Problema 1 *Care este cea mai mare valoare pentru care exponenţiala din MATLAB* **exp** *nu dă depăşire? Care este cea mai mică valoare pozitivă pentru care exponenţiala din MATLAB* **exp** *dă depăşire superioară? Analog pentru depăşire inferioară.*

Problema 2 *Fie*

$$f(x) = e^x - \cos(x) - x.$$

(a) *Reprezentaţi grafic f pe o vecinătate a lui 0, utilizând metodele Analizei matematice.*

(b) *Reprezentaţi grafic f pentru $|x| < 5 \times 10^{-8}$, utilizând aritmetica în virgulă flotantă, în simplă şi dublă precizie.*

(c) *Cum s-ar putea obţine un grafic mai realist?*

Problema 3 *Presupunem că dorim să calculăm în MATLAB factorul Lorenz γ definit prin*

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

unde v este viteza relativă în m/s a două cadre inerţiale, iar c este viteza luminii, aproximativ $299,792,458$ m/s. Ne asigură MATLAB suficientă precizie pentru a determina efectul relativist al unui vehicul ce se mişcă cu $v = 100.000$ km/h? Dându-se cifrele semnificative ale lui v, este rezultatul numeric dat de MATLAB' satisfăcător? Comparaţi rezultatul cu cel obţinut din

$$\left(1 - x^2\right)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + O\left(x^4\right).$$

Problema 4 *Dorim să calculăm integralele*

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a} \mathrm{d}\, x$$

pentru $n = 0, 1, 2, \ldots, 30$ şi $a > 0$.

1. *Arătaţi că are loc relaţia de recurenţă:*

$$y_n = \frac{1}{n} - a y_{n-1}, \qquad y_0 = \ln \frac{1+a}{a}. \qquad (1)$$

2. *Calculaţi margini superioare şi inferioare pentru valorile lui y_n alegând $x = 0$ şi respectiv $x = 1$, în numitorul integrandului.*

3. *Calculaţi termenii şirului $\{y_n\}$ pentru $a = 10$ şi $n = 1, \ldots, 30$ utilizând (1) repetat. Obţineţi o tabelă cu valorile şi marginile lor.*

4. *Rezolvaţi (1) în raport cu y_{n-1} şi calculaţi din nou şirul pentru $a = 10$, de această dată n mergând în jos şi începând cu $n = 30$. Luaţi ca valoare de pornire marginea inferioară pentru y_{30}.*

5. *La final, verificaţi rezultatele dumneavoastră calculând integralele cu funcţia MATLAB `quad`.*

Problema 5 *Ştim de la Analiză matematică că*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Care este "limita în aritmetica maşinii "? Explicaţi.

Problema 6 *Implementaţi o rutină MATLAB pentru calculul lui $f(x) = \exp(x)$ cu precizia* eps.

Problema 7 *Calculaţi integrala $\int_0^1 e^x \mathrm{d}\,x$ cu ajutorul unei sume Riemann cu n subintervale echidistante, evaluând integrandul la mijlocul fiecărui interval. Afişaţi sumele Riemann pentru $n = 5000 : 5000 : 100000$ (cu 15 cifre zecimale după marca zecimală), împreună cu erorile absolute. Comentaţi rezultatul.*

Problema 8 *Fie $y_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

(a) *Utilizaţi integrarea prin părţi pentru a obţine o relaţie de recurenţă între y_k şi y_{k-1}, pentru $k = 1, 2, 3, \ldots$, şi determinaţi valoarea de pornire y_0.*

(b) *Scrieţi un program MATLAB care generează y_0, y_1, $\ldots$, y_{20}, utilizând recurenţa de la (a), şi afişaţi rezultatul cu 15 cifre zecimale după marca zecimală. Explicaţi detaliat ce se întâmplă.*

(c) *Utilizaţi recurenţa de la (a) în ordine inversă, pornind cu valoarea (arbitrară) $y_N = 0$. Plasaţi în cinci coloane consecutive ale unei matrice de (21×5) Y valorile $y_0^{(N)}$, $y_1^{(N)}$, $\ldots$, $y_{20}^{(N)}$ astfel obţinute pentru $N = 22$, 24, 26, 28, 30. Determinaţi cât de mult diferă una de alta coloanele consecutive ale lui Y afişând*

$$e_i = \max\left|\left(Y(:, i+1) - Y(:, i)\right)/Y(:, i+1)\right|, \; i = 1, 2, 3, 4.$$

Tipăriţi ultima coloană $Y(:, 5)$ a lui Y şi explicaţi de ce ea reprezintă precis cantităţile y_0, y_1, $\ldots$, y_{20}.

Problema 9 *La evaluarea pe calculator a funcţiei*

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

se observă o eroare relativă mare pentru valori $x \approx 0$.

1. *Reprezentaţi grafic pe intervalul* $x \in [-10^{-11}, 10^{-11}]$. *Explicaţi ce se întâmplă.*

2. *Găsiţi o metodă de calcul a lui* f *pentru* $|x| < 1$ *la precizia maşinii şi scrieţi o funcţie MATLAB pentru calculul lui* f. *Reprezentaţi din nou cu noua funcţie.*

Problema 10 *La evaluarea pe calculator a funcţiei*

$$f(x) = \frac{x^2}{\cos(\sin(x))^2 - 1}$$

se observă o eroare relativă mare pentru valori $x \approx 0$.

1. *Reprezentaţi grafic pe intervalul* $x \in \left[-10^{-7}, 10^{-7}\right]$. *Explicaţi ce se întâmplă.*

2. *Găsiţi o metodă de calcul a lui* f *pentru* $|x| < 1$ *la precizia maşinii şi scrieţi o funcţie MATLAB pentru calculul lui* f. *Reprezentaţi grafic.*

Problema 11 *Să se aproximmeze derivata lui* $f(x) = \exp(x)$ *în* $x = 0$ *cu formula*

$$f'(x) = \frac{\exp(h) - 1}{h}$$

pentru valori ale lui h *de forma* $h = 10.\hat{}(-15:0)$ *şi* $h = 2^{-k}$, $k = 10:54$*; reprezentaţi grafic eroarea, explicaţi fenomenul şi propuneţi un remediu.*

Problema 12 *Se consideră ecuaţia de gradul al doilea* $x^2 + 2bx + 1 = 0$.

1. *Determinaţi condiţionarea problemei de determinare a rădăcinilor ecuaţiei în funcţie de* b.

2. *Reprezentaţi grafic* $\left(-b + \sqrt{b^2-1}\right)\left(-b - \sqrt{b^2-1}\right)$ *care ar trebui să fie egală cu 1 pe o scară logaritmică în MATLAB după cum urmează:*

```
b = logspace( 6, 7.5, 1001 );
one = (-b-sqrt(b.\U{2c6}2-1) ).*(-b+sqrt(b.\U{2c6}2-1));
plot( b, one, '.' )
```

3. *Explicaţi ce se întâmplă şi găsiţi un remediu.*

4. *Dacă* $b \gg 1$, *care rădăcină este mai precisă* $-b+\sqrt{b^2-1}$ *sau* $-b-\sqrt{b^2-1}$*? De ce?*

Problema 13 *Să vedem ce se întâmplă dacă se aplică radicalul repetat şi apoi se ridică rezultatul la pătrat repetat. Scrieţi o funcţie MATLAB care acceptă la intrare un vector x, îi aplică rădăcina pătrată de 52 de ori şi apoi ridică* *rezultatul la pătrat de 52 de ori: teoretic se obţine vectorul iniţial. Numiţi funcţia dumneavoastră Higham. Algoritmul este dat mai jos:*

Intrare: vectorul x

for *i* ***from*** *1* ***to*** *52* ***do***

$x := \sqrt{x};$

end for

for *i* ***from*** *1* ***to*** *52* ***do***

$x := x^2;$

end for

return *x*

Rezultatul va fi foarte diferit de x. Executaţi apoi secvenţa MATLAB x = logspace(0, 1, 2013); y = Higham(x); plot(x, y, 'k.', x, x, '–')

Explicaţi reprezentarea grafică. (Indicaţie:identificaţi punctele în care $y \approx x$).