate fi rezolvată în echipe de câte doi studenţi.**
- **Pentru soluţii redactate în LaTeX se oferă un bonus de 1 punct.**
- **Soluţiile identice sau copiate conduc la anularea punctajelor.**
- **Soluţiile trebuie să conţină numele celui/celor care au redactat-o şi vor fi transmise pe hârtie, nu prin e-mail.**
- **Nu rescrieţi enunţurile! Nu este nevoie de mai mult de $1-2$ pagini pentru fiecare dintre probleme.**
- **ORICE SOLUŢIE COPIATĂ A UNEIA DINTRE PROBLEMELE DE MAI JOS VA FI PENALIZATĂ CU 2 PUNCTE.**

1. Fie $G = (V, E)$ un graf conex şi $c : E \to \mathbb{R}$ o funcţie de cost pe muchiile sale. Adevărat sau fals? (Justificaţi răspunsurile!)

(a) Orice muchie de cost minim din G este conţinută într-un anume arbore parţial de cost c minim din G.

(b) Dacă G are un circuit, C, a cărui muchie de cost minim este unică pe C, atunci acea muchie este conţinută în orice arbore parţial de cost c minim din G.

(c) Dacă o muchie este conţinută într-un arbore parţial de cost c minim din G, atunci acea muchie este de cost minim într-o anumită tăietură a lui G.

(1 + 1 + 1 = 3 puncte)

2. Fie $G = (V, E)$ un graf conex şi $c : E \to \mathbb{R}$ o funcţie de cost pe muchiile sale. Fie T^* un arbore parţial de cost c minim al lui G. Spunem că un subgraf conex H al lui G este **c-extensibil** dacă $T^*_H = [E(H) \cap E(T^*)]_G$ este un arbore.

(a) Arătaţi că dacă H este c-extensibil, atunci T^*_H este un arbore parţial de cost c minim al lui H.

(b) Fie H un subgraf c-extensibil al lui G şi G_H graful obţinut din G prin contractarea una câte una a tuturor muchiilor lui H şi menţinerea muchiilor multiple formate noi formate, i. e.,

$$V(G_H) = (V \setminus V(H)) \cup \{x_H\}, E(G_H) = \{uv \in E : u, v \notin V(H)\} \cup \{ux_H : uv \in E, u \notin V(H) \ni v\},$$

unde $c(ux_H) = c(uv)$.

Arătaţi că asamblând un arbore parţial de cost minim al lui H (T^*_H) cu un arbore parţial de cost minim al lui G_H obţinem un arbore parţial de cost minim al lui G.

(1 + 2 = 3 puncte)

3. Fie $G = (S, T; E)$ un graf bipartit. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) G nu este nul şi $G - \{x, y\}$ are un **cuplaj perfect**[1], $\forall x \in S, \forall y \in T$.

(ii) G este conex şi orice muchie a lui G aparţine unui cuplaj perfect.

(iii) G nu este nul, $|S| = |T|$ şi $\varnothing \neq A \subsetneq S$, $|N_G(A)| > |A|$. **(1+1+1 = 3 puncte)**

4. Fie $G = (V, E)$ un graf p-regulat bipartit. Considerăm următorul algoritm:

for $(e \in E)$ **do**
  $a(e) \leftarrow 1$;
$E^+ \leftarrow \{e \in E \; : \; a(e) > 0\}$;
while ($G^+ = (V, E^+)$ conţine un circuit C) **do**
  fie $C = M_1 \cup M_2$, unde M_1 şi M_2 sunt cuplaje cu $a(M_1) \geqslant a(M_2)$;
  // pentru orice $F \subseteq E$, $a(F) = \sum_{e \in F} a(e)$;
  for $(e \in E(C))$ **do**
    if $(e \in M_1)$ **then**
      $a(e) + +$;
    else
      $a(e) - -$;
  $E^+ \leftarrow \{e \in E \; : \; a(e) > 0\}$;
return E^+;

Fie $f(E^+) = \sum_{e \in E^+} a^2(e)$. Arătaţi că

(a) după fiecare iteraţie **while** $f(E^+)$ este un număr întreg care creşte cu cel puţin $|C|$ faţă de valoarea anterioară;

(b) după fiecare iteraţie **while**, pentru orice nod $u \in V$, $\sum_{uv \in E^+} a(uv) = p$;

(c) cât timp există muchii e cu $0 < a(e) < p$, algoritmul continuă; la final $a(e) = p$, $\forall e \in E^+$ şi în E^+ se găsesc muchiile unui cuplaj perfect al lui G;

(d) numărul de iteraţii **while** este finit, la final $f(E^+) = np^2/2 = pm$, iar suma lungimilor tuturor circuitelor procesate este cel mult pm;

(e) un circuit poate fi găsit în complexitatea timp $\mathcal{O}(|C|)$ folosind o parcurgere *dfs*;

(f) complexitatea timp a algoritmului în ansamblu este $\mathcal{O}(pm)$.

(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 puncte)

[1] Un **cuplaj perfect** este un cuplaj care saturează toate nodurile lui G.

Tema 3, 20 decembrie 2019

Termen de predare: 10 ianuarie 2020, 12:00-14:00 în C210

- **Tema poate fi rezolvată în echipe de câte doi studenţi.**
- **Pentru soluţii redactate în LaTeX se oferă un bonus de 1 punct.**
- **Soluţiile identice sau copiate conduc la anularea punctajelor.**
- **Soluţiile trebuie să conţină numele celui/celor care au redactat-o şi vor fi transmise pe hârtie, nu prin e-mail.**
- **Nu rescrieţi enunţurile! Nu este nevoie de mai mult de $1-2$ pagini pentru fiecare dintre probleme.**
- **ORICE SOLUŢIE COPIATĂ A UNEIA DINTRE PROBLEMELE DE MAI JOS VA FI PENALIZATĂ CU 2 PUNCTE.**

1. Fie $G = (V, E)$ un digraf, $c : E \to \mathbb{R}_+$ şi $X, Y \subseteq V$ două submulţimi disjuncte de noduri din G. Avem două funcţii $\sigma : X \to \mathbb{R}_+$ (oferta) şi $\theta : Y \to \mathbb{R}_+$ (cererea). $R = (G, X, Y, c)$ este o **e-reţea**; o funcţie $x : E \to \mathbb{R}$ este un **e-flux fezabil** în **e-reţeaua** $R = (G, X, Y, c)$ dacă

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant c_{ij}, \forall ij \in E,$$

$$\sum_j x_{ij} = \sum_j x_{ji}, \forall i \in V \setminus (X \cup Y),$$

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} \leqslant \sigma_i, \forall i \in X$$

$$\sum_j x_{ji} - \sum_j x_{ij} \geqslant \theta_i, \forall i \in Y$$

Presupunem că cererea totală este cel mult egală cu oferta totală, i. e., $\sigma = \sum_{i\in X} \sigma_i \geqslant \sum_{j\in Y} \theta_j = \theta$. Arătaţi că există un e-flux fezabil în R dacă şi numai dacă pentru orice $S, T \subseteq V$ astfel ca $S \cup T = V$ şi $S \cap T = \varnothing$, avem

$$\sum_{i\in S, j\in T} c_{ij} \geqslant \sum_{j\in Y\cap T} \theta_j - \sum_{i\in X\cap T} \sigma_i.$$

(4 puncte)

2. La Departamentul de Informatică există p studenţi ($\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_p\}$) care doresc să absolve cu o diplomă de licenţă şi k profesori ($\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$). Lucrările de licenţă ale studenţilor sunt evaluate de echipe formate din câte r profesori.

Pentru subiectul unei lucrări de licenţă un profesor poate specializat sau nu; se cunoaşte mulţimea, $\mathcal{P}_i \subsetneq \mathcal{P}$ ($\mathcal{P}_i \neq \varnothing$), a profesorilor competenţi în a judeca lucrarea de licenţă a studentului S_i, pentru orice i. Fiecare profesor P_l poate participa în cel mult n_l astfel de echipe de evaluare.

Fiecare student trebuie să-şi prezinte lucrarea unei echipe de $r(\leqslant k)$ profesori, $a(\leqslant r)$ fiind specializaţi în proiectul respectiv, iar $(r-a)$ nu.

(a) Descrieţi un model cu o reţea de transport pentru a organiza ca mai sus echipele de evaluare formate din profesori (fiecare profesor trebuie asignat unei mulţimi de lucrări de licenţă).

(b) Caracterizaţi existenţa unei soluţii pentru această problemă în termenii existenţei unui anumit flux maxim în reţeaua de mai sus. (Caracterizarea trebuie demonstrată!)

(c) Care este complexitatea timp necesară pentru a decide dacă există soluţii?

(1 + 1 + 1 = 3 puncte)

3. Considerăm următoarea problemă de decizie:
3AN
Instanţă: $G = (V, E)$ un graf cu $\Delta(G) \leqslant 3$ şi $k \in \mathbb{N}^*$.
Întrebare: Există $U \subseteq V$, $|U| \leqslant k$ a. î. $\{u, v\} \cap U \neq \varnothing$, $\forall uv \in E$?

Considerăm şi o instanţă a problemei **3SAT**: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ o mulţime de variabile booleene, $\mathcal{C} = C_1 \wedge C_2 \ldots \wedge C_m$ o mulţime de clauze disjunctive peste X, fiecare clauză având exact trei literali: $C_j = v_{j_1} \vee v_{j_2} \vee v_{j_3}$, $\forall j = \overline{1, m}$.

Fie k_i numărul de apariţii ale lui x_i (ca literal pozitiv sau negativ) în $\mathcal{C}$ (indexăm aceste apariţii: prima, a doua etc). Definim următoarele grafuri şi mulţimi de muchii disjuncte:

(1) un circuit de lungime $2k_i$, $G_i = (V_i, E_i)$, pentru fiecare variabilă booleană x_i, unde $V_i = \{a_{i,1}, f_{i,1}, a_{i,2}, f_{i,2}, \ldots, a_{i,k_i}, f_{i,k_i}\}$ and $E_i = \{a_{i,h}f_{i,h}, f_{i,h}a_{i,h+1} \; : \; 1 \leqslant h \leqslant k_i\}$ (notaţie modulo $2k_i$);

(2) un graf $H_j = (W_j, E(H_j)) \cong K_3$, pentru fiecare clauză C_j, unde $W_j = \{w_{j,1}, w_{j,2}, w_{j,3}\}$;

(3) $A = \{a_{i,l}w_{j,k} \; : \;$ dacă $v_{j_k} = x_i$ este a l-a apariţie a lui x_i în $C_j\}$;

(4) $F = \{f_{i,l}w_{j,k} \; : \;$ dacă $v_{j_k} = \overline{x}_i$ este a l-a apariţie a lui x_i în $C_j\}$;

La final definim graful $G = (V, E)$:

$$V = \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} W_j\right), E = \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} E(H_j)\right) \cup A \cup F.$$

Dovediţi că **3SAT** se poate reduce în timp polinomial la **3AN** (cu instanţa G de mai sus şi $k = 5m$) arătând că

(a) există doar două mulţimi de noduri de cardinal minim care acoperă muchiile lui G_i, cardinalul acestora fiind k_i, anume: $\{a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,k_i}\}$ and $\{f_{i,1}, f_{i,2}, \ldots, f_{i,k_i}\}$.

(b) Dacă U acoperă muchiile lui G şi $|U| = 5m$, atunci

(b1) $|U \cap W_j| \geqslant 2$, $\forall j = \overline{1, m}$;

(b2) $\left| U \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right) \right| \geqslant 3m$;

(b3) $|U \cap W_j| = 2$, $\forall j = \overline{1, m}$ şi $|U \cap V_i| = k_i$, $\forall i = \overline{1, n}$.

(b4) următoarea funcţie de adevăr satisface toate clauzele din $\mathcal{C}$: pentru orice i, $t(x_i) = true$ dacă şi numai dacă $U \cap V_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,k_i}\}$.

(c) Presupunem că $t : X \to \{true, false\}$ este o funcţie de adevăr care satisface toate clauzele din $\mathcal{C}$. Construim U astfel:

- pentru fiecare variabilă booleană x_i cu $t(x_i) = true$ adăugăm la U mulţimea $\{a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,k_i}\}$;
- pentru fiecare variabilă booleană x_i cu $t(x_i) = false$ adăugăm la U mulţimea $\{f_{i,1}, f_{i,2}, \ldots, f_{i,k_i}\}$;
- pentru fiecare clauză C_j adăugăm la U toate nodurile din W_j mai puţin unul care corespunde unui literal adevărat în C_j.

Arătaţi că U are proprietatea cerută şi că $|U| = 5m$.

(1 + (1 + 1 + 1 + 1) + 1 = 6 puncte)

4.

(a) Arătaţi că orice graf G are o $\chi(G)$-colorare în care cel puţin una din clasele de colorare este o mulţime stabilă maximală.

(b) Fie $G = (V, E)$ un graf şi $x, y \in V$ două noduri neadiacente ($xy \notin E$). Arătaţi că

$$\chi(G) = \min\{\chi(G + xy), \chi(G|xy)\},$$

unde $G|xy$ este rezultatul operaţiei de contracţie a perechii (x, y) în G.

(1 + 1 = 2 puncte)