DAA Упражнение 1 (Асимптотични нотации)

Контакти:

fb: Teodosi Tashev

email: teodositashev@gmail.com

Оценяване:
- 2 малки контролни по време на час – $2 \times 5\% = 10\%$
- 2 домашни със срок около 1 седмица – $2 \times 5\% = 10\%$
- 1 семестриално контролно (право на пищов A4) = 30%
- изпит по време на сесията (няма теоретичен изпит, а само задачи) = 50% (отново право на пищов A4)

За минали години (които в момента не са 2 курс) оценката е само от изпита по време на сесията.

Деф (асимптотично положителна функция): Ще казваме, че $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ е асимптотично положителна функция, ако $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ е изпълнено $f(n) > 0$

В курса всички функции, които разглеждаме са асимптотично положителни, така че няма да се споменава че са такива изрично.

Има 5 множества от функции спрямо асимптотиката на функция.

Деф: Нека g е асимпт. пол функция. Тогава:

- $O(g) \stackrel{def.}{=} \{ f \mid \exists c>0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0$ е изпълнено $0 \leq f(n) \leq c.g(n) \}$ $f \preceq g$
- $o(g) \stackrel{def.}{=} \{ f \mid \forall c>0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0$ е изпълнено $0 \leq f(n) \leq c.g(n) \}$ $f \prec g$
- $\Omega(g) \stackrel{def.}{=} \{ f \mid \exists c>0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0$ е изпълнено $0 \leq c.g(n) \leq f(n) \}$ $f \succeq g$
- $\omega(g) \stackrel{def.}{=} \{ f \mid \forall c>0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0$ е изпълнено $0 \leq c.g(n) \leq f(n) \}$ $f \succ g$
- $\Theta(g) \stackrel{def.}{=} \{ f \mid \exists c_1>0 \, \exists c_2>0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0$ е изпълнено $0 \leq c_1.g(n) \leq f(n) \leq$ $\leq c_2.g(n) \}$ $f \asymp g$

Прието е да се записва $f = O(g)$, вместо $f \in O(g)$ (аналогично за $o, \Omega, \omega, \Theta$). Ще използваме по-кратния запис ($\preceq, \prec, \succ, \succeq, \asymp$). Чете се f е <u>асимптотично</u> по-малко от g (за $f \prec g$). Това е аналог на $\leq, <, \dots$, но НЕ е напълно същото. Важно е да се записват по този начин $\prec, \preceq, \dots$ а не $<, \leq$, понеже второто означава, че ако $f < g$, то $\forall x \; f(x) < g(x)$, което не е същото.

Свойства: 1.) Всички асимптотични нотации са транзитивни, т.е. ако $f \circ g$ и $g \circ h$, то $f \circ h$, където $\circ \in \{\preceq, \prec, \succ, \succeq, \asymp\}$ // тук $\circ$ показва произв. асимпт. нотация, а не о-малко

2.) $f \circ f$, $\circ \in \{\preceq, \succeq, \asymp\}$ - рефлексивност

3.) Ако $f \preceq g$ и $g \preceq f$, то $f \asymp g$

4.) $f \asymp g \leftrightarrow g \asymp f$ - симетричност

5.) $f \prec g \leftrightarrow g \succ f$ и $f \preceq g \leftrightarrow g \succeq f$ - транспонирана симетрия

6.) $f + g \asymp \max(f, g)$

7.) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \leftrightarrow f \prec g$

8.) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$, c - константа > 0, то $f \asymp g$ (Ако съществува границата!)

9.) Нека f и g са асимптотично положителни и $a > 1$. Тогава:

- $f \prec g \rightarrow a^{f(n)} \prec a^{g(n)}$ (не е изпълнено за $\preceq$!)
- $\log_a f(n) \prec \log_a g(n) \rightarrow f(n) \prec g(n)$ (не е изпълнено за $\preceq$!)

10.) $\forall a > 1\ \forall t > 0\ \forall \varepsilon > 0$ е изпълнено $\log_a^t(n) \prec n^{\varepsilon}$

Забележка: $f = o(g)$ се чете f е о-малко от g. Аналогично за O (О-голямо), Ω (омега голямо), ω (омега малко), Θ (тита).

Забележка: Понеже $\log_a n$ и $\log_b n$ се различават с константа, то няма да пишем основата, т.е. $\Theta(\log_2 n) = \boxed{\Theta(\log n)} = \Theta(\lg n)$ $(a > 1, b > 1)$.

Това е понеже $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b n$

Д-во(7.): От дефиницията на limit имаме $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$: $-\varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < \varepsilon$. Умножаваме отляво и отдясно с $g(n)$ и получаваме $-g(n).\varepsilon < 0 < f(n) < g(n).\varepsilon$, откъдето $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq g(n).\varepsilon$, което е дефиницията на $o(g)$. ■

Д-во(8): От дефиницията на limit имаме $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$: $c - \varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < c + \varepsilon$. Умножаваме отляво и отдясно с $g(n)$ и получаваме

$g(n).(c-\varepsilon) < f(n) < g(n)(c+\varepsilon)$. Понеже $c>0$, то $\exists \varepsilon>0$, такова че $c-\varepsilon>0$. Тоест получихме, че $\exists \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\ge n_0: 0\le g(n).\underbrace{(c-\varepsilon)}_{c_1} < f(n) < g(n).\underbrace{(c+\varepsilon)}_{c_2}$, което е дефиницията на $\Theta(g)$. ■

Д-во(10): $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\varepsilon}}{\log_a^t n} \xlongequal[b\leftarrow\frac{\varepsilon}{t}]{\text{Полагаме}} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n^b)^t}{\log_a^t n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^b}{\log_a n}\right)^t \xlongequal{t>0 \text{ игнорираме го}} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^b}{\log_a n} \xlongequal{\text{Лопитал}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b.n^{b-1}}{\left(\frac{1}{\ln a}\right)\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\ln a.b.n^b = \infty$ ■ $(\infty^t=\infty,\ t>0)$

Забележка: На $\log_a^t(n)$ се вика полилогаритмична функция.

Правило на Лопитал: Нека f и g са функции, които са диференцируеми и е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}g(n)=\infty$ и $g'(n)\neq 0$. Тогава е изпълнено, че $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{f'(n)}{g'(n)}$.

зад. 1/ Нека $p(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\dots+a_k$ е полином от k-та степен и $a_0>0$. Докажете, че $p(n)\asymp n^k$

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p(n)}{n^k} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\dots+a_k}{n^k} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^k}}{\cancel{n^k}}\Big(a_0+\underbrace{\frac{a_1}{n}+\dots+\frac{a_k}{n^k}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}\Big) =$

$=a_0>0$. От свойство 8 получаваме $p(n)\asymp n^k$.

зад. 2/ Нека $k\in\mathbb{N}^+$. Докажете, че $\binom{n}{k}\asymp n^k$

$\boxed{\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!.k!}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}}$

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k.k!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k 1.(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})}{n^k.k!} = \frac{1}{k!}>0$

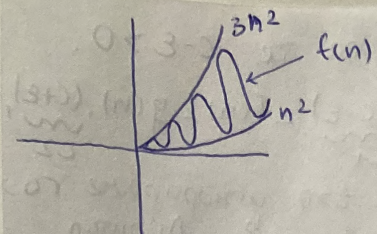
От свойство 8 получаваме $\binom{n}{k}\asymp n^k$.

зад. 3/ Докажете, че $(n+1)^n\asymp n^n$

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e>0 \xRightarrow{\text{св.8}} (n+1)^n\asymp n^n$.

зад. 4/ Докажете или опровергайте, че ако $f\asymp g$, то $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=c$, $c>0$.

Решение: Твърдението не е вярно, понеже границата може да не съществува. Например $f(n)=(2+\sin(n))n^2$ и $g(n)=n^2$. Понеже $\sin\in[-1,1]$, то можем да посочим константи за които функцията е ограничена отгоре и отдолу, но границата не съществува. ($c_1=1$ и $c_2=3$).



зад. 5/ Нека $f(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ е четно} \\ n^2, & \text{иначе} \end{cases}$ и $g(n) = n$. ДСД, че f и g са асимптотично несравними.

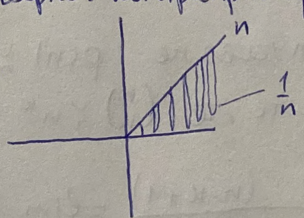
<u>Решение:</u> 1.) Доп. че $f \preceq g$. Тогава $\exists c>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c.g(n)$. Но в случая, когато n <u>не е четно</u> не е изпълнено $0 \leq n^2 \leq cn$ за никое c. ↯

2.) Доп. че $g \preceq f$. Тогава $\exists c>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ 0 \leq g(n) \leq c.f(n)$. Но в случая, когато <u>n е четно</u> не е изпълнено $0 \leq n \leq c$ за никое c. ↯.

Щом f и g са несравними по O, значи по никакъв начин не могат да бъдат асимптотично сравнени. ■

зад. 6/ Докажете или опровергайте, че ако $f \preceq g$, то $f \prec g$ или $f \asymp g$.

<u>Решение:</u> Твърдението не е вярно. Контрапример за това е $g(n) = n$ и $f(n) = \begin{cases} n, & n \text{ е четно} \\ \frac{1}{n}, & \text{иначе} \end{cases}$. ■



<u>Апроксимация на Стърлинг:</u> $n! = \sqrt{2\pi.n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

зад. 7/ Докажете, че $\lg(n!) \asymp n\lg n$

<u>Решение:</u> От Апроксимацията на Стърлинг имаме $\lg(n!) \approx \lg\left(\sqrt{2\pi.n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) =$

$= \underbrace{\lg\sqrt{2\pi.n}}_{\in\Theta(\lg n)} + \underbrace{n\lg n}_{\in\Theta(n\lg n)} - \underbrace{n\lg e}_{\in\Theta(n)} \asymp n\lg n$. ■

Горната задача е <u>Следствие от Апроксимацията на Стърлинг</u>. Не го бъркайте, че $n\lg n \asymp \lg(n!)$ е Апроксимацията на Стърлинг!