

# Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare

Radu T. Trîmbițaș

4 octombrie 2005

## 1 Ecuații neliniare în $\mathbb{R}$

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dorim să aproximăm o soluție sau toate soluțiile ecuației  $f(x) = 0$ . Vom prezenta câteva metode importante.

### 1.1 Metoda Newton-Raphson (a tangentei)

Determină o soluție a ecuației  $f(x) = 0$ , dându-se o aproximație inițială  $p_0$ .

**Intrare.** Funcția  $f$ , derivata sa  $f'$ , o aproximație inițială  $p_0$ ; eroarea  $\varepsilon$ ; numărul maxim de iterații  $N_0$ .

**Ieșire.** O soluție aproximativă  $p$  sau un mesaj de eroare.

**P1.**  $i := 1$ .

**P2.** While  $i \leq N_0$  execută pașii P3-P6.

**P3.**  $p := p_0 - f(p_0)/f'(p_0)$ ; {Calculează  $p$ }

**P4.** If  $|p - p_0| < \varepsilon$  then

Returnează  $p$ ; {Succes}

**P5.**  $i := i + 1$ ;

**P6.**  $p_0 := p$ ; {actualizează  $p$ }

**P7.** {eșec} eroare('precizia nu poate fi atinsă cu numărul dat de iterații').  
Stop.

**Observație.** În plus față de

$$|p_n - p_{n-1}| < \varepsilon$$

putem utiliza drept criteriu de oprire

$$|p_n - p_{n-1}| < \varepsilon |p_n|, \quad p_n \neq 0,$$

sau

$$|f(p_n)| < \varepsilon.$$

**Exemplu numeric.** Fie ecuația  $x = \cos x$ . Punem  $f(x) = \cos x - x$ . Ecuația noastră are o soluție în  $[0, \pi/2]$ , care poate fi obținută ca punct fix al lui  $g(x) = \cos x$  (vezi figure 1). Deoarece  $f'(x) = -\sin x - 1$ , iterația Newton este

$$p_n = p_{n-1} - \frac{\cos p_{n-1} - p_{n-1}}{-\sin p_{n-1} - 1}, \quad n \geq 1.$$

Ca valoare de pornire se poate alege  $p_0 = \pi/4$ . Valorile calculate se dau în tabela următoare

$n$	$p_n$	$n$	$p_n$
0	0.7853981635	3	0.7390851332
1	0.7395361337	4	0.7390851332
2	0.7390851781	5	0.7390851332

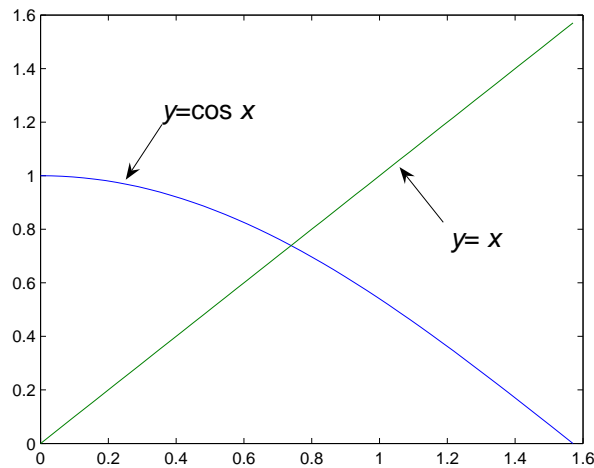


Figura 1: Ecuația  $\cos x = x$

## 1.2 Metoda secantei

Determină o soluție a ecuației  $f(x) = 0$ , dându-se aproximațiile inițiale  $p_0$  și  $p_1$ .

**Intrare.** Funcția  $f$ , aproximațiile inițiale  $p_0$  și  $p_1$ ; eroarea  $\varepsilon$ ; numărul maxim de iterații  $N_0$ .

**Ieșire.** Soluția aproximativă  $p$  sau un mesaj de eroare.

**P1.**  $i := 2$ ;  $q_0 := f(p_0)$ ;  $q_1 := f(p_1)$ ;

**P2.** while  $i \leq N_0$  execută pașii P3-P6.

**P3.**  $p := p_1 - \frac{q_1(p_1 - p_0)}{q_1 - q_0}$ ;

**P4.** if  $|p - p_1| < \varepsilon$  then  
returnează  $p$ ; {succes}

**P5.**  $i := i + 1$ ;

**P6.**  $p_0 := p_1$ ;  $q_0 := q_1$ ;  $p_1 := p$ ;  $q_1 := f(p)$ ;

**P7.** {eșec} eroare('precizia nu poate fi atinsă cu numărul dat de iterații').  
Stop.

**Exemplu numeric.** Considerăm din nou ecuația  $\cos x - x = 0$ . Ca valori de pornire alegem  $p_0 = 0.5$  and  $p_1 = \pi/4$ . Calculele se dau în tabela de mai jos:

$n$	$p_n$
0	0.5
1	0.7853981635
2	0.7363841390
3	0.7390581394
4	0.7390851492
5	0.7390851334

## 1.3 Metoda lui Steffensen

Determină o soluție a ecuației  $p = g(p)$ , dându-se o aproximație inițială  $p_0$ .

**Intrare.** Funcția  $f$ , valoarea de pornire  $p_0$ ; eroarea  $\varepsilon$ ; numărul maxim de iterații  $N_0$ .

**Ieșire.** Soluția aproximativă  $p$  sau un mesaj de eroare.

**P1.**  $i := 1$ .

**P2.** While  $i \leq N_0$  execută pașii P3-P6.

**P3.**

$p_1 := g(p_0); \quad \{\text{calculează } p_1^{(i-1)}\}$

$p_2 := g(p_1);$

$p := p_0 - \frac{(p_1 - p_0)^2}{p_2 - 2p_1 + p_0}; \quad \{\text{calculează } p_0^{(i)}\}$

**P4.** if  $|p - p_0| < \varepsilon$  then

returnează  $p$ ;  $\{\text{success}\}$

**P5.**  $i := i + 1;$

**P6.**  $p_0 := p; \{\text{actualizează } p\}$

**P7.**  $\{\text{eșec}\}$  eroare('precizia nu poate fi atinsă cu numărul dat de iterații').  
Stop.

**Exemplu numeric.** Pentru a rezolva ecuația  $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ , o rescriem sub forma  $x^3 + 4x^2 = 10$  și obținem

$$x = g(x), \quad g(x) = \sqrt{\frac{10}{x+4}}.$$

Luând  $p_0 = 1.5$  avem succesiv

$k$	$p_0$	$p_1$	$p_2$
0	1.5	1.348399725	1.367376372
1	1.365265224	1.365225534	
2	1.365230013	1.365230583	

## 1.4 Probleme

1) Implementați metodele Newton, secantă, Steffensen.

## 2 Sisteme de ecuații neliniare

Fie

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \tag{1}$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Dorim să rezolvăm ecuația (sistemul neliniar)  $f(x) = 0$ .

## 2.1 Metoda lui Newton

Formula iterativă este

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - [f'(x^{(n)})]^{-1} f(x^{(n)}), \quad (2)$$

unde  $f'(x^{(n)})$  este jacobianul lui  $f$  în punctul  $x^{(n)}$ .

**Algoritmul.**

**Intrare.**  $f$ ,  $f'$ ,  $\varepsilon$  (toleranța), valoarea de pornire  $x^{(0)}$  și numărul maxim de iterații  $N$ .

**Ieșire.** O aproximare a rădăcinii sau un mesaj de eroare.

$n := 0$ ;

repeat

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - [f'(x^{(n)})]^{-1} f(x^{(n)}); \quad n := n + 1;$$

until

$$\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| < \varepsilon$$

or „s-a depășit numărul maxim de iterații“.

## 2.2 Metoda aproximațiilor succesive

Transformăm ecuația noastră într-una de forma  $x = \varphi(x)$ . Căutăm  $\varphi$  de forma  $\varphi(x) = x - \Lambda f(x)$ . Avem

$$\varphi'(x^{(0)}) = 0 \implies \Lambda = -[f'(x^{(0)})]^{-1}.$$

**Algoritmul.**

**Intrare:**  $f$ ,  $\varepsilon$  (toleranța), valoarea de pornire  $x_0$  și numărul maxim de iterații  $N$ .

**Ieășire:** O aproximare a rădăcinii sau un mesaj de eroare: ”precizia dorită nu poate fi atinsă în  $N$  iterații”.

Repeat

$$x^{(n+1)} = \varphi(x^{(n)})$$

until  $\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\| < \varepsilon$  or „s-a depășit numărul maxim de iterații“.

## 2.3 Probleme

1. Implementați metoda lui Newton și metoda aproximațiilor succesive.

## 2.4 Probleme practice

1. Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1. \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$$

2. Rezolvați numeric sistemul

$$\begin{cases} 9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 36 = 0, \\ x^2 - 2y^2 - 20z = 0, \\ x^2 - y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$$

utilizând metoda lui Newton și metoda aproximațiilor succesive. *Indicație.* Sunt 4 soluții. Valori bune de pornire  $[\pm 1, \pm 1, 0]^T$ .