DAA Упражнение 6 (Рекурентни уравнения)

VI Мастър Теорема (разширена): Нека $a \geq 1$, $b > 1$, $f(n)$ - положителна. Полагаме $c := \log_b a$

Тогава за рекурентно уравнение от вида $T(n) = a.T(\frac{n}{b}) + f(n)$ имаме:

1.) Ако $\exists \varepsilon > 0 : f(n) \preceq n^{c-\varepsilon}$, то $T(n) \asymp n^c$

2.) Ако $f(n) \asymp n^c . \log^k n$ и $k \in \mathbb{R}$, то

2.1) ако $k > -1$, то $T(n) \asymp n^c . \log^{k+1} n$

2.2) ако $k = -1$, то $T(n) \asymp n^c . \log\log n$

2.3) ако $k < -1$, то $T(n) \asymp n^c$

3.) Ако $\exists \varepsilon > 0 : f(n) \succeq n^{c+\varepsilon}$ и $\underbrace{\exists d \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 (a.f(\frac{n}{b}) \leq d.f(n))}_{\text{условие за регулярност}}$, то $T(n) \asymp f(n)$.

Ако нито едно от горните не е изпълнено, то МТ не е приложима!

зад. 1/ $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$

$a = 4,\ b = 2,\ c = \log_2 4 = 2$

$\underbrace{n}_{f(n)} \overset{?}{\preceq} n^{2-\varepsilon}$ Нека $\varepsilon = 0{,}1$. Тогава $n \preceq n^{1,9} \underset{1(n)}{\overset{M.T.}{\Longrightarrow}} T(n) \asymp n^2$

зад. 2/ $T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n}$

$a = 2,\ b = 4,\ c = \log_4 2 = \frac{1}{2}$

$\underbrace{n^{1/2}}_{f(n)} \asymp n^{1/2} . \log^0 n$, тоест $k = 0 \underset{2.1)}{\overset{M.T.}{\Longrightarrow}} T(n) \asymp \sqrt{n} . \log n$

зад. 3/ $T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n\lg n$

$a = 3,\ b = 4,\ c = \log_4 3 \in (0,1)$ // Използвахме, че $n^{\overset{<1}{c+\varepsilon}} \preceq n < n\log n$

$\underbrace{n\log n}_{f(n)} \succeq n^{\log_4 3 + \varepsilon}$ $\forall \varepsilon \in (0, 1 - \log_4 3)$. Нека $\varepsilon = 0{,}01$. Търсим $d \in (0,1)$:

$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$ $3.\frac{n}{4}.\log\frac{n}{4} < d.n\log n$

$\frac{3}{4}n(\log n - 2) < d.n\log n \quad /: n > 0$

$\frac{3}{4}\log n - \frac{3}{2} < d.\log n$

Очевидно за $d = \frac{3}{4}$ и $n_0 = 1$ условието за регулярност е изпълнено

$\overset{M.T.}{\underset{3(a)}{\Rightarrow}} T(n) \asymp n\log n$

зад. 4/ $2T\left(\frac{n}{4}\right) + 2\sqrt{n}\log^3 n$

$a=2,\ b=4,\ c=\log_4 2 = \frac{1}{2}$

$\underbrace{2\sqrt{n}.\log^3 n}_{f(n)} \asymp n^{1/2}\log^3 n$, тоест $k=3 \overset{M.T.}{\underset{2.1)}{\Rightarrow}} T(n) \asymp \sqrt{n}.\log^4 n$

зад. 5/ $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{\log n}$

$a=1,\ b=2,\ c=\log_2 1 = 0$

$\underbrace{n^0.\log^{-1} n}_{f(n)} \asymp n^0.\log^{-1} n$, тоест $k=-1 \overset{M.T.}{\underset{2.2)}{\Rightarrow}} T(n) \asymp \log\log n$

зад. 6/ $29T\left(\frac{n}{3}\right) + 2\sum_{k=1}^{n} k^2$

$f(n) = 2\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} = \frac{2}{3}n^3 + \ldots = \Theta(n^3)$

$a=29,\ b=3,\ c=\log_3 29 > 3$ (защото $\log_3 27 = 3$)

$\underbrace{n^3}_{f(n)} \precsim n^{\log_3 29 - \varepsilon}$ е изпълнено $\forall \varepsilon \in (0, \log_3 29 - 3)$. Нека $\varepsilon = 0{,}001$.

$\overset{M.T.}{\underset{1(a)}{\Rightarrow}} T(n) \asymp n^{\log_3 29}$

зад. 7/ $B(n) = B\left(\frac{2n}{9}\right) + B\left(\frac{n}{7}\right) + B\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$R(n) = 6R(n-1) + 11R(n-2) + n^{\sqrt{n}}$

$Z(n) = 2Z(n-1) + \lg n.Z(\lfloor \lg n \rfloor) + 1$

$K(n) = 8K(n-1) - K(n-2) + 2n.2^{2n} + 3n.2^{3n}$

$C(n) = C(n-1) + \frac{n}{(n-1)(n+1)}$

$T(n) = 41T(n-2) + 72T(n-3) - 112T(n-4) + n^6.6^n$

$S(n) = S(n-1) + 2n^2 + 2^{3n} + n.8^{n+2} + S(n-1)$

Решение:

$$S(n) = 2S(n-1) + 2n^2 \cdot 1^n + (64n+1) \cdot 8^n$$

От хомогенната част имаме $x-2=0$ следователно мултимножеството от корените е $\{2\}_M$. От нехомогенната част имаме мултимножеството от корените $\{1,1,1,8,8\}_M$. След обединяване на двете мултимножества получаваме $\{1,1,1,2,8,8\}_M$. Следователно $\boxed{S(n) \asymp n.8^n}$

$$T(n) = 41T(n-2) + 72T(n-3) - 112T(n-4) + n^6 . 6^n$$

От хомогенната част имаме $x^4 - 41x^2 - 72x + 112 = 0$. Чрез метода на Хорнер и от това, че $1 - 41 - 72 + 112 = 0$ виждаме, че 1 е корен.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -41 & -72 & 112 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -40 & -112 & 0 \end{array}$$

Получаваме $(x-1)(x^3 + x^2 - 40x - 112)$. Трябва да проверим чрез метода на Хорнер какви други възможни корени имаме. Проверяваме със 7-цата

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -40 & -112 \\ \hline 7 & 1 & 8 & 16 & 0 \end{array}$$

Получаваме $(x-1)(x-7)(\underbrace{x^2+8x+16}_{(x+4)^2})$. Следователно от хомогенната част имаме корените $\{-4,-4,1,7\}_M$. От нехомогенната част имаме мултимножеството от корените $\{6,6,6,6,6,6,6\}_M$. След обединение на двете мултимножества получаваме $\{-4,-4,1,6,6,6,6,6,6,6,7\}_M$

Следователно $\boxed{T(n) \asymp 7^n}$

$$C(n) = C(n-1) + \frac{n}{(n-1)(n+1)} = C(n-2) + \frac{n-1}{(n-2)n} + \frac{n}{(n-1)(n+1)} = \dots = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{(k-1)(k+1)} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)(k+1)} \asymp \lg n + 1 \asymp \lg n$$ Следователно $\boxed{C(n) \asymp \lg n}$

$B(n) = B\left(\frac{2n}{9}\right) + B\left(\frac{n}{7}\right) + B\left(\frac{n}{2}\right) + n$ Понеже $\frac{2}{9} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} = \frac{109}{126} < 1$, то интуитивно асимптотиката се задава от нехомогенната част. Твърдим, че $B(n) \asymp n$

Допускаме, че $\forall m < n$ е изпълнено $\exists c > 0 : B(m) \leq c.m$.

Тогава $B(n) = B\left(\frac{2n}{9}\right) + B\left(\frac{n}{7}\right) + B\left(\frac{n}{2}\right) + n \overset{\text{от}}{\underset{\text{и.п.}}{\leq}} c.\left(\frac{2n}{9}\right) + c\left(\frac{n}{7}\right) + c\left(\frac{n}{2}\right) + n \overset{?}{\leq} c.n$

което е същото като $\cancel{n}\left(1 + \frac{109}{126}.c\right) \overset{?}{\leq} c.\cancel{n} \leftrightarrow 109c + 126 \overset{?}{\leq} 126c \leftrightarrow 126 \overset{?}{\leq} 17c$

$\leftrightarrow c \geq \frac{126}{17}$. Нека $\boxed{c = \frac{127}{17}}$

Остана да докажем, че $B(n) = \Omega(n)$

Допускаме, че $\forall m<n$ е изпълнено $\exists d>0 : B(m) \geq d.m$.

Тогава $B(n) = B(\frac{2n}{9}) + B(\frac{n}{7}) + B(\frac{n}{2}) + n \overset{\text{от}}{\underset{\text{и.п.}}{\geq}} \frac{2}{9}dn + \frac{d.n}{7} + \frac{dn}{2} + n \overset{?}{\geq} dn$, което е

същото като $\frac{109}{126}.dn + n \overset{?}{\geq} dn \leftrightarrow \frac{109}{126}d + 1 \overset{?}{\geq} d \leftrightarrow 109d + 126 \overset{?}{\geq} 126d \leftrightarrow 126 \overset{!}{\geq} 17d$

$d \leq \frac{126}{17}$. Нека $d = \frac{125}{17}$. Доказахме, че $\boxed{B(n) \asymp n}$. ∎

$R(n) = 6R(n-1) + 11R(n-2) + n^{\sqrt{n}}$. Тук не можем да използваме метода с характеристичното уравнение, понеже нехомогенната част не е от правилният вид. Ще игнорираме нехомогенната част и ще решим рекурентното уравнение за да можем да преценим дали асимптотиката се определя от хомогенната или нехомогенната част, след което ще го докажем по индукция

$R(n) = 6R(n-1) + 11R(n-2)$

$x^2 - 6x - 11 = 0$

$D = m^2 - ac = 9 + 11 = 20$

$x_{1/2} = 3 \pm 2\sqrt{5} \begin{cases} 3+2\sqrt{5} \\ 3-2\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow (3+2\sqrt{5})^n$ е

решението ако игнорираме нехомогенната част. Понеже $(3+2\sqrt{5})^n >$
$> 2^n \underset{\uparrow}{>} n^{\sqrt{n}}$, то допускаме, че $\boxed{R(n) \asymp (3+2\sqrt{5})^n}$. Докажете това за

доказва се с лог.

упражнение, като защитите твърдението като извадите 2^n.

$K(n) = 8K(n-1) - K(n-2) + \overbrace{2n.2^{2n}}^{2n.4^n} + \overbrace{3n.2^{3n}}^{3n.8^n}$. Тук може да подходим, както при решението на $R(n)$, но това ще е излишно защото $K(n)$ може да се реши чрез метода на характеристичното уравнение.

От хом. част имаме $x^2 - 8x + 1 = 0$

$D = 16 - 1 = 15$

$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{15} \begin{cases} 4+\sqrt{15} \\ 4-\sqrt{15} \end{cases} \{4-\sqrt{15}, 4+\sqrt{15}\}_M$

От нехом. част имаме $\{4,4,8,8\}_M$. Обединяваме двете мултимножества и получаваме $\{4-\sqrt{15}, 4, 4, \underbrace{4+\sqrt{15}}_{<8}, 8, 8\}_M \Rightarrow \boxed{K(n) \asymp n.8^n}$

$Z(n)$ остава за домашно.