DAA Упражнение 1 (Асимптотични нотации)

Контакти:
fb: Teodosi Tashev
email: teodositashev@gmail.com

Оценяване:
- 2 малки контролни по време на час - $2 \times 5\% = 10\%$
- 2 домашни със срок около 1 седмица - $2 \times 5\% = 10\%$
- 1 семестриално контролно (право на пищов А4) $= 30\%$
- изпит по време на сесията (няма теоретичен изпит, а само задачи) $= 50\%$ (отново право на пищов А4)

За минали години (които в момента не са 2 курс) оценката е само от изпита по време на сесията.

<u>Деф (асимптотично положителна функция)</u>: Ще казваме, че $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ е асимптотично положителна функция, ако $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0$ е изпълнено $f(n) > 0$

В курса всички функции, които разглеждаме са асимптотично положителни, така че няма да се споменава че са такива изрично.

Има 5 множества от функции спрямо асимптотиката на функция.

<u>Деф</u>: Нека g е асимт. пол. функция. Тогава:

- $O(g) \stackrel{def.}{=} \{f \mid \exists c>0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0$ е изпълнено $0 \leq f(n) \leq c.g(n)\}$ $f \preceq g$
- $o(g) \stackrel{def.}{=} \{f \mid \forall c>0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0$ е изпълнено $0 \leq f(n) \leq c.g(n)\}$ $f \prec g$
- $\Omega(g) \stackrel{def.}{=} \{f \mid \exists c>0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0$ е изпълнено $0 \leq c.g(n) \leq f(n)\}$ $f \succeq g$
- $\omega(g) \stackrel{def.}{=} \{f \mid \forall c>0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0$ е изпълнено $0 \leq c.g(n) \leq f(n)\}$ $f \succ g$
- $\Theta(g) \stackrel{def.}{=} \{f \mid \exists c_1>0 \, \exists c_2>0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0$ е изпълнено $0 \leq c_1.g(n) \leq f(n) \leq c_2.g(n)\}$ $f \asymp g$

Прието е да се записва $f = O(g)$, вместо $f \in O(g)$ (аналогично за $o, \Omega, \omega, \Theta$). Ще използваме по-кратния запис ($\preceq, \prec, \succ, \succeq, \asymp$). Чете се f е <u>асимптотично</u> по-малко от g (за $f \prec g$). Това е аналог на $\leq, <, \ldots$, но НЕ е напълно същото. Важно е да се записват по този начин $\prec, \preceq, \ldots$ а не $<, \leq$, понеже второто означава, че ако $f < g$, то $\forall x$ $f(x) < g(x)$, което не е същото.

Свойства: 1.) Всички асимптотични нотации са транзитивни, т.е. ако $f \circ g$ и $g \circ h$, то $f \circ h$, където $\circ \in \{\preceq, \prec, \succ, \succeq, \asymp\}$ // тук $\circ$ показва произв. асимпт. нотация, а не о-малко

2.) $f \circ f$, $\circ \in \{\preceq, \succeq, \asymp\}$ - рефлексивност

3.) Ако $f \preceq g$ и $g \preceq f$, то $f \asymp g$

4.) $f \asymp g \leftrightarrow g \asymp f$ - симетричност

5.) $f \prec g \leftrightarrow g \succ f$ и $f \preceq g \leftrightarrow g \succeq f$ - транспонирана симетрия

6.) $f + g \asymp \max(f, g)$

7.) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \leftrightarrow f \prec g$

8.) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$, c - константа > 0, то $f \asymp g$ (Ако съществува границата!)

9.) Нека f и g са асимптотично положителни и $a > 1$. Тогава:

- $f \prec g \to a^{f(n)} \prec a^{g(n)}$ (не е изпълнено за $\preceq$!)
- $\log_a f(n) \prec \log_a g(n) \to f(n) \prec g(n)$ (не е изпълнено за $\preceq$!)

10.) $\forall a > 1\ \forall t > 0\ \forall \varepsilon > 0$ е изпълнено $\log_a^t(n) \prec n^{\varepsilon}$

Забележка: $f = o(g)$ се чете f е о-малко от g. Аналогично за O (О-голямо), Ω (омега голямо), ω (омега малко), Θ (тита).

Забележка: Понеже $\log_a n$ и $\log_b n$ се различават с константа, то няма да пишем основата, т.е. $\Theta(\log_2 n) = \boxed{\Theta(\log n)} = \Theta(\lg n)$ $(a > 1, b > 1)$.

Това е понеже $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b n$

Д-во (7.): От дефиницията на limit имаме $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$: $-\varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < \varepsilon$. Умножаваме отляво и отдясно с $g(n)$ и получаваме $-g(n).\varepsilon < 0 < f(n) < g(n).\varepsilon$, откъдето $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq g(n).\varepsilon$, което е дефиницията на $o(g)$. ■

Д-во (8): От дефиницията на limit имаме $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$: $c - \varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < c + \varepsilon$. Умножаваме отляво и отдясно с $g(n)$ и получаваме

$g(n).(c-\varepsilon) < f(n) < g(n)(c+\varepsilon)$. Понеже $c>0$, то $\exists \varepsilon>0$, такова че $c-\varepsilon>0$.
Тоест получихме, че $\exists \varepsilon>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n).\underbrace{(c-\varepsilon)}_{c_1} < f(n) < g(n).\underbrace{(c+\varepsilon)}_{c_2}$,
което е дефиницията на $\Theta(g)$. ■

D-во(10): $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\varepsilon}}{\log_a^t n} \xlongequal[b \leftarrow \frac{\varepsilon}{t}]{\text{Полагаме}} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n^b)^t}{\log_a^t n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^b}{\log_a n}\right)^t$ - $t>0$ игнорираме го $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^b}{\log_a n} \xlongequal{\text{Лопитал}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b.n^{b-1}}{\left(\frac{1}{\ln a}\right)\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln a . b . n^b = \infty$ ■ $(\infty^t = \infty,\ t>0)$

Забележка: На $\log_a^t(n)$ се вика полилогаритмична функция.

Правило на Лопитал: Нека f и g са функции, които са диференцируеми и е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) = \infty$ и $g'(n) \neq 0$. Тогава е изпълнено, че $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$.

зад. 1/ Нека $p(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$ е полином от к-та степен и $a_0 > 0$. Докажете, че $p(n) \asymp n^k$

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^k} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k}{n^k} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^k}}{\cancel{n^k}}\Big(a_0 + \underbrace{\frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_k}{n^k}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}\Big) =$

$= a_0 > 0$. От свойство 8 получаваме $p(n) \asymp n^k$.

зад. 2/ Нека $k \in \mathbb{N}^+$. Докажете, че $\binom{n}{k} \asymp n^k$ $\quad \boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}}$

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k.k!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k 1.(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})}{n^k.k!} = \frac{1}{k!} > 0$

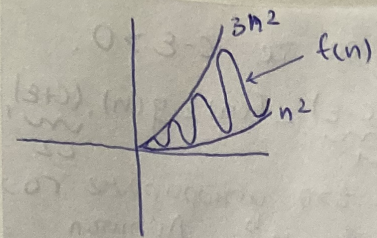
От свойство 8 получаваме $\binom{n}{k} \asymp n^k$.

зад. 3/ Докажете, че $(n+1)^n \asymp n^n$

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 0 \xRightarrow{\text{св. 8}} (n+1)^n \asymp n^n$.

зад. 4/ Докажете или опровергайте, че ако $f \asymp g$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$, $c>0$.

Решение: Твърдението не е вярно, понеже границата може да не съществува. Например $f(n) = (2+\sin(n))n^2$ и $g(n) = n^2$. Понеже $\sin \in [-1,1]$, то можем да посочим константи за които функцията е ограничена отгоре и отдолу, но границата не съществува. ($c_1 = 1$ и $c_2 = 3$).



зад.5/ Нека $f(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ е четно} \\ n^2, & \text{иначе} \end{cases}$ и $g(n) = n$. ДСД, че f и g са асимптотично несравними.

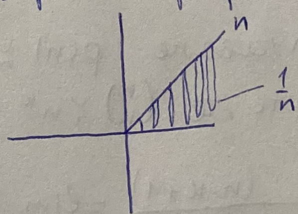
Решение: 1.) Доп. че $f \preceq g$. Тогава $\exists c>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0 : 0 \le f(n) \le c.g(n)$. Но в случая, когато n не е четно не е изпълнено $0 \le n^2 \le cn$ за никое c. ↯

2.) Доп. че $g \preceq f$. Тогава $\exists c>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0\ 0 \le g(n) \le c.f(n)$. Но в случая, когато n е четно не е изпълнено $0 \le n \le c$ за никое c. ↯.

Щом f и g са несравними по O, значи по никакъв начин не могат да бъдат асимптотично сравнени. ■

зад.6/ Докажете или опровергайте, че ако $f \preceq g$, то $f \prec g$ или $f \asymp g$.

Решение: Твърдението не е вярно. Контрапример за това е $g(n) = n$ и $f(n) = \begin{cases} n, & n \text{ е четно} \\ \frac{1}{n}, & \text{иначе} \end{cases}$. ■



Апроксимация на Стърлинг: $n! = \sqrt{2\pi.n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

зад.7/ Докажете, че $\lg(n!) \asymp n\lg n$

Решение: От Апроксимацията на Стърлинг имаме $\lg(n!) \approx \lg\left(\sqrt{2\pi.n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) =$

$= \underbrace{\lg\sqrt{2\pi.n}}_{\in\Theta(\lg n)} + \underbrace{n\lg n}_{\in\Theta(n\lg n)} - \underbrace{n\lg e}_{\in\Theta(n)} \asymp n\lg n$. ■

Горната задача е Следствие от Апроксимацията на Стърлинг. Не го бъркайте, че $n\lg n \asymp \lg(n!)$ е Апроксимацията на Стърлинг!