Seminarul 3

1. O persoană întârzie la serviciu într-o zi ploioasă cu probabilitatea 0,2, iar într-o zi senină cu probabilitatea 0,1. Conform prognozei meteo, în următoarea zi va ploua cu probabilitate 0,8. Care este probabilitatea ca:
a) persoana să ajungă ziua următoare la timp la serviciu?
b) ziua următoare să fie ploioasă, ştiind că persoana ajunge la timp la serviciu?

R: Fie I: "persoana întârzie la serviciu într-o zi" şi S:"ziua e senină". a) $P(\bar{I}) = P(\bar{I}|S)P(S) + P(\bar{I}|\bar{S})P(\bar{S}) = 0,9 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0{,}8 = 0{,}82$; b) $P(\bar{S}|\bar{I}) = \frac{P(\bar{I}|\bar{S})P(\bar{S})}{P(\bar{I})} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}8}{0{,}82} = \frac{32}{41}$.

2. X are 2 monede în buzunar: una normală, care are pe o faţă *cap* şi pe cealaltă *pajură*, şi una măsluită, care are pe ambele feţe *pajură*. X scoate aleator o monedă din buzunar, o aruncă şi constată că aceasta indică *pajură*. Care este probabilitatea ca:
a) moneda să fie măsluită?
b) moneda să fie măsluită, ştiind că X a mai aruncat o dată moneda şi a obţinut din nou *pajură*?

R: Fie C_i:"se obţine *cap* la aruncarea i", $i = 1, 2$ şi M:"se alege moneda măsluită."
Formula lui Bayes implică: a) $P(M|\bar{C}_1) = \frac{P(\bar{C}_1|M)P(M)}{P(\bar{C}_1|M)P(M)+P(\bar{C}_1|\bar{M})P(\bar{M})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$; b) $P(M|\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) = \frac{P(\bar{C}_1\cap\bar{C}_2|M)P(M)}{P(\bar{C}_1\cap\bar{C}_2|M)P(M)+P(\bar{C}_1\cap\bar{C}_2|\bar{M})P(\bar{M})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}} = \frac{4}{5}$.

3. Într-un oraş plouă în o treime din zilele unui an. Dacă plouă, atunci traficul este intens cu probabilitatea $\frac{1}{2}$. Dacă nu plouă, atunci traficul este intens cu probabilitatea $\frac{1}{4}$. Dacă plouă şi traficul este intens, atunci X întârzie la serviciu cu probabilitatea $\frac{1}{2}$. Dacă nu plouă şi traficul nu e intens, atunci probabilitatea ca X să întârzie la serviciu este $\frac{1}{8}$. În celelalte situaţii (plouă şi nu e trafic intens, respectiv nu plouă şi e trafic intens), X întârzie la serviciu cu probabilitatea $\frac{1}{4}$. Se alege aleator o zi din calendar. Care este probabilitatea ca:
a) să nu plouă, să fie trafic intens şi X să ajungă la timp la serviciu în ziua aleasă?
b) X să întârzie la serviciu în ziua aleasă?
c) să plouă în ziua aleasă, ştiind că X întârzie la serviciu în ziua aceea?

R: Fie R:"plouă", T:"traficul este intens" şi I:"X întârzie".
a) $P(\bar{R} \cap T \cap \bar{I}) = P(\bar{I}|T \cap \bar{R}) \cdot P(T|\bar{R}) \cdot P(\bar{R}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{8}$; b) $P(I) = P(I|T \cap R)P(T \cap R) + P(I|T \cap \bar{R})P(T \cap \bar{R}) + P(I|\bar{T} \cap R)P(\bar{T} \cap R) + P(I|\bar{T} \cap \bar{R})P(\bar{T} \cap \bar{R}) = \frac{1}{2} \cdot P(T|R)P(R) + \frac{1}{4} \cdot P(T|\bar{R})P(\bar{R}) + \frac{1}{4} \cdot P(\bar{T}|R)P(R) + \frac{1}{8} \cdot P(\bar{T}|\bar{R})P(\bar{R}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{11}{48}$; c) $P(R|I) = \frac{P(I \cap R)}{P(I)} = \frac{P(I\cap R\cap T)+P(I\cap R\cap \bar{T})}{\frac{11}{48}} = \frac{P(I\cap R\cap T)+P(I\cap R\cap \bar{T})}{\frac{11}{48}} = \big(P(I|T \cap R) \cdot P(T|R) \cdot P(R) + P(I|\bar{T} \cap R) \cdot P(\bar{T}|R) \cdot P(R)\big) \cdot \frac{48}{11} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{48}{11} = \frac{6}{11}$.

4. Se aruncă un zar. Fie N numărul care a apărut. Apoi, zarul este aruncat de N ori. Care este probabilitatea ca N=3, ştiind că:
a) numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt diferite?
b) numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt egale?

R: Fie D: "numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt diferite" şi E: "numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt egale".

Formula lui Bayes implică: a) $P(N = 3|D) = \frac{P(D|N=3)P(N=3)}{\sum_{i=1}^{6} P(D|N=i)P(N=i)} = \frac{\frac{A_6^3}{6^4}}{\sum_{i=1}^{6} \frac{A_6^i}{6^{i+1}}}$; b) $P(N = 3|E) = \frac{P(E|N=3)P(N=3)}{\sum_{i=1}^{6} P(E|N=i)P(N=i)} = \frac{\frac{1}{6^3}}{\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6^i}}$.

5. O zi londoneză este ploioasă în 50% din cazuri. Prognoza meteo este corectă în $\frac{2}{3}$ din cazuri. Adică, probabilitatea să plouă, ştiind că la meteo s-a anunţat o zi ploioasă, este $\frac{2}{3}$; la fel, probabilitatea să nu plouă, ştiind că la meteo s-a anunţat o zi senină, este tot $\frac{2}{3}$. Dl X pleacă în excursie la Londra. Dacă la meteo se anunţă o zi ploioasă, dl X îşi ia umbrela. Dacă la meteo se anunţă o zi senină, dl X îşi ia umbrela cu probabilitatea $\frac{1}{3}$. Care este probabilitatea ca dl X să îşi ia umbrela în excursie?

R: Fie U:"Dl X îşi ia umbrela", R:"plouă" şi M:"la meteo se anunţă ploaie". Fie $P(M) = x$. Avem $x = P(M) = P(M|R)P(R) + P(M|\bar{R})P(\bar{R}) = \frac{P(M|R)+1-P(\bar{M}|\bar{R})}{2}$. Formula lui Bayes implică $P(M|R) = \frac{P(R|M)P(M)}{P(R)} = \frac{4}{3}x$ şi $P(\bar{M}|\bar{R}) = \frac{P(\bar{R}|\bar{M})P(\bar{M})}{P(\bar{R})} = \frac{4}{3}(1-x)$. Deci $x = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}(1-x)$, adică $x = \frac{1}{2}$.
$P(U) = P(U|M)P(M) + P(U|\bar{M})P(\bar{M}) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

- **Modelul urnei cu r culori şi bilă returnată:**

$$\begin{aligned} b(k_1, \ldots, k_r; n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k_i \text{ bile cu culoarea } i,\ i = \overline{1,r}, \\ & \text{din } n \text{ extrageri } \textit{cu returnarea} \text{ bilei extrase} \\ &= \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}, \end{aligned}$$

unde p_i =probabilitatea de a extrage o bilă cu culoarea i, $i = \overline{1,r}$.

- **Modelul urnei cu r culori şi bilă nereturnată:**

$$\begin{aligned} p(k_1, \ldots, k_r; n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k_i \text{ bile cu culoarea } i,\ i = \overline{1,r}, \\ & \text{din } n \text{ extrageri } \textit{fără returnarea} \text{ bilei extrase} \\ &= \frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot C_{n_r}^{k_r}}{C_{n_1+\ldots+n_r}^{n}}, \end{aligned}$$

unde n_i =numărul iniţial de bile cu culoarea i din urnă, $i = \overline{1,r}$.

6. O persoană tastează aleator 11 litere minuscule pe o tastatură engleză. Care este probabilitatea ca literele tastate să poată fi permutate astfel încât să se obţină cuvântul *abracadabra*?

R: $\frac{11!}{5!2!1!1!2!} \frac{1}{26^{11}}$.

7. O echipă formată din 4 cercetători este aleasă aleator dintr-un grup de 4 matematicieni, 3 informaticieni şi 5 fizicieni. Care este probabilitatea ca echipa să fie formată din 2 matematicieni, 1 informatician şi 1 fizician?

R: $\frac{C_4^2 C_3^1 C_5^1}{C_{12}^4}$.

8. Un zar este aruncat de cinci ori. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A:"exact două numere sunt pare."
b) B:"1 apare de două ori, 3 apare o dată şi 6 apare de două ori."
c) C: "exact două numere sunt prime, un număr este egal cu 1, iar celelalte două sunt egale cu 4".

R: a) $C_5^2 \frac{1}{2^5}$; b) $\frac{5!}{2!1!2!} \frac{1}{6^5}$; c) $\frac{5!}{2!1!2!} \frac{1}{2^2} \frac{1}{6} \frac{1}{6^2}$.

9. Într-un club sunt $4N$ persoane din 4 oraşe diferite, câte N din fiecare oraş. 5 persoane sunt alese aleator. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A: "exact 4 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş".
b) B: "3 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş, iar celelalte 2 sunt dintr-un alt oraş".
c) C: "3 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş, iar fiecare din celelalte 2 persoane este dintr-un oraş diferit de al celorlalte persoane alese".

R: a) $A_4^2 \cdot \frac{C_N^4 C_N^1 C_N^0 C_N^0}{C_{4N}^5}$; b) $A_4^2 \cdot \frac{C_N^3 C_N^2 C_N^0 C_N^0}{C_{4N}^5}$; c) $\frac{A_4^3}{2} \cdot \frac{C_N^3 C_N^1 C_N^1 C_N^0}{C_{4N}^5}$.

10. Un magazin achiziţionează componente electronice în loturi de câte 10. 30% din loturi au câte 4 componente defecte, iar restul de 70% au câte 5 componente defecte. Dintr-un lot achiziţionat se aleg 4 componente pentru a fi testate. Fie X variabila aleatoare care indică numărul de componente defecte găsite în urma testării. Determinaţi distribuţia lui X.

R: $X \sim \begin{pmatrix} k \\ p_k \end{pmatrix}_{k=\overline{0,4}}, p_k = \frac{3}{10}\frac{C_4^k C_6^{4-k}}{C_{10}^4} + \frac{7}{10}\frac{C_5^k C_5^{4-k}}{C_{10}^4}$.

11. Un pachet standard de 52 de cărţi de joc este amestecat şi apoi împărţit în două teancuri a câte 26 de cărţi fiecare. O carte este extrasă din unul dintre teancuri şi se constată că aceasta este un as. Asul ales este pus în celălalt teanc, care este apoi amestecat, şi din el se extrage o carte. Care este probabilitatea ca această carte să fie un as?

R: Se consideră partiţia evenimentului sigur dată de A_i: "primul teanc de cărţi conţine i aşi" (cu $P(A_i) = \frac{C_4^i C_{48}^{26-i}}{C_{52}^{26}}$), $i = \overline{1,4}$, şi apoi se aplică formula probabilităţii totale evenimentului A: "cartea aleasă din al doilea teanc este un as".