Exame Época Normal 2021

① $T_0 = 0{,}1\,s$

a) $w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ 20π para $k = 1, 3$ e 5 kw_0 — $1w_0 = 20\pi$ rad/s

$3w_0 = 60\pi$ rad/s

• 20π, 60π e 100π rad s^{-1} $5w_0 = 100\pi$ rad/s

b) $C_1 = 3$ $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ rad
$C_3 = 2$ $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$ rad
$C_5 = 4$ $\theta_5 = -\frac{\pi}{2}$ rad
} são todos de fase $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$

Cada termo é isto

$C_n\cos(w_0t + \theta_n) \longrightarrow$

$3\cos(w_0t + \frac{\pi}{2}) = 3\sin(w_0t)$

$2\cos(w_0t + \frac{\pi}{2}) = 2\sin(w_0t)$

$4\cos(w_0t - \frac{\pi}{2}) = -4\sin(w_0t)$

Todos os termos são senos

Seno é ímpar, visto que todos os termos do sinal são ímpares, então o sinal é ímpar.

c e d sasm, a) e 2 não.

c) $w_{max} = 100\pi$ rad/s $T_0 = 0.1\,s$ teorema de Nyquist.

$w_s = 2\pi f_s$ $w_s > 2w_{max}$

O valor mínimo para garantir a reconstrução é 101 Hz

$w_s > 200\pi$

$2\pi f_s > 200\pi$

$f_s > 100$

d) $f_s = 200$ Hz $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = w_0 T_s = 20\pi \times 0{,}005 = 0{,}1\pi = \frac{\pi}{10}$

$T_0 = 0{,}1\,s$ $f_s = \frac{1}{T_s} \Leftrightarrow T_s = \frac{1}{f_s} \Leftrightarrow T_s = \frac{1}{200} = 0{,}005\,s$

$w_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0{,}1} = 20\pi$

$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$ $u[n] = \begin{cases} 1, & n\geq 0 \\ 0, & n<0 \end{cases}$

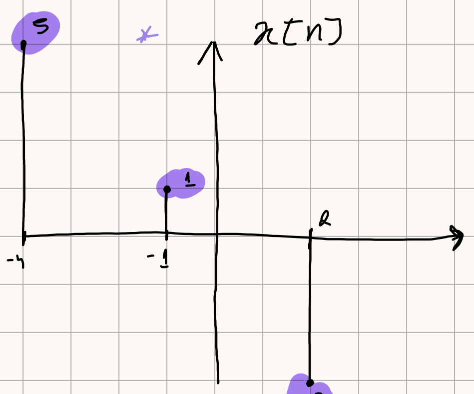
② $x[n] = 5\delta[n+4] + \delta[n+1] - 3\delta[n-2]$ $y[n] = (4n-3)(u[n] - u[n-3])$

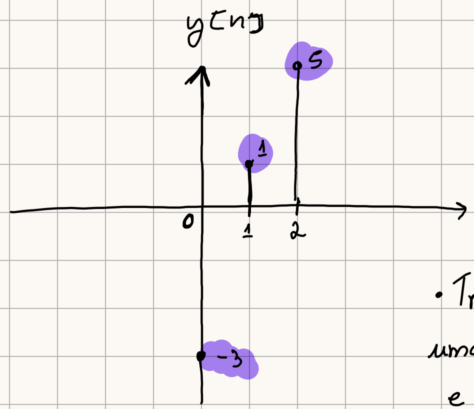
3 impulsos: $-4, -1, 2$

$y[m] = x[am-b]$ y[n] definido em n=0 até n=2

$\begin{cases} y[0] = x[am-b]\big|_{m=0} = x[2] \\ y[1] = x[am-b]\big|_{m=1} = x[-1] \end{cases}$ $\begin{cases} -b = 2 \\ a-b = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} b = -2 \\ a = -3 \end{cases}$

valores não nulos





x[n]	y[n]
2 →	0
-1 →	1
-4 →	2

• Transformação é caracterizada por uma inversão e compressão $(a=-3)$ e por um avanço $(b=-2)$

b) $E_x = \sum |x[n]|^2 = 5^2 + 1^2 + |-3|^2 = 25+1+9 = 35\,J$

$E_x = 35\,J.$

c) A energia e $x[n]$ e $y[n]$ é igual e finita, logo a potência média de ambos é nula.

(3)

a) A estacionaridade de uma série temporal significa que as suas propriedades estáticas não mudam com o tempo. Logo, para verificar se uma série temporal é estacionária, calculam-se a média e a variância da série em janelas temporais deslizantes e verifica-se se não variam no tempo.

b) Considerando que a série temporal é não estacionária, obtém-se a estacionaridade por diferenciação da série, as vezes que forem necessárias ou através da remoção da tendência. De seguida, procede-se à identificação da ordem N da componente AR e M da componente MA do modelo da série. Para isso, usam-se as funções da autocorrelação total e parcial para identificar as ordens M e N, respetivamente. Depois, identificam-se os parametros do Modelo ARMA com dados de treino. A validação do modelo é feita com outros dados, considerando, por exemplo, como métrica a soma do quadrado do erro entre os valores medidos e os estimados com o modelo da série.

4 e 5 não saem na 2ª frequência

(6)

$$X_{FT}(\omega) = \begin{cases} 0 & , \omega \leq -40\pi \vee \omega \geq 40\pi \\ \dfrac{(40\pi-\omega)(40\pi+\omega)}{200\pi^2} & , -40\pi < \omega < 40\pi \end{cases}$$

a) $X_{DFT}[0] = 400$

$X_{DFT}[n] = f_s\, x_{FT}[n] \Leftrightarrow 400 = f_s \dfrac{40\pi \times 40\pi}{200\pi^2} \Leftrightarrow 400 = f_s 8 \Leftrightarrow f_s = 50\,Hz$

b) $x_p(t)$ de periodo $T_0 = 8s$

$C_0 = \dfrac{X_{FT}(0)}{T_0} \Leftrightarrow C_0 = \dfrac{8}{8} = 1$

c) $\Omega c = \dfrac{\omega c}{f_s} \Leftrightarrow \Omega c = \dfrac{2\pi f_c}{f_s} \Leftrightarrow \Omega c = \dfrac{2\pi \times 5}{50} \Leftrightarrow \Omega c = \dfrac{\pi}{5}$ rad

$f_c = 5\,Hz$ porque queremos superiores a 5Hz

Utilizamos um filtro passa-baixo porque queremos eliminar tudo $> 5\,Hz$ e reter os $<= 5\,Hz$

⑦ $f_a = 4\,kHz$ Ré (294 Hz) Lá (440 Hz)

a) $K = \dfrac{x}{\Delta f} = \dfrac{440}{10} = 44$

$\Delta f = \dfrac{1}{\Delta t} = \dfrac{1}{0{,}1} = 10\,Hz$

b) $|erro| = |valor\ estabelecido - (K \Delta f)| = |294 - (29 \times 10)| = 4\,Hz$

$K_{Ré} = \dfrac{294}{10} \approx 29$

c) $x[n] = \sum_{n=0}^{+\infty} C_m \cos(m \Omega_0 n + \theta_m)$ N = duração janela × f_a $\Leftrightarrow N = 0{,}1 \times 4000 = 400$

coeficientes:

$X_{DFT}[5] = 40j \rightarrow C_5 = 2\left|\dfrac{X_{DFT}[5]}{N}\right| = 2\left|\dfrac{40j}{400}\right| = 2 \times 0{,}1 = 0{,}2$, $\theta_5 = \dfrac{\pi}{2}$

$X_{DFT}[2] = 80$

$X_{DFT}[-2] = 80 \rightarrow C_2 = 2\left|\dfrac{X_{DFT}[2]}{N}\right| = 2\left|\dfrac{80}{400}\right| = 2 \times 0{,}2 = 0{,}4$ $\theta_2 = 0$

$X_{DFT}[-5] = -40j$

$x_4[n] = \left(0{,}2 \cos\left(5 \frac{\pi}{200} n + \frac{\pi}{2}\right) + 0{,}4 \cos\left(2 \frac{\pi}{200} n\right)\right)(u[n-1200] - u[n-1600])$

$= \left(0{,}2 \sin\left(\frac{\pi}{40} n\right) + 0{,}4 \left(\frac{\pi}{100} n\right)\right)(u[n-1200] - u[n-1600])$

tamanho janela: $3N \leq n < 4N \rightarrow 1200 \leq n < 1600$

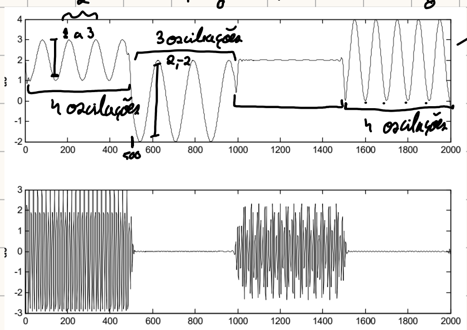
freq angular: $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N} = \dfrac{2\pi}{400} = \dfrac{\pi}{200}$ rad/s

⑧ $f_a = 1\,kHz$, decomposição de nível 3 → cada 1 destes corresponde a $\frac{1}{4}$ desse intervalo de tempo → o intervalo é de 0 a metade da f_a → [0 , 500]

decomposição

n	0 – 499	500 -999	1000 – 1499	1500 -1999
A partir de **d3**:	$f \in$ [62,5 , 125 [Hz, C = 3		$f \in$ [62,5 , 125 [Hz, C = 2	
A partir de **a3**:	f = 0 Hz, C = 2 f = 32 Hz, C = 1	f = 24 Hz, C = 2	f = 8 Hz, C= 2	f = 0 Hz, C = 0 f = 32 Hz, C = 2

$4 \times \frac{1}{8} = 4 \times 8 = 32$ $3 \times \frac{1}{8} = 3 \times 8 = 24$ $1 \times \frac{1}{8} = 8$ $4 \times \frac{1}{8} = 32$



N amostras = 2000

Período

duração $\frac{1000}{2000} = 0{,}5$ s

$\frac{1}{4} \times 0{,}5 = \frac{1}{8}$ s

nível

0 - 500

a_1 d_1

① 0 - 250 250 - 500

a_2 d_2

② 0 - 125 125 - 250

a_3 d_3

③ 0 - 62,5 62,5 - 125

b) coeficiente a usar para reconstrução

④ 0 - 31,25
⑤ 0 - 15,625
⑥ 0 - 7,8125
⑦ 0 - 3,90625

a7

↳ é o mais próximo das nulas.