Tema 3

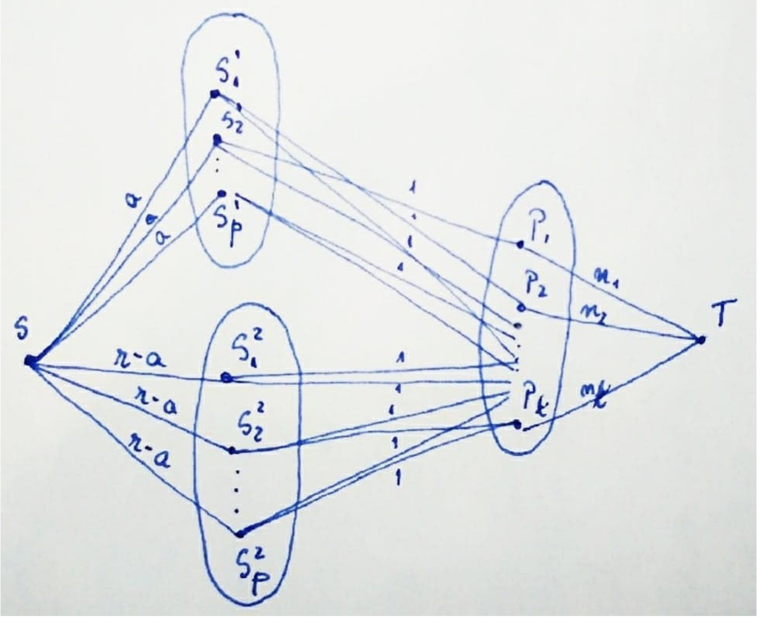
MOCANU ADA-ASTRID
&
CIRIPESCU TEODOR

Grupa A7

10 Ianuarie 2020

Problema 2

a)



$V(G) = \{S_1^1, S_2^1, ..., S_p^1, S_1^2, S_2^2, ..., S_p^2\} \bigcap \{P_1, P_2, ..., P_k\} \bigcap \{S, T\}$
$E(G) = \{S_i^1 P_j$, daca profesorul P_j este specializat in licenta studentului $S_i\} \bigcap \{S_i^2 P_j$, daca profesorul P_j nu este specializat in licenta studentului $S_i\} \bigcap \{SS_i^1, i = \overline{1,p}\} \bigcap \{SS_i^2, i = \overline{1,p}\} \bigcap \{P_j T, j = \overline{1,k}\}$

Fie reteaua $R = (G, S, T, c)$ a.i. $c(SS_i^1) = a, \forall i = \overline{1,p}$, $c(SS_i^2) = r - a, \forall i = \overline{1,p}$ $c(P_j T) = n_j, \forall j = \overline{1,k}$
$(S_i^1 P_j) = 1$, $c(S_i^2 P_j) = 1$

b)
Exista o asignare a profesorilor catre studentii ce dau licenta cu proprietatile cerute $\Leftrightarrow$ in $R = (G, S, T, c)$ valoarea maxima a unui flux este: $p * r$
$(\Rightarrow)$

$$x(S_i^1 P_j) = \begin{cases} 1, & \text{daca } P_j \text{ este specializat in licenta lui } S_i \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$x(S_i^2 P_j) = \begin{cases} 1, & \text{daca } P_j \text{ este specializat in licenta lui } S_i \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$x(SS_i^1) = a, \forall i$
$x(SS_i^2) = r - a, \forall i$
$x(P_jT) \leq n_j$, unde n_j este nr maxim de echipe din care poate face parte profesorul P_j.
In fiecare nod S_i^1 intra flux de valoare a(de la S) si iese flux de valoare a din ipoteza ($\exists\ a$ profesori specializati)
In fiecare nod S_i^2 intra flux de valoare $r - a$ si iese flux de valoare $r - a$ din ipoteza ($\exists\ r - a$ profesori nespecializati)
In fiecare nod P_j intra flux de valoare q_j si iese flux de valoare $q_j \leq n_j$
$\Rightarrow$ Fluxul creat respecta conditia de conservare si e maximal deoarece din nodul S nu poate pleca mai mult.
($\Leftarrow$)
Fie un flux de valoare maxima $p \cdot r$, asociat retelei modelate anterior. El rezolva problema data deoarece putem considera ca nodurile P_j sunt asociate profesorilor, nodurile S_i^1, S_i^2 sunt asociate unui student S_i, muchiile de la multimea S_1 la P corespund modalitatii de alegere a celor a profesori specializati, iar cele de la S^2 la P corespund modalitatii de alegere a celor $r - a$ profesori nespecializati.

c)
$n = 2 + 2p + k$
$m = 2p + k + (x_1 + x_2 + ... + x_p) + (k - x_1 + k - x_2 + ... + k - x_p) = 2p + k + (x_1 + ... + x_p) + kp - (x_1 + ... + x_p) = 2p + k + kp$

1. Analizam algoritmul Ford & Fulkerson
Complexitate in general:$O(n \cdot m \cdot U)$
Consideram ca majorant
$U = r$ (pp $r > n_i, \forall i = \overline{1, k}$)
$n \cdot m \cdot U = (2 + 2p + k)(2p + k + kp)r = (4p + 2k + 2kp + 4p^2 + 4pk + k^2 + 2p^2k + k^2p)r = (4p + 2k + 6pk + 4p^2 + k^2 + 2p^2k + k^2p)r$
$\Rightarrow$ Complexitatea devine:$O(p^2kr)$, pentru $p \geq k$ sau $O(k^2pr)$, pentru $k > p$

2. Analizam algoritmul Edmonds-Karp
Complexitate generala: $O(m^2n)$
$m^2n = (2p+k+kp)^2(2+2p+k) = (4p^2+k^2+k^2p^2+4pk+4kp^2+2k^2p)(2+2p+k)$
$\Rightarrow$ Complexitatea devine: $O(k^3p^2), k \geq p$ sau $O(k^2p^3), k < p$
$\Rightarrow$ cum $r < k \Rightarrow$ mult mai ineficient decat F&F

3. Analizam algoritmul Ahuja-Orlin
Complexitate generala: $O(nm + n^2 \log U)$
$nm + n^2 \log U = (2p + k + kp)(2 + 2p + k) + (2 + 2p + k)^2 \log r = 4p + 4p^2 + 2pk + 2k + 2pk + k^2 + 2kp + 2kp^2 + k^2p + (4 + 4p^2 + k^2 + 4p + 2k + 2pk) \log r$
pentru $p \geq k \Rightarrow$ complexitatea devine: $O(2p^2k + 4p^2 \log r)$
pentru $k > p \Rightarrow$ complexitatea devine: $O(k^2p + k^2 \log r)$
In concluzie, preferam algoritmul F&F.

Problema 3

3.
a)
Consideram circuitul corespunzator lui X_i
Orice nod alegem sa introducem intr-o prima multime, el acopera 2 muchii $\Rightarrow$
Nu este necesar sa introducem in aceeasi multime niciunul dintre vecinii sai directi (Cate una dintre muchiile pe care acestia le-ar putea acoperi, au fost acoperite deja de nodul curent introdus)$\Rightarrow$ Vom lua noduri din 2 in 2 si le punem in prima multime (spre exemplu, prima multime contine nodurile $\{a_{i,1}, a_{i,2}, ..., a_{i,k_i}\}$)
$\Rightarrow$ cea de-a 2-a multime le va contine pe restul, adica pe $\{f_{i,1}, f_{i,2}, ..., f_{i,k_i}\}$ (se procedeaza ca mai sus, alegand insa ca prim nod, un nod f_i)
Ambele multimi au cardinal k_i si au proprietatea ca sunt minime.

b1)
U acopera muchiile lui $G\Rightarrow$ U acopera muchiile lui $H_j, j = \overline{1, m}$
Pentru a avea acces la muchiile lui H_j, trebuie introdus cel putin un nod din H_j. Insa daca introducem doar un nod, nu putem acoperi decat 2 muchii din cele 3 de acoperit.
Astfel, daca introducem 2 noduri este deja suficient pentru a putea acoperi cele 3 muchii de acoperit (nefiind necesar sa le introducem pe toate 3 neaparat)
$\Rightarrow$In multimea U vom avea minim 2 noduri din W_j (multimea nodurilor lui H_j)
$\Rightarrow \mid U \cap V_j \mid \geq 2, \forall j = \overline{1, m}$

b2)
$\mid U \cap (\bigcup_{i=1}^{n} V_i) \mid = \mid U \cap V_1 \mid + \mid U \cap V_2 \mid + ... + \mid U \cap V_n \mid$
cum $\mid U \cap V_1 \mid \geq k_1$ (de la punctul a), $\mid U \cap V_2 \mid \geq k_2$, ... ,$\mid U \cap V_n \mid \geq k_n$
$\Rightarrow \mid U \cap (\bigcup_{i=1}^{n} V_i) \mid \geq k_1 + k_2 + ... + k_n$

$k_1 =$ nr aparitiilor lui x_1 in C
$k_2 =$ nr aparitiilor lui x_2 in C
...
$k_n =$ nr aparitiilor lui x_n in C
$\Rightarrow k_1 + k_2 + ... + k_n =$ numarul aparitiilor tuturor literalilor in $C =$ numarul literalilor din fiecare clauza $*$ nr de clauze $= 3 * m$
$\Rightarrow \mid U \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i) \mid \geq 3m$

b3)
$\mid U \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i) \mid \geq 3m$ (1)
$\mid U \cap W_j \mid \geq 2 \Rightarrow \mid U \cap (\bigcup\limits_{j=1}^{m} W_j) \mid \geq 2m$ (2)
Din (1) si (2) $\Rightarrow \mid U \mid = \mid U \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i) \mid + \mid U \cap (\bigcup\limits_{j=1}^{m} W_j) \mid \geq 5m$
Dar din ipoteza $\mid U \mid = 5m \Rightarrow$
Suntem obligati ca $\mid U \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i) \mid = 3m$ si $\mid U \cap (\bigcup\limits_{j=1}^{m} W_j) \mid = 2m$
$\Rightarrow \mid U \cap W_j \mid = 2$

b4)
Dupa completarea multimii U algoritmul ne descrie o functie de adevar a.i. $\forall i, t(x_i) = true$ daca si numai daca $U \cap V_i = \{f_{i,1}, f_{i,2}, ..., f_{i,k_i}\}$
Conform algoritmului, intr-o clauza C_j va ramane un nod $w_{j,1}$(spre exemplu) care nu apartine lui U. Daca $w_{j,1}$ corespunde unui nod x_i din clauza C_j, atunci nodul incident la muchia care-l contine pe $w_{j,1}$ este un nod $a_{i,k}$ si $a_{i,k} \in U$
$\Rightarrow t(x_i) = true \Rightarrow t(C_j) = true$
Iar daca $w_{j,1}$ corespunde unui nod $\overline{x_i}$ din clauza C_j, atunci nodul incident la muchia care-l contine pe $w_{j,1}$ este un nod $f_{i,k}$ si $f_{i,k} \in U \Rightarrow t(x_i) = false \Rightarrow t(\overline{x_i}) = true \Rightarrow t(C_j) = true \Rightarrow$ functia satisface toate clauzele din C.

c)
Din modul in care il construim pe $U \Rightarrow$ din fiecare clauza adaugam 2 noduri $\Rightarrow$ in total se adauga 2*nr de clauze = $2m$ noduri. Apoi, pentru fiecare x_i, daca $t(x_i) = true$, se adauga k_i noduri, iar daca $t(x_i) = false$, se adauga tot k_i noduri $\Rightarrow$ in total $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} k_i = 3m$
$\Rightarrow \mid U \mid = 2m + 3m = 5m$
Ne ramane de demonstrat ca U acopera tot graful G.
i) pentru fiecare clauza $\exists$ 2 noduri care apartin lui $U \Rightarrow$ toate muchiile fiecarei clauze sunt acoperite.
ii) pentru fiecare literal x_i in U se gasesc fie $\{a_{i,1}, a_{i,2}, ..., a_{i,k_i}\}$, fie $\{f_{i,1}, f_{i,2}, ..., f_{i,k_i}\}$ dupa cum $t(x_i) = true$ sau $false$
$\Rightarrow$ cele k_i noduri acopera toate muchiile unui subgraf ce defineste un literal.
iii) In ceea ce priveste muchiile care apartin multimilor A si F, pentru fiecare clauza 2 muchii sunt deja acoperite, prin faptul ca $\exists$ 2 noduri din fiecare clauza care $\in U$.
Pentru cel de-al treilea nod dintr-o clauza, stim ca el este legat de un nod dintr-un literal.
Daca este legat de un nod $a_{i,p}, p = \overline{1, k_i}$, atunci in clauza C_j va aparea x_i $\Rightarrow t(x_i) = true \Rightarrow \{a_{i,1}, a_{i,2}, ..., a_{i,k_i}\} \in U \Rightarrow a_{i,p} \in U \Rightarrow$am acoperit muchia utilizand un nod din U.
Iar daca este legat de un nod $f_{i,p}, p = \overline{1, k_i}$, atunci in clauza C_j va aparea $\overline{x_i} \Rightarrow t(\overline{x_i}) = true \Rightarrow t(x_i) = false \Rightarrow \{f_{i,1}, f_{i,2}, ..., f_{i,k_i}\} \in U \Rightarrow f_{i,p} \in U \Rightarrow$ am acoperit muchia utilizand un nod din U.
Astfel, am reusit acoperirea tuturor muchiilor lui $G \Rightarrow U$ are proprietatea ceruta.

Problema 4

a)
Dandu-se graful G, consideram o $\chi(G)$-colorare(colorare minimala a nodurilor lui G).
Alegem o culoare X.
Niciun nod de culoare X nu poate fi adiacent cu un alt nod de culoare X (asta ar incalca principiul colorarii nodurilor)
$\Rightarrow$ Toate nodurile de culoarea X fac parte dintr-o multime stabila.
Incercam adaugarea de noi noduri la multimea culorii X.
Nu puteam alege niciun nod adiacent cu vreun nod de culoare $X \Rightarrow$ Vom cauta printre nodurile care nu au vecini in multimea culorii X. Cand gasim un astfel de nod, ii schimbam culoarea in X, pastrand proprietatea de multime stabila si minimalitatea colorarii (nu este introdusa nicio culoare noua).
Se repeta procedeul pana cand nu se mai pot adauga noduri, obtinand in acest fel o multime stabila maximala pentru cel putin una din clasele de colorare.

b)
Daca x si y au aceeasi culoare $\Rightarrow$
(1) $\chi(G) = \chi(G \mid xy)$
(2)$\chi(G) \leq \chi(G + xy)$ (adaugam o culoare noua cu care il coloram pe unul din ei)
(3)$\chi(G) = \chi(G + xy)$
(4)$\chi(G) \leq \chi(G \mid xy)$ (adaugam o culoare noua cu care sa coloram nodul rezultat)
Din (1),(2) $\Rightarrow \chi(G) = \chi(G \mid xy) \leq \chi(G + xy)$
Din (3),(4) $\Rightarrow \chi(G) = \chi(G + xy) \leq \chi(G \mid xy)$
$\Rightarrow$ in ambele cazuri se alege minimul dintre cele 2
$\Rightarrow \chi(G) = min\{\chi(G + xy), \chi(G \mid xy)\}$