Seminarul 5

1. O variabilă aleatoare continuă X are funcţia de densitate $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ cxe^{-x}, & x > 0. \end{cases}$
Determinaţi $c \in \mathbb{R}$ şi apoi calculaţi varianţa lui X.

R: $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = c\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = c \implies c = 1$. $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx = 2$, $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx = \int_0^{\infty} x^3e^{-x}dx = 6$ (integrând prin părţi). $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 2$.

2. Funcţia de repartiţie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a unei variabile aleatoare continue X are expresia:

$$F(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & 0 \leq x < 2 \\ d, & x < 0, \\ e, & x \geq 2. \end{cases}$$

Determinaţi $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, dacă: i) $P(1 < X < 2) = \frac{1}{2}$; ii) $E(X) = 1$.

R: $0 = \lim_{x\to-\infty} F(x) = d$, $1 = \lim_{x\to\infty} F(x) = e$. $c = F(0) = \lim_{x\nearrow 0} F(x) = d = 0$, $1 = e = F(2) = \lim_{x\nearrow 2} F(x) = 4a + 2b + c = 4a + 2b$.
i) $P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = e - a - b - c = 1 - a - b = \frac{1}{2}$. Deci $a = 0, b = \frac{1}{2}, c = 0, d = 0, e = 1$.
ii) Funcţia de densitate este $f(x) = \begin{cases} 2ax + b, & x \in (0, 2), \\ 0, & \text{în rest}. \end{cases}$. Avem: $1 = E(X) = \int_0^2 2ax^2 + bx\, dx = \frac{16}{3}a + 2b$. Deci $a = 0, b = \frac{1}{2}, c = 0, d = 0, e = 1$.

3. Un circuit are trei condensatoare, care funcţionează independent unele de altele. Timpul de funcţionare a fiecărui condensator urmează legea exponenţială cu valoarea medie de 3 ore. Ştiind că cele trei condensatoare sunt grupate în circuit aşa cum indică
a) figura A (în paralel),
b) figura B (în serie),
c) figura C,
determinaţi valoarea medie şi varianţa timpului de funcţionare a circuitului.

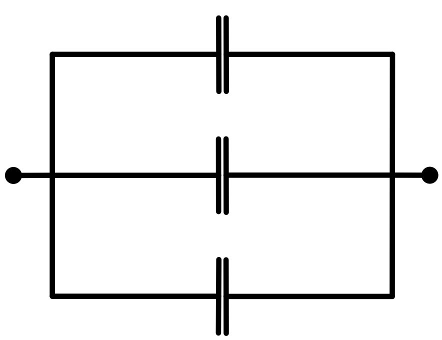

Figura A

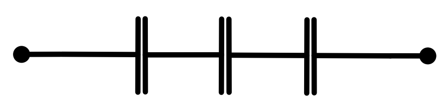

Figura B

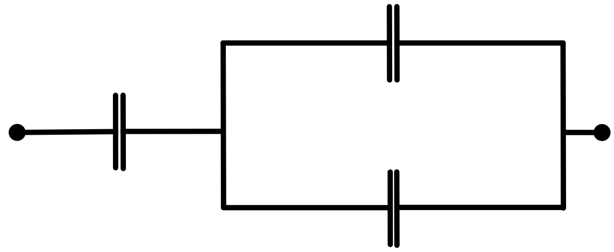

Figura C

R: O v.a. X care urmează **legea exponenţială** cu parametrul $\lambda > 0$ are funcţia de densitate

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Deducem că:

i) $F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \end{cases}$ unde F_X este funcţia de repartiţie a lui X.

ii) $P(X > x) = 1 - F_X(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$

iii) $E(X) = \int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$ (folosind integrarea prin părţi).

Fie T timpul de funcţionare a circuitului şi fie T_i v.a. care indică timpul de funcţionare a condensatorului i, $i = 1, 2, 3$. Fiecare T_i urmează legea exponenţială cu parametrul $\frac{1}{3}$. Aceste variabile aleatoare sunt independente.

a) $F_T(t) = P(\max\{T_1, T_2, T_3\} \leq t) = P(\bigcap_{i=1}^3 (T_i \leq t)) = \prod_{i=1}^3 P(T_i \leq t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ (1 - e^{-\frac{t}{3}})^3, & t > 0, \end{cases}$

unde am folosit i). Deci $f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ (1 - e^{-\frac{t}{3}})^2 e^{-\frac{t}{3}}, & t > 0, \end{cases}$ şi $E(T) = \int_0^\infty te^{-\frac{1}{3}t} - 2te^{-\frac{2}{3}t} + te^{-t} dt = 9 - \frac{9}{2} + 1 = 5{,}5$ ore, unde am folosit iii).

b) $F_T(t) = P(\min\{T_1, T_2, T_3\} \leq t) = 1 - P(\min\{T_1, T_2, T_3\} > t) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^3 (T_i > t)) = 1 - \prod_{i=1}^3 P(T_i > t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1 - e^{-t}, & t > 0, \end{cases}$ unde am folosit ii). Deci $f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ e^{-t}, & t > 0, \end{cases}$ deci $T \sim Exp(1)$, şi $E(T) = 1$ oră.

c) $F_T(t) = P(\min\{T_1, \max\{T_2, T_3\}\} \leq t) = 1 - P(T_1 > t)\Big(1 - P(T_2 \leq t)P(T_3 \leq t)\Big) =$

$= \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1 - e^{-\frac{t}{3}}\Big(1 - (1 - e^{-\frac{t}{3}})^2\Big), & t > 0, \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1 - 2e^{-\frac{2}{3}t} + e^{-t}, & t > 0, \end{cases} f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{4}{3}e^{-\frac{2}{3}t} - e^{-t}, & t > 0, \end{cases}$

şi $E(T) = \int_0^\infty \frac{4}{3}te^{-\frac{2}{3}t} - te^{-t} dt = 3 - 1 = 2$ ore.

4. Fie X o variabilă aleatoare continuă care are funcţia de densitate $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0, 1), \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$

Determinaţi funcţiile de densitate ale variabilelor aleatoare $2X + 1$, X^2, e^X şi e^{X^2}.

R: $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2, & x \in (0, 1), \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$ Fie $Y = 2X + 1$. $F_Y(y) = P(2X + 1 \leq y) = P(X \leq \frac{y-1}{2}) = F_X(\frac{y-1}{2})$. Deci $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y-1}{2}, & y \in (1, 3), \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$ Fie $Z = X^2$. $F_Z(z) = P(-\sqrt{z} \leq X \leq \sqrt{z}) = F_X(\sqrt{z}) - F_X(-\sqrt{z}) = F_X(\sqrt{z})$, $z \geq 0$, şi $F_Z(z) = 0$, $z < 0$. Deci $f_Z(z) = \begin{cases} 1, & z \in (0, 1), \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$ Fie $V = e^X$. $F_V(v) = P(e^X \leq v) = P(X \leq \ln v) = F_X(\ln v)$, $v > 0$, şi $F_V(v) = 0$, $v \leq 0$. Deci $f_V(z) = \begin{cases} \frac{2 \ln v}{v}, & v \in (1, e), \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$ Fie $W = e^{X^2}$. $F_W(w) = P(X^2 \leq \ln w) = F_X(\sqrt{\ln w}) - F_X(-\sqrt{\ln w}) = F_X(\sqrt{\ln w})$, $w \geq 1$, şi $F_W(w) = 0$, $w < 1$. Deci $f_W(z) = \begin{cases} \frac{1}{w}, & w \in (1, e), \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$

5. Fie N o variabilă aleatoare discretă care are distribuţia $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ şi fie L o variabilă aleatoare continuă care urmează legea uniformă pe $[0,1]$. Cele două variabile aleatoare sunt independente. Determinaţi valoarea medie a ariei poligonului regulat care are N laturi cu lungimea L fiecare.

R: Aria poligonului regulat care are N laturi cu lungimea L fiecare este $S = \dfrac{1}{4} \cdot N \cdot \mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{N}\right) \cdot L^2$. Deci $E(S) = \frac{1}{4} \cdot E\left(N \cdot \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{N}\right)\right) \cdot E(L^2) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{4}{4} + \frac{6\sqrt{3}}{4}\right) \int_0^1 x^2 dx = \frac{1+2\sqrt{3}}{12}$, unde am folosit că N şi L sunt independente.