FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Análise Matemática III (1.° Semestre)

Departamento de Matemática

Licenciatura em Engenharia Informática

Ano Letivo 2023/2024 — Frequência — 12.01.2024 — Duração: $1h\ 30mn$

1. (a) Desenvolva em série de Laurent de potências de $z+3$ a função f definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z+3)^{2024}(z-4i)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{-3, 4i\},$$

na região $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+3| < R\}$, indicando o maior valor possível para R.

(b) Seja γ a circunferência centrada em $z_0 = -2$ e de raio 2, com a orientação positiva, e considerada como um caminho simples e fechado. Determine, justificando,

$$\oint_\gamma \frac{1}{(z+3)^{2024}(z-4i)}\, dz.$$

2. (a) Usando a fórmula de inversão, determine a transformada-z inversa da função definida pela expressão analítica

$$X(z) = \frac{z}{(z^2+4)(z-2)^2}\ , \ |z| > 2,$$

apresentando o resultado na forma algébrica (isto é, na forma $a+ib$).

(b) Usando a alínea anterior, determine, justificando os passos intermédios, a solução de

$$x_{k+2} - 4x_{k+1} + 4x_k = 2^k \sin(k\frac{\pi}{2})\ (k \geq 0),\ x_0 = 0,\ x_1 = 0.$$

3. (a) Determine

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2(s-1)}\right\},$$

usando o Teorema da Convolução, onde $\mathcal{L}^{-1}$ representa o operador Transformada inversa de Laplace.

(b) Sabendo que $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, determine, recorrendo à transformada de Laplace, a solução da equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) - y(t) = e^{-t},\ t \geq 0.$$

(v.s.f.f.)

Correção posterior da questão 2b) a vermelho.

4. Seja $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um sinal periódico com frequência circular $\omega = 2\, rad/s$, definido em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ por

$$v(t) = t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

(a) Determine a série de Fourier de v na forma complexa.

(b) Represente graficamente a função definida pela série de Fourier anterior no intervalo $[-\pi, 2\pi]$.

(c) Determine a expressão analítica da função soma da série de Fourier em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$.

5. Determine a transformada de Fourier da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) := e^{-|t|} H(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, onde H é a função de Heaviside.