

Aproximarea funcționalelor liniare

Derivare și integrare numerică

Radu T. Trîmbițaș

UBB

Mai 2010

Aproximarea funcționalelor liniare I

- X un spațiu liniar
- L_1, \dots, L_m funcționale liniare reale, liniar independente, definite pe X
- $L : X \rightarrow \mathbb{R}$ funcțională liniară reală astfel încât L, L_1, \dots, L_m să fie liniar independente.

Definiția 1

O formulă de aproximare a funcționalei L în raport cu funcționalele L_1, \dots, L_m este o formulă de forma

$$L(f) = \sum_{i=1}^m A_i L_i(f) + R(f), \quad f \in X. \quad (1)$$

Parametrii reali A_i se numesc coeficienții formulei, iar $R(f)$ termenul rest.

Pentru o formulă de aproximare de forma (1), dându-se funcționalele L_i , se pune problema determinării coeficienților A_i și a studiului termenului rest corespunzător valorilor obținute pentru coeficienți.

Observația 2

Forma funcționalelor L_i depinde de informațiile deținute asupra lui f (ele exprimând de fapt aceste informații), dar și de natura problemei de aproximare, adică de forma lui L .

Exemplul 3

Dacă $X = \{f \mid f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}$, $L_i(f) = f(x_i)$, $i = \overline{0, m}$, $x_i \in [a, b]$ și $L(f) = f(\alpha)$, $\alpha \in [a, b]$, formula de interpolare Lagrange

$$f(\alpha) = \sum_{i=0}^m \ell_i(\alpha) f(x_i) + (Rf)\alpha$$

este o formulă de tip (1), cu coeficienții $A_i = \ell_i(\alpha)$, iar una din reprezentările posibile pentru rest este

$$(Rf)(\alpha) = \frac{u(\alpha)}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

dacă există $f^{(m+1)}$ pe $[a, b]$.

Exemplul 4

Dacă X și L_i sunt ca în exemplul 3 și există $f^{(k)}(\alpha)$, $\alpha \in [a, b]$, $k \in \mathbb{N}^$, iar $L(f) = f^{(k)}(\alpha)$ se obține o formulă de aproximare a valorii derivatei de ordinul k a lui f în punctul α*

$$f^{(k)}(\alpha) = \sum_{i=0}^m A_i f(x_i) + R(f),$$

*numită și **formulă de derivare numerică**.*

Exemplul 5

Dacă X este un spațiu de funcții definite pe $[a, b]$, integrabile pe $[a, b]$ și pentru care există $f^{(j)}(x_k)$, $k = \overline{0, m}$, $j \in I_k$, cu $x \in [a, b]$ și I_k mulțimi de indici date

$$L_{kj}(f) = f^{(j)}(x_k), \quad k = \overline{0, m}, \quad j \in I_k,$$

iar

$$L(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

se obține formula

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^m \sum_{j \in I_k} A_{kj} f^{(j)}(x_k) + R(f),$$

numită **formulă de integrare numerică**.

Definiția 6

*Dacă $\mathbb{P}_r \subset X$, numărul $r \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\text{Ker}(R) = \mathbb{P}_r$ se numește **grad de exactitate** al formulei de aproximare (1).*

Observația 7

Deoarece R este o funcțională liniară proprietatea $\text{Ker}(R) = \mathbb{P}_r$ este echivalentă cu $R(e_k) = 0$, $k = \overline{0, r}$ și $R(e_{r+1}) \neq 0$, unde $e_k(x) = x^k$.

Problema generală de aproximare I

- *Problema generală de aproximare*: dându-se o funcțională liniară L pe X , m funcționale liniare L_1, L_2, \dots, L_m pe X și valorile lor ("datele") $\ell_i = L_i f$, $i = \overline{1, m}$ aplicate unei anumite funcții f și un subspațiu liniar $\Phi \subset X$ cu $\dim \Phi = m$, dorim să găsim o formulă de aproximare de tipul

$$Lf \approx \sum_{i=1}^m a_i L_i f \quad (2)$$

care să fie exactă (adică să aibă loc egalitatea) pentru orice $f \in \Phi$

- **ipoteză naturală**: „problema de interpolare” să se găsească $\varphi \in \Phi$ a.î.

$$L_i \varphi = s_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (3)$$

să aibă soluție unică $\varphi(.) = \varphi(s, .)$, pentru $s = [s_1, \dots, s_m]^T$ arbitrar.

Problema generală de aproximare II

- Putem exprima ipoteza noastră mai explicit în termenii unei baze date $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ a lui Φ și a matricei Gram asociate

$$G = [L_i \varphi_j] = \begin{bmatrix} L_1 \varphi_1 & L_1 \varphi_2 & \dots & L_1 \varphi_m \\ L_2 \varphi_1 & L_2 \varphi_2 & \dots & L_2 \varphi_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_m \varphi_1 & L_m \varphi_2 & \dots & L_m \varphi_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (4)$$

- Cerem ca

$$\det G \neq 0 \quad (5)$$

- Solvabilitatea unică a lui (3) și (5) sunt echivalente
- Scriem φ din (3) sub forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j$$

Problema generală de aproximare III

- condițiile de interpolare

$$L_i \left(\sum_{j=1}^m c_j \varphi_j \right) = s_i, \quad i = 1, \dots, m$$

pot fi scrise sub forma

$$\sum_{j=1}^m c_j L_i \varphi_j = s_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

adică

$$Gc = s, \quad c = [c_1, \dots, c_m]^T, \quad s = [s_1, \dots, s_m]^T \quad (6)$$

- (6) are soluție unică \iff (5)
- abordări: metoda interpolării și metoda coeficienților nedeterminați



Figura: Jørgen Pedersen Gram (1850-1916)

- Rezolvăm problema generală de interpolare prin aproximare

$$Lf \approx L\varphi(\ell, .), \quad \ell = [\ell_1, \dots, \ell_m]^T, \quad \ell_i = L_i f \quad (7)$$

- Aplicăm L nu lui f ci soluției $\varphi(\ell, .)$ a lui (3) în care $s = \ell$. Ipoteza noastră ne garantează că $\varphi(\ell, .)$ este unic determinat. În particular, dacă $f \in \Phi$, atunci (7) are loc cu egalitate, deoarece $\varphi(\ell, .) = f(.)$, în mod trivial. Astfel, aproximanta noastră (7) satisface condițiile de exactitate cerute pentru (2). Rămîne doar să arătăm că (7) produce o aproximare de forma (2).

Metoda interpolării II

- Pentru aceasta să observăm că interpolantul în (7) este

$$\varphi(\ell, \cdot) = \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j(\cdot)$$

unde $c = [c_1, \dots, c_m]^T$ satisface (6) cu $s = \ell$

$$Gc = \ell, \quad \ell = [L_1 f, L_2 f, \dots, L_m f]^T.$$

- Scriind

$$\lambda_j = L\varphi_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad \lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]^T, \quad (8)$$

avem din liniaritatea lui L

$$L\varphi(\ell, \cdot) = \sum_{j=1}^m c_j L\varphi_j = \lambda^T c = \lambda^T G^{-1} \ell = \left[(G^T)^{-1} \lambda \right]^T \ell,$$

adică

$$L\varphi(\ell, \cdot) = \sum_{i=1}^m a_i L_i f, \quad a = [a_1, \dots, a_m]^T = \left(G^T\right)^{-1} \lambda. \quad (9)$$

Metoda coeficienților nedeterminați I

- Aici determinăm coeficienții din (2) astfel încât egalitatea să aibă loc $\forall f \in \Phi$, care conform liniarității lui L și L_i este echivalentă cu egalitatea pentru $f = \varphi_1, f = \varphi_2, \dots, f = \varphi_m$, adică

$$\left(\sum_{j=1}^m a_j L_j \right) \varphi_i = L\varphi_i, \quad i = \overline{1, m},$$

sau conform (7)

$$\sum_{j=1}^m a_j L_j \varphi_i = \lambda_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Metoda coeficienților nedeterminați II

- Matricea sistemului este G^T , deci

$$a = [a_1, \dots, a_m]^T = \left(G^T\right)^{-1} \lambda,$$

în concordanță cu (9).

- Astfel, metoda interpolării și cea a coeficienților nedeterminați sunt matematic echivalente – ele conduc la exact aceeași aproximare.
- S-ar părea că, cel puțin în cazul polinoamelor (adică $\Phi = \mathbb{P}_d$), prima metodă este mai puternică, deoarece poate conduce la o expresie a erorii de interpolare (aplicând funcționala formulei de interpolare $f = a_n f + r_n f$). Dar și în cazul metodei coeficienților nedeterminați, din condiția de exactitate, se poate exprima restul cu ajutorul teoremei lui Peano.

Derivare numerică I

- Vom considera doar derivata de ordinul I; pentru derivate de ordin superior vom utiliza tehnici analoge.
- Rezolvare prin interpolare: în loc să derivăm $f \in C^{m+1}[a, b]$, vom deriva polinomul său de interpolare:

$$f(x) = (L_m f)(x) + (R_m f)(x). \quad (10)$$

- Scriem polinomul de interpolare în forma Newton

$$(L_m f)(x) = (N_m f)(x) = f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{m-1})f[x_0, x_1, \dots, x_m] \quad (11)$$

- restul sub forma

$$(R_m f)(x) = (x - x_0) \dots (x - x_m) \frac{f^{(m+1)}(\xi(x))}{(m+1)!}. \quad (12)$$

- Derivând (11) în raport cu x și punând $x = x_0$ obținem

$$(L_m f)'(x_0) = f[x_0, x_1] + (x_0 - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots + (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_{m-1})f[x_0, x_1, \dots, x_m]. \quad (13)$$

- Presupunând că f este continuu derivabilă pe un interval convenabil se obține pentru rest

$$(R_m f)'(x_0) = (x_0 - x_1) \cdots (x_0 - x_m) \frac{f^{(m+1)}(\xi(x_0))}{(m+1)!}. \quad (14)$$

- Deci, derivând (13) avem

$$f'(x_0) = (L_m f)'(x_0) + \underbrace{(R_m f)'(x_0)}_{e_m}. \quad (15)$$

- Dacă $H = \max_i |x_0 - x_i|$ eroarea are forma $e_m = O(H^m)$, când $H \rightarrow 0$.

Observația 8

- *Derivarea numerică este o operație critică și de aceea este bine să fie evitată pe cât posibil, deoarece chiar dacă aproximanta este bună, nu rezultă că derivata aproximantei este o aproximație bună a derivatei (vezi figura 2).*
- *Aceasta rezultă și din exemplul 9.*
- *Formulele de derivare numerică sunt utile pentru deducerea unor metode numerice, în special pentru ecuații diferențiale ordinare și ecuații cu derivate parțiale.*

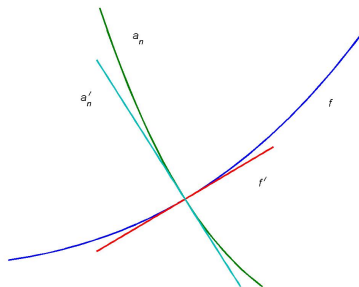


Figura: Neajunsurile derivării numerice

Exemplul 9

Fie funcția

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{n} \sin n^2(x - a), \quad g \in C^1[a, b].$$

Se constată că $d(f, g) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), dar $d(f', g') = n \not\rightarrow 0$.

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă pe $[a, b]$, $F_k(f)$, $k = \overline{0, m}$ informații despre f (de regulă funcționale liniare) și $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție pondere integrabilă pe $[a, b]$.

Definiția 10

O formulă de forma

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = Q(f) + R(f), \quad (16)$$

unde

$$Q(f) = \sum_{j=0}^m A_j F_j f$$

se numește formulă de integrare numerică a funcție f sau formulă de cuadratură. Parametrii A_j , $j = \overline{0, m}$ se numesc coeficienții formulei, iar $R(f)$ termenul rest al ei. Q se numește funcțională de cuadratură.

Definiția 11

Numărul natural $d = d(Q)$ cu proprietatea că $\forall f \in \mathbb{P}_d, R(f) = 0$ și $\exists g \in \mathbb{P}_{d+1}$ astfel încât $R(g) \neq 0$ se numește grad de exactitate al formulei de cuadratură.

Deoarece R este liniar, rezultă că o formulă de cuadratură are gradul de exactitate d dacă și numai dacă $R(e_j) = 0, j = \overline{0, d}$ și $R(e_{d+1}) \neq 0$. Dacă gradul de exactitate al unei formule de cuadratură este cunoscut, restul se poate determina cu ajutorul teoremei lui Peano.

Formula trapezului și formula lui Simpson

- Aceste formule au fost denumite de Gautschi în [2] „caii de povară” ai integrării numerice.
- Ele își fac bine munca când intervalul de integrare este mărginit și integrandul este neproblematic. Formula trapezelor este surprinzător de eficientă chiar și pentru intervale infinite.
- Ambele reguli se obțin aplicând cele mai simple tipuri de interpolare subintervalelor diviziunii - interpolare Lagrange gradul 1 pentru trapeze, 2 pentru Simpson

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b, \quad x_k = a + kh \quad (17)$$
$$h = \frac{b - a}{n}$$

- Se interpolează liniar pe fiecare subinterval $[x_k, x_{k+1}]$ și se obține

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (L_1 f)(x) dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} (R_1 f)(x) dx, \quad f \in C^2[a, b] \quad (18)$$

cu

$$(L_1 f)(x) = f_k + (x - x_k) f[x_k, x_{k+1}].$$

- Integrând avem

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_k + f_{k+1}) + R_1(f),$$

unde

$$R_1(f) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} K_1(t) f''(t) dt$$

Formula trapezului II

- Nucleul lui Peano

$$\begin{aligned}K_1(t) &= \frac{(x_{k+1} - t)^2}{2} - \frac{h}{2} [(x_k - t)_+ + (x_{k+1} - t)_+] \\&= \frac{(x_{k+1} - t)^2}{2} - \frac{h(x_{k+1} - t)}{2} \\&= \frac{1}{2} (x_{k+1} - t) (x_k - t) \leq 0.\end{aligned}$$

- Deci

$$R_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi_k), \quad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

și

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_k + f_{k+1}) - \frac{h^3}{12} f''(\xi_k) \quad (19)$$

- Această formulă se numește *regula (elementară a) trapezului*.

Formula trapezului III

- Însumând pentru toate subintervalele se obține *regula trapezelor* sau *formula compusă a trapezului* sau *formula repetată a trapezului*.

$$\int_a^b f(x) dx = h \left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right) - \frac{h^3}{12} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k)$$

Deoarece f'' este continuă pe $[a, b]$, restul se poate scrie sub forma

$$R_{1,n}(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi) \quad (20)$$

Deoarece f'' este mărginită în modul

$$R_{1,n}(f) = O(h^2), \quad h \rightarrow 0,$$

și deci regula trapezelor converge când $h \rightarrow 0$ (sau echivalent, $n \rightarrow \infty$), atunci când $f \in C^2[a; b]$.

Formula lui Simpson I

- Dacă în locul interpolării liniare se utilizează interpolarea pătratică se obține *regula lui Simpson repetată*.
- Varianta ei elementară, numită *regula lui Simpson* sau *formula lui Simpson* este

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_k + 4f_{k+1} + f_{k+2}) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_k), \quad \xi_k \in [x_k, x_{k+2}], \quad (21)$$

$$f \in C^4[a, b].$$

Formula lui Simpson II

- Restul - $dex = 3$, aplicăm teorema lui Peano

$$R_2(f) = \int_{x_k}^{x_{k+2}} K_2(t) f^{(4)}(t) dt,$$

unde

$$K_2(t) = \frac{1}{3!} \left\{ \frac{(x_{k+1}-t)^4}{4} - \frac{h}{3} \left[(x_k-t)_+^3 + 4(x_{k+1}-t)_+^3 + (x_{k+2}-t)_+^3 \right] \right\},$$

$$K_2(t) = \frac{1}{6} \begin{cases} \frac{(x_{k+1}-t)^4}{4} - \frac{h}{3} \left[4(x_{k+1}-t)^3 + (x_{k+2}-t)^3 \right], & t \in [x_k, x_{k+1}] \\ \frac{(x_{k+1}-t)^4}{4} - \frac{h}{3} (x_{k+2}-t)^3, & t \in [x_{k+1}, x_{k+2}] \end{cases}$$

Formula lui Simpson III

- $t \in [a, b] \implies K_2(t) \leq 0$, putem aplica corolarul la th. Peano

$$R_2(f) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi_k) R_2(e_4),$$

$$\begin{aligned} R_2(e_4) &= \frac{x_{k+2}^5 - x_k^5}{5} - \frac{h}{3} [x_k^4 + 4x_{k+1}^4 + x_{k+2}^4] \\ &= h \left[2 \frac{x_{k+2}^4 + x_{k+2}^3 x_k + x_{k+2}^2 x_k^2 + x_{k+2} x_k^3 + x_k^4}{5} \right. \\ &\quad \left. - \frac{5x_k^4 + 4x_k^3 x_{k+2} + 6x_k^2 x_{k+2}^2 + 4x_k x_{k+2}^3 + 5x_{k+2}^4}{12} \right] \\ &= \frac{h}{60} (-x_k^4 + 4x_k^3 x_{k+2} + 6x_k^2 x_{k+2}^2 + 4x_k x_{k+2}^3 - x_{k+2}^4) \\ &= -\frac{h}{60} (x_{k+2} - x_k)^4 = -4 \frac{h^{15}}{15} \end{aligned}$$

Formula lui Simpson IV

- Deci,

$$R_2(f) = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi_k).$$

- Pentru regula repetată a lui Simpson obținem

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) + R_{2,n}(f) \quad (22)$$

cu

$$R_{2,n}(f) = -\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

- Se observă că $R_{2,n}(f) = O(h^4)$, de unde rezultă convergența când $n \rightarrow \infty$. Se observă și creșterea ordinului cu 1, ceea ce face ca regula repetată a lui Simpson să fie foarte populară și larg utilizată.



Figura: Thomas Simpson (1710-1761)

- La metodele de integrare numerică erorile depind de lungimea intervalului utilizat și de valoarea derivatelor de un anumit ordin ale funcției care urmează a fi integrată.
- Aceasta implică faptul că metodele nu vor lucra bine pentru funcții cu derivatele de un anumit ordin mari – în special funcții care au fluctuații mari pe unele subintervale sau pe tot intervalul.
- Este rezonabil să utilizăm subintervale mici acolo unde derivatele sunt mari și subintervale mari acolo unde derivatele sunt mici. O metodă care face aceasta într-o manieră sistematică se numește **cuadratură adaptivă**.
- Abordarea generală într-o cuadratură adaptivă este de a utiliza două metode diferite pe fiecare subinterval, de a compara rezultatul și de a subdiviza intervalul dacă diferențele sunt mari.

- Există situația nefericită în care se utilizează două metode proaste, rezultatele sunt proaste, dar diferența dintre ele este mică.
- Un mod de a evita o astfel de situație este de a ne asigura că o metodă supraestimează rezultatul, iar alta îl subestimează. Vom da un exemplu de structură generală de cuadratură adaptiv-recursivă
- Să presupunem că

$$\text{metint}(a, b : \text{real}; f : \text{functie}, n : \text{integer}) : \text{real}$$

este o funcție care aproximează $\int_a^b f(x)dx$ folosind o cuadratură repetată cu n subintervale. Pentru n se alege o valoare mică (4 sau 5). Vezi algoritmul 36.

Algoritmul 1. Cuadratură adaptivă

Intrare: f - funcția de integrat, a , b - limitele de integrare, ε - toleranța, $metint$ - o cuadratură repetată

Ieșire: valoarea integralei

function $adapt(f, a, b, \varepsilon, metint)$

if $|metint(a, b, f, 2m) - metint(a, b, f, m)| < \varepsilon$ **then**

$adapt := metint(a, b, f, 2m);$

else

$adapt :=$

$adapt(f, a, (a + b)/2, \varepsilon, metint) + adapt(f, (a + b)/2, b, \varepsilon, metint);$

end if

- Structura algoritmului: DIVIDE AND CONQUER.
- Spre deosebire de alte metode, la care se decide cât de mult se muncește pentru a asigura precizia dorită, la o cuadratură adaptivă se calculează doar atât cât este necesar.
- Aceasta înseamnă că eroarea absolută ε trebuie aleasă astfel încât să nu se intre într-un ciclu infinit pentru a atinge o precizie imposibil de atins. Numărul de pași depinde de natura funcției de integrat.
- Posibilități de îmbunătățire: $metint(a, b, f, 2m)$ este apelat de două ori, precizia poate fi scalată cu raportul dintre dimensiunea intervalului curent și dimensiunea întregului interval. Pentru detalii suplimentare recomandăm [8].

Cuadraturi iterate. Metoda lui Romberg I

- Un dezavantaj al cuadraturilor adaptive este acela că calculează repetat valorile funcției în noduri, iar atunci când este rulat un astfel de program apare un consum suplimentar de timp de calcul datorită recursivității sau gestiunii stivei într-o implementare iterativă.
- Cuadraturile iterate înlătură aceste inconveniente. Ele aplică la primul pas o cuadratură repetată și apoi subdivid intervalele în părți egale folosind la fiecare pas aproximantele calculate anterior.
- Vom exemplifica această tehnică printr-o metodă care pornește de la formula repetată a trapezului și îmbunătățește convergența utilizând extrapolarea Richardson.

Cuadraturi iterate. Metoda lui Romberg II

- Primul pas al procesului presupune aplicarea formulei repetate a trapezului cu $n_1 = 1$, $n_2 = 2, \dots$, $n_p = 2^{p-1}$, unde $p \in \mathbb{N}^*$. Valoarea pasului h_k corespunzătoare lui n_k va fi

$$h_k = \frac{b-a}{n_k} = \frac{b-a}{2^{k-1}}.$$

- Cu aceste notații regula trapezului devine

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h_k}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{2^{n-1}-1} f(a + ih_k) \right] - \frac{b-a}{12} h_k^2 f''(\mu_k) \quad (23)$$

$$\mu_k \in (a, b).$$

Cuadraturi iterate. Metoda lui Romberg III

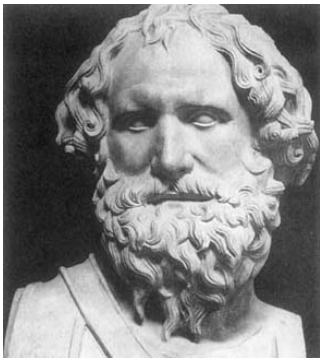
- Notăm cu $R_{k,1}$ rezultatul aproximării conform (23).

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2} [f(a) + f(b)] = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \quad (24)$$

$$\begin{aligned} R_{2,1} &= \frac{h_2}{2} [f(a) + f(b) + 2f(a + h_2)] = \\ &= \frac{b-a}{4} \left[f(a) + f(b) + 2f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[R_{1,1} + h_1 f\left(a + \frac{1}{2}h_1\right) \right]. \end{aligned}$$

și în general

$$R_{k,1} = \frac{1}{2} \left[R_{k-1,1} + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right) h_{k-1}\right) \right], \quad k = \overline{2, n} \quad (25)$$



(a) Arhimede



(b) Lewis Fry Richardson (1881-1953)

Figura:

- Urmează îmbunătățirea prin extrapolare Richardson

$$I = \int_a^b f(x) dx = R_{k-1,1} - \frac{(b-a)}{12} h_k^2 f''(a) + O(h_k^4).$$

- Vom elimina termenul în h_k^2 combinând două ecuații

$$I = R_{k-1,1} - \frac{(b-a)}{12} h_k^2 f''(a) + O(h_k^4),$$

$$I = R_{k,1} - \frac{b-a}{48} h_k^2 f''(a) + O(h_k^4).$$

- Obținem

$$I = \frac{4R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3} + O(h_k^4).$$

- Definim

$$R_{k,2} = \frac{4R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3}. \quad (26)$$

- Se aplică extrapolarea Richardson și acestor valori. În general dacă $f \in C^{2n+2}[a, b]$, atunci pentru $k = \overline{1, n}$ putem scrie

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx = \frac{h_k}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a + ih_k) \right] \\ + \sum_{i=1}^k K_i h_k^{2i} + O(h_k^{2k+2}), \end{aligned} \quad (27)$$

unde K_i nu depinde de h_k .

Metoda lui Romberg III

- Formula (27) se justifică în modul următor. Fie $a_0 = \int_a^b f(x)dx$ și

$$A(h) = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + f(b) \right], \quad h = \frac{b-a}{k}.$$

- Dacă $f \in C^{2k+1}[a, b]$, $k \in \mathbb{N}^*$

$$A(h) = a_0 + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \dots + a_k h^{2k} + O(h^{2k+1}), \quad h \rightarrow 0 \quad (28)$$

unde

$$a_k = \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)], \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

- Cantitățile B_k sunt numerele lui Bernoulli, adică coeficienții dezvoltării

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k, \quad |z| < 2\pi.$$

Metoda lui Romberg IV

- Formula (28) se numește **formula Euler-MacLaurin**
- Eliminând succesiv puterile lui h din (27) se obține

$$R_{k,j} = \frac{4^{j-1}R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}, \quad k = \overline{2, n}, \quad j = \overline{2, i}.$$

- Calculele se pot aranja tabelar, astfel:

$$\begin{array}{ccccccc} R_{1,1} & & & & & & \\ R_{2,1} & R_{2,2} & & & & & \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ R_{n,1} & R_{n,2} & R_{n,3} & \dots & R_{n,n} & & \end{array}$$

- Deoarece $(R_{n,1})$ este convergent și $(R_{n,n})$ este convergent, mai rapid decât $(R_{n,1})$. Drept criteriu de oprire se poate folosi $|R_{n-1,n-1} - R_{n,n}| \leq \varepsilon$.



(a) Leonhard Euler (1707-1783)



(b) Colin Maclaurin (1698-1768)

Figura:

Exemplul 12

Aproximați $\int_0^\pi \sin x dx$ prin metoda lui Romberg, $\varepsilon = 10^{-1}$.

- Valoarea exactă a integralei este

$$I = \int_0^\pi \sin x dx = 2$$

- Urmează doi pași ai formulei trapezelor

$$R_{1,1} = \frac{\pi}{2}(0 + 0) = 0$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2} \left(R_{1,1} + \pi \sin \frac{\pi}{2} \right) = 1.571$$

Exemplu II

- Extrapolare Richardson

$$R_{2,2} = 1.571 + (1,571 - 0)/3 = 2.094$$

- Verificare criteriu de oprire

$$(R_{2,2} - R_{1,1}) > 0.1$$

- Din nou trapeze și extrapolare

$$R_{3,1} = \frac{1}{2} \left[R_{2,1} + \frac{\pi}{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right] = 1.895$$

$$R_{3,2} = 1,895 + \frac{1.895 - 1.571}{3} = 2.004$$

$$R_{3,3} = 2.004 + (2.004 - 2.094)/15 = 1.999$$

$$|R_{3,3} - R_{2,2}| < 0.1$$

Pentru trapez cu același număr de argumente $I \approx 1.895$. Pentru Simpson cu 4 noduri $I \approx 2.005$.

- Coloana a doua din metoda lui Romberg corespunde aproximării prin metoda lui Simpson. Notăm

$$S_{k,1} = R_{k,2}.$$

Coloana a treia este deci o combinație a două aproximante de tip Simpson:

$$S_{k,2} = S_{k,1} + \frac{S_{k,1} - S_{k-1,1}}{15} = R_{k,2} + \frac{R_{k,2} - R_{k-1,2}}{15}.$$

Relația

$$S_{k,2} = S_{k,1} + \frac{S_{k,1} - S_{k-1,1}}{15}, \quad (29)$$

va fi folosită la elaborarea unui algoritm de cuadratură adaptivă.

Cuadraturi adaptive 2 II

- Fie $c = (a + b)/2$. Formula elementară a lui Simpson este

$$S = \frac{h}{6} (f(a) + 4f(c) + f(b)).$$

Pentru două subintervale se obține

$$S_2 = \frac{h}{12} (f(a) + 4f(d) + 2f(c) + 4f(e) + f(b)),$$

unde $d = (a + c)/2$ și $e = (c + b)/2$. Cantitatea Q se obține aplicând (29) celor două aproximante:

$$Q = S_2 + (S_2 - S)/15.$$

Putem să dăm acum un algoritm recursiv pentru aproximarea integralei. Funcția *adquad* evaluează integrandul aplicând regula lui Simpson. Ea apelează recursiv *quadstep* și aplică extrapolarea. Descrierea se dă în algoritmul 51.

Algoritmul adaptiv

bazat pe metoda lui Simpson și extrapolare

- Datorat lui Gander și Gautschi
- **Intrare:** funcția f , intervalul $[a, b]$, eroarea ε
- **Ieșire:** Valoarea aproximativă a integralei

function *adquad*(f, a, b, ε) : *real*

$c := (a + b)/2$;

$fa = f(a)$; $fb := f(b)$; $fc := f(c)$;

$Q := quadstep(f, a, b, \varepsilon, fa, fc, fb)$;

return Q ;

```
function quadstep( $f, a, b, \varepsilon, fa, fc, fb$ ) : real  
   $h := b - a$ ;  $c := (a + b)/2$ ;  
   $fd := f((a + c)/2)$ ;  $fe := f((c + b)/2)$ ;  
   $Q1 := h/6 * (fa + 4 * fc + fb)$ ;  
   $Q2 := h/12 * (fa + 4 * fb + 2 * fc + 4 * fe + fb)$ ;  
  if  $|Q1 - Q2| < \varepsilon$  then  
     $Q := Q2 + (Q2 - Q1)/15$ ;  
  else  
     $Qa := quadstep(f, a, c, \varepsilon, fa, fd, fc)$ ;  
     $Qb := quadstep(f, c, b, \varepsilon, fc, fe, fb)$ ;  
     $Q := Qa + Qb$ ;  
  end if  
  return  $Q$ ;
```

Formule Newton-Cotes cu ponderi și formule de tip Gauss

- O **formulă de cuadratură cu ponderi** este o formulă de tipul

$$\int_a^b f(t)w(t)dt = \sum_{k=1}^n w_k f(t_k) + R_n(f) \quad (30)$$

unde w este nenegativă, integrabilă pe (a, b) .

- Intervalul (a, b) poate fi mărginit sau nemărginit.
- Dacă este nemărginit trebuie să ne asigurăm că integrala din (30) este bine definită, cel puțin în cazul când f este polinom. Realizăm aceasta cerând ca toate momentele funcției pondere

$$\mu_s = \int_a^b t^s w(t)dt, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (31)$$

să existe și să fie finite.

Formule de cuadratură de tip interpolator I

- Spunem că (30) este de **tip interpolator**, dacă are gradul de exactitate $d = n - 1$.
- Formulele de tip interpolator sunt chiar formulele obținute prin interpolare, adică pentru care

$$\sum_{k=1}^n w_k f(t_k) = \int_a^b L_{n-1}(f; t_1, \dots, t_n, t) w(t) dt \quad (32)$$

sau echivalent

$$w_k = \int_a^b \ell_k(t) w(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (33)$$

unde

$$\ell_k(t) = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{t - t_l}{t_k - t_l} \quad (34)$$

Formule de cuadratură de tip interpolator II

sunt polinoamele fundamentale Lagrange asociate nodurilor t_1, t_2, \dots, t_n .

- Faptul că (30) are gradul de exactitate $d = n - 1$ este evident, deoarece pentru orice $f \in \mathbb{P}_{n-1}$ $L_{n-1}(f; \cdot) \equiv f(\cdot)$ în (32).
- Reciproc, dacă (30) are gradul de exactitate $d = n - 1$, atunci luând $f(t) = \ell_r(t)$ în (31) obținem

$$\int_a^b \ell_r(t) w(t) dt = \sum_{k=1}^n w_k \ell_r(t_k) = w_r, \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

adică (33).

- Observăm că dacă se dau n noduri distincte t_1, \dots, t_n este posibil întotdeauna să construim o formulă de tip (30) care este exactă pentru orice polinom de grad $\leq n - 1$.

Formule de cuadratură de tip interpolator III

- În cazul $w(t) \equiv 1$ pe $[-1, 1]$ și t_k sunt echidistante pe $[-1, 1]$ problema a fost intuită de Newton în 1687 și rezolvată în detaliu de Cotes în jurul anului 1712.
- Prin extensie vom numi formula (30) cu t_k prescrise și w_k date de (33) **formulă de tip Newton-Cotes**.



(a) Sir Isaac Newton (1643 - 1727)



(b) Roger Cotes

Figura:

Teorema de bază

- Putem obține gradul de exactitate $d > n - 1$ (ponderile w_k fiind date în mod necesar de (33)).
- Considerăm polinomul nodurilor

$$u_n(t) = \prod_{k=1}^n (t - t_k). \quad (35)$$

Teorema 13

Dându-se un întreg k , $0 \leq k \leq n$, formula de cuadratură (30) are gradul de exactitate $d = n - 1 + k$ dacă și numai dacă sunt satisfăcute următoarele condiții:

- (a) *formula (30) este de tip interpolator;*
- (b) *polinomul nodurilor u_n din (35) satisface*

$$\int_a^b u_n(t) p(t) w(t) dt = 0, \quad \forall p \in \mathbb{P}_{k-1}.$$

Teorema de bază I

- Condiția din (b) impune k condiții asupra nodurilor t_1, t_2, \dots, t_n din (30).
 - Dacă $k = 0$, nu avem nici o restricție, deoarece așa cum știm putem atinge gradul de exactitate $d = n - 1$. Într-adevăr u_n trebuie să fie ortogonal pe \mathbb{P}_{k-1} relativ la funcția pondere w . Deoarece $w(t) \geq 0$, avem în mod necesar $k \leq n$.
 - Altfel, u_n trebuie să fie ortogonal pe \mathbb{P}_n , în particular pe el însuși, ceea ce este imposibil. Astfel, $k = n$ este optimal, obținându-se o formulă de cuadratură cu gradul maxim de exactitate $d_{\max} = 2n - 1$.
- Condiția (b) impune ortogonalitatea lui u_n pe toate polinoamele de grad mai mic, adică $u_n(\cdot) = \pi_n(\cdot, w)$ este polinomul ortogonal în raport cu ponderea w . Această formulă optimală se numește **formulă de cuadratură de tip Gauss** asociată cu funcția pondere w .

Teorema de bază II

- Deci nodurile ei sunt zerourile lui $\pi_n(\cdot, w)$, iar ponderile (coeficienții) w_k sunt dați de (33) adică

$$\pi_n(t_k; w) = 0$$

$$w_k = \int_a^b \frac{\pi_n(t, w)}{(t - t_k)\pi'_n(t_k, w)} w(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (36)$$

- Formula a fost dezvoltată de Gauss în 1814 în cazul special $w(t) \equiv 1$ pe $[-1, 1]$ și extinsă la funcții pondere mai generale de către Christoffel în 1877. De aceea se mai numește **formulă de cuadratură Gauss-Christoffel**.



(a) Johann Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)



(b) Elvin Bruno Christoffel (1829-
1900)

Figura:

Demonstrația teoremei 13 - necesitatea.

Deoarece gradul de exactitate este $d = n - 1 + k \geq n - 1$, condiția (a) este trivială. Condiția (b) rezultă de asemenea imediat, deoarece pentru orice $p \in \mathbb{P}_{k-1}$, $u_n p \in \mathbb{P}_{n-1+k}$. Deci

$$\int_a^b u_n(t) p(t) w(t) dt = \sum_{k=1}^n w_k u_n(t_k) p(t_k),$$

care se anulează, căci $u_n(t_k) = 0$ pentru $k = 1, 2, \dots, n$.

...

Demonstrația teoremei 13 - suficiența.

Trebuie să arătăm că pentru orice $p \in \mathbb{P}_{n-1+k}$ avem $R_n(p) = 0$ în (30). Dându-se orice astfel de p , îl împărțim cu u_n , astfel încât

$$p = qu_n + r, \quad q \in \mathbb{P}_{k-1}, \quad r \in \mathbb{P}_{n-1}$$

unde q este câtul și r restul. Rezultă că

$$\int_a^b p(t)w(t)dt = \int_a^b q(t)u_n(t)w(t)dt + \int_a^b r(t)w(t)dt.$$

Prima integrală din dreapta este 0, conform lui (b), deoarece $q \in \mathbb{P}_{k-1}$, în timp ce a doua, conform lui (a), deoarece $r \in \mathbb{P}_{n-1}$ este egală cu

$$\sum_{k=1}^n w_k r(t_k) = \sum_{k=1}^n w_k [p(t_k) - q(t_k)u_n(t_k)] = \sum_{k=1}^n w_k p(t_k)$$

ceea ce încheie demonstrația. □

Formule de tip Gauss-Radau și Gauss-Lobatto

Cazuri importante când $k < n$, de interes practic:

- *Formula de cuadratură Gauss-Radau* în care o extremitate de interval, de exemplu a , este finită și servește ca nod, să zicem $t_1 = a$. Gradul maxim de exactitate care se poate obține este $d = 2n - 2$ și corespunde lui $k = n - 1$ în teorema (13). Partea (b) a teoremei ne spune că nodurile rămase t_2, \dots, t_n trebuie să fie rădăcinile polinomului $\pi_{n-1}(\cdot, w_a)$, unde $w_a(t) = (t - a)w(t)$.
- *Formula Gauss-Lobatto*: ambele capete sunt finite și servesc ca noduri, să zicem $t_1 = a$, $t_n = b$, iar nodurile rămase t_2, \dots, t_{n-1} sunt zerourile lui $\pi_{n-2}(\cdot; w_{a,b})$, $w_{a,b}(t) = (t - a)(b - t)w(t)$, obținându-se astfel gradul de exactitate $d = 2n - 3$.

Proprietăți ale cuadraturilor gaussiene

Regula de cuadratură a lui Gauss, dată de (30) și (36), pe lângă faptul că este optimală (adică are grad maxim de exactitate) are și unele proprietăți interesante.

- 1 Toate nodurile sunt reale distincte și situate în intervalul deschis (a, b) . Aceasta este o proprietate cunoscută satisfăcută de zerourile polinoamelor ortogonale.
- 2 Toți coeficienții (ponderile) w_k sunt pozitivi. Demonstrația se bazează pe o observație ingenioasă a lui Stieltjes

$$0 < \int_a^b \ell_j^2(t) w(t) dt = \sum_{k=1}^n w_k \ell_j^2(t_k) = w_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

prima egalitate rezultând din faptul că gradul de exactitate este $d = 2n - 1$.

Proprietăți ale cuadraturilor gaussiene - convergența I

- Dacă $[a, b]$ este mărginit, atunci formula lui Gauss converge pentru orice funcție continuă. Adică $R_n(f) \rightarrow 0$, când $n \rightarrow \infty$, pentru orice $f \in C[a, b]$.
- Conform T. lui Weierstrass, dacă $\hat{p}_{2n-1}(f; \cdot)$ este p.c.m.b.a a lui f pe $[a, b]$ în sensul $\|\cdot\|_\infty$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(\cdot) - \hat{p}_{2n-1}(f; \cdot)\|_\infty = 0.$$

- Deoarece $R_n(\hat{p}_{2n-1}) = 0$ (căci $d = 2n - 1$), avem succesiv

$$\begin{aligned} |R_n(f)| &= |R_n(f - \hat{p}_{2n-1})| \\ &= \left| \int_a^b [f(t) - \hat{p}_{2n-1}(f; t)] w(t) dt - \sum_{k=1}^n w_k [f(t_k) - \hat{p}_{2n-1}(f; t_k)] \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t) - \hat{p}_{2n-1}(f; t)| w(t) dt + \sum_{k=1}^n w_k |f(t_k) - \hat{p}_{2n-1}(f; t_k)| \\ &\leq \|f(\cdot) - \hat{p}_{2n-1}(f; \cdot)\|_\infty \left[\int_a^b w(t) dt + \sum_{k=1}^n w_k \right]. \end{aligned}$$

- Aici pozitivitatea ponderilor w_k a intervenit crucial.

- Observând că

$$\sum_{k=1}^n w_k = \int_a^b w(t) dt = \mu_0,$$

concluzionăm că

$$|R_n(f)| \leq 2\mu_0 \|f - \hat{p}_{2n-1}\|_{\infty} \rightarrow 0, \text{ când } n \rightarrow \infty.$$

- Markov a observat că formula de cuadratură a lui Gauss poate fi obținută integrând termen cu termen formula de interpolare a lui Hermite cu noduri duble.

$$f(x) = (H_{2n-1}f)(x) + u_n^2(x)f[x, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n],$$

$$\begin{aligned} \int_a^b w(x)f(x)dx &= \int_a^b w(x)(H_{2n-1}f)(x)dx + \\ &+ \int_a^b w(x)u_n^2(x)f[x, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n]dx. \end{aligned}$$

- Dar gradul de exactitate $2n - 1$ implică

$$\int_a^b w(x)(H_{2n-1}f)(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i(H_{2n-1}f)(x_i) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i),$$

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + \int_a^b w(x)u^2(x)f[x, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n]dx,$$

deci

$$R_n(f) = \int_a^b w(x)u_n^2(x)f[x, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n]dx.$$

Proprietăți ale cuadraturilor gaussiene - restul III

- Cum $w(x)u^2(x) \geq 0$, aplicând teorema de medie pentru integrale și teorema de medie pentru diferențe divizate avem

$$\begin{aligned} R_n(f) &= f[\eta, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n] \int_a^b w(x) u^2(x) dx \\ &= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b w(x) [\pi_n(x, w)]^2 dx, \quad \xi \in [a, b]. \end{aligned}$$

- Deci, $\exists \xi \in [a, b]$ a.î.

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b w(x) [\pi_n(x, w)]^2 dx.$$

- Fie $\alpha_k = \alpha_k(w)$ și $\beta_k = \beta_k(w)$ coeficienții din formula de recurență pentru polinoamele ortogonale

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k\pi_{k-1}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (37)$$

$$\pi_0(t) = 1, \quad \pi_{-1}(t) = 0,$$

cu β_0 definit (ca de obicei) prin

$$\beta_0 = \int_a^b w(t) dt \quad (= \mu_0).$$

Calculul nodurilor și al coeficienților II

- *Matricea Jacobi* de ordinul n pentru funcția pondere w este o matrice simetrică tridiagonală definită prin

$$J_n(w) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \sqrt{\beta_2} & & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ 0 & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

- Nodurile t_k sunt valori proprii ale lui J_n

$$J_n v_k = t_k v_k, \quad v_k^T v_k = 1, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (38)$$






- Ponderile w_k sunt exprimabile cu ajutorul componentelor v_k , ale vectorilor proprii normalizați corespunzători prin




$$w_k = \beta_0 v_{k,1}^2, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (39)$$

- Astfel, pentru a obține o formulă de cuadratură gaussiană trebuie rezolvată o problemă de vectori și valori proprii pentru o matrice tridiagonală simetrică. Pentru această problemă există metode foarte eficiente.

polinoamele	notația	ponderea	intervalul	α_k	β_k
Legendre	$P_n(\ell_n)$	1	$[-1,1]$	0	$2 \ (k=0)$ $(4-k^{-2})^{-1} \ (k>0)$
Cebîșev #1	T_n	$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$	$[-1,1]$	0	$\pi \ (k=0)$ $\frac{1}{2}\pi \ (k=1)$ $\frac{1}{4} \ (k>0)$
Cebîșev #2	$U_n(Q_n)$	$(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$	$[-1,1]$	0	$\frac{1}{2}\pi \ (k=0)$ $\frac{1}{4} \ (k>0)$
Jacobi	$P_n^{(\alpha,\beta)}$	$(1-t)^\alpha(1-t)^\beta$ $\alpha > -1, \beta > -1$	$[-1,1]$		
Laguerre	$L_n^{(\alpha)}$	$t^\alpha e^{-t} \ \alpha > -1$	$[0,\infty)$	$2k+\alpha+1$	$\Gamma(1+\alpha) \ (k=0)$ $k(k+\alpha) \ (k>0)$
Hermite	H_n	e^{-t^2}	\mathbb{R}	0	$\sqrt{\pi} \ (k=0)$ $\frac{1}{2}k \ (k>0)$

Tabela: Funcțiile pondere clasice, polinoamele lor ortogonale corespunzătoare și coeficienții din formula de recurență α_k, β_k

-  Gheorghe Coman, *Analiză numerică*, Editura Libris, Cluj-Napoca, 1995.
-  W. Gautschi, *Numerical Analysis. An Introduction*, Birkhäuser, Basel, 1997.
-  W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sidney, 1996, disponibilă prin [www, http://www.nr.com/](http://www.nr.com/).
-  D. D. Stancu, *Analiză numerică – Curs și culegere de probleme*, Lito UBB, Cluj-Napoca, 1977.
-  J. Stoer, R. Burlisch, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd ed., Springer Verlag, 1992.

-  R. Trîmbițaș, *Numerical Analysis in MATLAB*, Cluj University Press, 2010
-  D. D. Stancu, G. Coman, P. Blaga, *Analiză numerică și teoria aproximării*, vol. II, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2002, D. D. Stancu, Gh. Coman, (coord.).
-  W. Gander, W. Gautschi, *Adaptive quadrature - revisited*, BIT **40** (2000), 84–101.