Análise II	
2º semestre do ano letivo 2025 — LEI-LECD, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra	
Teste modelo 1 — março 2025	
regime: nº de inscrição: nome completo: nº de aluno:	**v1**

A prova tem a duração de 90' e termina com a palavra "Fim".

Grupo I — Para cada questão deste grupo, assinale através de uma cruz na tabela ao lado qual das quatro proposições é verdadeira (existe apenas uma por questão). Cotações — resposta certa: 2.0; nenhuma ou mais do que uma proposição selecionadas: 0; resposta errada: −0.5, sendo 0 a cotação mínima neste grupo.

	1	2	3	4	5	6
A						
B						
C						
D						

I.1 A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{4n+1}-\frac{3n+3}{4n+5}\right)$

A. diverge para $-\infty$

B. converge para $\frac{3}{5}$

C. converge para $-\frac{3}{20}$

D. converge para $\frac{3}{4}$

I.2 Quais das seguintes séries convergem?

I. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}$ II. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}}$ III. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln(n^4)}\right)^n$

A. Só a I.

B. Só a II. e a III.

C. Só a II.

D. As três.

I.3 Qual das seguintes séries é convergente?

A. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2\sqrt{n}+1}$ B. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}7^n3^{1-n}$ C. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ D. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

I.4 A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{5^{n+1}}$

A. converge para 0

B. converge para $\frac{1}{7}$

C. converge para $\frac{5}{7}$

D. diverge para $-\infty$

I.5 A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-1)^3}{n!}$ é

A. absolutamente convergente

B. divergente, sem ser para $+\infty$ ou $-\infty$

C. divergente para $-\infty$

D. convergente, mas não absolutamente convergente

I.6 A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$

$\boxed{\text{A}}$ converge para e

$\boxed{\text{B}}$ converge para $\ln(e)$

$\boxed{\text{C}}$ converge para $\frac{1}{e}$

$\boxed{\text{D}}$ diverge para $+\infty$

Grupo II — Responda na folha que lhe foi fornecida, por qualquer ordem, às seguintes questões, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar, bem como as respetivas justificações.

II.1 [4 pontos] Considere a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{\left(\sqrt{\pi}\right)^{-n}}$.

1) Determine o raio de convergência R.
2) Estude a convergência da série nos pontos $x = -R$ e $x = R$.

II.2 [2 pontos] Averigue se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \ln n}$ é divergente, convergente ou absolutamente convergente.

II.3 [2 pontos] Estude a natureza da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{\sqrt{n^7+2n}}$.

Fim.

Correção

I.1 C.

I.2 B.

I.3 D.

I.4 B.

I.5 A.

I.6 D.

II.1 Sendo $a_n = n^2(\sqrt{\pi})^n$, a série de potências é dada por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

1) Como $\lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_n \frac{n^2(\sqrt{\pi})^n}{(n+1)^2(\sqrt{\pi})^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, o raio de convergência da série é $R = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

2) Se $x = R$, temos a série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$, que é divergente.

Se $x = -R$ temos a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ com $a_n = (-1)^n n^2$. Como (a_n) não converge para 0 quando $n \to \infty$, deduzimos que a série diverge.

3) Trata-se de uma série geométrica de razão $x\sqrt{\pi}$, logo é convergente se e só se $|x\sqrt{\pi}| < 1$, ou seja, $|x| < \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. O domínio da série é $]-\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}[$.

II.2 Sejam $u_n = \frac{(-1)^n}{n + \ln n}$ e $v_n = \frac{1}{n}$. Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_n|}{v_n} = 1$ e a série de termo geral v_n é divergente, deduzimos que a série de termo geral u_n não é absolutamente convergente.
Por outro lado, a sucessão $(|u_n|)$ é decrescente, com limite 0, logo, pelo critério de Leibniz, a série alternada de termo geral u_n é convergente.

II.3 Seja $u_n = \dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^7+2n}}$ o termo geral da série e consideremos a série de Riemann de termo geral $v_n = n^{-3/2}$, que é convergente porque $-3/2 < -1$.
Como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

as duas séries são de mesma natureza e concluímos que a série de termo geral u_n é convergente.