Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Análise Matemática III (Semestral)

Licenciatura em Engenharia Informática

Ano Lectivo 2024/2025 - 1.° Semestre Folha 1

I- Funções complexas de variável complexa.

I.1 Números Complexos (revisões)

1. Escreva os seguintes números complexos na forma algébrica:

   (a) $(3-2i)(4+5i)+(3-2i)(4-5i)\,;$ (b) $(2-i)(4+3i)(5+2i)\,;$

   (c) $\dfrac{2-2i}{7+i}+\dfrac{3+4i}{2-3i}\,;$ (d) $\left(\dfrac{2i}{1+i}\right)^4.$

2. Demonstre as seguintes propriedades dos números complexos:

   (a) $\overline{\overline{z}}=z\,;$ (b) $|\overline{z}|=|z|\,;$ (c) $|-z|=|z|\,;$ (d) $z\overline{z}=|z|^2\,;$

   (e) $\operatorname{Re} z=\dfrac{z+\overline{z}}{2}\,;$ (f) $\operatorname{Im} z=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}\,;$ (g) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}\,;$ (h) $\overline{-z}=-\overline{z}\,;$

   (i) $\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}\,;$ (j) $z^{-1}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}\,;$ (k) $|zw|=|z|\cdot|w|\,;$ (l) $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}\,;$

   (m) $\operatorname{Re} z\le|\operatorname{Re} z|\le|z|\,;$ (n) $\operatorname{Im} z\le|\operatorname{Im} z|\le|z|\,;$

   (o) $|z+w|^2=|z|^2+2\operatorname{Re}(z\overline{w})+|w|^2\,;$ (p) $|z-w|^2=|z|^2-2\operatorname{Re}(z\overline{w})+|w|^2\,;$

   (q) $|z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right).$ Qual o significado geométrico desta igualdade?

   (r) $|z\pm w|\le|z|+|w|\,;$ (s) $||z|-|w||\le|z\pm w|\,.$

3. Seja $z\in\mathbb{C}$ tal que $|z|=3$. Prove que $8\le|1-z^2|\le 10$ e indique dois números complexos com módulo igual a 3 que mostrem que as desigualdades anteriores não podem ser melhoradas.

4. Escreva o número complexo $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{20}$ na forma algébrica.

5. Escreva na forma trigonométrica e represente geometricamente o número complexo z^2/w, onde $z=1+i$ e $w=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Para $n=2,3,4,5$, exprima $\cos(n\theta)$ e $\sin(n\theta)$ em função de $\cos\theta$ e $\sin\theta$ (resp.).

   [**Sugestão:** Use a fórmula de De Moivre.]

7. Determine e represente geometricamente:

   (a) as raízes cúbicas de -1 ;

   (b) as raízes índice n de 1 ;

   (c) as raízes cúbicas de $-\dfrac{8}{\sqrt{2}}+i\dfrac{8}{\sqrt{2}}$.

8. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$. Mostre que:

   (a) $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1} = \dfrac{1 - z^n}{1 - z}$;

   (b) se z é uma raiz índice n da unidade, então $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1} = 0$.

9. Mostre que se $|z| = 1$ e $1 - \overline{a}\, z \neq 0$ então $\left| \dfrac{z - a}{1 - \overline{a}\, z} \right| = 1$.

10. Mostre que se um número complexo λ for zero de um polinómio $p(z)$ com coeficientes reais, então o conjugado $\overline{\lambda}$ também é zero de $p(z)$.

11. (a) Sabendo que $1 - i$ é raiz da equação $z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 10z + 2 = 0$, determine todas as outras raízes.

    (b) Escreva o polinómio $z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 10z + 2$ como um produto de fatores de grau 1 e como um produto de fatores reais de grau 2.

12. Considere o polinómio $z^2 + az + b$ de coeficientes reais

    (a) Se os seus zeros forem z_0 e z_1, mostre que $a = -(z_0 + z_1)$ e $b = z_0 z_1$.

    (b) No caso particular de os seus zeros serem λ e $\overline{\lambda}$, mostre que $a = -2\,\mathrm{Re}\,\lambda$ e $b = |\lambda|^2$.

13. Encontre dois números cuja soma seja 5 e cujo produto seja 9.

14. Mostre que se $|z| = R$ e $m, n \in \mathbb{N}$ então $\left| \dfrac{z^m}{z^n + 1} \right| \geq \dfrac{R^m}{R^n + 1}$.

15. Represente geometricamente os subconjuntos de $\mathbb{C}$ caracterizados pelas condições seguintes:

(a) $\lvert z - i\rvert < 1$;	(b) $\frac{1}{2} \leq \lvert z + i - 2\rvert < 1$;	(c) $\mathrm{Re}\, z > 0$;
(d) $0 < \mathrm{Im}\, z < 1$;	(e) $\mathrm{Re}\, z \leq -1 \vee \mathrm{Re}\, z \geq 1$;	(f) $\lvert z - i\rvert = \lvert z + i\rvert$;
(g) $z = \lvert z\rvert\, e^{i\theta}$, $\frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$;	(h) $\lvert z\rvert^2 > z + \overline{z}$;	(i) $\mathrm{Im}\,((z - i)/i) \leq 0$;
(j) $u + r\, e^{it}$, $0 < t \leq 2\pi$;	(k) tu , $t \geq 0$;	(l) $(1 - t)u + tv$, $0 \leq t \leq 1$.

    (u e v são números complexos fixos e r é um número real positivo fixo.)

16. Sendo $a \in \mathbb{C}$ e $\rho > 0$, mostre que a equação $|z|^2 - 2\mathrm{Re}\,(\overline{a}\, z) + |a|^2 = \rho^2$ representa a circunferência de centro a e raio ρ.

17. Determine a equação cartesiana da forma $y = mx + b$ (com m e b constantes reais) para cada uma das retas representadas no plano complexo $z = x + iy$ pelas seguintes equações:

    (a) $|z - 2 + i| = |z - i + 3|$.

    (b) $z + \overline{z} + 4i(z - \overline{z}) = 6$.

18. Determine os pontos de interseção e os ângulos de intersecção das retas

$$|z - 1 - i| = |z - 3 + i| , \quad |z - 1 + i| = |z - 3 - i| .$$

    (**Nota:** Procure usar argumentos geométricos.)

Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Análise Matemática III (Semestral)

Licenciatura em Engenharia Informática

Ano Lectivo 2024/2025 - 1.º Semestre Folha 2

I- Funções complexas de variável complexa (continuação).

I.2 Funções complexas (aspetos algébricos e geométricos)

19. Esboce a imagem por f da região definida por $0 < \operatorname{Re} z < 1$ e $0 < \operatorname{Im} z < 2$, onde $f(z) = 2iz + i,\ z \in \mathbb{C}$. Justifique.

20. Esboce a imagem por f da região $0 < \operatorname{Im} z$, onde $f(z) = (1-i)z,\ z \in \mathbb{C}$. Justifique.

21. Esboce a imagem da região $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge 1 < |z| \leq 2\}$ pela aplicação $f(z) = (1-i)z + i$, indicando a imagem por f de alguns pontos de D. Justifique.

22. Esboce a região $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0 \wedge 1 < |z| \leq 2\}$ e a sua imagem pela aplicação f definida por $f(z) = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z - 2i$, $z \in \mathbb{C}$. Justifique.

23. Esboce a região $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0 \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 0 \wedge 2 < |z| \leq 4\}$ e a sua imagem pela aplicação f definida por $f(z) = (1 - i\sqrt{3})z + 2i$, $z \in \mathbb{C}$. Refira as transformações geométricas envolvidas, justificando devidamente.

24. Esboce a região $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \leq 0 \wedge \operatorname{Re}(z) \geq 0 \wedge 2 < |z| \leq 4\}$ e a sua imagem pela aplicação f definida por $f(z) = (\sqrt{3} - i)z + 2i$, $z \in \mathbb{C}$. Refira as transformações geométricas envolvidas, justificando devidamente.

25. Esboce a região $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 2 \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 0 \wedge 2 < |z - 2i| \leq 4\}$ e a sua imagem pela aplicação f definida por $f(z) = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})(z - 2i)$, $z \in \mathbb{C}$. Refira as transformações geométricas envolvidas, justificando devidamente.

26. Determine e esboce a imagem por f de semirretas verticais e semirretas horizontais, onde $f(z) = z^2,\ z \in \mathbb{C}$. Justifique.

27. Prove as seguintes relações:

(a) $\cos(-z) = \cos z\,;$

(b) $\sin(-z) = -\sin z\,;$

(c) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1\,;$

(d) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1\,;$

(e) $\cos(z+w) = \cos z\, \cos w - \sin z\, \sin w\,;$

(f) $\sin(z+w) = \sin z\, \cos w + \cos z\, \sin w\,;$

(g) $\cosh z = \cos(iz)\,;$

(h) $\sinh z = -i \sin(iz)\,;$

(i) $\sin z = \sin(\operatorname{Re} z) \cosh(\operatorname{Im} z) + i \cos(\operatorname{Re} z) \sinh(\operatorname{Im} z)\,;$

(j) $\sinh(\operatorname{Im} z) \leq |\sin z| \leq \cosh(\operatorname{Im} z)\,.$

28. Recorrendo às definições das funções complexas envolvidas, e considerando o ramo principal do logaritmo, calcule

(a) $e^{1+i3\pi}$; (b) $e^{k\pi i}$ $(k \in \mathbb{Z})$; (c) $\log(1+i)$; (d) $\log(-1)$; (e) 4^i ; (f) i^i .

29. Resolva em $\mathbb{C}$ as seguintes equações (por dois processos diferentes: (i) recorrendo à definição das funções envolvidas e igualdade de números complexos; (ii) recorrendo ao logaritmo):

(a) $e^z = i$; (b) $e^z = e^{iz}$; (c) $e^w = -2$.

30. (a) Determine todos os números $z \in \mathbb{C}$ para os quais $\cos z = 2$.

(b) Quantos dos valores obtidos em (a) são reais? Seria isso de esperar?

31. Determine os subconjuntos de $\mathbb{C}$ onde a função seno

(a) se anula ; (b) assume valores reais ; (c) assume valores imaginários puros.

32. Considere a função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = i\frac{z}{2}$. Usando a definição de limite, prove que

$$\lim_{z \to 1} f(z) = \frac{i}{2}.$$

33. Determine

$$\lim_{z \to 1-i} (z + 2i\mathrm{Re}\, z).$$

I.3 Derivação de funções complexas

34. Para cada uma das funções seguintes, determine o seu domínio e calcule a sua derivada:

(a) $\dfrac{z^3+2z+1}{z^3+1}$; (b) $\dfrac{1}{(z^3-1)(z^2+2)}$.

35. Recorrendo às condições de Cauchy-Riemann, prove que a função definida por $f(z) = e^{az}$, $z \in \mathbb{C}$, com $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, é diferenciável em $\mathbb{C}$ e determine a sua derivada.

36. Verifique as condições de Cauchy-Riemann para as funções cos e sin e, usando as derivadas parciais calculadas, determine as funções derivadas dessas funções.

37. Usando as condições de Cauchy-Riemann, diga quais das funções definidas pelas expressões analíticas seguintes são analíticas no seu domínio de definição e, em caso afirmativo, determine as funções derivadas.

(a) z^2 ; (b) $\overline{z}$; (c) $z\overline{z}$; (d) $\frac{1}{z}$; (e) $\frac{1}{z^{2023}}$.

38. Determine uma função real $v(x, y)$, definida em $\mathbb{R}^2$, tal que a função complexa

$$f(z) = 2x(1-y) + iv(x, y)$$

seja analítica em $z = x + iy$.

39. Estude a diferenciabilidade das funções complexas de variável complexa definidas por

(a) $f(z) = \mathrm{Log}\,(e^z + 2)$; (b) $f(z) = \sqrt{z^2 - 4}$.

Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Análise Matemática III (Semestral)

Licenciatura em Engenharia Informática

Ano Lectivo 2024/2025 - 1.º Semestre | Folha 3

I- Funções complexas de variável complexa (continuação).

I.4 Séries de potências (Séries de Taylor) e Séries de Laurent

40. Estude quanto à convergência as séries de potências seguintes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^n$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s} \quad (s \in \mathbb{R})$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n z^n$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(z+2i)^n$; (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n(z-i)^n}{n!}$.

41. Ache uma série de potências de $z+2i$ que tenha como soma a função $\dfrac{1}{1-z}$, e determine o respetivo raio de convergência.

42. (a) Determine o desenvolvimento em série de potências em torno do ponto zero da função $f(z) = e^{z^3}$, e indique o maior domínio onde a série converge.

(b) Utilizando a série obtida em (a), calcule o valor das derivadas $f^{(20)}(0)$ e $f^{(21)}(0)$.

43. Obtenha os desenvolvimentos em série de Taylor em torno do ponto 0 das seguintes funções, indicando os respetivos raios de convergência:

(a) $f(z) = \sin(2z)$; (b) $f(z) = \cos z^3$; (c) $f(z) = z \sinh z^2$ (d) $f(z) = 1/(2-z)^3$.

44. Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots$.

(a) Determine o seu raio de convergência.

(b) Determine a sua função soma procurando uma série de que a série dada seja a série derivada.

45. (a) Mostre que para $x, y \in \mathbb{R}$ é válida a relação $\cos(x+iy) = \cos x \cdot \cosh y - i \sin x \cdot \sinh y$.

(b) Usando (a), verifique que $\Re\left\{1 - \cos\left(e^{it}\right)\right\} = 1 - \cos(\cos t) \cdot \cosh(\sin t)\,, \quad t \in \mathbb{R}$.

(c) Justifique que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \cos z\,, \quad z \in \mathbb{C}$.

(d) Usando as alíneas anteriores, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \cos(2nt) = 1 - \cos(\cos t) \cdot \cosh(\sin t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

46. Ache as séries de Laurent das seguintes funções nas coroas circulares indicadas:

(a) $\dfrac{z+1}{z}, \quad 0<|z|<\infty\,;$ (b) $\dfrac{1}{(z-3)^5}, \quad 0<|z-3|<\infty\,;$

(c) $\dfrac{1}{z^2+1}, \quad 0<|z+i|<2\,.$ (d) $\dfrac{e^z}{z^2}, \quad 0<|z|<\infty$

(e) $\sin\dfrac{1}{z}, \quad 0<|z|<\infty\,.$ (f) $\dfrac{1}{z(1-z)}, \quad 0<|z|<1 \quad \text{e} \quad 0<|z-1|<1\,.$

47. Determine as primeiras quatro parcelas do desenvolvimento em série de Laurent da função $\dfrac{e^z}{z^2-1}$ na coroa circular $0<|z-1|<2\,.$

48. Determine os desenvolvimentos de $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ em série de Laurent válidos nos seguintes domínios:

(a) $\{\,z\in\mathbb{C}\,:\,0<|z|<1\,\}\,;$ (b) $\{\,z\in\mathbb{C}\,:\,1<|z|<2\,\}\,;$ (c) $\{\,z\in\mathbb{C}\,:\,|z|>2\,\}\,.$

I.5 Singularidades, zeros e resíduos

49. Cada uma das funções seguintes tem uma singularidade isolada em $z=0$. Em cada caso classifique a singularidade (no caso de um pólo, indique a sua ordem) e determine o resíduo.

(a) $\dfrac{1}{z}\,;$ (b) $\dfrac{z^2}{z}\,;$ (c) $\dfrac{z}{z^2}\,;$ (d) $\dfrac{\sin z}{z(1-z)}\,;$

(e) $\dfrac{\cos z}{z}\,;$ (f) $\dfrac{1-\cos z}{z}\,;$ (g) $\dfrac{\sin z}{z^4}\,;$ (h) $e^{1/z}\,;$

(i) $\dfrac{z^2}{e^z-1}\,;$ (j) $\dfrac{\cos z}{z^2}\,;$ (k) $\dfrac{e^z-1}{z^3}\,;$ (l) $z^7\sin\dfrac{1}{z}\,.$

50. Para cada uma das funções racionais seguintes, indique os zeros e os pólos, bem como as respetivas ordens.

(a) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z}\,;$ (b) $f(z)=\dfrac{z+i}{(z^2+2)^2}\,;$ (c) $f(z)=\dfrac{z^3}{(z^2+1)^2(z^2-2i)^5}\,.$

51. Calcule

(a) $\operatorname{Res}\left(\dfrac{e^z}{z-1};1\right)$; (b) $\operatorname{Res}\left(\dfrac{e^z}{(z-1)^2};1\right)$; (c) $\operatorname{Res}\left(\dfrac{e^z}{z^k};0\right)$ $(k\in\mathbb{N})\,;$

(d) $\operatorname{Res}\left(e^{1/z};0\right)$; (e) $\operatorname{Res}\left(\dfrac{z^5+z+3}{(z-2)^4};2\right)$; (f) $\operatorname{Res}\left(\dfrac{\cos z}{z-\pi/4};\pi/4\right)$.

52. Calcule os resíduos das seguintes funções em cada uma das suas singularidades:

(a) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}\,;$ (b) $f(z)=\dfrac{z^2-1}{(z^2+1)^2}\,;$ (c) $f(z)=\dfrac{z^3}{\sin^3 z}\,.$

Análise Matemática III (Semestral)

Licenciatura em Engenharia Informática

Ano Lectivo 2024/2025 - 1.º Semestre Folha 4

I.6 Integração de funções complexas. Teorema de Cauchy. Fórmulas integrais de Cauchy. Teorema dos resíduos.

53. Represente geometricamente e indique o sentido dos caminhos definidos em $\mathbb{C}$ pelas funções:

    (a) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}\,$, com $\gamma(t) := t + i(2t-1)\,$;

    (b) $\gamma : [-\pi/4, 5\pi/4] \to \mathbb{C}\,$, com $\gamma(t) := 2e^{it}\,$;

    (c) $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{C}\,$, com $\gamma(t) := t - i\sqrt{2-t^2}\,$;

    Calcule o comprimento de cada um destes caminhos.

54. Calcule $\displaystyle\int_\gamma |z|\,\mathrm{d}z$, onde γ é o caminho definido por $\gamma : [0, 3\pi/2] \to \mathbb{C}\,$, com $\gamma(t) := 3e^{it}$.

55. Sendo $C(z_0, r)$ a circunferência de centro no ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ e raio $r > 0$, verifique que

$$\int_{C(z_0,r)} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^k} = \begin{cases} 2\pi i & \text{se} \quad k=1 \\ 0 & \text{se} \quad k = 2,3,4,\cdots. \end{cases}$$

56. Qual o valor do integral $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z+3}$?

Fórmulas integrais de Cauchy

57. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z + z}{z-2}\,\mathrm{d}z$, onde γ é

    (a) a circunferência unitária;

    (b) a circunferência de centro na origem e raio 3.

58. Usando as fórmulas integrais de Cauchy, calcule:

    (a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2+2z-3}\,\mathrm{d}z$;

    (b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4}\,\mathrm{d}z$.

Teorema dos resíduos

59. Usando o teorema dos resíduos de Cauchy, calcule

   (a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4}\, \mathrm{d}z$ (compare com o Exercício 58 (b));

   (b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z^2-4)}$, onde γ é a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$.

   (c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z-i)(z^2+9)}\, \mathrm{d}z$, onde γ é a circunferência $\gamma(t) = 2i + 2e^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$.

   (d) $\displaystyle\int_\gamma (1+z)e^{1/z}\, \mathrm{d}z$, onde γ é a circunferência de centro na origem e raio $r > 0$.

II- Transformada$-z$ e aplicações

60. Usando a tabela e as propriedades da transformada$-z$, determine esta transformada para cada uma das seguintes sucessões, indicando a região de convergência:

    (a) $\left\{\left(-\frac{1}{4}\right)^k\right\}_{k\geq 0}$; (b) $\left\{\sin\frac{k\pi}{2}\right\}_{k\geq 0}$; (c) $\{\,1,-1,1,-1,1,-1,1,\cdots\}$

    (d) $\left\{k+(-1)^k\right\}_{k\geq 0}$; (e) $\{k\sin(2k)\}_{k\geq 0}$; (f) $\{\,0,0,-1,1,-1,1,-1,\cdots\}$.

61. Mostre que, sendo ω uma constante real,

    (a) $\mathcal{Z}\{\sinh(k\omega)\} = \dfrac{z\sinh\omega}{z^2-2z\cosh\omega+1}$; (b) $\mathcal{Z}\{\cosh(k\omega)\} = \dfrac{z^2-z\cosh\omega}{z^2-2z\cosh\omega+1}$.

62. Use o teorema de convolução para determinar a transformada$-z$ da sucessão $\{x_k\}_{k\geq 0}$ quando:

    (a) $x_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} a^{k-j}\sin(\omega j) \quad (a\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$; (b) $x_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\cos[\omega(k-j)]$.

63. Determine a transformada$-z$ inversa das seguintes funções:

    (a) $X(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)\,(z+2)}$; (b) $X(z) = \dfrac{z}{(z-1)\,(z+2)}$; (c) $X(z) = \dfrac{1}{(z-1)\,(z+2)}$;

    por três processos diferentes:

    (i) decomposição em fracções parciais; (ii) Teorema da Convolução; (iii) Teorema da Inversão.

64. Usando o método de decomposição em fracções parciais, determine a transformada$-z$ inversa das seguintes funções:

    (a) $X(z) = \dfrac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z+1)}$; (b) $X(z) = \dfrac{z(z+1)}{(z+2)^2(z-1)}$; (c) $X(z) = \dfrac{z}{z^2-z+1}$.

65. Usando o método de inversão integral (apoiado na fórmula integral e no teorema dos resíduos de Cauchy), determine a transformada$-z$ inversa das seguintes funções:

    (a) $X(z) = \dfrac{z(z-1)}{(z+2)^3}$; (b) $X(z) = \dfrac{z(z+2)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2(z^2+1)}$.

66. Resolva, pelo método da transformada$-z$, as seguintes equações de diferenças, sujeitas às condições iniciais indicadas:

   (a) $8x_{k+2} - 6x_{k+1} + x_k = 9\,,\ k \geq 0\,;\quad x_0 = 1\,,\ x_1 = \frac{3}{2}$

   (b) $x_{k+2} + 2x_k = 0\,,\ k \geq 0\,;\quad x_0 = 1\,,\ x_1 = \sqrt{2}$

   (c) $x_{k+2} - 5x_{k+1} + 6x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k\,,\ k \geq 0\,;\quad x_0 = x_1 = 0$

   (d) $x_{k+1} - 4x_{k-1} = 3k - 8\,,\ k \geq 1\,;\quad x_0 = 1\,,\ x_1 = \frac{3}{2}$

   (e) $x_{k+2} - 3x_{k+1} + 2x_k = \delta_k(0)\,,\ k \geq 0\,;\quad x_0 = x_1 = 0$

   (f) $(k+1)x_{k+1} - kx_k = k + 1\,,\ k \geq 0$

67. (Exame Especial 2021)

   (a) Usando o Teorema da Convolução, determine a transformada-z inversa da função definida pela expressão analítica
   $$X_1(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+2)}\ ,\ |z| > 2.$$

   (b) Usando a fórmula de inversão, determine a transformada-z inversa da função definida pela expressão analítica
   $$X_2(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)^2}\ ,\ |z| > 2.$$

   (c) Resolva, pelo método da transformada-z, o problema
   $$x_{k+2} + x_{k+1} - 2x_k = (-2)^k\ (k \geq 0),\ x_0 = 3,\ x_1 = -3.$$

68. (Exame Final 2021/2022)

   (a) Usando o Teorema da Convolução, determine a transformada-z inversa da função definida pela expressão analítica
   $$X_1(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-3)}\ ,\ |z| > 3.$$

   (b) Usando a fórmula de inversão, determine a transformada-z inversa da função definida pela expressão analítica
   $$X_2(z) = \frac{z}{(z-2)^2(z+1)(z-3)}\ ,\ |z| > 3.$$

   (c) Usando as alíneas anteriores, determine, justificando os passos intermédios, a solução de
   $$x_{k+2} - 2x_{k+1} - 3x_k = k2^k\ (k \geq 0),\ x_0 = 1,\ x_1 = 2.$$

III- Transformada de Laplace e aplicações

69. Usando as propriedades e a tabela da transformada de Laplace, obtenha esta transformada para cada uma das seguintes funções, indicando em cada caso a região de convergência:

    (a) $5-3t$; (b) $7t^3-2\sin(3t)$; (c) $\cosh(3t)$; (d) $5e^{-2t}+3-2\cos(2t)$;

    (e) t^2e^{-4t}; (f) $t^2\sin(3t)$; (g) $6t^3-3t^2+4t-2$; (h) $t^2e^{-2t}+e^{-t}\cos(2t)+3$.

70. Determine $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, a transformada inversa de Laplace da função F, quando $F(s)$ é definida por:

    (a) $\dfrac{s+5}{(s+1)(s-3)}$; (b) $\dfrac{s-1}{s^2(s+3)}$; (c) $\dfrac{1}{s^2(s^2+16)}$; (d) $\dfrac{4s}{(s-1)(s+1)^2}$.

71. Utilizando a transformada de Laplace, resolva para $t \geq 0$ as equações diferenciais ordinárias seguintes, sujeitas às condições iniciais especificadas:

    (a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+3y=e^{-2t}, \quad y(0)=2$;

    (b) $3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-4y=\sin(2t), \quad y(0)=\dfrac{1}{3}$;

    (c) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2y=5e^{-t}\sin t, \quad y(0)=1, \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0)=0$;

    (d) $9\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+12\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+4y=e^{-t}, \quad y(0)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0)=1$.

72. Utilizando a transformada de Laplace, resolva para $t \geq 0$ o sistema de equações diferenciais ordinárias seguintes, satisfazendo as condições iniciais especificadas:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+5x+3y=e^{-t} \\[2ex] 2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+x+y=3 \end{cases}, \quad x(0)=2, \quad y(0)=1;$$

73. Considere a função causal

$$f(t)=\begin{cases} 2t^2 & , \quad 0 \leq t < 3 \\ t+4 & , \quad 3 \leq t < 5 \\ 9 & , \quad t \geq 5 \end{cases}.$$

    (a) Verifique que f se exprime em termos da função de Heaviside por meio da relação

$$f(t)=2t^2H(t)-\left[2(t-3)^2+11(t-3)+11\right]H(t-3)-(t-5)H(t-5)$$

    (b) Usando o resultado da alínea anterior, mostre que

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{4}{s^3}-\left(\frac{4}{s^3}+\frac{11}{s^2}+\frac{11}{s}\right)e^{-3s}-\frac{1}{s^2}e^{-5s}, \quad \Re s>0.$$

74. Usando a forma inversa do teorema de Heaviside, determine a transformada inversa de Laplace das funções a seguir indicadas:

(a) $\dfrac{e^{-5s}}{(s-2)^4}$; (b) $\dfrac{3\,e^{-2s}}{(s+3)(s+1)}$; (c) $\dfrac{s\,e^{-4\pi s/5}}{s^2+25}$; (d) $\dfrac{e^{-\pi s}(s+3)}{s(s^2+1)}$.

75. Considere a função

$$f(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 \le t < 1 \\ 0 & , \quad t \ge 1\,. \end{cases}$$

(a) Exprima f em termos de funções de Heaviside.

(b) Use o resultado anterior para mostrar que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s^2}\,(1-e^{-s}) - \dfrac{1}{s}\,e^{-s}\,,\ \Re s > 0\,.$

(c) Sabendo que $y = 0$ para $t = 0$, determine, recorrendo à transformada de Laplace, a solução da equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = f(t)\,.$$

76. Considere a função

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le t < \frac{1}{2}\pi \\ \sin t & , \quad t \ge \frac{1}{2}\pi\,. \end{cases}$$

(a) Verifique que

$$f(t) = \cos\left(t - \tfrac{1}{2}\pi\right) \cdot H\left(t - \tfrac{1}{2}\pi\right)\,,$$

onde H é a função de Heaviside.

(b) Use o resultado da alínea anterior para determinar a solução da equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = f(t)$$

que satifaz as condições iniciais $y = -\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 1$ para $t = 0$.

77. (Exame 2019) Usando Transformadas de Laplace, determine, para $t \ge 0$, justificando os passos intermédios, a solução da seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 4\frac{dx}{dt}(t) + 4x(t) = e^t\cos t$$

sujeita às condições iniciais $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$.

Sugestão: $\dfrac{s-1}{(s+2)^2((s-1)^2+1)} = -\dfrac{2}{25}\dfrac{1}{s+2} + \dfrac{A}{(s+2)^2} + \dfrac{1}{50}\dfrac{4s-1}{(s-1)^2+1}$, com A uma constante a determinar.

78. (Exame 2019)

(a) Sendo $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2(s+3)}$, determine uma função causal f tal que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, usando o Teorema da Convolução.

(b) Utilizando a transformada de Laplace, resolva para $t \ge 0$ a equação diferencial seguinte, satisfazendo as condições iniciais especificadas:

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + 2\frac{dy}{dt}(t) + y(t) = e^{-3(t-2)}H(t-2)\,, \quad y(0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 0\,.$$

IV- Séries de Fourier e Transformadas de Fourier

79. Seja $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um sinal periódico com uma frequência fundamental de 1 KHz (*i.e.*, 1000 Hz), definido em $[-\frac{1}{2000}, \frac{1}{2000}]$ por $v(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t| \leq \frac{1}{4000} \\ 0, & \text{se } \frac{1}{4000} < |t| \leq \frac{1}{2000} \end{cases}$

   (a) Determine a série de Fourier de v na forma complexa.

   (b) Esboce o gráfico da função definida pela série de Fourier anterior no intervalo $[-\frac{1}{2000}, \frac{1}{2000}]$.

   (c) Determine a potência média do sinal.

   (d) Quantos termos da série de Fourier, e quais, são necessários para se reproduzir o sinal sabendo que a largura de banda do canal está limitada a 22.5 KHz.

   (e) Determine a percentagem da potência média do sinal ao se utilizar um canal com largura de banda limitada a 22.5 KHz.

80. (a) Determine a série de Fourier, na forma complexa, da função $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$v(t) = t, \quad t \in [-\pi, \pi[,$$

   e

$$v(t + 2\pi) = v(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

   (b) Sejam c_n, $n \in \mathbb{Z}$, os coeficientes da série de Fourier, na forma complexa, da função anterior. Determine

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

   Justifique devidamente.

81. Determine, usando a definição, a transformada de Fourier da função:

$$f(t) = \begin{cases} e^{at} & , \quad t \leq 0 \\ e^{-at} & , \quad t > 0 \end{cases} \qquad (a > 0)\,.$$

82. (a) Verifique que $\mathcal{F}\{e^{-at}H(t)\} = \dfrac{1}{a+i\omega}$, onde $a > 0$ e H é a função de Heaviside.

(b) Usando (a) e uma propriedade de derivação adequada, determine $\mathcal{F}\{te^{-at}H(t)\}$.

83. Mostre que a transformada de Fourier da função

$$f(t) = \begin{cases} A & , \quad |t| \leq T \\ 0 & , \quad |t| > T \end{cases} \qquad (A \in \mathbb{R}\,;\, T > 0)$$

é dada por $\mathcal{F}\{f(t)\} = 2AT\,\mathrm{sinc}\,(\omega T)$, onde $\quad \mathrm{sinc}(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0\,. \end{cases}$

84. (exame 27/06/2003) Considere a função $f(t) := e^{-\frac{1}{2}|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Verifique que a transformada de Fourier desta função é dada por

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{4}{1+4\omega^2} \quad (\omega \in \mathbb{R})\,.$$

(b) Use o resultado da alínea anterior e uma propriedade adequada para justificar que

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{1+4t^2}\right\} = \tfrac{\pi}{2}\, e^{-\frac{1}{2}|\omega|}\,, \quad \omega \in \mathbb{R}\,.$$

(c) Usando o resultado da alínea anterior e a definição de transformada de Fourier calcule o valor do seguinte integral impróprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+4t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Nota: o cálculo deste integral deve ser feito no contexto da teoria da transformada de Fourier.