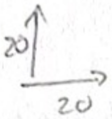
Ficha Teórico-Prática 1

1. 

200 píxeis pretos

$X =$ "Cor do pixel"

$A_X = \{$preto, branco$\}$

a) $\underline{H = \log_2 2 = 1}$ ← Entropia máxima (são acontecimentos equiprováveis logo $H = \log_2 |A_X|$)

$P(P) = \frac{200}{400} = 0.5$, $P(B) = \frac{200}{400} = 0.5$

$i(P) = -\log_2 (0.5) = 1$, $i(B) = -\log_2 (0.5) = 1$

$(H = 0.5 \times 1 + 0.5 \times 1 = \underline{\underline{1}}$ bits/símbolo$)$

$i(a) = -\log_2 P(a)$

b) $P(P) = \frac{240}{400} = 0.6$

$P(B) = 0.4$

$H(a) = \sum_{i=1}^{m} P(a_i)\, i(a_i)$

$i(P) = -\log_2 (0.6) \approx 0.737$

$i(B) = -\log_2 (0.4) \simeq 1.322$

Qt menor a probabilidade, maior a informação

$H = 0.6 \times i(P) + 0.4 \times i(B) = 0.971$ bits/símbolo

c) $X_2 =$ "Cores de pares de píxeis"

$A_{X_2} = \{(P,P), (P,B), (B,P), (B,B)\}$

$P(X_2 = (P,P)) = 0.6$ $\quad P(X_2 = (B,P)) = 0.1$

$P(X_2 = (P,B)) = 0.1$ $\quad P(X_2 = (B,B)) = 0.2$

$H_{X_2} = 0.6 \times (-\log_2(0.6)) + 0.1 \times (-\log_2(0.1)) + 0.1 \times (-\log_2(0.1)) + 0.2 \times (-\log_2(0.2))$

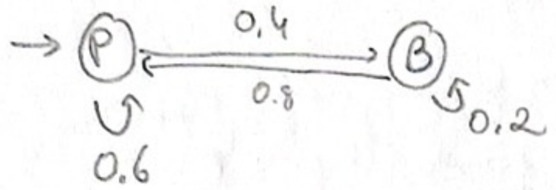
$= 1.571$ bits/símbolo

$H(X) = 1.571/2 = 0.785$ bits/pixel

(Agrupamento de símbolos faz baixar a entropia)

d) $P(P) = 2/3$

$P(P|P) = 0.6$, $P(B|B) = 0.2$, $P(P|B) = 0.8$, $P(B|P) = 0.4$



$H = P(P) \times H(P) + P(B)\,H(B) = \frac{2}{3} \times 0.971 + \frac{1}{3} \times 0.722 = 0.647 + 0.241 = 0{,}888$ bits/pixel

$H(P) = -P(P|P) \times \log_2 P(P|P) - P(B|P)\log_2 P(B|P) = 0.971$

$H(B) = -P(B|B) \times \log_2 P(B|B) - P(P|B)\log_2 (P(B) = 0.722$

2.

a) $P(X=0) = P(0,0) + P(0,1) = 1/3 + 1/3 = 2/3$

$P(X=1) = P(1,1) + P(1,0) = 1/3 + 0 = 1/3$

• $H(X) = P(X=0) \times (-\log_2(\frac{2}{3})) - \log_2 1/3 \times P(X=1) \simeq 0.92$

$P(Y=0) = P(0,0) + P(1,0) = 1/3 + 0 = 1/3$

$P(Y=1) = P(1,1) + P(0,1) = 1/3 + 1/3 = 2/3$

• $H(Y) = -2/3 \times \log_2(\frac{2}{3}) - 1/3 \times \log_2(1/3) = 0.92$

b) $\boxed{H(X|Y) = -\sum_y P(y) \sum_x P(x|y)\log_2 P(x|y)}$ $\boxed{p(x|y) = \frac{P(x,y)}{p(y)}}$

$p(x=0|y=0) = \frac{P(0,0)}{p(y=0)} = \frac{1/3}{1/3} = 1$

$p(x=1|y=0) = \frac{p(1,0)}{p(y=0)} = \frac{0}{1/3} = 0$

$p(x=0|y=1) = \frac{P(0,1)}{P(y=1)} = \frac{1/3}{2/3} = 1/2$

$p(x=1|y=1) = \frac{p(1,1)}{P(y=1)} = \frac{1/3}{2/3} = 1/2$

• $\boxed{Y=0}$

$\left.\begin{array}{l} \rightarrow p(x=0|y=0) \times \log_2(p(x=0|y=0)) = 0 \\ \rightarrow p(x=1|y=0) \times \log_2(P(x=1|y=0)) = 0 \end{array}\right\} H(X|Y=0) = 0$

• $\boxed{Y=1}$

$\left.\begin{array}{l} \rightarrow p(x=0|y=1) \times \log_2(p(x=0|y=1)) = 1/2 \times (-1) = -1/2 \\ \rightarrow p(x=1|y=1) \times \log_2(p(x=1|y=1)) = 1/2 \times (-1) = -1/2 \end{array}\right\} H(X|Y=1) = -(-1/2 - 1/2) = 1$

Então:

$$H(X|Y) = P(Y=0) \times H(X|Y=0) + P(Y=1)\, H(X|Y=1)$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$H(Y|X) = -\sum_x P(x) \sum_y P(y|x) \log_2 P(y|x) = (\ldots) = 2/3$$

$$P(y|x) = \frac{P(x,y)}{P(y)}$$

c) $H(X,Y) = -\sum_x \sum_y P(x,y) \times \log_2 (P(x,y))$

ou

$$H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y) = 0.92 + 2/3 \simeq 1.586 \text{ bit}$$

d) $I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = 0.92 - \frac{2}{3} = 0.253$ bits

3.

a) $H(X) = -\sum P(x) \times \log_2 P(x)$

$P(x) \rightarrow$ está entre 0 e 1, correspondendo a um número positivo

$\log_2 P(x) \rightarrow \log_2$ de um número entre 0 e 1 é negativo, porém com o "$-$" fica positivo

Número positivo multiplicado por um número positivo dá positivo

b)

4. $A_x = \{12, 14, 16, 18, 20, 22\}$ $P(X=12) = \frac{2}{11}$, $P(X=14) = \frac{2}{11}$, $P(X=16) = \frac{2}{11}$, $P(X=18) = \frac{2}{11}$, $P(X=20) = \frac{2}{11}$, $P(X=22) = \frac{1}{11}$

a) $H = \left(-\frac{2}{11} \log_2\left(\frac{2}{11}\right)\right) \times 5 - \frac{1}{11} \times \log_2\left(\frac{1}{11}\right) \simeq 2,55$ bits/símbolo

b) Podemos optar por uma Modelação Física (através de equações matemáticas). Uma equação que modele a fonte é:

$$\hat{t}_i = 22 - |2i - 10| = 22 - |2x - 10|$$

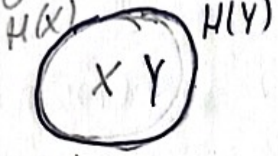
↳ Previsão

$\text{Erro} = t_i - \hat{t}_i$, $e = \underbrace{\{0,0,0,0,0,\dots\}}_{\text{Temos a certeza}}$,

Logo $H(Y) = 0$

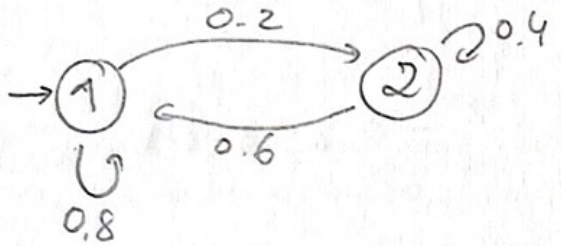
c) Para aprender ~~qual~~ o processo que esteve na origem de X, queremos que $Y = X$, logo

$X = Y$



Logo $I(X,Y) = H(X) = H(Y)$

5. $S = \{1, 2\}$



a)

Se são independentes sabemos que $H(X,Y) = H(X) + H(Y)$

Sabemos que $P(1,2) = p(2,1)$ e que $p(x|y) = \dfrac{p(x,y)}{p(y)}$

$$\begin{cases} p(1|2) = \dfrac{p(1,2)}{p(2)} \\ p(2|1) = \dfrac{p(2,1)}{p(1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.6 \times p(2) = p(1,2) \\ p(1) \times 0.2 = p(2,1) \end{cases}$$

Como $p(1,2) = p(2,1)$:

$$0.6 \times p(2) = p(1) \times 0.2 \Leftrightarrow p(1) = 3p(2) \Rightarrow \begin{cases} p(1) = 0.75 \\ p(2) = 0.25 \end{cases}$$

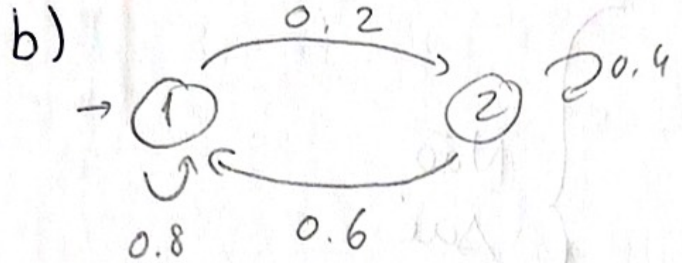
$H(1) = 0.75 \times (-\log_2 0.75) = 0.311$

$H(2) = 0.25 \times (-\log_2 0.25) = 0.5$

Como são independentes: $H = 0.311 + 0.5 = 0.811$ bits/símbolo

Logo a afirmação é falsa !!!

b)



Entropia dada pela cadeia de Markov:

$$H = P(1)H(1) + P(2)H(2)$$

- $H(1) = -0.8 \times \log_2(0.8) - 0.2 \times \log_2(0.2) = 0.722$ bits
- $H(2) = -0.4 \times \log_2(0.4) - 0.6 \times \log_2(0.6) = 0.971$ bits

$$H = 0.75 \times 0.722 + 0.25 \times 0.791 = 0.784 \text{ bits/símbolo}$$

Modelação de Markov é melhor!

6. $P(X=1) = a/2$, $P(X=2) = 1-a$ e $P(X=3) = a/2$

a) Se fosse máxima, as probabilidades seriam equiprováveis, ou seja, cada uma valeria $1/3$:

$$a/2 = 1/3 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$

Nenhuma das anteriores ✓

b) $H(X) \geq 0$, $H(X) \leq 2$ ✓ $(H \in [0, \log_2(3)])$ $(H \in [0, 1.58])$

c) $H(X,X) = H(X) + \underbrace{H(X|X)}_{0}$ ✓

$H(X,X) = H(X)$

d) $I(X,X) = H(X) - \underbrace{H(X|X)}_{0}$ ✓

e) Seria máximo quando $H(X)$ fosse máxima, ou seja, quando $a = \frac{2}{3}$

$(H(X) = I(X,X))$

Nenhuma das anteriores

7. $Y = \log_2(2X+2)$

a) $H(Y,Y) \geq 0$, $H(Y) \geq 0$ ✓

b) $H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$, $H(X,Y) = H(Y)$

c) $I(Y,Y) = H(Y)$

d) $D(X,Y) = 0$ se $P(X) = P(Y)$

Nenhuma das anteriores

e) $D(X,Y) + D(Y,X) \geq 0$

DKL é sempre maior ou igual a 0

Não sai

8. $P(\text{erro por bit}) = p = 0.1$

$P(\text{correto por bit}) = 1 - 0.1 = 0.9$

Não sai

$\frac{7\times6\times5}{6}$

• A probabilidade de todos os 3 bits estarem errados é:

$p(\text{todos errados}) = (0.1)^3 = 0.001$

$\frac{7!}{4!3!}$

• A probabilidade de dois dos 3 estarem errados:

$p(\text{exatamente 2 errados}) = C(3,2) \times p^2(1-p)$

$= 3 \times (0.1)^2 \times 0.9 = 0.027$

$P(\text{total}) = 0.001 + 0.27 = 0.028 = 2,8\%$

$C(^7_4) = \frac{7!}{4!}$

9. a) Não vai sair

10. X = "resultado de uma final entre as equipas A e B"

$A_X = \{AAAA, BBBB, ABBBB, \ldots\}$

Não sai

$\underbrace{\#A_X = 70}$ $((^7C_4) \times 2)$?

$\#X_4 = 2 \to AAAA; BBBB$, $\#X_5 = 2 \times (^5C_4 - {^4C_4}) = 2 \times 4 = 8$

$\#X_6 = 2(^6C_4) - P(Y=5) - P(Y=4) = 2\left(\frac{6!}{4!2!}\right) - 8 - 2 = 20$

$\#X_7 = 2(^7C_4) - P(Y=6) - P(Y=5) - P(Y=4) = 40$

$H(X) = \log_2 70 = 6.129$ (equipas são equilibradas) bits/símbolo

$H(Y) = H\left(\frac{2}{70}; \frac{8}{70}; \frac{20}{70}; \frac{40}{70}\right) = 1.482$ bits/símbolo

$H(Y|X) = 0$ (se conhecermos os resultados dos jogos, conhecemos o nº de jogos)

$I(X,Y) = H(Y) - \underbrace{H(Y|X)}_{0} = H(Y) = 1.482$

$H(X|Y) = H(X) - I(X,Y) = 4.647$