Sistemas de equações lineares

Uma **equação linear** nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma equação do tipo

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = d,$$

onde $a_1, \ldots, a_n$ e d são números. A d chama-se **segundo membro** ou **termo independente** da equação.

Um **sistema de equações lineares** é uma coleção finita ordenada de equações lineares (todas nas mesmas incógnitas) consideradas em conjunto.

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases}$$

Um sistema com m equações e n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases}$$

apresenta-se abreviadamente na forma matricial $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A é a **matriz do sistema**, x é a **coluna das incógnitas** e b é a **coluna dos segundos membros** ou, abreviadamente, o **segundo membro do sistema**.

O sistema

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases}$$

tem como **matriz ampliada** a matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Exemplo

Considere o sistema $\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 = -6 \end{array}\right.$.

A matriz do sistema é $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, a matriz-coluna das incógnitas é $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, a matriz-coluna dos segundos membros é $b = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}$ e a matriz ampliada do sistema é $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -6 \end{array}\right]$.

Uma **solução** de um sistema de equações lineares nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ é uma matriz-coluna $n \times 1$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

de números tais que as substituições $x_i = \alpha_i, i = 1, \ldots, n$, transformam todas as equações do sistema em identidades verdadeiras.

Exemplo

A matriz-coluna $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ é uma (ou melhor, é a) solução do sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 = -6 \end{cases}$ uma vez que as substituições $x_1 = 2$ e $x_2 = -1$ ($\begin{cases} 2 + 2 \times (-1) = 0 \\ -2 + 4 \times (-1) = -6 \end{cases}$) transformam todas as equações do sistema em identidades verdadeiras.

Resolver um sistema de equações lineares é determinar todas as suas soluções ou provar que não existe nenhuma.

1. Um sistema de equações lineares que não tenha nenhuma solução diz-se **impossível**.
2. Um sistema de equações lineares que tenha pelo menos uma solução diz-se **possível**:
   - se só tiver uma solução, é **possível determinado**;
   - se tiver mais do que uma solução, é **possível indeterminado**.

Exemplos

- O sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$ é um sistema impossível pois não tem nenhuma solução.

- O sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ é um sistema possível determinado pois tem uma única solução, a qual é $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- O sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$ é um sistema possível indeterminado pois tem solução $\begin{bmatrix} 1 - 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

Um sistema em que os segundos membros das equações são todos iguais a 0 diz-se **homogéneo**.

Exemplo

O sistema $\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{array}\right.$ é um sistema homogéneo.

Note-se que um sistema homogéneo é sempre possível, pois possui, pelo menos, a solução $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, chamada **solução nula**.

Dois sistemas com o mesmo número de equações e de incógnitas dizem-se **equivalentes** se tiverem exatamente as mesmas soluções.

Exemplo

Os sistemas $\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 = 4 \end{array}\right.$ e $\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 = 6 \\ -x_2 = -2 \end{array}\right.$ são equivalentes, pois ambos têm como solução a matriz-coluna $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Seja $Ax = b$ um sistema de equações lineares, com $A_{m \times n}$.

Seja E uma matriz $m \times m$ invertível.

Então o sistema $EAx = Eb$ é equivalente ao sistema $Ax = b$.

Demonstração

Seja u uma solução de $Ax = b$.
Então $Au = b$.
Multiplicando à esquerda cada membro de $Au = b$ por E obtemos $EAu = Eb$, isto é, u é uma solução de $EAx = Eb$.

Reciprocamente, seja u uma solução de $EAx = Eb$.
Então $EAu = Eb$. Como E é invertível, existe E^{-1}.
Multiplicando à esquerda cada membro de $EAu = Eb$ por E^{-1} obtemos $E^{-1}EAu = E^{-1}Eb$, isto é, $Au = b$
e portanto u é uma solução de $Ax = b$.

Exemplo

Seja $Ax = b$ o sistema de equações lineares, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Seja $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Como E é invertível (pois $E = E_{21}(-2)$), então o sistema $EAx = Eb$ é equivalente ao sistema $Ax = b$.

Isto é, o sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases}$ $(Ax = b)$ é equivalente ao sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ -x_2 = -2 \end{cases}$ $(EAx = Eb)$.

$EA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $Eb = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Uma matriz diz-se uma **matriz em escada** se satisfizer as seguintes condições:
(i) Se o primeiro elemento não nulo numa linha estiver na coluna j então a linha seguinte começa com, pelo menos, j elementos nulos.
(ii) Se houver linhas totalmente constituídas por zeros, elas aparecem depois das outras.

O primeiro elemento não nulo de cada linha de uma matriz em escada chama-se um **pivot** da matriz.

Exemplos

$$\begin{bmatrix} \bullet & * \\ 0 & \bullet \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bullet & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$*$ designa um elemento arbitrário de $\mathbb{R}$

$\bullet$ representa um elemento não nulo em $\mathbb{R}$ (pivot).

Exemplos

Exemplos de matrizes em escada:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{6} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \boxed{5} & 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \boxed{-2} & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{6} & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz A tem pivots 2, 3 e 6,
a matriz B tem pivots 5, -1 e 6
e a matriz C tem pivots -2 e 6.

Exemplos

As matrizes $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 7 & 1 & 8 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ não são matrizes em escada.

Ideia Básica do Método de Eliminação de Gauss:
Os sistemas cujas matrizes sejam triangulares ou em escada resolvem-se facilmente por substituição.

Exemplo

$$\begin{cases} 2x+3y-4z &= 0 \\ \quad 2y+5z &= 5 \\ \quad 2z &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-4z &= 0 \\ \quad 2y+5z &= 5 \\ \quad z &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+3y-4z &= 0 \\ \quad y &= 0 \\ \quad z &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2 \\ y &= 0 \\ z &= 1 \end{cases}$$

Conjunto solução: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Objetivo

Desenvolver um algoritmo para transformar o sistema dado noutro equivalente cuja matriz seja uma matriz em escada.

Um passo elementar no método de eliminação de Gauss consiste na adição membro a membro a uma equação de um múltiplo de outra de forma a que, na equação obtida, seja nulo o coeficiente de certa incógnita. Diz-se então que se "eliminou" essa incógnita da equação.

Sendo $a_{11} \neq 0$, a adição à segunda equação da primeira multiplicada por $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ elimina a incógnita x_1 da segunda equação.

Os passos elementares são realizados de modo a eliminar a incógnita x_1 de todas as equações a partir da segunda.

Em seguida, passamos a eliminar a incógnita x_2 de todas as equações a partir da terceira, para o qual é necessário que a'_{22} (o novo coeficiente de x_2 na segunda equação) seja não nulo.

Este processo repete-se até não ser possível continuá-lo mais.

Os números não nulos

$$a_{11}, a'_{22}, \ldots$$

chamam-se **pivots** da eliminação.

Sempre que surja um zero na posição em que devia estar um pivot, procura-se resolver o problema através da troca dessa equação com a que se lhe segue.

Se essa equação também tiver um zero na posição em causa, tenta-se a seguinte, e assim sucessivamente.

Se nenhuma troca resolver o problema, o pivot passa a ser procurado entre os coeficientes da incógnita seguinte.

Deste processo resulta um sistema $Ux = c$ em que a matriz U é uma matriz em escada.

Teorema

Cada um dos passos elementares do método de eliminação de Gauss transforma um sistema noutro equivalente.

Demonstração

Cada passo elementar do MEG corresponde a multiplicar ambos os membros do sistema por uma matriz elementar, e as matrizes elementares são invertíveis.

Portanto, o sistema $Ux = c$ obtido é equivalente ao sistema original $Ax = b$, e temos $U = MA$ e $c = Mb$ para uma certa matriz invertível M, sendo M um produto de matrizes elementares (logo invertíveis):

$$Ax = b \Leftrightarrow \underbrace{MA}_{=U}x = \underbrace{Mb}_{=c}$$

Com a obtenção da matriz em escada U termina a parte "descendente" do método de eliminação de Gauss. Neste momento verifica-se se o sistema obtido

$$Ux = c$$

é possível, isto é, se não há equações com o primeiro membro nulo e o segundo não nulo.

Se o sistema for possível resolve-se de baixo para cima (parte "ascendente" do algoritmo) obtendo algumas incógnitas (aquelas que estão a ser multiplicadas por pivots) em função das restantes. Às primeiras chamamos **incógnitas principais** ou **básicas** e às outras (que podem tomar qualquer valor em $\mathbb{R}$) chamamos **incógnitas livres**.

- Se houver incógnitas livres, o sistema é indeterminado (e tem um número infinito de soluções).
- Se só houver incógnitas básicas, o sistema é determinado.

A **característica de** A – abreviadamente, $car(A)$ – é o número de pivots que aparecem quando se aplica a A o método de eliminação de Gauss.

Equivalentemente, $car(A)$ é o número de linhas não nulas da matriz U produzida pelo algoritmo de eliminação de Gauss aplicado a A.

Se A for a matriz nula, então $car(A) = 0$.

Uma matriz quadrada A de ordem n diz-se **não-singular** se $car(A) = n$.

Uma matriz quadrada A de ordem n diz-se **singular** se $car(A) < n$.

Para $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e

$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem-se $car(A) = 3$, $car(B) = 3$ e $car(C) = 2$.

Num sistema $Ax = b$ com m equações e n incógnitas temos:

• Se $car(A) < car(A|b)$ então o sistema $Ax = b$ é impossível.

•• Se $car(A) = car(A|b)$ então o sistema $Ax = b$ é possível:

- ▷ se $car(A) = n$ o sistema é possível determinado (só tem incógnitas básicas);
- ▷▷ se $car(A) < n$ o sistema é possível indeterminado (tem incógnitas livres).

Exemplo

Apliquemos o MEG ao sistema $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ 4x + 2y - 3z = 0. \\ -2x - 3y + 5z = 5 \end{cases}$

Na forma matricial fica

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{\text{-2}} & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & 5 & 5 \end{array}\right] \underset{L_3 - L_1}{\overset{L_2 + 2L_1}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{\text{-2}} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

Exemplo (continuação)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \end{array}\right] \underset{L_3+L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 6 \end{array}\right]$$

Como $car(A) = car(A|b)$, o sistema é possível.
Como a característica de A é igual ao número de incógnitas, o sistema é possível determinado.
Passemos à parte "ascendente" do MEG:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ 4y - z = 2 \\ 3z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

O conjunto solução do sistema é $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

Sendo $A \in M_{m\times n}(R)$, o conjunto das soluções do sistema $Ax = 0$, designado por $N(A)$, diz-se o **núcleo** ou **espaço nulo** da matriz A.

$$N(A) = \{x \in M_{n\times 1}(R) : Ax = 0\}$$

Dada uma matriz A, se U for a matriz em escada obtida de A por aplicação do MEG, é óbvio que

$$N(A) = N(U)$$

uma vez que os sistemas $Ax = 0$ e $Ux = 0$ são equivalentes.

Algoritmo

Resolução do sistema $Ax = 0$ sendo A uma matriz $m \times n$:

1.º passo: Determinação da matriz em escada U.
Seja $car(A) = r$.

2.º passo: No sistema $Ux = 0$, que é equivalente a $Ax = 0$, separam-se as incógnitas em básicas e livres. Se não houver incógnitas livres, o sistema é determinado (só tem a solução nula).

3.º passo: Para cada incógnita livre, dá-se o valor 1 a essa incógnita livre e 0 às restantes incógnitas livres e resolve-se o sistema (com r equações) resultante.
As $n - r$ colunas $n \times 1$ assim obtidas geram o conjunto $N(A)$ das soluções (isto é, qualquer solução é combinação linear dessas $n - r$).

Um sistema homogéneo com mais incógnitas do que equações é indeterminado.

Exemplo

Vamos resolver o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 & = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 10x_3 - 2x_4 & = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 & = 0 \end{cases}$$

Teorema

Se o sistema $Ax = b$ for possível e y for uma solução dele, então o seu conjunto solução é $\{y + u : u \in N(A)\}$.

Demonstração

Seja y uma solução de $Ax = b$ (logo $Ay = b$) e $u \in N(A)$ (i.e. $Au = 0$). Então $A(y + u) = Ay + Au = b + 0 = b$ e portanto, $y + u$ é solução do sistema $Ax = b$. Reciprocamene, seja z uma solução qualquer de $Ax = b$. Ponhamos $u = z - y$ (com y uma solução de $Ax = b$). Então
$Au = A(z - y) = Az - Ay = b - b = 0$, logo $u \in N(A)$.
Provámos assim que $z = y + u$ é da forma pretendida.

Teorema

Seja A uma matriz $m \times n$.

1. $Ax = b$ é possível para todo o b se e só se $car(A) = m$.
2. Sendo $Ax = b$ possível, é determinado se e só se $car(A) = n$.

Demonstração

1. O sistema $Ax = b$ só pode ser possível para todos os segundos membros b se, após a fase descendente do algoritmo de eliminação, conduzindo à matriz U, não houver linhas nulas em U, o que quer dizer precisamente que $car(A) = m$.
2. O sistema $Ax = b$ é determinado se não houver incógnitas livres, isto é, se todas as n incógnitas forem básicas, e isto é equivalente a dizer que $car(A) = n$.

Exemplos

$*$ designa um elemento arbitrário de $\mathbb{R}$

$\bullet$ representa um elemento não nulo em $\mathbb{R}$ (pivot).

1. O sistema $Ux = c$ seguinte é possível para qualquer $c \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \bullet & * & * & * & c_1 \\ 0 & \bullet & * & * & c_2 \\ 0 & 0 & \bullet & * & c_3 \end{array}\right] \qquad car(U) = 3 \qquad U_{3\times 4}$$

O sistema $Ux = c$ seguinte não é possível para todo o $c \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \bullet & * & * & * & * & c_1 \\ 0 & 0 & \bullet & * & * & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 \end{array}\right] \qquad car(U) = 3 \qquad U_{4\times 5}$$

2. O sistema $Ux = c$ seguinte é possível determinado.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \bullet & * & * & c_1 \\ 0 & \bullet & * & c_2 \\ 0 & 0 & \bullet & c_3 \end{array}\right] \qquad car(U) = 3 \qquad U_{3\times 3}$$

O sistema $Ux = c$ seguinte é possível indeterminado.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \bullet & * & * & * & c_1 \\ 0 & 0 & \bullet & * & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & c_3 \end{array}\right] \qquad car(U) = 3 \qquad U_{3\times 4}$$

Teorema

Uma matriz quadrada é invertível se e só se for não-singular.

Relembramos que o produto de duas matrizes invertíveis é também uma matriz invertível.
O recíproco também é válido, isto é,

Teorema

Sejam A e B matrizes de ordem n. Se o produto AB for invertível, então A e B são ambas invertíveis. Em particular, se $AB = I$, tem-se $B = A^{-1}$.

Assim, **basta verificar uma das condições** $AX = I$ **ou** $XA = I$ **para sabermos que** $A^{-1} = X$.

Cálculo da inversa de uma matriz

Seja dada A uma matriz $n \times n$.

Para calcular a inversa de A (se existir) leva-se a cabo com a matriz $n \times 2n$

$$[A|I]$$

a parte descendente do MEG aplicado a A.

Se houver menos de n pivots, A não é invertível.

Se houver n pivots, usando-os pela ordem contrária, anulam-se com operações elementares todos os elementos por cima da diagonal da matriz à esquerda.

Finalmente, divide-se cada linha pelo respetivo pivot. No fim deste processo, a matriz obtida é

$$[I|A^{-1}]$$

Exemplo

Determinar (se existir) a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{1 \quad 2 \quad 2}}^{A}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{1 \quad 0 \quad 0}}^{I}} \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_2 - L_1 \\ \longrightarrow \\ L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 - L_3 \\ \longrightarrow \\ L_2 + 1/2L_3 \end{array}$$

$car(A) = 3$ logo A é invertível

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 & -3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 + 2L_2 \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \xrightarrow{L_1 + 2L_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \xrightarrow[1/2L_3]{-L_2}$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right.}_{I}\underbrace{\left|\begin{array}{rrr} -1 & 2 & 0 \\ 3/2 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]}_{A^{-1}}$$