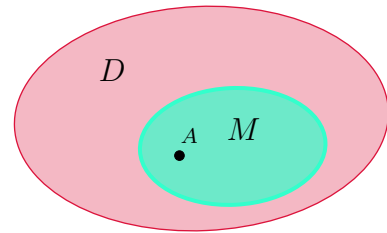


# Laboratorul 3

**Probabilitatea geometrică:** Fie  $M \subset D \subset \mathbb{R}^n$  mulțimi măsurabile. Alegem aleator un punct  $A \in D$ . Probabilitatea geometrică a evenimentului “ $A \in M$ ” este

$$P("A \in M") := \frac{\text{măsura}(M)}{\text{măsura}(D)}.$$

Măsura este e.g.: “lungimea” în  $\mathbb{R}$ , “aria” în  $\mathbb{R}^2$ , “volumul” în  $\mathbb{R}^3$ .



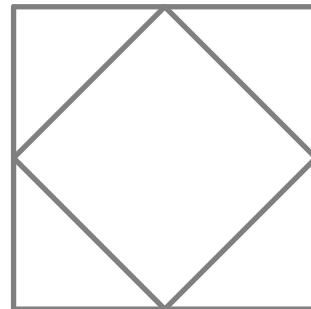
1. i) Să se estimeze, prin simulări, probabilitatea ca un punct ales aleator în interiorul unui pătrat să se afle în interiorul cercului tangent laturilor pătratului.
- ii) Să se estimeze, prin simulări, probabilitatea ca un punct ales aleator în interiorul unui pătrat să fie mai apropiat de centrul pătratului decât de vârfurile pătratului.
- iii) Să se estimeze, prin simulări, probabilitatea ca un punct ales aleator într-un pătrat să formeze cu vârfurile pătratului două triunghiuri ascuțitunghice și două triunghiuri obtuzunghice.

Determinați pentru fiecare subpunct probabilitatea geometrică corespunzătoare.

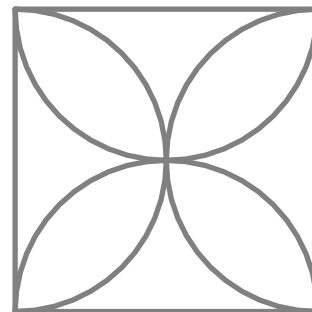
Rezolvări: Fără a restrânge generalitate vom rezolva problema în pătratului de latură 1 centrat în  $(0,5, 0,5)$ .

- i) Probabilitatea geometrică este raportul dintre aria discului și aria pătratului, adică  $\frac{\pi}{4}$ .

ii) Probabilitatea geometrică este raportul dintre aria pătratului cu vârfurile date de mijloacele pătratului inițial și aria pătratului inițial, adică  $\frac{1}{2}$ , deoarece: un punct este mai aproape de centru decât de vârfuri dacă și numai dacă se află în intersecția semiplanelor, care conțin centrul pătratului, determinate de mediatoarele segmentelor care au un capăt centrul pătratului și celălalt capăt un vârf al pătratului.



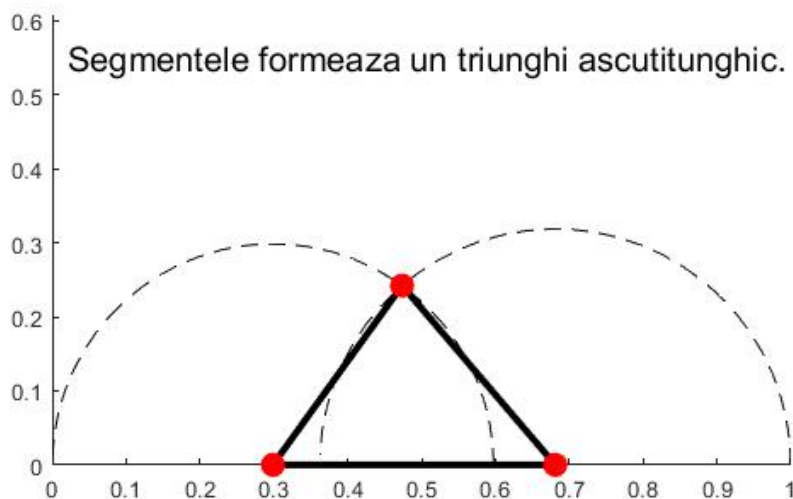
iii) Probabilitatea geometrică este raportul dintre aria “petalelor” și aria pătratului inițial, unde “petalele” sunt date de intersecțiile semicercurilor cu centrele pe mijloacele laturilor și de rază 0,5. Fie  $p$  aria unei petale și fie  $q$  aria complementului a două petale într-un semidisc. Aria unui semidisc este  $\frac{\pi}{8}$ , deci  $2p + q = \frac{\pi}{8}$ . Aria pătratului este  $1 = 4p + 4q$ . Deci  $\frac{\pi}{2} = 4p + (4p + 4q) = 4p + 1$ , de unde rezultă că probabilitatea cerută este  $4p = \frac{\pi}{2} - 1$ .



2. Se aleg aleator două numere din intervalul  $(0, 1)$ . Notăm cu  $x_1$  și  $x_2$  numerele alese astfel încât  $x_1 \leq x_2$ . Numerele împart segmentul  $[0, 1]$  în trei segmente:  $[0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ ,  $[x_2, 1]$ .

a) Simulați grafic alegerea numerelor  $x_1$  și  $x_2$ . În cazul în care segmentele determinate de  $x_1$  și  $x_2$  formează un triunghi, să se deseneze un triunghi corespunzător și să se precizeze tipul triunghiului: ascuțitunghic, obtuzunghic sau dreptunghic.

Pentru a rezolva cerința dată la a). puteți completa codul Matlab de mai jos.



```
function triangle
%programul genereaza la fiecare apasare a unei taste sau click
%o alegere a 2 puncte in intervalul (0,1), afiseaza daca segmntele
%pot forma un triunghi, daca da, atunci precizeaza tipul triunghiului
%si deseneaza triunghiul, obtinut prin intersectia a doua semicercuri
close all; fig = figure;
while ishghandle(fig)
%executia are loc cat timp nu este inchisa fereastra grafica
clf; hold on; axis equal; axis([0 1 0 0.61]);
%alegem punctele aleatoare
x=sort(rand([1 2]));
plot(x,[0 0],'or','MarkerSize',10,'MarkerFaceColor','r');
a=...;b=x(2)-x(1);c=...;
if (...<...+...)&&(...<...+...)&&(...<...+...)
%conditia ca a,b,c sa fie laturile unui triunghi
X=...; Y=...;
%(X,Y)=coordonatele punctului de intersectie a semicercurilor superioare
%      centrate in x(1) si x(2) cu razele a, respectiv c
%desenam semicercurile si apoi triunghiul
u=0:0.1:pi; plot(x(1)+a*cos(u),a*sin(u),'--k');plot(x(2)+c*cos(u),c*sin(u),'--k');
plot([... ..], [0 0 Y 0],'k','LineWidth',3);
plot([x(1) x(2) X], [... ..], 'or','MarkerSize',10,'MarkerFaceColor','r');
if (...)&&(...)&&(...)
text(0.02,0.55,'Segmentele formeaza un triunghi ascutitunghic.','FontSize',15);
elseif (...)||(...)||(...)
text(0.02,0.55,'Segmentele formeaza un triunghi obtuzunghic.','FontSize',15);
else
text(0.02,0.55,'Segmentele formeaza un triunghi dreptunghic.','FontSize',15);
end
else
text(0.1,0.55,'Segmentele nu pot forma un triunghi.','FontSize',15);
end
try
waitforbuttonpress;
catch
end
end
```

b) Simulați, fără grafică, de  $N \in \{1000, 2000, 3000\}$  ori alegerea numerelor  $x_1$  și  $x_2$ . Afișați de câte ori segmentele formează un triunghi, respectiv de câte ori segmentele formează un triunghi ascuțitunghic. Folosind rezultatele obținute, estimați probabilitățile următoarelor evenimente: “segmentele formează un triunghi”, “segmentele formează un triunghi ascuțitunghic” și “segmentele formează un triunghi obtuzunghic, știind că segmentele formează un triunghi”.

c) Alegeți aleator  $N \in \{1000, 2000, 3000\}$  puncte în pătratul  $(0, 1) \times (0, 1)$ . Desenați cu roșu punctele ale căror coordonate, privite ca numere în intervalul  $(0, 1)$ , împart segmentul  $[0, 1]$  în trei segmente care formează un triunghi ascuțitunghic, iar cu albastru cele care determină un triunghi obtuzunghic sau dreptunghic. Folosind numerele punctelor roșii și albastre, estimați probabilitatea condiționată estimată la b).

*Bonus:* Calculați valoarea exactă a acestei probabilități condiționate.