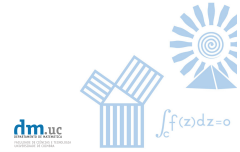




Análise Matemática III (1.º Semestre)

Departamento de Matemática

Licenciatura em Engenharia Informática



Ano Letivo 2023/2024

Frequência — 12.01.2024

Duração: 1h 30mn

1. (a) Desenvolva em série de Laurent de potências de $z + 3$ a função f definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z + 3)^{2024}(z - 4i)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-3, 4i\},$$

na região $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z + 3| < R\}$, indicando o maior valor possível para R .

- (b) Seja γ a circunferência centrada em $z_0 = -2$ e de raio 2, com a orientação positiva, e considerada como um caminho simples e fechado. Determine, justificando,

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{(z + 3)^{2024}(z - 4i)} dz.$$

2. (a) Usando a fórmula de inversão, determine a transformada- z inversa da função definida pela expressão analítica

$$X(z) = \frac{z}{(z^2 + 4)(z - 2)^2}, \quad |z| > 2,$$

apresentando o resultado na forma algébrica (isto é, na forma $a + ib$).

- (b) Usando a alínea anterior, determine, justificando os passos intermédios, a solução de

$$x_{k+2} - 4x_{k+1} + 4x_k = 2^k \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \quad (k \geq 0), \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0.$$

3. (a) Determine

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + 1)^2(s - 1)} \right\},$$

usando o Teorema da Convolução, onde \mathcal{L}^{-1} representa o operador Transformada inversa de Laplace.

- (b) Sabendo que $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, determine, recorrendo à transformada de Laplace, a solução da equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dt^2}(t) - y(t) = e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

(v.s.f.f.)

4. Seja $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um sinal periódico com frequência circular $\omega = 2 \text{ rad/s}$, definido em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ por

$$v(t) = t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

- (a) Determine a série de Fourier de v na forma complexa.
 - (b) Represente graficamente a função definida pela série de Fourier anterior no intervalo $[-\pi, 2\pi]$.
 - (c) Determine a expressão analítica da função soma da série de Fourier em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
5. Determine a transformada de Fourier da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) := e^{-|t|}H(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, onde H é a função de Heaviside.