Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Análise Matemática II (ano letivo 2018/2019 - 2.º semestre)

Licenciatura em Engenharia Informática

04.06.2019 Segunda Frequência Duração: 1h30

1. Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$ e f uma função analítica em $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$, com $R > 0$. Suponhamos que z_0 é um pólo de ordem 2 de f. Demonstre que o resíduo de f em z_0 é dado por

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz}\left[(z - z_0)^2 f(z)\right].$$

2. (a) Determine a representação em série de Laurent de potências de $z+1$ para a função f definida por

$$f(z) = \frac{1}{(-z-1)^9(z+3)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{-3, -1\},$$

na região $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < R\}$, indicando o maior valor possível para R.

(b) Determine, por definição, o resíduo de f em $z = -1$.

3. Usando Transformadas de Laplace, determine, para $t \geq 0$, a solução da seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 4x(t) = e^{-t}t$$

sujeita às condições iniciais $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$.

Sugestão: $\dfrac{1}{(s+1)^2(s^2+4)} = \dfrac{2}{25}\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{A}{(s+1)^2} - \dfrac{1}{25}\dfrac{2s+3}{s^2+4}$, com A uma constante a determinar.

4. (a) Sendo $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s-1)^2}$, determine uma função causal f tal que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, usando o Teorema da Convolução.

(b) Utilizando a transformada de Laplace, resolva para $t \geq 0$ a equação diferencial seguinte, satisfazendo as condições iniciais especificadas:

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) - 2\frac{dy}{dt}(t) + y(t) = e^{-(t-4)}H(t-4), \quad y(0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 0.$$

5. (a) Seja $\{x_k\}_{k=0}^{+\infty}$ uma sucessão causal tal que $\mathcal{Z}\{x_k\} = X(z)$, $|z| > R$. Prove que

$$\mathcal{Z}\{x_{k+2}\} = z^2 X(z) - z^2 x_0 - z\, x_1, \quad |z| > R.$$

(b) Usando a fórmula de inversão, determine a transformada-z inversa da função definida pela expressão analítica

$$X(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)(z-1)^2}, \; |z| > 2.$$

(c) Resolva, pelo método da transformada-z, o problema

$$x_{k+2} + 3x_{k+1} + 2x_k = k \; (k \geq 0), \; x_0 = 0, \; x_1 = 0.$$