

ДАА Упражнение 2 (Асимптотики логаритми)

(Свойства на логаритмите: $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \quad \forall b \in \mathbb{R}^+ \quad a^x = b \iff x = \log_a b$

$$1.) a \log_a b = b$$

$$2.) \log_a a = 1$$

$$3.) \log_a 1 = 0 \quad // a \text{ пъдената на коя степен е равно на } 1?$$

$$4.) \log_a b^m = \frac{m}{n} \cdot \log_a b \quad // \text{основно ще ползваме, че } \log x^n = n \cdot \log x$$

$$5.) \log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$$

$$6.) \log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$$

$$7.) \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$8.) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$9.) \log_b a \cdot \log_a x = \log_b x$$

$$10.) a^{\log_b x} = x^{\log_b a}$$

(Свойства на степените:

$$1.) x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

$$2.) \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

$$3.) (x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

$$4.) (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$$

$$5.) \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

зад. 1/ Докажете, че $n^\varepsilon < a^n$, за $a > 1$ и $\varepsilon > 0$

Решение: Логаритмуваме n^ε и a^n и получаваме $\varepsilon \cdot \log n$ и $n \cdot \log a$.

Понеже $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon \cdot \log n}{\log a^n} = 0$, то получихме, че $n^\varepsilon < a^n$. ■

"ОБИЧА НАРЕДБА": $\Theta(1) < \log_a n < n^\varepsilon < a^n < n! < n^n$. Ползвайте я за да се ориентирате при решаване на задачи от типа "Подредете по асимпто-тично нарастване функциите...".

зад. 2/ Сравните асимптотичните функциите $n \lg n$ и $(\lg n)^n$

Решение: Логаритмуваме двете страни и полузаваме $\lg n \lg n$ и $n \cdot \lg \cancel{\lg n}$

Имаме, че ~~$\frac{\lg n}{\lg^2 n} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$~~ $\Rightarrow n \lg n \prec (\lg n)^n$.
 $\lg^2 n \prec n \prec n \lg \lg n \Rightarrow$

зад. 3/ Сравните асимптотичните $n \lg \lg \lg n$ и $(\lg n)!$

Решение: Логаритмуваме двете страни и полузаваме $\lg n \cdot \lg \lg \lg n$ и $\lg((\lg n)!)$. Полагаме $m \leftarrow \lg n$ и полузаваме $\lg(m!)$ и $m \lg m$ (от следствието на Аппроксимациата на Стърлинг). Връзката полага кето и полузаваме за втората функция $\lg n \cdot \lg \lg n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n \cdot \lg \lg \lg n}{\lg n \cdot \lg \lg n} \stackrel{\text{non.}}{\underset{k \leftarrow \lg \lg n}{\longrightarrow}} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lg k}{k} = 0 \Rightarrow n \lg \lg \lg n \prec (\lg n)!$$

зад. 4/ Подредете по ред на асимптотично нарастване следните функции:

$$f_1 = n \quad f_2 = 2^n \quad f_3 = n^2 \quad f_4 = n^3 \quad f_5 = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$f_6 = (n+1)! \quad f_7 = n! \quad f_8 = n \lg n \quad f_9 = e^n \quad f_{10} = n \cdot 2^n$$

$$f_{11} = 2^{2^n} \quad f_{12} = \lg(n!) \quad f_{13} = \lg n \lg n \quad f_{14} = n \lg \lg n$$

$$f_{15} = 2^{2^{n+1}} \quad f_{16} = (\lg n)! \quad f_{17} = 4 \lg n \quad f_{18} = 2^{\lg n}$$

Улътвайте: Уще използваме транзитивността на \prec и транспониране съществува $f \prec g \Leftrightarrow g \succ f$. Тогава са ни нужни само $n-1$ на брой сравнения, вместо $\binom{n}{2}$ (да сравняваме всички различни двойки функции). Важното е овоге тези сравнения да са на функции, които в крайната наредба са една до друга. Например ако имаме функциите n, n^2 и 2^n , то ако сравним n и 2^n ще получим този за това.

Решение: $f_{11} = 2^{2^n} ? f_{15} = 2^{2^{n+1}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2^n}}{2^{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2^n}}{2^{2 \cdot 2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2^n}}{2^{2^n} \cdot 2^{2^n}} = 0 \Rightarrow f_{11} \prec f_{15}$$

$$f_1 = 2^n ? f_6 = (n+1)!$$

Логаритмуване на двете функции и получаване 2^n и $\lg((n+1)!)$. От следствието на Апраксимацата на Стирлинг второто е асимптотично равно на $(n+1) \lg(n+1)$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \lg(n+1)}{2^n} = 0$, тъкъде экспоненциалната функция расте по-бързо $\Rightarrow [f_6 \prec f_1]$ || Монте и да използва, че $(n+1) \lg(n+1) \prec n^2 \prec 2^n$

$$f_6 = (n+1)! ? f_7 = n!$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = 0 \Rightarrow [f_7 \prec f_6]$$

$f_7 = n!$? $f_9 = e^n$ (Най-нестабилно и чисто може да го неправим, тъкъде лог. и следствието от А на С.)
От DUC знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ за всичко a . $\Rightarrow [f_9 \prec f_7]$

$$f_9 = e^n ? f_{10} = n \cdot 2^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 2^n}{e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{e^n}}{\frac{2^n}{e^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\left(\frac{2}{e}\right)^n} = 0 \Rightarrow [f_{10} \prec f_9]$$

$$f_{10} = n \cdot 2^n ? f_2 = 2^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow [f_2 \prec f_{10}]$$

$$f_2 = 2^n ? f_5 = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \Rightarrow [f_5 \prec f_2]$$

$$f_5 = \left(\frac{3}{2}\right)^n ? f_{14} = n^{\lg \lg n}$$

Логаритмуване на двете функции и получаване $n \cdot \lg \frac{3}{2} \asymp n$ и $\lg \lg n \cdot \lg n$
Очевидно $\lg n \cdot \lg n > \lg n \cdot \lg \lg n$ и $n > (\lg n)^2$. От тривиалността на \succ получаваме, че $n \cdot \lg \frac{3}{2} \asymp n > (\lg n)^2 > \lg n \cdot \lg \lg n \Rightarrow [f_{14} \prec f_5]$

$$f_{14} = n^{\lg \lg n} ? f_{13} = \lg n^{\lg n}$$

От свойството на логаритма $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ имаме, че $(\lg n)^{\lg n} = n^{\lg \lg n}$
следователно $[f_{13} \asymp f_{14}]$

$f_{13} = \lg n^{\lg n} ? f_{15} = (\lg n)!$. Полагаме $m \leftarrow \lg n$ и получаваме $f_{13} = m^m$
и $f_{15} = m!$. От DUC знаем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m!}{m^m} = 0 \Rightarrow [f_{15} \prec f_{13}]$

$$f_{15} = (\lg n)! ? \quad f_4 = n^3$$

Логаритмичните изврете срещи и нонзубавите $\lg((\lg n)!)$ и $\lg n^3 = 3\lg n$
Понекае $m \leftarrow \lg n$ и нонзубавите $\lg(m!) \asymp m \lg m$ и $3m$. $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{3m}{m \lg m} = \underline{\underline{}}$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{3}{\lg m} = 0 \Rightarrow [f_4 \prec f_{15}]$$

$$f_4 = n^3 ? \quad f_3 = n^2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow [f_3 \prec f_4]$$

$$f_3 = n^2 ? \quad f_{17} = 4^{\lg n} \text{ Известно } 4^{\lg n} = 2^{2 \lg n} = 2^{\lg n^2} = n^2 \Rightarrow [f_3 \asymp f_{17}]$$

$$f_3 = n^2 ? \quad f_8 = n \lg n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \lg n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n} = 0 \Rightarrow [f_8 \prec f_3]$$

$f_8 = n \lg n ? \quad f_{12} = \lg(n!)$. От следващето на Апраксимациите на Стерлинг
известно, че $\lg(n!) \asymp n \lg n \Rightarrow [f_8 \asymp f_{12}]$

$$f_8 = n \lg n ? \quad f_1 = n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \lg n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lg n} = 0 \Rightarrow [f_1 \prec f_8]$$

$$f_1 = n ? \quad f_{18} = 2^{\lg n} \text{ Известно } 2^{\lg n} = n \Rightarrow [f_1 \asymp f_{18}]$$

Отговор: $f_1 \asymp f_{18} \prec f_8 \asymp f_{12} \prec f_3 \asymp f_{17} \prec f_4 \prec f_{16} \prec f_{13} \asymp f_{14} \prec f_5 \prec f_2 \prec f_{10} \prec f_9 \prec f_7$
 $\prec f_6 \prec f_11 \prec f_{15}$

$$\text{зад.5/Да се докаже, че } \binom{2n}{n} \asymp \frac{4^n}{\sqrt{n}} \text{ и } \binom{n}{\frac{n}{2}} \asymp \frac{2^n}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Решение: } \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Анал.}}}{\approx} \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \sqrt{\frac{1}{\pi n}} \cdot 4^n \asymp \frac{4^n}{\sqrt{n}}$$

Доказателството за второто е аналогично.

$$\text{зад.5/Докажете, че } \sqrt[n]{n} \asymp 1$$

Решение: Уже известната следната лема: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a > 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x) = \ln a$

$$\text{Тогава } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{1} = e^0 = 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} \asymp 1 \blacksquare$$

$$\text{зад.7/Сравнете асимптотично функциите } 2^{n^2+n} \text{ и } 3^{\frac{n^2}{n^2}}$$

Решение: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2+n}}{3^{\frac{n^2}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n^2}}{2^n} = \infty$, понеже $a^n > b^n$ винаги, чуом

$a > 1, b > 1$. Тогава получаваме чрез логаритмуване.