Derivare numerică

Cuprins

Deducerea aproximării

Utilizând formula lui Taylor

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi), \xi \in [x, x+h]$$

se obţine

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi)$$

Termenul $-\frac{h}{2} f''(\xi)$ este **eroarea de trunchiere** sau **eroarea de discretizare** la aproximarea lui $f'(x)$ prin $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Eroarea este $O(h)$ şi spunem că precizia este de ordinul I. La derivarea numerică vom presupune că $x + h$ şi x se reprezintă exact, iar erorile se comit doar la evaluarea lui $f(x + h)$ si $f(x)$. Ignorând erorile de rotunjire la scadere şi impartire, se calculează

$$\frac{f(x+h)(1+\delta_1) - f(x)(1+\delta_2)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{\delta_1 f(x+h) - \delta_2 f(x)}{h}$$

Deoarece $|\delta_1| <$ eps şi $|\delta_2| <$ eps, eroarea de rotunjire este mai mică sau egală cu 2eps$|f(x)|/h$, pentru h mic. De notat că eroarea de trunchiere este proporţională cu h, iar eroarea de rotunjire este proporţională cu $1/h$. Micşorarea lui h micşorează eroarea de trunchiere, dar creşte eroarea de rotunjire.

Exemplu

Luăm $f(x) = \sin x$ si $x = \pi/4$. Atunci $f'(x) = \cos x$ si $f''(x) = -\sin x$, deci eroarea de trunchiere este de aproximativ $\sqrt{2}h/4$, iar eroarea de rotunjire este de aproximativ $\sqrt{2}\mathrm{eps}/h$

```
x = pi/4;
h = 10.^(-(1:16))';
d = (sin(x+h)-sin(x))./h;
[d, sqrt(2)/2*ones(size(d)), abs(d-cos(x))]
```

```
ans =

    0.6706    0.7071    0.0365
    0.7036    0.7071    0.0035
    0.7068    0.7071    0.0004
    0.7071    0.7071    0.0000
    0.7071    0.7071    0.0000
    0.7071    0.7071    0.0000
    0.7071    0.7071    0.0000
    0.7071    0.7071    0.0000
    0.7071    0.7071    0.0000
    0.7071    0.7071    0.0000
    0.7071    0.7071    0.0000
    0.7071    0.7071    0.0000
    0.7083    0.7071    0.0012
    0.7105    0.7071    0.0034
    0.7772    0.7071    0.0700
    1.1102    0.7071    0.4031
```

Precizia maximă

Precizia maximă se obţine dacă cele două erori sunt aproximativ egale

$$\frac{\sqrt{2}h}{4} = \frac{\sqrt{2}\mathrm{eps}}{h} \Rightarrow h = 2\sqrt{\mathrm{eps}}$$

Eroarea este de ordinul $\sqrt{\mathrm{eps}}$

```
ho = 2*sqrt(eps);
do = (sin(x+ho)-sin(x))./ho;
[ho, do]
```

```
ans =

    0.0000    0.7071
```

Sursa neplăcerii

Sursa neplăcerii este *algoritmul* nu problema determinării

$$\frac{d}{dx}\sin x\Big|_{x=\pi/4} = \cos x\Big|_{x=\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

care este bine condiţionată

Condiţionarea absolută

$$\kappa(x) = |-\sin x|_{x=\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Condiţionarea relativă

$$cond(f)(x) = \left|\frac{x\sin x}{\cos x}\right|_{x=\pi/4} = \frac{\pi}{4}.$$