Departamento de Matemática da FCTUC

Análise Matemática I — LECD e LEI — Exame de recurso, 30.01.23.

Sem tabelas nem calculadoras. Justifique bem as suas respostas. Duração: 2h30m.

---

1. **[1,75 val.]** Calcule, justificando, $\sin(\arccos(1/5))$.

Solução: Seja $\theta = \arccos(1/5)$. Pela definição da função $\arccos$, sabemos que $\theta \in [0, \pi]$ e $\cos(\theta) = 1/5$. Por outro lado, pela fórmula fundamental da trigonometria, $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$. Se $\theta \in [0, \pi]$ então $\sin(\theta) \geqslant 0$, pelo que da equação anterior, deduz-se que $\sin(\arccos(1/5)) = \sin(\theta) = +\sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

2. **[3,0 val.]** Seja $f(x) = -x + \arcsin\left(1 - \frac{1}{|x|}\right)$.

(a) Calcule o domínio de $f(x)$.

(b) Calcule o valor máximo e o valor mínimo de f no intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$.

(c) Calcule a derivada, no ponto $y_0 = -2 + \frac{\pi}{6}$, da função inversa da restrição de f a $[1, 3]$.

Solução: (a) Como o domínio de $\arcsin$ é $[-1, 1]$, temos $D_f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leqslant 1 - \frac{1}{|x|} \leqslant 1 \ \wedge \ x \neq 0\}$. Há-que resolver $1 - \frac{1}{|x|} \leqslant 1 \wedge 1 - \frac{1}{|x|} \geqslant -1 \wedge x \neq 0$. A primeira inequação é equivalente a $\frac{1}{|x|} \geqslant 0$, que se verifica para todo o x. Já quanto à segunda inequação temos

$$1 - \frac{1}{|x|} \geqslant -1 \iff \frac{1}{|x|} \leqslant 2 \overset{|x|>0}{\iff} |x| \geqslant \frac{1}{2} \iff x \in]-\infty, -\tfrac{1}{2}] \cup [\tfrac{1}{2}, +\infty[.$$

Assim, $D_f =]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$.

(b) Dado que a restrição de f ao intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$, que é dada por $f(x) = -x + \arcsin\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ (pois $|x| = x$ em $[\frac{1}{2}, 2]$), é uma função contínua neste intervalo e diferenciável no interior deste, os seus valores máximo e mínimo são atingidos em pontos que ou são zeros da derivada ou são extremos do intervalo. Comecemos por determinar a expressão da derivada de f. Temos:

$$f'(x) = -1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)'}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2}} = -1 + \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}}.$$

Os zeros da derivada são então os valores de $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ tais que

$$1 = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}} \implies 1 = \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} \iff 1 = \frac{1}{2x^3 - x^2} \implies 2x^3 - x^2 = 1 \iff (2x^2 + x + 1)(x - 1) = 0.$$

Ora, como a quadrática em cima não tem zeros e $x = 1$ anula a derivada, deduz-se que o *único* zero da derivada de f em $]\frac{1}{2}, 2[$ é $x = 1$. Assim, os pontos de interesse para a determinação do valor máximo e valor mínimo de f no intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$ são $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ e $x = 2$. Temos:

$$f(\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{2} + \arcsin(1 - 2) = -1 - \tfrac{\pi}{2}, \quad f(1) = -1 + \arcsin(1 - 1) = -1,$$
$$f(2) = -2 + \arcsin(1 - \tfrac{1}{2}) = -2 + \tfrac{\pi}{6}.$$

Como $-2 + \frac{\pi}{6} < -1 \iff \pi < 6$ e $-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} < -2 + \frac{\pi}{6} \iff -6 - 3\pi < -12 + \pi \iff 6 < 2\pi$ temos $-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} < -2 + \frac{\pi}{6} < -1$. Logo o máximo f em $[\frac{1}{2}, 2]$ é -1 e o mínimo é $-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}$.

(c) A solução da equação $y = -2 + \frac{\pi}{6} \iff -x + \arcsin\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ no intervalo $[1, 3]$ é, por inspeção, $x = 2$, pois $\arcsin(1/2) = \frac{\pi}{6}$. Denotemos a inversa da restrição de f ao intervalo $[1, 3]$ por g. Sabemos que

$g'(-2+\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{f'(2)}$. Aproveitando o cálculo da expressão da derivada de f feito na alínea anterior, que é válido para todo $x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$ e logo, em particular, em $x = 2$, deduz-se que

$$g'(-2+\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{-1+\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}} = \frac{2}{-2+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}.$$

3. **[1,75 val.]** Calcule, justificando, $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x) + \pi \ln(x)}{(x-1)^2}$.

Solução: Temos: $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)+\pi \ln(x)}{(x-1)^2} \overset{\frac{0}{0},\text{RH}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\pi\cos(\pi x)+\frac{\pi}{x}}{2(x-1)} \overset{\frac{0}{0},\text{RH}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\pi^2\sin(\pi x)-\frac{\pi}{x^2}}{2} = -\frac{\pi}{2}$.

4. **[3,0 val.]** Calcule as primitivas das funções seguintes:

(a) $\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x^2)$; (b) $\dfrac{x^2+4x+1}{x^3-2x^2+x}$.

Solução: (a) Usemos primitivação por partes. Temos:

$$\int \tfrac{1}{x^2}\ln(1+x^2)\,dx \overset{\text{PpP}}{=} -\tfrac{1}{x}\ln(1+x^2) - \int(-\tfrac{1}{x})\tfrac{2x}{1+x^2}\,dx$$
$$= -\tfrac{\ln(1+x^2)}{x} + 2\int \tfrac{1}{1+x^2}\,dx = -\tfrac{\ln(1+x^2)}{x} + 2\arctan(x) + C.$$

(b) Usemos o método de primitivação de frações racionais. Como a fração dada é uma fração própria, não é necessário efetuar a divisão de polinómios. O denominador tem fatorização $x^3-2x^2+x = x(x-1)^2$. Atendendo à raíz de multiplicidade 2, procuramos uma decomposição em elementos simples da forma:

$$\tfrac{x^2+4x+1}{x(x-1)^2} = \tfrac{A}{x} + \tfrac{B_1}{(x-1)^2} + \tfrac{B_2}{(x-1)}.$$

Usando a "*regra do tapa*" obtem-se $A = 1$ e $B_1 = 6$. Substituindo estes valores na expressão em cima e, de seguida, fazendo $x = 2$ tiramos: $\frac{13}{2} = \frac{1}{2} + 6 + B_2 \iff B_2 = 0$. Assim:

$$\int \tfrac{x^2+4x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx = \int \tfrac{1}{x}\,dx + 6\int \tfrac{1}{(x-1)^2}\,dx = \ln|x| - \tfrac{6}{x-1} + C.$$

5. **[1,0 val.]** Use o integral de Riemann para calcular $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n^3}} + \sqrt{\frac{2}{n^3}} + \cdots + \sqrt{\frac{n-1}{n^3}} + \sqrt{\frac{n}{n^3}}\right)$.

Solução: Consideremos a partição uniforme do intervalo $[0,1]$ com n sub-intervalos e consideremos a soma de Riemann da função $f(x) = \sqrt{x}$ para esta partição de $[0,1]$ e para os pontos amostrais dados pelos extremos direitos. Essa soma de Riemann é:

$$\sqrt{\tfrac{1}{n}}\cdot\tfrac{1}{n} + \sqrt{\tfrac{2}{n}}\cdot\tfrac{1}{n} + \cdots + \sqrt{\tfrac{n-1}{n}}\cdot\tfrac{1}{n} + \sqrt{\tfrac{n}{n}}\cdot\tfrac{1}{n} = \sqrt{\tfrac{1}{n^3}} + \sqrt{\tfrac{2}{n^3}} + \cdots + \sqrt{\tfrac{n-1}{n^3}} + \sqrt{\tfrac{n}{n^3}}.$$

Ora a função f é contínua em $[0,1]$ e como tal é integrável, pelo que quando $n \to +\infty$ a soma de Riemann em cima, ou seja a sucessão dada no enunciado, converge para $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$. Logo, o limite é igual a

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx \overset{\text{TFC}}{=} \left[\tfrac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1 = \tfrac{2}{3}.$$

6. **[2,0 val.]** Seja $f(x) = x^2 - x + 1$ e seja $0 < \frac{1}{4} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4} < 1$ uma partição uniforme de $[0,1]$.

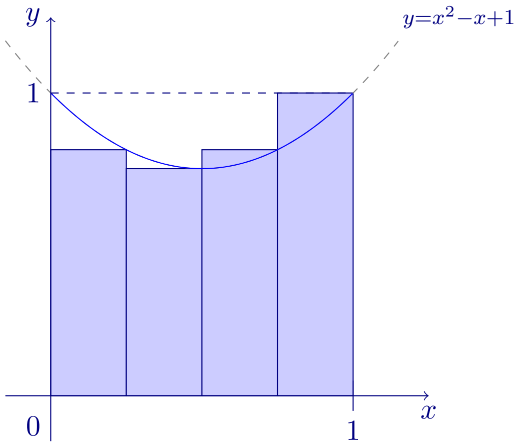
(a) Calcule a soma de Riemann de f em $[0,1]$ para a partição dada e pontos amostrais os extremos direitos.

(b) Represente o gráfico de f e a interpretação geométrica da soma de Riemann anterior.

Solução: (a) A soma de Riemann é:

$$f(\tfrac{1}{4})\cdot\tfrac{1}{4}+f(\tfrac{2}{4})\cdot\tfrac{1}{4}+f(\tfrac{3}{4})\cdot\tfrac{1}{4}+f(1)\cdot\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{4}\left(\left(\tfrac{1}{4}\right)^2-\tfrac{1}{4}+1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{2}+1+\left(\tfrac{3}{4}\right)^2-\tfrac{3}{4}+1+1^2-1+1\right)$$
$$=\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{4}+4+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{9}{16}-\tfrac{3}{4}\right)=\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{10}{16}+4-\tfrac{5}{4}\right)=\tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{5}{8}+4\right)=\tfrac{27}{32}.$$

(b)



7. **[1,75 val.]** Calcule $\displaystyle\int_{1/4}^{1/2}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$. [Sugestão: Use a substituição $x=\sin^2(t)$.]

Solução: Se $x=\sin^2(t)$ e $x=\frac{1}{4}$ então $\frac{1}{4}=\sin^2(t)\overset{t\in[0,\pi/2]}{\Longrightarrow}t=\frac{\pi}{6}$. Por outro lado se $x=\frac{1}{2}$ então, pela mesma razão, $t=\frac{\pi}{4}$. Tem-se assim:

$$\int_{1/4}^{1/2}\sqrt{\tfrac{x}{1-x}}\,dx=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\sqrt{\tfrac{\sin^2(t)}{1-\sin^2(t)}}\,2\cos(t)\sin(t)\,dt=\int_{\pi/6}^{\pi/4}2\sin^2(t)\,dt=\int_{\pi/6}^{\pi/4}(1-\cos(2t))\,dt=$$

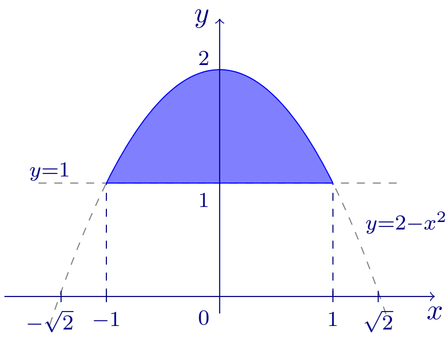
$$\overset{\text{TFC}}{=}\left[t-\tfrac{\sin(2t)}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/4}=\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{1}{2}-\tfrac{\pi}{6}+\tfrac{\sqrt{3}}{4}=\tfrac{\pi}{12}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{4}.$$

8. **[2,25 val.]** Considere $\mathcal{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:1\leqslant y\leqslant 2-x^2\}$.

(a) Faça um esboço da região $\mathcal{R}$.

(b) Calcule o volume do sólido que se obtém pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno do eixo x.

Solução: (a) O gráfico de $y=2-x^2$ é uma parábola com concavidade virada para baixo, vértice $(2-x^2)'=0\iff x=0$ e que interseta o eixo do x em $x=\pm\sqrt{2}$. O gráfico de $y=1$, que é uma reta horizontal, interseta o outro gráfico nos pontos de abcissa $1=2-x^2\iff x=\pm1$. Obtém-se o esboço:



b) O volume do sólido é:

$$\pi\int_{-1}^{1}\left((2-x^2)^2-1^2\right)dx=\pi\int_{-1}^{1}\left(x^4-4x^2+3\right)dx\overset{\text{TFC}}{=}\pi\left[\tfrac{x^5}{5}-\tfrac{4x^3}{3}+3x\right]_{-1}^{1}$$
$$=\pi\left(\tfrac{1}{5}-\tfrac{4}{3}+3+\tfrac{1}{5}-\tfrac{4}{3}+3\right)=\tfrac{56}{15}\pi.$$

9. **[1,75 val.]** Indique a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-(1-\frac{1}{x})^2}}\,dx$.

Solução: A natureza do integral impróprio é governada por:

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-(1-\frac{1}{x})^2}}\,dx \overset{\text{TFC}}{=} \lim_{t\to+\infty}\left[\arcsin\left(1-\tfrac{1}{x}\right)\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left(\arcsin\left(1-\tfrac{1}{t}\right)-\arcsin(0)\right) = \arcsin(1) = \tfrac{\pi}{2}.$$

Conclui-se que o integral impróprio dado é convergente (e que a sua soma é $\frac{\pi}{2}$).

10. **[1,75 val.]** Resolva o seguinte problema de valor inicial $y' = \sqrt{x}e^{-y}$, $y(1) = 0$.

Solução: A equação diferencial dada é de variáveis separáveis. Temos:

$$\begin{aligned} y' = \sqrt{x}e^{-y} &\iff y'e^y = \sqrt{x} \iff (e^y)' = \sqrt{x} \iff e^y = \textstyle\int \sqrt{x}\,dx \\ &\iff e^y = \tfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + C \iff y = \ln\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + C\right),\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Para resolver o problema de valor inicial, fazemos:

$$y(1) = 0 \iff \ln\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{1^3} + C\right) = 0 \iff \tfrac{2}{3} + C = 1 \iff C = \tfrac{1}{3}.$$

A solução é então $y = \ln(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{3})$.