Determinantes

- Um número é invertível se e só se for não nulo. Assim, uma matriz 1×1 é invertível se e só se for não nula.

- Será possível associar a cada matriz quadrada um número que nos permita decidir da sua invertibilidade?

Sim!

Analisemos o caso 2×2.

A matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ é invertível se e só se for não-singular (i.e. se e só se $car(A) = 2$).

Suponhamos que $a_{11} \neq 0$.

Então

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \underset{L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} \end{bmatrix}$$

Mas $car(A) = 2$ se e só se $a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} \neq 0$ se e só se

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

(Se $a_{11} = 0$ então facilmente se vê que $car(A) = 2$ se e só se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.)

A matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ é invertível se e só se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

Exemplos

A matriz $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ é invertível pois

$5 \times (-1) - 4 \times 1 = -5 - 4 = -9 \neq 0.$

A matriz $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$ não é invertível pois

$2 \times 12 - 4 \times 6 = 24 - 24 = 0.$

Ao número

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

construído a partir de elementos da matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

e que nos diz se A é ou não invertível, chamamos

determinante de A

e escrevemos

$$det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Esta função (a função determinante com domínio $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$) satisfaz várias propriedades que servem de motivação para a definição de determinante de uma matriz $n \times n$.

Propriedades:

1. $det \begin{bmatrix} a_{11}+a_{11}^{'} & a_{12}+a_{12}^{'} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} a_{11}^{'} & a_{12}^{'} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

   (analogamente para a segunda linha)

2. Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$det \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \alpha \cdot det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

   (analogamente para a segunda linha)

3. Se as duas linhas de A forem iguais então $det(A) = 0$.

4. $det(I_2) = 1$

Exemplos

1. $$det \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c & d \end{bmatrix} = (a+x)d-(b+y)c = ad+xd-bc-yc = (ad-bc)+(xd-yc) = det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} x & y \\ c & d \end{bmatrix}$$

2. $$det \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{bmatrix} = 2ad-2bc = 2(ad-bc) = 2det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

3. $$det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 3-3 = 0$$

4. $$det(I_2) = det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1-0 = 1$$

O estudo do caso das matrizes 2×2 motiva a seguinte definição para matrizes $n \times n$

Determinante de ordem n é uma função

$$\begin{array}{rccc} det: & M_{n\times n}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & det(A) \end{array}$$

que a cada matriz quadrada A de ordem n sobre $\mathbb{R}$ faz corresponder um número real, $det(A)$, de tal modo que as seguintes quatro condições sejam satisfeitas:

(d1) Para $i = 1, \ldots, n$ tem-se:

$$det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + L_i' \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i' \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}.$$

(d2) Para $i = 1, \ldots, n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \alpha L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \alpha\, det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}.$$

(d3) Se A tiver duas linhas iguais, tem-se $det(A) = 0$.

(d4) $det(I_n) = 1$

Teorema

Existe uma única função determinante de ordem n.

O determinante de A denota-se $det(A)$ ou, alternativamente, $|A|$.

Teorema

Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então tem-se:

1. Se uma linha de A for múltipla de outra, então $det(A) = 0$. Se A tiver uma linha nula então $det(A) = 0$.
2. O determinante não se altera se a uma linha de A adicionarmos um múltiplo de outra linha de A.
3. O determinante muda de sinal quando se trocam entre si duas linhas de A.
4. Se P for uma matriz de permutação, tem-se $det(P) = 1$ ou $det(P) = -1$.

$n = 2$

$$det(A) = det \left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemplo

$$det \left[\begin{array}{cc} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{array} \right] = 4 \times 2 - 5 \times 1 = 8 - 5 = 3$$

$n = 3$

$$det(A) = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Esta fórmula é facilmente obtida usando a *Regra de Sarrus*.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = 1 \times (-1) \times 5 + 3 \times 0 \times 4 + 2 \times 6 \times (-3) -$$
$$(3 \times (-1) \times (-3) + 1 \times 6 \times 4 + 2 \times 0 \times 5) =$$
$$= -5 + 0 - 36 - (9 + 24 + 0) = -41 - 33 = -74$$

Teorema

Seja A uma matriz triangular. Então o determinante de A é igual ao produto dos seus elementos diagonais.

Exemplos

$$det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 2 \times 4 = 8 \qquad det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 3 \times 6 = 18$$

$$det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 3 \times 1 \times 4 = 12$$

$$det \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = 4 \times (-2) \times (-1) \times 2 = 16$$

Teorema

Seja A uma matriz quadrada. Seja U a matriz que se obtém de A aplicando-lhe o algoritmo de eliminação de Gauss. Então tem-se $det(A) = det(U)$ ou $det(A) = -det(U)$.

Exemplos

$$det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} L_2 - L_1 \\ = \\ L_3 - L_1 \end{array} det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 1 \times 1 \times 3 = 3$$

Exemplo

$$det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_3 - L_1}{\overset{L_2 - 2L_1}{=}} det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=}$$

$$= -det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = -[1 \times (-3) \times (-5)] = -15$$

Seja A quadrada. Então A é invertível se e só se $det(A) \neq 0$.

Demonstração

Sabemos que $det(A) = \pm det(U)$.

Como U é triangular, $det(U)$ é igual ao produto dos seus elementos diagonais.

Se A for não-singular (que é equivalente a ser invertível), esses elementos diagonais de U são os n pivots, e portanto $det(U) \neq 0$.

Se A for singular, U tem pelo menos um elemento diagonal nulo e portanto $det(U) = 0$.

Teorema

Sejam A e B matrizes $n \times n$ quaisquer. Então

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Corolário

Seja A quadrada invertível. Então

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}.$$

Teorema

Seja A uma matriz quadrada. Então

$$det(A^T) = det(A).$$

Pelo facto de $det(A^T) = det(A)$ podemos concluir que todas as propriedades dos determinantes que são válidas para linhas são também válidas para colunas.

Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Chama-se **complemento algébrico** de um elemento a_{ij} a $(-1)^{i+j}det(A_{ij})$, onde A_{ij} designa a submatriz obtida suprimindo a linha i e a coluna j.

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

O complemento algébrico do elemento 5 (elemento na posição $(4,2)$) é

$$(-1)^{4+2}det(A_{42}) = (-1)^6 det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= 1(0+0+2-0-0-2) = 0$$

Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz quadrada é igual à soma dos produtos dos elementos de qualquer linha pelos respetivos complementos algébricos, isto é, sendo $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, tem-se

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} det(A_{ij}),$$

para qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$.

O mesmo vale para colunas, ou seja

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} det(A_{ij}),$$

para qualquer $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Exemplo

Calculemos o seguinte determinante usando o Teorema de Laplace (segundo a terceira linha, pois é a que tem mais zeros).

$$det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$-1 \times det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} - 0 \times det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} +$$

$$6 \times det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} - 0 \times det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -1 \times 11 + 6 \times 2 = 1$$

Regra de Cramer

Seja A uma matriz $n \times n$ invertível. Dado o sistema

$$Ax = b,$$

a sua solução (única) é a matriz-coluna cujos elementos são os quocientes

$$\frac{det(A(i))}{det(A)}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

onde $A(i)$ é a matriz que se obtém de A substituindo a coluna i por b.

Exemplo

Calculemos a solução do sistema $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 = -2 \end{cases}$

$$x_1 = \frac{det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{-16}{4} = -4$$

A solução do sistema é a coluna $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$.