Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Análise Matemática III (Semestral)

Licenciatura em Engenharia Informática

Tabela 1

Transformada$-z$

$x_k\ (k \geq 0)$	$\mathcal{Z}\{x_k\} = X(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k}$	Região de convergência
$a^k \quad (a \in \mathbb{C}^*)$	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$k(k-1)\cdots(k-m+1)a^{k-m} \quad (m \in \mathbb{N}\,,\ a \in \mathbb{C}^*)$	$\frac{m!\,z}{(z-a)^{m+1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$k^m a^k \quad (m \in \mathbb{N}_0\,,\ a \in \mathbb{C}^*)$	$(-1)^m \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^m \left(\frac{z}{z-a}\right)$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$\delta_k(m) := \begin{cases} 1 & , \quad k = m \\ 0 & , \quad k \neq m \end{cases} \quad (m \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{1}{z^m}$	$\lvert z\rvert > 0$
$a^k \sin(k\omega) \quad (a \in \mathbb{C}^*\,,\ \omega \in \mathbb{R})$	$\frac{az\sin\omega}{z^2 - 2az\cos\omega + a^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$a^k \cos(k\omega) \quad (a \in \mathbb{C}^*\,,\ \omega \in \mathbb{R})$	$\frac{z(z-a\cos\omega)}{z^2 - 2az\cos\omega + a^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Nota: $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

- **Propriedades:**

$\mathcal{Z}\{x_k\} = X(z)\,,\ |z| > R_1\,; \quad \mathcal{Z}\{y_k\} = Y(z)\,,\ |z| > R_2\,; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}\,; \quad a \in \mathbb{C}^*\,; \quad m \in \mathbb{N}$

1. Linearidade: $\mathcal{Z}\{\alpha x_k + \beta y_k\} = \alpha X(z) + \beta Y(z)\,, \quad |z| > \max\{R_1, R_2\}$
2. Deslocamento à direita: $\mathcal{Z}\{x_{k-m}\} = \frac{1}{z^m}\,X(z)\,, \quad |z| > R_1 \quad$ [supondo $x_n = 0$ para $n < 0$]
3. Deslocamento à esquerda: $\mathcal{Z}\{x_{k+m}\} = z^m\,X(z) - \sum_{n=0}^{m-1} x_n z^{m-n}\,, \quad |z| > R_1$
4. Multiplicação por a^k: $\mathcal{Z}\left\{a^k x_k\right\} = X(z/a)\,, \quad |z| > |a|R_1$
5. Multiplicação por k^m: $\mathcal{Z}\left\{k^m x_k\right\} = \left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^m X(z)\,, \quad |z| > R_1$
6. Teorema do valor inicial: $x_0 = \lim_{|z|\to+\infty} X(z)$
7. Teorema do valor final: $\lim_{k\to+\infty} x_k = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z)$
8. Teorema da convolução: $\mathcal{Z}\left\{x_k * y_k\right\} = X(z)\,Y(z)\,, \quad |z| > \max\{R_1, R_2\} \quad \left[x_k * y_k := \sum_{n=0}^{k} x_{k-n} y_n\right]$
9. Fórmula de inversão: $x_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C(0,r)} X(z)\,z^{k-1}\,\mathrm{d}z \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)\,,\ r > R_1$

   [onde $C(0, r)$ contém todas as singularidades de $X(z)$ no seu interior]

Análise Matemática III (Semestral)

Licenciatura em Engenharia Informática

Tabela 2

Transformada de Laplace

$f(t)$ (função causal)	$\mathcal{L}\{f(t)\} \equiv F(s) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$	Região de convergência
$t^n H(t) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$\Re s > 0$
$e^{at}H(t) \quad (a \in \mathbb{C})$	$\dfrac{1}{s-a}$	$\Re s > \Re a$
$e^{kt}\sin(at)H(t) \quad (a, k \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{(s-k)^2+a^2}$	$\Re s > k$
$e^{kt}\cos(at)H(t) \quad (a, k \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s-k}{(s-k)^2+a^2}$	$\Re s > k$

[H é a função de Heaviside, $H(t) := \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ 1 & , \ t \geq 0 \end{cases}$]

- **Propriedades:**

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)\,,\ \Re s > \sigma_1\,; \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)\,,\ \Re s > \sigma_2\,; \quad a, \alpha, \beta \in \mathbb{C}\,, \quad k \in \mathbb{R}$

1. Linearidade: $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s)\,, \quad \Re s > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$
2. Deslocamento (translação): $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)\,, \quad \Re s > \sigma_1 + \Re a$
3. Derivada da transformada: $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \dfrac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}s^n} \quad (n = 1, 2, \cdots)\,, \quad \Re s > \sigma_1$
4. Transformada da derivada: $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$

   [supondo que f é de ordem exponencial e $f^{(n)}$ existe em $[0, +\infty[$]
5. Transformada de um integral: $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right\} = \dfrac{1}{s}F(s)$
6. Teorema de Heaviside: $\mathcal{L}\{f(t-k)H(t-k)\} = e^{-ks}F(s)\,, \quad \Re s > \sigma_1$

   [onde H é a função de Heaviside]
7. Teorema de convolução: $\mathcal{L}\{f * g(t)\} = F(s) \cdot G(s)\,, \quad \Re s > \sigma$

   [supondo que f e g são de ordem exponencial σ]
8. Fórmula de inversão: $f(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s \quad (t > 0)$

   [onde γ é um caminho fechado (orientado no sentido positivo) que contém as singularidades de F no seu interior, F função racional tal que $F(s) \to 0$ quando $|s| \to \infty$.]

- **Propriedades envolvendo a função impulso de Dirac:**

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta^{(n)}(t-a)\,\mathrm{d}t = (-1)^n f^{(n)}(a) \quad$ [supondo $f^{(n)}(t)$ contínua para $t = a$]
2. $\mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t-a)\} = s^n e^{-as}\,, \quad a \geq 0$
3. $H'(t-a) = \delta(t-a)\,, \quad a \in \mathbb{R}$

Análise Matemática III (Semestral)

Licenciatura em Engenharia Informática

Tabela 3

Transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\{f(t)\} \equiv F(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

• **Propriedades:**

$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)\,,\quad \mathcal{F}\{g(t)\} = G(\omega)\,,\quad \omega \in \mathbb{R}\,,\quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

1. Linearidade: $\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)\,.$
2. Transformada da derivada: $\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n F(\omega)$
3. Derivada da transformada: $\dfrac{\mathrm{d}^n F(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n} = (-i)^n \mathcal{F}\{t^n f(t)\}$
4. Deslocamento no tempo: $\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-i\omega t_0}\, F(\omega)\,.$
5. Deslocamento na frequência: $\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t} f(t)\} = F(\omega - \omega_0)\,.$
6. Teorema de inversão: $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \;\equiv \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$

   [supondo f contínua e f e F absolutamente integráveis]
7. Fórmula de simetria: $\mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi\, f(-\omega)$

   [sob as mesmas hipóteses do Teorema de inversão]
8. Teorema de convolução no tempo: $\mathcal{F}\,\{f * g(t)\} = F(\omega)\, G(\omega)$
9. Teorema de convolução na frequência: $\mathcal{F}\,\{f(t)g(t)\} = \frac{1}{2\pi}\, F * G(\omega)$

• **Transformadas de Fourier generalizadas:**

1. $\mathcal{F}\{\delta^{(n)}(t - t_0)\} = (i\omega)^n\, e^{-i\omega t_0}$
2. $\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
3. $\mathcal{F}\{H(t)\} = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
4. $\mathcal{F}\{t^n\} = 2\pi(-i)^n \delta^{(n)}(\omega)$
5. $\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi\,[\,\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\,]$
6. $\mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\} = i\pi\,[\,\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\,]$

[$t_0, \omega_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$; H é a função de Heaviside]