Matrizes

Matriz

Uma **matriz** do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ (ou sobre $\mathbb{C}$) é um quadro que se obtém dispondo mn números – os **elementos** da matriz – segundo m linhas e n colunas.

Dizemos que uma matriz é **real** ou **complexa** consoante os seus elementos são números reais ou complexos, respetivamente. Representamos o conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Usamos a notação $\mathbb{R}^m$ para $M_{m\times 1}(\mathbb{R})$.

Exemplo de matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}), B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e $c \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$(ou $c \in \mathbb{R}^3$)

Uma matriz A do tipo $m \times n$ é usualmente representada na forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou

$$A = \left[\ a_{ij} \ \right]_{m \times n}$$

ou

$$A = \left[\ a_{ij} \ \right]_{i=1,\ldots,m \ ; \ j=1,\ldots,n}$$

ou ainda, simplesmente

$$A = \left[\ a_{ij} \ \right]$$

caso se subentenda o tipo da matriz.

Se A for uma matriz do tipo $m \times n$, então o número

$$a_{ij}$$

é o elemento de A situado na **linha** i e **coluna** j, com $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$. Assim,

i diz-se o **índice de linha**
j diz-se o **índice de coluna**

do elemento a_{ij}.

O elemento a_{ij} é referido como o elemento de A na posição (i, j), ou por elemento (i, j) de A.

Dizemos que as matrizes $A = \left[\ a_{ij} \ \right]_{m\times n}$ e $B = \left[\ b_{k\ell} \ \right]_{p\times q}$ são **iguais** sse

$$\begin{cases} m = p \\ n = q \end{cases} \qquad \text{e} \qquad a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, ..., m; \ \ j = 1, ..., n.$$

i.e. sempre que sejam do mesmo tipo ($m = p$ e $n = q$), e tenham elementos iguais em posições iguais, ($a_{ij} = b_{ij}$, para cada $i = 1, \cdots, m, \ j = 1, \cdots, n$).

Exemplo

$$\text{Sejam } A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & b \end{bmatrix}.$$

As matrizes A e B são iguais se $a = 2$ e $b = -1$.

Uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ diz-se **quadrada de ordem** n se $m = n$.

Uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ diz-se **retangular** se $m \neq n$.

Exemplos

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ é quadrada de ordem 3.

A matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ é retangular.

Os **elementos diagonais** de uma matriz quadrada $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ são

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}.$$

A sequência ordenada

$$(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$

constituída por estes elementos diz-se a **diagonal principal** de A.

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 9 & 9 \\ 5 & -5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Os elementos diagonais de A são $1, 0, 6, 4$ e a sua diagonal principal é $(1, 0, 6, 4)$.

Seja $B = [b_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
B diz-se **triangular superior** se $b_{ij} = 0$, para $i > j$.
B diz-se **triangular inferior** se $b_{ij} = 0$, para $i < j$.
B diz-se **diagonal** se $b_{ij} = 0$, para $i \neq j$.

Exemplos

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ é triangular superior.

A matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ é triangular inferior.

A matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ é diagonal.

A **matriz identidade** de ordem n, I_n, é a matriz diagonal, de ordem n, com os elementos diagonais iguais a 1,

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Se a ordem da matriz estiver clara a partir do contexto, usamos simplesmente I.

Exemplos

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A **matriz nula** $m \times n$ é a matriz $m \times n$ cujos elementos são todos iguais a zero.

Representa-se por $0_{m\times n}$ ou simplesmente 0 se o tipo da matriz estiver claro a partir do contexto.

Exemplos

$$0_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, define-se $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$.

Exemplo

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \text{ então } -A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

Sendo A uma matriz, uma **submatriz** de A é uma matriz que se obtém por supressão de linhas e/ou colunas de A.

Exemplos

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

As matrizes $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ são submatrizes de A.

Sejam $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), B = [b_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se:

1. $A + B$ como sendo a matriz do tipo $m \times n$ cujo elemento (i, j) é $a_{ij} + b_{ij}$. Assim, $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$.
2. αA como sendo a matriz do tipo $m \times n$ cujo elemento (i, j) é αa_{ij}. Assim, $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}$.

Exemplos

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$. Então

$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$, $4A = \begin{bmatrix} 4 & -20 \\ 8 & 0 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$ e $\frac{1}{2}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Teorema

Sejam A, B e C matrizes arbitrárias em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então tem-se:

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$ (associatividade da adição)
2. $A+B = B+A$ (comutatividade da adição)
3. $A+0_{m\times n} = 0_{m\times n}+A = A$ (a matriz nula é o elemento neutro da adição)
4. $A+(-A) = (-A)+A = 0_{m\times n}$ ($-A$ é o elemento simétrico ou oposto de A)

Teorema

Sejam A e B matrizes arbitrárias em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então tem-se:

1. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
2. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
4. $1A = A$

Sendo $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B = [b_{ij}] \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, define-se AB como sendo a matriz do tipo $m \times p$ cujo elemento (i, j) é

$$a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj}.$$

Assim,

$$AB = \left[\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}\ \right]_{m\times p}.$$

A matriz produto AB da matriz A pela matriz B só está definida se o número de colunas da A for igual ao número de linhas de B.

1. O número de *linhas* da matriz produto AB é igual ao número de linhas de A.
2. O número de *colunas* da matriz produto AB é igual ao número de colunas de B.

O elemento (i,j) de AB obtém-se a partir da linha i de A e da coluna j de B:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots & b_{1j} & \dots \\ \dots & b_{2j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & b_{nj} & \dots \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \dots + a_{in}\, b_{nj} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

1. Para cada $i = 1, \dots, m$, a linha i de AB obtém-se multiplicando a linha i de A pela matriz B.
2. Para cada $j = 1, \dots, p$, a coluna j de AB obtém-se multiplicando a matriz A pela coluna j de B.

Para A e B duas matrizes observamos que:

1. O produto AB pode estar definido sem que BA esteja.
2. Mesmo que AB e BA estejam ambos definidos, não implica que $AB = BA$.
3. Se $AB = BA$, dizemos que as duas matrizes **comutam**.

Teorema

Sejam $A, A' \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B, B' \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$ matrizes arbitrárias e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então tem-se:

1. $A0_{n\times p} = 0_{m\times p}$, $0_{r\times m}A = 0_{r\times n}$, $AI_n = I_mA = A$.
2. $(AB)C = A(BC)$ (associatividade da multiplicação).
3. $A(B + B') = AB + AB'$, $(A + A')B = AB + A'B$ (distributividade do produto em relação à adição).
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
5. $AB = 0 \not\Rightarrow (A = 0$ ou $B = 0)$.
6. $(AB = AB'$ e $A \neq 0) \not\Rightarrow B = B'$ e também $(AB = A'B$ e $B \neq 0) \not\Rightarrow A = A'$.
7. A multiplicação de matrizes não é comutativa.

Teorema

Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e designe-se por v_j a coluna j de A, $j = 1, \ldots, n$. Dada a matriz-coluna

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

tem-se $Ax = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n$.

Nas condições do teorema, dizemos que Ax é uma **combinação linear** das colunas de A.

Demonstração

$$
\begin{aligned}
Ax &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n}x_n \\ a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

$$= x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$$

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A é **invertível** se existir uma matriz X, quadrada de ordem n, tal que $AX = XA = I_n$.

Teorema

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então existe no máximo uma matriz de ordem n tal que $AX = XA = I_n$.

Demonstração

Sejam X e Y matrizes quadradas de ordem n tais que
$AX = XA = I_n$ e $AY = YA = I_n$.
Assim, $X = I_nX = (YA)X = Y(AX) = YI_n = Y$.
Logo, existe no máximo uma matriz X nas condições do Teorema.

Nas condições do Teorema, X diz-se a **inversa** de A e representa-se por A^{-1}.

Exemplo

A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é invertível, sendo a sua inversa a matriz $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, uma vez que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplos

1. A matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ não é invertível, pois para qualquer matriz X de ordem 3, a matriz produto AX tem a segunda linha nula, logo AX não poderá ser a matriz I_3.
2. A matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ não é invertível, pois para qualquer matriz X de ordem 3, a matriz produto XB tem a terceira coluna nula, logo XB não poderá ser a matriz I_3.

Teorema

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n invertíveis. Então AB é invertível e tem-se $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demonstração

Como $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$
e $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$
então concluímos que AB é invertível e a sua inversa é $B^{-1}A^{-1}$.

Dada uma matriz do tipo $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

define-se a **transposta** da A como sendo a matriz do tipo $n \times m$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ou seja: o elemento (i, j) de A^T é o elemento (j, i) de A, para $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$.

Exemplos

A transposta da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ é a matriz } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e a transposta da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ é a matriz } B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Uma matriz A diz-se **simétrica** se $A = A^T$.

Exemplos

1. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ é simétrica.
2. A matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ não é simétrica, pois os elementos nas posições $(2,3)$ e $(3,2)$ não são iguais.

A transposição de matrizes goza das seguintes propriedades:

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, qualquer que seja o número α;
4. $(AB)^T = B^T A^T$;
5. $(A^k)^T = (A^T)^k$, qualquer que seja o número natural k;
6. Se A for invertível, A^T também é, tendo-se $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Demonstração 6

Como $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$ e $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n$, concluímos que A^T é invertível e que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Uma matriz quadrada diz-se **ortogonal** se for invertível e a sua inversa coincidir com a sua transposta (i.e. $A^{-1} = A^T$).

Exemplo

A matriz $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ é ortogonal pois $B^{-1} = B^T$

(uma vez que $BB^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

e $B^T B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$).

1. O produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.
2. A inversa de uma matriz ortogonal é uma matriz ortogonal.

Demonstração

1. Sejam A e B matrizes ortogonais de ordem n. Então $A^{-1} = A^T$ e $B^{-1} = B^T$. Assim,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T,$$

   i.e. AB é ortogonal.

2. Seja A uma matriz ortogonal de ordem n. Então $A^{-1} = A^T$. Assim,

$$(A^{-1})^{-1} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T,$$

   i.e. A^{-1} é ortogonal.

Uma classe especial das matrizes ortogonais são as matrizes de permutação.

Uma matriz quadrada de ordem n diz-se uma **matriz de permutação** se tiver as mesmas linhas que a matriz identidade I_n mas não necessariamente pela mesma ordem.

Exemplos

As matrizes $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ são matrizes de permutação.

Toda a matriz de permutação é ortogonal.

Operações elementares:

1. Substituição de uma linha da matriz pela sua soma com um múltiplo de outra linha.
2. Troca entre si de duas linhas da matriz.
3. Multiplicação de uma linha da matriz por um número diferente de zero.

Chama-se **matriz elementar** de ordem n a toda a matriz que se obtém de I_n por aplicação de uma operação elementar às suas linhas.

Obtemos assim três tipos de matrizes elementares de ordem n.

1. Para $i \neq j$ (por exemplo, $i < j$) e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos a matriz

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \text{linha } i \\ \text{coluna } j & \end{array}$$

A matriz $E_{ij}(\alpha)$ obtém-se da matriz identidade de ordem n, I_n, adicionando à linha i a linha j previamente multiplicada por α.

Exemplos

Exemplos de matrizes elementares de ordem 3:

$$E_{23}(4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_{31}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$E_{21}(6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplos de matrizes elementares de ordem 4:

$$E_{41}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_{23}(-5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Para $i \neq j$

$$P_{ij} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{linha } i \\ \\ \text{linha } j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

A matriz P_{ij} obtém-se de I_n trocando entre si a linha i com a linha j.

As matrizes P_{ij} são matrizes de permutação especiais, obtidas de I_n por troca de **apenas** duas linhas.

Exemplos

Exemplos de matrizes elementares de ordem 3:

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplos de matrizes elementares de ordem 4:

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } P_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3 Para $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ e $1 \leq i \leq n$ temos

$$\begin{array}{cc} D_i(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \text{linha } i \\ \text{coluna } i & \end{array}$$

A matriz $D_i(\alpha)$ obtém-se de I_n multiplicando a linha i por α.

Exemplos

Exemplos de matrizes elementares de ordem 3:

$$D_1(3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; D_2(-4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$D_3(\tfrac{5}{4}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

Exemplos de matrizes elementares de ordem 4:

$$D_2(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D_4(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Sejam $A \in M_{m \times n}, i \neq j$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então tem-se:

1. $E_{ij}(\alpha)A$ é a matriz que se obtém de A adicionando à linha i a linha j previamente multiplicada por α.
2. $P_{ij}A$ é a matriz que se obtém de A trocando a linha i com a linha j.
3. $D_i(\alpha)A$ é a matriz que se obtém de A multiplicando a linha i por α.

Exemplos

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Tem-se $E_{31}(2)A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$, $P_{13}A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e

$D_3(10)A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 70 & 80 & 90 \end{bmatrix}$.

Sejam $A \in M_{m\times n}, i \neq j$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então tem-se:

1. $AE_{ij}(\alpha)$ é a matriz que se obtém de A adicionando à coluna j a coluna i previamente multiplicada por α.
2. AP_{ij} é a matriz que se obtém de A trocando a coluna i com a coluna j.
3. $AD_i(\alpha)$ é a matriz que se obtém de A multiplicando a coluna i por α.

Exemplos

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Tem-se $AE_{31}(2) = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 16 & 5 & 6 \\ 25 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $AP_{13} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ e

$AD_3(10) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 30 \\ 4 & 5 & 60 \\ 7 & 8 & 90 \end{bmatrix}$.

As matrizes elementares $E_{ij}(\alpha)$,P_{ij} e $D_i(\beta)$, onde $\beta \neq 0$, são invertíveis e tem-se

- $(E_{ij}(\alpha))^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$
- $(P_{ij})^{-1} = P_{ij}$
- $(D_i(\beta))^{-1} = D_i(\frac{1}{\beta})$

Exemplos

$(E_{23}(4))^{-1} = E_{23}(-4)$

$(P_{12})^{-1} = P_{12}$

$(D_3(5))^{-1} = D_3(\frac{1}{5})$