Seminarul 1

Noţiuni de combinatorică

1. *Principiul fundamental de numărare:* numărul de perechi de obiecte în care primul obiect poate fi ales în m moduri şi al doilea în n moduri ($m, n \in \mathbb{N}$) este $m \cdot n$.

Exemplu: În câte moduri poate o persoană să îmbrace 2 cămăşi distincte şi 3 blugi diferiţi? R: $2 \cdot 3 = 6$.

2. *Aranjamente de n luate câte k* ($k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq k$): alegeri de k obiecte distincte şi ordonate, alese din n obiecte distincte date.

$$A_n^k = \text{"numărul de aranjamente de } n \text{ obiecte luate câte } k\text{"}$$
$$= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Exemplu: Câte coduri cu 3 cifre distincte se pot forma folosind cifrele: 0, 1, 2, 3, 4? R: $A_5^3 = \frac{5!}{2!}$.

3. *Permutări de n* ($n \in \mathbb{N}$): aranjamente de n luate câte n.

$$P_n = \text{"numărul de permutări de } n\text{"} = A_n^n = n!.$$

Observaţie: Prin convenţie, $0! = 1$.

Exemplu: În câte moduri se pot aşeza 3 persoane pe o bancă? R: $P_3 = 3!$.

4. *Combinări de n luate câte k* ($k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq k$): alegeri de k obiecte distincte, neordonate, alese din n obiecte distincte date, i.e. alegeri de submulţimi de k elemente ale unei mulţimi de n elemente.

$$C_n^k = \text{"numărul de combinări de } n \text{ elemente luate câte } k\text{"}$$
$$= \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemplu: Câte echipe de handbal se pot forma dintr-un grup de 8 persoane? R: $C_8^7 = C_8^1$.

5. *Numărul de funcţii* de la o mulţime A cu k elemente la o mulţime B cu n elemente ($k, n \in \mathbb{N}^*$) este n^k.

Observaţie: O funcţie de la A la B poate fi identificată cu k alegeri de obiecte, nu neapărat distincte (i.e. un obiect poate fi ales de mai multe ori), ordonate, alese din n obiecte distincte date. Astfel, putem spune că funcţiile sunt *aranjamente cu repetiţii.*

Exemplu: În câte moduri se pot împărţi o portocală, un kiwi şi o banană la 4 copii? Un copil poate primi mai multe fructe, chiar toate. R: Funcţiile $f : \{\text{"portocală"}, \text{"kiwi"}, \text{"pară"}\} \to \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ se pot construi în 4^3 moduri.

6. *Permutări cu repetiţii:* Considerăm n obiecte care pot fi împărţite în k grupuri ($n, k \in \mathbb{N}^*, k \leq n$). Primul grup are n_1 obiecte identice, al 2-lea grup are n_2 obiecte identice,..., al k-lea grup are n_k obiecte identice ($n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}, n_1 + \ldots + n_k = n$). Două obiecte alese arbitrar sunt distincte dacă şi numai dacă provin din grupuri diferite. Numărul de permutări ale acestor n obiecte este

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Exemplu: Câte anagrame ale cuvântului "MISSISSIPPI" sunt posibile? R: $\frac{11!}{1!4!4!2!}$.

7. *Combinări cu repetiţii de n luate câte k* ($n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}$): alegeri de k obiecte, nu neapărat distincte (i.e. un obiect poate fi ales de mai multe ori), neordonate, alese din n obiecte distincte date (i.e. aranjamente cu repetiţii în care neglijăm ordinea). Numărul lor este

$$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Exemplu: O cofetărie are 7 sortimente de îngheţată. În câte moduri poate un client să îşi aleagă sortimentele pentru 3 cornete? (fiecare cornet are câte un glob de îngheţată!) R: $\frac{9!}{3!6!}$.

8. *Definiţia clasică a probabilităţii:* într-un experiment în care cazurile posibile, finite la număr, au aceleaşi şanse de a se realiza, probabilitatea unui eveniment E este

$$P(E) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile lui } E}{\text{numărul cazurilor posibile}}.$$

Probleme

1. În câte moduri se pot aşeza pe un raft 5 culegeri de matematică, 3 culegeri de informatică şi 4 romane, ştiind că fiecare carte are un autor diferit, astfel încât:

a) cărţile de acelaşi tip să fie alăturate?

b) doar romanele să fie neapărat alăturate?

c) doar culegerile de matematică, respectiv de informatică, să fie neapărat alăturate?

R: a) $5!3!4!3!$; b) $4!(5+3+1)!$; c) $5!3!(1+1+4)!$.

2. Câte coduri binare sunt formate din 4 biţi egali cu 1 şi 6 biţi egali cu 0 şi nu au doi biţi alăturaţi egali cu 1?

R: punem în linie 0-urile cu spaţii între ele: _0_0_ . . . _0_, apoi alegem spaţiile pe care să punem 1-urile $\Longrightarrow C_7^4$ coduri.

3. a) Câte soluţii $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^* \times \cdots \times \mathbb{N}^*$ are ecuaţia $x_1 + \ldots + x_k = n$ $(k, n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq k)$?

R: C_{n-1}^{k-1}.

b) Câte soluţii $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ are ecuaţia $x_1 + \ldots + x_k = n$ $(k, n \in \mathbb{N}^*)$?

R: C_{n+k-1}^{k-1}.

4. În câte moduri se pot îmbarca 9 persoane într-un tren cu 3 vagoane astfel încât:

a) în primul vagon să fie exact 3 persoane?

b) în fiecare vagon să fie 3 persoane?

c) într-un vagon să fie 1 persoană, iar în celelalte două vagoane să fie câte 4 persoane?

d) în fiecare vagon să fie cel puţin o persoană?

R: a) $C_9^3 \cdot 2^6$; b) $C_9^3 \cdot C_6^3$; c) $3 \cdot 9 \cdot C_8^4$; d) $3^9 - (3 \cdot 2^9 - 3)$.

5. Se aruncă două zaruri. Determinaţi probabilităţile următoarelor evenimente:

a) A:"se obţine o dublă".

b) B:"suma numerelor este un număr par."

c) C:"suma numerelor este cel mult egală cu 10."

R: a) $P(A) = \frac{1}{6}$; b) $P(B) = \frac{3^2+3^2}{36}$; c) $P(C) = 1 - \frac{3}{36}$.

6. 7 căluşari: $c_1, c_2, \ldots, c_7$ se aşează în cerc, într-o ordine aleatoare. Care este probabilitatea ca c_1 şi c_7 să fie vecini?

R: $\frac{2!5!}{\frac{7!}{7}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

7. La un concurs de şah participă 5 băieţi şi 5 fete. Se formează aleator 5 perechi de jucători. Care este probabilitatea ca fiecare băiat să joace împotriva unei fete?

R: $\frac{5!^2}{C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot \ldots \cdot C_2^2}$.

8. O persoană trimite 10 emailuri distincte alegând aleator pentru fiecare email un destinatar dintr-o listă de 20 de persoane. Care este probabilitatea ca prima persoană din listă să primească 5 emailuri?

R: $\frac{C_{10}^5 19^5}{20^{10}}$.

9. În câte moduri se pot aşeza în cerc caracterele următoare: A, A, A, B, B, 0, 0, 0, 1?

R: $\frac{1}{9} \cdot \frac{9!}{3!2!3!1!}$.

10. În câte moduri se pot distribui m bile identice în n cutii distincte $(m, n \in \mathbb{N}^*)$?

R: C_{m+n-1}^{n-1}.

11. Câte numere binare sunt formate din maxim 10 cifre şi nu au două cifre alăturate egale cu 1?

R: $\sum_{k=0}^{5} C_{11-k}^{k}$.

12. În câte moduri se pot pune 10 mărgele colorate diferit într-un şirag?

R: $\frac{10!}{10 \cdot 2}$.

13. În câte moduri se pot alege culorile: alb, galben, portocaliu, roşu, verde şi albastru, pentru feţele unui cub Rubik, câte una pentru fiecare faţă?

R: 30.