ESTIMAÇÃO PARAMÉTRICA

Parte 2 - Estimação Pontual

Introdução

X: variável aleatória (v.a.) cuja distribuição de probabilidade depende de um parâmetro desconhecido θ, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, que pretendemos estimar.

Por exemplo, muitas vezes conseguimos tecer conjeturas sobre a função de probabilidade de X, se X é discreta, ou sobre a função densidade de X, se X é contínua, mas na expressão dessa função há parâmetros desconhecidos que pretendemos estimar.

Ao conjunto Θ chamamos espaço dos parâmetros (por exemplo, na distribuição $N(m, \sigma)$ com m e σ desconhecidos, temos $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$).

Amostra aleatória

É natural que as inferências sobre a população em estudo dependam da amostra concreta observada, $(x_1, ..., x_n)$. No entanto, os procedimentos estatísticos em que se baseiam tais conclusões não devem depender de uma amostra particular. Assim, para estudar tais procedimentos, não nos baseamos em amostras concretas mas sim em *amostras aleatórias*.

$\rightarrow$ **Amostra aleatória** de X de dimensão n, $n \in \mathbb{N}$: vetor $(X_1, ..., X_n)$ constituído por variáveis aleatórias $X_1, ..., X_n$ independentes e que seguem a mesma distribuição de X (ou seja, $X_1, ..., X_n$ são i.i.d. com X).

Estimador e estimativa

A partir de agora consideramos $\Theta \subset \mathbb{R}$.

Estimador do parâmetro θ: é qualquer variável aleatória real T_n que seja função de $X_1, ..., X_n$ (mas não de θ) e que tome valores em Θ.

Seja $g : \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$.

Estimador de $g(\theta)$: é qualquer variável aleatória real U_n que seja função de $X_1, ..., X_n$ (mas não de θ) e que tome valores no contradomínio de g.

Estimativa de θ (resp., $g(\theta)$): é um valor concreto de T_n (resp., U_n), sendo por isso calculado com base numa amostra observada de X. Usualmente, a notação usada para a estimativa é a mesma do estimador, mas com letra minúscula.

Por exemplo, sendo $(X_1, \ldots, X_{50})$ uma amostra aleatória de uma v.a. X, cujo valor médio, $E(X)$, desconhecemos, um estimador de $E(X)$ é $\overline{X}_{50} = \dfrac{1}{50}\displaystyle\sum_{i=1}^{50} X_i$. Para obter uma estimativa, temos que ter uma amostra concreta/observada de X.

Suponhamos que dispomos de uma amostra observada de X, $(x_1, \ldots, x_{50})$, tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{50} x_i = 376.8$. Então uma estimativa de $E(X)$ é $\overline{x}_{50} = \frac{376.8}{50} = 7.536$.

Se considerarmos outra amostra observada de X de dimensão 50, ao mesmo estimador $\overline{X}_{50}$ poderá corresponder uma estimativa de $E(X)$ diferente da anterior.

Estimadores e estimativas cêntricos e assintoticamente cêntricos

Seja X uma v.a. cuja distribuição de probabilidade depende de um parâmetro desconhecido θ, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$.

- Diz-se que T_n é um **estimador cêntrico** (ou **não enviesado**) de θ se $E\left(T_n\right) = \theta$, $\forall \theta \in \Theta$.
- Diz-se que T_n é um **estimador assintoticamente cêntrico** (ou **assintoticamente não enviesado**) de θ se $\lim\limits_{n \to +\infty} E\left(T_n\right) = \theta$, $\forall \theta \in \Theta$.

Uma estimativa cêntrica (resp., assintoticamente cêntrica) de θ é um valor concreto de um estimador cêntrico (resp., assintoticamente cêntrico) de θ calculado com base numa amostra observada de X.

Estimação de $E(X)$ e $V(X)$

Consideremos uma v.a. X cuja distribuição de probabilidade depende de um parâmetro desconhecido θ, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$. Suponhamos que, independentemente do valor de θ, $E(X)$ e $V(X)$ existem mas são desconhecidas. Para simplificar a escrita, usamos as notações $m = E(X)$ e $\sigma^2 = V(X)$.
Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de X (ou seja, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são v.a.'s independentes e todas com a mesma distribuição de X).

Estimação de m

$\rightarrow$ Chamamos **média empírica** à v.a. $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Propriedade 1. $\overline{X}_n$ é um estimador cêntrico de m.

Demonstração. $\overline{X}_n$ é um estimador cêntrico de m se e só se $E(\overline{X}_n) = m$. Ora, pela linearidade da esperança matemática, tem-se

$$E(\overline{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m = \frac{1}{n} nm = m,$$

como se pretendia mostrar.

Dada uma amostra observada de X, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, podemos obter um valor concreto de $\overline{X}_n$: $\overline{x}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Como $\overline{x}_n$ é uma concretização de um estimador cêntrico de $E(X)$, dizemos que $\overline{x}_n$ é uma estimativa cêntrica de $E(X)$.

Propriedade 2. $V(\overline{X}_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}.$

Demonstração. Tem-se $V(\overline{X}_n) = V\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \dfrac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$

$= \dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i)$, porque $X_1, \ldots, X_n$ são independentes, de acordo com a definição de amostra aleatória. Então $V(\overline{X}_n) = \dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \dfrac{1}{n^2}n\sigma^2 = \dfrac{\sigma^2}{n}$, como se pretendia mostrar.

Consequência. $\lim_{n\to+\infty} V(\overline{X}_n) = 0.$

Propriedade 3. Se $X \sim N(m, \sigma)$, então $\overline{X}_n \sim N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Demonstração. Por definição de amostra aleatória de X, as v.a.'s $X_1, \ldots, X_n$ são independentes e seguem todas a distribuição de X, ou seja, são normais de média m e variância σ^2. Então, como $\overline{X}_n$ é uma combinação linear de $X_1, \ldots, X_n$ (com todos os coeficientes iguais a $\frac{1}{n}$), a ELN assegura que $\overline{X}_n$ segue uma distribuição normal. Das propriedades 1 e 2, tem-se $E(\overline{X}_n) = m$ e $V(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, obtendo-se o resultado pretendido.

Consequência. Se $X \sim N(m, \sigma)$, então $\dfrac{\overline{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$.

Propriedade 4. Se a distribuição de X não é normal mas $n > 30$, então $\frac{\overline{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{\bullet}{\sim} N(0,1)$.

Demonstração. Por definição de amostra aleatória de X, as v.a.'s $X_1, \ldots, X_n$ são independentes e seguem todas a distribuição de X a qual tem média m e variância σ^2. Como $n > 30$, o TLC permite concluir, diretamente do correspondente enunciado, que $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nm}{\sigma\sqrt{n}} \overset{\bullet}{\sim} N(0,1)$. Dividindo o numerador e o denominador por n, obtém-se o resultado pretendido.

Consequência. Nas condições da propriedade 4, tem-se $\overline{X}_n \overset{\bullet}{\sim} N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Estimação de σ^2

$\rightarrow$ Chamamos **variância empírica** à v.a. $S_n^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2.$

$\rightarrow$ Facilmente se verifica que $S_n^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2$

Se $E(X)$ é conhecida, é usual utilizar $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - E(X)\right)^2$ como estimador de $V(X)$. Este estimador é cêntrico de $V(X)$.

Propriedade 5. S_n^2 é um estimador assintoticamente cêntrico de σ^2.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
E\left(S_n^2\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^2\right) - E\left(\overline{X}_n^2\right) \\
&= E\left(X^2\right) - \left[V\left(\overline{X}_n\right) + \left(E\left(\overline{X}_n\right)\right)^2\right] \\
&= E\left(X^2\right) - \left(\frac{\sigma^2}{n} + m^2\right) \\
&= E\left(X^2\right) - m^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma^2.
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\lim_{n\to+\infty} E\left(S_n^2\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\sigma^2 = \sigma^2,$$

como pretendido.

Como $E(S_n^2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma^2 \neq \sigma^2$, o estimador S_n^2 não é cêntrico de $\sigma^2 = V(X)$. No entanto, a partir dele facilmente encontramos um estimador cêntrico de $V(X)$:

$$E\left(S_n^2\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\sigma^2 = \frac{n-1}{n}\,\sigma^2 \Leftrightarrow \frac{n}{n-1}\,E\left(S_n^2\right) = \sigma^2$$
$$\Leftrightarrow E\left(\frac{n}{n-1}\,S_n^2\right) = \sigma^2 \Leftrightarrow E\left(\widehat{S}_n^2\right) = \sigma^2,$$

com $\widehat{S}_n^2 = \frac{n}{n-1}\,S_n^2$.

Propriedade 6. $\widehat{S}_n^2$ é um estimador cêntrico de σ^2.

O estimador $\widehat{S}_n^2$ é designado por **variância empírica corrigida**.

Relembre-se que $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \overline{X}_n^2$, pelo que

$$\widehat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \frac{n}{n-1}\,\overline{X}_n^2$$

.

Então, dada uma amostra observada de X:

- A variância da amostra, s_n^2, é uma estimativa assintoticamente cêntrica de $V(X)$.
- $\widehat{s}_n^2 = \dfrac{n}{n-1}\, s_n^2$ é uma estimativa cêntrica de $V(X)$.

O valor $\widehat{s}_n^2$ designa-se por variância corrigida da amostra.

O valor $\widehat{s}_n = \sqrt{\widehat{s}_n^2}$ designa-se por desvio padrão corrigido da amostra.

Nota: Quando usamos um valor concreto de n podemos omitir a sua inclusão no índice das notações. Escreveremos simplesmente $\overline{X}$, $\overline{x}$, S^2, s^2, s, $\widehat{S}^2$, $\widehat{s}^2$, $\widehat{s}$.

Estimador e estimativa cêntricos de uma proporção

Uma proporção, p, corresponde à probabilidade de ocorrência de um acontecimento A associado a uma e.a. ($p = P(A)$). Consideremos a v.a.

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se } A \text{ ocorre} \\ 0, & \text{se } A \text{ não ocorre} \end{cases}$$

Já sabemos que $Y \sim \mathcal{B}(p)$ e que $p = E(Y)$. Como um estimador cêntrico de $E(Y)$ é a média empírica de uma amostra aleatória de Y, $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, tal estimador é também um estimador cêntrico de p. Assim,

- um estimador cêntrico de p é $\overline{Y}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$;
- uma estimativa cêntrica de p é $\overline{y}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i$, sendo $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ **uma amostra observada de Y**.

Exercício: Sabendo que numa amostra de 16 pacotes de determinado produto, embalados por uma máquina (que devem pesar, em média, $2\,kg$), existem 4 com menos de $2\,kg$, obtenha uma estimativa cêntrica da proporção de pacotes embalados pela máquina com peso inferior a $2\,kg$.

Resolução Considere-se a v.a. Y definida por

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se o pacote } \omega \text{ pesa menos de } 2kg \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Tem-se $Y \sim \mathcal{B}(p)$, com $p = P(Y = 1)$. Além disso, $p = E(Y)$. Então, como sabemos que uma estimativa cêntrica da média de uma v.a. é a média de uma amostra observada dessa v.a., uma estimativa cêntrica de p é $\overline{y} = \dfrac{1}{16}\displaystyle\sum_{i=1}^{16} y_i$, onde $(y_1, ..., y_{16})$ é a amostra observada de Y. Esta amostra tem 4 valores iguais a 1 e 12 valores iguais a 0.
Assim, $\overline{y} = \frac{4}{16} = 0.25$, pelo que a estimativa cêntrica pedida é 0.25.

Momentos empíricos

Sejam $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de X e $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma amostra observada de X. O momento empírico de ordem k é a v.a.

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

$\boxed{\textbf{Propriedade 7. } M_k \text{ é um estimador cêntrico de } E(X^k)}$

Demonstração. Por definição, M_k é um estimador cêntrico de $E(X^k)$ se $E(M_k) = E(X^k)$, igualdade esta que facilmente se verifica ser verdadeira:

$$E(M_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i^k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X^k) = \frac{1}{n}\, n\, E(X^k) = E(X^k).$$

O momento de ordem k da amostra observada é $\widehat{m}_k = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^k$. É uma estimativa cêntrica de $E(X^k)$.

Método dos momentos

Trata-se de um processo para encontrar estimadores a partir de momentos simples de X: $E(X), E(X^2), E(X^3), \ldots, E(X^r)$, se existirem. Sejam $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de X e $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma amostra observada de X.

Exemplo: Suponhamos que determinada v.a. X segue uma distribuição exponencial de parâmetro λ, mas desconhecemos o valor de λ. Sabemos que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, pelo que $\lambda = \frac{1}{E(X)}$.

Claro que, como desconhecemos λ, também desconhecemos $E(X)$. No entanto, sabemos que o estimador mais usual para $E(X)$ é $\overline{X}_n$. Então um estimador para λ é

$$T_n = \frac{1}{\overline{X}_n}.$$

Assim, uma estimativa para λ é $t_n = \frac{1}{\overline{x}_n}$, onde $\overline{x}_n$ é a média da amostra observada, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

O procedimento usado neste exemplo é um caso concreto da aplicação do método dos momentos que se descreve a seguir.

Procedimento:

- 1º Passo: Escrever o parâmetro θ ou uma sua função, $g(\theta)$, cujo valor se pretende estimar em função de $E(X), E(X^2), E(X^3), \ldots, E(X^r)$, para algum r fixo, $r \in \mathbb{N}$:

$$g(\theta) = \varphi(E(X), E(X^2), E(X^3), \ldots, E(X^r)) \quad (*)$$

- 2º Passo:
  a) Um estimador T_n de $g(\theta)$ obtém-se substituindo $E(X^k)$ por $M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$, $k = 1, 2, \ldots, r$, no segundo membro de $(*)$:

$$T_n = \varphi(M_1, M_2, M_3, \ldots, M_r).$$

  b) Uma estimativa t_n de $g(\theta)$ obtém-se substituindo $E(X^k)$ por $\widehat{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$, $k = 1, 2, \ldots, r$, no segundo membro de $(*)$:

$$t_n = \varphi(\widehat{m}_1, \widehat{m}_2, \widehat{m}_3, \ldots, \widehat{m}_r).$$

Alguns exemplos

EXEMPLO 1 Uma fábrica possui uma máquina que enche determinado tipo de garrafas com refrigerante. A altura de vazio de cada garrafa cheia (em centímetros), i.e., a altura da parte da garrafa que fica sem líquido, é uma variável aleatória real, X, cuja distribuição de probabilidade depende de um parâmetro real positivo, θ, desconhecido. Sabe-se que $E(X) = \frac{3}{4}\,\theta$.
Selecionaram-se aleatoriamente 50 garrafas e registou-se a altura de vazio de cada uma delas. Os valores obtidos estão resumidos no quadro seguinte.

Altura de vazio (cm)	$]1,2]$	$]2,3]$	$]3,4]$	$]4,5]$
Número de garrafas	4	10	14	22

a) Calcule a média e a variância desta amostra.

b) Usando o método dos momentos,

(i) determine um estimador cêntrico de θ, a partir de uma amostra aleatória de X, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$;
(ii) calcule uma estimativa cêntrica de θ, a partir da amostra observada.

Resolução:

a) Como a amostra é classificada, determinam-se valores aproximados da média e da variância correspondentes, com base nas marcas das classes. Para tal, considere-se o quadro seguinte (no qual x_i' denota a marca da i-ésima classe, $i = 1, 2, 3, 4$):

classes	n_i	x_i'	$n_i x_i'$	$n_i (x_i')^2$
$]1, 2]$	4	1.5	6	9
$]2, 3]$	10	2.5	25	62.5
$]3, 4]$	14	3.5	49	171.5
$]4, 5]$	22	4.5	99	445.5
Total	50	-	179	688.5

Nestas condições, a média e a variância da amostra são dadas, respetivamente, por

$$\overline{x} \simeq \overline{x}' = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{4} n_i x_i' = \frac{179}{50} = 3.58\, cm$$

e

$$s^2 \simeq (s')^2 = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{4} n_i (x_i')^2 - (\overline{x}')^2 = \frac{688.5}{50} - 3.58^2 = 0.9536\, cm^2.$$

b) **(i)** Tem-se $E(X) = \frac{3}{4}\,\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{4}{3}\,E(X)$.

Então um estimador de θ obtido pelo método dos momentos a partir de uma amostra aleatória de X, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, é

$$T_n = \frac{4}{3}\,\overline{X}_n, \quad \text{com} \quad \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Por definição, o estimador T_n é cêntrico de θ se $E(T_n) = \theta$, para qualquer $\theta \in \mathbb{R}^+$. Usando a linearidade da esperança matemática e o facto de $E(X_i) = E(X)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, por definição de amostra aleatória de X, tem-se

$$E(T_n) = E\left(\frac{4}{3}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{4}{3n}\,\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{4}{3n}\,nE(X) = \frac{4}{3}\,\frac{3}{4}\,\theta = \theta,$$

$\forall \theta > 0$, pelo que T_n é efetivamente um estimador cêntrico de θ.

(ii) Tendo em conta o estimador obtido na alínea anterior, uma estimativa cêntrica de θ obtida pelo método dos momentos com base na amostra observada é

$$t_{50} = \frac{4}{3}\,\overline{x} \simeq \frac{4}{3} \times 3.58 \simeq 4.773.$$

EXEMPLO 2 Num determinado período de funcionamento, o número de peças perfeitas produzidas por uma máquina até ser produzida uma peça defeituosa é descrito por uma variável aleatória discreta, X, de suporte $\mathbb{N}_0$ e tal que $P(X=x)=\theta\,(1-\theta)^x$, $x\in\mathbb{N}_0$, com $\theta\in]0,1[$, desconhecido. Nestas condições, tem-se $E(X)=\frac{1}{\theta}-1$.
Foi recolhida uma amostra de X, de dimensão 36, que forneceu uma média de 17.9 e um desvio padrão de 18.2.

a) Obtenha uma estimativa cêntrica da variância de X.

b) Com base nesta amostra, e usando o método dos momentos, determine uma estimativa para a probabilidade de serem produzidas 10 peças perfeitas até ser produzida uma defeituosa.

Resolução:

a) Uma estimativa cêntrica de $V(X)$ é a variância corrigida da amostra, $\hat{s}^2$. Como a dimensão da amostra é $n=36$ e o desvio padrão da amostra é $s=18.2$, tem-se $\hat{s}^2=\dfrac{n}{n-1}s^2=340.704$.

b) Pretende-se uma estimativa para $P(X=10)$ obtida pelo método dos momentos. Em primeiro lugar, é necessário escrever $P(X=10)$ em função de momentos de X.
Tem-se $P(X=10)=\theta\,(1-\theta)^{10}$ e

$E(X)=\dfrac{1}{\theta}-1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\theta}=E(X)+1 \Leftrightarrow \theta=\dfrac{1}{E(X)+1}$. Então

$$P(X=10)=\frac{1}{E(X)+1}\left(1-\frac{1}{E(X)+1}\right)^{10}.$$

Podemos assim concluir que uma estimativa para $P(X=10)$ obtida pelo método dos momentos é $\hat{p}=\dfrac{1}{\overline{x}+1}\left(1-\dfrac{1}{\overline{x}+1}\right)^{10}\simeq 0.0307$, tendo em conta que, segundo o enunciado, a média da amostra observada é $\overline{x}=17.9$.

Exemplo 3 Supõe-se que determinada v.a. X segue uma distribuição uniforme num intervalo da forma $]-\alpha,\alpha[$, sendo α um parâmetro real positivo desconhecido. Foi observada uma amostra de X de dimensão 50, $(x_1,\ldots,x_{50})$ para a qual se tem $\sum_{i=1}^{50} x_i = 5.21$ e $\sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 67.01$. Com base nesta amostra, determine uma estimativa para α, usando o método dos momentos.

NOTA: Se uma v.a. segue uma distribuição uniforme num intervalo $]a,b[$, então o seu valor médio é $\frac{a+b}{2}$ e a sua variância é $\frac{(b-a)^2}{12}$.

Resolução: Tem-se $E(X)=0$ e $V(X)=\dfrac{(\alpha-(-\alpha))^2}{12}=\dfrac{\alpha^2}{3}$. Então, como $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$, temos $E(X^2)=\dfrac{\alpha^2}{3}$. Uma vez que $E(X)$ não depende de α, não é possível escrever α em função de $E(X)$. No entanto, é possível escrever α em função de $E(X^2)$:

$$E(X^2)=\frac{\alpha^2}{3}\Leftrightarrow \alpha=\sqrt{3E(X^2)}.$$

Assim, uma estimativa para α obtida pelo método dos momentos é

$$\widehat{\alpha}=\sqrt{3\times\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}x_i^2}\simeq 2.005.$$

Ainda relativamente ao exercício anterior, poderíamos escrever:

$$\alpha = \sqrt{3E(X^2)} = \sqrt{3 \times \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} x_i^2} \simeq 2.005?$$

NÃO!! Porquê?

Exercício: Supõe-se que determinada v.a. X segue uma distribuição uniforme num intervalo da forma $]a, b[$, sendo a, b parâmetros reais, $a < b$, desconhecidos. Foi observada uma amostra de X de dimensão 40, $(x_1, \ldots, x_{40})$ que apresenta média 3.57 e variância 0.84. Com base nesta amostra, determine estimativas para a e b, usando o método dos momentos.