

Probabilități și statistică - Curs 3

Martie 2019

Table of contents

Formule probabilistice

Formula de înmulțire

Scheme probabilistice

Schema hipergeometrică (sau schema bilei neîntoarce)

Schema lui Poisson

Schema binomială

Schema geometrică

Variabile aleatoare discrete

Introducere

Repartiția unei variabile aleatoare discrete

Exerciții

Formula de înmulțire

Scheme probabilistice

Repartiții ale variabilelor aleatoare discrete

Bibliography

Proposition 1

Fie A_1, A_2, \dots, A_n evenimente aleatoare oarecari, atunci

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}),$$

când $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$.

proof: Membrul drept al relației de mai sus este egal cu

$$P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdot \dots \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})} = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

(după simplificările evidente). ■

Formula de înmulțire

Exemplu. într-o urnă sunt 5 bile albe și 5 bile negre. Se scot 3 bile, una câte una fără întoarcere.

- (a) Care este probabilitatea obținerii a trei bile albe?
(b) Dar a două bile albe și una neagră?

Soluție:

- (a) Pentru prima întrebare fie $A_i =$ "a i-a bilă extrasă este albă"
($i = \overline{1, 3}$), atunci

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, \quad P(A_2|A_1) = \frac{4}{9}, \quad P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{3}{8}$$

și

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}.$$

Formula de înmulțire

(b) Pentru a doua cerință probabilitatea cerută este

$$P\left(\left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right) \cup \left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) \cup \left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right)\right) =$$

$$P\left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right) + P\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) + P\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right)$$

și fiecare dintre aceste trei probabilități se calculează cu formula de înmulțire. ♣

Formula de înmulțire

Exemplu. Într-o urnă sunt 4 bile albe și 6 bile negre. Se scot 3 bile, una câte una fără întoarcere.

- (a) Care este probabilitatea obținerii a trei bile negre?
- (b) Care este probabilitatea ca prima și a treia bilă să fie albe iar cea de-a doua neagră?
- (c) Dar probabilitatea obținerii a două bile negre și una albă?

Soluție:

- (a) Pentru prima întrebare fie $A_i =$ "a i -a bilă extrasă este neagră".

$$P(A_1) = \frac{6}{10}, \quad P(A_2|A_1) = \frac{5}{9}, \quad P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{4}{8} \text{ și}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}.$$

Formula de înmulțire

(b) Pentru a doua cerință probabilitatea cerută este

$$P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2|\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_3}|\overline{A_1} \cap A_2),$$

iar

$$P(\overline{A_1}) = \frac{4}{10}, P(A_2|\overline{A_1}) = \frac{6}{9}, P(\overline{A_3}|\overline{A_1} \cap A_2) = \frac{3}{8}.$$

$$P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{10}.$$

Formula de înmulțire

(c) Pentru a treia cerință probabilitatea cerută este

$$P\left(\left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right) \cup \left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) \cup \left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right)\right) =$$

$$P\left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right) + P\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) + P\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right)$$

și fiecare dintre aceste trei probabilități se calculează cu formula de înmulțire. De exemplu

$$P\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) = P\left(A_1\right) \cdot P\left(\overline{A_2} \mid A_1\right) \cdot P\left(A_3 \mid A_1 \cap \overline{A_2}\right) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{6}.$$

Schema hipergeometrică (sau schema bilei neîntoarse)

- Această schema probabilistică folosește următorul context:
într-o urnă sunt n_1 bile albe și n_2 bile negre, $n = n_1 + n_2$.
Din urnă se extrag, fără întoarcere k bile (cele k bile sunt extrase simultan din urnă).

Proposition 2

Fie $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, astfel încât $k_1 \leq n_1$, $k_2 \leq n_2$ și $k = k_1 + k_2$.
Probabilitatea ca dintre cele k bile, exact k_1 să fie albe și k_2 să fie negre este

$$\frac{\binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}}$$

Schema hipergeometrică (sau schema bilei neîntoarse)

- Mai general: într-o urnă sunt n_1 bile de culoare c_1 , n_2 bile de culoare c_2, \dots, n_p bile de culoare c_p (unde $n = n_1 + n_2 + \dots + n_p$). Din urnă se extrag, fără întoarcere k bile (extrase simultan).

Proposition 3

Fie $k_1, k_2, \dots, k_p \in \mathbb{N}$, astfel încât $k_i \leq n_i$, $1 \leq i \leq p$ și $k = k_1 + k_2 + \dots + k_p$. Probabilitatea ca dintre cele k bile, exact k_1 să fie de culoare c_1 , k_2 să fie de culoare c_2, \dots, k_p să fie de culoare c_p este

$$\frac{\binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2} \cdot \dots \cdot \binom{n_p}{k_p}}{\binom{n}{k}}$$

Schema hipergeometrică

proof: Evident numărul total de posibilități este $\binom{n_1 + n_2}{k_1 + k_2} =$
 $\binom{n}{k}$. Numărul de cazuri favorabile: există $\binom{n_1}{k_1}$ posibilități de a
obține exact k_1 bile albe și pentru fiecare dintre aceste posibilități
există $\binom{n - n_1}{k - k_1} = \binom{n_2}{k_2}$ posibilități ca restul de $k - k_1 = k_2$
bile să fie negre. ■

Schema hipergeometrică

Exemplu. într-o urnă sunt 4 bile albe, 3 bile roșii, 5 bile negre și 4 bile albastre. Din urnă se extrag fără întoarcere 7 bile.

(a) Care este probabilitatea ca dintre bilele extrase 2 să fie albe, 3 să fie negre și 2 albastre?

(a) Care este probabilitatea ca dintre bilele extrase exact 4 să fie negre?

Soluție:

$$(a) \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{4}{0} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{16}{7}},$$

$$(b) \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{11}{3}}{\binom{16}{7}} \cdot \clubsuit$$

Schema lui Poisson

- Cadrul acestei scheme este următorul: considerăm un experiment aleator și n evenimente aleatoare independente (asociate acestui experiment): A_1, A_2, \dots, A_n cu probabilități cunoscute:

$$P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, \dots, P(A_n) = p_n.$$

Proposition 4

Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$; probabilitatea ca dintre cele n experimente să se realizeze exact k este egală cu coeficientul lui x^k din dezvoltarea polinomului

$$(p_1x + q_1) \cdot (p_2x + q_2) \cdot \dots \cdot (p_nx + q_n),$$

unde $q_i = P(\overline{A_i})$, $i = 1, n$.

proof: Fie $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ evenimentele care se realizează dintre cele n ($1 \leq i_j \leq n$). Se mai realizează evenimentele de forma \overline{A}_i , cu $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. Aceste evenimente sunt independente; probabilitatea ca ele să se realizeze simultan este

$$\left(\prod_{j=1}^k p_{i_j} \right) \cdot \left(\prod_{i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}} q_i \right), \text{ adunăm aceste probabilități:}$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \left(\prod_{j=1}^k p_{i_j} \right) \cdot \left(\prod_{i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}} q_i \right),$$

dar această sumă se mai poate obține adunând toate produsele de forma: pentru k dintre factorii polinomului alegem coeficientul lui x , iar pentru ceilalți $(n - k)$ alegem termenul liber al binomului. Rezultatul este chiar coeficientul lui x^k din dezvoltarea polinomului.



Schema binomială

- Considerăm un experiment aleator și un eveniment aleator A cu probabilitate cunoscută $P(A) = p$. Experimentul se efectuează de n ori în mod independent.

Proposition 5

Probabilitatea ca evenimentul A să se realizeze de exact k ori ($0 \leq k \leq n$) în cele n efectuări ale experimentului este

$$p^k(1-p)^{n-k} \binom{n}{k}.$$

Schema binomială

proof: Fie \mathcal{E} experimentul aleator din enunț. Putem modela un nou experiment aleator \mathcal{E}' care ca consta din n efectuări independente ale experimentului \mathcal{E} . Relativ la acest nou experiment definim următoarele evenimente aleatoare: A_i - acel eveniment care se realizează când la a i -a efectuare (din cadrul lui \mathcal{E}') a experimentului \mathcal{E} se produce evenimentul A .

Ajungem astfel la o schemă Poisson, în care evenimentele independente A_1, A_2, \dots, A_n au fiecare aceeași probabilitate p . Probabilitatea cerută este coeficientul lui x^k din dezvoltarea binomului $[px + (1 - p)]^n$.



Schema binomială

Exemplu. Se aruncă două zaruri de 10 ori. Care este probabilitatea ca de exact 6 ori produsul celor două fețe să fie 12?

Soluție: Fie A = "produsul fețelor este 12" (la o aruncare), $A = \{(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)\}$, de unde obținem $P(A) = 4/36 = 1/9$. Probabilitatea ca A să se realizeze de exact 6 ori este

$$\frac{1}{9^6} \cdot \frac{8^4}{9^4} \cdot \binom{10}{6} \cdot \clubsuit$$

- Această schemă probabilistică are următorul context: efectuăm un experiment aleator până când se realizează un eveniment aleator A (legat de acest experiment), cu probabilitate cunoscută $P(A) = p$.

Proposition 6

Probabilitatea ca evenimentul A să se realizeze exact la n -a efectuare a experimentului ($n \geq 1$) este $p(1 - p)^{n-1}$.

proof: Notăm cu A_i evenimentul care se realizează dacă și numai dacă evenimentul A se realizează la a i -a repetare a experimentului. Evenimentele $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ sunt independente și au aceeași probabilitate p . Probabilitatea ca evenimentul A să se realizeze exact la n -a efectuare a experimentului este

$$\begin{aligned} P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \dots \cap \overline{A}_{n-1} \cap A_n) &= P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\overline{A}_{n-1}) \cdot P(A_n) = \\ &= p(1 - p)^{n-1}. \end{aligned}$$

Schema geometrică

Exemplu. O urnă conține 3 bile roșii, 2 negre și 4 bile albastre. Se scoate o bilă din urnă și apoi se pune la loc. Se repetă experiența până se obține o bilă roșie sau una albastră. Care este probabilitatea ca abia la a patra extragere să se realizeze acest eveniment?

Soluție: Fie A = "bila extrasă este roșie sau albastră", $P(A) = 7/9$. Probabilitatea ca evenimentul A să se producă abia la a patra extragere:

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{2^3}{9^3} \cdot \clubsuit$$

Variabile aleatoare discrete - Introducere

- Adesea după efectuarea unei experiențe aleatoare suntem interesați să determinăm valoarea unei funcții ce are ca argument rezultatul experimentului: suma/produsul zarurilor, de câte ori apare stema la aruncarea unei monede etc.
- Aceasta deoarece rezultatul unui experiment este de multe ori unul cantitativ (i.e., se poate măsura într-un anume fel), este un număr întreg sau real.
- Rezultatul numeric al măsurării unui experiment aleator se numește *variabilă aleatoare* - deoarece este un rezultat care variază aleator: de la o efectuare la alta a experimentului nostru rezultatul poate fi altul conform șanselor corespunzătoare.
- Informal, o variabilă aleatoare este o funcție care asociază fiecărui eveniment aleator elementar un număr - care este rezultatul unei observații sau măsurători a evenimentului.

Repartiția unei variabile aleatoare discrete

Definition 1

*Dat un experiment aleator \mathbb{E} și Ω mulțimea evenimentelor aleatoare elementare, o **variabilă aleatoare** reală este o funcție $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât pentru orice interval $J \subseteq \mathbb{R}$, $X^{-1}(J)$ este un eveniment aleator.*

Definition 2

*O **variabilă aleatoare** se numește **discretă**, dacă imaginea ei are cardinal cel mult numărabil, adică $|X(\Omega)| \leq \aleph_0$. Altfel este numită **variabilă aleatoare continuă**.*

- Dacă spațiul evenimentelor elementare aleatoare este discret (i.e., $|\Omega| \leq \aleph_0$), atunci o variabilă aleatoare asociată experimentului corespunzător nu poate fi decât discretă.

Repartiția unei variabile aleatoare discrete

- Dacă $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, atunci mulțimea perechilor (x_i, p_i) formează *distribuția* sau *repartiția variabilei aleatoare discrete* X și uzual se notează sub forma unui tabel:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix} \quad (1)$$

- Se utilizează notațiile $P\{X = x_i\} = P(X = x_i) = p_i$. În mod evident suma (care poate fi și o serie) a probabilităților din a doua linie a tabelului de repartiție este 1:

$$\sum_i p_i = 1, 0 < p_i \leq 1, \forall i$$

Repartiția unei variabile aleatoare discrete

Definition 3

Fie $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare discretă

- (i) Se numește **funcție de masă de probabilitate** a variabilei aleatoare discrete X funcția $f_X : X(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, definită prin $f(x_i) = p_i = P\{X = x_i\}$.
- (ii) Numim **funcție de repartiție (sau de distribuție)** a variabilei aleatoare X (care poate fi și continuă), funcția $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, dată prin

$$F(a) = P\{X \leq a\}$$

Repartiția unei variabile aleatoare discrete

- Funcția de masă de probabilitate sau funcția de repartiție definesc complet o variabilă aleatoare discretă: tot ceea ce interesează relativ la o astfel de variabilă sunt informațiile legate de probabilitățile evenimentelor elementare, care pot fi furnizate de oricare dintre aceste două funcții.
- O variabilă aleatoare X este numită și **distribuție** sau **repartiție**, înțelegând prin aceasta clasa tuturor variabilelor aleatoare care au aceeași funcție de repartiție ca și X .

Proposition 7

Fie $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ funcția de repartiție a variabile aleatoare X .

- F_X este o funcție crescătoare: $F_X(a) \leq F_X(b)$, pentru orice $a < b$.
- $\lim_{a \rightarrow +\infty} F_X(a) = 1$ și $\lim_{a \rightarrow -\infty} F_X(a) = 0$.

Repartiția unei variabile aleatoare discrete

- După cum am notat deja, probabilitățile legate de variabila X pot fi determinate utilizând funcția sa de repartiție.

Proposition 8

Dacă X este o variabilă aleatoare, atunci

$$P\{a < X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a).$$

- Variabilele aleatoare discrete sunt date în general prin funcția de masă de probabilitate, în timp ce variabilele aleatoare continue sunt date prin funcția de repartiție (sau, după cum vom vedea ulterior, prin funcția de densitate de probabilitate).

Repartiția unei variabile aleatoare discrete - exemple

Exemplu. Să presupunem că o variabilă aleatoare discretă X , are patru valori x_1, x_2, x_3, x_4 , cu $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ și probabilitățile

$$P\{X = x_1\} = 0.2, P\{X = x_2\} = 0.3,$$

$$P\{X = x_3\} = 0.1, P\{X = x_4\} = 0.4,$$

atunci funcția de repartiție X este definită prin

$$F_X(a) = \begin{cases} 0, & a < x_1 \\ 0.2, & a \in [x_1, x_2) \\ 0.5, & a \in [x_2, x_3) \\ 0.6, & a \in [x_3, x_4) \\ 1, & a \geq x_4 \end{cases}$$

Repartiția unei variabile aleatoare discrete - exemple

Exemplu. Într-o urnă sunt 4 bile albe, 3 roșii și 3 albastre. Se extrag din această urnă 2 bile simultan (sau fără întoarcere). Pentru fiecare bilă albă extrasă se câștigă 1\$ și se pierde 1\$ pentru o bilă albastră. Fie X câștigul total; să se determine repartiția lui X .

Soluție: Valorile posibile ale variabilei X sunt $\{\pm 1, 0, \pm 2\}$; calculăm valorile funcției de masă de probabilitate (schema bilei neîntoarse)

$$f_X(-2) = P\{X = -2\} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15},$$

$$f_X(-1) = P\{X = -1\} = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{9}{45} = \frac{3}{15},$$

Repartiția unei variabile aleatoare discrete - exemple

$$f_X(0) = P\{X = 0\} = \frac{\binom{3}{2} + \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3},$$

$$f_X(1) = P\{X = 1\} = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15},$$

$$f_X(2) = P\{X = 2\} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}.$$

Repartiția unei variabile aleatoare discrete - exemple

repartiția variabilei este

$$X: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ \frac{1}{15} & \frac{3}{15} & \frac{5}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix} \dots \clubsuit$$

Exerciții pentru seminar

- **Formula de înmulțire:** I.1, I.3, I.4.

- **Scheme probabilistice:** II.2, II.3, III.4, III.6, III.9, IV.5, IV.6, IV.9.

- **Variabile aleatoare discrete:** V.2.

- **Rezervă:** II.1, III.2, III.7, IV.1, V.3.

Sfârșit

Exerciții - Formula de înmulțire

I.1. Într-o urnă sunt 6 bile albe, 4 albastre și 2 roșii. Se extrag succesiv și fără întoarcere trei bile. Care este probabilitatea ca:

- (a) prima bilă să fie albă, iar celelalte două albastre?
- (b) o bilă să fie albastră, iar celelalte două roșii?

I.2. O urnă conține trei bile albe, două bile negre și patru bile roșii. Se extrag succesiv și fără întoarcere trei bile.

- (a) Care este probabilitatea ca toate bilele să fie roșii?
- (b) Dar probabilitatea ca două bile să fie negre și una albă?

Exerciții - Formula de înmulțire

I.3. Se dau trei urne. Prima conține 3 bile albe și 1 neagră, cea de-a doua conține 4 bile albe și 5 negre iar a treia conține 1 bilă albă și 4 negre. Din prima urnă se extrage o bilă și se introduce în cea de-a doua, după care se extrage o bilă din cea de-a doua urnă și se introduce în cea de-a treia; în sfârșit se extrage o bilă din ultima urnă. Care este probabilitatea ca:

- (a) cele trei bile extrase să fie albe?
- (b) primele două bile să fie negre și ultima albă?
- (c) măcar o bilă să fie albă?

I.4. O urnă conține cinci bile albe și șapte bile negre. De fiecare dată când o bilă este extrasă din urnă este înlocuită cu două bile de cealaltă culoare. Se fac trei extrageri. Determinați probabilitatea

- (a) ca primele două bile extrase să fie de culori diferite.
- (b) ca prima bilă extrasă să fie albă, iar următoarele două negre.

Exerciții - Formula de înmulțire

I.5. Două bile sunt colorate cu verde sau albastru și sunt apoi introduse într-o urnă. Oricare dintre cele două bile este colorată în verde cu probabilitate $1/3$.

(a) Dacă se știe că s-a folosit culoarea albastră (i. e., cel puțin o bilă este albastră), care este probabilitatea ca amândouă bilele să fie albastre?

(b) Urna se răstoarnă și o bilă albastră cade din urnă. Care este probabilitatea ca bila rămasă în urnă să fie verde?

I.6*. Urna U_1 conține trei bile roșii, urna U_2 conține două bile negre, iar urna U_3 conține o bilă neagră și o bilă roșie. Se alege la întâmplare și uniform o urnă. Se extrage o bilă din urna aleasă și este înlocuită cu o bilă de cealaltă culoare; apoi se mai extrage o bilă din urnă. Dacă prima bilă extrasă este roșie, care este probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie tot roșie?

Exerciții - schema hipergeometrică

II.1. Dintr-un pachet de cărți de joc se extrag la întâmplare patru cărți.

- (a) Care este probabilitatea ca exact două dintre ele să fie de culoare roșie?
- (b) Care este probabilitatea ca una dintre ele să fie de culoare neagră?

II.2. Într-o urnă sunt patru bile negre și cinci bile albe; din urnă se extrag simultan patru bile. Care este probabilitatea ca

- (a) două bile să fie albe și două negre?
- (b) toate bilele să fie negre?
- (c) o bilă să fie albă și trei negre?

Exerciții - schema hipergeometrică

II.3. Într-o urnă sunt trei bile roșii, patru bile albastre și cinci bile verzi; din urnă se extrag simultan patru bile. Care este probabilitatea ca

- (a) două bile să fie roșii, una albastră și una verde?
- (b) o bilă să fie roșie, una albastră și două verzi?
- (c) trei bile să fie albastre și una verde?

Exerciții - schema binomială

III.1. Se aruncă o sută de monede.

- (a) Care este probabilitatea ca pe cincizeci dintre ele să apară stema?
- (b) Dar ca pe cel puțin cincizeci dintre ele să apară banul?

III.2. Se știe că hard-discurile produse de compania HDD au o probabilitate de 0.05 de a avea defecțiuni. Compania vine hard-discurile în pachete de câte 10 și garantează că un astfel de pachet conține cel mult un disc cu defecțiuni, altfel pachetul poate fi înlocuit. Care este probabilitatea ca un pachet să fie înlocuit?

III.3. Un sportiv nimereste o țintă cu probabilitatea 0.5; el trage de 10 ori asupra țintei. Care este probabilitatea ca

- a) ținta să fie atinsă de exact 5 ori?
- a) ținta să fie atinsă de cel puțin 2 ori?

III.4. Se aruncă două zaruri de 10 ori. Care este probabilitatea ca

- a) de exact cinci ori suma celor două fețe să fie mai mare sau egală cu 6, dar cel de-al doilea zar să fie diferit de 4?
- b) de cel mult opt ori suma celor două fețe să fie un număr prim?

III.5. Față de un adversar la fel de tare, ce este mai probabil să se câștige: două partide din patru sau trei partide din șase?

Exerciții - schema binomială

III.6. Pe un canal de comunicație se transmit biți în mod aleator și independent (0 apare cu probabilitate 0.25). Biții sunt recepționați în perechi; se transmit 7 perechi de biți. Care este probabilitatea ca

- a) de exact patru ori să fie recepționată o pereche 0 – 1 ?
- b) de cel mult șase ori să fie recepționată o pereche 1 – 1 ?

III.7. Un canal de comunicație transmite șase secvențe de câte trei biți; fiecare bit este transmis aleator și independent (1 apare cu probabilitate 0.2). Care este probabilitatea ca

- a) de exact cinci ori să fie recepționată secvența 0 – 1 – 0 ?
- b) de cel puțin cinci ori să fie recepționată secvența 0 – 1 – 1 ?

III.8. O pereche de zaruri se aruncă de șase ori. Unul dintre zaruri are numărul 3 pe toate fețele, iar celălalt este normal. Care este probabilitatea ca

- a) de exact patru ori să fie produsul zarurilor să fie un număr par?
- b) de cel puțin patru ori suma zarurilor să fie un număr prim?

III.9. O pereche de monede se aruncă de cinci ori. O monedă este normală, iar cealaltă are probabilitatea de a apărea stema egală cu $1/3$. Care este probabilitatea ca

- a) de exact trei ori fețele celor două monezi să fie diferite?
- b) de cel puțin patru ori să obținem simultan stema pe ambele monezi?

III.10. O pereche de zaruri se aruncă de șase ori. Care este probabilitatea ca

- a) exact trei ori valoarea minimă a celor două zaruri să fie 3?
- b) de cel puțin patru ori suma să fie mai mare decât 6?

III.11*. Un zar este aruncat până apare fața șase a patra oară. Care este probabilitatea ca exact douăsprezece aruncări să fie necesare? Dar probabilitatea să fie necesare cel mult douăsprezece aruncări?

III.12.** Doi prieteni, ζ (zeta) și ξ (xi), trebuie să plătească o cină, la care au luat parte împreună, cu un singur card de credit. Pentru a prelungi suspansul nu vor să decidă pe baza aruncării unei singure monede. ζ propune să arunce fiecare o monedă de zece de ori și să plătească cel care obține de mai multe ori stema. ξ observă că în acest fel pot ajunge la egalitate și propune o variantă: în caz de egalitate ζ să câștige, dar cu următoarea condiție – ζ să arunce moneda de zece ori și ξ de unsprezece ori. Este corectă această propunere?

III.13.** În contextul schemei binomiale: un experiment se repetă independent de n ori, se dă un eveniment A cu probabilitate p legat de acest experiment; care număr de realizări ale lui A este cel mai probabil?

Exerciții - schema geometrică

IV.1. Dintr-un pachet de cărți de joc se scoate câte o carte (care apoi se pune la loc în pachet) până când se obține un as. Care este probabilitatea ca abia la a cincea extragere să se obțină un as?

IV.2. Se aruncă două zaruri de mai multe ori. Care este probabilitatea ca

- (a) abia la a treia aruncare suma lor este cel puțin opt?
- (b) produsul lor să fie cel puțin treizeci în primele două aruncări?

IV.3*. Doi jucători aruncă succesiv două zaruri. Câștigă cel care obține primul suma mai mică sau egală cu 9. Care este probabilitatea de a câștiga jocul a primului jucător?

IV.4. Se aruncă două monede de mai multe ori. Care este probabilitatea

- (a) ca abia la patra aruncare să apară stema pe ambele monede?
- (b) ca abia la a patra aruncare să apară stema pe exact o monedă?

IV.5. Se extrage câte o carte dintr-un pachet de cărți de joc și apoi se pune la loc. Se repetă această experiență. Care este probabilitatea

- (a) ca abia la treia extragere să obținem o figură de treflă?
- (b) ca în nici una din primele patru extrageri să nu obținem vreun carou?

IV.6. Pe un canal de comunicație se transmit biți în mod aleator și independent (0 apare cu probabilitate 0.4). Biții sunt recepționați în perechi. Care este probabilitatea ca

- (a) abia a patra pereche să fie 1 – 0?
- (b) abia a patra pereche să fie 1 – 1?

Exerciții - schema geometrică

IV.7. Un canal de comunicație transmite secvențe de câte trei biți; fiecare bit este transmis aleator și independent (1 apare cu probabilitate 0.2). Care este probabilitatea ca

- a) abia a cincea secvență să fie $1 - 0 - 0$?
- b) cel mai devreme de la a treia secvență să obținem $0 - 0 - 0$?

IV.8. O pereche de zaruri se aruncă de mai multe ori. Unul dintre zaruri are numărul 2 pe toate fețele, iar celălalt este normal. Care este probabilitatea ca

- a) abia la a patra aruncare să obținem o sumă număr prim?
- b) abia la a treia aruncare să obținem o dublă?

Exerciții - schema geometrică

IV.9. O pereche de monede se aruncă de mai multe ori. O monedă este normală, iar cealaltă are probabilitatea de a apărea stema egală cu $1/4$. Care este probabilitatea ca

- a) abia a cincea aruncare să obținem stema simultan pe ambele monezi?
- b) cel mai devreme la a treia aruncare să obținem simultan banul pe ambele monede?

IV.10. O pereche de zaruri se aruncă de mai multe ori. Care este probabilitatea ca

- a) abia a patra aruncare maximul dintre cele două zaruri să fie 5?
- b) abia a cincea aruncare suma sa fie mai mică decât 6?

Exerciții - repartiții ale variabilelor aleatoare discrete

V.1*. O monedă falsificată are probabilitatea de a apare stema la o aruncare $2/3$. Moneda se aruncă de patru ori. Fie X variabila aleatoare care notează numărul maxim de apariții consecutive ale stemei. Să se determine repartiția variabilei X .

V.2. Sunt alese două bile la întâmplare dintr-o urnă care conține opt bile albe, patru bile negre și două bile galbene. Să presupunem că o bilă neagră valorează 2\$, iar una albă 1\$. Se notează cu X câștigul obținut; să se determine repartiția variabilei X .






V.3. Fie X diferența dintre numărul de apariții ale stemei și ale banului la aruncarea de trei ori a unei monede. Determinați repartiția și funcția de repartiție ale variabilei aleatoare X .

V.4. Un zar se aruncă de două ori. Fie X_1 și X_2 rezultatele obținute.

(a) Să se determine repartiția variabilei $X = \min \{X_1, X_2\}$.

(b) Să se determine repartiția lui $Y = \max \{X_1 + X_2, X_1 \cdot X_2\}$.

Bibliography

-  Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scietific, 2002.
-  Gordon, H., *Discrete Probability*, Springer Verlag, New York, 1997.
-  Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Scahaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.
-  Ross, S. M., *A First Course in Probability*, Prentice Hall, 5th edition, 1998.
-  Stone, C. J., *A Course in Probability and Statistics*, Duxbury Press, 1996.