Verificarea și Validarea Sistemelor Soft

Curs 7. Corectitudine (Floyd. Hoare. Dijkstra). Partea I

Lector dr. Camelia Chisăliță-Crețu

Universitatea Babeș-Bolyai
Cluj-Napoca

07 Aprilie 2020

Evaluarea calității softului

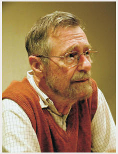
- **calitatea softului** –
  - conformitatea cu **cerințele funcționale** și de **performanță** precizate, **documentate explicit** în **standardele de dezvoltare** și **caracteristici implicite** ale unui produs soft dezvoltat. [Scott Pressman, 2005]
- **corectitudine** – proprietate a unui program de a respecta specificațiile și a oferi rezultate corecte [Fre10].

Verificarea programelor

- **metode formale** pentru verificarea programelor:
  - bazate pe demonstrarea corectitudinii:
    - asistate de calculator, presupune *verificarea corectitudinii codului sursă asociat programului*;
    - aplicate programelor care trebuie să se termine şi să obţină un rezultat (**curs 07**);
  - bazate pe modele:
    - automate, presupune *verificarea proprietăţilor programului*;
    - aplicate sistemelor concurente; se aplică în etapele post-dezvoltare, e.g., verificarea modelelor (**curs 09**).

Metode pentru demonstrarea corectitudinii programelor

- Metoda lui Floyd –
  - metoda aserţiunilor inductive;
- Axiomatizarea lui Hoare –
  - axiome şi reguli deducţive;
  - dezvoltarea algoritmilor din specificaţii;
- Limbajul lui Dijkstra –
  - instrucţiuni cu santinelă;
  - non-determinism;
  - derivarea formală a programelor.

- Robert W Floyd
  (8 Iunie 1936 – 25 Septembrie 2001)
  
- Sir Charles Antony Richard Hoare
  (11 January 1934)
  
- Edsger Wybe Dijkstra
  (11 Mai 1930 – 6 August 2002)
  

Metoda lui Floyd. **Metoda aserțiunilor inductive**

Aplicabilitate:

- pentru a demonstra:
  1. parțial corectitudinea programului;
  2. terminarea programului;
  3. **total corectitudinea = parțial corectitudinea programului + terminarea programului.**

Folosește:

- **precondiție** – condiția satisfăcută de datele de intrare ale programului;
- **postcondiție** – condiția care trebuie satisfăcută de rezultatele programului;
- **algoritmul** – descrierea programului (codul sursă);

Etape de aplicare:

1. identificarea unui punct de tăietură în fiecare buclă;
2. identificarea unei mulțimi de aserțiuni inductive;
3. construirea și demonstrarea condițiilor de verificare/terminare.

Parțial corectitudine. **Etape de realizare.**

1. se aleg puncte de tăietură în cadrul algoritmului:
   - două puncte de tăietură particulare: un punct de tăietură la începutul algoritmului, un punct de tăietură la sfârșitul algoritmului;
   - cel puțin un punct de tăietură în fiecare instrucțiune repetitivă;
2. pentru fiecare punct de tăietură se alege câte un predicat invariant (aserțiune):
   - punctul de intrare - $\varphi(X)$;
   - punctul de ieșire - $\psi(X, Z)$;
3. se construiesc și se demonstrează condițiile de verificare:
   1. $\forall X\ \forall Y\ (P_i(X, Y) \wedge R_{\alpha_{i,j}}(X, Y)\ \rightarrow\ P_j(X,\ r_\alpha(X, Y)))$;
   2. Y – vector de variabile cu rezultate intermediare;
   3. $\alpha_{i,j}$ – drumul de la punctul de tăietură i la punctul de tăietură j;
   4. P_i și P_j – predicate invariante în punctele de tăietură i și j asociate;
   5. $R_{\alpha_{i,j}}(X, Y)$ – predicat care dă condiția de parcurgere a drumului α;
   6. $r_{\alpha_{i,j}}(X, Y)$ – funcție care indică transformările variabilelor Y de pe drumul α;

Theorem

1. Dacă toate condițiile de verificare sunt adevărate atunci programul P este parțial corect în raport cu specificația $(\varphi(X), \psi(X, Z))$. *[Fre10]*

Parțial corectitudine. **Exemplu.**

- algoritmul pentru ridicarea la putere prin înmulțiri repetate: $z = x^y$;
- `Algoritmul putere(x, y, z) este:`

  A: $\varphi(X) ::= (x > 0 \wedge y \geq 0)$

  $z := 1;\ u := x;\ v := y;$

  `cattimp` $(v > 0)$ `execută`

  B: $\eta(X, Y) ::= z * u^v = x^y$

  `dacă` $(v \,\%\, 2 == 0)$

  `atunci` $u := u * u;\ v := v/2;$

  `altfel` $v := v - 1;\ z := z * u;$

  `sfdacă`

  `sfcattimp`

  C: $\psi(X, Z) ::= z = x^y$

  sfAlg;
- se aleg punctele de tăietură: A, B și C;
- se stabilesc predicatele invariante pentru punctele de tăietură alese: $\varphi(X)$, $\psi(X, Z)$ și $\eta(X, Y)$;
- drumurile α între punctele de tăietură: $\{\alpha_{AB},\ \alpha_{BB},\ \alpha_{BC},\ \alpha_{AC}\}$
  $\Rightarrow \{\alpha_{AB},\ \alpha_{BB_{atunci}},\ \alpha_{BB_{altfel}},\ \alpha_{BC},\ \alpha_{AC}\}$;
- $R_{\alpha_{i,j}}(X, Y)$ – predicate pentru parcurgerea drumurilor $\alpha_{i,j}$;
- $r_{\alpha_{i,j}}(X, Y)$ – funcții care indică transformările variabilelor Y de pe drumurile $\alpha_{i,j}$;
- pentru fiecare drum α se construiește și se demonstrează condiția de verificare de forma
  $\forall X\ \forall Y\ (P_i(X, Y) \wedge R_{\alpha_{i,j}}(X, Y) \ \rightarrow\ P_j(X,\ r_{\alpha_{i,j}}(X, Y)))$;

Terminarea algoritmului. **Etape de realizare.**

1. se aleg punctele de tăietură în cadrul algoritmului;
2. pentru fiecare punct de tăietură se alege câte un predicat invariant;
3. se alege o **mulțime convenabilă** M (i.e., o mulțime parțial ordonată, care nu conține nici un șir descrescător infinit) și o funcție descrescătoare u_i;
   - în punctul de tăietură i funcția aleasă este $u_i : D_X \times D_Y \to M$;
4. se scriu condițiile de terminare:
   - condiția de terminare pe drumul $\alpha_{i,j}$ este: $\forall X\ \forall Y\ (\varphi(X) \wedge R_{\alpha_{i,j}}(X,Y) \to (u_i(X,Y)\ >\ u_j(X,\ r_{\alpha_{i,j}}(X,Y))))$;
   - dacă s-a demonstrat parțial corectitudinea, atunci condiția de terminare poate fi: $\forall X\ \forall Y\ (P_i(X) \wedge R_{\alpha_{i,j}}(X,Y) \to (u_i(X,Y)\ >\ u_j(X,\ r_{\alpha_{i,j}}(X,Y))))$;
5. se demonstrează condițiile de terminare:
   - la trecerea de la un punctul de tăietură i la j valorile funcției u descresc, i.e., $u_i\ > u_j$.

Theorem

2. Dacă toate condițiile de terminare sunt adevărate atunci programul P se termină în raport cu predicatul $\varphi(X)$. *[Fre10]*

Sistemul axiomatic al lui Hoare

- Relații și notații:
  - **deductibilitate:** $\models$;
    $g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_m \models h$ are semnificația: *"formula predicativă h (concluzia) este deductivă din formulele predicative* $g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_m$ *(premisele)"*;
  - **implicația:** $\Rightarrow$;
    $P \Rightarrow P^{'}$ are semnificația: *"dacă P este satisfăcut atunci are loc și* $P^{'}$ *"*;
  - **negația:** $\neg$;
    $\neg b$ are semnificația: *"negația expresiei logice b"*;
- contribuțiile lui Hoare:
  - **triplet** – precondiție, bloc de instrucțiuni, postcondiție;
  - **axioma atribuirii** pentru: instrucțiunea de atribuire;
  - **reguli deductive** pentru: structura secvențială, structura alternativă și structura repetitivă;
  - **demonstrarea parțial și total corectitudinii, dezvoltarea corectă a algoritmilor folosind triplete**.

Triplete Hoare

- $\{\varphi\}\ P\ \{\psi\}$ – triplet Hoare, unde:
  - φ este precondiția;
  - ψ este postcondiția;
- notația are semnificația:
  "dacă execuția programului P începe dintr-o stare care satisface φ, atunci starea în care se ajunge după execuția lui P va satisface ψ ";

Triplete Hoare. Exemple (1)

- Care dintre următoarele triplete sunt valide?
  1. $\{x = 5\}\ x := x * 2\ \{true\}$;
  2. $\{x = 5\}\ x := x * 2\ \{x > 0\}$;
  3. $\{x = 5\}\ x := x * 2\ \{x = 10 \mid\mid x = 5\}$;
  4. $\{x = 5\}\ x := x * 2\ \{x = 10\}$;
- toate tripletele sunt valide;
- $\{x = 5\}\ x := x * 2\ \{x = 10\}$ – cel mai util triplet;
- $\{x = 10\}$ – *cea mai puternică postcondiţie*.

Triplete Hoare. Exemple (2)

- Care dintre următoarele triplete sunt valide?
  1. $\{x = 5 \ \&\& \ y = 10\} \ z := x/y \ \{z < 1\}$;
  2. $\{x < y \ \&\& \ y > 0\} \ z := x/y \ \{z < 1\}$;
  3. $\{y \neq 0 \ \&\& \ x/y < 1\} \ z := x/y \ \{z < 1\}$;
- toate tripletele sunt valide;
- $\{y \neq 0 \ \&\& \ x/y < 1\} \ z := x/y \ \{z < 1\}$ – cel mai util triplet;
- $\{y \neq 0 \ \&\& \ x/y < 1\}$ – *cea mai slabă precondiţie*.

Semantica tripletelor Hoare

- **corectitudine parțială**
  - notație: $\models_{par} \{\varphi\}P\{\psi\}$
  - **tripletul** $\{\varphi\}P\{\psi\}$ **este satisfăcut relativ la corectitudinea parțială**, dacă pentru orice stare care satisface φ, starea rezultată după execuția programului P satisface postcondiția ψ, *având condiția că programul se termină*;
  - nu garantează că P se termină;
- **corectitudine totală**
  - notație: $\models_{tot} \{\varphi\}P\{\psi\}$
  - **tripletul** $\{\varphi\}P\{\psi\}$ **este satisfăcut relativ la corectitudinea totală**, dacă pentru orice stare care satisface φ, programul P se termină, iar starea rezultată după execuția programului P satisface postcondiția ψ;
  - garantează că P se termină.

Parțial corectitudine. Reguli deductive

- axioma atribuirii;
- regula compunerii secvențiale;
- regula consecinței;
- regula alternanței;
- regula iterației.

Axioma atribuirii

- $\models_{par} \{\varphi(x|e)\}\ x := e\ \{\psi(x)\}$
  are semnificația *"dacă prin înlocuirea lui x în $\varphi(x)$ cu e obținem o afirmație adevărată, atunci după atribuirea $x := e$ afirmația $\psi(x)$ va fi adevărată."*
- Fie tripletul $\{P\}\ X := Y + 2\ \{Q\}$
  - fiind dat Q, care este predicatul pentru care P are loc?
  - pentru orice P astfel încât $[P \Rightarrow \langle X \leftarrow Y + 2\rangle\,(Q)]$

Regula compunerii secvențiale

- dacă $\models_{par} \{\varphi\}S\{\omega\}$ și $\models_{par} \{\omega\}T\{\psi\}$
  atunci $\models_{par} \{\varphi\}\ S; T\{\psi\}$;

Regula consecinței

- dacă
  $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$, $\models_{par}$ $\{\varphi_2\}P\{\psi_2\}$ și $\psi_2 \Rightarrow \psi_1$
  atunci
  $\models_{par}$ $\{\varphi_1\}$ $P\{\psi_1\}$

Regula alternanței

- dacă
  $\models_{par} \{\varphi \land cond\}\ S\{\psi\}$ și $\models_{par} \{\varphi \land \neg cond\} T\{\psi\}$
  atunci propoziția
  $\{\varphi\}\ IF\ (cond)\ THEN\ S\ ELSE\ T\ END\{\psi\}$ este parțial corectă în raport cu specificația (φ, ψ).

Regula iterației

- Care sunt condițiile de realizare ale structurii repetitive `while`, astfel încât: $\{\varphi\}$ *WHILE (cond) DO S END* $\{\psi\}$
  - presupunem că instrucțiunea `while` se termină , i.e., $\neg cond$;
  - în general, nu se cunoaște de câte ori se va executa S;
- considerăm un predicat η care rămâne satisfăcut după execuția S:
  - $\{\eta\}S\{\eta\}$ η este un predicat invariant;
  - la ieșirea din buclă avem $\eta \land \neg cond$;
  - pentru stabilirea post-condiției, $\{\eta\}$ trebuie ales astfel încât $[\eta \land \neg cond \Rightarrow \psi]$.

Regula iterației (cont.)

- dacă $\models_{par} \{\varphi \wedge cond\}S\{\psi\}$
  atunci $\{\varphi\}$ *WHILE (cond) DO S END* $\{\psi\}$,
  cu condiția că există un predicat invariant η asociat buclei, astfel încât:
  - $[\varphi \Rightarrow \eta]$ — η este satisfăcut la intrare în buclă;
  - $[\eta \wedge \neg cond \Rightarrow \psi]$ — η obține pe ψ la ieșirea din buclă;
  - $\{cond \wedge \eta\}S\{\eta\}$ — η este satisfăcut la fiecare iterație.

Regula iterației. Exemple

Demonstrarea parțial corectitudinii folosind regula iterației:

- **Exemplu 1.** $z = 2^N$;

Dezvoltarea algoritmilor (parțial corecți), folosind regula iterației:

- **Exemplu 2.** $R = A * B$;
- **Exemplu 3.** $R = A^B$.

Regula iterației. Exemplu 1.

- efectuarea calculului: $z = 2^N$:
  - $\varphi : \{N \geq 0\}$
    $m := 0;\ \ y := 1;$
    $\eta : \{y = 2^m\}$
    $WHILE\ (m! = N)\ DO\ \eta : \{y = 2^m\}$
    $\quad y := 2 * y;$
    $\quad m := m + 1$
    END
    $\psi : \{y = 2^N\}$
- trebuie demonstrat că invariantul η
  - este satisfăcut la intrare în buclă;
  - rămâne satisfăcut în buclă $\{\eta\}\ y := 2 * y;\ \ m := m + 1;\ \{\eta\}$
  - obține post-condiția $[\eta \wedge (m = N) \Rightarrow (y = 2^N)]$.

Regula iterației. Exemplu 2.

- înmulțire prin adunări repetate – "R este A adunat de B ori": $R = A * B$:
  - $\varphi : \{B \geq 0\}$
  - $\psi : \{R = A * B\} \Rightarrow \{B \geq 0\}S\{R = A * B\}$
  - rezolvare (dezvoltarea tripletului):
    $\varphi : \{B \geq 0\}$
    "init R"
    WHILE (cond) DO
    "update R"
    END
    $\psi : \{R = A * B\}$
- **regulă:** se înlocuiește în postcondiția ψ unul din termeni cu o variabilă pentru a obține predicatul invariant η asociat buclei, astfel încât $[(\eta \wedge \neg cond) \Rightarrow \psi]$;
  - se introduce variabila b în ψ și se determină invariantul η asociat buclei, descris prin: $R = A * b$;
  - pentru a obține postcondiția, se alege cond să fie $(b \neq B)$, unde $[(R = A * b) \wedge \neg(b \neq B) \Rightarrow (R = A * B)]$.

Regula iterației. Exemplu 2 (cont.)

- înmulțire prin adunări repetate:
  - invariantul – η: $(R = A * b)$;
  - condiția de execuție a buclei (santinela) – cond: $(b \neq B)$;
  - pentru a asigura că invariantul este satisfăcut inițial, se efectuează inițializarea: $R := 0; b := 0$;
  - în fiecare iterație: (1) b este incrementat cu 1; (2) R este actualizat, obținând:

    $\varphi : \{B \geq 0\}$
    $R := 0; b := 0;$
    WHILE $(b \neq B)$ DO $\eta : \{R = A * b\}$
    $\quad R :=? \;\Rightarrow R := R + A$
    $\quad b := b + 1$
    END
    $\psi : \{R = A * B\}$

Regula iterativă. Exemplu 3.

- ridicare la putere prin înmulțiri repetate – "R este A înmulțit de B ori": $R = A^B$;
  - $\{\varphi : (A > 0) \wedge (B \geq 0)\}$ S $\{\psi : R = A^B\}$
  - rezolvare (dezvoltarea tripletului):
    • pentru obținerea invariantului se înlocuiește în ψ o constantă cu o variabilă, obținându-se: $\eta : R = A^b$;
    $\varphi : \{(A > 0) \wedge (B \geq 0)\}$
    R :=?; $b := 0$; $\Rightarrow$ R:=1;
    WHILE $(b \neq B)$ DO $\eta : \{R = A^b\}$
      R :=?; $\Rightarrow R := R * A$;
      $b := b + 1$
    END
    $\psi : \{R = A^B\}$

Total corectitudine. Reguli deductive

- **atribuire**
  $\{\varphi\}\ X := E\ \{\psi\}$ cu condiția că $[\varphi \Rightarrow \langle X \leftarrow E\rangle(\psi)]$;
- **compunere**
  $\{\varphi\}\ S; T\{\psi\}$ cu condiția că
  există R astfel încât $\{\varphi\}\ S\{R\}$ și $\{R\}T\{\psi\}$;
- **alternanță**
  $\{\varphi\}\ IF\ (cond)\ THEN\ S\ ELSE\ T\ END\ \{\psi\}$ cu condiția că
  $\{\varphi \wedge cond\}\ S\{\psi\}$ și $\{\varphi \wedge \neg cond\}T\{\psi\}$
- Observație: similar cu regulile corectitudinii parțiale!

Total corectitudine. Iterația.

- fie tripletul $\{\varphi\}$ *WHILE* $(cond)$ *DO* S *END* $\{\psi\}$
- cum demonstrăm că execuția buclei se termină?
- soluție:
  - se identifică o expresie întreagă V astfel încât:
  - valoarea V este non-negativă (i.e., $V \geq 0$) și
  - valoarea V este strict descrescătoare la fiecare iterație, $\{V = K\}$ S $\{V < K\}$
- V – “invariant al buclei“, expresia își păstrează caracteristicile de la o iterație la alta.

Total corectitudine. Exemplu

- ridicare la putere prin înmulțiri repetate – "R este A înmulțit de B ori":
  $R = A^B$;
  - $\{(A > 0) \wedge (B \geq 0)\}$ S $\{R = A^B\}$
  - invariantul buclei este: $\eta : R = A^b \quad \wedge (B \geq b)$;

    $\varphi : \{(A > 0) \wedge (B \geq 0)\}$
    $R := 1; b := 0;$
    WHILE $(b \neq B)$ DO $\quad \eta : \; R = A^b \; \wedge (B \geq b)$;
    $\quad R := R * A;$
    $\quad b := b + 1$
    END
    $\psi : \{R = A^B\}$
- se definește V – o construcție care variază la nivelul buclei – descris prin expresia $(B - b)$;
- V este strict descrescătoare la fiecare iterație a buclei, deoarece $[(B - (b + 1)) < (B - b)]$
- Cum demonstrăm că V este o expresie non-negativă?
  • demonstrând că $(B \geq b)$ este un invariant al buclei.

Total corectitudine. Regula iterației (rezumat)

- pentru a demonstra
  $\models_{tot} \{\varphi\}$ *WHILE (cond) DO S END* $\{\psi\}$
  se identifică un predicat invariant η al buclei și o expresie V, invariantă la nivelul buclei, astfel încât:
  - η este satisfăcut inițial $[\varphi \Rightarrow \eta]$;
  - η determină obținerea post-condiției prin condiția de ieșire din buclă $[(\eta \wedge \neg cond) \Rightarrow \psi]$;
  - η se menține satisfăcut după execuția blocului S, i.e., $\{\eta\}$ S $\{\eta\}$;
  - expresia V este strict descrescătoare la fiecare iterație $\{V = K\}$ S $\{V < K\}$;
  - expresia V este întotdeauna non-negativă; $[\eta \Rightarrow (V \geq 0)]$.

Pentru examen...

- metoda lui Floyd:
  - demonstrarea parțial corectitudinii, terminării și total corectitudinii ([Fre10], Cap.1) – probleme:
    • căutarea unei valori într-un șir ordonat (**Seminar 5**);
    • determinarea celui mai mare divizor comun a două numere naturale (**Seminar 5**);

Urmează...

- Limbajul Dijkstra;

Bibliografie I

[Fre10] M. Frentiu.
Verificarea și validarea sistemelor soft.
Presa Universitară Clujeană, 2010.