Nome: ______________________________________________ Nº de estudante: _______________

*Departamento de Engenharia Informática*
*Faculdade de Ciências e Tecnologia*
*Universidade de Coimbra*

# Análise e Transformação de Dados

## Exame da Época Recurso

1 de Julho de 2019 Duração: 2h

Exame com consulta restrita a quatro páginas A4 de apontamentos (manuscritas).
Não é permitido o uso de meios electrónicos (computador, etc.), excepto calculadora básica.
Qualquer tentativa de fraude conduzirá à anulação da prova para todos os intervenientes.
**Perguntas de escolha múltipla**: as respostas erradas subtraem 25% da cotação da pergunta.

1. Considere um sinal periódico de tempo contínuo *x*(*t*), de período $T_0 = 0.1s$, cujas componentes não nulas da respetiva **Série de Fourier complexa** são:

$c_{-6} = -3$  $c_{-1} = 2$  $c_0 = 1$  $c_1 = 2$  $c_6 = -3$

a) (6%) Quais as frequências angulares (em *rad/s*) presentes no sinal *x*(*t*)?

- ☐ 0, 20 e 120 *rad/s*
- ☐ 0, 0.2π e π *rad/s*
- ☒ 0, 20π e 120π *rad/s*
- ☐ 0, 20 e 60 *rad/s*
- ☐ 0, 0.2 e 0.6 *rad/s*
- ☐ Nenhuma das opções.

b) (6%) Analise, justificadamente, a paridade de *x*(*t*).

É par porque todos os coeficientes são reais puros.

c) (6%) Diga, justificadamente, se a amostragem de *x*(*t*) com *N*=20 amostras por período $T_0$, garante a reconstrução de *x*(*t*) sem *aliasing* a partir do correspondente sinal amostrado *x*[*n*].

$N = 20 \quad T_0 = 0{,}1\,s$

$T_0 = N T_s \Leftrightarrow 0{,}1 = 20 T_s \Leftrightarrow T_s = \frac{1}{200}$

$T_s = \frac{1}{f_s} \Leftrightarrow \frac{1}{200} = \frac{1}{f_s} \Leftrightarrow f_s = 200\,Hz$

$\omega_s = 2\pi f_s \Leftrightarrow \omega_s = 2\pi \times 200 \Leftrightarrow \omega_s = 400\pi$

Teorema de Nyquist

$\omega_s > 2\,\omega_{max}$

$400\pi > 2 \times 120\pi$

$400\pi > 240\pi$

Sim, garante a reconstrução uma vez que se cumpre o Teorema de Nyquist

2. Considere o sinal de tempo discreto $x[n] = -2\delta[n+1] + \delta[n-2] + 4\delta[n-4] + 9\delta[n-6]$.

a) (6%) Determine os parâmetros *a* e *b* da transformação linear $n = am - b$ que aplicada no sinal *x*[*n*] resulta no sinal $y[n] = (n-1)^2 (u[n+2] - u[n-2])$.

- ☐ *a=2;b=2*
- ☒ *a=-2;b=-2*
- ☐ *a=-0.5; b=2*
- ☐ *a=-0.5;b=-0.5*
- ☐ *a=2;b=-2*
- ☐ Nenhuma das opções

| Nome: ________________________________________________ Nº de estudante: ________________ |
|---|

b) (6%) Diga, justificadamente, qual a relação entre os valores da energia dos sinais $x[n]$ e $y[n]$.

$E\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = (-2)^2 + 1^2 + 4^2 + 9^2 = 102$

$E\{y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y[n]|^2 = 9^2 + 4^2 + 1^2 = 98$

A energia de $y[n]$ é menor que a de $x[n]$ porque $y[n]$ resulta de uma compressão de $x[n]$, onde houve perda de amostras.

3. Considere que a resposta a impulso de um *router*, que recebe $x[n]$ e despacha $y[n]$ pacotes em cada instante $n$, é dada por $h[n] = 0.8 \times 0.5^{(n-2)} u[n-2]$, considerando condições iniciais nulas.

a) (6%) Diga, justificadamente, com base em $h[n]$ se o sistema *router* é um sistema estável e causal.

• O sistema é causal, pois $h[n]=0,\ n<2$

• O sistema é estável porque

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n\geq 2}^{+\infty} |h[n]| = 0{,}8 \sum_{n\geq 2}^{+\infty} 0{,}5^{(n-2)} \longrightarrow$ série geométrica com |razão| < 1, logo a soma é limitada.

b) (6%) Considerando que os pacotes recebidos são expressos por $x[n] = 20u[n] - 10\delta[n-1]$, quantos pacotes são despachados pelo *router* até ao instante $n=4$, inclusive?

$h[n] = 0{,}8 \times 0{,}5^{(n-2)} u[n-2]$

$x[n] = 20u[n] - 10\delta[n-1]$

São despachados $16+16+24=56$ pacotes até ao instante $n=4$

| | |
|---|---|
| $n<2$ | $y[n]=0$ |
| $n=2$ | $y[n]=16$ |
| $n=3$ | $y[n]=16$ |
| $n=4$ | $y[n]=24$ |

$h[0]=0$, $h[1]=0$, $h[2]=0{,}8$, $h[3]=0{,}4$, $h[4]=0{,}2$

$x[0]=20$, $x[1]=10$, $x[2]=20$, $x[3]=20$, $x[4]=20$

| $n$ | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $h \backslash x$ | 20 | 10 | 20 | 20 | 20 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0,8 | 16 | 8 | 16 | 16 | 16 |
| 3 | 0,4 | 8 | 4 | 8 | 8 | 8 |
| 4 | 0,2 | 4 | 2 | 4 | 4 | 4 |

4. A função de transferência de um sistema é $G(z) = \dfrac{(1-1.1z^{-1})(1+1.4z^{-1})z^{-3}}{(1+0.2z^{-1})(1-(2-0.4k)z^{-1})}$, $k \in R$ ..

a) (8%) Determine os zeros e os pólos (em função de $k$) do sistema e para que intervalo de valores de $k$ o sistema é estável.

$$G(z) = \frac{(1-1{,}1z^{-1})(1-1{,}4z^{-1})z^{-3}}{(1+0{,}2z^{-1})(1-(2-0{,}4k)z^{-1})} \times \frac{z^5}{z^5} = \frac{(z-1{,}1)(z-1{,}4)}{z^3(z+0{,}2)(z-(2-0{,}4k))}$$

Zeros: $z=1{,}1$; $z=1{,}4$

Pólos: $z=0$; $z=-0{,}2$; $z=2-0{,}4k$

Para que o sistema seja estável $k$ tem de estar no seguinte intervalo: $|2-0{,}4k|<1 \Leftrightarrow -1 < 2-0{,}4k < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3 < -0{,}4k < -1$

$\Leftrightarrow 1 < 0{,}4k < 3$

$\Leftrightarrow 2{,}5 < k < 7{,}5$

$k \in ]2{,}5;\ 7{,}5[$

b) (6%) Considerando $k$ = 3 e condições iniciais nulas, determine para que valor tende a saída do sistema, $y[n]$, em regime estacionário, em resposta à entrada $x[n] = 2\delta[n-1] - 4u[n-3]$?

$$G(z) = \frac{(1-1{,}1z^{-1})(1+1{,}4z^{-1})z^{3}}{(1+0{,}2z^{-1})(1-0{,}8z^{-1})}$$

$$x(z) = 2z^{-1} - 4\frac{z^{-3}}{1-z^{-1}}$$

$$y[\infty] = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1}) \frac{(1-1{,}1z^{-1})(1+1{,}4z^{-1})z^{-3}}{(1+0{,}2z^{-1})(1-0{,}8z^{-1})} \times \left(2z^{-1} - 4\frac{z^{-3}}{1-z^{-1}}\right)$$

$$= \underbrace{\lim_{z\to 1} 2(1-z^{-1})\frac{(1-1{,}1z^{-1})(1+1{,}4z^{-1})z^{-4}}{(1+0{,}2z^{-1})(1-0{,}8z^{-1})}}_{0} - \lim_{z\to 1} 4 \cancel{(1-z^{-1})} \frac{(1-1{,}1z^{-1})(1+1{,}4z^{-1})}{(1+0{,}2z^{-1})(1-0{,}8z^{-1})\cancel{(1-z^{-1})}}$$

$$= -4 \lim_{z\to 1} \frac{(1+1{,}4z^{-1})(1-1{,}1z^{-1})}{(1+0{,}2z^{-1})(1-0{,}8z^{-1})} = -4 \times (-1) = 4$$

Nome: ____________________________________________ Nº de estudante: _______________

5. Considere que a Transformada de Fourier (FT) de um sinal $x(t)$ é dada por (com $\omega$ em $rad/s$):

$$X_{FT}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -40\pi \lor \omega > 40\pi \\ 8|\omega|, & -40\pi \le \omega \le 40\pi \end{cases}$$

a) (6%) Escolhendo uma frequência de amostragem $fs$ = 50Hz, diga, justificadamente, se é possível reconstruir *sem aliasing* o sinal $x(t)$ a partir do correspondente sinal amostrado, $x[n]$?

$f_a = 50$ Hz $\quad \omega_{max} = 40\pi \quad \omega_{max} = 2\pi f_{max} \Leftrightarrow 40\pi = 2\pi f_{max} \Leftrightarrow f_{max} = 20$ Hz

Pelo teorema de Nyquist $fs > 2f_{max} \Leftrightarrow 50 > 2 \times 20 \Leftrightarrow 50 > 40$ É possível reconstruir sem aliasing.

b) (6%) Sabendo que a Transformada Discreta de Fourier (DFT) do sinal $x[n]$ tem uma periodicidade $N$ = 200, determine os valores de $X_{DFT}[m]$ para $m$= 0, 1, 2.

$fs = 50$ Hz $\quad N = 200 \quad T_a = \frac{1}{50}$ s $\quad T_0 = 200 \times \frac{1}{50} \Leftrightarrow T_0 = 4$ s

$X_{DFT}[m] = \underbrace{X_{DTFT}}_{f_a X_{FT}}[m \times \underbrace{\tfrac{2\pi}{NT_a}}_{T_0}]$

$X_{DFT}[0] = 0$

$X_{DFT}[1] = 50\, X_{FT}[\frac{\pi}{2}] = 50 \times 8 \times \frac{\pi}{2} = 200\pi$

$X_{DFT}[2] = 50\, X_{FT}[\pi] = 50 \times 8 \times \pi = 400\pi$

c) (6%) Nas condições da alínea anterior, aplicando ao sinal $x(t)$ um filtro ideal do tipo passa-baixo, com frequências de corte $\omega_c = 1.1\pi\ rad/s$, quais as frequências angulares $\Omega$ presentes no sinal que resulta da amostragem de $x(t)$ à frequência de amostragem $fs$ = 50Hz?

A DFT resulta da amostragem da DTFT

$X_{DFT}[K] = X_{DTFT}(K \frac{2\pi}{NT_a}) = X_{DTFT}(K \Omega_0 f_a)$

Filtro passa-baixo passam as frequências $< 1{,}1\pi$ rad/s, logo

$K \frac{2\pi}{NT_a} < 1{,}1\pi \Leftrightarrow K \frac{2}{T_0} < 1{,}1 \Leftrightarrow K \frac{2}{4} < 1{,}1 \Leftrightarrow K < 2{,}2$

$K = 0$ ; $K = 1$ ; $K = 2$ $\quad 0, \frac{2}{4}$ e $1$ rad $s^{-1}$

6. Considere um sinal de tempo discreto não estacionário que resultou da amostragem de um sinal áudio de tempo contínuo a uma frequência de amostragem $fs$=2$KHz$. Pretendendo-se localizar temporalmente a ocorrência de duas notas musicais, o Ré (294$Hz$) e o Lá (440$Hz$), aplicou-se a DFT por janelas (STFT) com uma dimensão temporal de 100ms e sem sobreposição.

a) (6%) Em cada janela, a que índice $m$ da transformada $X_{DFT}[m]$ corresponde a nota musical Lá?

☐ $m$ = 11 ☐ $m$ = 22 ☒ $m$ = 44 ☐ $m$ = 88 ☐ Nenhuma das opções

b) (8%) Determine a expressão do sinal $x[n]$ na 1ª janela, supondo que é estacionário nessa janela e sabendo que é caracterizado por $X_{DFT}[4] = -X_{DFT}[-4] = -200j$ e $X_{DFT}[9] = X_{DFT}[-9] = -400$.

$X_{DFT}[4] = -200j$

$X_{DFT}[-4] = 200j$

$X_{DFT}[-9] = -400$

$X_{DFT}[9] = -400$

$C_m = \frac{1}{N} X_{DFT}[m]$, $N = 200$

$C_{-9} = 2e^{-j\pi}$

$C_{-4} = e^{j\frac{\pi}{2}}$

$C_4 = e^{-j\frac{\pi}{2}}$

$C_9 = 2e^{-j\pi}$

$\longrightarrow$ $C_4 = 2$, $C_9 = 4$, $\theta_4 = -\frac{\pi}{2}$, $\theta_9 = \pi$

$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \Leftrightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{200} = \frac{\pi}{100}$

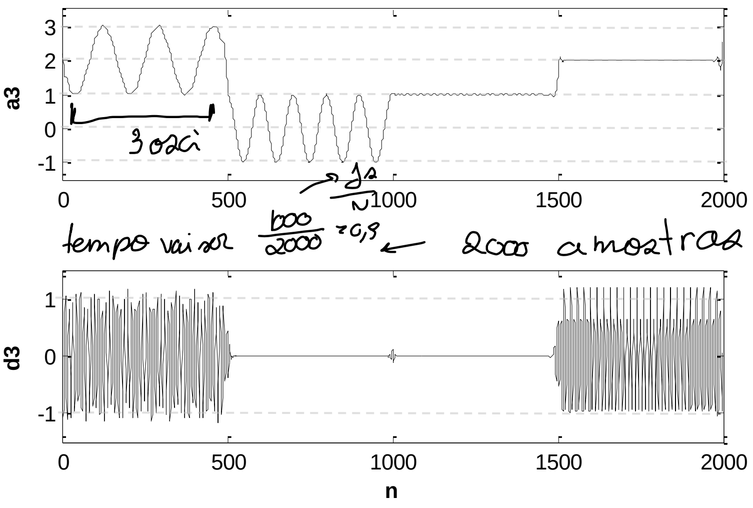
$x[n] = \sum_{n=0}^{+\infty} C_m \cos(m\Omega_0 n + \theta_m) =$

$= C_4 \cos(4\Omega_0 n + \theta_4) + C_9 \cos(9\Omega_0 n + \theta_9)$

$= 2\cos(4\frac{\pi}{100} n - \frac{\pi}{2}) + 4\cos(9\frac{\pi}{100} n + \pi)$

| Nome: ____________________________________________ Nº de estudante: ________________ |
|---|

7. (8%) Dado um sinal de tempo discreto, $x[n]$, obtido com uma frequência de amostragem $f_s$ = 1*KHz*, considere a decomposição de nível 3, apresentada na figura, resultante da aplicação da Transformada de Wavelet Discreta (DWT) com a *wavelet* da família *Daubechies* de ordem 9.

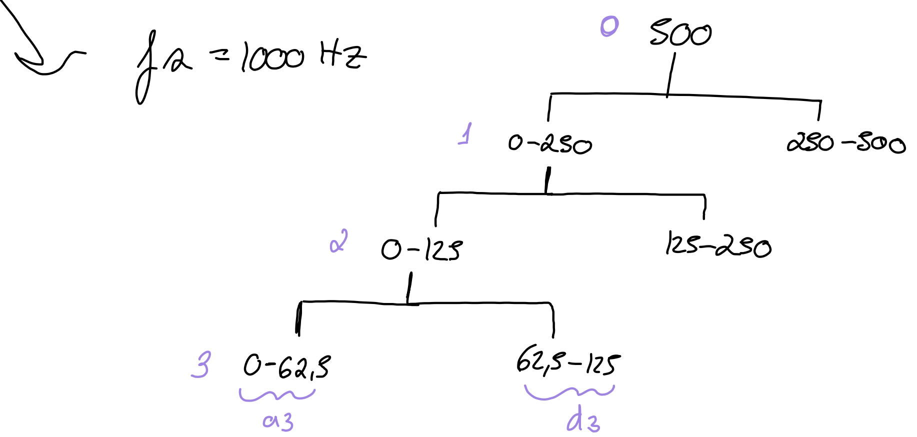



Efetue a caracterização tempo-frequência do sinal $x[n]$ a partir da reconstrução do sinal com base nos coeficientes $\mathbf{a_3}$ e $\mathbf{d_3}$, preenchendo a seguinte tabela:

| ***n*** | 0 – 499 0,5s | 500 -999 0,5s | 1000 – 1499 0,5s | 1500 -1999 0,5s |
|---|---|---|---|---|
| A partir de **d3**: | *f* ∈ [62,5 , 125 [ Hz, *C* = 1 | | | *f* ∈ [62,5 , 125 [ Hz, *C* = 1 |
| A partir de **a3**: | *f* = 0 Hz, C = 2<br>*f* = $\frac{3}{0,5}=6$ Hz, *C* = 1 | *f* = $\frac{5}{0,5}=10$ Hz, *C* = 1 | *f* = 0 Hz, C= 1 | *f* = 0 Hz, C= 2 |

8. (4%) A análise de séries temporais envolve, normalmente, um processo de decomposição da série em componentes e na obtenção de um modelo que permita fazer a previsão de valores futuros da série. Diga em que diferem os métodos AR e ARMA para a obtenção desse modelo.

| Os modelos AR são + simples e focam na regressão dos valores passados na série, enquanto os modelos ARMA combinam AR com a média móvel para capturar tanto a dependência linear quanto padrões nos choques aleatórios passados. |
|---|



Nome: ______________________________ Nº de estudante: ______________

# Rascunho

ex1

a) $T_0 = 0{,}1\,s$  $\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{0{,}1} \Leftrightarrow \omega_0 = 20\pi$

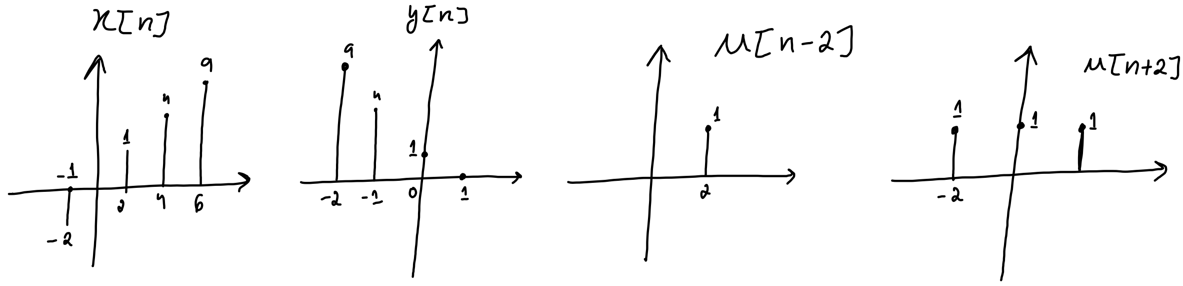
$k \times \omega_0$ , para $k = -6, -1, 0, 1, 6$  $\quad 0 \times \omega_0 = 0$ rad/s

opções todas positivas ent: $\quad 1 \times \omega_0 = 20\pi$ rad/s

$6\omega_0 = 120\pi$ rad/s

ex2 $\quad x[n] = -2\delta[n+1] + \delta[n-2] + 4\delta[n-4] + 9\delta[n-6]$

a) $y[n] = (n-1)^2\,(u[n+2] - u[n-2])$




valores não nulos para $n = \{-2, -1, 0, 1\}$

$$\begin{cases} y[-2] = x[am-b]\big|_{m=-2} = x[6] \\ y[-1] = x[am-b]\big|_{m=-1} = x[4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - b = 6 \\ -a - b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6 - 2a \\ -a + 6 + 2a = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -2 \\ a = -2 \end{cases}$$

ex6 a) $f_s = 2000$ Hz $\quad N = f_s\,\Delta t \Leftrightarrow N = 2000 \times 0{,}1 \Leftrightarrow N = 200$

$\Delta f = \frac{1}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta f = \frac{f_s}{N} \Leftrightarrow$

$\Delta f = \frac{2000}{200} \Leftrightarrow \Delta f = 10$ Hz

$m = \frac{440}{10} \Leftrightarrow m = 44$

Nome: ______________________________________________ Nº de estudante: _______________

# **Rascunho**

Nome: ____________________________________________________ Nº de estudante: _________________

# Rascunho

Nome: ______________________________________________________ Nº de estudante: _________________

# Rascunho