Seminarul 6

Aplicaţii ale LTNM

1. Fie $(p_n)_n$ un şir de numere din intervalul $(0,1)$ şi fie $(X_n)_n$ un şir de variabile aleatoare independente care au distribuţiile următoare: $X_n \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_n & 1-p_n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstraţi că $Z_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - p_i) \xrightarrow{a.s.} 0$.

2. Considerăm următorul experiment, descris pe etape:
• într-o urnă se află o bilă neagră; se adaugă o bilă albă în urnă; se extrage aleatoriu o bilă din urnă; se notează culoarea bilei extrase; bila extrasă este repusă în urnă;
• se adaugă încă o bilă albă în urnă; se extrage aleatoriu o bilă din urnă; se notează culoarea bilei extrase; bila extrasă este repusă în urnă;
• ş.a.m.d.

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, fie Y_n variabila aleatoare care indică numărul de bile albe extrase după n etape ale experimentului descris mai sus. Demonstraţi că: $\dfrac{Y_n}{n} \xrightarrow{a.s.} 1$.

3. Durata (în minute) unei plăţi pentru o factură la un ghişeu într-o bancă urmează distribuţia continuă $Unif[1,3]$. Ştiind că duratele oricăror plăţi sunt independente, demonstraţi că:
i) media aritmetică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la 2 minute, când $n \to \infty$.
ii) media geometrică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la $\frac{3\sqrt{3}}{e}$ minute, când $n \to \infty$.
iii) media armonică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la $\frac{2}{\ln 3}$ minute, când $n \to \infty$.

4. Fie $(X_n)_n$ un şir de variabile aleatoare independente care au aceeaşi funcţie de repartiţie F. Fie $x \in \mathbb{R}$ fixat şi

$$\hat{F}_n(x) = \frac{\#\{i \in \{1,\dots,n\} : X_i \le x\}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

funcţiile de repartiţie empirice pe punctul x. Demonstraţi că $E(\hat{F}_n(x)) = F(x)$ şi $\hat{F}_n(x) \xrightarrow{a.s.} F(x)$, adică $\hat{F}_n(x)$ este un estimator nedeplasat şi consistent pentru $F(x)$.

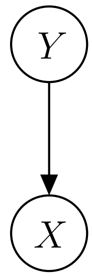
Reţele Bayes

Definiţii şi notaţii:

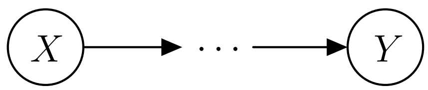
1) G este un graf orientat *aciclic* (i.e. nu conţine niciun drum orientat închis).

2) Fiecare nod din G este identificat cu o variabilă aleatoare corespunzătoare.

3) Nodul Y este *părinte* pentru nodul X, dacă există în G o muchie orientată de la Y la X. Mulţimea părinţilor lui X se notează cu $p(X)$.



4) Nodul Y este *descendent* al nodului X, dacă există un drum orientat în G de la X la Y.



5) Nodul Y este *nondescendent* al nodului X, dacă nu este descendent al nodului X. Mulţimea nondescendeţilor lui X se notează cu $nd(X)$.

6) G se numeşte *reţea* **Bayes**, dacă satisface *condiţia* **Markov**: orice nod X şi nondescendenţii săi $nd(X)$ sunt **condiţional independenţi**, dacă se dau valorile părinţilor $p(X)$ (dacă $p(X) = \emptyset$, atunci X şi $nd(X)$ sunt independenţi).

Consecinţă: Fie $X_1, \ldots, X_n$ variabile aleatoare discrete, care sunt nodurile unei reţele Bayes, şi $x_1, \ldots, x_n$ valori posibile corespunzătoare. Fie $\widehat{p(X_j)} = \bigcap\limits_{\substack{i=1 \\ X_i \in p(X_j)}}^{n} (X_i = x_i)$, $j = \overline{1,n}$, unde considerăm $\widehat{p(X_j)}$ ca fiind evenimentul sigur dacă $p(X_j) = \emptyset$. Atunci (condiţia Markov implică)

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1|\widehat{p(X_1)}) \cdot \ldots \cdot P(X_n = x_n|\widehat{p(X_n)}),$$

dacă presupunem că probabilităţile condiţionate folosite au sens.

Demonstraţie: Fără a restrânge generalitatea, presupunem că nodurile $X_1, \ldots, X_n$ sunt ordonate *ancestral*: toţi părinţii lui X_j sunt la stânga lui X_j şi toţi descendenţii lui X_j sunt la dreapta lui X_j, i.e. $p(X_j) \subseteq \{X_1, \ldots, X_{j-1}\} \subseteq nd(X_j)$, $j = \overline{2,n}$. Folosind presupunerea făcută şi condiţia Markov, deducem:

$$P(X_j = x_j|X_{j-1} = x_{j-1}, \ldots, X_1 = x_1) = \frac{P(X_j = x_j, \ldots, X_1 = x_1)}{P(X_{j-1} = x_{j-1}, \ldots, X_1 = x_1)} = \frac{P(X_j = x_j, \ldots, X_1 = x_1|\widehat{p(X_j)})}{P(X_{j-1} = x_{j-1}, \ldots, X_1 = x_1|\widehat{p(X_j)})}$$

$$= \frac{P(X_j = x_j|\widehat{p(X_j)}) \cdot P(X_{j-1} = x_{j-1}, \ldots, X_1 = x_1|\widehat{p(X_j)})}{P(X_{j-1} = x_{j-1}, \ldots, X_1 = x_1|\widehat{PX}_j)} = P(X_j = x_j|\widehat{p(X_j)}), \quad j = \overline{2,n},$$

dacă numitorul este nenul. Folosind regula de înmulţire a probabilităţilor şi relaţiile de mai sus, obţinem

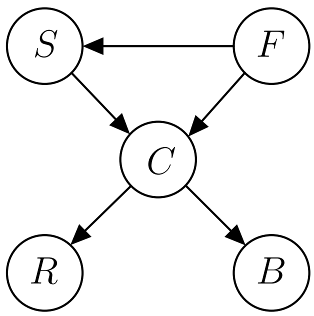
$$P(X_n = x_n, \ldots, X_1 = x_1) = P(X_n = x_n|\widehat{p(X_n)}) \cdot \ldots \cdot P(X_1 = x_1|\widehat{p(X_1)}).$$

Exemplu

Considerăm următoarele variabile aleatoare care indică anumite situaţii (1=`da` şi 0=`nu`), pe care le aveţi în vedere pentru o persoană într-o seară:

- F indică dacă filmul care rulează la cinema este în premieră sau nu.
- S indică dacă biletul de intrare la film este scump sau nu.
- C indică dacă persoana vizionează filmul de la cinema sau nu.
- R indică dacă persoana ia cina la un restaurant sau nu.
- B indică dacă persoana bea un cocteil la un bar sau nu.

Variabilele aleatoare de mai sus depind unele de altele conform unei reţele Bayes cu probabilităţile condiţinate date mai jos.



$P(F=1)$	$P(F=0)$
0,8	0,2

S	$P(S=...\|F=1)$	$P(S=...\|F=0)$
1	0,9	0,6
0	0,1	0,4

C	$P(C=...\|S=1,F=1)$	$P(C=...\|S=1,F=0)$	$P(C=...\|S=0,F=1)$	$P(C=...\|S=0,F=0)$
1	0,6	0,2	0,9	0,4
0	0,4	0,8	0,1	0,6

R	$P(R=...\|C=1)$	$P(R=...\|C=0)$
1	0,3	0,5
0	0,7	0,5

B	$P(B=...\|C=1)$	$P(B=...\|C=0)$
1	0,5	0,8
0	0,5	0,2

Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:

a) Persoana vizionează un film care nu e în premieră la cinema.
b) Persoana bea un cocteil la un bar, ştiind că nu vizionează filmul care rulează în premieră la cinema, biletul de intrare la film fiind scump.
c) Persoana ia cina la un restaurant.
d) Filmul care rulează la cinema este în premieră, ştiind că persoana ia cina la un restaurant.