Test sisteme, metode directe

24 martie 2020

1 Testul 1

Problema 1 *Să se analizeze metoda lui Cramer şi eliminarea gaussiană din punct de vedere al complexităţii (unitatea de măsură va numărul de operaţii flotante - flops) în cazurile* $n = 2$ *şi* $n = 3$.

Problema 2 *Fie* n *un număr par şi matricea* A *de dimensiune* $n \times n$*, cu 3 pe diagonala principală, -1 pe super şi subdiagonală (diagonalele -1 şi 1) şi* $1/2$ *în poziţiile* $(i, n+1-i)$ *(diagonala secundară) pentru orice* $i = 1, \ldots, n$*, cu excepţia lui* $i = n/2$ *şi* $n/2+1$*. Pentru* $n = 8$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Definim vectorul $b = (2.5, 1.5, \ldots, 1.5, 1.0, 1.0, 1.5, \ldots, 1.5, 2.5)^T$*;* 1.5 *se repetă de* $n-4$ *ori, iar* 1.0 *de două ori.*

(a) Calculaţi descompunerile LUP şi Cholesky ale lui A pentru $n = 12$.

(b) Rezolvaţi sistemul $Ax = b$ pentru $n = 100$ folosind descompunerea LUP şi Cholesky.

2 Testul 2

Problema 3 *Să se analizeze metoda lui Cramer şi eliminarea gaussiană din punct de vedere al complexităţii (unitatea de măsură va numărul de operaţii flotante - flops) în cazurile* $n = 2$ *şi* $n = 3$.

Problema 4 *Generaţi un sistem aleator care are soluţia* $[1, \ldots, 1]^T$*. Rezolvaţi-l cu descompunere LUP* ($n = 500$)*.*

Problema 5 *Implementaţi descompunerea Cholesky (algoritmul va fi $\Theta(n)$) pentru un sistem tridiagonal. Date de intrare 3 vectori: 1 pentru diagonala principală, 1 pentru diagonala 1 (identică cu diagonala -1) şi unul pentru membrul drept.*

3 Testul 3

Problema 6 *Să se analizeze metoda lui Cramer şi eliminarea gaussiană din punct de vedere al complexităţii (unitatea de măsură va numărul de operaţii flotante - flops) în cazurile $n = 2$ şi $n = 3$.*

Problema 7 *Iteraţia inversă este un algoritm pentru calculul celei mai mici valori proprii (în modul) a unei matrice simetrice A:*

Choose x_0
for $k = 1, 2, \ldots, m$ *(until convergence)* ***do***
solve $Ax_{k+1} = x_k$
normalize $x_{k+1} := x_{k+1}/\|x_{k+1}\|$
end for

Atunci $\lambda = x_m^T A x_m / x_m^T x_m$ *este o aproximare a celei mai mici valori proprii. O implementare simplă a acestui algoritm este*

```
x=rand(n,1)
for k= 1:m
x=A\x;
x=x/norm(x);
if convergence, break; end;
end
lambda=x'*A*x;
```

Pentru matrice mari, putem face economie de operaţii dacă calculăm descompunerea LU a matricei A o singura dată. Iteraţia se realizează utilizând factorii L şi U. În acest mod, fiecare iteraţie necesită doar $O(n^2)$ operaţii, în loc de $O(n^3)$ în programul de mai sus. Utilizaţi funcţiile dumneavoastra pentru descompunere LUP, substituţie directă şi inversă pentru a implementa iteraţia inversă. Experimentaţi cu câteva matrice şi comparaţi rezultatele dumneavoastră cu cele furnizate de `eig(A)`.

Problema 8 *Generaţi un sistem aleator care are soluţia $[1, 2, \ldots, n]^T$ şi matrice SPD. Rezolvaţi-l prin descompunere Cholesky ($n = 271$).*

4 Testul 4

Problema 9 *Să se analizeze metoda lui Cramer şi eliminarea gaussiană din punct de vedere al complexităţii (unitatea de măsură va numărul de operaţii flotante - flops) în cazurile $n = 2$ şi $n = 3$.*

Problema 10 *Implementaţi algoritmul Thomas cu pivotare.*

Problema 11 *Implementaţi o rutină pentru inversarea unei matrice simetrice pozitiv definite, folosind descompunerea Cholesky şi rezolvând un set de sisteme convenabile. (Indicaţie: $AX = I$, vom putea obţine fiecare coloană a lui X rezolvând sisteme de forma $AX(:,k) = I(:,k)$.*