Análise Matemática III

(Apontamentos de Análise Complexa e Aplicações (parcial))

Licenciatura em Engenharia Informática

Universidade de Coimbra

Júlio S. Neves

2023/2024

Índice

Capítulo I

Análise Complexa

I.1 Números Complexos

O conjunto dos números complexos é o conjunto $\mathbb{C}$ dos pares ordenados $z = (x, y)$, com x e y números reais, munido das seguintes operações:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2), \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}.$$

Habitualmente representamos $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)$ por $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$.

Estas operações de adição e multiplicação gozam das mesmas propriedades algébricas que as operações correspondentes nos números reais: propriedade comutativa, propriedade associativa e propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Dado um número complexo $z = (x, y)$, aos números reais x e y chamamos parte real e parte imaginária de z, respetivamente, e escrevemos

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

Dizemos que dois números complexos $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ são iguais, e escrevemos $z_1 = z_2$, sempre que as suas partes reais e imaginárias sejam iguais, ou seja, sempre que

$$\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2,$$

ou seja,

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2. \tag{I.1.1}$$

Dado um número complexo $z = (x, y)$, resulta das operações acima definidas que

$$(x, 0) + (0, y) = (x, y) \quad \text{e} \quad (0, 1) \cdot (y, 0) = (0, y).$$

Portanto,

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0).$$

Qualquer par ordenado da forma $(x, 0)$ será identificado com o número real x e, como tal, o conjunto dos complexos inclui o conjunto dos reais como um subconjunto. Além disso, as operações de adição e multiplicação definidas acima, coincidem com as correspondentes operações quando restritas aos números reais. Desta forma, os números complexos são uma extensão natural dos números reais.

Se identificarmos então o número complexo $(x, 0)$ como sendo x e identificarmos o número complexo $(0, 1)$ pela letra i, qualquer número complexo $z = (x, y)$ pode ser escrito na forma, designada por forma algébrica,

$$z = x + iy = x + yi.$$

Assim, as operações de adição e de multiplicação podem ser reescritas da seguinte forma:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad \forall z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2), \quad \forall z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}.$$

Observe-se que $i^2 = i \cdot i = -1$.

Os números complexos 0 e 1 são os elementos neutros para a adição e para a multiplicação, respetivamente. Ou seja, $z + 0 = 0 + z = z$ e $1 \cdot z = z \cdot 1 = z$ para qualquer número complexo z.

O inverso de $z = x+iy$ relativamente à adição é o número $-z = -x+i(-y)$. Portanto, dados $z_1 = x_1+iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, podemos definir a subtração por

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Tal como nos reais, dado um número complexo $z = (x, y)$ não nulo (i.e., $x \neq 0 \vee y \neq 0$), existe um número complexo w, que será denotado por z^{-1}, tal que $z \cdot w = z \cdot z^{-1} = 1$.

Para encontrarmos esse número, consideremos $z^{-1} = (a, b)$ e vamos determinar (a, b), em função de x e y, tal que

$$(x, y) \cdot (a, b) = (1, 0).$$

Ou seja, a e b são soluções do sistema possível e determinado (pois $x^2 + y^2 \neq 0$)

$$\begin{cases} xa - yb = 1 \\ ya + xb = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pela Regra de Cramer, resulta

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -y \\ 0 & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

e

$$b = \frac{\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Portanto, o inverso de um número complexo z, não nulo, em relação à multiplicação é dado por

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\Big(\frac{-y}{x^2 + y^2}\Big). \tag{I.1.2}$$

Podemos agora definir a divisão de um número complexo z_1 por um número complexo z_2 não nulo ($z_2 \neq 0$):

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}.$$

Uma propriedade importante (cuja demonstração fica ao cuidado do leitor) é a seguinte: dados dois números complexos z_1, z_2, se $z_1 \cdot z_2 = 0$, então $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$.

Para finalizar $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é um corpo e em $\mathbb{C}$ não existe uma relação de ordem que seja compatível com as operações de adição e de multiplicação e, portanto, não faz sentido o uso dos simbolos $<$ ou $\leq$ em $\mathbb{C}$.

I.2 Plano Complexo ou plano de Argand

Fixemos um sistema de eixos ortogonal num plano. Identificando cada número complexo $z = x + iy$ com o ponto de coordenadas (x, y) obtemos uma representação geométrica de $\mathbb{C}$ – o chamado plano complexo ou plano de Argand. Os números complexos também podem ser interpretados com um vetor no plano. Desta forma, a soma de dois números complexos pode ser obtida vetorialmente, como indicado na Figura I.2.2.

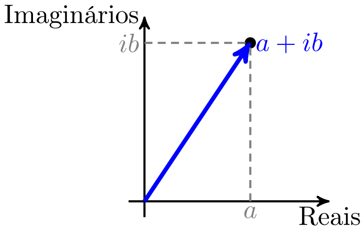


Figura I.2.1: Os números complexos podem ser interpretados como pontos ou como vetores.

O eixo dos xx é designado por eixo real e o eixo dos yy é designado por eixo imaginário.

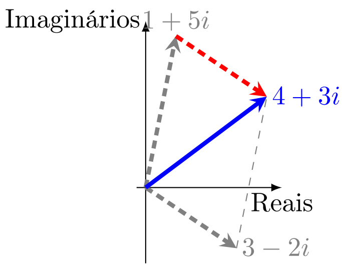


Figura I.2.2: Representação vetorial da soma dos números complexos $z_1 = 1 + 5i$ e $z_2 = 3 - 2i$.

Dado um número complexo $z = x + iy$, definimos os seu **módulo** como o número real não negativo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Em termos geométricos, o número $|z|$ representa a distância do ponto (x, y) à origem ou a norma do vetor de coordenadas (x, y). Quando $\operatorname{Im} z = y = 0$, o módulo de z coincide com o valor absoluto de x, ou seja, $|z| = |x|$.

Dados dois números complexos z_1 e z_2, $|z_1| < |z_2|$ significa que z_1 está mais próximo da origem. A distância entre os dois números complexos é dada por $|z_1 - z_2|$.

Observemos que

$$|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$$

e, como tal,

$$|z| \geq |\operatorname{Re} z| \geq \operatorname{Re} z \quad \text{e} \quad |z| \geq |\operatorname{Im} z| \geq \operatorname{Im} z. \tag{I.2.1}$$

O **conjugado** de um número complexo $z = x + iy$, denotado por $\overline{z}$, é o número complexo definido por

$$\overline{z} = x - iy$$

Notemos que o conjugado de um número complexo é o seu simétrico em relação ao eixo real.

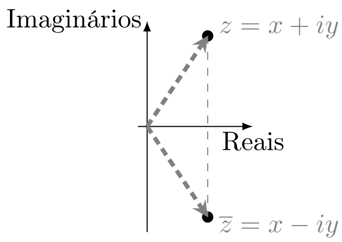


Figura I.2.3: Representação de um número complexo e o seu conjugado.

Resulta da igualdade (I.1.2) que

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}. \tag{I.2.2}$$

Abaixo listamos algumas propriedades dos números complexos.

Proposição I.2.1

Dados dois números complexos z, w, são válidas as seguintes propriedades:

(a) $\overline{\overline{z}} = z$; (b) $|\overline{z}| = |z|$; (c) $|-z| = |z|$; (d) $z\overline{z} = |z|^2$;

(e) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$; (f) $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$; (g) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$; (h) $\overline{-z} = -\overline{z}$;

(i) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$; (j) $|zw| = |z| \cdot |w|$; (k) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$;

(l) $|z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$; (m) $|z - w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$;

(n) $|z \pm w| \leq |z| + |w|$; *(desigualdade triangular)* (o) $||z| - |w|| \leq |z \pm w|$.

Demonstração

Vamos apresentar a demonstração de algumas propriedades, ficando as outras como exercício.

(j) Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Como

$$|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = (z\overline{z})(w\overline{w}) = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2$$

e o módulo é um número não negativo, facilmente resulta que $|zw| = |z|\ |w|$.

(l) Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Então, pelas propriedades da adição e da multiplicação e pelas propriedades (d), (g), (a) e (e), resulta

$$\begin{aligned}|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + (z\overline{w} + w\overline{z}) + w\overline{w}\\ &= z\overline{z} + (z\overline{w} + \overline{\overline{w}}\,\overline{z}) + w\overline{w} = z\overline{z} + (z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}) + w\overline{w}\\ &= z\overline{z} + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + w\overline{w} = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2.\end{aligned}$$

(n) Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Então, pelas propriedades (l), (j) e (b) e por (I.2.1), temos

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= |z|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) + |w|^2\\ &\le |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2\\ &= |z|^2 + 2|z|\,|\overline{w}| + |w|^2\\ &= |z|^2 + 2|z|\,|w| + |w|^2\\ &= (|z|+|w|)^2\end{aligned}$$

Como o módulo é um número não negativo, resulta que

$$|z+w| \le |z| + |w|.$$

A desigualdade $|z-w| \le |z| + |w|$ resulta da desigualdade anterior e da propriedade (c).

Exercício I.2.2

Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 2$. Mostre que

$$3 \le |1-z^2| \le 5.$$

Resolução

Pela desigualdade triangular I.2.1 (n), considerando $z = 1$ e $w = z^2$, e pela propriedade I.2.1 (j), temos

$$|1-z^2| \le |1| + |z^2| = |1| + |z\cdot z| = 1 + |z|\cdot|z| = 1 + |z|^2 = 1 + 2^2 = 5.$$

Por outro lado, pela propriedade I.2.1 (o), considerando $z = 1$ e $w = z^2$, e pela propriedade I.2.1 (j), resulta

$$|1-z^2| \ge ||1| - |z^2|| = ||1| - |z|^2| = |1-2^2| = |-3| = 3.$$

Observe que estas desigualdades não podem ser melhoradas. Por exemplo, se $z = 2$, $|z| = 2$ e $|1-z^2| = |1-4| = 3$. Além do mais, se $z = 2i$, $|z| = 2$ e $|1-z^2| = |1-4i^2| = |1+4| = 5$.

I.3 Forma Trigonométrica - Forma Polar

Dado um número complexo $z = x + iy$ não nulo ($z \neq 0$), sejam (ρ, θ) as coordenadas polares do ponto de coordenadas cartesianas (x, y). Então, podemos escrever

$$x = \rho\cos\theta \quad \text{e} \quad y = \rho\sin\theta \tag{I.3.1}$$

e, como tal, z pode ser escrito na forma polar ou forma trigonométrica

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{I.3.2}$$

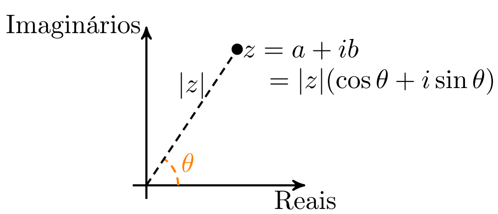


Figura I.3.1: Representação de z na forma algébrica e na forma polar

Note-se que ρ representa a distância do ponto (x, y) à origem, ou seja, $\rho = |z|$, enquanto que θ representa a medida, em radianos, do ângulo que a semirreta que vai de 0 a z faz com a parte positiva do eixo real. A θ chamamos um argumento de z. Da equação (I.3.2) fica claro que um número complexo $z \neq 0$ admite uma infinidade de argumentos, que diferem uns dos outros por um múltiplo inteiro de 2π. Estes valores podem ser determinados a partir das igualdades (I.3.1) e de $\rho = |z|$.

Ao único argumento de z que pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$, chamamos **argumento principal** e é denotado por $\operatorname{Arg} z$.

Mais geralmente, ao único argumento no intervalo $]\alpha - 2\pi, \alpha]$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, será denotado por $\arg_\alpha z$. Observe-se que $\operatorname{Arg} z = \arg_\pi z$.

Fica claro que dado $z \neq 0$ e um argumento θ de z, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\theta = \operatorname{Arg} z + 2k\pi.$$

Todos os possíveis argumentos de z serão denotados pela expressão $\arg z$ e temos

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, dados dois número complexos $z \neq 0$ e $w \neq 0$, escritos na forma polar

$$z = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{e} \quad w = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

$$z = w \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \wedge \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \quad \text{para algum} \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{I.3.3}$$

Quando $z = 0$, $\rho = 0$ e, portanto, qualquer valor de θ satisfaria as igualdades (I.3.1). Por esta razão, quando escrevemos um número complexo z na forma polar, supomos sempre que $z \neq 0$.

Dado um número complexo $z \neq 0$, escrito na forma polar $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$,

$$-z = -[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)] = \rho(-\cos\theta - i\sin\theta) = \rho[\cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi)], \tag{I.3.4}$$

$$\overline{z} = \overline{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)} = \rho(\cos\theta - i\sin\theta) = \rho[\cos\theta + i\sin(-\theta)] = \rho[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] \tag{I.3.5}$$

e

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\rho[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}\Big[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\Big]. \tag{I.3.6}$$

Dados dois número complexo $z \neq 0$ e $w \neq 0$, escritos na forma polar $z = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $w = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, temos

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (\rho_1\rho_2)(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\rho_1\rho_2)[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)] \\ &= (\rho_1\rho_2)[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned} \tag{I.3.7}$$

Na última igualdade foram usadas as seguintes relações trigonométicas:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{e} \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

Da definição de divisão, de (I.3.6) e de (I.3.7), também resulta

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= z \cdot w^{-1} = [\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)]\Big[\frac{1}{\rho_2}\Big(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)\Big)\Big] \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\Big(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\Big). \end{aligned} \tag{I.3.8}$$

É habitual denotar a expressão $\cos\theta + i\sin\theta$ por $e^{i\theta}$, ou seja,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{I.3.9}$$

Note que
$$e^{i(\theta+2k\pi)} = \cos(\theta+2k\pi) + i\sin(\theta+2k\pi) = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esta igualdade é conhecida por *fórmula de Euler*. A escolha deste símbolo será explicada mais tarde. Observe-se que

$$|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1.$$

Usando a igualdade (I.3.9), um número $z \neq 0$ pode então ser escrito na forma $z = \rho e^{i\theta}$, ainda designada de forma polar. Assim, as igualdades (I.3.4), (I.3.5) e I.3.6 podem ser rescritas na forma

$$-z = \rho e^{i(\theta+\pi)} \quad \text{e} \quad \overline{z} = \rho e^{i(-\theta)} \tag{I.3.10}$$

e

$$z^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{i(-\theta)}. \tag{I.3.11}$$

Em particular, considerando $\rho = 1$,

$$-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}, \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{i(-\theta)} \quad \text{e} \quad \left(e^{i\theta}\right)^{-1} = e^{i(-\theta)}.$$

Dados dois número complexo $z \neq 0$ e $w \neq 0$, escritos na forma polar $z = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $w = \rho_2 e^{i\theta_2}$, o produto e a divisão vêm então dados pelas igualdades

$$z \cdot w = (\rho_1 e^{i\theta_1})(\rho_2 e^{i\theta_2}) = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{I.3.12}$$

e

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}. \tag{I.3.13}$$

Em particular, considerando $\rho_1 = \rho_2 = 1$,

$$(e^{i\theta_1})(e^{i\theta_2}) = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \quad \text{e} \quad \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

I.4 Potências inteiras de um número complexo. Fórmula de De Moivre

Dado um número complexo $z = x + iy$, à partida, se pretendermos determinar uma potência natural de z, $z^n = (x+iy)^n$, teremos de recorrer ao binómio de Newton ou calcular o produto dos n fatores. Contudo, se considerarmos um numero complexo não nulo na forma polar, o cálculo de potências torna-se mais simples. De facto, dado $n \in \mathbb{Z}$ e $z = \rho e^{i\theta}$, $z \neq 0$, pretendemos determinar uma formula para z^n. Afirmamos que

$$z^n = \rho^n e^{in\theta}. \tag{I.4.1}$$

A fórmula anterior é conhecida como "Fórmula de De Moivre". Em particular, considerando $\rho = 1$, obtemos

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta), \quad n \in \mathbb{Z}$$

O caso $n \in \mathbb{N}$, prova-se por indução matemática, fazendo uso da igualdade do produto (I.3.12) (fica como exercício).

O caso $n = 0$ também se verifica, convencionando que $z^0 = 1$, sempre que $z \neq 0$.

Falta verificar o caso $n \in \mathbb{Z}$, com $n < 0$. Definindo z^n como sendo $z^n = \left(z^{-1}\right)^{-n}$, temos pela igualdade (I.3.11) e por (I.4.1) (que é válida para $-n > 0$)

$$z^n = \left(z^{-1}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{\rho}e^{-i\theta}\right)^{-n} = \frac{1}{\rho^{-n}}e^{-i(-n)\theta} = \rho^n e^{in\theta}.$$

Terminámos, assim, a prova da fórmula de Moivre.

I.5 Raízes de Números Complexos

A fórmula de De Moivre, (I.4.1), é útil para determinar as raízes índice n de um número complexo z não nulo. Ou seja, vai-nos permitir determinar w que satisfaz a igualdade

$$w^n = z.$$

Vamos procurar w na forma polar. Sejam $z = \rho_z e^{i\theta_z}$ e $w = \rho_w e^{i\theta_w}$ (não nulos). Então, através da igualdade (I.4.1),

$$w^n = z \Leftrightarrow \rho_w^n e^{in\theta_w} = \rho_z e^{i\theta_z}$$

Pela igualdade de números complexos na forma polar, (I.3.3),

$$\begin{aligned}\rho_w^n e^{in\theta_w} = \rho_z e^{i\theta_z} &\Leftrightarrow \begin{cases}\rho_w^n = \rho_z \\ n\theta_w = \theta_z + 2k\pi, \quad \text{para algum} \quad k \in \mathbb{Z},\end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\rho_w = \sqrt[n]{\rho_z} \\ \theta_w = \frac{\theta_z + 2k\pi}{n}, \quad \text{para algum} \quad k \in \mathbb{Z}.\end{cases}\end{aligned}$$

Ou seja,

$$w = \sqrt[n]{\rho_z} e^{i\left(\frac{\theta_z + 2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Verifica-se que existem apenas n soluções distintas, bastando para isso considerar $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Em conclusão,

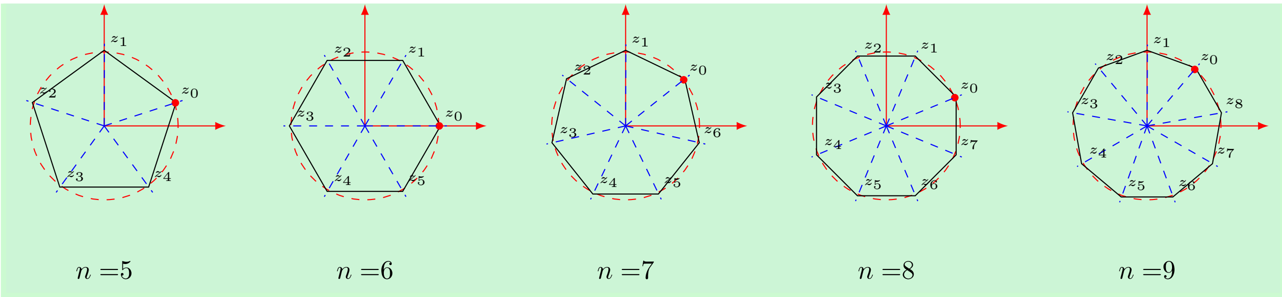
dado $z \neq 0$, $z = \rho e^{i\theta}$, existem n raízes índice n de z (notação $w = z^{1/n}$) dadas por

$$w = z^{1/n} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \{0, \ldots, n-1\}. \tag{I.5.1}$$

Observações I.5.1

(i) Usamos a notação $\sqrt[n]{\rho}$ para indicar a raíz índice n habitual de um número real positivo ρ, ou seja, para indicar o único número real positivo que elevado a n dá ρ, e usamos a notação $z^{1/n}$ para indicar as n raízes índice n de z, ou seja, para indicar os n números complexos que elevados a n dão z.

(ii) As n raízes índice n de um número complexo estão nos vértices de um polígono regular de n lados centrado na origem. Ver exemplos na figura abaixo (o ponto a vermelho indica a raíz $z_0 = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{n}}$ e $z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \{0, \ldots, n-1\}$.).



Exercício I.5.2

Determine as raízes cúbicas de -8, ou seja, determine

$$(-8)^{1/3}$$

Resolução

Como

$$-8 = 8e^{i\pi} = 2^3 e^{i\pi},$$

temos

$$(-8)^{1/3} = 2e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2,$$

ou seja, as três raízes cúbicas de -8 são:

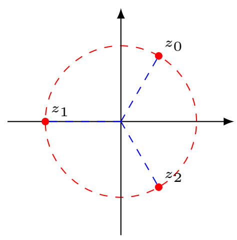
$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi+2\pi}{3}} = 2e^{i\pi} = 2(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -2,$$

e

$$z_3 = 2e^{i\frac{\pi+4\pi}{3}} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2e^{i(-2\pi+\frac{5\pi}{3})} = 2e^{i(-\frac{\pi}{3})} = 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})) = 1 - i\sqrt{3}.$$

A representação geométrica das raízes está abaixo



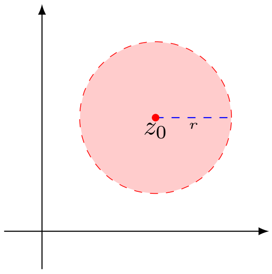
Exercício I.5.3

Prove que os zeros do polinómio $z^3 + 64$ são $z_0 = 2 + i2\sqrt{3}$, $z_1 = -4$ e $z_2 = 2 - i2\sqrt{3}$.

I.6 Regiões no plano complexo

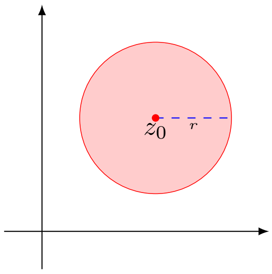
Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. A *bola aberta* de centro z_0 e raio r é o conjunto

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$



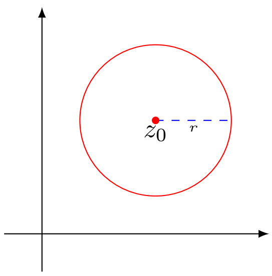
A uma bola aberta de centro z_0 chamamos por vezes uma vizinhança de z_0. Na bola aberta, podemos considerar $r = +\infty$. Nesse caso, $B(z_0, +\infty) = \mathbb{C}$. A *bola fechada* de centro z_0 e raio r é o conjunto

$$\overline{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$



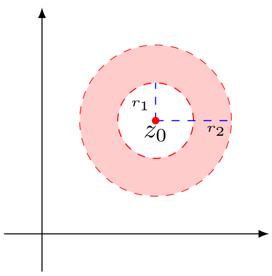
A circunferência de centro z_0 e raio r é o conjunto

$$C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$



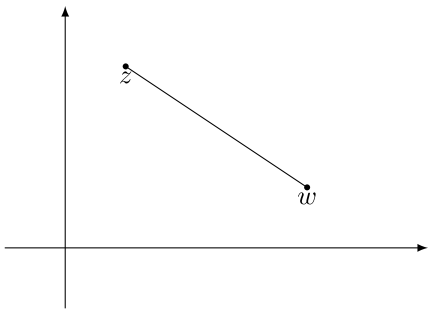
A *coroa* ou *anel* de centro z_0, com $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$, é o conjunto

$$A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}.$$



Dados $z, w \in \mathbb{C}$, o *segmento de reta* de z para w é o conjunto

$$[zw] = \{(1-t)z + tw : 0 \leq t \leq 1\}.$$



Seja $X \subseteq \mathbb{C}$. Dizemos que X é um conjunto *aberto* se, qualquer que seja $z \in X$, existir $r > 0$ tal que $B(z, r) \subset X$, ou seja, se para todo $z \in X$ existir um vizinhança de z contida em X. Por exemplo, qualquer bola aberta é um conjunto aberto, assim como qualquer anel $A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, com $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$.

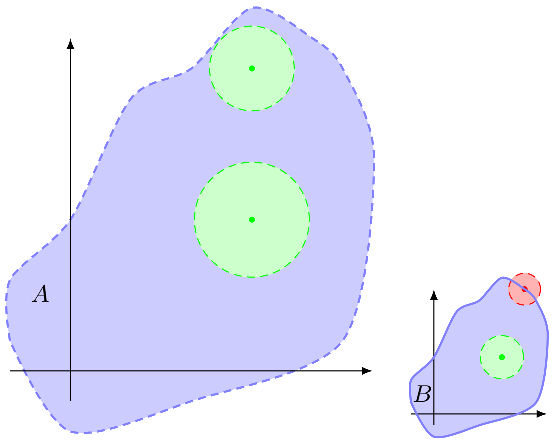


Figura I.6.1: A é um conjunto aberto; B não é um conjunto aberto.

Um conjunto aberto $X \subseteq \mathbb{C}$ diz-se *conexo* se quaisquer que sejam $z, w \in X$, existir uma linha poligonal, composta por segmentos unidos pelas extremidades, totalmente contida em X, que une z a w. Por exemplo, qualquer bola aberta é um conjunto conexo, assim como qualquer anel $A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, com $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$.

Um conjunto $X \subset \mathbb{C}$ diz-se limitado se existir $r > 0$ tal que $X \subset B(0, r)$. Se não for limitado, diz-se ilimitado.

I.7 Funções Complexas de Variável Complexa

Definição I.7.1

Uma função complexa de variável complexa e domínio $D \subseteq \mathbb{C}$ é uma função $f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que a cada número complexo $z \in D$ associa um número complexo w, denotado por $f(z)$ e designado por imagem de f em z.

Por vezes, iremos cometer um abuso de linguagem e referimo-nos à função $f(z)$ em vez da função f definida por uma dada expressão analítica.

Dada uma função $f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, se para cada $z = x + iy \in D$ expressarmos $w = f(z)$ na forma algébrica, temos

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy, \tag{I.7.1}$$

onde u e v são duas funções reais de variáveis reais (x, y).

Adicionalmente, se para cada $z \in D$, com $z \neq 0$, considerarmos $z = \rho e^{i\theta}$ na forma polar e expressarmos $w = f(z)$ na forma algébrica, temos

$$f(z) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta), \quad z = \rho e^{i\theta}. \tag{I.7.2}$$

onde u e v são duas funções reais de variáveis reais (ρ, θ), com $\rho > 0$.

I.7.1 Função Afim: Translações, Rotações e Mudanças de Escala. Matriz de Rotação

A primeira função que vamos abordar é a função afim.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, com $\alpha \neq 0$, e $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \alpha z + \beta$, $z \in \mathbb{C}$.

Vamos considerar $\alpha = \rho_\alpha e^{i\phi}$ e $\beta = x_\beta + iy_\beta$.

1.º caso: $\beta = 0$.

Seja $z \in \mathbb{C}$. Se $z = 0$, $f(z) = f(0) = 0$. Se $z \neq 0$, considerando $z = \rho e^{i\theta}$, temos

$$f(z) = \alpha z = \rho_\alpha e^{i\phi} z = \rho_\alpha \rho e^{i(\phi+\theta)}.$$

Portanto, $f(z)$ é um número complexo cuja distância à origem é $|f(z)| = \rho_\alpha \rho = \rho_\alpha |z|$ e que sofreu uma rotação com centro em 0 e amplitude de ϕ radianos.

Se $|\alpha| = \rho_\alpha = 1$, temos apenas rotação. Se $|\alpha| = \rho_\alpha \neq 1$, também temos mudança de escala: afastamento ou ampliação, se $|\alpha| = \rho_\alpha > 1$; aproximação ou redução, se $|\alpha| = \rho_\alpha < 1$.

2.º caso: $\beta \neq 0$.

Seja $z \in \mathbb{C}$. Se $z = 0$, $f(z) = f(0) = \beta$. Se $z \neq 0$, além de rotação e possível mudança de escala, também temos uma translação associada ao vetor (x_β, y_β).

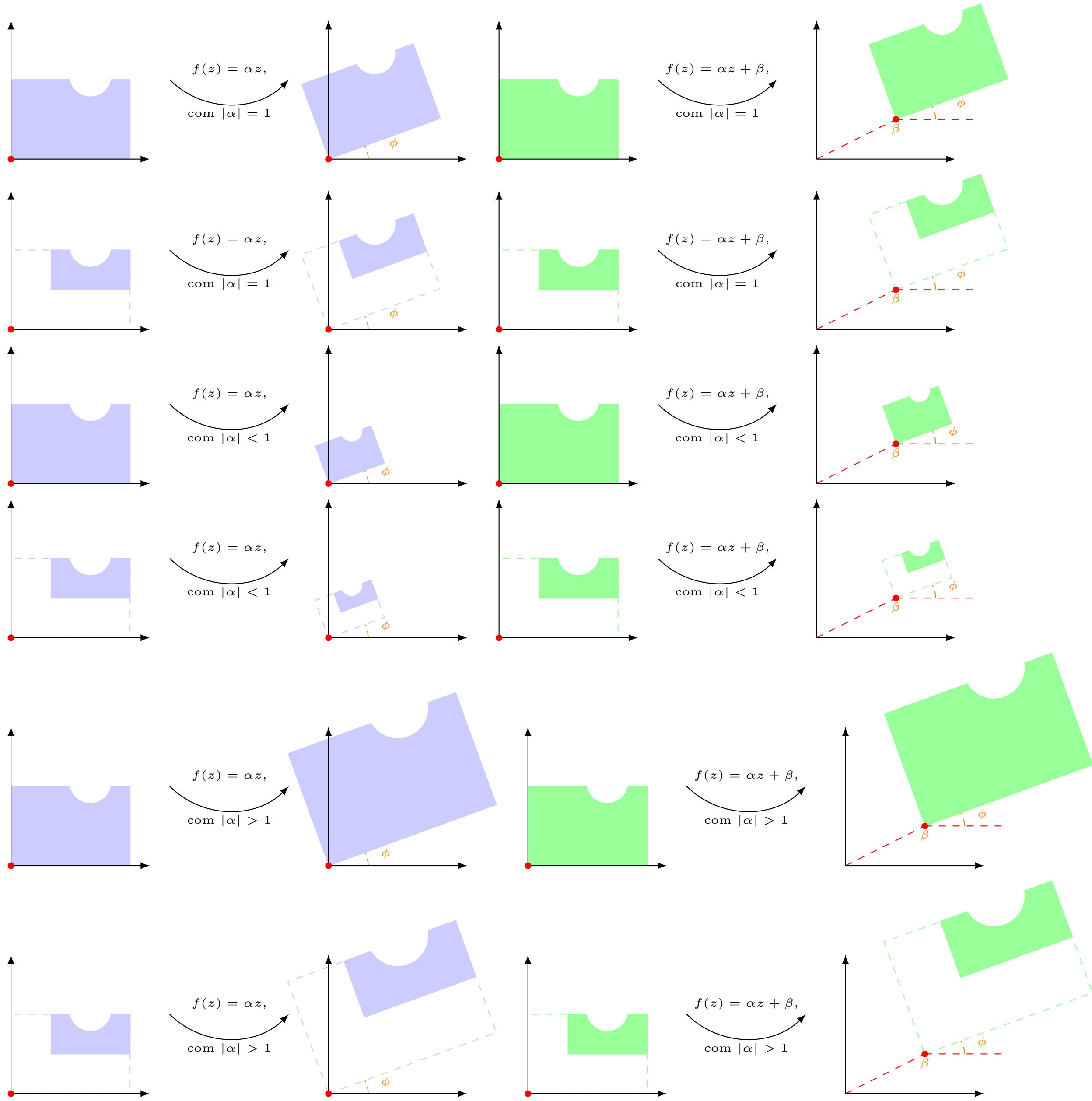


Figura I.7.1: Imagem por uma função afim de algumas regiões.

Exercício I.7.2

(a) Encontre a imagem por f da região $0 < \operatorname{Re} z < 1$, onde $f(z) = iz,\ z \in \mathbb{C}$.

(b) Esboce a imagem por f da região $0 < \operatorname{Re} z$, onde $f(z) = iz + i,\ z \in \mathbb{C}$.

(c) Determine e esboce a imagem por f da região $0 < \operatorname{Im} z$, onde $f(z) = (1 - i)z,\ z \in \mathbb{C}$.

Matriz de rotação

Vamos agora deduzir a matriz de rotação.

Consideremos um ponto no plano de coordenadas (X, Y), que podemos associar ao número complexo $Z = X + iY$, no plano de Argand. Suponhamos que pretendemos efetuar uma rotação de centro $(0, 0)$ e amplitude ϕ radianos ao ponto (X, Y). Quais serão as novas coordenadas do ponto?

Para determinar essas coordenadas, apenas precisamos de determinar a imagem de f em Z, para f definida por $f(z) = \alpha z,\ z \in \mathbb{C},\ \alpha = e^{i\phi}$. Designemos por (U, V) as novas coordenadas do ponto. Então,

$$\begin{aligned} U + iV &= f(Z) = \alpha(X + iY) = e^{i\phi}\,(X + iY) \\ &= (\cos\phi + i\sin\phi)\,(X + iY) \\ &= (X\cos\phi - Y\sin\phi) + i\,(Y\cos\phi + X\sin\phi)\,. \end{aligned}$$

Da igualdade de números complexos na forma algébrica, resulta

$$\begin{cases} U = X\cos\phi - Y\sin\phi \\ V = Y\cos\phi + X\sin\phi \end{cases} \iff \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X\cos\phi - Y\sin\phi \\ Y\cos\phi + X\sin\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

é a matrix de rotação de centro $(0, 0)$ e amplitude ϕ.

É fácil verificar que a matrix $R(\phi)$ é invertível e que a inversa é $(R(\phi))^T = R(-\phi)$. Intuitivamente, a matriz inversa da matriz de rotação, desfaz a rotação de amplitude ϕ. Para isso, precisamos de fazer uma rotação de amplitude $-\phi$.

Abaixo, apresenta-se um pequeno código em Matlab para determinar as novas coordenadas de um ponto (x, y), sujeito a rotação, mudança de escala e translação.

```
function RotEscTrans(z,ModAlpha,ArgAlphagraus,Beta)
%Determina a imagem de f(z)=alpha z + beta,
%Dados de entrada:
% z - na forma de vetor coluna z=[x;y]
% Modalpha - modulo de alpha
% Argalphagraus - argumento de alpha em graus
% Beta - na forma de vetor coluna beta=[a;b]
%Exemplo de utilizacao: RotEscTrans([1;1],1.5,20,[8;1])

%converte o argumento de alpha em graus para radianos
phi=2*pi*ArgAlphagraus/360; %Argumento de alpha em radianos

%Matrix de rotacao
Rot=[cos(phi) -sin(phi); sin(phi) cos(phi)];

novascoord=ModAlpha*Rot*z+Beta
end
```

I.7.2 Função Exponencial

A função exponencial é a função $exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$exp(z) = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Dado $z \in \mathbb{C}$, vamos usar daqui em diante a notação

$$exp(z) = e^z.$$

Note-se que

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z} = e^x > 0, \; z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Em particular, $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Observe-se, ainda, que y é um argumento de e^z. Portanto, dado outro argumento de e^z, estes diferem por um múltiplo inteiro de 2π. Como tal,

$$\arg(e^z) = y + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A função exponencial complexa generaliza a função exponencial real, pois para $z = x + i0$, $e^z = e^x$. Abaixo listamos algumas das propriedades da função exponencial (algumas surpreendentes!).

Proposição I.7.3

Dados dois números complexos z e w.

(a) $e^z e^w = e^{z+w}$, $z, w \in \mathbb{C}$.

(b) $\dfrac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$, $z, w \in \mathbb{C}$.

(c) *exp é uma função periódica de período $2\pi i$.*

(d) *e^z pode ser um número complexo qualquer, com exceção do zero. Em particular, e^z pode ser um número real negativo ou um imaginário puro.*

Demonstração

A demonstração das propriedades (a)-(c) ficam como exercício. Vejamos a demonstração da propriedade (d). Seja $w \neq 0$ um número complexo. Vamos provar que existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $e^z = w$. Suponhamos que $w = \rho e^{i\theta}$ (note que $\rho > 0$, pois $w \neq 0$). Se considerarmos $z = \ln \rho + i\theta$, verificamos facilmente que

$$e^z = e^{\ln \rho + i\theta} = e^{\ln \rho} e^{i\theta} = \rho e^{i\theta} = w,$$

o que prova o pretendido. ∎

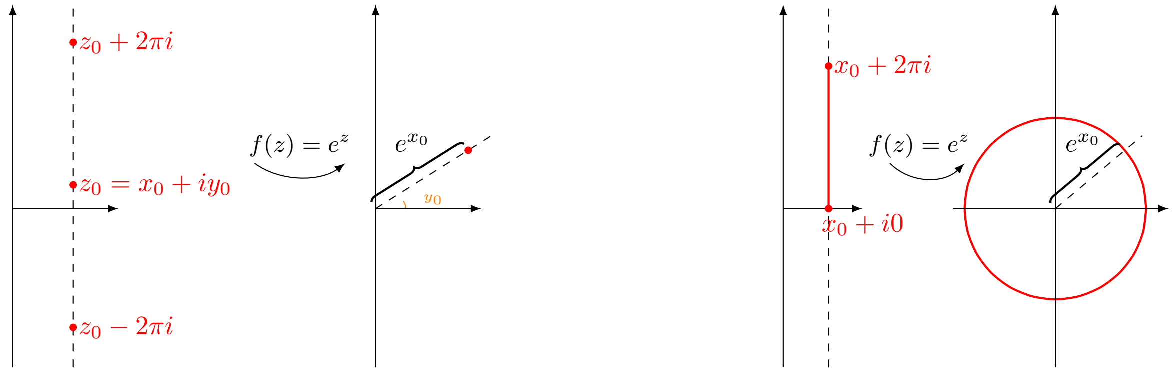


Figura I.7.2: Imagem por e^z de alguns pontos da reta vertical $\operatorname{Re} z = x_0$, na primeira figura, e do segmento de reta definido por $\operatorname{Re} z = x_0 \wedge \operatorname{Im} z \in [0, 2\pi]$, na segunda figura.

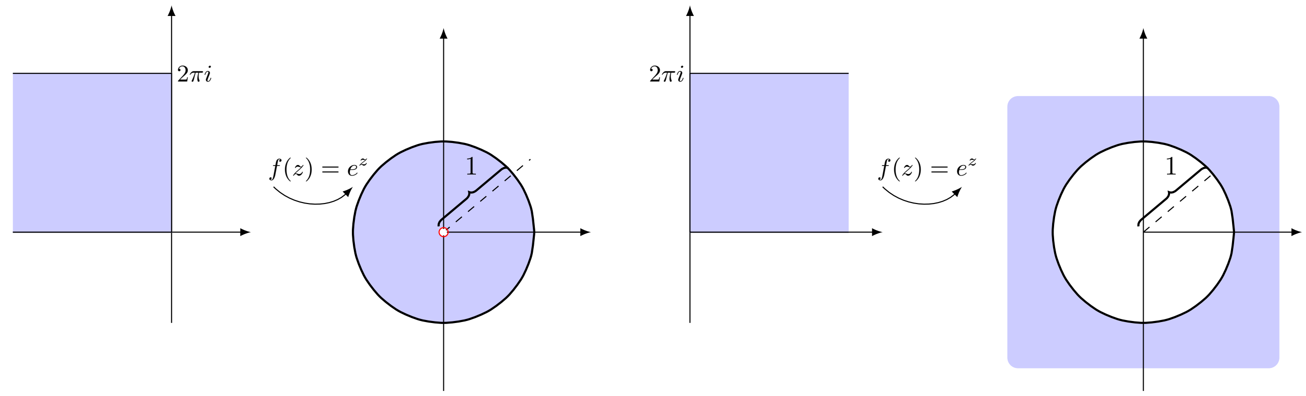


Figura I.7.3: Imagem por e^z de algumas faixas. No primeiro circulo tem de se excluir o centro (a origem, pois $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$).

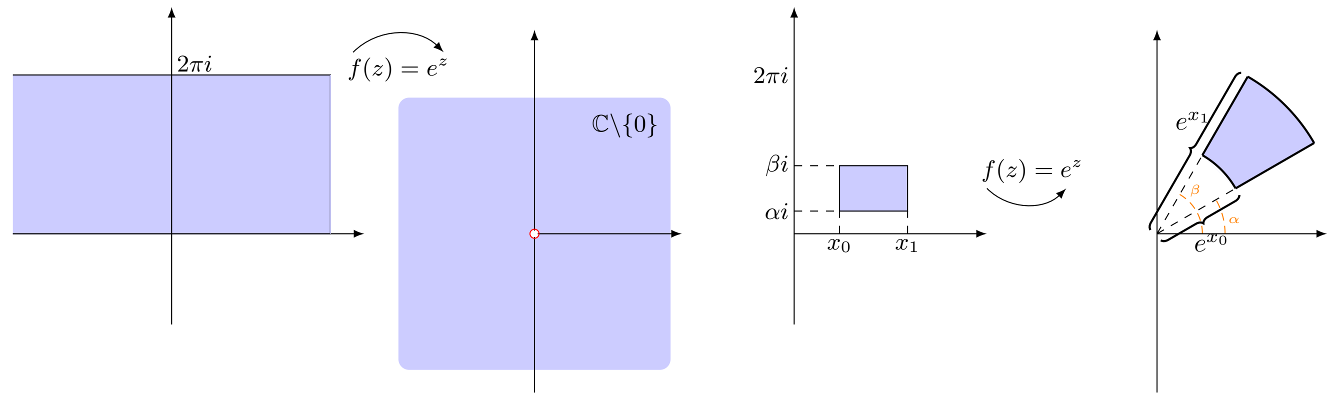


Figura I.7.4: Imagem por e^z de algumas regiões. Tem de se excluir a origem, pois $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

I.7.3 O Logaritmo

Nos números reais, o logaritmo ln, de base natural, é definido como a função inversa da função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = e^x$ para todo $x > 0$. Portanto, para $x > 0$, $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$. Vejamos o que se passa nos complexos.

Dado $w \in \mathbb{C}$, já sabemos que e^w pode ser um número complexo qualquer com a exceção da origem. Seja então $z \neq 0$, na forma polar $z = \rho e^{i\theta}$ e seja $w = x + iy \in \mathbb{C}$. Queremos saber quando é que $e^w = z$. Então, atendendo à igualdade (I.3.3) de números complexos na forma polar,

$$e^w = z \Leftrightarrow e^x e^{iy} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln \rho \\ y = \theta + 2k\pi \quad \text{para algum} \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Portanto, a solução de $e^w = z$ é dada por $w = \ln|z| + i \arg z$. Existem, assim, uma infinidade de soluções! Vamos representar esta infinidade de soluções por $\log z$. Atenção que log não é uma função. Para que seja uma função, precisamos de considerar um argumento de z num determinado intervalo, semiaberto específico, de amplitude 2π. Nesse caso, temos uma função que designaremos por um *ramo do logaritmo*. Se considerarmos o argumento principal de z, obtém-se a função designada por *ramo principal do logaritmo* ou por *logaritmo principal*, que será denotada por Log e definida por

$$\operatorname{Log}(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z, \quad \textit{para} \quad z \neq 0.$$

Definição I.7.4

Dado um número complexo $z \neq 0$, o logaritmo de z é dado por

$$\log(z) = \ln|z| + i \arg z \quad (\textit{uma infinidade de valores})$$

e o logaritmo principal de z é dado por

$$\operatorname{Log}(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z, \quad \textit{para} \quad z \neq 0.$$

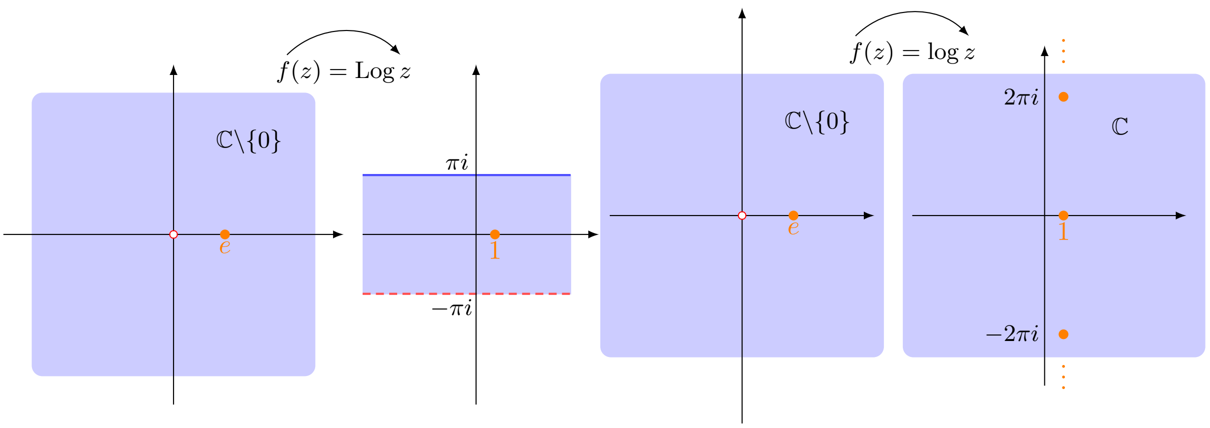


Figura I.7.5: Diferenças entre Log e log

Vejamos agora alguns exemplos.

Exemplos I.7.5

(a) $\log(1) = \ln 1 + i\ \arg(1) = 0 + i\,(0 + 2k\pi) = i\,2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

(b) $\text{Log}\,(1) = \ln 1 + i\,\text{Arg}\,(1) = 0 + i\,0 = 0.$

(c) $\log(-1) = \ln|-1| + i\ \arg(-1) = 0 + i\,(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$

(d) $\text{Log}\,(-1) = \ln|-1| + i\,\text{Arg}\,(-1) = 0 + i\,\pi = i\pi.$

(e) $\log(e) = \ln e + i\ \arg(e) = 1 + i\,(0 + 2k\pi) = 1 + i\,2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

(f) $\text{Log}\,(e) = \ln e + i\,\text{Arg}\,(e) = 1 + i0 = 1.$

(g) $e^z = -1$ se e só se $z = \log(-1) = i\,(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$

À custa do log podemos definir potência de baze z e expoente w, para $z, w \in \mathbb{C}$, com $z \neq 0$. Assim, podemos definir z^w por

$$z^w = \exp(w \log z).$$

Observação I.7.6

Atenção: A expressão anterior pode representar um valor ou mais valores (em número finito ou uma infinidade). Por exemplo,

$$i^2 = \exp(2\log i) = \exp(2(\ln|i| + i\arg(i))) = e^{2(0+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi))} = e^{i(\pi+4k\pi)} = e^{i\pi} = -1 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$i^{1/2} = \exp(\frac{1}{2}\log i) = \exp(\frac{1}{2}(\ln|i| + i\arg(i))) = \exp(\frac{1}{2}(0 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))) = e^{i(\frac{\pi}{4}+k\pi)}, \quad k = 0, 1.$$

$$i^i = \exp(i\log i) = \exp(i(\ln|i| + i\arg(i))) = \exp(i(0 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))) = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Quando usamos o ramo principal do logaritmo na expressão z^w, obtemos apenas um valor que será designado por *valor principal* de z^w.

I.7.4 Funções Trigonométricas e Hiperbólicas

Como $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ e $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$, temos

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

e

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Isto motiva a definição das funções trigonométricas sin e cos para variável complexa (mais tarde veremos uma outra motivação) como indicado abaixo.

Definição I.7.7

Dado um número complexo z, definimos o seu coseno por

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

e o seu seno por

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

O sinh e o cosh para os complexos serão definidos de forma análoga à definição nos reais.

Definição I.7.8

Dado um número complexo z, definimos o seu coseno hiperbólico por

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

e o seu seno hiperbólico por

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

A seguir indicamos algumas propriedades, cuja demonstração fica como exercício. Algumas propriedades serão demostradas nas aulas (ver folha prática de exercícios).

Para as funções trigonométricas definidas anteriormente temos as seguintes propriedades.

Proposição I.7.9

Sejam $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e $w \in \mathbb{C}$. Então,

(a) $\sin(-z) = -\sin z$;

(b) $\cos(-z) = \cos z$;

(c) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$;

(d) $\sin(z + w) = \sin z \, \cos w + \cos z \, \sin w$;

(e) $\cos(z + w) = \cos z \, \cos w - \sin z \, \sin w$;

(f) $\sin(iz) = i \sinh(z)$;

(g) $\cos(iz) = \cosh z$;

(h) $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$;

(i) $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$;

(j) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$;

(k) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$;

(l) $|\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y$;

(m) $|\sinh y| \leq |\cos z| \leq \cosh y$;

(n) $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$;

(o) $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Das propriedades (j) e (k) vê-se facilmente que as funções sin e cos não são limitadas em $\mathbb{C}$.

Para as funções hiperbólicas definidas anteriormente temos as seguintes propriedades.

Proposição I.7.10

Sejam $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e $w \in \mathbb{C}$. Então,

(a) $\sinh(-z) = -\sinh z$;

(b) $\cosh(-z) = \cosh z$;

(c) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$;

(d) $\sinh(z + w) = \sinh z \, \cosh w + \cosh z \, \sinh w$;

(e) $\cosh(z + w) = \cosh z \, \cosh w + \sinh z \, \sinh w$;

(f) $\sinh(iz) = i \sin z$;

(g) $\cosh(iz) = \cos z$;

(h) $\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$;

(i) $\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$;

(j) $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$;

(k) $|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$;

(l) $|\sinh x| \leq |\sinh z| \leq \cosh x$;

(m) $|\sinh x| \leq |\cosh z| \leq \cosh x$;

(n) $\sinh z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$;

(o) $\cosh z = 0 \Leftrightarrow z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$.

I.7.5 Observações sobre o argumento

Dado um número complexo $z \neq 0$, na forma polar $z = \rho e^{i\theta}$, com $\theta \in]-\pi, \pi]$, é fácil determinar a parte real e a parte imaginária de z, através das igualdades (I.3.1), em função de (ρ, θ). Reciprocamente, dado $z = x + iy \neq 0$ também é fácil determinar ρ em função de (x, y), uma vez que

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0. \tag{I.7.3}$$

Menos óbvia é uma expressão para θ. Contudo, verifica-se facilmente que

$$\theta = \begin{cases} \arccos(\frac{x}{\rho}), & \text{se} \quad y \geq 0 \ \wedge \ \rho > 0 \\ \\ -\arccos(\frac{x}{\rho}), & \text{se} \quad y < 0. \end{cases}$$

Desta forma, $\operatorname{Arg} z = \Theta(x,y)$, para $z = x+iy$, com $\Theta : \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \longrightarrow]-\pi,\pi]$, a função real de duas variáveis reais, definida por

$$\Theta(x,y) = \begin{cases} \arccos(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}), & \text{se} \quad y \geq 0 \quad \wedge \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ -\arccos(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}), & \text{se} \quad y < 0. \end{cases} \tag{I.7.4}$$

Mais geralmente, dado $z \neq 0$, o argumento em $]\alpha-2\pi,\alpha]$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, vem dado por

$$\arg_\alpha z = \operatorname{Arg}(e^{i(\pi-\alpha)}z) + \alpha - \pi.$$

A função Θ definida por (I.7.4) não é contínua nos pontos $(x_0,y_0) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \wedge y = 0\}$. Contudo, Θ e as suas derivadas parciais em ordem a x e a y de qualquer ordem existem e são contínuas em $\mathbb{R}^2\backslash D$, onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \wedge y = 0\}$. Em particular, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash D$,

$$\Theta_x(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \wedge \quad \Theta_y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}. \tag{I.7.5}$$

Analogamente, se definirmos a função $\Theta_\alpha : \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \longrightarrow]\alpha-2\pi,\alpha]$ por $\Theta(x,y)_\alpha = \arg_\alpha(x+iy)$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, também é fácil verificar que Θ_α não é contínua nos pontos $(x_0,y_0) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha \wedge r > 0\}$. Contudo, Θ_α e as suas derivadas parciais em ordem a x e a y de qualquer ordem existem e são contínuas em $\mathbb{R}^2\backslash D_\alpha$, onde $D_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha \wedge r \geq 0\}$. Em particular, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash D_\alpha$,.

$$(\Theta_\alpha)_x(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \wedge \quad (\Theta_\alpha)_y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Observe que para $\alpha = \pi$, temos $\arg_\pi = \operatorname{Arg}$, $\Theta_\pi = \Theta$ e $D_\pi = D$.

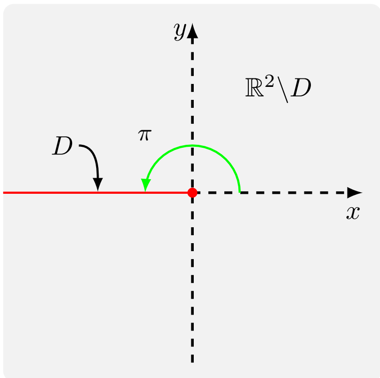


Figura I.7.6: Representação de D e $\mathbb{R}^2\backslash D$

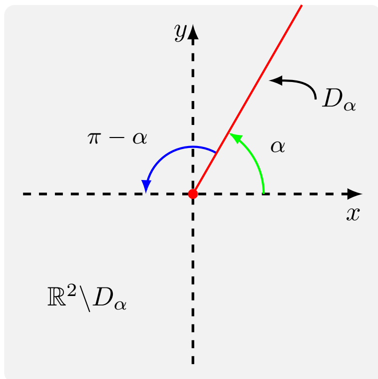


Figura I.7.7: Representação de D_α e $\mathbb{R}^2\backslash D_\alpha$

Pelo exposto, a aplicação

$$\begin{array}{rccl} T_\alpha : &]0,\infty[\times]\alpha-2\pi,\alpha[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2\backslash D_\alpha \\ \\ & (\rho,\theta) & \longmapsto & T_\alpha(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \end{array}$$

é uma função bijetiva e suave em $]0,\infty[\times]\alpha-2\pi,\alpha[$ (isto é, cada função componente é uma função contínua com as derivadas parciais de qualquer ordem contínuas em $]0,\infty[\times]\alpha-2\pi,\alpha[$) e a sua inversa

$$\begin{array}{rccl} T_\alpha^{-1} : & \mathbb{R}^2\backslash D_\alpha & \longrightarrow &]0,\infty[\times]\alpha-2\pi,\alpha[\\ \\ & (x,y) & \longmapsto & T_\alpha^{-1}(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \Theta_\alpha(x,y)) \end{array}$$

também é uma função suave em $\mathbb{R}^2\backslash D_\alpha$. Para os mais curiosos, a aplicação T_α é um exemplo do que se chama um difeomorfismo C^∞.

I.8 Limites de funções complexas de variável complexa e continuidade

Vamos agora definir o limite de uma função complexa de variável complexa. A definição é análoga à definição dada para funções reais de variável real.

Definição I.8.1

Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e seja $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ com $D \subseteq \mathbb{C}$. Suponhamos que f está definida numa vizinhança de z_0, mas não necessariamente em z_0. Dizemos que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 : (z \in D \wedge 0 < |z - z_0| < \delta) \Longrightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Observe que a definição de limite não depende do que se passa no ponto z_0. Quando $z \to z_0$, z tende para z_0 por valores diferentes de z_0. As propriedades algébricas dos limites conhecidas para as funções reais continuam válidas para as funções complexas. Também se prova como no caso de funções reais reais que o limite, caso exista, é único.

Exercício I.8.2

Prove por definição que

$$\lim_{z \to 1} i\frac{z}{4} = \frac{i}{4}.$$

Resolução

Queremos provar que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : (z \in \mathbb{C} \wedge 0 < |z - 1| < \delta) \Longrightarrow \left| i\frac{z}{4} - \frac{i}{4} \right| < \varepsilon.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Como

$$\left| i\frac{z}{4} - \frac{i}{4} \right| = \left| \frac{i}{4}(z-1) \right| = \frac{1}{4}|z-1|,$$

se fizermos $\delta = 4\,\varepsilon$ (estamos a garantir a existência do δ), obtemos o pretendido. De facto, para $z \in \mathbb{C}$,

$$0 < |z - 1| < \underbrace{4\,\varepsilon}_{=\delta} \Longrightarrow \left| i\frac{z}{4} - \frac{i}{4} \right| = \frac{1}{4}|z-1| < \frac{1}{4} 4\,\varepsilon = \varepsilon.$$

O próximo resultado é uma consequência imediata da definição, mas será de grande utilidade. O resultado afirma que caso o limite de uma função f exista, quando z tende para z_0, o limite terá de ser o mesmo independentemente de z tender para z_0 ao longo da reta vertical $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0$ ou ao longo da reta horizontal $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_0$.

Teorema I.8.3

Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e seja $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ com $D \subseteq \mathbb{C}$. Suponhamos que f está definida numa vizinhança de z_0, mas não necessariamente em z_0. Se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \in \mathbb{C},$$

então

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0}} f(z) = L \quad \wedge \quad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_0}} f(z) = L.$$

O teorema anterior afirma que se

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0}} f(z) = L_1 \quad \wedge \quad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_0}} f(z) = L_2, \quad \text{com} \quad L_1 \neq L_2,$$

então não existe $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Analogamente, caso o limite de uma função f exista, quando z tende para $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0} \neq 0$, o limite terá de ser o mesmo independentemente de $z = \rho e^{i\theta}$ tender para z_0 ao longo da semirreta $\theta = \theta_0$ ou ao longo do circulo $\rho = \rho_0$.

Teorema I.8.4

Seja $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0} \neq 0$ e seja $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ com $D \subseteq \mathbb{C}$. Suponhamos que f está definida numa vizinhança de z_0, mas não necessariamente em z_0. Se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \in \mathbb{C},$$

então

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z = \rho e^{i\theta} \\ \rho = \rho_0}} f(z) = L \quad \wedge \quad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z = \rho e^{i\theta} \\ \theta = \theta_0}} f(z) = L.$$

O resultado seguinte relaciona limites de funções complexas de variável complexa, com limites de duas funções reais de duas variáveis reais. A demonstração fica como exercício.

Teorema I.8.5

Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e seja $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ com $D \subseteq \mathbb{C}$. Suponhamos que f está definida numa vizinhança de z_0, mas não necessariamente em z_0. Então,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L = a + ib \in \mathbb{C} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

se e só se

$$\lim_{z \to z_0} \operatorname{Re} f(z) = a \quad \wedge \quad \lim_{z \to z_0} \operatorname{Im} f(z) = b.$$

Em particular, se $z_0 = x_0 + iy_0$ e $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L = a + ib \in \mathbb{C}$$

se e só se

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x, y) = a \quad \wedge \quad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x, y) = b.$$

Vamos resolver o exercício indicado abaixo fazendo uso do teorema anterior.

Exercício I.8.6

Mostre que $\lim\limits_{z \to i} iz = -1$.

Resolução

Vamos determinar a parte real e a parte imaginária da nossa função. Seja $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Então,

$$f(z) = iz = i\,(x + iy) = ix - y = \underbrace{-y}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{x}_{v(x,y)}$$

Deste modo, temos $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, com $u(x,y) = -y$ e $v(x,y) = x$. Como $z_0 = i = 0 + 1 \cdot i$, $(x_0, y_0) = (0,1)$. Por outro lado, atendendo à continuidade das funções u e v,

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} -y = -1 \qquad e \qquad \lim_{(x,y)\to(0,1)} v(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} x = 0.$$

Portanto, pela Teorema I.8.5,

$$\lim_{z\to i} iz = -1 + i\,0 = -1$$

Teorema I.8.7

Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e seja $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ com $D \subseteq \mathbb{C}$. Suponhamos que f está definida numa vizinhança de z_0, mas não necessariamente em z_0. Se

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L \in \mathbb{C},$$

então

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |L|.$$

Demonstração

A demonstração é uma consequência imediata da definição de limite e da desigualdade (o) da Proposição I.2.1, ou seja, da desigualdade $||f(z)| - |L|| \leq |f(z) - L|$. ∎

Se considerarmos $L = 0$ no teorema anterior, também é válida a implicação recíproca.

Corolário I.8.8

Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e seja $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ com $D \subseteq \mathbb{C}$. Suponhamos que f está definida numa vizinhança de z_0, mas não necessariamente em z_0. Então,

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{z\to z_0} |f(z)| = 0.$$

Demonstração

A demonstração é uma consequência imediata da definição de limite e da igualdade

$$||f(z)| - 0| = |f(z) - 0|.$$

∎

Teorema I.8.9

Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e seja $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função definida numa vizinhança de z_0, mas não necessariamente em z_0, isto é, existe $R > 0$ tal que $A(z_0, 0, R) \subset D$. Suponhamos que existe $L \in \mathbb{C}$, com $L \neq 0$ tal que $\lim_{z\to z_0} f(x) = L$. Então, existe $\delta > 0$, com $\delta < R$, tal que

$$f(z) \neq 0, \quad z \in A(z_0, 0, \delta).$$

Demonstração

Como $L \neq 0$, consideremos $\varepsilon = \frac{|L|}{2}$. Então, por definição de limite, existe $\delta_1 > 0$, tal que

$$|f(z) - L| < \varepsilon = \frac{|L|}{2}, \quad z \in A(z_0, 0, \delta_1) \cap D.$$

Considerando, $\delta = \min\{\delta_1, R\}$ e atendendo à desigualdade $||f(z)| - |L|| \leq |f(z) - L|$, obtemos

$$||f(z)| - |L|| < \varepsilon = \frac{|L|}{2}, \quad z \in A(z_0, 0, \delta),$$

e, em particular,

$$|f(z)| > |L| - \frac{|L|}{2} = \frac{|L|}{2} > 0, \quad z \in A(z_0, 0, \delta).$$

Portanto,

$$f(z) \neq 0, \quad z \in A(z_0, 0, \delta).$$

■

Definição I.8.10

Consideremos a função $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, com $D \subseteq \mathbb{C}$, e seja $z_0 \in D$. Suponhamos que f está definida numa vizinhança de z_0. Dizemos que f é contínua em z_0, se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Se D for um conjunto aberto, dizemos que f é contínua em D se for contínua em todos os pontos de D.

Teorema I.8.11

Seja $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função definida numa vizinhança de z_0, isto é, existe $R > 0$ tal que $B(z_0, R) \subset D$. Suponhamos que f é contínua em z_0 e que $f(z_0) \neq 0$. Então, existe $\delta > 0$, com $\delta < R$, tal que

$$f(z) \neq 0, \quad z \in B(z_0, \delta).$$

Demonstração

A demonstração faz-se exatamente como a demonstração do Teorema I.8.9 considerando $L = f(z_0) \neq 0$ e substituindo $A(z_0, 0, \delta)$ por $B(z_0, \delta)$. ■

As propriedades de continuidade conhecidas para as funções reais continuam válidas para as funções complexas. Por exemplo, soma, produtos e quociente de funções contínuas ainda são funções contínuas no seu domínio. Em particular, qualquer função polinomial é uma função contínua em $\mathbb{C}$ e qualquer função racional é contínua no seu domínio. A composta de duas funções contínuas também é uma função contínua.

I.9 O infinito complexo

Muitas vezes é conveniente adicionar um ponto ∞ ao plano complexo, considerando o conjunto complexo estendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Ao contrário da reta real estendida, não existe $-\infty$ nem $+\infty$. Claro que temos de alguma forma atribuir um significado a este ponto ∞.

Fixemos um sistema de eixos ortogonal no espaço (portanto a 3 dimensões), $OXYZ$. Consideremos uma esfera E de raio 1 e centro no ponto $(0, 0, 0)$. Ao ponto $N = (0, 0, 1)$ da esfera iremos chamar pólo norte e vamos identificar o plano OXY (ou seja, o plano de equação $z = 0$) com o plano complexo. Dado um ponto P do plano $(z = 0)$, existe um e um só $P' \in E$ que pertence à reta definida por N e P. Desta forma, consegue-se definir uma função bijetiva entre $p : E \backslash \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}$. Ao considerarmos a extensão desta função a E atribuindo ao valor de N o valor ∞ do plano complexo estendido, ainda obtemos uma função bijetiva. A esfera E é designada por *esfera de Riemann* e a aplicação p é designada de *projeção estereográfica*.

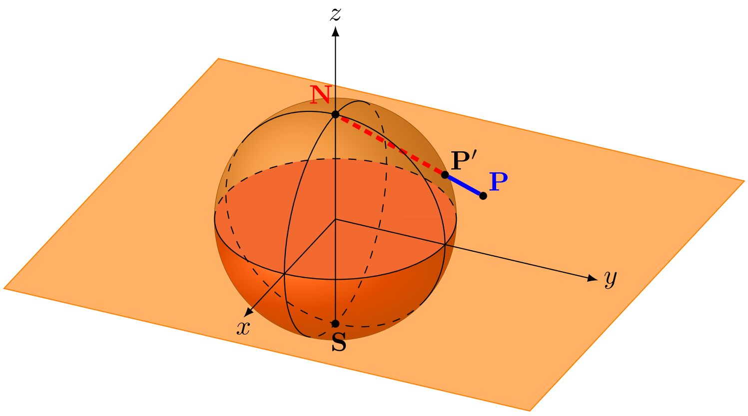


Figura I.9.1: Projeção estereográfica.

A imagem por p do hemisfério norte da esfera, com exceção do pólo norte, corresponde ao anel $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z|\}$, a imagem por p do equador corresponde à circunferência $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e a imagem por p do hemisfério sul da esfera corresponde à bola aberta centrada em zero e de raio 1, isto é, ao conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$, com ε muito próximo de zero, a imagem inversa por p do conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{\varepsilon}\}$ corresponde a uma região da esfera muito próxima do pólo norte, excluindo o pólo norte N. Desta forma, diz-se que o conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{\varepsilon}\}$ corresponde a uma vizinhança do ponto ∞.

I.10 Limites e o infinito complexo

Nesta secção vamos introduzir a noção de limite de uma função complexa quando o z tende para ∞ ou quando $f(z)$ tende para ∞.

Definição I.10.1

Consideremos $f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ e seja $z_0 \in \mathbb{C}$. Suponhamos que f está definida numa vizinhança de z_0, mas não necessariamente em z_0. Dizemos que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : (z \in D \wedge 0 < |z - z_0| < \delta) \Longrightarrow |f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Teorema I.10.2

Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e seja $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ com $D \subseteq \mathbb{C}$. Suponhamos que f e $\frac{1}{f}$ estão definidas numa vizinhança de z_0, mas não necessariamente em z_0. Então,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \Longleftrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Definição I.10.3

Seja $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. *Dizemos que*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = L \in \mathbb{C}$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 : \left(z \in \mathbb{C} \land |z| > \frac{1}{\delta}\right) \Longrightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Teorema I.10.4

Seja $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. *Então,*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = L \Longleftrightarrow \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = L.$$

Exercício I.10.5

Escreva a definição de

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty.$$

I.11 Diferenciabilidade

Definição I.11.1: Função Diferenciável

Consideremos a função $f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *e seja* $z_0 \in D$. *Suponhamos que* f *está definida numa vizinhança de* z_0. *A função* f *diz-se diferenciável em* z_0 *se existir*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

A este limite chama-se derivada de f *em* z_0 *e denota-se por* $f'(z_0)$. *Se* D *for um conjunto aberto,* f *é diferenciável em* D *se for diferenciável em todos os pontos de* D. *Nesse caso, podemos definir a função derivada de* f, $f' : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *por* $w = f'(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Exemplos I.11.2

(a) Consideremos a função definida por $f(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C}$, e seja $z_0 \in \mathbb{C}$. Como

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} (z + z_0) = 2\, z_0,$$

concluímos que f é diferenciável em z_0 e que $f'(z_0) = 2\, z_0$.

(b) Consideremos a função definida por $f(z) = \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$, e seja $z_0 \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}. \tag{I.11.1}$$

Se existir o limite (I.11.1), pelo Teorema I.8.3, o limite terá de ser o mesmo independentemente de z tender para z_0 ao longo da reta vertical $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0$ ou ao longo da reta horizontal $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_0$.

Assim, se fizermos $z_0 = x_0 + iy_0$ e $z = x + iy_0$, de (I.11.1) obtemos

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ \operatorname{Im} z=\operatorname{Im} z_0}} \frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\overline{x-x_0}}{x-x_0} = 1.$$

No entanto, se fizermos $z = x_0 + iy$, de (I.11.1) obtemos

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ \operatorname{Re} z=\operatorname{Re} z_0}} \frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{\overline{i(y-y_0)}}{i(y-y_0)} = -1$$

Logo, os dois limites anteriores são diferentes. Como tal, concluímos pelo Teorema I.8.3 que não existe

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0},$$

ou seja, a função f não é diferenciável em z_0.

(c) Consideremos a função definida por $f(z) = |z|^2$, $z \in \mathbb{C}$, e seja $z_0 \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0} \frac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z\overline{z}-z_0\overline{z_0}}{z-z_0}\\ &= \lim_{z\to z_0} \frac{z\overline{z}-z\overline{z_0}+z\overline{z_0}-z_0\overline{z_0}}{z-z_0}\\ &= \lim_{z\to z_0} \left(z\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}+\overline{z_0}\right).\end{aligned} \tag{I.11.2}$$

Se $z_0 = 0$, (I.11.2) é equivalente a

$$\lim_{z\to 0} \overline{z}.$$

Como $|\overline{z}| = |z|$, pelo Corolário I.8.8, concluímos que $\lim_{z\to 0} \overline{z} = 0$. Portanto, f é diferenciável em $z_0 = 0$ e $f'(0) = 0$.

Suponhamos agora $z_0 \neq 0$. Se existir o limite (I.11.2), pelo Teorema I.8.3, o limite terá de ser o mesmo independentemente de z tender para z_0 ao longo da reta vertical $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0$ ou ao longo da reta horizontal $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_0$. Assim, se fizermos $z_0 = x_0 + iy_0$ e $z = x + iy_0$, de (I.11.2) obtemos

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ \operatorname{Im} z=\operatorname{Im} z_0}} \left(z\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}+\overline{z_0}\right) = \lim_{x\to x_0} \left((x+iy_0)\frac{\overline{x-x_0}}{x-x_0}+\overline{x_0+iy_0}\right) = z_0+\overline{z_0} = 2x_0.$$

No entanto, se fizermos $z = x_0 + iy$, de (I.11.2) obtemos

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ \operatorname{Re} z=\operatorname{Re} z_0}} \left(z\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}+\overline{z_0}\right) = \lim_{y\to y_0} \left((x_0+iy)\frac{\overline{i(y-y_0)}}{i(y-y_0)}+\overline{x_0+iy_0}\right) = -z_0+\overline{z_0} = -2iy_0.$$

Como $z_0 \neq 0$, temos $x_0 \neq 0$ ou $y_0 \neq 0$. Logo, os dois limites anteriores são diferentes. Como tal, para $z_0 \neq 0$, concluímos pelo pelo Teorema I.8.3 que não existe

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0},$$

ou seja, a função f não é diferenciável em $z_0 \neq 0$.

Tal como nas funções reais, a diferenciabilidade num ponto implica a continuidade nesse ponto, como indica o próximo teorema.

Teorema I.11.3

Consideremos a função $f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ e seja $z_0 \in D$. Suponhamos que f está definida numa vizinhança de z_0. Se f for diferenciável em z_0, então f é contínua em z_0.

Demonstração

Como f é diferenciável em z_0, existe $f'(z_0) \in \mathbb{C}$. Assim,

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) = f'(z_0) \times 0 = 0.$$

Portanto, $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, ou seja, f é contínua em z_0. ◼

Exercício I.11.4

Indique uma função complexa de variável complexa que seja contínua num ponto z_0, mas não seja diferenciável nesse ponto.

As regras de derivação para a soma, o produto e o quociente de duas funções diferenciáveis, permanecem válidas no domínio onde essas operações estejam definidas. Também permanece válido o teorema da derivada da função composta. Assim temos os seguintes resultados:

Teorema I.11.5

Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ e $h : X \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, com D e X conjuntos abertos e tais que $f(D) \subset X$. Suponhamos que f e g são diferenciáveis em D e que h é direrenciável em X. Então, para $z \in D$,

(a) $(\alpha f + \beta g)'(z) = \alpha f'(z) + \beta g'(z)$, *com* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

(b) $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + g'(z)f(z)$;

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z) = \dfrac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{(g(z))^2}$, *supondo que* $g(z) \neq 0$;

(d) $((h \circ f)(z))' = h'(f(z)) \cdot f'(z)$;

(e) $(f^n(z))' = nf^{n-1}(z)f'(z)$, *com* $n \in \mathbb{N}$.

Exercício I.11.6

Determine o domínio e a derivada da função f definida pela seguinte expressão analítica

$$f(z) = \frac{z^3 + 2z + 1}{z^3 + 1}.$$

Resolução

O domínio de f será o conjunto $D = \{z \in \mathbb{C} : z^3 + 1 \neq 0\}$, pois o denominador da fração racional não pode ser nulo. Vamos então determinar as soluções complexas de $z^3 + 1 = 0$. Como

$$z^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^3 = -1 \Leftrightarrow z = (-1)^{1/3} \qquad \text{e} \qquad -1 = e^{i\pi},$$

recorrendo a (I.5.1), obtemos

$$z = e^{i\frac{\pi + k2\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Portanto,

$$z = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ou

$$z = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\pi} = -1$$

ou

$$z = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{6\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \overline{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \overline{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como tal, o domínio da função f é $D = \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1\right\}$.

Para determinar a expressão analítica da função derivada de f, usamos a regra da derivada do quociente, uma vez que o numerador e o denominador da expressão racional são funções diferenciáveis. Como tal, para $z \in D$, temos $z^3 + 1 \neq 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left(\frac{z^3+2z+1}{z^3+1}\right)' = \frac{\left(3z^2+2\right)\left(z^3+1\right) - \left(z^3+2z+1\right)3z^2}{\left(z^3+1\right)^2} \\ &= \frac{3z^5+2z^3+3z^2+2-3z^5-6z^3-3z^2}{\left(z^3+1\right)^2} = \frac{2-4z^3}{\left(z^3+1\right)^2}. \end{aligned}$$

Também existe uma Regra de L'Hôpital para funções complexas.

Teorema I.11.7: Regra de L'Hôpital

Consideremos as funções $f, g : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ e seja $z_0 \in D$. Suponhamos que f e g estão definidas numa vizinhança de z_0. Seja $B(z_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, essa vizinhança e suponhamos que f e g são diferenciáveis em z_0, $f(z_0) = g(z_0) = 0$, $g(z) \neq 0$, $z \in B(z_0, \varepsilon)\setminus\{z_0\}$ e $g'(z_0) \neq 0$. Então,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Demonstração

O resultado é uma consequência das propriedades dos limites e da definição de derivada, pois

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-0}{g(z)-0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\dfrac{f(z)-0}{z-z_0}}{\dfrac{g(z)-0}{z-z_0}} = \lim_{z\to z_0} \frac{\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

■

I.11.1 Condições de Cauchy-Riemann

Como já observámos anteriormente, conforme (I.7.1), uma função complexa de variável complexa pode exprimir-se através de duas funções reais u e v de duas variáveis reais x e y. O próximo resultado irá relacionar a derivada de f num ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ com as derivadas parciais de primeira ordem de u e v.

Teorema I.11.8: Condição necessária de diferenciabilidade

Consideremos a função $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, *com* $D \subseteq \mathbb{C}$, *e seja* $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. *Suponhamos que* f *está definida numa vizinhança de* z_0 *e que* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy \in D$. *Se* f *for diferenciável em* $z_0 = x_0 + iy_0$, *então existem as derivadas parciais de primeira ordem de* u *e* v *em relação às variáveis* x *e* y *em* (x_0, y_0) *e satisfazem nesse ponto as chamadas condições de Cauchy-Riemann, isto é,*

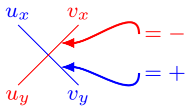
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad e \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \text{ [I.1]} \tag{I.11.3}$$

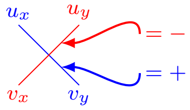
Além disso,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

[I.1] Se denotarmos por w_x e w_y as derivadas parciais de primeira ordem de w em ordem a x e em ordem a y, respetivamente, as condições de Cauchy-Riemann podem ser rescritas da seguinte forma:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \qquad \text{e} \qquad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

Mnemónica: 

ou 

Demonstração

Como f é diferenciável em z_0, temos

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Pelo Teorema I.8.5,

$$\operatorname{Re} f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \operatorname{Re} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{I.11.4}$$

e

$$\operatorname{Im} f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \operatorname{Im} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{I.11.5}$$

Escrevendo $z_0 = x_0 + iy_0$ e $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, de (I.11.4) e do Teorema I.8.3 obtém-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} f'(z_0) &= \lim_{\substack{z \to z_0 \\ \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0}} \operatorname{Re} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{\substack{(x,y) \to (x_0,y_0) \\ x = x_0}} \operatorname{Re} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0))}{(x - x_0) + i(y - y_0)} \\
&= \lim_{y \to y_0} \operatorname{Re} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0, y) - v(x_0, y_0))}{i(y - y_0)} \\
&= \lim_{y \to y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} \\
&= v_y(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} f'(z_0) &= \lim_{\substack{z\to z_0 \\ \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_0}} \operatorname{Re} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \\
&= \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ y=y_0}} \operatorname{Re} \frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)+i(v(x,y)-v(x_0,y_0))}{(x-x_0)+i(y-y_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \operatorname{Re} \frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)+i(v(x,y_0)-v(x_0,y_0))}{(x-x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{x-x_0} \\
&= u_x(x_0,y_0).
\end{aligned}$$

Portanto, existem as derivadas parciais u_x e v_y em (x_0, y_0) e

$$u_x(x_0,y_0) = \operatorname{Re} f'(z_0) = v_y(x_0,y_0). \tag{I.11.6}$$

Por outro lado, escrevendo $z_0 = x_0+iy_0$ e $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$, $z = x+iy$, de (I.11.5) e do Teorema I.8.3 resulta

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f'(z_0) &= \lim_{\substack{z\to z_0 \\ \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0}} \operatorname{Im} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \\
&= \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ x=x_0}} \operatorname{Im} \frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)+i(v(x,y)-v(x_0,y_0))}{(x-x_0)+i(y-y_0)} \\
&= \lim_{y\to y_0} \operatorname{Im} \frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)+i(v(x_0,y)-v(x_0,y_0))}{i(y-y_0)} \\
&= \lim_{y\to y_0} \operatorname{Im} \Big(\frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{(y-y_0)} - i\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{(y-y_0)} \Big) \\
&= \lim_{y\to y_0} -\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{(y-y_0)} \\
&= -u_y(x_0,y_0)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f'(z_0) &= \lim_{\substack{z\to z_0 \\ \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_0}} \operatorname{Im} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \\
&= \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ y=y_0}} \operatorname{Im} \frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)+i(v(x,y)-v(x_0,y_0))}{(x-x_0)+i(y-y_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \operatorname{Im} \frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)+i(v(x,y_0)-v(x_0,y_0))}{(x-x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{v(x,y_0)-v(x_0,y_0)}{x-x_0} \\
&= v_x(x_0,y_0).
\end{aligned}$$

Como tal, existem as derivadas parciais u_y e v_x em (x_0, y_0) e

$$v_x(x_0,y_0) = \operatorname{Im} f'(z_0) = -u_y(x_0,y_0). \tag{I.11.7}$$

De (I.11.6) e (I.11.7) resulta o pretendido.

■

O teorema anterior dá-nos uma condição necessária de diferenciabilidade. Ou seja, se as condições de Cauchy-Riemann não forem satisfeitas num ponto (x_0, y_0), a função não será diferenciável em $z_0 = x_0 + iy_0$.

Exemplo I.11.9

Vamos usar a função já considerada no Exemplo I.11.2 (b), para verificar que não é diferenciável em $z_0 \in \mathbb{C}$, através do Teorema I.11.8. Seja f a função definida por $f(z) = \overline{z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Para $z = x + iy$,

$$f(z) = \overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy = \underbrace{x}_{u(x,y)} + i \underbrace{-y}_{v(x,y)}.$$

Assim, a parte real de f e a parte imaginária de f são, respetivamente, as funções definidas por

$$u(x, y) = x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \text{e} \qquad v(x, y) = -y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Como

$$\begin{array}{rcl} u_x(x, y) & = & 1 \\ u_y(x, y) & = & 0 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} v_x(x, y) & = & 0 \\ v_y(x, y) & = & -1 \end{array},$$

temos $1 = u_x(x_0, y_0) \neq v_y(x_0, y_0) = -1$. Logo, as derivadas parciais de primeira ordem de u e v <u>não verificam</u> as condições de Cauchy-Riemann em (x_0, y_0). Portanto, pelo Teorema I.11.8, concluímos que a função f não é diferenciável em z_0.

Observação I.11.10

O Teorema I.11.8 não garante que f seja diferenciável em z_0, se as derivadas parciais de primeira ordem de u e v, parte real e parte imaginária de f, respetivamente, verificarem as condições de Cauchy-Riemann em (x_0, y_0).

O seguinte exercício apresenta-nos um exemplo de uma função f não diferenciável em $z_0 = 0$ e cujas derivadas parciais de primeira ordem de u e v, parte real e parte imaginária de f, respetivamente, verificam as condições de Cauchy-Riemann em $(0, 0)$.

Exercício I.11.11

Considere a função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(\overline{z})^2}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}.$$

Prove, usando a definição, que f não é diferenciável em $z_0 = 0$. Verifique que as derivadas parciais de primeira ordem de u e v, parte real e parte imaginária de f, respetivamente, verificam as condições de Cauchy-Riemann em $(0, 0)$.

O próximo resultado, que apresentamos sem demonstração, dá-nos uma condição suficiente de diferenciabilidade, ou seja, vai-nos permitir concluir que uma dada função é diferenciável num dado ponto, desde que sejam satisfeitas determinadas condições.

Teorema I.11.12: Condição suficiente de diferenciabilidade

Consideremos a função $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, com $D \subseteq \mathbb{C}$, e seja $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Suponhamos que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy \in D$ e que f está definida numa vizinhança de z_0 (denotada por $B(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$, com $\epsilon > 0$). Suponhamos que existem as derivadas parciais de u e v de primeira ordem em relação às variáveis x e y em $B((x_0, y_0), \epsilon) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \epsilon^2\}$. Se as derivadas parciais de u e v de primeira ordem forem contínuas em (x_0, y_0) e satisfizerem as condições de Cauchy-Riemann em (x_0, y_0), isto é,

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \qquad e \qquad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0),$$

então a função f é diferenciável em $z_0 = x_0 + iy_0$. Além disso,

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \qquad &\text{(I.11.8)} \\ &= v_y(x_0, y_0) - i\, u_y(x_0, y_0) \qquad &\text{(I.11.9)} \end{aligned}$$

Exemplo I.11.13

Vamos usar a função já considerada no Exemplo I.11.2 (c), para verificar que não é diferenciável em $z_0 \neq 0$, através do Teorema I.11.8, e que é diferenciável em $z_0 = 0$, através do Teorema I.11.12. Seja f a função definida por $f(z) = |z|^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Para $z = x + iy$,

$$f(z) = |z|^2 = |x + iy|^2 = x^2 + y^2 = \underbrace{x^2 + y^2}_{u(x,y)} + i \underbrace{0}_{v(x,y)}.$$

Assim, a parte real de f e a parte imaginária de f são, respetivamente, as funções definidas por

$$u(x,y) = x^2 + y^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \text{e} \qquad v(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Como

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= 2x \\ u_y(x,y) &= 2y \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} v_x(x,y) &= 0 \\ v_y(x,y) &= 0 \end{aligned},$$

as derivadas parciais de primeira ordem de u e v não verificam as condições de Cauchy-Riemann para $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ (observe que estamos a supor $z_0 = x_0 + iy_0 \neq 0$), pois $u_x(x_0, y_0) = 2x_0 \neq 0$ ou $u_y(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0$. Portanto, pelo Teorema I.11.8, concluímos que a função f não é diferenciável em $z_0 \neq 0$.

Por outro lado, as condições de Cauchy-Riemann verificam-se em $(x_0, y_0) = (0,0)$, e as derivadas parciais de primeira ordem de u e v são funções contínuas em $(x_0, y_0) = (0,0)$. Como tal, pelo Teorema I.11.12, concluímos que f é diferenciável em $z_0 = 0$. Além disso, pela igualdade (I.11.8), temos $f'(0) = u_x(0,0) + i\, v_x(0,y) = 0 + i\, 0 = 0$.

Exercício I.11.14

Usando as equações de Cauchy-Riemann, estude a diferenciabilidade da função f definida por $f(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C}$, em $z_0 \in \mathbb{C}$ e determine, caso exista, $f'(z_0)$.

Resolução

Para $z = x + iy$,

$$f(z) = (x + iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i \underbrace{2xy}_{v(x,y)}.$$

Assim, a parte real de f e a parte imaginária de f são, respetivamente, as funções definidas por

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \text{e} \qquad v(x, y) = 2xy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Então, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{array}{rcl} u_x(x,y) & = & 2x \\ u_y(x,y) & = & -2y \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} v_x(x,y) & = & 2y \\ v_y(x,y) & = & 2x \end{array}.$$

Seja $z_0 = x_0 + iy_0$. Como as derivadas parciais de primeira ordem de u e v são funções contínuas (pois são funções polinomiais) em (x_0, y_0) (aliás, são continuas em $\mathbb{R}^2$) e verificam as condições de Cauchy-Riemann em (x_0, y_0), pois

$$u_x(x_0, y_0) = 2x_0 = v_y(x_0, y_0) \wedge v_x(x_0, y_0) = 2y_0 = -u_y(x_0, y_0),$$

concluímos pelo Teorema I.11.12 que f é diferenciável em z_0. Além disso, pela igualdade (I.11.8), temos $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = 2x_0 + i2y_0 = 2(x_0 + iy_0) = 2z_0$.

Observação I.11.15

Pelo exercício anterior, podemos afirmar que a função f, definida por $f(z) = z^2$ para todo o $z \in \mathbb{C}$, é diferenciável em todos os pontos do seu domínio e que $f'(z) = 2z$, $z \in \mathbb{C}$.

Exercício I.11.16

Seja $\alpha \in \mathbb{C}$. Prove que a função f definida por $f(z) = e^{\alpha z}$, $z \in \mathbb{C}$, é diferenciável em $\mathbb{C}$ e que a sua função derivada f' é dada por $f'(z) = \alpha e^{\alpha z}$, $z \in \mathbb{C}$.

Resolução

Suponhamos que $\alpha = a + ib$ e seja $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ um número complexo arbitrariamente fixo. Vamos recorrer ao Teorema I.11.12 para provar que a função é diferenciável em z_0 e, além disso, determinar o valor de $f'(z_0)$.

Em primeiro lugar vamos expressar a função f na forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, com u e v funções reais de duas variáveis reais.

Então, recorrendo à definição da exponencial complexa, para $z = x + iy \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{\alpha(x+iy)} = e^{(a+bi)(x+yi)} \\ &= e^{ax-by+i(ay+bx)} = e^{ax-by} e^{i(ay+bx)} \\ &= e^{(ax-by)} \left(\cos(ay+bx) + i \sin(ay+bx)\right) \\ &= \underbrace{e^{(ax-by)} \cos(ay+bx)}_{u(x,y)} + i \underbrace{e^{(ax-by)} \sin(ay+bx)}_{v(x,y)}. \end{aligned} \tag{I.11.10}$$

Como tal, a parte real e a parte imaginária de f são, respetivamente,

$$u(x, y) = e^{(ax-by)} \cos(ay + bx), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$v(x, y) = e^{(ax-by)} \sin(ay + bx) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

As derivadas parciais de primeira ordem destas duas funções em ordem a cada uma das variáveis são, para cada

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
u_x(x, y) &= \quad a\, e^{(ax-by)} \cos(ay + bx) - b\, e^{(ax-by)} \sin(ay + bx) \\
u_y(x, y) &= -b\, e^{(ax-by)} \cos(ay + bx) - a\, e^{(ax-by)} \sin(ay + bx) \\
v_x(x, y) &= \quad a\, e^{(ax-by)} \sin(ay + bx) + b\, e^{(ax-by)} \cos(ay + bx) \\
v_y(x, y) &= -b\, e^{(ax-by)} \sin(ay + bx) + a\, e^{(ax-by)} \cos(ay + bx)
\end{aligned}$$

Como se pode observar, as derivadas parciais de u e v em ordem a x e y são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$, pois são somas e produtos de funções reais contínuas. Em particular, são contínuas em $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Além disso, $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \wedge u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$. Portanto, as derivadas de primeira ordem de u e v verificam as condições de Cauchy-Riemann em (x_0, y_0). Assim, pelo Teorema I.11.12, concluímos que f é diferenciável em $z_0 = x_0 + iy_0$ e, pelas igualdades (I.11.8) e (I.11.10), temos

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \\
&= e^{(ax_0-by_0)} \left(a\cos(ay_0 + bx_0) - b\sin(ay_0 + bx_0)\right) \\
&\qquad + i\, e^{(ax_0-by_0)} \left(b\cos(ay_0 + bx_0) + a\sin(ay_0 + bx_0)\right) \\
&= e^{(ax_0-by_0)} \left(a\cos(ay_0 + bx_0) + i^2 b\sin(ay_0 + bx_0)\right) \\
&\qquad + i\, e^{(ax_0-by_0)} \left(b\cos(ay_0 + bx_0) + a\sin(ay_0 + bx_0)\right) \\
&= ae^{(ax_0-by_0)} \left(\cos(ay_0 + bx_0) + i\sin(ay_0 + bx_0)\right) \\
&\qquad + ib\, e^{(ax_0-by_0)} \left(\cos(ay_0 + bx_0) + i\sin(ay_0 + bx_0)\right) \\
&= (a + ib)e^{(ax_0-by_0)} \left(\cos(ay_0 + bx_0) + i\sin(ay_0 + bx_0)\right) \\
&= (a + ib)e^{(a+ib)(x_0+iy_0)} = \alpha e^{\alpha z_0}.
\end{aligned}$$

Como z_0 é um número complexo arbitrário, podemos concluir que a derivada de f está definida em $\mathbb{C}$ e que $f'(z) = \alpha e^{\alpha z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Exercício I.11.17

Estude a diferenciabilidade da função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \sin z, \in \mathbb{C}$, por dois processos diferentes: (i) usando as propriedades das derivadas; (ii) usando as condições de Cauchy-Riemann.

Resolução

(i) De acordo com a definição da função $\sin$, pela propriedade (a) do Teorema I.11.5 e atendendo ao Exercício I.11.16, concluímos que $\sin$ é diferenciável em $\mathbb{C}$ e, além disso,

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{1}{2i}(e^{iz})' - \frac{1}{2i}(e^{-iz})' = \frac{1}{2i}ie^{iz} - \frac{1}{2i}(-i)e^{-iz} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

(ii) Atendendo à Proposição I.7.9 (h), para $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$\sin z = \underbrace{\sin x \cosh y}_{u(x,y)} + i\underbrace{\cos x \sinh y}_{v(x,y)}.$$

Como tal, a parte real e a parte imaginária de f são, respetivamente,

$$u(x, y) = \sin x \cosh y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$v(x, y) = \cos x \sinh y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Então, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{array}{rcl} u_x(x,y) & = & \cos x \cosh y \\ u_y(x,y) & = & \sin x \sinh y \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} v_x(x,y) & = & -\sin x \sinh y \\ v_y(x,y) & = & \cos x \cosh y \end{array}.$$

Seja $z_0 = x_0 + iy_0$. Como as derivadas parciais de primeira ordem de u e v são funções contínuas (pois são o produto de funções contínuas) em (x_0, y_0) (aliás, são continuas em $\mathbb{R}^2$) e verificam as condições de Cauchy-Riemann em (x_0, y_0), pois

$$u_x(x_0,y_0) = \cos x_0 \cosh y_0 = v_y(x_0,y_0) \wedge v_x(x_0,y_0) = -\sin x_0 \sinh y_0 = -u_y(x_0,y_0),$$

concluímos pelo Teorema I.11.12 que f é diferenciável em z_0. Além disso, pela igualdade (I.11.8) e pela Proposição I.7.9 (i), temos

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) = \cos x_0 \cosh y_0 + i(-\sin x_0 \sinh y_0) = \cos z_0.$$

Exercício I.11.18: T.P.C

Estude a diferenciabilidade da função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \cos z, \in \mathbb{C}$, por dois processos diferentes: (i) usando as propriedades das derivadas; (ii) usando as condições de Cauchy-Riemann.

Exercício I.11.19: T.P.C

Estude a diferenciabilidade da função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \sinh z, \in \mathbb{C}$, por dois processos diferentes: (i) usando as propriedades das derivadas; (ii) usando as condições de Cauchy-Riemann.

Exercício I.11.20

Determine as funções reais v de duas variáveis reais de modo a que a função complexa $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = 2x(1-y) + iv(x,y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

seja diferenciável em $\mathbb{C}$.

Resolução

Para que a função f seja diferenciável em $z = x + iy \in \mathbb{C}$, as derivadas parciais de primeira ordem da parte real e da parte imaginária têm de existir e de satisfazer obrigatoriamente as condições de Cauchy-Riemann no ponto (x,y). Vamos determinar v tal que, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$v_y(x,y) = u_x(x,y) \wedge v_x(x,y) = -u_y(x,y).$$

Como $u(x,y) = 2x(1-y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= 2(1-y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u_y(x,y) &= -2x, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Assim, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$v_x(x,y) = -u_y(x,y) = 2x \tag{I.11.11}$$

$$v_y(x,y) = u_x(x,y) = 2(1-y). \tag{I.11.12}$$

De (I.11.11), por primitivação em ordem à variável x, resulta, para cada $y \in \mathbb{R}$ fixo, que

$$v(x,y) = x^2 + K(y), \quad x \in \mathbb{R},$$

onde K é uma função real que depende apenas da variável y e diferenciável (caso contrário, v não teria derivada parcial em ordem a y). Da última igualdade e de (I.11.12), concluímos que $K'(y) = 2(1-y)$, $y \in \mathbb{R}$. Portanto, por primitivação em ordem à variável y,

$$K(y) = -(1-y)^2 + c, \quad y \in \mathbb{R},$$

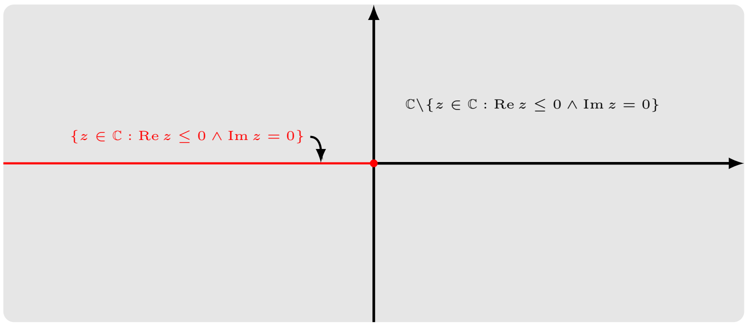
com c uma constante real. Consequentemente,

$$v(x,y) = x^2 - (1-y)^2 + c, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercício I.11.21

Prove que o ramo principal do logaritmo, definido por $f(z) = \operatorname{Log} z$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, é diferenciável em $\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$ e que a sua função derivada f' é dada por

$$f'(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}.$$



Resolução

Seja $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$ um número complexo arbitrariamente fixo. Vamos recorrer ao Teorema I.11.12 para provar que a função é diferenciável em z_0 e, além disso, determinar o valor de $f'(z_0)$.

Em primeiro lugar vamos expressar a função f na forma $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, com u e v funções reais de duas variáveis reais.

Então, recorrendo à definição de Logaritmo principal, para $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, e às igualdades (I.7.3) e (I.7.4), temos

$$\begin{aligned} f(z) &= \operatorname{Log}(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \\ &= \ln(\sqrt{x^2+y^2}) + i\,\Theta(x,y) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{\Theta(x,y)}_{v(x,y)}. \end{aligned} \tag{I.11.13}$$

Como tal, a parte real e a parte imaginária de f são, respetivamente,

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\},$$

$$v(x,y) = \Theta(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}.$$

Como observado na página I.7.5, a função Θ definida por (I.7.4) não é contínua nos pontos $(x_0, y_0) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \wedge y = 0\}$. Como tal, pelos Teoremas I.8.5 e I.11.3 a função f não pode ser diferenciável em $z_0 \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$.

Contudo, como observado na página I.7.5, Θ e as suas derivadas parciais em ordem a x e a y de qualquer ordem existem e são contínuas em $\mathbb{R}^2 \backslash D$, onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \wedge y = 0\}$. Em particular, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash D$,

$$\Theta_x(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \wedge \quad \Theta_y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}. \tag{I.11.14}$$

Portanto, as derivadas parciais de primeira ordem de u e v em ordem a cada uma das variáveis são, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash D$,

$$\begin{array}{rcl} u_x(x,y) & = & \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ u_y(x,y) & = & \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} v_x(x,y) & = & \Theta_x(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ v_y(x,y) & = & \Theta_y(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{array}.$$

Como se pode observar, as derivadas parciais de u e v em ordem a x e y são funções contínuas em $\mathbb{R}^2 \backslash D$. Em particular são contínuas em (x_0, y_0). Além disso, $u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \wedge u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)$. Portanto, as derivadas de primeira ordem de u e v verificam as condições de Cauchy-Riemann em (x_0, y_0). Assim, pelo Teorema I.11.12, concluímos que f é diferenciável em $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C} \backslash \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$ e, pela igualdade (I.11.8), temos

$$\begin{aligned} f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) &= \frac{x_0}{x_0^2+y_0^2} + i\Big(-\frac{y_0}{x_0^2+y_0^2}\Big) \\ &= \frac{x_0 - iy_0}{x_0^2+y_0^2} = \frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2} = \frac{1}{z_0}. \end{aligned}$$

Como z_0 é um número complexo arbitrário em $\mathbb{C} \backslash \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$, podemos concluir que a derivada de f está definida em $\mathbb{C} \backslash \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$ e que $f'(z) = \dfrac{1}{z}$ para todo $z \in \mathbb{C} \backslash \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$.

I.11.2 Condições de Cauchy-Riemann em coordenadas polares

Como já observámos anteriormente, conforme (I.7.2), para $z \neq 0$, uma função complexa de variável complexa pode exprimir-se através de

$$f(z) = u(\rho,\theta) + iv(\rho,\theta), \quad z = \rho e^{i\theta},$$

onde u e v são funções reais de duas variáveis reais (ρ, θ), com $\rho > 0$.

Por exemplo, considerando $z \neq 0$ na forma polar, $z = \rho e^{i\theta}$, com $\theta \in]-\pi, \pi]$, o ramo principal do logaritmo vem dado por

$$f(z) = \operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \underbrace{\ln \rho}_{u(\rho,\theta)} + i \underbrace{\theta}_{v(\rho,\theta)}.$$

Assim, seria conveniente encontrar uma expressão em termos de coordenadas polares para as condições de Cauchy-Riemann, bem como uma expressão para a derivada.

Abaixo apresentamos, sem demonstração, uma condição necessária de diferenciabilidade na forma polar.

Teorema I.11.22: Condição necessária de diferenciabilidade na forma polar

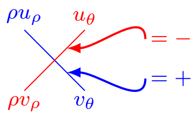
Consideremos a função $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, *com* $D \subseteq \mathbb{C}$. *Suponhamos que* $0 \notin D$ *e seja* $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0} \in D$. *Suponhamos que* f *está definida numa vizinhança de* z_0 *e que* $f(z) = u(\rho,\theta) + iv(\rho,\theta)$, $z = \rho e^{i\theta} \in D$. *Se* f *for diferenciável em* $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$, *então existem as derivadas parciais de primeira ordem de* u *e* v *em relação às variáveis* ρ *e* θ *em* (ρ_0, θ_0) *e satisfazem nesse ponto as chamadas condições de Cauchy-Riemann na forma polar, isto é,*

$$u_\rho(\rho_0,\theta_0) = \frac{1}{\rho_0} v_\theta(\rho_0,\theta_0) \qquad e \qquad v_\rho(\rho_0,\theta_0) = -\frac{1}{\rho_0} u_\theta(\rho_0,\theta_0) \quad \text{(I.2)} \tag{I.11.15}$$

Além disso,

$$f'(z_0) \;=\; e^{-i\theta_0}\left(u_\rho(\rho_0,\theta_0) + i\, v_\rho(\rho_0,\theta_0)\right) = \frac{1}{\rho_0} e^{-i\theta_0}\left(v_\theta(\rho_0,\theta_0) - i\, u_\theta(\rho_0,\theta_0)\right).$$

(I.2) Mnemónica:



O próximo resultado, que também apresentaremos sem demonstração, dá-nos condições suficientes de diferenciabilidade na forma polar.

Teorema I.11.23: Condição Suficiente de Diferenciabilidade na forma polar

Consideremos a função $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, *com* $D \subseteq \mathbb{C}$. *Suponhamos que* $0 \notin D$ *e seja* $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0} \in D$. *Suponhamos que* $f(z) = u(\rho,\theta) + iv(\rho,\theta)$, $z = \rho e^{i\theta} \in D$ *e que* f *está definida numa vizinhança de* z_0. *Suponhamos que existem as derivadas parciais de* u *e* v *de primeira ordem em relação às variáveis* ρ *e* θ *numa vizinhança de* (ρ_0, θ_0). *Se as derivadas parciais de* u *e* v *de primeira ordem forem contínuas em* (ρ_0, θ_0) *e satisfizerem as condições de Cauchy-Riemann na forma polar em* (ρ_0, θ_0), *isto é,*

$$u_\rho(\rho_0,\theta_0) = \frac{1}{\rho_0} v_\theta(\rho_0,\theta_0) \qquad e \qquad v_\rho(\rho_0,\theta_0) = -\frac{1}{\rho_0} u_\theta(\rho_0,\theta_0),$$

então a função f *é diferenciável em* $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$. *Além disso,*

$$f'(z_0) \;=\; e^{-i\theta_0}\left(u_\rho(\rho_0,\theta_0) + i\, v_\rho(\rho_0,\theta_0)\right) \tag{I.11.16}$$

$$\;=\; \frac{1}{\rho_0} e^{-i\theta_0}\left(v_\theta(\rho_0,\theta_0) - i\, u_\theta(\rho_0,\theta_0)\right). \tag{I.11.17}$$

Vamos usar este resultado para estudar a diferenciabilidade do ramo principal do logaritmo, recorrendo a coordenadas polares. Como poderá observar, irá ser mais fácil do que a resolução do Exercício I.11.21.

Exercício I.11.24

Prove que o ramo principal do logaritmo, definido por $f(z) = \operatorname{Log} z$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, é diferenciável em $\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$ e que a sua função derivada f' é dada por

$$f'(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}.$$

Resolução

Seja $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$ um número complexo arbitrariamente fixo. Vamos recorrer ao Teorema I.11.23 para provar que a função é diferenciável em z_0 e, além disso, determinar o valor de $f'(z_0)$.

Em primeiro lugar vamos expressar a função f na forma $f(z) = u(\rho,\theta) + iv(\rho,\theta)$, $z = \rho e^{i\theta}$, com u e v

funções reais de duas variáveis reais em função de (ρ, θ).

Então, recorrendo à definição de Logaritmo principal, para $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, com $\rho > 0$ e $\theta \in]-\pi, \pi]$, temos

$$\begin{aligned} f(z) &= \operatorname{Log}(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \\ &= \underbrace{\ln\rho}_{u(\rho,\theta)} + i \underbrace{\theta}_{v(\rho,\theta)} . \end{aligned} \tag{I.11.18}$$

Como tal, a parte real e a parte imaginária de f são, respetivamente,

$$u(\rho, \theta) = \ln\rho, \quad (\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times] - \pi, \pi],$$

$$v(\rho, \theta) = \theta, \quad (\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times] - \pi, \pi].$$

A função f não é contínua em $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$. Como tal, não faz sentido estudar a diferenciabilidade em $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$, com $\rho_0 > 0$ e $\theta_0 = \pi$.

As derivadas parciais de primeira ordem de u e v em ordem a cada uma das variáveis são, para cada $(\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[$,

$$\begin{array}{rcl} u_\rho(\rho,\theta) &=& \dfrac{1}{\rho} \\ u_\theta(\rho,\theta) &=& 0 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} v_\rho(\rho,\theta) &=& 0 \\ v_\theta(\rho,\theta) &=& 1 \end{array} .$$

Como se pode observar, as derivadas parciais de u e v em ordem a ρ e θ são funções contínuas em $]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[$. Em particular são contínuas em $(\rho_0, \theta_0) \in]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[$. Além disso, $u_\rho(\rho_0, \theta_0) = \dfrac{1}{\rho_0} = \dfrac{1}{\rho_0} v_\theta(\rho_0, \theta_0) \wedge v_\rho(\rho_0, \theta_0) = 0 = -\dfrac{1}{\rho_0} u_\theta(\rho_0, \theta_0)$. Portanto, as derivadas de primeira ordem de u e v verificam as condições de Cauchy-Riemann na forma polar em (ρ_0, θ_0). Assim, pelo Teorema I.11.23, concluímos que f é diferenciável em $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$, com $\rho_0 > 0$ e $\theta_0 \in]-\pi, \pi[$ (isto significa que $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$), e pela igualdade (I.11.16) resulta

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= e^{-i\theta_0}\Big(u_\rho(\rho_0, \theta_0) + i v_\rho(\rho_0, \theta_0)\Big) = e^{-i\theta_0}\Big(\frac{1}{\rho_0} + i0\Big) \\ &= \frac{1}{\rho_0 e^{i\theta_0}} = \frac{1}{z_0}. \end{aligned}$$

Como z_0 é um número complexo arbitrário em $\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$, podemos concluir que a derivada de f está definida em $\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$ e que $f'(z) = \dfrac{1}{z}$ para todo $z \in \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$.

Exercício I.11.25

Estude a diferenciabilidade de $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, por dois processos diferentes:

(i) usando as condições de Cauchy-Riemann em coordenadas cartesianas;

(ii) usando as condições de Cauchy-Riemann em coordenadas polares.

Resolução

(i) Primeiro processo: Para $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$,

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + i\underbrace{\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)}_{v(x,y)}.$$

Como tal, a parte real e a parte imaginária de f são, respetivamente,

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\},$$

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}.$$

As derivadas parciais de primeira ordem de u e v em ordem a cada uma das variáveis são, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$,

$$\begin{array}{rcl} u_x(x,y) & = & \dfrac{1.(x^2+y^2) - x.2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ u_y(x,y) & = & \dfrac{0 - x.2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} v_x(x,y) & = & \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ v_y(x,y) & = & \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{array}.$$

Como se pode observar, as derivadas parciais de u e v em ordem a x e y são funções contínuas em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, por serem quocientes de funções polinomiais (logo contínuas). Em particular são contínuas em $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, arbitrariamente fixo. Além disso, $u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \wedge u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)$. Portanto, as derivadas de primeira ordem de u e v verificam as condições de Cauchy-Riemann em (x_0,y_0). Assim, pelo Teorema I.11.12, concluímos que f é diferenciável em $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ e, pela igualdade (I.11.8), temos

$$\begin{aligned} f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) &= \frac{y_0^2 - x_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2} + i\frac{2x_0y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2} \\ &= \frac{y_0^2 - x_0^2 + 2ix_0y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2} = -\frac{x_0^2 - 2ix_0y_0 - y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2} \\ &= -\frac{x_0^2 - 2ix_0y_0 + i^2y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2} = -\frac{x_0^2 - 2ix_0y_0 + (iy_0)^2}{(x_0^2+y_0^2)^2} \\ &= -\frac{(x_0-iy_0)^2}{(x_0^2+y_0^2)^2} = -\frac{x_0-iy_0}{x_0^2+y_0^2}.\frac{x_0-iy_0}{x_0^2+y_0^2} \\ &= -\frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2}.\frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2} = -\frac{1}{z_0}.\frac{1}{z_0} \\ &= -\frac{1}{z_0^2}. \end{aligned}$$

Como z_0 é um número complexo arbitrário em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, podemos concluir que a derivada de f está definida em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ e que $f'(z) = -\dfrac{1}{z^2}$ para todo $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(ii) Segundo processo: Para $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} = \frac{1}{\rho}\cos(-\theta) + i\frac{1}{\rho}\sin(-\theta) \\ &= \underbrace{\frac{1}{\rho}\cos\theta}_{u(\rho,\theta)} + i\,\underbrace{\frac{1}{\rho}\big(-\sin(\theta)\big)}_{v(\rho,\theta)} \end{aligned}$$

Como tal, a parte real e a parte imaginária de f são, respetivamente,

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{\rho}\cos\theta, \quad (\rho,\theta) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R},$$

$$v(\rho,\theta) = -\frac{1}{\rho}\sin(\theta), \quad (\rho,\theta) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}.$$

As derivadas parciais de primeira ordem de u e v em ordem a cada uma das variáveis são, para cada $(\rho,\theta) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} u_\rho(\rho,\theta) &=& -\frac{1}{\rho^2}\cos\theta \\ u_\theta(\rho,\theta) &=& -\frac{1}{\rho}\sin\theta \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} v_\rho(\rho,\theta) &=& \frac{1}{\rho^2}\sin\theta \\ v_\theta(\rho,\theta) &=& -\frac{1}{\rho}\cos\theta \end{array}.$$

Como se pode observar, as derivadas parciais de u e v em ordem a ρ e θ são funções contínuas em $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Em particular são contínuas em $(\rho_0,\theta_0) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, arbitrariamente fixo. Além disso, $\rho_0 u_\rho(\rho_0,\theta_0) = v_\theta(\rho_0,\theta_0) \wedge \rho_0 v_\rho(\rho_0,\theta_0) = -u_\theta(\rho_0,\theta_0)$. Portanto, as derivadas de primeira ordem de u e v verificam as condições de Cauchy-Riemann na forma polar em (ρ_0,θ_0). Assim, pelo Teorema I.11.23, concluímos que f é diferenciável em $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$, com $\rho_0 > 0$ e $\theta_0 \in \mathbb{R}$ (isto significa que $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$), e pela igualdade (I.11.16) resulta

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= e^{-i\theta_0}\Big(u_\rho(\rho_0,\theta_0) + i v_\rho(\rho_0,\theta_0)\Big) = e^{-i\theta_0}\Big(-\frac{1}{\rho_0^2}\cos\theta_0 + i\frac{1}{\rho_0^2}\sin\theta_0\Big) \\ &= -\frac{1}{\rho_0^2}e^{-i\theta_0}\underbrace{\Big(\cos\theta_0 - i\sin\theta_0\Big)}_{=\overline{e^{i\theta}}} = -\frac{1}{\rho_0^2}e^{-i\theta_0}e^{-i\theta_0} \\ &= -\frac{1}{\rho_0^2}(e^{-i\theta_0})^2 = -\frac{1}{(\rho_0 e^{i\theta_0})^2} \\ &= -\frac{1}{z_0^2}. \end{aligned}$$

Como z_0 é um número complexo arbitrário em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, podemos concluir que a derivada de f está definida em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ e que $f'(z) = -\dfrac{1}{z^2}$ para todo $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Exercício I.11.26: T.P.C.

Estude a diferenciabilidade de $f(z) = \dfrac{1}{z^{2020}}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Sugestão

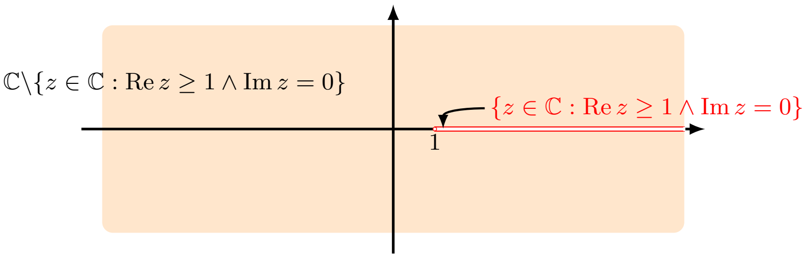
Use as condições de Cauchy-Riemann em coordenadas polares e veja o exercício anterior.

Exercício I.11.27: T.P.C.

Estude a diferenciabilidade da função $f(z) = \sqrt{1-z} := e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}\,(1-z)}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$.

Sugestão

Veja onde é que Log não é diferenciável, depois use o resultado da derivada da função composta (Teorema I.11.5. (d)). Conclua que f é diferenciável em $\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z = 0 \wedge \mathrm{Re}\, z \geq 1\}$.



Exercício I.11.28: T.P.C.

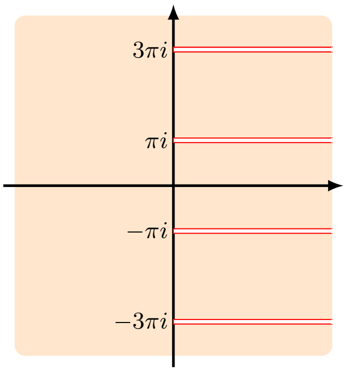
Estude a diferenciabilidade da função $f(z) = \sqrt{1+e^z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{i(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, onde se considera a restrição principal do logaritmo.

Sugestão

Repare que para $z \in \mathbb{C}\backslash\{i(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,

$$f(z) = \sqrt{1+e^z} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}\,(1+e^z)}.$$

Veja onde é que Log não é diferenciável, depois use o resultado da derivada da função composta (Teorema I.11.5. (d)). Conclua que f é diferenciável em $\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \geq 0 \wedge \mathrm{Im}\, z = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.



Exercício I.11.29: T.P.C.

Determine $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z}$.

Sugestão

Use a Regra de L'Hôpital (Teorema I.11.7) com $f(z) = \sin z$, $z \in \mathbb{C}$, e $g(z) = z$, $z \in \mathbb{C}$.

I.11.3 Funções Analíticas e Singularidades

Nesta subsecção iremos definir funções analíticas e definir pontos singulares.

Definição I.11.30: Função analítica ou holomorfa

Uma função $f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ diz-se analítica ou holomorfa em z_0 se for diferenciável numa bola aberta de centro z_0, isto é, existe $R > 0$ tal que f é diferenciável em todos os pontos de $B(z_0, R)$. Diz-se analítica ou holomorfa num conjunto aberto $X \subset D$ se for analítica em todos os pontos de X, ou seja, se for diferenciável em todos os pontos de X[I.3]. Se $D = \mathbb{C}$ e f for analítica em $\mathbb{C}$ diz-se que f é uma função inteira.

[I.3] Como X é aberto, para cada ponto do conjunto conseguimos sempre encontrar uma bola aberta centrada no ponto e totalmente contida em X. Por isso, num aberto X, ser analítica em todos os pontos de X é equivalente a ser diferenciável em todos os pontos de X

Pelas propriedades do Teorema I.11.5, concluímos que a soma, o produto e o quociente de duas funções analíticas num conjunto aberto, são analíticas nesse aberto caso essas operações estejam aí definidas.

Exemplos I.11.31

(i) Qualquer função polinomial é uma função inteira;

(ii) A função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$ é uma função inteira;

(iii) A função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \sin z$, $z \in \mathbb{C}$ é uma função inteira;

(iv) A função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \cos z$, $z \in \mathbb{C}$ é uma função inteira;

(v) A função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \sinh z$, $z \in \mathbb{C}$ é uma função inteira;

(vi) A função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \cosh z$, $z \in \mathbb{C}$ é uma função inteira;

(vii) A função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, é analítica em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$;

(viii) A função $f : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, é analítica em $\mathbb{C}\backslash\{1\}$;

(ix) A função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, é analítica em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$;

(x) A função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \operatorname{Log} z$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, é analítica em

$$\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\};$$

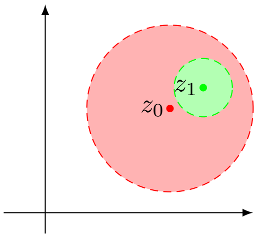
(xi) A função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \sqrt{z}$, $z \in \mathbb{C}$, (em que é $f(0) = 0$ e para $z \neq 0$ se considera a restrição principal do logaritmo para a definir) é analítica em

$$\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\};$$

(xii) A função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = |z|^2$, $z \in \mathbb{C}$, não é analítica em nenhum ponto de $\mathbb{C}$, pois ela só é diferenciável em $z_0 = 0$ (ver Exemplo I.11.2 (c)) e como tal não se consegue encontrar uma bola aberta onde f seja diferenciável.

Definição I.11.32: Ponto singular ou singularidade

Seja $f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função e seja $z_0 \in \mathbb{C}$ (poderá não estar em D). Dizemos que z_0 é um ponto singular de f, ou uma singularidade para f, se f não for analítica em z_0 mas é analítica em algum ponto de qualquer bola $B(z_0, R)$, com $R > 0$.



Exemplos I.11.33

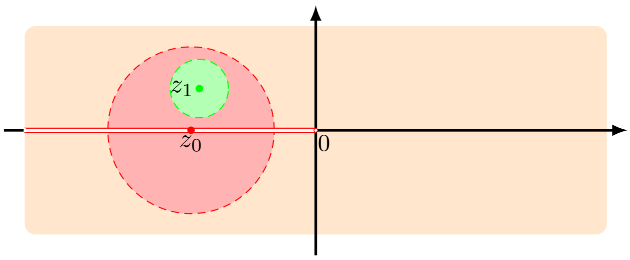
(i) Considere a função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. O ponto $z_0 = 0$ é uma singularidade de f, pois f não é analítica em $z_0 = 0$ (nem sequer aí está definida) mas qualquer bola $B(0, R)$, $R > 0$, tem pelo menos um ponto onde f é analítica;

(ii) Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}.$$

O ponto $z_0 = 0$ é uma singularidade de f, pois f não é analítica em $z_0 = 0$ ($\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \infty$, como tal f não é contínua em $z_0 = 0$, logo também não é diferenciável em $z_0 = 0$) mas qualquer bola $B(0; R)$, $R > 0$, tem pelo menos um ponto onde f é analítica;

(iii) Considere a função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \operatorname{Log} z$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Então qualquer ponto $z_0 \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$ é um ponto singular de f;



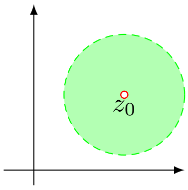
(iv) Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \sqrt{z}$, $z \in \mathbb{C}$, (em que é $f(0) = 0$ e para $z \neq 0$ se considera a restrição principal do logaritmo para a definir). Então qualquer ponto $z_0 \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$ é um ponto singular de f;

(v) Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = |z|^2$, $z \in \mathbb{C}$. Já vimos que f não é analítica em $z_0 = 0$, apesar de ser diferenciável nesse ponto. Esse ponto não é ponto singular, pois não se consegue encontrar um ponto em qualquer bola centrada em $z_0 = 0$ onde f seja analítica (já que f só é diferenciável em $z_0 = 0$ - ver Exemplo I.11.2 (c)).

De extrema importância, como iremos verificar mais tarde, são as singularidades que iremos designar por singularidades isoladas, que definimos a seguir.

Definição I.11.34: Singularidade Isolada

Dizemos que $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *tem uma singularidade isolada em* $z_0 \in \mathbb{C}$ *se* z_0 *for um ponto singular mas existir* $R > 0$ *(ou* $R = +\infty$*) em que* f *é analítica em* $A(z_0, 0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\} \subseteq D$ *(ou seja, existe uma coroa* $A(z_0, 0, R)$ *em que* f *é analítica, mas* f *não é diferenciável em* z_0*, caso esteja definida nesse ponto, ou* f *não está definida em* z_0*).*



Exemplos I.11.35

(i) O ponto $z_0 = 0$ é uma singularidade isolada da função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$;

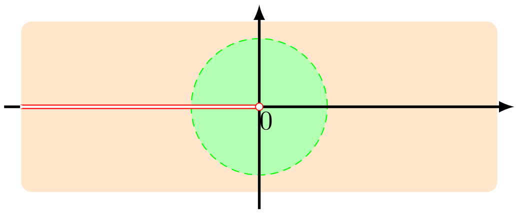
(ii) O ponto $z_0 = 0$ é uma singularidade isolada da função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}.$$

(iii) O ponto $z_0 = 1$ é uma singularidade isolada da função $f : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$;

(iv) O ponto $z_0 = 0$ é uma singularidade isolada da função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$;

(v) Considere a função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \operatorname{Log} z$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. O ponto $z_0 = 0$ é uma singularidade de f mas não é uma singularidade isolada, pois não existe $R > 0$ em que f seja analítica em $A(0, 0, R)$. Repare que qualquer coroa $A(0, 0, R)$ contém sempre pontos do conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$ (que são pontos singulares);



(vi) Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \sqrt{z}$, $z \in \mathbb{C}$, (em que é $f(0) = 0$ e para $z \neq 0$ se considera a restrição principal do logaritmo para a definir). O ponto $z_0 = 0$ é uma singularidade de f mas não é uma singularidade isolada, pois não existe $R > 0$ em que f seja analítica em $A(0, 0, R)$. Repare que qualquer coroa $A(0, 0, R)$ contém sempre pontos do conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$ (que são pontos singulares).

I.12 Sucessões e Séries complexas

I.12.1 Sucessões de números complexos

Tal como as sucessões de números reais, podemos definir sucessões de números complexos.

Definição I.12.1

Uma sucessão de números complexos é uma função

$$\begin{array}{rccc} z: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & n & \mapsto & z(n) \end{array}$$

com domínio $\mathbb{N}$. *O valor* $z(n)$, *para todo o* $n \in \mathbb{N}$, *será representado por* z_n *e chamado o termo de ordem* n *ou* n*-ésimo termo da sucessão. Escreveremos* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* $(z_n)_n$ *ou* $\{z_n\}_n$ *para indicar a sucessão* z.

Dada uma sucessão $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, considerando $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathbb{N}$, estamos a considerar em simultâneo duas sucessões reais $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Vamos agora definir limite de uma sucessão $(z_n)_n$.

Definição I.12.2

Uma sucessão $(z_n)_n$ *tem limite* $L \in \mathbb{C}$ *e escrevemos* $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = L$ *ou* $\lim\limits_{n} z_n = L$ *ou* $z_n \to L$ *quando* $n \to +\infty$, *se para cada* $\varepsilon > 0$, *existir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|z_n - L| < \varepsilon$, *sempre que* $n \geq n_0$. *Ou seja,*

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = L \quad se \quad \Big(\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Longrightarrow |z_n - L| < \varepsilon\Big).$$

Se existir $L \in \mathbb{C}$ *tal que* $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = L$, *dizemos que a sucessão converge (ou que a sucessão é convergente). Caso contrário, dizemos que a sucessão diverge (ou que a sucessão é divergente).*

Observamos que se $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = L$, então dado $\varepsilon > 0$, os termos da sucessão, com a exceção de talvez um número finito deles, pertencem à bola $B(L, \varepsilon)$.

O próximo resultado mostra-nos que uma sucessão convergente não pode ter dois limites distintos.

Teorema I.12.3: Unicidade do limite

Se $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = L_1$ *e* $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = L_2$, *então* $L_1 = L_2$.

Demonstração

Seja $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = L_1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq n_0. \tag{I.12.1}$$

Por outro lado, como $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = L_2$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq n_1. \tag{I.12.2}$$

Assim, pela desigualdade triangular [I.4], por (I.12.1) e (I.12.2), resulta

$$0 \leq |L_1 - L_2| = |L_1 - z_n + z_n - L_2| \leq |z_n - L_1| + |z_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{para cada} \quad n \geq \max\{n_0, n_1\}.$$

Consequentemente, dada a arbitrariedade de ε, obtemos $L_1 = L_2$. ■

[I.4] Desigualdade triangular: $|z \pm w| \leq |z| + |w|$, $\forall\, z, w \in \mathbb{C}$ (ver Proposição I.2.1 (n)).

Exercício I.12.4

Usando a definição de limite de uma sucessão, mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n + i\sqrt{3}}{n} = 0$.

Resolução

Seja $\varepsilon > 0$. Então,

$$\left|\frac{(-1)^n + i\sqrt{3}}{n} - 0\right| < \varepsilon \iff \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2}} < \varepsilon \iff \frac{2}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{2}{\varepsilon}.$$

Se considerarmos $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$, onde $[x]$ designa a parte inteira de x, concluímos que

$$\left|\frac{(-1)^n + i\sqrt{3}}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n \geq n_0$$

(note que $n_0 > \dfrac{2}{\varepsilon}$). Consequentemente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n + i\sqrt{3}}{n} = 0$.

O próximo resultado relaciona-nos o limite de uma sucessão de números complexos com o limite de duas sucessões de números reais.

Teorema I.12.5

Seja $(z_n)_n$ uma sucessão de números complexos e suponhamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re} z_n = x_n$ e $\operatorname{Im} z_n = y_n$. Seja $L = a + ib \in \mathbb{C}$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Então, $(z_n)_n$ é uma sucessão convergente se e só se $(\operatorname{Re} z_n)_n = (x_n)_n$ e $(\operatorname{Im} z_n)_n = (y_n)_n$ forem sucessões reais convergentes. Além disso,

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = L = a + ib \iff \lim_{n\to+\infty} x_n = a \ \wedge \ \lim_{n\to+\infty} y_n = b,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n + iy_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n + i \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Demonstração

Suponhamos que $(z_n)_n$ é uma sucessão convergente para $L = a + ib$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_n - L| < \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Consequentemente, por (I.2.1), temos

$$|x_n - a| = |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} L| = |\operatorname{Re}(z_n - L)| \leq |z_n - L| < \varepsilon, \quad n \geq n_0$$

e

$$|y_n - b| = |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} L| = |\operatorname{Im}(z_n - L)| \leq |z_n - L| < \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Donde se conclui que $(\operatorname{Re} z_n)_n = (x_n)_n$ e $(\operatorname{Im} z_n)_n = (y_n)_n$ são sucessões convergentes com

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \ \wedge \ \lim_{n\to+\infty} y_n = b.$$

Suponhamos agora o recíproco. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq n_0 \tag{I.12.3}$$

e existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq n_1. \tag{I.12.4}$$

Assim, para todo o $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_3 = \max\{n_0, n_1\}$, pela desigualdade triangular (ver Proposição I.2.1 (n)), por (I.12.3) e (I.12.4), temos

$$|z_n - L| = |(x_n - a) + i(y_n - b)| \leq |x_n - a| + |i(y_n - b)| = |x_n - a| + |(y_n - b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que prova que $(z_n)_n$ é uma sucessão convergente com

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = L = a + ib.$$

Exemplo I.12.6

Considere a sucessão $\left\{\frac{e^{in}}{n}\right\}_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{e^{in}}{n} = \frac{\cos(n)}{n} + i\frac{\sin(n)}{n}.$$

Por outro lado, as sucessões reais $\left\{\frac{\cos(n)}{n}\right\}_n$ e $\left\{\frac{\sin(n)}{n}\right\}_n$ são convergentes e o limite de cada uma delas é zero. Assim, pelo Teorema I.12.5 concluímos que $\left\{\frac{e^{in}}{n}\right\}_n$ é uma sucessão convergente com $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{in}}{n} = 0$.

Exemplo I.12.7

Considere a sucessão $\left\{\frac{1}{n} + i(-1)^n\right\}_n$. Como a sucessão real $\left\{-1)^n\right\}_n$ é divergente, pelo Teorema I.12.5 concluímos que $\left\{\frac{1}{n} + i(-1)^n\right\}_n$ é uma sucessão divergente.

Teorema I.12.8

Seja $(z_n)_n$ uma sucessão de números complexos convergente para L, isto é, $\lim\limits_n z_n = L$. Então, $\lim\limits_n |z_n| = |L|$. Ou seja,

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = L \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} |z_n| = |L|.$$

Demonstração

Seja $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = L$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_n - L| < \varepsilon, \quad n \geq n_0. \tag{I.12.5}$$

Agora, usando uma propriedade dos módulos[(I.5)], resulta $\big|\,|z_n| - |L|\,\big| \le |z_n - L|$. Desta desigualdade e de (I.12.5) obtemos

$$\big|\,|z_n| - |L|\,\big| \le |z_n - L| < \varepsilon, \quad n \ge n_0.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n| = |L|.$$

(I.5) $||z| - |w|| \le |z \pm w|, \ \forall\, z, w \in \mathbb{C}$ (ver Proposição I.2.1 (o))

O recíproco do teorema anterior é em geral falso, veja o Exemplo I.12.7, pois $\left\{\frac{1}{n} + i(-1)^n\right\}_n$ é uma sucessão divergente, mas

$$\lim_n \left|\frac{1}{n} + i(-1)^n\right| = \lim_n \sqrt{\frac{1}{n^2} + 1} = 1.$$

Contudo, se $L = 0$, temos o seguinte resultado.

Teorema I.12.9

Seja $(z_n)_n$ uma sucessão de números complexos. Então,

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |z_n| = 0.$$

Demonstração

(i) Suponhamos que $(z_n)_n$ é uma sucessão convergente para 0. Seja $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_n - 0| < \varepsilon, \quad n \ge n_0.$$

Como $\big|\,|z_n|\,\big| = |z_n|$, obtemos

$$\big|\,|z_n| - 0\,\big| = |z_n| < \varepsilon, \quad n \ge n_0.$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = 0$.

(ii) Suponhamos, agora, que $(z_n)_n$ é uma sucessão tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = 0$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\big|\,|z_n| - 0\,\big| < \varepsilon, \quad n \ge n_0.$$

Como $\big|\,|z_n|\,\big| = |z_n|$, obtemos

$$|z_n - 0| < \varepsilon, \quad n \ge n_0.$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$.

Exemplo I.12.10

Considere a sucessão $\left\{\frac{e^{in}}{n}\right\}_n$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{e^{in}}{n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, pelo teorema anterior, concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{in}}{n} = 0.$$

(compare com o Exemplo I.12.6.)

Exemplo I.12.11

Seja $w \in \mathbb{C}$ com $|w| < 1$. Considere a sucessão $\left\{w^n\right\}_n$. Então,

$$\lim_{n\to\infty} w^n = 0.$$

De facto, se $w = 0$, $w^n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e o resultado é imediato. Suponhamos $w \neq 0$ e consideremos w na forma polar $w = \rho e^{i\theta}$, para algum $\theta \in]-\pi, \pi]$. Então, para $n \in \mathbb{N}$,

$$|w^n| = \rho^n.$$

Como $\rho < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \rho^n = 0.$$

Portanto, pelo Teorema I.12.9, concluímos o pretendido.

O próximo resultado sumariza mais algumas propriedades importantes dos limites de sucessões.

Teorema I.12.12: Propriedades dos limites para sucessões

Se $(z_n)_n$ e $(w_n)_n$ forem sucessões de números complexos convergentes e c for uma constante complexa, então:

(i) $\lim_n c = c$;

(ii) $\lim_n (c\, z_n) = c\, \lim_n z_n$;

(iii) $\lim_n \overline{z_n} = \overline{\lim_n z_n}$;

(iv) $\lim_n (z_n + w_n) = \lim_n z_n + \lim_n w_n$;

(v) *Se* $\lim_n z_n = 0$ *e* $|w_n| \leq |z_n|$, *para todo o* $n \in \mathbb{N}$, *então* $\lim_n w_n = 0$;

(vi) *Se* $\lim_n z_n = 0$ *e* $(w_n)_n$ *for limitada (isto é, existir* M *real positivo tal que* $|w_n| \leq M$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}$*), então* $\lim_n (z_n\, w_n) = 0$;

(vii) $\lim_n (z_n\, w_n) = \lim_n z_n \times \lim_n w_n$;

(viii) *Se* $w_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, *e* $\lim_n w_n \neq 0$, *então* $\lim_n \dfrac{z_n}{w_n} = \dfrac{\lim_n z_n}{\lim_n w_n}$.

Vamos agora ver o que se entende por sucessão de números complexos divergente para ∞.

Definição I.12.13

Seja $(z_n)_n$ uma sucessão de números complexos. Dizemos que $(z_n)_n$ diverge para ∞, e escrevemos $\lim_n z_n = \infty$ se $\lim_n |z_n| = +\infty$, ou seja, se para todo número real $A > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n| > A$ para todo $n \geq n_0$.

Temos então o seguinte resultado.

Proposição I.12.14

Seja $(z_n)_n$ uma sucessão de números complexos não nulos, i.e., $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\lim_n z_n = 0 \iff \lim_n \frac{1}{z_n} = \infty.$$

I.12.2 Séries de números complexos

Tal como no caso dos números reais, também se podem considerar séries de números complexos, que partilham muitas das propriedades das séries de números reais. Nesta subsecção recordamos algumas dessas propriedades adaptadas ao caso complexo.

Definição I.12.15

Seja $(z_n)_n$ uma sucessão de números complexos. A expressão

$$z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + z_{n+1} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n$$

designa-se por série de números complexos..

Consideremos a sucessão $(S_n)_n$ definida, para cada $n \in \mathbb{N}$, por

$$S_n = \underbrace{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}_{n \text{ parcelas}} = \sum_{k=1}^{n} z_k.$$

A sucessão $(S_n)_n$ designa-se por sucessão das somas parciais da série.

Se a sucessão $(S_n)_n$ for convergente, isto é, existe $S \in \mathbb{C}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, dizemos que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$ é convergente com soma S e escrevemos $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n = S$.

Caso contrário, isto é, se a sucessão $(S_n)_n$ for divergente, dizemos que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$ é divergente.

Observação I.12.16

Podemos começar séries num índice qualquer. Vamos admitir os seguintes exemplos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n, \qquad \sum_{n=20}^{+\infty} z_n.$$

Tal como nas séries numéricas reais, também são válidas as seguintes propriedades (que são uma consequência das propriedades algébricas dos limites de sucessões convergentes e cuja demonstração é análoga ao caso real).

Teorema I.12.17

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ *duas séries de números complexos convergentes e de somas* S *e* T*, respetivamente. Sejam* λ_1 *e* λ_2 *duas constantes complexas. Então a série* $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_1 z_n + \lambda_2 w_n)$ *é convergente e de soma* $\lambda_1 S + \lambda_2 T$*.*

Corolário I.12.18

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ *duas séries de números complexos*

(i) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *for convergente e a série* $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ *for divergente, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty}(z_n + w_n)$ *é divergente.*

(ii) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *for divergente e* $\lambda \neq 0$*, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda z_n)$ *é divergente.*

Tal como no caso real, também é válido o Teste da Divergência ou condição necessária de convergência de uma série.

Teorema I.12.19: Teste da divergência

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *uma séria de números complexos convergente. Então* $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$*.*

Demonstração

Seja $(S_n)_n$ a sucessão das somas parciais da séria $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, onde

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + \cdots + z_n, \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como a série dada é convergente, seja S a sua soma. Assim,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S,$$

e também

$$\lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S.$$

Por outro lado, para $n \geq 2$,

$$z_n = z_1 + \cdots + z_n - (z_1 + \cdots + z_{n-1}) = S_n - S_{n-1}.$$

Logo

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

■

Observação I.12.16

O teorema anterior serve para concluir que uma série é divergente, caso a sucessão $\{z_n\}_n$ seja convergente com $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n \neq 0$ ou caso a sucessão $\{z_n\}_n$ seja divergente.

Notar que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$ não nos permite determinar a natureza da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, ou seja,

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = 0 \not\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad \text{convergente.}$$

Exemplo I.12.21

Sejam $w \in \mathbb{C}$ e $p \in \mathbb{N}_0$. Prove que a série

$$\sum_{n=p}^{+\infty} w^n = w^p + w^{p+1} + w^{p+2} + w^{p+3} + \cdots \tag{I.12.6}$$

(designada por série geométrica de razão w) é convergente se e só se $|w| < 1$. Neste caso, mostre que

$$\sum_{n=p}^{+\infty} w^n = \frac{w^p}{1-w}.$$

Resolução

(i) Se $w = 0$, a soma da série é obviamente nula se $p \geq 1$ e 1 se $p = 0$. Consideremos agora o caso $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ com $|w| < 1$. Seja $(S_n)_n$ a sucessão das somas parciais definida, para cada $n \in \mathbb{N}$, por

$$S_n = \sum_{k=p}^{n+p-1} w^k = \underbrace{w^p + w^{p+1} + \cdots + w^{n+p-1}}_{\text{n parcelas}}.$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$wS_n = \underbrace{w^{p+1} + w^{p+2} + \cdots + w^{n+p}}_{\text{n parcelas}}$$

e

$$\begin{aligned}(1-w)S_n = S_n - wS_n &= \left(w^p + w^{p+1} + \cdots + w^{n+p-1}\right) - \left(w^{p+1} + w^{p+2} + \cdots + w^{n+p}\right)\\ &= w^p - w^{n+p}\\ &= w^p(1-w^n).\end{aligned}$$

Como $|w| < 1$, temos $w \neq 1$. Assim, resulta da última igualdade que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = w^p \frac{1-w^n}{1-w}.$$

Consequentemente, pelo Exemplo I.12.11 e pela definição de série numérica, concluímos que a série é convergente, pois

$$\lim_n S_n = \lim_n w^p \frac{1-w^n}{1-w} = w^p \frac{1-0}{1-w} = \frac{w^p}{1-w}$$

e a soma é $\dfrac{w^p}{1-w}$.

(ii) Suponhamos agora que $w \in \mathbb{C}$ com $|w| \geq 1$. Como

$$\lim_n |w^n| = \lim_n |w|^n = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |w| = 1 \\ \\ +\infty, & \text{se} \quad |w| > 1 \end{cases},$$

temos duas possibilidades: ou $\lim_n w^n$ não existe ou se existir não poderá ser 0, pelo Teorema I.12.9. Em qualquer das situações, concluímos pelo Teste da divergência (Teorema I.12.19) que a série é divergente.

Tal como no caso dos limites de sucessões, o próximo resultado relaciona a natureza de uma série de números complexos com a natureza de duas séries numéricas (as séries das partes reais e imaginárias). A demonstração faz uso da definição de série e do Teorema I.12.5 e fica como exercício.

Teorema I.12.22

Seja $p \in \mathbb{N}_0$. Seja $(z_n)_n$ uma sucessão de números complexos e suponhamos que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $\operatorname{Re} z_n = x_n$ e $\operatorname{Im} z_n = y_n$. Seja $S = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$, com $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$. Então, a série $\sum_{n=p}^{+\infty} z_n$ é convergente se e só se $\sum_{n=p}^{+\infty} \operatorname{Re} z_n = \sum_{n=p}^{+\infty} x_n$ e $\sum_{n=p}^{+\infty} \operatorname{Im} z_n = \sum_{n=p}^{+\infty} y_n$ forem séries numéricas reais convergentes. Nesse caso,

$$\sum_{n=p}^{+\infty} z_n = S = \sigma + i\tau \iff \sum_{n=p}^{+\infty} x_n = \sigma \ \wedge \ \sum_{n=p}^{+\infty} y_n = \tau,$$

ou seja,

$$\sum_{n=p}^{+\infty} (x_n + iy_n) = \sum_{n=p}^{+\infty} x_n + i \sum_{n=p}^{+\infty} y_n.$$

Tal como no caso das séries reais, podemos considerar séries absolutamente convergentes. Assim, temos a seguinte definição e o resultado abaixo.

Definição I.12.23

Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ de números complexos diz-se absolutamente convergente se a série numérica real $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ de termos não-negativos for convergente.

Teorema I.12.24

Se uma série de números complexos $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ for absolutamente convergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ também é convergente e temos

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|. \tag{I.12.7}$$

Demonstração

A demosntração fica como exercício. Como sugestão, podem usar o resultado que é válido no caso das séries reais e o Teorema I.12.22. ∎

Teorema I.12.25

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ *forem duas séries de números complexos absolutamente convergentes, com somas* S *e* T*, respetivamente, então a série definida por*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} z_k w_{n-k}\right)$$

(designada de série produto) é convergente e a soma é $S \times T$.

Os Critérios de D'Alembert e de Cauchy também são válidos no caso de séries de números complexos.

Teorema I.12.26: Critério de D'Alembert ou Teste da Razão

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *uma série de números complexos de termos não nulos* ($z_n \neq 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$) *e*

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|,$$

que supomos existir ou ser igual a $+\infty$.

(i) Se $\lambda \in [0,1[$*, então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *é (absolutamente) convergente.*

(ii) Se $\lambda > 1$ *ou* $\lambda = +\infty$ *ou* $\lambda = 1^+$ *(limite igual a 1, mas por valores superiores a 1), então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *é divergente.*

(iii) Se $\lambda = 1$*, nada se pode concluir sobre a natureza da série (a não ser que* $\lambda = 1^+$ *- ver alínea anterior).*

Teorema I.12.27: Critério de Cauchy ou Teste da Raiz

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *uma série numérica e*

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|z_n|},$$

que supomos existir ou ser igual a $+\infty$.

(i) Se $\lambda \in [0,1[$*, então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *é (absolutamente) convergente.*

(ii) Se $\lambda > 1$ *ou* $\lambda = +\infty$ *ou* $\lambda = 1^+$ *(limite igual a 1, mas por valores superiores a 1), então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *é divergente.*

(iii) Se $\lambda = 1$*, nada se pode concluir sobre a natureza da série (a não ser que* $\lambda = 1^+$ *- ver alínea anterior).*

I.12.3 Séries de Potências e Representação em Série de Taylor

Em vez de fazermos um estudo rigoroso de séries de funções, vamos considerar apenas alguns casos especiais. Nesta secção vamos considerar o caso especial de séries de potências.

Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$ e $(a_n)_{n\geq 0}$ uma sucessão de números complexos. Para cada $z \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n := a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

trata-se de uma série de números complexos e podemos fazer uso dos resultados da subsecção anterior. As séries deste tipo chamam-se séries de pontências de $z - z_0$

Para estas séries temos o seguinte resultado, que apresentaremos sem demonstração.

Teorema I.12.28

Sejam $z, z_0 \in \mathbb{C}$ e $(a_n)_n$ uma sucessão de números complexos. Para a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ existem apenas três possibilidades:

(i) *a série converge apenas quando $z = z_0$;*

(ii) *a série converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$;*

(iii) *existe um número positivo R tal que a série converge absolutamente se $|z - z_0| < R$ (isto é, se $z \in B(z_0, R)$) e diverge se $|z - z_0| > R$ (isto é, se $z \in A(z_0, R, +\infty)$).*

Nos pontos $z \in C(z_0, R)$, isto é na circunferência de centro z_0 e raio R, tanto se pode ter convergência da série em todos os pontos, como em nenhum, como convergência em apenas alguns pontos.

Ao valor R chamamos raio de convergência da série e a $B(z_0, R)$ chamamos bola de convergência da série.

Observação I.12.29

No ponto (i) do teorema anterior diremos que o raio de convergência é $R = 0$ e no ponto (ii) diremos que o raio de convergência é $R = +\infty$. Neste último caso, a bola de convergência é $B(z_0, +\infty) = \mathbb{C}$.
No ponto (iii) do teorema anterior não se diz nada sobre o que se passa na circunferência $C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$.

Observação I.12.30

Como curiosidade, dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, se existir $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$ ou for $+\infty$, o raio de convergência da série de potências é dado por $R = \dfrac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}}$, onde consideramos a notação $1/0^+ = +\infty$ e $1/+\infty = 0$. Se $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, e existir $\lim_n \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$, com $L \in [0+\infty[$ ou $L = +\infty$, então $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

Exercício I.12.31

Determine o raio e a bola de convergência, caso se aplique, das séries de potências indicadas

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n!z^n$; (iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n+1}$; (iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Resolução

(i) Para cada $z \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ é uma série numérica e vamos usar Critério de Cauchy ou Teste da Raiz (ver Teorema I.12.27) para estudar a sua natureza. Como

$$\lim_n \sqrt[n]{|z^n|} = |z|,$$

concluímos pelo Teorema I.12.27 que a série converge se $|z| < 1$ e diverge se $|z| > 1$. Portanto, o raio de convergência da série é $R = 1$ e a bola de convergência é $B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Apesar de não ser pedido, nos pontos em que $|z| = 1$, a série é divergente (como consequência do Teste da divergência).

(ii) Para $z = 0$, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n!z^n = 0! + 1!z + 2!z^2 + \cdots$ converge e o valor da soma é 1. Vejamos agora para $z \neq 0$. Neste caso, vamos usar o Teorema de D'Alembert ou Teste da Razão (ver Teorema I.12.26). Como

$$\lim_n \left| \frac{(n+1)!z^{n+1}}{n!z^n} \right| = \lim_n |z|(n+1) = +\infty,$$

resulta do Teorema I.12.26 que a série diverge se $z \neq 0$. Portanto, o raio de convergência da série é $R = 0$ e a série apenas converge quando $z = 0$.

(iii) Para $z = 0$, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n+1} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \cdots$ converge e o valor da soma é 1. Vejamos agora para $z \neq 0$. Neste caso, vamos usar o Teorema de D'Alembert ou Teste da Razão (ver Teorema I.12.26). Como

$$\lim_n \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{n+2}}{\frac{z^n}{n+1}} \right| = \lim_n |z| \frac{n+2}{n+1} = |z|,$$

resulta do Teorema I.12.26 que a série converge se $|z| < 1$, com $z \neq 0$, e diverge se $|z| > 1$. Como já tínhamos verificado a convergência da série quando $z = 0$, concluímos que o raio de convergência da série é $R = 1$ e a bola de convergência é $B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

(iv) Para $z = 0$, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$ converge e o valor da soma é 1. Vejamos agora para $z \neq 0$. Neste caso, vamos usar o Teorema de D'Alembert ou Teste da Razão (ver Teorema I.12.26). Como

$$\lim_n \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \lim_n |z| \frac{1}{n+1} = 0,$$

resulta do Teorema I.12.26 que a série converge para todo o $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Como já tínhamos verificado a convergência da série quando $z = 0$, concluímos que o raio de convergência da série é $R = +\infty$ e a bola de convergência é $B(0, +\infty) = \mathbb{C}$.

Teorema I.12.32

Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e seja $R > 0$ (ou $R = +\infty$) o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$. Seja $f : B(z_0, R) \to \mathbb{C}$ a função soma dessa série de potências, isto é, para todo $z \in B(z_0, R)$ (ou $z \in \mathbb{C}$, se $R = +\infty$),

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Então:

(i) *a série de potências*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}$$

também tem raio de convergência R;

(ii) *f é analítica em $B(z_0, R)$ e, para todo $z \in B(z_0, R)$ (ou $z \in \mathbb{C}$, se $R = +\infty$),*

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n\right)' = \left(a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots\right)' \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n(z - z_0)^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}. \end{aligned}$$

Como consequência do teorema anterior, temos o seguinte resultado de unicidade de representação em série de potências.

Corolário I.12.33: Unicidade de representação de uma função em séries de potências

Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e seja $R > 0$ (ou $R = +\infty$) o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$. Seja $f : B(z_0, R) \to \mathbb{C}$ a função definida por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

para todo $z \in B(z_0, R)$ (ou $z \in \mathbb{C}$, se $R = +\infty$). Então, existem as derivadas de todas as ordens de f em $B(z_0, R)$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n\, (z - z_0)^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n\, (z - z_0)^{n-k}.$$

Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}_0$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

(ou seja, $f^{(n)}(z_0) = a_n\, n!$*, para todo* $n \in \mathbb{N}_0$*).*[I.6]

[I.6] Note que $f^{(0)} = f$ e $0! = 1$.

Observação I.12.34

(i) Este último corolário indica-nos que uma função f não pode ser a soma de duas séries de potências de $z - z_0$ diferentes (com raio de convergência não nulo), pois se

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

resulta do corolário anterior que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = b_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Se f for a função soma de uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ (com raio de convergência R não nulo), então

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \qquad z \in B(z_0, R).$$

Esta série é designada por série de Taylor da função f na vizinhança do ponto z_0. Se $z_0 = 0$, a série anterior também se designa por série de Maclaurin da função f.

(iii) Em conclusão, se uma função admitir desenvolvimento em série de potências de $z - z_0$ numa bola $B(z_0, R)$, com $R > 0$ ou $R = +\infty$, essa série é obrigatoriamente a série de Taylor de f na vizinhança de z_0.

Exemplo I.12.35

Pelo Exemplo I.12.21 temos

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \quad \text{para todo o } z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| < 1,$$

e pelo Exercício I.12.31 (i) sabemos que o raio de convergência da série é $R = 1$.

Pelo Corolário I.12.33 concluímos que a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

é a série de Maclaurin de f definida por

$$f(z) = \frac{1}{1 - z}, \qquad z \in B(0, 1).$$

Em particular, podemos concluir que $f^{(n)}(0) = n!$ para todo o $n \in \mathbb{N}_0$.

Exemplo I.12.36

Pelo Exemplo I.12.35 e pelo Teorema I.12.32, concluímos que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1}$$

tem raio de convergência $R = 1$ e que

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1},$$

para $z \in B(0,1)$. Daqui se conclui que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad z \in B(0,1).$$

Exercício I.12.37

Desenvolva em série de potências de $z + 2i$ a função f definida por

$$f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{1\},$$

e indique o conjunto onde tal desenvolvimento é válido.

Resolução

Pelo Exemplo I.12.35, sabemos que

$$\frac{1}{1-\boxed{w}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \boxed{w}^n \quad \text{para todo o } w \in \mathbb{C} \text{ tal que } |\boxed{w}| < 1. \tag{I.12.8}$$

Uma vez que pretendemos o desenvolvimento em potências de $z + 2i$, $z_0 = -2i$ e vamos manipular algebricamente a expressão da função para que possamos usar a igualdade (I.12.8). Assim, para $z \neq 1$, temos

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{1+2i-z-2i} = \frac{1}{1+2i-(z+2i)} \\ &= \frac{1}{(1+2i)\left(\frac{(1+2i)}{1+2i} - \frac{z+2i}{1+2i}\right)} = \frac{1}{(1+2i)\left(1-\boxed{\frac{z+2i}{1+2i}}\right)}. \end{aligned}$$

Agora, pela igualdade (I.12.8), com $w = \frac{z+2i}{1+2i}$ e desde que $|w| = \left|\boxed{\frac{z+2i}{1+2i}}\right| < 1$ (o que implica também que $z \neq 1$), temos

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{(1+2i)} \times \frac{1}{1-\boxed{\frac{z+2i}{1+2i}}} = \frac{1}{(1+2i)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\boxed{\frac{z+2i}{1+2i}}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+2i)^n}{(1+2i)^{n+1}}. \end{aligned}$$

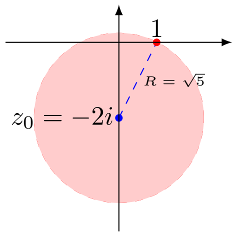
Como

$$\left|\frac{z+2i}{1+2i}\right| < 1 \iff |z+2i| < |(1+2i)| = \sqrt{5},$$

concluímos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+2i)^n}{(1+2i)^{n+1}}, \quad z \in B(-2i, \sqrt{5}) = \{z \in \mathbb{C} : |z-(-2i)| < \sqrt{5}\}.$$

O raio de convergência da série é $R = \sqrt{5}$ e coincide com a distância de $z_0 = -2i$ ao ponto $z = 1$ onde f tem uma singularidade.



Ao contrário do que se passa para uma função real, mesmo sendo de classe C^∞, em que a função pode não coincidir com a sua série de Taylor, uma função complexa e analítica numa bola aberta $B(z_0, R)$, com $R > 0$ vai admitir representação em série de Taylor numa vizinhança de z_0 e coincidir com essa série nessa vizinhança. Este resultado é importantíssimo, pois também nos mostra que uma função analítica numa bola implica a existência das derivadas de qualquer ordem dessa função nessa bola.

Teorema I.12.38: Representação em Série de Taylor

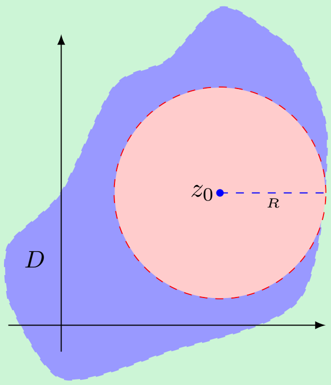
Seja $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica em $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \subseteq D$, com $R > 0$ ou $R = +\infty$ (caso em que $D = B(z_0, R) = \mathbb{C}$). Então existem as derivadas de todas os ordens de f em $B(z_0, R)$ (portanto, as derivadas de todas as ordens existem e são analíticas em $B(z_0, R)$) e f admite a representação em série de Taylor em potências de $z - z_0$ em $B(z_0, R)$, isto é,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

para todo $z \in B(z_0, R)$.

Observação I.12.39

Dada uma função $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, com $z_0 \in D$, se considerarmos o maior R possível tal que f seja analítica em $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \subset D$, o Teorema I.12.38 diz-nos que f admite representação em série de Taylor em potências de $z - z_0$ na bola $B(z_0, R)$. Portanto, nos exemplos e nos exercícios, iremos considerar sempre a maior bola possível onde f seja analítica.



Observação I.12.40

Pelo Teorema I.12.38 sabemos que uma função $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, com $z_0 \in D$ e analítica em $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \subset D$, com $R > 0$, é infinitamente diferenciável em $B(z_0, R)$ e f admite representação em série de Taylor em potências de $z - z_0$ na bola $B(z_0, R)$. Este resultado manifesta uma grande diferença com a Análise Real. Em Análise Real, podemos ter uma função infinitamente diferenciável e não ser possível representá-la em série de potências. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é infinitamente diferenciável e a série de Maclaurin de f é a série nula (pois $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$), que não coincide com a função em intervalo algum. Repare que a versão complexa da função anterior, isto é, a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

nem sequer é contínua em $z = 0$. Pense nos limites a tender para 0 ao longo do eixo real e ao longo do eixo imaginário e veja que são diferentes; depois, use o Teorema I.8.3 para concluir o pretendido.

Exercício I.12.41

Mostre que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$, admite desenvolvimento em série de Maclaurin (isto é, em potências de $z - z_0$ com $z_0 = 0$) em $\mathbb{C}$ e que

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Mostre, ainda, que

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

e que

$$e^{-iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n i^n}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Resolução

No Exercício I.11.16, considerando $\alpha = 1$, provámos que f é diferenciável em $\mathbb{C}$. Assim, f é analítica em $B(0, +\infty) = \mathbb{C}$. Recorrendo ao Teorema I.12.38, com $z_0 = 0$ e $R = +\infty$, f admite a representação em série de Maclaurin

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Pelo Exercício I.11.16 temos, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, que $f^{(n)}(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$. Assim, em particular, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Como tal,

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Desta última igualdade tiramos que

$$e^{\boxed{w}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\boxed{w}^n}{n!},\quad \boxed{w}\in\mathbb{C}. \tag{I.12.9}$$

Assim, para $\boxed{w}=\boxed{iz}$ na igualdade anterior temos

$$e^{\boxed{iz}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\boxed{iz})^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{n!}z^n,\quad z\in\mathbb{C}.$$

De (I.12.9) com $\boxed{w}=\boxed{-iz}$, obtemos

$$e^{\boxed{-iz}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\boxed{-iz})^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n i^n}{n!}z^n,\quad z\in\mathbb{C}.$$

Exercício I.12.42: T.P.C.

Mostre que $f:\mathbb{C}\backslash\{0\}\to\mathbb{C}$ definida por $f(z)=\operatorname{Log} z$, $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, admite desenvolvimento em série de Taylor em potências de $z-1$ em $B(1,1)=\{z\in\mathbb{C}:|z-1|<1\}$ e que

$$f(z)=\operatorname{Log} z=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-1)^n}{n}=(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}-\frac{(z-1)^4}{4}+\cdots,\quad z\in B(1,1).$$

Sugestão

Note que $f(1)=0$ e prove que para $z\in B(1,1)$, $f^{(n)}(z)=(-1)^{n+1}(n-1)!z^{-n}$, $\quad n\in\mathbb{N}$.

Exercício I.12.43

Mostre que $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida por $f(z)=\sin z$, $z\in\mathbb{C}$, admite desenvolvimento em série de Maclaurin (isto é, em potências de $z-z_0$ com $z_0=0$) em $\mathbb{C}$ e que

$$f(z)=\sin z=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\quad z\in\mathbb{C}.$$

Resolução

Vamos resolver este exercício por dois processos. (i) Primeiro Processo: Atendendo à definição de $\sin$ e às propriedades algébricas da derivada (Teorema I.11.5) e ao Exercício I.11.16, considerando $\alpha=i$ e $\alpha=-i$, f é diferenciável em $\mathbb{C}$ e

$$(\sin z)'=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)'=\frac{1}{2i}ie^{iz}+i\frac{1}{2i}e^{-iz}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z.$$

Assim, f é analítica em $B(0,+\infty)=\mathbb{C}$. Recorrendo ao Teorema I.12.38, com $z_0=0$ e $R=+\infty$, f admite a representação em série de Maclaurin

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n,\quad z\in\mathbb{C}. \tag{I.12.10}$$

Só precisamos de encontrar uma expressão geral para $f^{(n)}(0)$. Fica para provar por indução (esta expressão deduz-se como no caso real - ver Sebenta de AMI, usando a propriedade (d) da Proposição I.7.9, pois

$\cos w = \sin(w + \frac{\pi}{2})$, $w \in \mathbb{C}$) que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$f^{(n)}(z) = \sin(z + n\frac{\pi}{2}), \quad \text{para cada} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$f^{(n)}(0) = \sin(n\frac{\pi}{2}).$$

Se n for par (ou igual a 0), existe $\ell \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = 2\ell$. Se n for ímpar, existe $\ell \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = 2\ell+1$. Agora, facilmente se verifica que $f^{(2\ell)}(0) = 0$, $\ell \in \mathbb{N}_0$, e que $f^{(2\ell+1)}(0) = (-1)^\ell$, $\ell \in \mathbb{N}_0$. Portanto, de (I.12.10) resulta

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n!} z^n = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\sin((2\ell+1)\frac{\pi}{2})}{(2\ell+1)!} z^{2\ell+1} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} z^{2\ell+1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

(ii) Segundo Processo: Atendendo à definição de $\sin$, ao desenvolvimento em série de Maclaurin da função exponencial (Exercício I.12.41) e às propriedades algébricas das séries (ver Teorema I.12.17), temos, para cada $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i} e^{iz} - \frac{1}{2i} e^{-iz} \\
&= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} z^n - \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n i^n}{n!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2i} \frac{i^n - (-1)^n i^n}{n!} z^n \\
&= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} z^{2\ell+1},
\end{aligned}$$

pois se n for par (ou igual a 0), existe $\ell \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = 2\ell$ e, nesse caso, $i^n - (-1)^n i^n = i^{2\ell} - (-1)^{2\ell} i^{2\ell} = 0$, $\ell \in \mathbb{N}_0$; se n for ímpar, existe $\ell \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = 2\ell + 1$ e, nesse caso, $i^n - (-1)^n i^n = i^{2\ell+1} - (-1)^{2\ell+1} i^{2\ell+1} = 2\, i^{2\ell+1} = 2i\ i^{2\ell} = 2i\ (-1)^\ell$, $\ell \in \mathbb{N}_0$. Atendendo à unicidade de representação em série de potências (Corolário I.12.33), esta série é a série de Maclaurin da função $\sin$.

Exercício I.12.44

Mostre que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \cos z$, $z \in \mathbb{C}$, admite desenvolvimento em série de Maclaurin (isto é, em potências de $z - z_0$ com $z_0 = 0$) em $\mathbb{C}$ e que

$$f(z) = \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Resolução

Podemos resolver este exercício por processos análogos à resolução do Exercício I.12.43. Contudo, vamos resolver este exercício por um outro processo diferente. Pelo Exercício I.12.43, temos

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Como tal, pelo Teorema I.12.32,

$$\begin{aligned}
\cos z = (\sin z)' &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right)' \\
&= 1 - 3\frac{z^2}{3!} + 5\frac{z^4}{5!} - 7\frac{z^6}{7!} + \cdots + (-1)^n (2n+1)\frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots \\
&= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Atendendo à unicidade de representação em série de potências (Corolário I.12.33), esta série é a série de Maclaurin da função $\cos$.

Exercício I.12.45: T.P.C.

Mostre que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \sinh z$, $z \in \mathbb{C}$, admite desenvolvimento em série de Maclaurin (isto é, em potências de $z - z_0$ com $z_0 = 0$) em $\mathbb{C}$ e que

$$f(z) = \sinh z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Sugestão

Note que para $z \in \mathbb{C}$, $\sinh z = \frac{1}{2}e^z - \frac{1}{2}e^{-z}$.

Exercício I.12.46: T.P.C

Mostre que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \cosh z$, $z \in \mathbb{C}$, admite desenvolvimento em série de Maclaurin (isto é, em potências de $z - z_0$ com $z_0 = 0$) em $\mathbb{C}$ e que

$$f(z) = \cosh z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Sugestão

Note que para $z \in \mathbb{C}$, $\cosh z = \frac{1}{2}e^z + \frac{1}{2}e^{-z}$. Ou observe que para $z \in \mathbb{C}$, $\cosh z = (\sinh z)'$.

I.12.4 Representação em Série de Laurent

Na subsecção anterior verificámos que uma função analítica numa bola aberta centrada em z_0 admite representação única em série de potências não-negativas de $z - z_0$. Contudo, existe um resultado mais geral que permite representar uma função em série de potências se a função for analítica apenas numa coroa centrada em z_0. O que surge de novo é que esta série de potências de $z - z_0$ admite potências negativas de $z - z_0$. Este resultado é dado pelo próximo teorema.

Teorema I.12.47: Representação em Série de Laurent

Seja $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica em $A(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\} \subseteq D$, com $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$. Então f admite representação em série de Laurent em potências de $z - z_0$ em $A(z_0, R_1, R_2)$, isto é,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

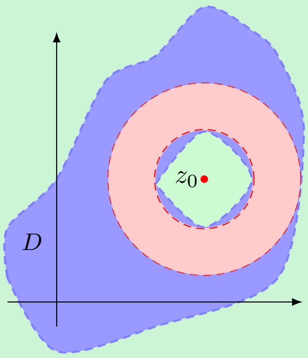
para todo $z \in A(z_0, R_1, R_2)$ (a série converge absolutamente para todo $z \in A(z_0, R_1, R_2)$). Além do mais, esta representação é única.

Observação I.12.48

Claro que se uma função for analítica em $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$, também é analítica na coroa $A(z_0, 0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$. Nesse caso, a série de Laurent terá de coincidir com a série de Taylor em potências de $z - z_0$ e, portanto, $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação I.12.49

Dada uma função $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ (pode pertencer ou não ao domínio da função), se considerarmos o menor R_1 possível e o maior R_2 possível tais que f seja analítica em $A(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\} \subset D$, o teorema diz-nos que f admite representação única em série de Laurent em potências de $z - z_0$ na coroa $A(z_0, R_1, R_2)$. Portanto, nos exemplos e nos exercícios, iremos considerar sempre a maior coroa possível centrada em z_0 onde f seja analítica.

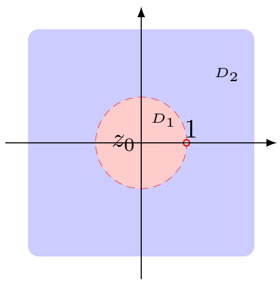


Exercício I.12.50

Considere a função $f : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{1}{1 - z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Desenvolva f em série de potências de z (portanto, $z_0 = 0$) nos seguintes domínios:

(i) $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;

(ii) $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.



Resolução

(i) Neste caso, D_1 coincide com a bola $B(0,1)$. Como f é analítica em $B(0,1)$, f admite desenvolvimento em série de Taylor em potências de z e, pelo Exemplo I.12.35, temos

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad z \in D_1.$$

Repare que D_1 é a maior bola aberta centrada em $z_0 = 0$ onde f é analítica, pois f tem uma singularidade em $z = 1$.

(ii) Neste caso, D_2 coincide com a coroa $A(0,1,+\infty) = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-0| < +\infty\}$. Como f é analítica em $A(0,1,+\infty)$, pelo Teorema I.12.47 f admite desenvolvimento único em série de Laurent em potências de z em $A(0,1,+\infty)$. Vamos determinar esse desenvolvimento. Como para $z \in D_2$, temos $z \neq 0$ e $|z| > 1$, resulta que $\left|\boxed{\frac{1}{z}}\right| < 1$. Assim, se considerarmos $w = \dfrac{1}{z}$ na igualdade (ver (I.12.8))

$$\frac{1}{1-\boxed{w}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \boxed{w}^n \quad \text{para todo o } w \in \mathbb{C} \text{ tal que } |\boxed{w}| < 1,$$

temos

$$\frac{1}{1-\boxed{\frac{1}{z}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\boxed{\frac{1}{z}}\right)^n \quad \text{para todo o } z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |\boxed{z}| > 1. \tag{I.12.11}$$

Por outro lado, para $z \in D_2$,

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z\left(\dfrac{1}{z}-1\right)} = \frac{1}{-z\left(1-\dfrac{1}{z}\right)} = -\frac{1}{z} \times \frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}. \tag{I.12.12}$$

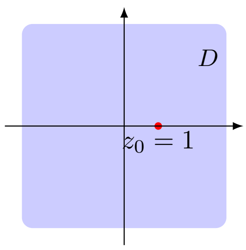
Consequentemente, de (I.12.12) e (I.12.11), obtemos, para $z \in D_2$,

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \times \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\boxed{\frac{1}{z}}\right)^n = -\frac{1}{z} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{z^{n+1}} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \cdots,$$

que é a representação em série de Laurent em potências de z em D_2.

Exercício I.12.51

Considere a função $f : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Desenvolva f em série de potências de $z-1$ (portanto, $z_0 = 1$) no domínio $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < +\infty\} = \mathbb{C}\backslash\{1\}$.



Resolução

Observe que D é o anel centrado em $z_0 = 1$ dado por $A(1,0,+\infty)$ e que f é analítica em $A(1,0,+\infty)$. Pelo Teorema I.12.47 f admite desenvolvimento único em série de Laurent em potências de $z-1$ em $A(1,0,+\infty)$.

Como para $z \in A(1,0,+\infty) = D = \mathbb{C}\backslash\{1\}$,

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z-1} = -(z-1)^{-1}$$

este é o desenvolvimento de f em série de Laurent em potências de $z-1$, pois

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-1)^n, \qquad z \in A(1,0,+\infty),$$

com

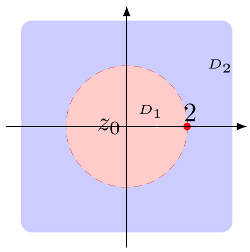
$$c_n = \begin{cases} -1, & n=-1 \\ 0, & n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\} \end{cases}.$$

Exercício I.12.52

Considere a função $f : \mathbb{C}\backslash\{2\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{1}{2-z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{2\}$. Desenvolva f em série de potências de z (portanto, $z_0 = 0$) nos seguintes domínios:

(i) $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$;

(ii) $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$.



Resolução

(i) Neste caso, D_1 coincide com a bola $B(0,2)$. Como f é analítica em $B(0,2)$, f admite desenvolvimento em série de Taylor em potências de z (ou série de Maclaurin). Vamos determinar esse desenvolvimento (sem recorrer ao cálculo de derivadas de ordem n no ponto $z_0 = 0$. Como para $z \in D_1$, temos $|z| < 2$, resulta que $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$. Assim, recorrendo à igualdade (ver (I.12.8))

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{+\infty} w^n \quad \text{para todo o } w \in \mathbb{C} \text{ tal que } |w| < 1$$

com $w = \frac{z}{2}$, temos para $z \in D_1$,

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Atendendo à unicidade de representação em série de potências, a série anterior é a série de Maclaurin de f. Repare que D_1 é a maior bola aberta centrada em $z_0 = 0$ onde f é analítica, pois f tem uma singularidade em $z = 2$.

(ii) Neste caso, D_2 coincide com a coroa $A(0,2,+\infty) = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-0| < +\infty\}$. Como f é analítica em $A(0,2,+\infty)$, pelo Teorema I.12.47 f admite desenvolvimento único em série de Laurent em potências de z em $A(0,2,+\infty)$. Vamos determinar esse desenvolvimento. Como para $z \in D_2$, temos $z \neq 0$ e $|z| > 2$, resulta que

$\left|\boxed{\frac{2}{z}}\right| < 1$. Assim, se considerarmos $w = \frac{2}{z}$ na igualdade (ver (I.12.8))

$$\frac{1}{1-\boxed{w}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \boxed{w}^n \quad \text{para todo o } w \in \mathbb{C} \text{ tal que } |\boxed{w}| < 1,$$

temos

$$\frac{1}{1-\boxed{\frac{2}{z}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\boxed{\frac{2}{z}}\right)^n \quad \text{para todo o } z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |\boxed{z}| > 2. \tag{I.12.13}$$

Consequentemente, de (I.12.13), obtemos, para $z \in D_2$,

$$\frac{2}{1-z} = -\frac{1}{z} \times \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\frac{1}{z} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\boxed{\frac{2}{z}}\right)^n = -\frac{1}{z} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{2^n}{z^{n+1}}\right) = -\frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} - \frac{2^2}{z^3} - \frac{2^3}{z^4} + \cdots,$$

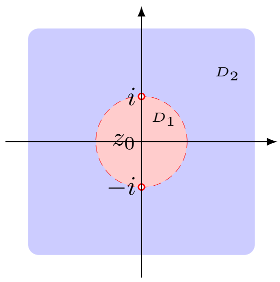
que é a representação em série de Laurent em potências de z em D_2.

Exercício I.12.53

Considere a função $f : \mathbb{C}\backslash\{\pm i\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$. Desenvolva f em série de potências de z (portanto, $z_0 = 0$) nos seguintes domínios:

(i) $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;

(ii) $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.



Resolução

(i) Neste caso, D_1 coincide com a bola $B(0,1)$. Como f é analítica em $B(0,1)$, f admite desenvolvimento em série de Taylor em potências de z (ou série de Maclaurin). Vamos determinar esse desenvolvimento (sem recorrer ao cálculo de derivadas de ordem n no ponto $z_0 = 0$. Como, para $z \in D_1$,

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{1-\left(\boxed{-z^2}\right)}$$

e $|-z^2| = |z|^2 < 1 \iff |z| < 1$, recorrendo à igualdade (ver (I.12.8))

$$\frac{1}{1-\boxed{w}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \boxed{w}^n \quad \text{para todo o } w \in \mathbb{C} \text{ tal que } |\boxed{w}| < 1$$

com $\boxed{w} = \boxed{-z^2}$, temos para $z \in D_1$,

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{1-\left(\boxed{-z^2}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\boxed{-z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}.$$

Atendendo à unicidade de representação em série de potências, a série anterior é a série de Maclaurin de f.

Repare que D_1 é a maior bola aberta centrada em $z_0 = 0$ onde f é analítica, pois f tem singularidades em $z = i$ e $z = -i$.
(ii) Neste caso, D_2 coincide com a coroa $A(0, 1, +\infty) = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 0| < +\infty\}$. Como f é analítica em $A(0, 1, +\infty)$, pelo Teorema I.12.47 f admite desenvolvimento único em série de Laurent em potências de z em $A(0, 1, +\infty)$. Vamos determinar esse desenvolvimento. Como para $z \in D_2$, temos $z \neq 0$ e $|z| > 1$, resulta que $\left|\boxed{-\frac{1}{z^2}}\right| < 1$. Assim, para $z \in D_2$,

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z^2(1+\frac{1}{z^2})} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{1}{z^2})}$$

e considerando $\boxed{w} = \boxed{-\frac{1}{z^2}}$ na igualdade (ver (I.12.8))

$$\frac{1}{1-\boxed{w}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \boxed{w}^n \quad \text{para todo o } w \in \mathbb{C} \text{ tal que } |\boxed{w}| < 1,$$

temos, para $z \in D_2$,

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{1}{z^2})} = \frac{1}{z^2} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\boxed{-\frac{1}{z^2}}\right)^n = \frac{1}{z^2} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+2}},$$

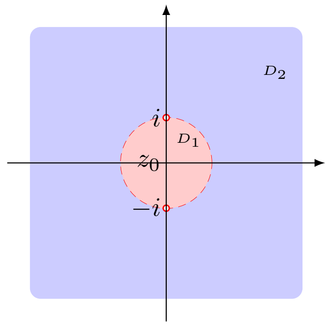
que é a representação em série de Laurent em potências de z em D_2.

Exercício I.12.54: T.P.C.

Considere a função $f : \mathbb{C}\backslash\{\pm i\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{1+z}{z^2+1}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$. Desenvolva f em série de potências de z (portanto, $z_0 = 0$) nos seguintes domínios:

(i) $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;

(ii) $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.



Sugestão

Para $z \in \mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$, $f(z) = \dfrac{1+z}{z^2+1} = (1+z) \cdot \dfrac{1}{z^2+1}$. Desenvolva $\dfrac{1}{z^2+1}$ em potências de z (ver exercício anterior) e repare que $1 + z$ é uma soma finita de potências de z.

Exercício I.12.55

Considere a função $f : \mathbb{C}\backslash\{1, 2\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{1, 2\}$. Desenvolva a função f em série de potências de $z - z_0$ com z_0 e domínios abaixo indicados:

(i) $D_1 = \{z : |z| < 1\}$, $z_0 = 0$;

(ii) $D_2 = \{z : 1 < |z| < 2\}$, $z_0 = 0$;

(iii) $D_3 = \{z : 2 < |z|\}$, $z_0 = 0$;

(iv) $D_4 = \{z : 0 < |z-1| < 1\}$, $z_0 = 1$;

(v) $D_5 = \{z : 0 < |z-2| < 1\}$, $z_0 = 2$.

Sugestão

Para os casos (i), (ii) e (iii) use o facto de, para $z \in \mathbb{C}\backslash\{1,2\}$,

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-2}.$$

(i) Mostre que

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - 2^{-n-1}\right) z^n, \quad z \in D_1.$$

(ii) Mostre que

$$f(z) = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{z^{n+1}}\right) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad z \in D_2.$$

(iii) Mostre que

$$f(z) = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2^n - 1) \frac{1}{z^{n+1}}, \quad z \in D_3.$$

(iv) Neste caso, use o facto de

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{(z-1)} \cdot \frac{1}{1-(z-1)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{1,2\},$$

pois $\frac{1}{(z-1)}$ já é uma potência (negativa) de $z-1$. Mostre que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} -(z-1)^{n-1}, \quad z \in D_4.$$

(v) Neste caso, use o facto de

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1-(-(z-2))}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{1,2\},$$

pois $\frac{1}{(z-2)}$ já é uma potência (negativa) de $z-2$. Mostre que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-2)^{n-1}, \quad z \in D_5.$$

Exercício I.12.56: T.P.C.

Determine a representação em série de Laurent de potências de $z-1$ para a função f definida por

$$f(z) = \frac{1}{(-z+1)^{2020}(z+2)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{-2,1\},$$

na região $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < R\}$, indicando o maior valor possível para R.

Sugestão

Note que $\dfrac{1}{(-z+1)^{2020}} = \dfrac{1}{(z-1)^{2020}}$ é uma potência (negativa) de $z-1$. Basta, portanto, desenvolver $\dfrac{1}{z+2} = \dfrac{1}{3+(z-1)} = \dfrac{1}{3-(-(z-1))}$ em potências de $z-1$. Para determinar R, veja a que distância de $z=1$ está a outra singularidade de f.

Exercício I.12.57

Determine a representação em série de Laurent de potências de z da função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\},$$

no maior domínio possível.

Resolução

Em primeiro lugar, f é analítica em $A(0,0,+\infty) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Como tal, pelo Teorema I.12.47, f admite desenvolvimento único em série de Laurent em potências de z em $A(0,0,+\infty) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pelo Exercício I.12.43,

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Como tal, para $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$,

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots,$$

que é a representação em série de Laurent em potências de z de f em $A(0,0,+\infty) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Exercício I.12.58

Determine a representação em série de Laurent de potências de z da função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\},$$

no maior domínio possível.

Resolução

Em primeiro lugar, f é analítica em $A(0,0,+\infty) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Como tal, pelo Teorema I.12.47, f admite desenvolvimento único em série de Laurent em potências de z em $A(0,0,+\infty) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pelo Exercício I.12.43,

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Como tal, para $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$,

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-3}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n-3}}{(2n+1)!} + \cdots,$$

que é a representação em série de Laurent em potências de z de f em $A(0,0,+\infty) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Exercício I.12.59

Determine a representação em série de Laurent de potências de z da função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{1/z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, no maior domínio possível.

Resolução

Em primeiro lugar, f é analítica em $A(0,0,+\infty) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Como tal, pelo Teorema I.12.47, f admite desenvolvimento único em série de Laurent em potências de z em $A(0,0,+\infty) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pelo Exercício I.12.41,

$$e^{\boxed{w}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\boxed{w})^n}{n!} = 1 + \boxed{w} + \frac{(\boxed{w})^2}{2!} + \frac{(\boxed{w})^3}{3!} + \cdots + \frac{(\boxed{w})^n}{n!} + \cdots, \quad \boxed{w} \in \mathbb{C}.$$

Assim, para $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\boxed{w} = \boxed{\frac{1}{z}} \in \mathbb{C}$ e

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\boxed{\frac{1}{z}}\right)^n}{n!} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}\cdots,$$

que é a representação em série de Laurent em potências de z de f em $A(0,0,+\infty) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Exercício I.12.60

Determine a representação em série de Laurent de potências de z da função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = z^7 \sin\frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\},$$

no maior domínio possível.

Resolução

Em primeiro lugar, f é analítica em $A(0,0,+\infty) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Como tal, pelo Teorema I.12.47, f admite desenvolvimento único em série de Laurent em potências de z em $A(0,0,+\infty) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pelo Exercício I.12.43,

$$\sin\boxed{w} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(\boxed{w})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \boxed{w} - \frac{(\boxed{w})^3}{3!} + \frac{(\boxed{w})^5}{5!} - \frac{(\boxed{w})^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{(\boxed{w})^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad \boxed{w} \in \mathbb{C}.$$

Assim, para $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\boxed{w} = \boxed{\frac{1}{z}} \in \mathbb{C}$ e

$$z^7 \sin\boxed{\frac{1}{z}} = z^7 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{\left(\boxed{\frac{1}{z}}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = z^7 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{z^{2n+1}\,(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n-6}},$$

que é a representação em série de Laurent em potências de z de f em $A(0,0,+\infty) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Exercício I.12.61: T.P.C.

Determine a representação em série de Laurent de potências de z da função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, no maior domínio possível.

I.13 Singularidades isoladas, Resíduos, Zeros e Pólos

I.13.1 Série de Laurent em singularidades isoladas e classificação das singularidades isoladas

Recorde que na Subsecção I.11.3 consideramos funções analíticas e singularidades. De particular importância, mencionámos as singularidades isoladas (ver da Definição I.11.34). Recorde que uma função $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tem uma singularidade isolada em $z_0 \in \mathbb{C}$ se existir $R > 0$ (ou $R = +\infty$) em que f é analítica em $A(z_0, 0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\} \subseteq D$ e f não é diferenciável em z_0, caso esteja definida nesse ponto, ou f não está definida em z_0.

Recorde através dos exemplos:

Exemplos I.13.1

(i) O ponto $z_0 = 0$ é uma singularidade isolada da função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{1}{z^3}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$;

(ii) O ponto $z_0 = 1$ é uma singularidade isolada da função $f : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{z}{z-1}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$;

(iii) Os pontos 0, $\pm i$ são singularidades isoladas da função $f : \mathbb{C}\backslash\{0, \pm i\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{z+1}{z(z^2+1)}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0, \pm i\}$;

(iv) O ponto $z_0 = 0$ é uma singularidade isolada da função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$;

(v) O ponto $z_0 = 0$ é uma singularidade isolada da função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$;

(vi) O ponto $z_0 = 0$ é uma singularidade isolada da função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^7 \sin \dfrac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$;

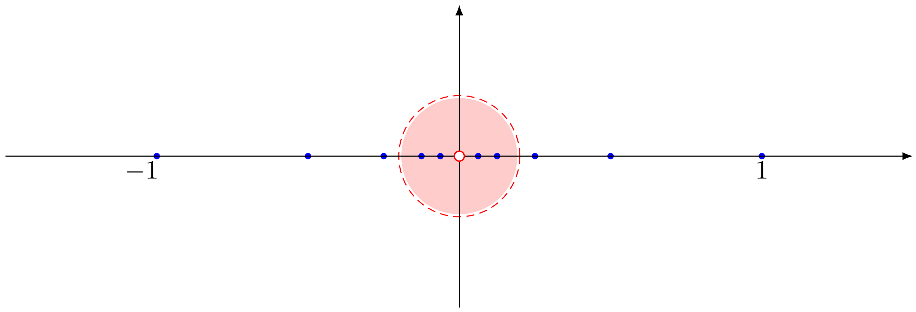
(vii) O ponto $z_0 = 0$ é uma singularidade isolada da função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$;

(viii) O ponto $z_0 = 0$ é uma singularidade isolada da função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$;

(ix) Os pontos $z_0 = 0$ e $z_0 = -1$ não são singularidades isoladas da função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \operatorname{Log} z$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$;

(x) O ponto $z_0 = 1$ não é singularidade isolada da função $f : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \operatorname{Log}(z-1)$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$;

(xi) Considere a função $f : \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : z = 0 \vee z = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{1}{\sin(\pi/z)}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : z = 0 \vee z = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{Z}\}$. Os pontos $z_k = \dfrac{1}{k}$, $k \in \mathbb{Z}$, são singularidades isoladas. O ponto $z_0 = 0$ é uma singularidade mas não é singularidade isolada de f; de facto, atendendo a que $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{k} = 0$, qualquer que seja a coroa $A(0, 0, R)$ que se considere, existe sempre uma singularidade $z_{k_0} = \dfrac{1}{k_0} \in A(0, 0, R)$, com $k_0 \in \mathbb{N}$.



Observação I.13.2: Representação em Série de Laurent numa singularidade isolada

Se z_0 for uma singularidade isolada de $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, existe uma coroa

$$A(z_0, 0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\} \subseteq D,$$

para algum $R > 0$ (ou $R = +\infty$), em que f é analítica. Portanto, pelo Teorema I.12.47, f admite desenvolvimento único em série de Laurent em potências de $z - z_0$ em $A(z_0, 0, R)$ com

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \qquad z \in A(z_0, 0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}. \qquad \text{(I.13.1)}$$

Definição I.13.3

Seja z_0 uma singularidade isolada de $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. À série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

da representação (I.13.1) *chamamos a* parte analítica *do desenvolvimento de f em série de Laurent em potências de $z - z_0$. À série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

da representação (I.13.1) *chamamos a* parte principal *do desenvolvimento de f em série de Laurent em potências de $z - z_0$. Ao primeiro termo da sucessão $(b_n)_n$, ou seja, a b_1, que é o coeficiente da potência negativa $(z - z_0)^{-1}$, chamamos* resíduo *de f em z_0 e escrevemos*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1.$$

Podemos verificar pelos Exemplos I.12.57, I.12.58 e I.12.59 (ver também I.12.60), em que $z_0 = 0$ é uma singularidade isolada, que a representação em série de Laurent pode ser diferente no que respeita ao número de termos não nulos na sua parte principal. No Exemplo I.12.57, a parte principal é nula, pois os coeficientes das potências negativas são todos iguais a zero. No Exemplo I.12.58, a parte principal só tem dois termos (só há duas potências de z negativas). Nos Exemplos I.12.59 e I.12.60, a parte principal tem uma infinidade de termos não nulos. Assim, os exemplos referidos sugerem a seguinte classificação das singularidades isoladas.

Definição I.13.4: Classificação de Singularidades isoladas

Seja z_0 uma singularidade isolada de $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e seja $A(z_0, 0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\} \subseteq D$, para algum $R > 0$ (ou $R = +\infty$), a coroa em que f é analítica. Seja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \qquad z \in A(z_0, 0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}, \tag{I.13.2}$$

o desenvolvimento único de f em série de Laurent em potências de $z - z_0$ em $A(z_0, 0, R)$.

(i) *Se a parte principal do desenvolvimento (I.13.2) for nula, isto é, $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots, \qquad z \in A(z_0, 0, R), \tag{I.13.3}$$

e dizemos que z_0 é uma singularidade removível. Neste caso podemos redefinir ou definir f em z_0 por $f(z_0) = a_0$ e f será analítica em $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$.

(ii) *Se a parte principal do desenvolvimento (I.13.2) tiver um número finito de termos não nulos, isto é, se existir $m \in \mathbb{N}$ tal que $b_m \neq 0$ e $b_n = 0$ para todo $n \geq m + 1$, temos*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \ldots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m}, \qquad z \in A(z_0, 0, R), \qquad (b_m \neq 0),$$

e dizemos que z_0 é um pólo de ordem m. Se $m = 1$, dizemos que z_0 é um pólo simples.

(iii) *Se a parte principal do desenvolvimento (I.13.2) tiver uma infinidade de termos não nulos, dizemos que z_0 é uma singularidade essencial.*

Exemplos I.13.5

(i) Considere a função $f : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{1}{1 - z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. O ponto $z = 1$ é uma singularidade isolada de f e, pelo Exemplo I.12.51, o desenvolvimento em potências de $z - 1$ em série de Laurent na coroa $A(1, 0, +\infty)$ é

$$f(z) = \frac{1}{1 - z} = -\frac{1}{z - 1} = -(z - 1)^{-1}, \quad z \in A(1, 0, +\infty).$$

Assim, $z = 1$ é um pólo simples e

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = -1.$$

(ii) Considere a função $f : \mathbb{C}\backslash\{1, 2\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{1}{(z - 1)(z - 2)}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{1, 2\}$. Os pontos $z = 1$ e $z = 2$ são singularidades isoladas de f. Pelo Exemplo I.12.55 (ver sugestão (iv) e (v)), os desenvolvimentos em série de Laurent em potências de $z - 1$ na coroa $A(1, 0, 1)$ (note que o raio máximo é $R = 1$, pois $z = 2$ é uma singularidade) e em potências de $z - 2$ na coroa $A(2, 0, 1)$ (note que o raio máximo é $R = 1$, pois $z = 1$ é uma singularidade) são dados, respetivamente, por

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} -(z - 1)^{n-1} \\ &= -\frac{1}{z - 1} - 1 - (z - 1) - (z - 1)^2 - (z - 1)^3 - \cdots, \quad z \in A(1, 0, 1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-2)^{n-1} \\ &= \frac{1}{z-2} - 1 + (z-2) - (z-2)^2 + \cdots + (-1)^n (z-2)^{n-1} + \cdots, \quad z \in A(2,0,1). \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $z = 1$ e $z = 2$ são pólos simples de f. Além disso,

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = -1$$

e

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = 1.$$

(iii) Considere a função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

O ponto $z = 0$ é uma singularidade isolada de f e, pelo Exemplo I.12.57, o desenvolvimento em série de Laurent em potências de z na coroa $A(0, 0, +\infty)$ é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} \\ &= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots, z \in A(0,0,+\infty). \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $z = 0$ é uma singularidade removível e, como tal,

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 0.$$

(iv) Considere a função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

O ponto $z = 0$ é uma singularidade isolada de f e, usando o desenvolvimento em série de Maclaurin da função cos, o desenvolvimento em série de Laurent em potências de z na coroa $A(0, 0, +\infty)$ é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\cos z}{z^2} &= \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n))!} \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \frac{z^4}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n)!} + \cdots, z \in A(0,0,+\infty). \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $z = 0$ é um pólo de ordem 2 e

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = b_1 = 0.$$

(v) Considere a função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

O ponto $z = 0$ é uma singularidade isolada de f e, pelo Exemplo I.12.58, o desenvolvimento em série de Laurent em potências de z na coroa $A(0, 0, +\infty)$ é dado por

$$\begin{aligned}\frac{\sin z}{z^4} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-3}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n-3}}{(2n+1)!} + \cdots, z \in A(0, 0, +\infty).\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $z = 0$ é um pólo de ordem 3 (note que $b_3 = 1 \neq 0$) e

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = b_1 = -\frac{1}{3!}.$$

(vi) Considere a função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = e^{1/z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

O ponto $z = 0$ é uma singularidade isolada de f e, pelo Exemplo I.12.59, o desenvolvimento em série de Laurent em potências de z na coroa $A(0, 0, +\infty)$ é dado por

$$\begin{aligned}e^{1/z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} \cdots, z \in A(0, 0, +\infty).\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $z = 0$ é uma singularidade essencial e

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = b_1 = \frac{1}{1!} = 1.$$

(vii) Considere a função $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = z^7 \sin \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\},$$

O ponto $z = 0$ é uma singularidade isolada de f e, pelo Exemplo I.12.60, o desenvolvimento em série de Laurent em potências de z na coroa $A(0, 0, +\infty)$ é dado por

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n-6}} \\ &= z^6 - \frac{1}{3!}z^4 + \frac{1}{5!}z^2 - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!}\frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n-6}} + \cdots, z \in A(0, 0, +\infty).\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $z = 0$ é uma singularidade essencial e

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = b_1 = 0.$$

Até ao momento, a única maneira de classificar uma singularidade isolada é pelo desenvolvimento da função em série de Laurent. Contudo, tal pode ser muito trabalhoso.

Com vista as aplicações, o nosso objetivo é determinar o resíduo de uma função em singularidades isoladas. Ou seja, se z_0 for uma singularidade isolada de f, pretendemos determinar o coeficiente b_1 da parte principal do desenvolvimento de f em série de Laurent em potências de $z - z_0$ numa coroa $A(z_0, 0, R)$, com $R > 0$.

Se a singularidade for removível, a parte principal da série de Laurent é nula. Como tal, $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = 0$.

Se a singularidade for essencial, a única forma de determinar o resíduo é através do desenvolvimento em Série de Laurent.

Se a singularidade for um pólo, iremos deduzir uma fórmula para determinar o resíduo (nas próximas subsecções).

Assim, nas próximas subsecções iremos apresentar alguns resultados que nos permitem identificar imediatamente singularidades isoladas removíveis ou pólos. No caso dos pólos, também apresentaremos uma fórmula que nos permitirá determinar o respetivo resíduo.

I.13.2 Caracterização de singularidades isoladas removíveis

Nesta subsecção apresentamos um resultado que nos permite facilmente identificar se uma singularidade isolada é removível. Temos então o seguinte resultado.

Teorema I.13.6

Suponhamos que $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tem uma singularidade isolada em z_0 sendo analítica em $A(z_0, 0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\} \subseteq D$, com $R > 0$ (ou $R = +\infty$). Então, são equivalentes as seguintes afirmações:

(i) z_0 *é uma singularidade removível;*

(ii) *existe $L \in \mathbb{C}$ tal que*
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L;$$

(iii) *existem r, com $0 < r < R$, e $M > 0$ tais que*
$$|f(z)| \leq M, \quad z \in A(z_0, 0, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\} \subset \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\},$$
ou seja, existe um anel $A(z_0, 0, r)$, com $0 < r < R$, onde f é limitada;

(iv)
$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0.$$

Demonstração

Iremos provar que (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i). Como tal, atendendo à transitividade da implicação, fica provado que as afirmações são equivalentes.

[(i) $\Longrightarrow$ (ii)] Suponhamos então que z_0 é uma singularidade removível. Então, significa que
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \underbrace{a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots}_{=:\phi(z)}, \qquad z \in A(z_0, 0, R).$$

Seja ϕ a função soma da série de potências do lado direito da igualdade anterior, que está definida em $B(z_0, R)$ e em particular em z_0, pois $\phi(z_0) = a_0$. Note que f e ϕ só coincidem em $A(z_0, 0, R)$. Por outro lado, pelo Teorema I.12.32, ϕ é analítica em $B(z_0, R)$. Em particular, é contínua em z_0. Portanto,
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \phi(z) = \underbrace{\phi(z_0)}_{=:L} \in \mathbb{C}.$$

[(ii) $\Longrightarrow$ (iii)] Como $\lim_{z \to z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}$, considerando $\varepsilon = 1 > 0$, pela definição de limite, existe $\delta > 0$, tal que
$$|f(z) - L| < \varepsilon = 1, \quad z \in A(z_0, 0, \delta) \cap D.$$

Considerando, $r = \min\{\delta, R\}$ e atendendo à desigualdade $||f(z)| - |L|| \leq |f(z) - L|$, obtemos

$$||f(z)| - |L|| < \varepsilon = 1, \quad z \in A(z_0, 0, r),$$

e, em particular,

$$|f(z)| < \underbrace{|L| + 1}_{=:M}, \quad z \in A(z_0, 0, r).$$

Portanto,

$$|f(z)| \leq M, \quad z \in A(z_0, 0, r),$$

com $M = |L| + 1 > 0$.

[(iii) $\implies$ (iv)] Seja $\varepsilon > 0$. Então, considerando $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{M}, r\}$, para $z \in A(z_0, 0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ temos

$$|(z - z_0)f(z) - 0| = |z - z_0||f(z)| \leq M|z - z_0| < M \cdot \delta \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Portanto, por definição de limite, concluímos que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = 0.$$

[(iv) $\implies$ (i)] Consideremos a função ϕ definida em $B(z_0, 0, R)$ por

$$\phi(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z), & z \in A(z_0, 0, R) \\ 0, & z = z_0 \end{cases}.$$

Em $A(z_0, 0, R)$, ϕ é o produto de duas funções analíticas (uma polinomial e a outra f), como tal ϕ é analítica em $A(z_0, 0, R)$. Vamos agora estudar a diferenciabilidade de ϕ em z_0. Para isso, vamos recorrer à definição de derivada em z_0. Como

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\phi(z) - \phi(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\phi(z) - 0}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)^2 f(z)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = 0,$$

concluímos que ϕ é diferenciável em z_0 e $\phi'(z_0) = 0$. Como tal, ϕ é analítica em $B(z_0, R)$. Portanto, pelo Teorema I.12.38, ϕ admite representação em série de Taylor em potências de $z - z_0$ em $B(z_0, R)$, que é dada por

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \phi(z_0) + \frac{\phi'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{\phi''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

para todo $z \in B(z_0, R)$. Como $\phi(z_0) = \phi'(z_0) = 0$, temos

$$\phi(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = (z - z_0)^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-2} = (z - z_0)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\phi^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!}(z - z_0)^n$$

para todo $z \in B(z_0, R)$. Atendendo a que $\phi(z) = (z - z_0)^2 f(z)$ para $z \in A(z_0, 0, R)$, temos

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\phi^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!}(z - z_0)^n = \frac{\phi''(z_0)}{2!} + \frac{\phi'''(z_0)}{3!}(z - z_0) + \frac{\phi^{(4)}(z_0)}{4!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

para todo $z \in A(z_0, 0, R)$. Assim, concluímos que z_0 é uma singularidade removível de f. ■

Observação I.13.7

No teorema anterior está patente uma grande diferença relativamente à Análise Real. Em $\mathbb{R}$, (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv), mas (iii) não implica (ii), nem (iv) implica (ii). Pense, por exemplo na função real definida por $g(x) = \sin(1/x)$, para $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, que é limitada no seu domínio. Em $\mathbb{C}$ isto não ocorre, pois a função $f(z) = \sin(1/z)$, para $\in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, não é **limitada num anel** $A(0,0,r)$, com $r > 0$!

Exemplo I.13.8

Uma vez que existem os limites das funções abaixo indicadas em $z_0 = 0$, concluímos, pelo Teorema anterior, que as funções têm uma singularidade removível em $z_0 = 0$.

(i) $f(z) = \dfrac{z^2}{z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$;

(ii) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$;

(iii) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

I.13.3 Caracterização de Pólos e Resíduos em Pólos

O próximo resultado apresenta-nos uma caracterização dos pólos e dá-nos uma fórmula que nos permite determinar o resíduo.

Teorema I.13.9: Pólos e resíduos

Suponhamos que $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tem uma singularidade isolada em z_0 sendo analítica em $A(z_0, 0, R) \subseteq D$, com $R > 0$ (ou $R = +\infty$). Então, z_0 é um pólo de ordem m de f se e só se

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}, \qquad z \in A(z_0, 0, R),$$

com ϕ uma função analítica em $B(z_0, R)$ tal que $\phi(z_0) \neq 0$.

Nesse caso,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \Big[(z - z_0)^m f(z) \Big].$$

Se $m = 1$, temos

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \phi(z_0) = \lim_{z \to z_0} \Big[(z - z_0) f(z) \Big].$$

Demonstração

(i) Suponhamos primeiro que

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}, \qquad z \in A(z_0, 0, R),$$

com ϕ uma função analítica em $B(z_0, R)$ tal que $\phi(z_0) \neq 0$. Como ϕ é analítica em $B(z_0, R)$, pelo Teorema I.12.38,

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \qquad z \in B(z_0, R).$$

Portanto, para $z \in A(z_0,0,R)$ $(z \neq z_0)$,

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n}{(z-z_0)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-m}$$

$$= \underbrace{\phi(z_0)}_{=:b_m} \frac{1}{(z-z_0)^m} + \frac{\phi'(z_0)}{1!} \cdot \frac{1}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \underbrace{\frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}}_{=:b1} \cdot \frac{1}{z-z_0} + \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-m},$$

que é o desenvolvimento único em série de Laurent de f em potências de $z - z_0$ em $A(z_0, 0, R)$. Como a parte principal da série de Laurent só tem um número finito de termos e $b_m = \phi(z_0) \neq 0$, concluímos que z_0 é um pólo de ordem m. Além do mais,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

(ii) Suponhamos agora que z_0 é um pólo de ordem m de f. Então, a parte principal do desenvolvimento em série de Laurent de f em potências de $z - z_0$ em $A(z_0, 0, R)$ tem no máximo m termos (alguns dos b_k, com $k = 1, \cdots, m-1$ também poderão ser nulos!) e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \ldots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m}, \qquad z \in A(z_0,0,R), \qquad (b_m \neq 0).$$

Como tal, para $z \in A(z_0, 0, R)$,

$$f(z)(z-z_0)^m = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{m+n} + b_1(z-z_0)^{m-1} + b_2(z-z_0)^{m-2} + \ldots + b_{m-1}(z-z_0) + b_m, \quad \text{(I.13.4)}$$

com $b_m \neq 0$. Definimos ϕ em $B(z_0, R)$ por

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{m+n} + b_1(z-z_0)^{m-1} + b_2(z-z_0)^{m-2} + \ldots + b_{m-1}(z-z_0) + b_m, \qquad z \in B(z_0,R),$$

ou seja,

$$\phi(z) = \begin{cases} f(z)(z-z_0)^m, & \textit{se } z \in A(z_0,0,R) \\ b_m, & \textit{se } z = z_0 \end{cases}.$$

Como ϕ é uma série de potências com raio de convergência R, concluímos pelo Teorema I.12.32 que ϕ é analítica em $B(z_0, R)$. Por outro lado, $\phi(z_0) = b_m \neq 0$ e, para $z \in A(z_0, 0, R)$,

$$f(z)(z-z_0)^m = \phi(z) \iff f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}.$$

Além disso, de (I.13.4) obtemos

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \Big[(z-z_0)^m f(z)\Big] = (m-1)!\ b_1,$$

donde se tira que

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big[(z-z_0)^m f(z)\Big].$$

Observação I.13.10

No teorema anterior não precisamos de supor à partida que f tem uma singularidade isolada em z_0, pois se $f(z) = \dfrac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}$, $\quad z \in A(z_0, 0, R)$, com ϕ uma função analítica em $B(z_0, R)$ tal que $\phi(z_0) \neq 0$, z_0 terá de ser uma singularidade isolada de f. Por outro lado, se z_0 for um pólo, é porque estamos a considerar uma singularidade isolada em z_0. Só colocámos essa condição para fixarmos o raio da coroa à partida e a demonstração ficar mais simples.

Vejamos alguns exemplos de aplicação do teorema anterior.

Exemplo I.13.11

Consideremos a função f definida por $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Como f é analítica em $A(0,0,+\infty) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ e não está definida em $z_0 = 0$, $z_0 = 0$ é uma singularidade isolada de f. Por outro lado,

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-0)^1}, \quad z \in A(0,0,+\infty) = \mathbb{C}\backslash\{0\},$$

com $\phi(z) = \cos z$, $z \in \mathbb{C} = B(0,+\infty)$, que é analítica em $\mathbb{C}$ e $\phi(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$. Portanto, pelo Teorema I.13.9, $z_0 = 0$ é um pólo de ordem 1 (pólo simples) de f. Além disso,

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{0!} \lim_{z\to 0} \Big[(z-0)\frac{\cos z}{z}\Big] = \lim_{z\to 0} \cos z = \cos 0 = 1.$$

Exemplo I.13.12

Consideremos a função f definida por $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Como f é analítica em $A(0,0,+\infty) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ e não está definida em $z_0 = 0$, $z_0 = 0$ é uma singularidade isolada de f. Por outro lado,

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-0)^2}, \quad z \in A(0,0,+\infty) = \mathbb{C}\backslash\{0\},$$

com $\phi(z) = \cos z$, $z \in \mathbb{C} = B(0,+\infty)$, que é analítica em $\mathbb{C}$ e $\phi(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$. Portanto, pelo Teorema I.13.9, $z_0 = 0$ é um pólo de ordem 2 de f. Além disso,

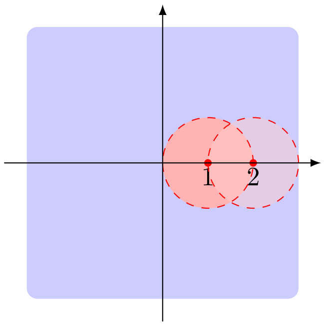
$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 0} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\Big[(z-0)^2\frac{\cos z}{z^2}\Big] = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\cos z = -\sin 0 = 0.$$

Exemplo I.13.13

Consideremos a função f definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-2)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{1,2\}.$$

Facilmente se verifica que f é analítica em $A(1,0,1) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$ e analítica em $A(2,0,1) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-2| < 1\}$. Como f não está definida em $z_0 = 1$ nem em $z_0 = 2$, concluímos que $z_0 = 1$ e $z_0 = 2$ são singularidades isoladas de f.



Para $z_0 = 1$, temos

$$f(z) = \frac{\frac{1}{z-2}}{(z-1)^2} = \frac{\phi(z)}{(z-1)^2}, \quad z \in A(1,0,1),$$

com $\phi(z) = \frac{1}{z-2}$, $z \in B(1,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$. Note que ϕ é analítica em $B(1,1)$ e $\phi(1) = -1 \neq 0$. Então, pelo Teorema I.13.9, concluímos que $z = 1$ é um pólo de ordem 2 de f. Além disso,

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 1} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z-1)^2 \frac{1}{(z-2)(z-1)^2}\right] \\ &= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z-2}\right] = \lim_{z\to 1} -\frac{1}{(z-2)^2} = -1.\end{aligned}$$

Para $z_0 = 2$, temos

$$f(z) = \frac{\frac{1}{(z-1)^2}}{(z-2)^1} = \frac{\phi(z)}{(z-2)^1}, \quad z \in A(2,0,1),$$

com $\phi(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$, $z \in B(2,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 1\}$. Note que ϕ é analítica em $B(2,1)$ e $\phi(2) = 1 \neq 0$. Então, pelo Teorema I.13.9, concluímos que $z = 2$ é um pólo de ordem 1 de f. Além disso,

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) &= \lim_{z\to 2}\left[(z-2)^1 \frac{1}{(z-2)(z-1)^2}\right] \\ &= \lim_{z\to 2} \frac{1}{(z-1)^2} = 1.\end{aligned}$$

Como se pode verificar pelos exemplos anteriores, a aplicação do teorema anterior pode envolver algum trabalho, principalmente se considerarmos funções racionais, em que o denominador não está fatorizado. Também pode não ser imediato (embora seja possível) identificar o tipo de pólo, a partir do teorema. Por exemplo, se f for a função definida por $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, no ponto $z_0 = 0$, ϕ não pode ser a função sin já que se anula em $z_0 = 0$. Na próxima subsecção iremos apresentar alguns resultados que nos irão facilitar o trabalho.

I.13.4 Zeros e Pólos - outras caracterizações de pólos

Nesta subsecção, dada uma função f que seja definida pelo quociente de duas funções analíticas, vamos relacionar pólos dessa função com os zeros do numerador e do denominador dessa função. Assim, vamos primeiro definir o que se entende por zeros de uma função analítica.

Definição I.13.14

Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e seja $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica em $B(z_0, R) \subseteq D$, com $R > 0$ (ou $R = +\infty$). Dizemos que $z_0 \in D$ é um zero de ordem m se

$$f^{(k)}(z_0) = 0, \quad k = 0, \cdots, m-1, \qquad e \qquad f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

ou seja, se $f(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

Observação I.13.15

(i) A definição anterior diz-nos que uma função tem um zero de ordem m em z_0 se as suas primeiras $m-1$ derivadas nesse ponto forem nulas e a m-ésima derivada não o for. Note que, pelo facto de f ser analítica em $B(z_0, R)$, a existência das derivadas está garantida pelo Teorema I.12.38.

(ii) Por exemplo, a função $f(z) = \sin z$, $z \in \mathbb{C}$, tem um zero de ordem 1 em $z_0 = 0$.

(iii) Para funções polinomiais, os zeros são as raízes do polinómio e a ordem de um zero coincide com a multiplicidade desse raíz.

O próximo resultado apresenta-nos uma caracterização dos zeros de uma determinada ordem. Compare-o com o Teorema I.13.9.

Teorema I.13.16

Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e seja $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica em $B(z_0, R) \subseteq D$, com $R > 0$ (ou $R = +\infty$). Então, z_0 é um zero de ordem m de f se e só se

$$f(z) = (z - z_0)^m \psi(z), \quad z \in B(z_0, R),$$

com ψ analítica em $B(z_0, R)$ e $\psi(z_0) \neq 0$.

Demonstração

(i) Suponhamos que

$$f(z) = (z - z_0)^m \psi(z), \quad z \in B(z_0, R),$$

com ψ analítica em $B(z_0, R)$ e $\psi(z_0) \neq 0$.

Como ψ é analítica em $B(z_0, R)$, pelo Teorema I.12.38,

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\psi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad z \in B(z_0, R).$$

Assim, a partir da igualdade $f(z) = (z - z_0)^m \psi(z), \quad z \in B(z_0, R)$, temos

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\psi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\psi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{m+n}, \quad z \in B(z_0, R).$$

Ou seja, para $z \in B(z_0, R)$,

$$f(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{\psi^{(n-m)}(z_0)}{(n-m)!}(z-z_0)^n = \psi(z_0)(z-z_0)^m + \frac{\psi'(z_0)}{1!}(z-z_0)^{m+1} + \frac{\psi''(z_0)}{2!}(z-z_0)^{m+2} + \cdots .$$

Pela unicidade de representação em série de potências não negativas, de acordo com o Corolário I.12.33, o desenvolvimento anterior tem de ser a série de Taylor em potências de $z - z_0$ de f. Como não aparecem as potências $(z-z_0)^n$, $n = 0, \cdots, m-1$, no desenvolvimento anterior, é porque os coeficientes dessas potências são nulos. Por outro lado, o coeficiente de $(z-z_0)^n$ é igual a $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n = 0, \cdots, m-1$. Como tal, $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = 0$, $n = 0, \cdots, m-1$. Consequentemente, $f^{(n)}(z_0) = 0$, $n = 0, \cdots, m-1$. Como, por hipótese, $\psi(z_0) \neq 0$ e $\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} = \psi(z_0)$, a m-ésima derivada de f em z_0 é diferente de zero. Assim, concluímos que z_0 é um zero de ordem m da função f.

(ii) Suponhamos que z_0 é um zero de ordem m de f. Como, por hipótese, f é analítica em $B(z_0, R)$, pelo Teorema I.12.38 f admite o desenvolvimento em série de Taylor de potências de $z - z_0$ em $B(z_0, R)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad z \in B(z_0, R).$$

Como z_0 é, por hipótese, um zero de ordem m de f, então as primeiras $m-1$ derivadas de f em z_0 são nulas. Como tal, para $z \in B(z_0, R)$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \underbrace{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n}_{=0} + \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n+m)}(z_0)}{(n+m)!}(z-z_0)^{n+m} \\ &= (z-z_0)^m \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n+m)}(z_0)}{(n+m)!}(z-z_0)^n}_{\psi(z)} \\ &= (z-z_0)^m \psi(z), \end{aligned}$$

com

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n+m)}(z_0)}{(n+m)!}(z-z_0)^n = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n+m)}(z_0)}{(n+m)!}(z-z_0)^n, \quad z \in B(z_0, R).$$

Como ψ é a soma de uma série de potências não negativas, concluímos pelo Teorema I.12.32 que ψ é analítica em $B(z_0, R)$. Por outro lado, como z_0 é zero de ordem m, $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Assim, $\psi(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$. ■

Corolário I.13.17

Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e seja $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica em $B(z_0, R) \subseteq D$, com $R > 0$ (ou $R = +\infty$), não identicamente nula em $B(z_0, R)$. Se z_0 for um zero de f então z_0 é um zero isolado, ou seja, existe um anel $A(z_0; 0, r) \subset B(z_0, R)$ tal que

$$f(z) \neq 0, \qquad z \in A(z_0, 0, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}.$$

Demonstração

Como f é analítica em $B(z_0, R)$, pelo Teorema I.12.38,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad z \in B(z_0, R).$$

Como f não é identicamente nula e z_0 é um zero de f, terá que existir um $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, caso contrário a série de Taylor seria nula (com soma zero). Seja m o menor n tal que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Assim, z_0 é um zero de ordem m e pelo Teorema I.13.16

$$f(z) = (z - z_0)^m \psi(z), \quad z \in B(z_0, R),$$

com ψ analítica em $B(z_0, R)$ e $\psi(z_0) \neq 0$. Como ψ é em particular contínua e $\psi(z_0) \neq 0$, pelo Teorema I.8.11, existe $r > 0$, com $r < R$, tal que

$$\psi(z) \neq 0, \quad z \in B(z_0, r).$$

Daqui resulta que

$$f(z) \neq 0, \quad z \in A(z_0, 0, r).$$

Note que z_0 é um zero de f. Portanto, z_0 é um zero isolado de f. ■

Teorema I.13.18

Sejam p e q duas funções analíticas em $B(z_0, R)$ tais que $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ e $q(z) \neq 0$, $z \in A(z_0, 0, R)$. Seja f a função definida em $A(z_0, 0, R)$ por

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad z \in A(z_0, 0, R).$$

Então, z_0 é um pólo de ordem m de f se e só se z_0 for um zero de ordem m de q.

Demonstração

Como f está definida como o quociente de duas funções diferenciáveis no conjunto aberto $A(z_0, 0, R)$ e está bem definida em $A(z_0, 0, R)$, f é analítica em $A(z_0, 0, R)$. Como tal, z_0 é uma singularidade isolada de f.

(i) Suponhamos que z_0 é um pólo de ordem m de f. Então, pelo Teorema I.13.9,

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}, \quad z \in A(z_0, 0, R),$$

com ϕ analítica em $B(z_0, R)$ e $\phi(z_0) \neq 0$. Como ϕ é analítica, em particular é contínua em $B(z_0, R)$. Como $\phi(z_0) \neq 0$, pelo Teorema I.8.11 garantimos a existência de $0 < r < R$ tal que $\phi(z) \neq 0$ para todo $z \in B(z_0, r)$. Como $A(z_0, 0, r) \subset A(z_0, 0, R)$ e $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, $z \in A(z_0, 0, R)$, resulta

$$q(z) = \underbrace{\frac{p(z)}{\phi(z)}}_{=:\psi(z)}(z - z_0)^m = \psi(z)(z - z_0)^m, \quad z \in B(z_0, r),$$

uma vez que a igualdade é trivial em $z = z_0$. Considerando ψ definido por $\psi(z) = \frac{p(z)}{\phi(z)}$, $z \in B(z_0, r)$, ψ é o quociente de funções analíticas em $B(z_0, r)$, logo ψ é analítica em $B(z_0, r)$. Por outro lado, $p(z_0) \neq 0$

e $\phi(z_0) \neq 0$. Logo, $\psi(z_0) = \frac{p(z_0)}{\phi(z_0)} \neq 0$. Como tal, pelo Teorema I.13.16, concluímos que z_0 é um zero de ordem m de q.

(ii) Suponhamos agora que z_0 é um zero de ordem m de q. Pelo Teorema I.13.16,

$$q(z) = \psi(z)(z - z_0)^m, \quad z \in B(z_0, R),$$

com ψ analítica em $B(z_0, R)$ e $\psi(z_0) \neq 0$. Atendendo a que $q(z) \neq 0$, $z \in A(z_0, 0, R)$, concluímos que $\psi(z) \neq 0$, $z \in B(z_0, R)$. Portanto, para $z \in A(z_0, 0, R)$,

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)}{\psi(z)(z - z_0)^m} = \frac{\overbrace{\frac{p(z)}{\psi(z)}}^{\phi(z):=}}{(z - z_0)^m} = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m},$$

com ϕ definida por $\phi(z) = \dfrac{p(z)}{\psi(z)}$, $z \in B(z_0, R)$. Como ϕ é o quociente de funções analíticas em $B(z_0, R)$, ϕ é analítica em $B(z_0, R)$. Além do mais, $\phi(z_0) = \dfrac{p(z_0)}{\psi(z_0)} \neq 0$. Portanto, pelo Teorema I.13.9, concluímos que z_0 é um pólo de ordem m de f .

Exemplo I.13.19

Consideremos a função f definida por

$$f(z) = \frac{z^4}{(z-1)^2(z-2)(z^2+1)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{1, 2, -i, i\}.$$

Facilmente se verifica que f é analítica em $\mathbb{C}\backslash\{1, 2, -i, i\}$. Como tal, concluímos que 1, 2, $-i$ e i são singularidades isoladas de f. Por outro lado, f é o quociente de duas funções analíticas em $\mathbb{C}$. São elas, $p(z) = z^4$, $z \in \mathbb{C}$, e $q(z) = (z-1)^2(z-2)(z^2+1)$, $z \in \mathbb{C}$. Facilmente se vê que p não se anula em 1, 2, $-i$ e i. Por outro lado, 1 é zero de q de ordem 2 e 2, $-i$ e i são zeros simples (de ordem 1) de q. Então, pelo teorema anterior, concluímos que 1 é pólo de ordem 2 de f e que 2, $-i$ e i são pólos simples de f.

Corolário I.13.20

Suponhamos que $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tem uma singularidade isolada em z_0 sendo analítica em $A(z_0, 0, R) \subseteq D$, com $R > 0$ (ou $R = +\infty$). Então

(i) *z_0 é um pólo de ordem m de f se e só se*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \quad \wedge \quad \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = L \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

(ii) *z_0 é um pólo de f se e só se*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

Demonstração

Vamos apenas provar (i), pois a demonstração de (ii) está contida nesta demonstração.

Suponhamos em primeiro lugar que z_0 é um pólo de ordem m de f. Então, pelo Teorema I.13.9

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}, \qquad z \in A(z_0, 0, R),$$

com ϕ uma função analítica em $B(z_0, R)$ tal que $\phi(z_0) \neq 0$. Consequentemente,

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m} = \infty \quad \wedge \quad \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) = \lim_{z\to z_0} \phi(z) = \phi(z_0) \in \mathbb{C}\backslash\{0\},$$

onde o primeiro limite resulta do Teorema I.10.2 pelo facto de $\lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)^m}{\phi(z)} = \frac{0}{\phi(z_0)} = 0$.

Suponhamos agora que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \quad \wedge \quad \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) = L \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Resulta da definição de limite infinito (considerando por exemplo $\frac{1}{\varepsilon} = 1$) que existe uma coroa $A(z_0, 0, r)$, com $r < R$, tal que $f(z) \neq 0$ para $z \in A(z_0, 0, r)$. Portanto, Resulta do Teorema I.10.2 que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Como tal, pelo Teorema I.13.6, z_0 é uma singularidade removível de $\frac{1}{f}$. Assim, existe uma função ϕ analítica em $B(z_0, r)$ tal que

$$\frac{1}{f(z)} = \phi(z), \quad z \in A(z_0, 0, r).$$

Além disso, como

$$0 = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z\to z_0} \phi(z) = \phi(z_0),$$

z_0 é um zero de ϕ. Como ϕ não é identicamente nula, z_0 é um zero isolado pelo Corolário I.13.17, ou seja, existe $0 < r_1 < r$ tal que $\phi(z) \neq 0$, $z \in A(z_0, 0, r_1)$, e seja k a ordem desse zero (esta ordem terá de existir, ver a demonstração do Corolário I.13.17). Como

$$f(z) = \frac{1}{\phi(z)}, \quad z \in A(z_0, 0, r_1),$$

concluímos, pelo Teorema I.13.18 (com $p(z) = 1$, $z \in B(z_0, r_1)$, e $q(z) = \phi(z)$, $z \in B(z_0, r_1)$), que z_0 é um pólo de ordem k de f.

Falta mostrar que $k = m$. Pelo Teorema I.13.16,

$$\phi(z) = (z-z_0)^k \psi(z), \quad z \in B(z_0, r_1),$$

com ψ analítica em $B(z_0, r_1)$ e $\psi(z_0) \neq 0$ (neste caso, atendendo à igualdade anterior e ao atrás exposto, também temos $\psi(z) \neq 0$, $z \in A(z_0, 0, r_1)$). Como existe $L \in \mathbb{C}$, com $L \neq 0$, tal que

$$L = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m \frac{1}{\phi(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)^m}{(z-z_0)^k \psi(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)^{m-k}}{\psi(z)},$$

teremos de ter $k = m$; caso contrário, o limite seria 0, se $m > k$, ou ∞, se $m < k$. ∎

O próximo resultado permite considerar zeros no numerador da nossa expressão. Temos, então, o seguinte resultado.

Teorema I.13.21

Sejam p e q duas funções analíticas em $B(z_0,R)$ tais que z_0 é um zero de ordem m de p, $q(z_0)=0$ e $q(z)\neq 0$, $z\in A(z_0,0,R)$. Seja f a função definida em $A(z_0,0,R)$ por

$$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)},\qquad z\in A(z_0,0,R).$$

Então, z_0 é um pólo de ordem n de f se e só se z_0 for um zero de ordem $m+n$ de q.

Demonstração

Como f está definida como o quociente de duas funções diferenciáveis no conjunto aberto $A(z_0,0,R)$ e está bem definida em $A(z_0,0,R)$, f é analítica em $A(z_0,0,R)$. Como tal, z_0 é uma singularidade isolada de f.

Por outro lado, como z_0 é um zero de ordem m de p, pelo Teorema I.13.16, temos

$$p(z)=\psi_p(z)(z-z_0)^m,\qquad z\in B(z_0,R),$$

com ψ_p analítica em $B(z_0,R)$ e $\psi_p(z_0)\neq 0$.

(i) Suponhamos que z_0 é um pólo de ordem n de f. Então, pelo Teorema I.13.9,

$$f(z)=\frac{\phi(z)}{(z-z_0)^n},\qquad z\in A(z_0,0,R),$$

com ϕ analítica em $B(z_0,R)$ e $\phi(z_0)\neq 0$. Como ϕ é analítica, em particular é contínua em $B(z_0,R)$. Como $\phi(z_0)\neq 0$, pelo Teorema I.8.11 garantimos a existência de $0<r<R$ tal que $\phi(z)\neq 0$ para todo $z\in B(z_0,r)$. Como $A(z_0,0,r)\subset A(z_0,0,R)$ e $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$, $z\in A(z_0,0,R)$, resulta

$$q(z)=\frac{p(z)}{\phi(z)}(z-z_0)^n=\frac{\psi_p(z)(z-z_0)^m}{\phi(z)}(z-z_0)^n=\underbrace{\frac{\psi_p(z)}{\phi(z)}}_{=:\psi(z)}(z-z_0)^{m+n}=\psi(z)(z-z_0)^{m+n},\qquad z\in B(z_0,r),$$

uma vez que a igualdade é trivial em $z=z_0$. Considerando ψ definido por $\psi(z)=\frac{\psi_p(z)}{\phi(z)}$, $z\in B(z_0,r)$, ψ é o quociente de funções analíticas em $B(z_0,r)$, logo ψ é analítica em $B(z_0,r)$. Por outro lado, $\psi_p(z_0)\neq 0$ e $\phi(z_0)\neq 0$. Logo, $\psi(z_0)=\frac{\psi_p(z_0)}{\phi(z_0)}\neq 0$. Como tal, pelo Teorema I.13.16, concluímos que z_0 é um zero de ordem $m+n$ de q.

(ii) Suponhamos agora que z_0 é um zero de ordem $m+n$ de q. Pelo Teorema I.13.16,

$$q(z)=\psi(z)(z-z_0)^{m+n},\qquad z\in B(z_0,R),$$

com ψ analítica em $B(z_0,R)$ e $\psi(z_0)\neq 0$. Atendendo a que $q(z)\neq 0$, $z\in A(z_0,0,R)$, concluímos que $\psi(z)\neq 0$, $z\in B(z_0,R)$. Portanto, para $z\in A(z_0,0,R)$,

$$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{\psi_p(z)(z-z_0)^m}{\psi(z)(z-z_0)^{m+n}}=\frac{\overbrace{\frac{\psi_p(z)}{\psi(z)}}^{\phi(z):=}}{(z-z_0)^n}=\frac{\phi(z)}{(z-z_0)^n},$$

com ϕ definida por $\phi(z)=\dfrac{\psi_p(z)}{\psi(z)}$, $z\in B(z_0,R)$. Como é o quociente de funções analíticas em $B(z_0,R)$, ϕ é analítica em $B(z_0,R)$. Além do mais, $\phi(z_0)=\dfrac{\psi_p(z_0)}{\psi(z_0)}\neq 0$. Portanto, pelo Teorema I.13.9, concluímos que z_0 é um pólo de ordem n de f. ∎

Exemplo I.13.22

Consideremos a função f definida por

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Facilmente se verifica que f é analítica $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Como tal, concluímos que $z_0 = 0$ é singularidade isolada de f. Por outro lado, f é o quociente de duas funções analíticas em $\mathbb{C}$. São elas, $p(z) = \sin z$, $z \in \mathbb{C}$, e $q(z) = z^3$, $z \in \mathbb{C}$. Facilmente se vê que $z_0 = 0$ é zero de ordem 1 (zero simples) de p, pois $p(0) = \sin 0 = 0$ e $p'(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$. Por outro lado, $z_0 = 0$ é zero de ordem 3 de q , pois $q(0) = q'(0) = q''(0) = 0$ e $q'''(0) = 6 \neq 0$. Então, pelo Teorema anterior concluímos que $z_0 = 0$ é pólo de ordem 2 de f, pois $3 = 2+1$.

Talvez mais fácil de aplicar na prática seja o seguinte resultado.

Teorema I.13.23

Sejam p e q duas funções analíticas em $B(z_0, R)$ tais que z_0 é um zero de ordem m de p, z_0 é um zero de ordem k de q e $q(z) \neq 0$, $z \in A(z_0, 0, R)$. Seja f a função definida em $A(z_0, 0, R)$ por

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad z \in A(z_0, 0, R).$$

Então,

(i) *Se $k > m$, z_0 é um pólo de ordem $n = k - m$ de f*

(ii) *Se $k \leq m$, então z_0 é uma singularidade removível de f.*

Demonstração

(i) Se $k > m$, seja $n = k - m$. Então, z_0 é um zero de ordem $k = m + n$ de q. Como z_0 é um zero de ordem m de p, concluímos pelo Teorema I.13.21 que z_0 é um pólo de ordem $n = k - m$ de f.

(ii) Pelo Teorema I.13.16,

$$p(z) = \psi_p(z)(z - z_0)^m, \quad z \in B(z_0, R),$$

com ψ_p analítica em $B(z_0, R)$ e $\psi_p(z_0) \neq 0$ e

$$q(z) = \psi_q(z)(z - z_0)^k, \quad z \in B(z_0, R),$$

com ψ_q analítica em $B(z_0, R)$ e $\psi_q(z_0) \neq 0$. Atendendo a que $q(z) \neq 0$, $z \in A(z_0, 0, R)$, concluímos que $\psi_q(z) \neq 0$, $z \in B(z_0, R)$. Portanto, para $z \in A(z_0, 0, R)$,

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\psi_p(z)(z - z_0)^m}{\psi_q(z)(z - z_0)^k} = \underbrace{\frac{\psi_p(z)}{\psi_q(z)}(z - z_0)^{m-k}}_{=:g(z)}$$

A expressão do lado direito das igualdades anteriores, ou seja, $g(z) = \frac{\psi_p(z)}{\psi_q(z)}(z - z_0)^{m-k}$, está definida em $B(z_0, R)$ e é aí analítica, pois $\frac{\psi_p(z)}{\psi_q(z)}$ é analítica em $B(z_0, R)$, por ser o quociente de duas funções analíticas em $B(z_0, R)$, e $(z - z_0)^{m-k}$ é analítica em $B(z_0, R)$ por se tratar de uma potência não-negativa de $z - z_0$. Como g é analítica em $B(z_0, R)$ e coincide com f na coroa $A(z_0, 0, R)$, z_0 é uma singularidade removível de f. ■

Observação I.13.24

Nos teoremas anteriores, poderíamos supor que q não era identicamente nula. Assim, os zeros de q seriam isolados (pelo Corolário I.13.17), ou seja existiria sempre um anel $A(z_0, 0, r)$, com $r > 0$, tal que $q(z) \neq 0$, $z \in A(z_0, 0, r)$.

Exemplo I.13.25

Consideremos a função f definida por

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Facilmente se verifica que f é analítica $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Como tal, concluímos que $z_0 = 0$ é singularidade isolada de f. Por outro lado, f é o quociente de duas funções analíticas em $\mathbb{C}$. São elas, $p(z) = \sin z$, $z \in \mathbb{C}$, e $q(z) = z$, $z \in \mathbb{C}$. Facilmente se vê que $z_0 = 0$ é zero de ordem 1 (zero simples) de p, pois $p(0) = \sin 0 = 0$ e $p'(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$. Por outro lado, $z_0 = 0$ é zero de ordem 1 (zero simples) de q , pois $q(0) = 0$ e $q'(0) = 1 \neq 0$. Então, pelo Teorema anterior concluímos que $z_0 = 0$ é uma singularidade removível.

Exercício I.13.26: T.P.C.

Cada uma das funções definidas pelas expressões abaixo indicadas tem uma singularidade isolada em $z = 0$. Determine, para cada caso, se se trata de uma singularidade removível, essencial ou de um pólo. Se for um pólo, indique a sua ordem.

(i) $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$;

(ii) $f(z) = \dfrac{z}{z^2}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$;

(iii) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z(1-z)}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$;

(iv) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$;

(v) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^7}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$;

(vi) $f(z) = \dfrac{z^2}{e^z - 1}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$.

I.13.5 Caracterização de singularidades essenciais

Com base no Teorema I.13.6 e Corolário I.13.20, podemos agora apresentar a seguinte caracterização para uma singularidade essencial.

Teorema I.13.27

Suponhamos que $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tem uma singularidade isolada em z_0 sendo analítica em $A(z_0, 0, R) \subseteq D$, com $R > 0$ (ou $R = +\infty$). Então, z_0 é uma singularidade essencial se e só se não existir $L \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tal que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L.$$

Exercício I.13.28: T.P.C.

Cada uma das funções definidas pelas expressões abaixo indicadas tem uma singularidade isolada em $z = 0$. Determine, para cada caso, se se trata de uma singularidade removível, essencial ou de um pólo. Se for um pólo, indique a sua ordem.

(i) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$;

(ii) $f(z) = z^7 \sin \dfrac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.