Дизайн и Анализ на Алгоритми

Примерни решения на малко контролно № 1

60 т. **Задача 1.** За всеки числен масив $A[1, \ldots, 2n-1]$ с два по два различни елемента казваме, че A е *гърчав*, ако

$$A[1] < A[2] > A[3] < A[4] > A[5] < \ldots < A[2n-2] > A[2n-1].$$

Предложете колкото се може по-бърз алгоритъм (в асимптотичния смисъл), чийто вход е произволен масив $A[1, \ldots, 2n-1]$ с два по два различни елемента и изход масив който е гърчав. Достатъчно е да опишете алгоритъма на български език, **ясно и недвусмислено** – не се изисква псевдокод. Дайте кратка аргументация за коректност и направете анализ на сложността по време и по памет. Можете наготово да използвате алгоритми изучавани на лекции.

Решение: Решение за пълен брой точки е със сложност $\Theta(n)$, а решение за $\frac{1}{2}$ от точките е със сложност $\Theta(n \log n)$. Едно линейно решение е да се използва алгоритъмът $SELECT$, който е изучаван на лекции, и чрез него да се намери средния по големина елемент. След това използваме алгоритъмът $PARTITION$, който също е изучаван на лекции и избираме за pivot средния по големина елемент. До тук сме получили масив $A[1, \ldots, 2n-1]$, за който първите $n-1$ елемента са по-малки от $A[n]$ и последните $n-1$ елемента са по-големи от $A[n]$. Тогава ако на първа позиция поставим елемента, който е среден по-големина, на четните позиции сложим елементите по-големи от него, а на нечетните позиции сложим елементите по-малко от него, то ще получим масив, който е *гърчав*. Това може лесно да се реализира чрез поредица от *swap*-ове. Сложността по време на алгоритъма е $\Theta(n)$, защото използваните в него алгоритми са със сложност $\Theta(n)$, така и привеждането на масива в *гърчав* вид чрез *swap*-ове се реализира във време $\Theta(n)$. Примерно решение със сложност по време $\Theta(n \log n)$ първо ще използва някоя бърза сортировка, след което ще реалнизира същата идея със *swap*-овете.

40 т. **Задача 2:** Решете рекурентните уравнения:

а) $\mathrm{T}(n) = \mathrm{T}(n-1) + 2024n.$

б) $\mathrm{T}(n) = 16\mathrm{T}(\frac{n}{8}) + n\sqrt{n}.$

в) $\mathrm{T}(n) = 4\mathrm{T}(n-2) + 2^n + n^3.$

г) $\mathrm{T}(n) = 27\mathrm{T}(\frac{n}{3}) + \lg^3(n!).$

Решение:
а) $\mathrm{T}(n) = \mathrm{T}(n-1) + 2024n$
Използваме метода на харектеристичното уравнение. От хомогенната част имаме:
$x^n = x^{n-1} \Rightarrow x = 1$ и получаваме мултимножеството от решенията $\{1\}_M$.
От нехомогенната част имаме $2024 \cdot n^1 \cdot 1^n$, следователно получаваме мултимножеството от корени $\{1, 1\}_M$.
След обединяването на двете мултимножества получаваме $\{1, 1, 1\}_M$, следователно $T(n) = \Theta(n^2)$.

б) $\mathrm{T}(n) = 16\mathrm{T}(\frac{n}{8}) + n\sqrt{n}$
$a = 16$
$b = 8$
$c = \log_b a = \log_8 16 = \frac{4}{3}$
$f(n) = n\sqrt{n} = n^{\frac{3}{2}}$
Влизаме в случай 3 на Мастър Теоремата. Трябва да проверим дали съществува $\epsilon > 0$, такова че $f(n) \succeq n^{c+\epsilon} \Leftrightarrow n^{\frac{3}{2}} \succeq n^{\frac{4}{3}+\epsilon}$, което очевидно е изпълнено за $\epsilon = 0.01$. Трябва също така да проверим условието за регулярност, т.е. дали съществува $d \in (0, 1)$, такова че $(a \cdot f(n/b)) \leq d \cdot f(n)$.
След заместване получаваме $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq d$, което е изпълнено за $d = 0.9 \in (0, 1)$. Условията на Мастър Теоремата са изпълнени следователно $T(n) = \Theta(n^{3/2})$.

в) $\mathrm{T}(n) = 4\mathrm{T}(n-2) + 2^n + n^3$
Използваме метода на харектеристичното уравнение. От хомогеннатта част имаме:
$x^n = 4x^{n-2} \Leftrightarrow x^2 = 4$ и получаваме мултимножеството от решенията $\{-2, 2\}_M$.
От нехомогенната част имаме $2^n \cdot n^0 + n^3 \cdot 1^n$, следователно получаваме мултимножеството от корени $\{1, 1, 1, 1, 2\}_M$.
След обединяването на двете мултимножества получаваме $\{-2, 1, 1, 1, 1, 2, 2\}_M$, следователно $T(n) = \Theta(n \cdot 2^n)$.

г) $\mathrm{T}(n) = 27\mathrm{T}\left(\frac{n}{3}\right) + \log^3(n!)$
$a = 27$
$b = 3$
$c = \log_b a = \log_3 27 = 3$
$f(n) = \log^3(n!)$
От следствието на апроксимацията на Стърлинг имаме, че $\lg(n!) = \Theta(n \log n) \Rightarrow f(n) = (n \log n)^3 = n^3 \log^3 n$
Влизаме във втория случай на Мастър Теоремата, следователно $T(n) = \Theta(n^3 \cdot \log^4 n)$