

Probabilități și statistică - Cursul 1

Februarie, 2019

Desfășurarea cursului și examinarea

- Primele șase săptămâni: Teoria probabilităților, ultimele șapte săptămâni: Statistică (aproximativ).
- Șase seminarii, șapte laboratoare și treisprezece cursuri;
- Două punctaje intermediare sunt asociate seminarelor și laboratoarelor: T_1 și T_2 :

Desfășurarea cursului și examinarea

- T_1 este suma a șase note: câte un test care se dă la fiecare sfârșit de seminar (10-15 minute). **Trebuie obținute cel puțin 30 de puncte (din cele $6 \times 10 = 60$), aceasta este o condiție de promovare a cursului ($T_1 \geq 30$).**
- T_2 se compune din 20 de puncte prezența și activitatea curentă de laborator plus 40 de puncte pentru temele al căror termen final este în ultima săptămână de școală. **Trebuie obținute cel puțin 30 de puncte (din cele $20+40 = 60$), aceasta este o condiție de promovare a cursului ($T_2 \geq 30$).**

Desfășurarea cursului și examinarea

- Formula de calcul a punctajului final

$$T = T_1 + T_2.$$

- Punctajul acesta se transformă în nota finală ulterior, după o repartizare conform legii normale.

- **Punctajele implicate – T_1 și T_2 – trebuie să fie peste 30.**

- **Dacă T_1 și/sau T_2 este < 30 , atunci toate testele de seminar și/sau toate temele trebuie refăcute în sesiunea de restanțe.**

Table of contents

Experiment aleator și eveniment aleator.

Experiment aleator

Eveniment aleator

Evenimente aleatoare - proprietăți și notații

Funcția de probabilitate

Funcția de probabilitate

Probabilitatea evenimentelor aleatoare elementare

Exerciții

Evenimente aleatoare

Funcția de probabilitate

Bibliography

Experiment aleator

- Noțiunea de *experiență* sau (*experiment*) *aleator* corespunde, intuitiv, unui proces în urma căruia obținem un rezultat care nu poate fi cunoscut înaintea desfășurării procesului, dar a cărui mulțime de rezultate posibile este cunoscută.
- Cel care analizează rezultatele unui astfel de experiment este de obicei un observator neutru și mai rar un participant deși, uneori, ar putea participa la efectuarea experimentului aleator. Experimentele în majoritate sunt practice dar pot fi și abstracte.
- Rezultatele unui experiment aleator sunt datorate *șansei*, iar mecanismul prin care ele (rezultatele) se produc interesează mai puțin. Vom considera că, la un moment dat, avem în atenție un singur experiment, chiar dacă el se poate repeta.

Definition 1

*Se numește **experiment aleator** un experiment al cărui rezultat nu este cunoscut dinainte, dar ale cărui rezultate posibile sunt cunoscute în totalitate și care poate fi repetat în condiții identice.*

- Aruncând un zar, va apărea una dintre fețele $\{1, 2, \dots, 6\}$, fără a ști cu siguranță care dintre ele. ♣
- Aruncând două zaruri, va apărea una dintre combinațiile $\{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$, fără a ști care dintre ele. ♣
- Aruncând două monede, cu siguranță apare stema (s) și/sau banul (b) pe amândouă, iar toate rezultatele posibile sunt combinațiile $(s, s), (s, b), (b, s), (b, b)$. ♣
- Dacă experimentul constă în măsurarea duratei de viață a unei baterii, atunci rezultatul va fi un număr real $x \geq 0$. ♣

Eveniment aleator elementar

- Analizând un experiment aleator, urmărim rezultatul acesteia; întotdeauna un singur rezultat se va produce, fără a ști care (din mulțimea cunoscută a rezultatelor posibile). Vom spune că se produce un *eveniment elementar*.

Definition 2

Un rezultat posibil al unui experiment aleator se numește **eveniment aleator elementar**, iar mulțimea acestora se numește **spațiul de selecție** sau **al evenimentelor elementare** - notat cu Ω .

- După efectuarea unui experiment, doar unul dintre elementele mulțimii Ω se "întâmplă" - și asta conform șansei pe care o are fiecare rezultat posibil al experimentului.
- Asupra rezultatelor experimentului se pot face raționamente, judecăți, iar interesul poate fi atras nu doar de rezultatul în sine cât de tipul rezultatului, de familia din care face el parte.

- Extindem astfel noțiunea de eveniment aleator elementar.

Definition 3

Se numește **eveniment aleator** o anumită submulțime a spațiului de selecție: $A \subseteq \Omega$.

- Aruncând un zar, spațiul evenimentelor elementare este $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$; ar putea interesa apariția unei fețe cu număr par, acesta este evenimentul aleator $A = \{2, 4, 6\}$. ♣
- Aruncând două zaruri, $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$; dacă interesează ca suma fețelor este 4, acesta este evenimentul aleator $A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$. ♣
- La aruncarea a două monede, $\Omega = \{(s, s), (s, b), (b, s), (b, b)\}$. Evenimentul aleator "fețele de pe cele două monede sunt diferite" este $A = \{(s, b), (b, s)\}$, iar cel definit prin "pe cel puțin una dintre cele două monede apare stema" este, formal, $B = \{(s, s), (s, b), (b, s)\}$. ♣

Eveniment aleator

- Uzual un eveniment aleator este definit prin intermediul unui predicat: evenimentul va fi format din evenimentele elementare (rezultatele experimentului) care satisfac predicatul respectiv.
- Un eveniment aleator este privit, formal, ca o submulțime a mulțimii de evenimente elementare Ω .
- Dacă Ω este o mulțime discretă (adică cel mult numărabilă), atunci orice submulțime $A \subseteq \Omega$ este considerată eveniment aleator.
- Dacă Ω nu este discretă, atunci numai anumite submulțimi pot fi evenimente aleatoare.

Definition 4

Spunem că **un eveniment aleator** $A \subseteq \Omega$ **se realizează** sau **se produce** dacă, în urma efectuării experimentului aleator, evenimentul aleator elementar (rezultatul) aparține lui A .

- Evenimentele aleatoare se notează, de obicei, cu litere mari de la începutul alfabetului: A , B , C etc. Deoarece, în majoritatea aplicațiilor Ω va fi o mulțime discretă, vom considera că orice submulțime a lui Ω este un eveniment aleator.
- Nu mai facem distincție între submulțimi din Ω și evenimente aleatoare; proprietățile și operațiile cu mulțimi se transferă asupra evenimentelor aleatoare.

- \emptyset este **evenimentul imposibil** (nu se realizează niciodată);

- Ω este **evenimentul sigur** (sau **total** - se realizează întotdeauna);

Evenimente aleatoare - proprietăți și notații

- dacă $A, B \subseteq \Omega$ sunt evenimente aleatoare, atunci
 - o $A \cup B$ este de asemeni eveniment aleator care se realizează când se realizează măcar unul dintre evenimentele A și B ;
 - o $A \cap B$ este de asemeni eveniment aleator care se realizează când se realizează și A și B ;
 - o $A \setminus B$ este un eveniment aleator care se realizează când se realizează A dar nu și B ;
- dacă A este eveniment aleator, atunci $\bar{A} = \Omega \setminus A$ este de asemenea eveniment aleator și este numit *evenimentul contrar* lui A : \bar{A} se realizează ori de câte ori A nu se realizează;
- dacă $A \subseteq B$, atunci se spune ca evenimentul A îl *implică* pe B ;
- dacă $A \cap B = \emptyset$ se spune că A și B sunt *incompatibile* (sau *disjuncte*), dacă $A \cap B \neq \emptyset$, A și B sunt *compatibile*;

Evenimente aleatoare - proprietăți și notații

- În mod similar se pot defini *reuniunea* sau *intersecția* unui număr finit (sau infinit numărabil) de evenimente aleatoare.

Exemplu. Să considerăm ca experiment aruncarea a două zaruri:

$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$, sunt 36 de evenimente elementare.

Fie A evenimentul “suma zarurilor este 4” și B = “zarurile sunt mai mari decât 4”:

$$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\} \text{ și } B = \{(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$$

- $A \cup B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$;
- $A \cap B = \emptyset$ - A și B sunt evenimente incompatibile;
- $\overline{A} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3), \dots (6, 6)\}$. ♣

Funcția de probabilitate

- Vom considera în această secțiune că Ω este cel mult numărabilă:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\} \text{ (finită sau infinit numărabilă).}$$

- Noțiunea de *probabilitate* are ca punct de plecare ideea de a asocia câte un număr real fiecărui eveniment aleator cu scopul de a le măsura și compara astfel șansele.
- Definiția probabilității se bazează, printre altele, pe faptul că unui eveniment care apare mai frecvent trebuie să îi corespundă o probabilitate mai mare.
- Probabilitatea unui eveniment aleator A se va nota cu $P(A)$. Axiomele care urmează definesc *funcția de probabilitate*.
- Pe o aceeași mulțime de evenimente aleatoare se pot defini diverse funcții de probabilitate!

Axiomele funcției de probabilitate

Definition 5

(Kolmogorov) Dacă Ω este mulțimea evenimentelor aleatoare elementare ale unui experiment aleator, o **funcție de probabilitate** asociată acestuia este o funcție P definită pe familia evenimentelor aleatoare (în cazul nostru $\mathcal{P}(\Omega)$) care satisface

Axioma 1. $0 \leq P(A) \leq 1$, pentru orice eveniment aleator A .

Axioma 2. $P(\Omega) = 1$ și $P(\emptyset) = 0$.

Axioma 3. Dacă evenimentele $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ sunt evenimente aleatoare mutual incompatibile, atunci

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Axiomele funcției de probabilitate

- *Axioma 1* ne spune că probabilitatea asociată unui eveniment aleator este un număr nenegativ și subunitar.
- *Axioma 2* arată că orice rezultat al experimentului, cu probabilitate 1, se găsește în mulțimea Ω . În plus, mai spune că evenimentul imposibil nu se produce niciodată.
- *Axioma 3* arată că, pentru orice șir de evenimente aleatoare mutual incompatibile, probabilitatea de a se produce măcar unul dintre aceste evenimente este suma probabilităților tuturor evenimentelor.
- În cazul în care șirul este infinit (înțelegând prin aceasta și că $P(A_k) > 0$, pentru o infinitate de indici k), *axioma 3* garantează și convergența seriei din membrul drept.

Proposition 1

Fie A_1, A_2, \dots, A_m evenimente aleatoare mutual incompatibile, atunci

$$P\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) = \sum_{k=1}^m P(A_k).$$

proof: Considerăm în axioma 3, $A_k = \emptyset, \forall k \geq m+1$. ■

Proposition 2

Fie A și B evenimente aleatoare, atunci

- (i) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \setminus B)$;
- (ii) $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$;
- (iii) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
- (iv) *dacă A implică B ($A \subseteq B$), atunci $P(A) \leq P(B)$.*

Proprietăți ale funcției de probabilitate

proof: (i): în propoziția 1 luăm $m = 2$, $A_1 = A \cap B$, $A_2 = A \setminus B$.
(ii): se folosește (i) și propoziția 1. (iii): utilizăm propoziția 1 și axioma 2: $1 = P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$. (iv): conform (i) și axiomei 1 avem $P(B) = P(B \cap A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$.

Proposition 3

(Principiul includerii și al excluderii) Dacă A_1, A_2, \dots, A_m sunt evenimente aleatoare, atunci

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) &= \sum_{k=1}^m P(A_k) - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq m} P(A_{k_1} \cap A_{k_2}) + \dots + \\ &+ (-1)^{p+1} \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq m} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_p}) + \dots + \\ &+ (-1)^{m+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m). \end{aligned}$$

Proprietăți ale funcției de probabilitate

dem.: Procedăm prin inducție după m : pentru $m = 2$ avem propoziția 2 (ii). Presupunem acum că proprietatea este adevărată pentru orice $(m - 1)$ evenimente aleatoare.

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right) - P\left[\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right) \cap A_m\right] + P(A_m) = \\ &= P\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right) - P\left[\bigcup_{k=1}^{m-1} (A_k \cap A_m)\right] + P(A_m). \end{aligned} \quad (1)$$

Pentru primele două sume aplicăm ipoteza inductivă și obținem

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right) &= \sum_{k=1}^{m-1} P(A_k) - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq m-1} P(A_{k_1} \cap A_{k_2}) + \dots + \\ &+ (-1)^{p+1} \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq m-1} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_p}) + \dots + \end{aligned} \quad (2)$$

Proprietăți ale funcției de probabilitate

$$\begin{aligned} & +(-1)^m P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m-1}), \\ & P \left[\bigcup_{k=1}^{m-1} (A_k \cap A_m) \right] = \sum_{k=1}^{m-1} P(A_k \cap A_m) - \quad (3) \\ & = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq m-1} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_m) + \dots + \\ & +(-1)^{p+1} \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq m-1} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_p} \cap A_m) + \dots + \\ & +(-1)^{m+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m-1} \cap A_m). \end{aligned}$$

Combinând (1), (2) și (3) obținem proprietatea dorită. ■

Probabilitatea evenimentelor aleatoare elementare

- Vom nota cu $P(\omega)$ probabilitatea evenimentului aleator elementar $\{\omega\}$, $\forall \omega \in \Omega$. Utilizând axioma 3, pentru orice eveniment A , avem

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega). \quad (4)$$

- Dacă A conține un număr finit de elemente, atunci suma de mai sus este o sumă finită sau este o serie dacă A conține un număr infinit de elemente. Suma este nulă dacă A este mulțimea vidă.
- Obținem o definiție echivalentă a funcției de probabilitate dacă înlocuim axioma 3 cu

Axioma 3'. Pentru orice eveniment aleator A

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Evenimente aleatoare elementare echiprobabile

În multe situații Ω constă din evenimente elementare egal probabile și în număr finit:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}, P(\omega_i) = p, \forall 1 \leq i \leq n,$$

atunci

$$P(\Omega) = 1 = \sum_{i=1}^n P(\omega_i) = np, \text{ i. e., } P(\omega_i) = p = \frac{1}{n}, \forall i.$$

Să considerăm, în acest caz, un eveniment aleator A , cu $|A| = k$, $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$, atunci

$$P(A) = \sum_{j=1}^k P(\omega_{i_j}) = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Evenimente aleatoare elementare echiprobabile

Am demonstrat în acest fel

Proposition 4

Dacă evenimentele aleatoare elementare sunt egal probabile (și în număr finit), atunci probabilitatea unui eveniment aleator A se determină ca raportul dintre numărul de elemente din A și numărul de elemente din Ω .

- În acest caz probabilitatea unui eveniment aleator este numărul de cazuri favorabile supra numărul total de cazuri posibile. Practic, calculul probabilităților devine o problemă de numărare.
- Situațiile în care se poate aplica rezultatul de mai sus trebuie să fie distinse cu grijă pentru că *nu întotdeauna evenimentele elementare sunt egal probabile*. Drept reper putem folosi principiul subînțeleș al simetriei: evenimente similare sau “identice” au probabilități egale.

Evenimente aleatoare elementare echiprobabile

Exemplu. Atunci când extragem o bilă dintr-o urnă se înțelege că orice bilă are aceeași probabilitate de a fi extrasă. Dacă în urnă avem bile de culori diferite: două bile albe și trei bile negre, nu mai putem presupune că fiecare culoare are aceleași șanse de a fi extrasă. ♣

Exemplu. Dacă se aruncă un zar obișnuit, probabilitatea să apară pe față unul dintre numerele $\{1, 2, \dots, 6\}$ este aceeași. Dacă însă pe trei dintre fețe este înscris numărul 1, iar pe celelalte fețe numerele 2, 3 și 4, atunci, la aruncarea zarului apariția numărului 1 nu mai este egală cu a celorlalte trei numere. ♣

Exerciții propuse spre rezolvare pentru seminar

● **Evenimente aleatoare:** I.1, I.3, I.6

● **Funcția de probabilitate:** II.1 (II.2), II.13, II.20, II.21, II.23

● **Rezervă:** II.24, II.25, II.26

Exerciții - evenimente aleatoare

I.1. Trei jucători, 1, 2 și 3 aruncă pe rând, în această ordine, o monedă. Câștigă cel care obține primul stema. Mulțimea evenimentelor elementare poate fi descrisă astfel (0 pentru ban și 1 pentru stemă)

$$\Omega = \{1, 01, 001, 0001, \dots, 0000 \dots 01, \dots\}$$

a) Determinați evenimentele aleatoare $A_i = \text{"jucătorul } i \text{ câștigă jocul, } i = 1, 3\text{"}$.

b) Determinați evenimentele aleatoare $\overline{A_1 \cup A_3}$, $\overline{A_1 \cup A_2}$, $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$ și $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$.

c) Arătați că $A_1 \cup A_3 \subseteq \overline{A_2}$. Este adevărat că $A_1 \cup A_3 = \overline{A_2}$?

I.2. O limuzină care face curse către un aeroport are o capacitate de 6 locuri și transportă pasageri de la cele trei hoteluri ale aeroportului.

Exerciții - evenimente aleatoare

a) Descrieți evenimentele aleatoare elementare în cazul în care interesează câți pasageri ajung de la fiecare dintre cele trei hoteluri la aeroport.

b) Descrieți evenimentele aleatoare elementare în cazul în care interesează doar numărul de pasageri care ajung la aeroport.

I.3. Se aruncă două zaruri (unul roșu și unul negru). Fie A evenimentul “suma zarurilor este un număr impar”, B = “cel puțin unul dintre zaruri are valoarea 1” și C = “suma zarurilor este 5”. Descrieți evenimentele $A \cap B$, $A \cup C$, $B \cap C$, $A \cap C$, $\overline{A} \cap B$ și $A \cap B \cap \overline{C}$.

I.4. Fie A și B două evenimente asociate unui experiment aleator. Arătați că

a) $A \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$, $A \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$;

b) $A \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$, $A \cap B = B \cap (A \cup \overline{B})$;

c) $A \cap B = B \cap (\overline{A \cap B})$, $A \cap B = B \setminus (\overline{A \cap B})$.

I.5. Fie A și B evenimente aleatoare. Simplificați următoarele expresii

- a) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$;
- b) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$.

I.6. Fie A , B și C trei evenimente aleatoare asociate unui experiment. Determinați, în funcție de A , B și C , expresiile corespunzătoare următoarelor evenimente

- a) dintre cele trei evenimente se realizează doar A ;
- b) se realizează A și C dar nu și B .
- c) cel puțin două dintre cele trei evenimente se realizează;
- d) se realizează exact unul dintre cele trei evenimente;
- e) se realizează cel mult trei dintre ele.

Exerciții - evenimente aleatoare

I.7. Fie A și B evenimente aleatoare.

- a) Arătați că $\overline{A} = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ și $\overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$;
- b) Arătați că $\overline{A \cap B} = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{B})$.
- c) Se aruncă un zar și se notează cu A evenimentul că apare un număr impar, iar cu B evenimentul că apare un număr mai mic decât 4. Determinați evenimentele din stânga și din dreapta semnului de egalitate de la punctul b).

Exerciții - Funcția de probabilitate

II.1. Se consideră un experiment aleator cu $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$. Se știe că $P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = 1/2$, $P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}) = 5/6$ și $P(\{\omega_1, \omega_2\}) = 1/6$. Considerăm evenimentele $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\}$, $B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ și $C = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$.

- Evenimentele A și B sunt compatibile? Dar A și C ?
- Calculați $P(A \cup (B \setminus C))$, $P(A \Delta B)$, $P(A \cup C)$ și $P(B \setminus A)$.
- Este posibil ca $P(\{\omega_1, \omega_2\}) = 1/4$, $P(\{\omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}) = 3/8$ și $P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}) = 15/16$?

II.2. Se consideră un experiment aleator cu $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$. Se știe că $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = 1/6$ și $P(\{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}) = 2/3$. Considerăm evenimentul $A = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Definiți un eveniment B incompatibil cu A , dar nu contrar lui A .

- Arătați că $P(A \cup B) < 1$.
- Calculați $P(A \setminus B)$, $P(A \cap B)$, $P(\overline{B})$ și $P(A \Delta B)$.
- Este posibil ca $P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = 1/4$, $P(\{\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}) = 2/3$ și $P(\{\omega_1, \omega_3\}) = 1/5$?

Exerciții - Funcția de probabilitate

II.3. Fie A și B două evenimente aleatoare astfel încât $P(B \setminus A) = 1/3$, $P(A \cap B) = 1/6$ și $P(A \setminus B) = 1/3$.

- a) Calculați $P(A)$, $P(A \Delta B)$, $P(A \cup B)$ și $P(A \setminus \overline{B})$.
- b) Evenimentele A și B sunt contrare? A și \overline{B} sunt compatibile?

II.4. Fie A și B două evenimente aleatoare astfel încât $P(A \setminus B) = 1/6$, $P(A \cap B) = 1/6$ și $P(B \setminus A) = 1/3$.

- a) Calculați $P(A \cup B)$, $P(A \Delta B)$, $P(\overline{A} \cap B)$ și $P(\overline{A} \setminus B)$.
- b) Evenimentele A și B sunt compatibile? A și $B \setminus A$ sunt contrare?

II.5. Fie A și B două evenimente aleatoare astfel încât $P(A \setminus B) = 2/7$, $P(A \cap B) = 1/7$ și $P(A \Delta B) = 5/7$.

- a) Calculați $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(\overline{A} \setminus B)$ și $P(B \setminus A)$.
- b) Evenimentele A și B sunt contrare? Dar compatibile?

Exerciții - Funcția de probabilitate

II.6. Fie A și B două evenimente aleatoare așa încât $P(B \setminus A) = 2/5$, $P(A \cap B) = 1/5$ și $P(\overline{A}) = 5/8$.

- a) Calculați $P(B)$, $P(A \Delta B)$, $P(A \cup B)$ și $P(A \setminus B)$.
- b) Evenimentele A și B sunt contrare? Dar compatibile?

II.7. Fie A și B două evenimente aleatoare astfel încât $P(A \setminus \overline{B}) = 1/6$, $P(A \cup B) = 5/6$ și $P(B \setminus A) = 1/3$.

- a) Calculați $P(A)$, $P(A \Delta B)$, $P(A \cap B)$ și $P(A \setminus B)$.
- b) Evenimentele B și \overline{A} sunt contrare? A și $A \setminus \overline{B}$ sunt compatibile?

II.8. Se consideră un experiment aleator astfel ca $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$. Se știe că $P(\{\omega_2, \omega_3\}) = 1/3$, $P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}) = 5/6$ și $P(\{\omega_4, \omega_5\}) = 1/6$. Considerăm evenimentele $A = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, $B = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ și $C = \{\omega_1, \omega_4, \omega_5\}$.

- a) Evenimentele A și B sunt contrare? Dar \overline{A} și B ?
- b) Calculați $P(A \cup C)$, $P(C \setminus B)$ și $P(A \Delta B)$.

Exerciții - Funcția de probabilitate

II.9. Se consideră un experiment aleator cu $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$. Se știe că $P(\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}) = 7/12$, $P(\{\omega_3, \omega_5\}) = 1/3$ și $P(\{\omega_2, \omega_4\}) = 5/12$. Considerăm evenimentele $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ și $C = \{\omega_1, \omega_6\}$.

a) Evenimentele A și C sunt contrare? A și B sunt compatibile?

b) Calculați $P(A \cup (B \cap C))$, $P(B \Delta C)$, $P(C \setminus A)$, $P(B \setminus \overline{A})$ și $P(\overline{B} \cap C)$.

II.10. Considerăm un experiment aleator cu șase rezultate posibile $\Omega = \{s_1, s_2, \dots, s_6\}$. Știm că $2P(\{s_1, s_4\}) = P(\{s_2, s_3, s_5, s_6\})$ și $P(\{s_2, s_5\}) = 1/6$. Considerăm evenimentele $A = \{s_1, s_2, s_4, s_5\}$, $B = \{s_2, s_3, s_5, s_6\}$ și $C = \{s_1, s_4\}$.

a) Evenimentele A și B sunt compatibile? Dar A și C ?

b) Calculați $P(B \cup (C \cap A))$, $P(C \setminus B)$, $P(A \cap \overline{B})$ și $P(A \Delta B)$.

II.11. Se consideră un experiment aleator cu $\Omega = \{s_1, s_2, \dots, s_6\}$. Se știe că $P(\{s_1, s_3, s_6\}) = 2/5$, $P(\{s_2, s_4\}) = 2/5$ și $P(\{s_2, s_4, s_6\}) = 3/5$. Considerăm evenimentele $A = \{s_5, s_6\}$, $B = \{s_2, s_4, s_5, s_6\}$ și $C = \{s_1, s_3, s_5\}$.

- a) Evenimentele A și C sunt contrare? A și B sunt compatibile?
- b) Calculați $P(B \cup C)$, $P(A \Delta C)$ și $P(C \setminus A)$.

II.12. Se consideră un experiment aleator cu $\Omega = \{s_1, s_2, \dots, s_6\}$. Se știe că $P(\{s_1, s_2, s_4, s_5\}) = 2P(\{s_3, s_6\})$ și $P(\{s_3, s_4, s_6\}) = 1/2$. Considerăm evenimentele $A = \{s_1, s_2, s_5\}$, $B = \{s_4\}$ și $C = \{s_1, s_2, s_3, s_5, s_6\}$.

- a) Evenimentele A și B sunt incompatibile? Dar A și C ?
- b) Calculați $P(B \cup C)$, $P(A \Delta B)$, $P(C \setminus A)$ și $P(B \cap (A \cup C))$.

II.13. Considerăm un experiment aleator a cărui mulțime de evenimente elementare este $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Care dintre următoarele funcții poate fi o funcție de probabilitate definită pe Ω ? De ce?

a) $P(\omega_1) = \frac{1}{3}, P(\omega_2) = \frac{1}{9}, P(\omega_3) = \frac{1}{3}, P(\omega_4) = \frac{1}{9}, P(\omega_5) = \frac{1}{9};$

b) $P(\omega_1) = \frac{1}{4}, P(\omega_2) = \frac{1}{8}, P(\omega_3) = -\frac{1}{4}, P(\omega_4) = \frac{1}{2}, P(\omega_5) = \frac{3}{8};$

c) $P(\omega_1) = \frac{1}{2}, P(\omega_2) = \frac{1}{8}, P(\omega_3) = \frac{1}{8}, P(\omega_4) = \frac{1}{8}, P(\omega_5) = \frac{3}{8}.$

II.14. Fie A și B două evenimente aleatoare așa încât $P(A \cap B) = 1/4$, $P(\bar{A}) = 1/3$ și $P(B) = 1/2$. Calculați $P(A \cup B)$, $P(A \setminus B)$, $P(B \setminus A)$ și $P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

II.15. Fie A și B două evenimente aleatoare astfel încât $P(A \cup B) = 3/4$, $P(A \cap B) = 1/6$ și $P(\bar{B}) = 4/5$. Calculați probabilitatea evenimentelor A , \bar{A} , $(B \setminus A)$, $(A \setminus B)$ și $A \cup \bar{B}$.

II.16. Fie A și B două evenimente aleatoare incompatibile pentru care se cunosc $P(A) = 0.3$ și $P(B) = 0.5$. Care este probabilitatea ca

- a) să se realizeze A sau B ?
- b) să se realizeze B dar nu și A ?
- c) să se realizeze simultan cele două evenimente?

II.17. Doi jucători de șah seniori, s_1 și s_2 și trei juniori j_1 , j_2 și j_3 se întâlnesc într-un turneu. Orice senior are probabilitatea de a câștiga turneul dublă față de cea a unui junior.

- a) Determinați șansele de a câștiga turneul ale unui junior.
- b) Care este probabilitatea ca s_1 sau j_1 să câștige turneul?

II.18. 60% dintre studenții unei anumite grupe sunt genii (în informatică), 70% sunt amatori de ciocolată, iar 40% fac parte simultan din ambele categorii. Se alege la întâmplare un student din această grupă. Care este probabilitatea ca el să nu fie nici amator de ciocolată și nici geniu?

II.19. Pentru ca o rezoluție să ajungă în fața președintelui S.U.A. trebuie să treacă prin Senat și prin Camera Reprezentanților. Dintre toate rezoluțiile prezentate acestor două corpuri legislative 60% trec de Cameră, 70% trec de Senat și 80% trec de cel puțin unul dintre cele două corpuri. Să se calculeze probabilitatea ca

- a) o rezoluție oarecare să ajungă la președinte.
- b) o rezoluție oarecare să treacă de exact una dintre camerele legiuitoare.

Exerciții - Funcția de probabilitate

II.20. Un elev trebuie să aleagă două dintre următoarele cursuri: franceză, matematici și istorie. El alege istorie cu probabilitate $5/8$, franceză cu probabilitate $5/8$ și alege franceză și istorie cu probabilitate $1/4$. Care este probabilitatea pentru ca elevul să aleagă matematici? Dar probabilitatea ca el să aleagă istorie sau franceză?

II.21. Într-o cursă hipică se întrec trei cai: H_1 , H_2 și H_3 . H_1 are de două ori mai multe șanse ca H_2 să câștige, iar H_2 de două ori mai multe șanse ca H_3 să câștige.

- a) Care sunt probabilitățile de a câștiga ale celor trei cai?
- b) Dar probabilitatea ca nici primul, nici al doilea cal să nu câștige?

II.22. Fie A și B două evenimente aleatoare. Arătați că

- a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$;
- b) $P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A)$;
- c) $P(A \Delta B) = P(A) - 2P(A \cap B) + P(B)$.

II.23. Arătați că pentru trei evenimente aleatoare A, B, C au loc următoarele relații

- a) $P(A \cap B) + P[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1;$
- b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A) + P(\overline{A} \cap B) = 1;$
- c) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(A) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = 1;$
- d) $P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) - P(\overline{A})P(\overline{B}).$

II.24. Fie A_1, A_2 și A_3 trei evenimente asociate unui experiment aleator.

- a) În ce condiții are loc relația
$$P(A_1 \cap (A_2 \cup A_3)) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)?$$
- b) Demonstrați că, dacă $A \cap B \cap C = \emptyset$, atunci
$$P[(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)] = P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A).$$

II.25*. Doi studenți x și y urmează un curs la care, în urma examinării, se poate obține unul din următoarele calificative: A, B sau C. Probabilitatea ca x să obțină B este 0.3. Probabilitatea ca y să obțină B este 0.4. Probabilitatea ca nici unul să nu obțină A dar cel puțin unul să obțină B este 0.1. Care este probabilitatea ca cel puțin unul dintre studenți să obțină B dar nici unul să nu obțină C?

II.26*. Într-o urnă sunt zece bile numerotate de la 1 la 10; din urnă se extrag două bile. Care este probabilitatea ca suma celor două numere astfel obținute să fie impară dacă

- a) cele două bile sunt extrase simultan?
- b) cele două bile sunt extrase una după alta fără întoarcere?
- c) cele două bile sunt extrase una după alta cu întoarcere?

II.27*. Un zar este construit în așa fel încât probabilitatea de a apărea o față este proporțională cu numărul de pe acea față.

- a) Care este probabilitatea de a obține o față cu număr par la o aruncare?
- b) Dar probabilitatea de a obține un număr prim?

II.28. Un zar este construit în așa fel încât numerele pare au aceeași probabilitatea de a apărea, la fel, numerele impare au aceeași probabilitate de a apărea, iar orice număr par are probabilitatea de a apărea dublă decât aceea a oricărui număr impar.

Care este probabilitatea ca la o aruncare să se obțină

- a) o față cu număr prim?
- b) o față cu număr par?
- b) o față cu număr prim impar?

II.29. Un zar este construit în așa fel încât orice față pară are probabilitatea de a apărea dublă decât orice față impară. Care este probabilitatea ca la o aruncare să se obțină

- a) o față cu număr impar?
- b) o față cu număr mai mic sau egal cu 4?
- b) o față cu număr prim par?

II.30. Un zar este aruncat de trei ori; ce este mai probabilă: o sumă de 11 sau o sumă de 12? (de Méré către Pascal.)

II.31*. Dacă $P(A) = 0.9$ și $P(B) = 0.8$, arătați că $P(A \cap B) \geq 0.7$.

- a) Arătați că $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.
- b) Demonstrați prin inducție inegalitatea lui Bonferroni: pentru n evenimente aleatoare A_1, A_2, \dots, A_n avem

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - n + 1.$$

II.32*. Se consideră un experiment care are un număr infinit numărabil de evenimente aleatoare elementare:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}.$$

- a) Arătați că nu este posibil ca toate evenimentele elementare să aibă o aceeași probabilitate nenulă.
- b) Este posibil ca toate evenimentele elementare să aibă probabilitate nenulă?

II.33*. Se consideră un experiment aleator și Ω mulțimea evenimentelor elementare. Să se arate că funcția $d : \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, definită prin $d(A, B) = P(A \Delta B)$ este o metrică pe familia evenimentelor aleatoare $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exerciții - Funcția de probabilitate

II.34.** Fie A_1, A_2, \dots, A_n evenimente aleatoare cu proprietățile:

- (i) $A_i \subseteq \bigcup_{j \neq i} A_j, \forall i = \overline{1, n};$
- (ii) $A_i \cap A_j \cap A_k = \emptyset, \forall 1 \leq i < j < k \leq n.$

Să se arate că

- a) $2P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i);$
- b) pentru orice $1 \leq i \leq n$, există cel mult un $j \neq i$ astfel încât $A_i \cap A_j \neq \emptyset.$

Bibliography



Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scietific, 2002.



Gordon, H., *Discrete Probability*, Springer Verlag, New York, 1997.



Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.



Ross, S. M., *A First Course in Probability*, Prentice Hall, 5th edition, 1998.



Stone, C. J., *A Course in Probability and Statistics*, Duxbury Press, 1996.