Seminarul 2

1. Un patron deţine 3 magazine, m_1, m_2, m_3, care au 50, 75, respectiv 100, de angajaţi, din care 50%, 60%, respectiv 70%, sunt femei. Patronul alege aleator un angajat pentru un bonus la salariu. Care este probabilitatea ca angajatul norocos să lucreze la magazinul m_3, ştiind că acesta este bărbat?

Rezolvare: $P(\text{“angajatul ales lucrează la } m_3\text{”} | \text{“angajatul ales este bărbat”}) = \frac{\frac{30}{225}}{\frac{25+30+30}{225}} = \frac{30}{85} = \frac{6}{17}$.

2. O persoană are în buzunar 2 zaruri roşii şi 3 zaruri albastre, dintre care alege aleator unul. Dacă a ales zarul roşu, atunci aruncă zarul ales de 3 ori, iar dacă a ales zarul albastru, atunci aruncă zarul ales de 2 ori. Calculaţi probabilitatea ca suma punctelor obţinute în urma aruncărilor să fie 10.

Rezolvare: Fie A:“zarul ales este albastru”, R:“zarul ales este roşu” şi S:“suma punctelor obţinute în urma aruncărilor este 10”. *Formula probabilităţii totale* implică $P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|R)P(R) = \frac{3}{6^2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{27}{6^3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$.

3. Dintr-un pachet standard de 52 de cărţi de joc se extrage aleator o carte. Considerăm evenimentele A:“cartea extrasă este un as” şi T:“cartea extrasă este de treflă”. Sunt A şi T independente? Dar dacă înaintea extragerii este scos din pachet doiul de caro?

Rezolvare: Da, pentru că $\frac{1}{52} = P(A \cap T) = P(A) \cdot P(T) = \frac{4}{52} \cdot \frac{13}{52}$. Nu, pentru că $\frac{1}{51} = P(A \cap T) \neq P(A) \cdot P(T) = \frac{4}{51} \cdot \frac{13}{51}$.

4. Într-o cutie sunt 2 monede identice la aspect. La o aruncare, una dintre monede indică *pajură* cu probabilitatea 0,9, iar cealaltă indică *pajură* cu probabilitatea 0,1. Se alege aleator o monedă, care este apoi aruncată de 2 ori. Considerăm evenimentele A_i: “moneda aleasă indică *pajură* la aruncarea i”, $i = 1, 2$. Calculaţi $P(A_2|A_1)$. Sunt A_1 şi A_2 independente?

Rezolvare: Fie M_i:“se alege moneda i”, $i = 1, 2$. Din *formula probabilităţii totale* avem: $P(A_2) = P(A_1) = P(A_1|M_1)P(M_1) + P(A_1|M_2)P(M_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$ şi $P(A_2 \cap A_1) = P(A_2 \cap A_1|M_1)P(M_1) + P(A_2 \cap A_1|M_2)P(M_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}41$. Deci $P(A_2|A_1) = \frac{0{,}41}{0{,}5} = 0{,}82$. A_1 şi A_2 nu sunt independente, pentru că $P(A_2|A_1) \neq P(A_2)$.

5. X şi Y joacă un meci de tenis. Presupunem că jucătorii se află la egalitate şi că primul jucător care câştigă 2 puncte consecutive (după o egalitate) câştigă meciul. Fiecare punct este jucat independent de celelalte puncte şi este fie câştigat de X cu probabilitatea $\frac{1}{3}$, fie câştigat de Y, i.e. pierdut de X, cu probabilitatea $\frac{2}{3}$. Care este probabilitatea ca X să câştige meciul?

Rezolvare: Considerăm evenimentele următoare: A:“X câştigă următoarele 2 puncte”, B:“Y câştigă următoarele 2 puncte”, C:“din următoarele 2 puncte unul este câştigat de X, iar celălalt de Y”şi W:“X câştigă meciul”. Fie $x = P(W)$.

Formula probabilităţii totale implică:
$x = P(W) = P(W|A)P(A) + P(W|B)P(B) + P(W|C)P(C) = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + x \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right)$. Deci $x = \frac{1}{5}$.

6. Fie A, B şi C matrice pătratice de $n \times n$ numere din $\mathbb{Z}_2 = \{\hat{0}, \hat{1}\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm următorul pseudocod:

```
RndMatMultip(A,B,C)
begin
 generate a column r of n independent random mod 2 integers
 if A*(B*r)=C*r return AB=C
  else return AB!=C
end
```

Demonstraţi următoarele propoziţii:
i) Dacă $AB \neq C$, atunci probabilitatea ca `RndMatMultip(A,B,C)` să returneze răspunsul greşit este cel

mult 50%.
ii) Dacă $AB \neq C$ şi rulăm `RndMatMultip(A,B,C)` de 10 ori, atunci probabilitatea ca de fiecare dată să fie returnat un răspuns greşit este sub 0,1%.

Demonstraţii:

i) Fie $D = AB - C$. Deoarece $D \neq 0$, există un element nenul $d_{k,l}$ al lui D, cu anumiţi indici $k, l \in \{1, \ldots, n\}$. Deci $d_{k,l} = \hat{1}$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune în continuare că $k = l = 1$. Observăm că `RndMatMultip(A,B,C)` returnează răspunsul greşit dacă şi numai dacă $Dr = 0$. Deci probabilitatea ca `RndMatMultip(A,B,C)` să returneze răspunsul greşit este mai mică sau egală decât probabilitatea ca $\sum_{j=1}^{n} d_{1,j} r_j = 0$ sau, echivalent, $r_1 = \sum_{j=2}^{n} d_{1,j} r_j$. Pe baza *formulei probabilităţii totale*, avem

$$P\Big(\text{“}r_1 = \sum_{j=2}^{n} d_{1,j} r_j\text{”}\Big) = \sum_{x_2,\ldots,x_n \in \{\hat{0},\hat{1}\}} P\Big(\text{“}r_1 = \sum_{j=2}^{n} d_{1,j} r_j\text{”}\Big| \text{“}r_2 = x_2, \ldots, r_n = x_n\text{”}\Big) P\Big(\text{“}r_2 = x_2, \ldots, r_n = x_n\text{”}\Big)$$

$$= \sum_{x_2,\ldots,x_n \in \{\hat{0},\hat{1}\}} \frac{1}{2} \cdot P\Big(\text{“}r_2 = x_2, \ldots, r_n = x_n\text{”}\Big) = \frac{1}{2}.$$

ii) Din i) rezultă că, dacă rulăm `RndMatMultip(A,B,C)` de 10 ori, atunci probabilitatea ca de fiecare dată să fie returnat un răspuns greşit este cel mult $\frac{1}{2^{10}} < \frac{1}{1000} = 0{,}1\%$.

7. Considerăm un graf (neorientat) $G = (V, E)$ (V e mulţimea vârfurilor, E e mulţimea muchiilor) care este conex (adică, între oricare două vârfuri există cel puţin un drum). Spunem că $C \subseteq M$ este o mulţime de tăietură pentru G, dacă graful $G_C = (V, E \setminus C)$ nu este conex.

Problema tăieturii minime: să se determine o mulţime de tăietură C pentru G astfel încât $|C|$ (i.e. cardinalul lui C) este minim. O astfel de mulţime de tăietură spunem că este *minimă*.

Ideea de bază a algoritmului aleator *Random Min-Cut* este de a contracta, la fiecare iteraţie, câte o muchie aleasă aleator, până când mai rămân doar 2 vârfuri. O contracţie a unei muchii $m = (u, v)$, care leagă vârfurile u şi v, presupune: eliminarea muchiilor care conectează pe u cu v, înlocuirea nodurilor u şi v cu un nou nod w şi păstrarea tuturor celorlalte muchii, inclusiv a celor care erau conectate cu u sau v (acestea fiind conectate acum cu w).

Pseudocodul algoritmului:

```
RndMinCut(G)
begin
  repeat
   randomly pick an edge and contract it
  until |V|=2
  return the set of remaining edges
end
```

Fie $|V| = n$ ($n \in \mathbb{N}, n > 2$). Demonstraţi următoarele propoziţii:
i) Probabilitatea ca `RndMinCut(V,E)` să genereze o mulţime de tăietură minimă pentru graful $G = (V, E)$ este cel puţin $\frac{2}{n(n-1)}$.
ii) Dacă rulăm `RndMinCut(V,E)` de $\frac{n(n-1)}{2} \cdot [\ln n]$ ori şi returnăm dintre toate mulţimile de tăietură generate una cu cardinal minim, atunci probabilitatea ca mulţimea de tăietură returnată să nu fie minimă este cel mult $\frac{1}{n}$.

Demonstraţii:

i) Fie C o mulţime de tăietură minimă fixată. Vom demonstra că probabilitatea ca `RndMinCut(V,E)` să returneze mulţimea C este cel puţin $\frac{2}{n(n-1)}$.

Fie $k = |C|$. Fie A_i evenimentul: “muchia aleasă la iteraţia i, pentru a fi contractată, nu este din C” şi fie $G_i = (V_i, E_i)$ graful după i iteraţii, $i = \overline{1, n-2}$.

Observaţii:
1) Dacă la fiecare iteraţie alegem o muchie care nu este din C, atunci $C \subseteq E_i$ şi este o mulţime de tăietură pentru G_i, $i = \overline{1, n-2}$.
2) `RndMinCut(G)` returnează mulţimea C dacă şi numai dacă are loc evenimentul $A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}$.

Deoarece $|C| = k$, prin fiecare nod trec cel puţin k muchii, deci $|E| \geq \frac{nk}{2}$. Probabilitatea ca, la prima iteraţie, să alegem o muchie din C este cel puţin $\dfrac{k}{\frac{nk}{2}} = \dfrac{2}{n}$. Aşadar, avem

$$P(A_1) \geq 1 - \frac{2}{n} = \frac{n-2}{n}.$$

Prin acelaşi raţionament aplicat lui G_1, deducem că, dacă la prima iteraţie am ales o muchie care nu era în C (i.e. a avut loc A_1), atunci $|V_1| = n-1$, $|E_1| \geq \frac{(n-1)k}{2}$ şi probabilitatea ca, la a doua iteraţie, să alegem o muchie din C este cel puţin $\dfrac{k}{\frac{(n-1)k}{2}} = \dfrac{2}{n-1}$. Aşadar, avem

$$P(A_2|A_1) \geq 1 - \frac{2}{n-1} = \frac{n-3}{n-1}.$$

Inductiv, deducem că

$$P(A_i|A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1}) \geq 1 - \frac{2}{n-(i-1)} = \frac{n-i-1}{n-i+1}, \quad i = \overline{2, n-2}.$$

Pe baza *regulii de înmulţire* a probabilităţilor condiţionate, avem

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}) &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_{n-2}|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-3}) \\ &\geq \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

ii) Dacă rulăm `RndMinCut(V,E)` o dată, atunci probabilitatea ca mulţimea de tăietură generată să nu fie minimă este cel mult $1 - \frac{2}{n(n-1)}$. Dacă rulăm `RndMinCut(V,E)` de $\frac{n(n-1)}{2} \cdot [\ln n]$ ori, atunci probabilitatea ca de fiecare dată mulţimea de tăietură generată să nu fie minimă este cel mult

$$\left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)^{\frac{n(n-1)}{2} \ln n} \leq \left(e^{-\frac{2}{n(n-1)}}\right)^{\frac{n(n-1)}{2} \cdot \ln n} = \frac{1}{n},$$

unde am folosit inegalitatea $1 - x \leq e^{-x}$, $x \geq 0$.

8. Fie $p \in (0,1)$. O celulă fie se divide în două cu probabilitatea p, fie moare cu probabilitatea $1-p$. În etapa următoare, celulele rezultate din procesul de diviziune se comportă la fel, independent unele de altele, ş.a.m.d., până la o *eventuală* extincţie a populaţiei de celule. Calculaţi probabilitatea ca populaţia celulară generată de o celulă să ajungă la extincţie.

Rezolvare: Fie E_n: "populaţia generată de o celulă ajunge la extincţie în cel mult n etape" şi D: "celula iniţială se divide". Din formula *probabilităţii totale* pentru sistemul complet de evenimente $\{D, \overline{D}\}$ rezultă

$$P(E_n) = P(E_n|D)P(D) + P(E_n|\overline{D})P(\overline{D}) = (P(E_{n-1}))^2 \cdot p + 1 \cdot (1-p),$$

unde am folosit faptul că $P(E_n|D) = (P(E_{n-1}))^2$, deoarece extincţia populaţiei unei celule care se divide este echivalentă cu extincţia populaţiei fiecărei celule rezultate din diviziune, iar cele doua extincţii sunt *independente*. Notăm $x_n = P(E_n)$. Avem următoarea relaţie de recurenţă

$$x_n = p \cdot x_{n-1}^2 + 1 - p, \quad x_0 = 0.$$

Fie E: "populaţia generată de o celulă ajunge la extincţie". Avem $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, deci

$$P(E) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} P(E_n),$$

deoarece $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este o familie *crescătoare* de evenimente. Notăm $x = P(E)$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Din relaţia de recurenţă obţinută mai sus rezultă că x verifică ecuaţia

$$p \cdot x^2 - x + 1 - p = 0.$$

Deci

$$x \in \left\{1, \frac{1}{p} - 1\right\}.$$

Folosind relaţia de recurenţă, se demonstrează uşor, prin inducţie, că $x_n < \frac{1}{p} - 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Deci

$$x \leq \frac{1}{p} - 1.$$

Dacă $p \in (0,\ 0{,}5]$, atunci $\frac{1}{p} - 1 \geq 1$, deci $x = 1$. Dacă $p \in (0{,}5,\ 1)$, atunci $\frac{1}{p} - 1 < 1$, deci $x \leq \frac{1}{p} - 1 < 1$, aşadar $x = \frac{1}{p} - 1$.

Concluzionăm că

$$P(E) = \begin{cases} 1, & p \in (0,\ 0{,}5], \\ \frac{1}{p} - 1, & p \in (0{,}5,\ 1). \end{cases}$$