# DAA Упражнение 2 (Асимптотични нотации)

Свойства на логаритмите: $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\ \forall b \in \mathbb{R}^+\quad a^x = b \leftrightarrow x = \log_a b$

1.) $a^{\log_a b} = b$

2.) $\log_a a = 1$

3.) $\log_a 1 = 0$ // а повдигнато на коя степен е равно на 1?

4.) $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \cdot \log_a b$ // основно ще ползваме, че $\log x^n = n \cdot \log x$

5.) $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$

6.) $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$

7.) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

8.) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

9.) $\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x$

10.) $a^{\log_b x} = x^{\log_b a}$

Свойства на степените:

1.) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

2.) $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

3.) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

4.) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

5) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

зад. 1/ Докажете, че $n^{\varepsilon} \prec a^n$, за $a > 1$ и $\varepsilon > 0$

Решение: Логаритмуваме $n^{\varepsilon}$ и $a^n$ и получаваме $\varepsilon \cdot \log n$ и $n \cdot \log a$.

Понеже $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\varepsilon \cdot \log n}{\log a\ n} = 0$, то получихме, че $n^{\varepsilon} \prec a^n$. ■

"ОБЩА НАРЕДБА": $\Theta(1) \prec \log_a^k n \prec n^{\varepsilon} \prec a^n \prec n! \prec n^n$. Ползвайте я за да се ориентирате при решаване на задачи от типа "Подредете по асимптотично нарастване функциите...".

зад. 2/ Сравнете асимптотично функциите $n^{\lg n}$ и $(\lg n)^n$

<u>Решение:</u> Логаритмуваме двете страни и получаваме $\lg n \lg n$ и $n . \lg \lg n$

Имаме, че $\Rightarrow n^{\lg n} \prec (\lg n)^n$.

$\lg^2 n \prec n \prec n \lg\lg n \Rightarrow \uparrow$

зад. 3/ Сравнете асимптотично функциите $n^{\lg\lg\lg n}$ и $(\lg n)!$

<u>Решение:</u> Логаритмуваме двете страни и получаваме $\lg n . \lg\lg\lg n$ и $\lg((\lg n)!)$. Полагаме $m \leftarrow \lg n$ и получаваме $\lg(m!) \asymp m \lg m$ (от <u>следствието</u> на Апроксимацията на Стърлинг). Връщаме полагането и получаваме за втората функция $\lg n . \lg\lg n$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\lg n} . \lg\lg\lg n}{\cancel{\lg n} . \lg\lg n} \underset{k \leftarrow \lg\lg n}{\overset{\text{Пол.}}{=\!=}} \lim_{k\to\infty} \frac{\lg k}{k} = 0 \Rightarrow n^{\lg\lg\lg n} \prec (\lg n)!$$

зад. 4/ Подредете по ред на асимптотично нарастване следните функции:

$f_1 = n \quad f_2 = 2^n \quad f_3 = n^2 \quad f_4 = n^3 \quad f_5 = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

$f_6 = (n+1)! \quad f_7 = n! \quad f_8 = n\lg n \quad f_9 = e^n \quad f_{10} = n . 2^n$

$f_{11} = 2^{2^n} \quad f_{12} = \lg(n!) \quad f_{13} = \lg n^{\lg n} \quad f_{14} = n^{\lg\lg n}$

$f_{15} = 2^{2^{n+1}} \quad f_{16} = (\lg n)! \quad f_{17} = 4^{\lg n} \quad f_{18} = 2^{\lg n}$

<u>Упътване:</u> Ще използваме транзитивността на $\prec$ и транспонирана симетрия на $\prec$ (т.е $f \prec g \leftrightarrow g \succ f$). Тогава са ни нужни само $n-1$ на брой сравнения, вместо $\binom{n}{2}$ (да сравняваме всички различни двойки функции). Важното е обаче тези сравнения да са на функции, които в крайната наредба са една до друга. Например ако имаме функциите $n$, $n^2$ и $2^n$, то ако сравним $n$ и $2^n$ няма да получим точки за това.

<u>Решение:</u> $f_{11} = 2^{2^n}$ ? $f_{15} = 2^{2^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2^n}}{2^{2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2^n}}{2^{2.2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^{2^n}}}{\cancel{2^{2^n}} . 2^{2^n}} = 0 \Rightarrow \boxed{f_{11} \prec f_{15}}$$

$f_{11} = 2^{2^n}$ ? $f_6 = (n+1)!$

Логаритмуваме двете функции и получаваме $2^n$ и $\lg((n+1)!)$. От следствието на Апроксимацията на Стърлинг второто е асимптотично равно на $(n+1)\lg(n+1)$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)\lg(n+1)}{2^n} = 0$, понеже експоненциалната функция расте по-бързо $\Rightarrow$ $\boxed{f_6 \prec f_{11}}$ // Може и да използваме, че $(n+1)\lg(n+1) \prec n^2 \prec 2^n$

$f_6 = (n+1)!$ ? $f_7 = n!$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = 0 \Rightarrow \boxed{f_7 \prec f_6}$

$f_7 = n!$ ? $f_9 = e^n$ (Най-лесно и чисто може да го направим чрез лог. и следствието от А на С.)

От ДИС знаем, че $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ за всяко $a$. $\Rightarrow$ $\boxed{f_9 \prec f_7}$

$f_9 = e^n$ ? $f_{10} = n.2^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n.2^n}{e^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{e^n}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\underbrace{\left(\frac{e}{2}\right)}_{>1}^n} = 0 \Rightarrow \boxed{f_{10} \prec f_9}$

$f_{10} = n.2^n$ ? $f_2 = 2^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}}{n.\cancel{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \boxed{f_2 \prec f_{10}}$

$f_2 = 2^n$ ? $f_5 = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \Rightarrow \boxed{f_5 \prec f_2}$

$f_5 = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ ? $f_{14} = n^{\lg\lg n}$

Логаритмуваме двете функции и получаваме $n.\lg\frac{3}{2} \asymp n$ и $\lg\lg n.\lg n$

Очевидно $\lg n.\lg n \succ \lg n.\lg\lg n$ и $n \succ (\lg n)^2$. От транзитивността на $\succ$ получаваме, че $n.\lg\frac{3}{2} \asymp n \succ (\lg n)^2 \succ \lg n.\lg\lg n$. $\Rightarrow$ $\boxed{f_{14} \prec f_5}$

$f_{14} = n^{\lg\lg n}$ ? $f_{13} = \lg n^{\lg n}$

От свойството на логаритъма $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ имаме, че $(\lg n)^{\lg n} = n^{\lg\lg n}$ следователно $\boxed{f_{13} \asymp f_{14}}$

$f_{13} = \lg n^{\lg n}$ ? $f_{16} = (\lg n)!$. Полагаме $m \leftarrow \lg n$ и получаваме $f_{13} = m^m$ и $f_{16} = m!$. От ДИС знаем, че $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m!}{m^m} = 0 \Rightarrow \boxed{f_{16} \prec f_{13}}$

$f_{16} = (\lg n)!$ ? $f_4 = n^3$

Логаритмуваме двете страни и получаваме $\lg((\lg n)!)$ и $\lg n^3 = 3\lg n$

Полагаме $m \leftarrow \lg n$ и получаваме $\lg(m!) \asymp m\lg m$ и $3m$. $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{3m}{m\lg m} =$

$= \lim\limits_{m\to\infty}\frac{3}{\lg m} = 0 \Rightarrow \boxed{f_4 \prec f_{16}}$

$f_4 = n^3$ ? $f_3 = n^2$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \boxed{f_3 \prec f_4}$

$f_3 = n^2$ ? $f_{17} = 4^{\lg n}$. Имаме $4^{\lg n} = 2^{2\lg n} = 2^{\lg n^2} = n^2 \Rightarrow \boxed{f_3 \asymp f_{17}}$

$f_3 = n^2$ ? $f_8 = n\lg n$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\lg n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n} = 0 \Rightarrow \boxed{f_8 \prec f_3}$

$f_8 = n\lg n$ ? $f_{12} = \lg(n!)$. От следствието на Апроксимацията на Стерлинг имаме, че $\lg(n!) \asymp n\lg n \Rightarrow \boxed{f_8 \asymp f_{12}}$

$f_8 = n\lg n$ ? $f_1 = n$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n\lg n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\lg n} = 0 \Rightarrow \boxed{f_1 \prec f_8}$

$f_1 = n$ ? $f_{18} = 2^{\lg n}$. Имаме за $2^{\lg n} = n \Rightarrow \boxed{f_1 \asymp f_{18}}$

Отговор: $f_1 \asymp f_{18} \prec f_8 \asymp f_{12} \prec f_3 \asymp f_{17} \prec f_4 \prec f_{16} \prec f_{13} \asymp f_{14} \prec f_5 \prec f_2 \prec f_{10} \prec f_9 \prec f_7 \prec f_6 \prec f_{11} \prec f_{15}$

зад.5/ Да се докаже, че $\binom{2n}{n} \asymp \frac{4^n}{\sqrt{n}}$ и $\binom{n}{\frac{n}{2}} \asymp \frac{2^n}{\sqrt{n}}$

<u>Решение:</u> $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{\text{Апа С.}}{\approx} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi . n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \sqrt{\frac{1}{\pi . n}} . 4^n \asymp \frac{4^n}{\sqrt{n}}$

Доказателството за второто е аналогично.

зад.6/ Докажете, че $\sqrt[n]{n} \asymp 1$

<u>Решение:</u> Ще използваме следната лема: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a > 0 \leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \ln f(x) = \ln a$

Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{1} = e^0 = 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} \asymp 1$ ■

зад.7/ Сравнете асимптотично функциите $2^{n^2+n}$ и $3^{n^2}$

<u>Решение:</u> $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n^2+n}}{3^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n^2}}{2^n} = \infty$, понеже $a^{n^2} > b^n$ винаги, щом $a > 1$, $b > 1$. Това получаваме чрез логаритмуване. ■