ESTATÍSTICA

LEI e LECD

Ano letivo: 2023/2024 **Folha 6**

III.2 Estimação Pontual

1. Relativamente aos dados do exercício 2 da Folha 5, determine

a) uma estimativa cêntrica do número médio de doentes atendidos diariamente;

b) uma estimativa cêntrica da variância do número de doentes atendidos diariamente;

c) uma estimativa cêntrica da proporção de dias em que são atendidos mais de 13 doentes.

2. Relativamente aos dados do exercício 3 da Folha 5, determine

a) estimativas cêntricas da média e da variância da duração das chamadas telefónicas;

b) uma estimativa cêntrica da proporção de chamadas que duram mais de 40 segundos.

3. O tempo, expresso em minutos, que um funcionário demora a executar determinada tarefa é descrito por uma variável aleatória real contínua, X, com distribuição exponencial de parâmetro $\frac{1}{\alpha}$, com $\alpha > 0$, desconhecido. Nestas condições, tem-se $E\left(X^k\right) = k!\alpha^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Seja $(X_1, ..., X_n)$ uma amostra aleatória de X, de dimensão n, $n \in \mathbb{N}$.

a) Mostre que $T_{k,n} = \frac{1}{k!\,n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^k$ é um estimador cêntrico de α^k, $k \in \mathbb{N}$.

b) Deduza estimadores cêntricos da média e da variância do tempo de execução da tarefa.

c) Escolheram-se, ao acaso, 70 tempos de execução da tarefa pelo referido funcionário, $(x_1, x_2, ..., x_{70})$, tendo-se constatado que $\sum\limits_{i=1}^{70} x_i = 210$ e $\sum\limits_{i=1}^{70} x_i^2 = 1330$.
Determine estimativas cêntricas da média e da variância do tempo que o funcionário leva a executar a tarefa.

4. A quantidade de informação, em unidades u, gerida diariamente por uma empresa que disponibiliza acesso à internet é bem modelada por uma variável aleatória real gaussiana, X, de média m e desvio padrão σ. A fim de estimar estes parâmetros, a empresa observou a quantidade de informação gerida durante 25 dias, escolhidos ao acaso. A média e a variância da amostra observada foram 10.08 u e 7.8 u^2, respetivamente. Usando o método dos momentos, determine estimativas para

a) m e σ; **b)** o percentil 95 de X; **c)** $P\left(X > 7\right)$.

5. A duração, expressa em milhares de horas, de certo tipo de lâmpadas produzidas por uma fábrica é representada por uma variável aleatória contínua, X, com função densidade dada por

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < \theta \\ \dfrac{4\theta^4}{x^5}, & x \geq \theta \end{cases},$$

onde θ é um número real positivo desconhecido.

a) Verifique que $E\left(X\right) = \frac{4}{3}\theta$ e $V\left(X\right) = \frac{2}{9}\,\theta^2$.

b) Sendo $(X_1, ..., X_n)$ uma amostra aleatória de X, construa, usando o método dos momentos, estimadores para θ e para a duração mediana das lâmpadas. Serão cêntricos?

c) Da produção da fábrica em determinada semana recolheu-se uma amostra de 100 lâmpadas daquele tipo e registou-se a duração de cada uma. A média e o desvio padrão dos valores observados foram, respetivamente, 38 e 13.56 milhares de horas. Indique estimativas cêntricas de $E(X)$, $V(X)$, θ e Md.

6. Supõe-se que o número de tentativas até se conseguir o acesso a uma página muito popular da internet é descrito por uma v.a.r. X, discreta, com função de probabilidade da forma

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta(1-\theta)^{x-1}, & x \in \mathbb{N} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N} \end{cases},$$

com $\theta \in]0,1[$, desconhecido. Nestas condições, tem-se $E(X) = \frac{1}{\theta}$. Foram observados 100 acessos à referida página, aleatoriamente escolhidos, tendo-se registado para cada um o número de tentativas até se conseguir aceder. Os dados obtidos encontram-se resumidos no quadro seguinte.

Número de tentativas	1	2	3	4	5
Frequência absoluta	32	24	20	14	10

Usando o método dos momentos, determine uma estimativa para a probabilidade de serem necessárias 2 tentativas até se conseguir o acesso.

7. Seja X uma variável aleatória real seguindo uma lei uniforme num intervalo $[0,b]$, onde b é um parâmetro real positivo, desconhecido. Nestas condições, tem-se $E(X) = \frac{b}{2}$ e $V(X) = \frac{b^2}{12}$.

a) Seja $(X_1, ..., X_n)$ uma amostra aleatória de X, de dimensão n. Verifique que o estimador $T_n = \frac{1}{3}\overline{X}_n^2$ é assintoticamente cêntrico de $V(X)$ e deduza, a partir dele, um estimador cêntrico de $V(X)$.

b) Foi observada uma amostra de X de dimensão 25 cuja média é 3.16. Indique estimativas cêntricas do valor médio e da variância de X.

Soluções[1]: **1.a)** 13.733 **b)** 6.340 **c)** 0.6 **2.a)** 4.84, 3.691 **b)** 0.7 **3.b)** $T_{1,n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $T_{2,n}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ **c)** 3, 9.5 **4.a)** 10.08, 2.79 **b)** 14.674 **c)** 0.8643 **5.b)** $T_{1,n} = \frac{3}{4n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $T_{2,n} = \frac{3\sqrt[4]{2}}{4n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Sim. **c)** 38, 185.73, 28.5, 33.89 **6.** 0.24 **7.a)** $\frac{n}{3n+1}\overline{X}_n^2$ **b)** 3.16, 3.28

[1] A resolução completa dos problemas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação de todos os cálculos efetuados.