Subespaços de $\mathbb{R}^n$

Definição

Um **subespaço** de $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto F de $\mathbb{R}^n$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $F \neq \emptyset$;
2. Se $u, v \in F$ então $u + v \in F$;
   (F é fechado para a adição de vetores.)
3. Se $v \in F$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então $\alpha v \in F$.
   (F é fechado para o produto de números reais por vetores.)

Assim, **se** F for um subespaço de $\mathbb{R}^n$,

$$v_1, \ldots, v_n \in F \quad \text{e} \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

então

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \ \text{ pertence a } F.$$

Observação

1. Se F for subespaço de $\mathbb{R}^n$ então $0_{\mathbb{R}^n} \in F$.
2. Logo, se $0_{\mathbb{R}^n} \notin F$, então F não é subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Exemplos

1. O conjunto $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ e $\mathbb{R}^n$ **são** subespaços de $\mathbb{R}^n$

   (são os chamados *espaços triviais*).

2. Em $\mathbb{R}^2$ as retas que passam pela origem **são** subespaços de $\mathbb{R}^2$.

3. Em $\mathbb{R}^2$ as retas que não passam pela origem **não são** subespaços de $\mathbb{R}^2$.

4. Em $\mathbb{R}^3$ as retas e os planos que passam pela origem **são** subespaços de $\mathbb{R}^3$.

5. Em $\mathbb{R}^3$ as retas e os planos que não passam pela origem **não são** subespaços de $\mathbb{R}^3$.

Exemplos (continuação)

6. O conjunto

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 1 \right\}$$

não é subespaço de $\mathbb{R}^4$.

De facto, basta observar que a origem de $\mathbb{R}^4$ não pertence a F (pois $0 + 0 \neq 1$).

Exemplos (continuação)

7. O conjunto

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 \right\}$$

é subespaço de $\mathbb{R}^4$. (*A prova disso fica como exercício.*)

Teorema

A interseção de dois (ou mais) subespaços de $\mathbb{R}^n$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração (caso: dois subespaços)

Sejam F e G dois subespaços de $\mathbb{R}^n$.

1 – Como a origem de $\mathbb{R}^n$ pertence a F e a G (pois ambos são subespaços) então a origem pertence a $F \cap G$, logo $F \cap G \neq \emptyset$.

2 – Sejam $u, v \in F \cap G$. Então $u, v \in F$ e $u, v \in G$, e como F e G são subespaços temos $u + v \in F$ e $u + v \in G$, logo $u + v \in F \cap G$.

3 – Sejam $u \in F \cap G$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $u \in F$ e $u \in G$, e como F e G são subespaços temos $\alpha u \in F$ e $\alpha u \in G$, logo $\alpha u \in F \cap G$.

Logo, $F \cap G$ é subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Definição

Sejam $v_1, \ldots, v_k$ vetores de $\mathbb{R}^n$.

Uma **combinação linear** de $v_1, \ldots, v_k$ é um vetor da forma

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k,$$

com $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ números reais (os **coeficientes** da combinação linear).

Denotamos por

$$ger\{v_1, \ldots, v_k\}$$

o conjunto de todas as possíveis combinações lineares dos vetores $v_1, \ldots, v_k$.

Teorema

Sendo $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$, o conjunto $ger\{v_1, \ldots, v_k\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração

Exercício.

Definição

Ao subespaço

$$ger\{v_1, \ldots, v_k\}$$

chamamos **subespaço gerado pelos vetores** $v_1, \ldots, v_k$.

Se $F = ger\{v_1, \ldots, v_k\}$, diz-se que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é um **conjunto gerador** de F.

Observação: Se $\{v_1, \ldots, v_k\}$ gerar F então cada um destes vetores pertence a F.

Exemplos

1. Seja $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} ger\{v\} &= \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = 2x \right\} \end{aligned}$$

Logo, $ger\{v\}$ é a reta de equação $y = 2x$.

Exemplos

2 Sejam $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} ger\{u,v\} &= \{xu + yv : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Logo, $ger\{u,v\} = \mathbb{R}^2$.

Exemplos

3 Seja $F = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0 \right\}$. Então

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = ger \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Logo, $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ é um conjunto gerador de F.

Definição

Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
O **espaço das colunas** de A é o subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas n colunas de A (e é denotado por $\mathbf{C(A)}$).

O **espaço das linhas** de A é $\mathbf{R(A)} = C(A^T)$, isto é, o espaço gerado pelas linhas de A consideradas como vetores de $\mathbb{R}^n$.

Exemplos

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

- $C(A) = ger\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}\right\}$
- $R(A) = ger\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}\right\}$.

Teorema

O sistema $Ax = b$ é possível se e só se $b \in C(A)$.

Demonstração

Sejam $v_1, \dots, v_n$ as colunas da matriz A.

Então $b \in C(A)$ sse existem $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que $b = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$.

Mas $b = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$ é equivalente a $b = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Logo $b \in C(A)$ sse existe $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ tal que $Ax = b$,

isto é, sse o sistema $Ax = b$ é possível.

O teorema anterior diz-nos que

$$C(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$$

Observemos que

$$ger\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}=ger\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right\};$$

$$ger\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}=ger\left\{\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}\right\}=ger\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\\3\end{bmatrix}\right\}.$$

Dado um subespaço F de $\mathbb{R}^n$, pretendemos encontrar um conjunto gerador de F com tão poucos elementos quanto possível.

Lema

Se os vetores $v_1, \ldots, v_k$ gerarem F e se um deles for combinação linear dos restantes $k-1$, então esses $k-1$ vetores ainda geram F.

Demonstração

Suponhamos que os vetores $v_1, \ldots, v_k$ geram F e que v_i é combinação linear dos restantes $k-1$.

Então existem números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_k$ tais que

$$v_i = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \alpha_k v_k.$$

Seja $v \in F$. Como $v \in F$ e $F = ger\{v_1, \ldots, v_k\}$ então existem números reais $\beta_1, \ldots, \beta_k$ tais que

$$v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_i v_i + \beta_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \beta_k v_k.$$

Demonstração (continuação)

$$v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_i v_i + \beta_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \beta_k v_k.$$

Como $v_i = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \alpha_k v_k$,
então $v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_i(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \alpha_k v_k) + \beta_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \beta_k v_k$,
isto é,
$v = (\beta_1 + \beta_i \alpha_1) v_1 + \ldots + (\beta_{i-1} + \beta_i \alpha_{i-1}) v_{i-1} + (\beta_{i+1} + \beta_i \alpha_{i+1}) v_{i+1} + \ldots + (\beta_k + \beta_i \alpha_k) v_k$.
Assim, v é combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k$.
Logo os vetores $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k$ geram F.

Se $v_1, \ldots, v_k$ gerarem F e nenhum desses vetores se escrever como combinação linear dos restantes $k-1$, então se retirarmos algum dos vetores, os restantes já não geram F.

Definição

Sejam $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ $(k \geq 2)$. Os vetores $v_1, \ldots, v_k$ dizem-se **linearmente independentes** se nenhum deles for igual a uma combinação linear dos outros $k-1$.

Se só tivermos um só vetor, v_1, diz-se que v_1 é linearmente independente se for não nulo.

Se $v_1, \ldots, v_k$ não forem linearmente independentes, dizem-se **linearmente dependentes**.

Observação

A propriedade de uns tantos vetores serem linearmente independentes é uma propriedade do conjunto e não de cada um dos vetores. Assim, muitas vezes diz-se que é o conjunto que é linearmente independente.

Exemplos

1. O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ é linearmente independente.
2. O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ é linearmente dependente.
3. O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ é linearmente dependente.
4. Qualquer conjunto de vetores que contenha o vetor nulo é linearmente dependente.
5. O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ é linearmente independente.

6. O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ é linearmente dependente.

7. Qualquer conjunto de vetores em que um é múltiplo de outro, é linearmente dependente.

8. Subconjuntos de conjuntos linearmente independentes são linearmente independentes.

9. Um conjunto que contenha um subconjunto linearmente dependente é também linearmente dependente.

Critério de independência linear

Os vetores $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente independentes se e só se for impossível escrever o vetor nulo como combinação linear de $v_1, \ldots, v_k$, exceto da forma trivial.

Isto é, os vetores $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente independentes se e só se

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0_{\mathbb{R}^n} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \ldots \alpha_k = 0$$

Exemplo

Vejamos se o conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ é linearmente independente.

Sejam x_1, x_2, x_3 tais que

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

isto é, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, isto é,

Exemplo (continuação)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$, isto é,

$$\left\{ \begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = 0 \\ -3x_2 + 3x_3 & = 0 \\ 2x_3 & = 0 \end{array} \right. \quad \text{logo} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right. .$$

Concluímos assim que

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

é linearmente independente.

Exemplo

Será que o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

é linearmente independente?

Sejam x_1, x_2, x_3 tais que

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$ isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$ isto é,

Exemplo (continuação)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$, isto é,

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \right. \text{ logo } \left\{ \begin{aligned} x_1 &= -x_3 \\ x_2 &= -x_3 \end{aligned} \right. ,$$

e portanto o sistema é possível indeterminado, existindo portanto mais do que a solução nula. Concluímos assim que

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

é linearmente dependente.

Corolário

Designemos por A a matriz cujas colunas são $v_1, \ldots, v_k$.

Os vetores $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente independentes se e só se o sistema $Ax = 0$ for possível determinado.

(logo,
os vetores $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente dependentes se e só se o sistema $Ax = 0$ for possível indeterminado.)

Corolário

Em $\mathbb{R}^n$ não pode existir um conjunto linearmente independente com mais de n vetores.

Definição

Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Um conjunto de vetores de F que

- gere F
- seja linearmente independente

diz-se uma **base** de F.

Observação

Quando falarmos de bases vamos considerar o conjunto como conjunto ordenado.

Exemplos

1. O exemplo mais simples para base de $\mathbb{R}^n$ é o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

que se designa por **base canónica** de $\mathbb{R}^n$.

Exemplos

2. O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

3. O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$, pois apesar de gerar $\mathbb{R}^2$, não é linearmente independente.

4. O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$, pois apesar de ser linearmente independente, não gera $\mathbb{R}^2$.

Teorema

Seja $\{v_1, \ldots, v_k\}$ uma base de um subespaço F. Então qualquer vetor $v \in F$ escreve-se de modo único como combinação linear de $v_1, \ldots, v_k$.

(Aos coeficientes desta combinação linear chamamos **componentes** *ou* **coordenadas** *de v relativamente à base $\{v_1, \ldots, v_k\}$.)*

Demonstração

Como $\{v_1, \ldots, v_k\}$ gera F então existem números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tais que $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$. Suponhamos que existem números reais $\beta_1, \ldots, \beta_k$ tais que $v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_k v_k$. Então $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_k v_k$, logo $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \ldots + (\alpha_k - \beta_k)v_k = 0$. Como os vetores $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente independentes temos $\alpha_i - \beta_i = 0$ para $i = 1, \ldots, k$, isto é $\alpha_i = \beta_i$, para $i = 1, \ldots, k$.

Dado um subespaço F, se conhecermos uma base de F, qualquer vetor de F fica determinado pela indicação das suas coordenadas relativamente a essa base.

Exemplos

1. As coordenadas de $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ relativamente à base canónica são 2 e 3 pois $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. As coordenadas de $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ relativamente à base canónica são x e y pois $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Exemplos

3. As coordenadas de $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ relativamente à base $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ são -2 e 6 pois $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. As coordenadas de $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ relativamente à base $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ são $(x-y)$ e y pois $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x-y) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Teorema

Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Sejam $v_1, \ldots, v_p$ vetores de F que geram F e sejam $w_1, \ldots, w_q$ vetores de F linearmente independentes. Então tem-se, necessariamente, $p \geq q$.

Isto é, num subespaço, um conjunto gerador nunca pode ter menos elementos do que um conjunto linearmente independente.

Corolário

Se uma base de um subespaço for constituída por k vetores, então todas as bases têm k vetores.

Definição

Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Se uma base de F (e portanto todas) tiver k elementos, dizemos que F tem **dimensão** k, e escrevemos $dimF = k$.

Se $F = \{0\}$, escrevemos, por definição, $dimF = 0$.

Exemplos

1. $dim\mathbb{R}^n = n$
2. Em $\mathbb{R}^2$, as retas que passam na origem têm dimensão 1.
3. Em $\mathbb{R}^3$, as retas que passam na origem têm dimensão 1.
4. Em $\mathbb{R}^3$, os planos que passam na origem têm dimensão 2.
5. O subespaço $F = ger\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ tem dimensão 2

   pois o conjunto $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ gera F e é linearmente independente, logo é base de F.

Se $dim F = k, k > 0$, então:

- k é o número máximo de elementos que pode ter um conjunto linearmente independente de vetores de F;
- k é o número mínimo de elementos que pode ter um conjunto gerador de F.

Teorema

Sejam $v_1, \ldots, v_q$ vetores linearmente independentes. Se um vetor w não pertencer a $ger\{v_1, \ldots, v_q\}$, então os vetores $v_1, \ldots, v_q, w$ são linearmente independentes.

Teorema (Construção de uma base)

Suponhamos que $dim F = k, k > 0$. Então:

1. Dado um conjunto de vetores linearmente independentes de F, se esse conjunto não for uma base de F é possível acrescentar-lhe vetores de F de forma a obter uma base de F.
2. Qualquer conjunto de k vetores de F linearmente independentes é uma base de F.
3. Dado um conjunto finito de vetores que gerem F, se esse conjunto não for uma base de F é possível retirar-lhe vetores de forma a obter uma base de F.
4. Qualquer conjunto de k vetores de F que gerem F é uma base de F.

Exemplos

1. Os vetores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ são linearmente independentes, mas não constituem uma base de $\mathbb{R}^3$ (pois $dim \mathbb{R}^3 = 3$). Pretendemos obter uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha v_1 e v_2. Para isso, basta determinar $v_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que $v_3 \notin ger\{v_1, v_2\}$. Como $ger\{v_1, v_2\} =$
$$\left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} =$$
$\left\{ \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$, então $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin ger\{v_1, v_2\}$.
Assim, $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ (que contém v_1 e v_2).

Exemplos (continuação)

2. Como o conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ é linearmente independente e $dim \mathbb{R}^3 = 3$, constitui uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exemplos (continuação)

3. O conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

gera $\mathbb{R}^3$, pois qualquer elemento de $\mathbb{R}^3$ escreve-se como combinação linear destes quatro vetores. De facto, temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplos (continuação)

Mas este conjunto não é linearmente independente, pois

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, ao conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ podemos retirar o vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ que o conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ continua a gerar $\mathbb{R}^3$ e é linearmente independente, logo é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exemplos (continuação)

4. O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ gera $\mathbb{R}^2$, pois para qualquer $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ temos $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -y \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (x+y) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   Como $dim \mathbb{R}^2 = 2$ podemos concluir que $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Corolário

Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Então:

1. F tem dimensão.
2. $dim F \leq n$.
3. $dim F = n$ se e só se $F = \mathbb{R}^n$.

Recordemos...

Seja A uma matriz qualquer.

$N(A)$: espaço nulo de A (conjunto das soluções de $Ax = 0$)

$C(A)$: espaço das colunas de A (espaço gerado pelas colunas de A)

$R(A)$: espaço das linhas de A (espaço gerado pelas linhas de A)

Exemplos

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = 0\} =$

$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$C(A) = ger \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

$R(A) = ger \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

Definição

Seja A uma matriz.
A dimensão de $N(A)$ chama-se **nulidade** de A e denota-se por $nul(A)$.

Teorema

Seja A uma matriz $m \times n$. Então, tem-se

$$nul(A) = n - car(A).$$

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - 2L_1]{L_2 + L_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix} = U.$$

Logo $car(A) = 3$ e portanto $nul(A) = 4 - 3 = 1$.

Teorema

Seja A $m \times n$ e U a matriz em escada obtida de A no final da parte descendente do processo de eliminação de Gauss. Tem-se

$$dim C(A) = dim C(U) = car(A),$$

e uma base de $C(A)$ é constituída pelas colunas de A correspondentes às colunas de U que contêm pivots.

De uma forma geral $C(A) \neq C(U)$.

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_3 - 2L_1}{\overset{L_2 + L_1}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix} = U.$$

Uma base para $C(A)$ é $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Consequência

Para determinar uma base de um subespaço do qual se conheça um conjunto gerador, considera-se a matriz A cujas colunas são os vetores geradores do subespaço e determina-se uma base de $C(A)$. A dimensão do subespaço é igual à característica de A.

Exemplo

Seja $F = ger\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

Então $F = C(A)$ para $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Mas

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_3 + L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

A dimensão de F é igual a $car(A)$, logo $dimF = 2$ e uma base para F é (uma base para $C(A)$): $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$.

Como a aplicação às linhas de uma matriz A de operações elementares não altera o subespaço gerado pelas linhas, temos

$$R(A) = R(U).$$

Teorema

Uma base de $R(A)$ é constituída pelas linhas não nulas de U (i.e. pelas linhas que têm pivots). Logo, $dim R(A) = car(A)$.

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_3 - 2L_1}{\overset{L_2 + L_1}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix} = U.$$

Uma base para $R(A)$ é $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

Teorema

Seja A $m \times n$. Então

$$car(A) = car(A^T).$$

Demonstração

Seja A $m \times n$. Temos

$$R(A) = C(A^T)$$

logo

$$dim R(A) = dim C(A^T)$$

i.e.

$$car(A) = car(A^T).$$