· U C ·

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Análise Matemática II (ano letivo 2018/2019 - 2.º semestre)

LICENCIATURA EM ENGENHARIA INFORMÁTICA

04.06.2019 Segunda Frequência Duração: 1h30

1. Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$ e f uma função analítica em $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$, com $R > 0$. Suponhamos que z_0 é um pólo de ordem 2 de f. Demonstre que o resíduo de f em z_0 é dado por
$$\lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^2 f(z)\right].$$

2. (a) Determine a representação em série de Laurent de potências de $z+1$ para a função f definida por
$$f(z) = \frac{1}{(-z-1)^9(z+3)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{-3,-1\},$$
na região $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < R\}$, indicando o maior valor possível para R.
   (b) Determine, por definição, o resíduo de f em $z = -1$.

3. Usando Transformadas de Laplace, determine, para $t \geq 0$, a solução da seguinte equação diferencial
$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 4x(t) = e^{-t}t$$
sujeita às condições iniciais $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$.
Sugestão: $\dfrac{1}{(s+1)^2(s^2+4)} = \dfrac{2}{25}\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{A}{(s+1)^2} - \dfrac{1}{25}\dfrac{2s+3}{s^2+4}$, com A uma constante a determinar.

4. (a) Sendo $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s-1)^2}$, determine uma função causal f tal que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, usando o Teorema da Convolução.
   (b) Utilizando a transformada de Laplace, resolva para $t \geq 0$ a equação diferencial seguinte, satisfazendo as condições iniciais especificadas:
$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) - 2\frac{dy}{dt}(t) + y(t) = e^{-(t-4)}H(t-4), \quad y(0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 0.$$

5. (a) Seja $\{x_k\}_{k=0}^{+\infty}$ uma sucessão causal tal que $\mathcal{Z}\{x_k\} = X(z)$, $|z| > R$. Prove que
$$\mathcal{Z}\{x_{k+2}\} = z^2X(z) - z^2\,x_0 - z\,x_1, \quad |z| > R.$$
   (b) Usando a fórmula de inversão, determine a transformada-z inversa da função definida pela expressão analítica
$$X(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)(z-1)^2}, \ |z| > 2.$$
   (c) Resolva, pelo método da transformada-z, o problema
$$x_{k+2} + 3x_{k+1} + 2x_k = k \ (k \geq 0), \ x_0 = 0, \ x_1 = 0.$$

2. (a) Determine a representação em série de Laurent de potências de $z+1$ para a função f definida por

$$f(z) = \frac{1}{(-z-1)^9(z+3)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{-3,-1\},$$

na região $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < R\}$, indicando o maior valor possível para R.

(b) Determine, por definição, o resíduo de f em $z=-1$.

a)

$$\frac{-1}{2(z+1)^9} \frac{1}{1+\frac{(z+1)}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z+1)^{n-9}}{2^{n+1}}$$

$$\boxed{R=2}$$

$$\left|\frac{z+1}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+1| < 2$$

b)

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = ?$$

$$n-9=-1$$
$$\Leftrightarrow n=8$$

$$\frac{(-1)^9}{2^9} = -\frac{1}{2^9}$$

3. Usando Transformadas de Laplace, determine, para $t \geq 0$, a solução da seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 4x(t) = e^{-t}t$$

sujeita às condições iniciais $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$.

Sugestão: $\dfrac{1}{(s+1)^2(s^2+4)} = \dfrac{2}{25}\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{A}{(s+1)^2} - \dfrac{1}{25}\dfrac{2s+3}{s^2+4}$, com A uma constante a determinar.

$$x''(t) + 4x(t) = e^{-t}t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2 X(s) + 4X(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{2e^{-t}}{25} + \frac{1}{5}te^{-t} - \frac{2\cos(2t)}{25} - \frac{3/2}{25}\operatorname{sen}(2t)$$

$$= \frac{2e^{-t} - 2\cos(2t) - \frac{3}{2}\operatorname{sen}(2t) + 5te^{-t}}{25}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$$

$$\frac{2}{25} + A - \frac{1}{25}\frac{3}{4}$$

$$= \frac{8}{100} + \frac{100A}{100} - \frac{3}{100}$$

$$25 = 8 + 100A - 3$$
$$\Leftrightarrow 20 = 100A$$
$$\Leftrightarrow A = 1/5$$

4. (a) Sendo $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s-1)^2}$, determine uma função causal f tal que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, usando o Teorema da Convolução.

(b) Utilizando a transformada de Laplace, resolva para $t \geq 0$ a equação diferencial seguinte, satisfazendo as condições iniciais especificadas:

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) - 2\frac{dy}{dt}(t) + y(t) = e^{-(t-4)}H(t-4), \quad y(0) = \frac{dy}{dt}(0) = 0.$$

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\,\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = e^{-t} * te^{t}$

$$= \int_0^t e^{-(t-y)} \cdot ye^{y}\, dy = e^{-t}\int_0^t ye^{2y}\, dy = e^{-t}\left[\frac{e^{2y}}{2}y - \frac{e^{2y}}{4}\right]_0^t = e^{-t}\left(\frac{e^{2t}}{2}t - \frac{e^{2t}}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{2e^{t}t - e^{t} + e^{-t}}{4}$$

b) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^{-(t-4)} H(t-4)$

$(\Leftrightarrow)\ s^2 Y(s) - 2s\,Y(s) + Y(t) = e^{-4s}\frac{1}{s+1}$

$(\Leftrightarrow)\ Y(s) = \frac{e^{-4s}}{(s+1)(s-1)^2}$

$(\Leftrightarrow)\ y(t) = \frac{2e^{t-4}(t-4) - e^{t-4} + e^{-t+4}}{4} H(t-4)$

5. (a) Seja $\{x_k\}_{k=0}^{+\infty}$ uma sucessão causal tal que $\mathcal{Z}\{x_k\} = X(z)$, $|z| > R$. Prove que

$$\mathcal{Z}\{x_{k+2}\} = z^2 X(z) - z^2 x_0 - z\, x_1, \quad |z| > R.$$

(b) Usando a fórmula de inversão, determine a transformada-z inversa da função definida pela expressão analítica

$$X(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)(z-1)^2}, \ |z| > 2.$$

(c) Resolva, pelo método da transformada-z, o problema

$$x_{k+2} + 3x_{k+1} + 2x_k = k \ (k \geq 0), \ x_0 = 0, \ x_1 = 0.$$

a) $\mathcal{Z}\{x_k\} = X(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k}$

Então,

$$\mathcal{Z}\{x_{k+2}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{k+2}}{z^k} = z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{k+2}}{z^{k+2}}$$

$$= z^2\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} - \frac{x_0}{z^0} - \frac{x_1}{z^1}\right)$$

$$= z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} - z^2 x_0 - z x_1$$

(b) Usando a fórmula de inversão, determine a transformada-z inversa da função definida pela expressão analítica

$$X(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)(z-1)^2}, \ |z| > 2.$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z+1)(z+2)(z-1)^2}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C(0,r)} \frac{z^k}{(z+1)(z+2)(z-1)^2}\,dz$$

$$= \lim_{z\to -1}\frac{z^k}{(z+2)(z-1)^2} + \lim_{z\to -2}\frac{z^k}{(z+1)(z-1)^2} + \lim_{z\to 1}\left(\frac{z^k}{(z+1)(z+2)}\right)'$$

$$= \frac{(-1)^k}{4} + \frac{(-2)^k}{-9} + \frac{6k-5}{36}$$

$$= \frac{9(-1)^k - 4(-2)^k + 6k - 5}{36}$$

$$\frac{kz^{k-1}(z+1)(z+2) - z^k\big((z+2)+(z+1)\big)}{(z+1)^2(z+2)^2}$$