Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Licenciatura em Engenharia Informática e Licenciatura em Engenharia e Ciência de Dados

Ano letivo 2023/2024 Caderno de exercícios

I Matrizes e sistemas de equações lineares

1. Em cada alínea, escreva (por extenso) e classifique a matriz $A = [a_{ij}]$ do tipo $m \times n$ onde:

   (a) $m = 2$, $n = 3$ e $a_{ij} = i + 2j$;

   (b) $m = 3$, $n = 3$ e $a_{ij} = i - j$;

   (c) $m = 3$, $n = 4$ e $a_{ij} = (-1)^{i+j}$;

   (d) $m = n = 4$ e $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i > j \\ i - 2j, & i = j \\ 2j, & i < j \end{cases}$.

2. Calcule $2(A + B) - AB$, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Calcule, quando possível, os produtos AB e BA, para:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 5 & 5/2 & 5/3 \end{bmatrix}$

4. Verifique que $AB = AC$ e que $BD = CD$ para:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Sejam $A_{2\times 3}$, $B_{2\times 2}$, $C_{2\times 1}$ e $D_{3\times 2}$ quatro matrizes. Indique todas as ordens pelas quais o produto das quatro matrizes se pode efetuar.

6. Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, calcule *apenas* o pedido:

   (a) segunda linha de AB;

   (b) terceira coluna de AB;

   (c) segunda linha de A^2;

   (d) o elemento na posição (2,1) de A^3.

7. Sendo $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ duas matrizes do tipo $n \times n$,

   (a) escreva o elemento na posição (i, j) de $A^2 + B$;

   (b) escreva o elemento na posição (i, j) de $A - BA + 2I_n$.

8. Calcule:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2$; (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3$; (c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^5$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k$ $(k \in \mathbb{N})$;

(e) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^k$ $(k \in \mathbb{N})$; (f) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^k$ $(\theta \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})$; (g) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3$.

9. Considere as matrizes diagonais D_1 e D_2 e a matriz A

$$D_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \qquad D_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

O que observa relativamente às matrizes AD_1 e D_2A? Generalize.

10. Seja $A_{n\times n}$ a matriz diagonal cujos elementos diagonais são $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Qual é a matriz A^k?

11. Calcule todas as matrizes permutáveis com A, sendo:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

12. Em cada uma das alíneas dê exemplos de matrizes reais 2×2, sem nenhum elemento nulo, com a propriedade indicada.

(a) $A^2 = -I$

(b) $A^2 = 0$, sendo A não nula

(c) $AB = 0$

13. Calcule os produtos AB e BA nos seguintes casos:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

14. Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n. Prove que:

(a) se A é invertível, então a sua inversa é única;

(b) se A e B são ambas invertíveis, então a matriz produto AB também é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(c) se A é invertível e a sua inversa é A^{-1}, então A^k $(k \in \mathbb{N})$ é invertível e $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$;

(d) se A é invertível e C é uma matriz $n \times p$ tal que $AC = 0_{n\times p}$ ($0_{n\times p}$ a matriz nula $n \times p$), então $C = 0_{n\times p}$;

(e) se A é invertível e D é uma matriz $m \times n$ tal que $DA = 0_{m\times n}$, então $D = 0_{m\times n}$;

(f) se A é invertível e $AC = AD$ (C e D matrizes $n \times p$), então $C = D$;

(g) se A é invertível e $EA = FA$ (E e F matrizes $m \times n$), então $E = F$;

(h) se A é invertível e α é um número não nulo, então a matriz αA é invertível e

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}.$$

15. Mostre que as seguintes matrizes não são invertíveis.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

16. (a) Mostre que se uma matriz quadrada tiver uma linha (ou uma coluna) nula então não pode ser invertível.

(b) Mostre que se numa matriz quadrada uma linha (ou uma coluna) for múltipla de outra então a matriz não pode ser invertível.

17. (a) Mostre que a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ é invertível e a sua inversa é $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$.

(b) Calcule o produto $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}^{-1}$.

(c) Calcule $\begin{bmatrix} 29 & -12 \\ 70 & -29 \end{bmatrix}^{2021}$.

18. Suponha que A é uma matriz invertível e que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine X tal que: (a) $AX = 0_{3\times3}$; (b) $XA = 0_{2\times3}$; (c) $AX = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

19. Dê exemplos não triviais de matrizes do tipo 2×2 que sejam inversas de si próprias.

20. Prove que, se A comutar com uma matriz invertível B então A também comuta com B^{-1}.

21. (a) Seja A uma matriz quadrada para a qual existe um número natural k tal que $A^k = 0$ (matriz nula). Mostre que $I - A$ é invertível tendo-se

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}.$$

(b) Usando a alínea anterior, calcule $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$.

22. Considere as matrizes A, B e C tais que

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 10 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AC = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 8 & 0 \\ 14 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule $(AC)^T$, $B^T A^T$ e $(ACB^T)A^T$.

23. Sendo A quadrada, mostre que $A + A^T$ é simétrica. E $A - A^T$?

24. Seja A uma matriz $m\times n$. Prove que as matrizes $A^T A$ e AA^T são simétricas. Dê um exemplo que mostre que estes dois produtos podem ser diferentes, mesmo que A seja quadrada.

25. Sejam A $n\times n$ e S $n\times m$, com A simétrica. Mostre que $S^T AS$ é simétrica.

26. Mostre que a inversa de uma matriz simétrica invertível é também simétrica.

27. (a) Seja x uma matriz coluna. Mostre que se os elementos de x forem reais então $x^T x$ é não negativo e é zero se e só se $x = 0$.

    (b) Como sabe, o produto de duas matrizes não nulas pode ser a matriz nula. Prove que, se A for uma matriz $m \times n$ de elementos reais e $A^T A = 0$ então $A = 0$.

28. Uma matriz quadrada diz-se ortogonal se for invertível e a sua inversa coincidir com a sua transposta. Verifique que as seguintes matrizes reais são ortogonais:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \ (\theta \in \mathbb{R}).$$

    (Observação: É possível mostrar que uma matriz ortogonal real 2×2 possui necessariamente uma das duas formas anteriores.)

29. Mostre que toda a matriz de permutação é ortogonal.

30. Seja A uma matriz $n \times n$ e designemos por $v_1, v_2, ..., v_n$ as respetivas colunas. Mostre que A é ortogonal se e só se, para $i, j = 1, 2, ..., n$, se tem $v_i^T v_j = \delta_{ij}$.

31. Seja A uma matriz 3×3 qualquer e seja $E_{21}(3)$ uma matriz elementar definida por

$$E_{21}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

    (a) Efetue os produtos $E_{21}(3)A$ e $AE_{21}(3)$. O que observa relativamente às linhas de $E_{21}(3)A$ e às colunas de $AE_{21}(3)$?

    (b) Repita a alínea anterior usando $E_{32}(4)$ em vez de $E_{21}(3)$.

    (c) Generalize as observações efetuadas.

32. Que mudança se dá no produto AB se:

    (a) trocarmos as linhas i e j de A? Efetuarmos uma permutação nas linhas de A?

    (b) trocarmos as colunas i e j de B? Efetuarmos uma permutação nas colunas de B?

33. Que mudança se dá na matriz A se for multiplicada à esquerda por uma matriz de permutação? E se a multiplicação for efetuada à direita?

34. Para cada um dos seguintes pares de matrizes, indique uma matriz elementar E tal que $EA = B$.

    (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

35. Para cada um dos seguintes pares de matrizes, indique uma matriz elementar E tal que $AE = B$.

    (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

36. Seja E a matriz elementar 4×4 tal que EA resulta na adição da primeira linha à terceira linha da matriz A.

    (a) Qual é o resultado de E^{50}?

    (b) Escreva por extenso as matrizes E, E^{50} e $50E$.

37. Calcule A^{-1}, para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

38. Que mudança se dá em A^{-1} se em A

(a) trocarmos as linhas (colunas) i e j de A? (Generalize para o caso em que se faz uma permutação qualquer às linhas (colunas) de A.)

(b) multiplicarmos a linha (coluna) i de A por um número $\alpha \neq 0$?

(c) à linha (coluna) i adicionarmos a linha (coluna) j multiplicada por um número α?

39. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições.

(a) Se o produto AB está definido, então o produto BA também está definido.

(b) A soma de duas matrizes invertíveis é uma matriz invertível.

(c) O produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica.

(d) Se uma matriz A é invertível, então os elementos diagonais de A são todos não nulos.

40. Efetue os seguintes produtos de matrizes

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

41. Usando o exercício anterior indique um sistema de equações lineares

(a) com três equações e três incógnitas que tenha $[-2 \quad 1 \quad -1]^T$ como solução;

(b) com duas equações e três incógnitas que tenha $[1 \quad -1 \quad 0]^T$ como solução;

(c) com três equações e três incógnitas que tenha $[1 \quad 1 \quad 1]^T$ como solução;

(d) com três equações e duas incógnitas que tenha $[1 \quad 2]^T$ como solução.

42. Resolva os seguintes sistemas, quando possíveis, usando o método de eliminação. Registe os pivots utilizados e as operações que efetuou com as equações.

(a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ 6x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 14 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 = 0 \\ -6x_1 - 10x_2 - 14x_3 = -2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ -x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 40 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 30 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 33 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 23 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 30 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 23 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 30 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 + x_4 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$ (j) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 & = & 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 & = & -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 & = & 4 \end{cases}$ (l) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 3x_4 & = & 0 \end{cases}$

43. No sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 6x + 4y = \end{cases}$$

escolha, se possível, o número que falta de modo a que:

(a) não existam soluções; (b) exista uma única solução; (c) existam várias soluções.

44. Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x + ay = 13 \\ 4x + 8y = b \end{cases}$$

(a) Escolha o parâmetro a tal que a matriz dos coeficientes do sistema seja singular.

(b) Para o valor de a escolhido, escolha o parâmetro b de modo que o sistema seja possível.

45. Considere o seguinte sistema de equações onde β é um parâmetro real.

$$\begin{cases} x + \beta y + \beta z = 0 \\ \beta x + y + z = 0 \\ x + y + \beta z = \beta^2 \end{cases}$$

(a) Classifique o sistema para todos os valores reais de β.

(b) Considere o sistema homogéneo associado a $\beta = 0$ e determine as soluções do sistema.

46. Determine a relação entre a, b e c de modo que o seguinte sistema só tenha uma variável livre.

$$\begin{cases} ax_1 & +bx_2 & & = & c \\ & bx_2 & -x_3 & = & 1 \\ x_1 & & +x_3 & = & 2 \end{cases}$$

47. Determine a e b de forma que o seguinte sistema seja possível e determine a sua solução.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 & = & 16 \\ 5x_1 - 2x_2 & = & 4 \\ 3x_1 + ax_2 & = & 9 \\ 4x_1 + bx_2 & = & -7 \end{cases}$$

48. Seja A uma matriz e b e b' matrizes coluna do mesmo tipo. Se o sistema $Ax = b$ tem uma infinidade de soluções,

(a) pode o sistema $Ax = b'$ ter apenas uma solução?

(b) pode o sistema $Ax = b'$ não ter soluções?

49. Uma parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos $(1, 4)$, $(2, 8)$ e $(3, 14)$. Quais são os parâmetros a, b e c?

50. Para cada uma das seguintes matrizes A, escreva a solução geral do sistema $Ax = 0$ como combinação linear de um número de matrizes coluna tão pequeno quanto possível.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

51. Para as matrizes das alíneas (c), (d) e (e) do exercício 50, diga quais as matrizes coluna b para as quais o sistema $Ax = b$ é possível e para essas matrizes escreva a solução geral do sistema.

52. Para cada um dos seguintes sistemas, escreva a solução geral como soma de uma solução particular, caso exista, com a solução geral do sistema homogéneo correspondente.

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$

53. Calcule as inversas das seguintes matrizes, utilizando o algoritmo de Gauss-Jordan.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

54. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições.

(a) Um sistema de equações lineares pode ter exatamente duas soluções.

(b) Se b é uma coluna de A, então o sistema $Ax = b$ é possível.

(c) Se um sistema $Ax = b$ é possível determinado, então o sistema $Ax = b'$ também é possível determinado para qualquer b'.

II Determinantes

55. Calcule os seguintes determinantes.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

(j) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (k) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix}$ (l) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ (m) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

(n) $\begin{vmatrix} 0 & i & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \\ 1+i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \end{vmatrix}$ (o) $\begin{vmatrix} x & y & 1 & x+y \\ y & x+y & 0 & x \\ x+y & x & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (p) $\begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

56. Sabendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12$, calcule os seguintes determinantes.

(a) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 40 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 18 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 10 \end{vmatrix}$

57. Utilize propriedades dos determinantes para provar que:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0;$ (b) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix} = 0.$

58. Sendo A uma matriz $n \times n$, indique a relação existente entre $\det(A)$ e

(a) $\det(2A)$; (b) $\det(-A)$; (c) $\det(A^2)$; (d) $\det(E_{ij}(\alpha)A)$; (e) $\det(P_{ij}A)$.

59. Calcule os determinantes das matrizes do exercício 53, bem como os das respetivas matrizes inversas. Que relação existe entre o determinante de cada matriz e o determinante da sua matriz inversa?

60. Calcule os determinantes das matrizes ortogonais referidas no exercício 28.

61. Mostre que se a matriz quadrada A é ortogonal, então $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$.

62. Calcule os valores de λ que anulam cada um dos seguintes determinantes.

(a) $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda & 0 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 5 & -\lambda \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

63. Considere a matriz real

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & \mu & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \mu & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

com $\mu \in \mathbb{R}$. Determine os valores do parâmetro real μ para os quais a matriz C tem caraterística igual a quatro.

64. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Diga para que valores do parâmetro real α a matriz A é invertível.

65. Dê exemplos de matrizes A e B que verificam $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

66. Seja A uma matriz de ordem n tal que $A = -A^T$. Mostre que se n for ímpar, então $\det(A) = 0$. O que se passa se n for par?

67. Duas matrizes A e B dizem-se **semelhantes** se existir T invertível tal que $A = TBT^{-1}$. Prove que se A e B forem semelhantes então $\det(A) = \det(B)$.

68. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem 3. Supondo que A é invertível e $\det B = 3$, calcule o determinante da matriz $\frac{1}{3}P_{23}A^{-1}B^2A$.

69. Usando a Regra de Cramer resolva os seguintes sistemas de equações.

(a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ -x - y + 3z = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 3x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + 2t = 1 \\ x + y - 2z - t = -3 \\ 3x - y + 5z = 5 \end{cases}$

70. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições.

    (a) O determinante de $I + A$ é $1 + \det(A)$.
    (b) O determinante de A é o produto dos seus pivots.
    (c) Se A não é invertível, então AB não é invertível.

III Espaço $\mathbb{R}^n$ e seus subespaços

71. Diga quais dos seguintes subconjuntos são subespaços de $\mathbb{R}^4$.

    (a) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \; x_1 + x_2 = 0 \;\text{ e }\; x_3 = x_4\}$
    (b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \; x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e x_4 é um inteiro não nulo$\}$
    (c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \; x_2 = 0\}$
    (d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\}$
    (e) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \; x_1 x_2 = 0 \;\text{ e }\; x_3 = x_4 = 0\}$
    (f) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \; x_1^2 = x_3^2\}$

72. (a) Mostre que o plano de equação $x + y - 2z = 4$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.
    (b) Qual é a equação do plano de $\mathbb{R}^3$ que é paralelo ao da alínea anterior e que passa na origem?
    (c) Mostre que o plano da alínea b) é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

73. Considere os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ $\;M = \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ e $N = \{(\alpha, 2\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

    (a) Descreva-os geometricamente.
    (b) Prove que M e N são subespaços de $\mathbb{R}^2$.
    (c) Determine $M \cup N$ e $M \cap N$ e diga se são subespaços de $\mathbb{R}^2$.

74. (a) Prove que a interseção de dois (ou mais) subespaços de $\mathbb{R}^n$ é ainda um subespaço de $\mathbb{R}^n$.
    (b) Prove que a reunião de dois subespaços de $\mathbb{R}^n$ só é um subespaço se um deles contiver o outro.

75. Diga quais dos seguintes subconjuntos são subespaços de $\mathbb{R}^n$.

    (a) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$
    (b) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 x_2 = 0\}$

76. Sejam $A_{m\times n}$ e $B_{p\times m}$ duas matrizes reais quaisquer. Prove que:

    (a) O espaço nulo de A está contido no espaço nulo de BA.
    (b) O espaço nulo de A coincide com o de A^TA. (Sugestão: dado $y \in \mathbb{R}^n$, se $y^Ty = 0$, então $y = 0$.)

77. Designe-se por v_j a coluna j de $A_{m\times n}$, $j = 1, \ldots, n$. Dada a matriz-coluna $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, verifique que $Ax = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$.

78. Escreva o vetor $(2, -3)$ de $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores seguintes, identificando-o com um produto de matrizes (ver exercício 77).
    (a) $(1, 0)$ e $(0, 1)$ (b) $(1, 1)$ e $(1, 2)$ (c) $(0, 1)$ e $(2, -3)$

79. Diga se o vetor $(1, 3, 1)$ pertence ao subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $(1, 1, 0)$ e $(1, 1, 1)$.

80. (a) Para que vetores $[b_1\ b_2\ b_3]^T$ o sistema seguinte tem solução?

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

(b) Diga se o vetor $(2,5,-3)$ pertence ao subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $(1,4,-2)$ e $(-2,1,3)$.

81. Considere os seguintes vetores de $\mathbb{R}^4$:

$$a = (1,-1,1,-1), \quad b = (1,2,3,4), \quad c = (2,1,0,3), \quad d = (0,-3,-2,-5).$$

Seja F o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por a e b. Diga se c e d são elementos de F.

82. Determine α e β de modo que o vetor $(1,1,\alpha,\beta)$ pertença ao subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1,0,2,1)$ e $(1,-1,2,2)$.

83. Descreva geometricamente o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por:

(a) $(0,0,0),\ (0,1,0),\ (0,2,0)$;

(b) $(0,0,1),\ (0,1,1),\ (0,2,1)$;

(c) os 6 vetores indicados em (a) e (b);

(d) os vetores de (c) e ainda o vetor $(1,0,0)$.

84. Indique um conjunto gerador para cada um dos subespaços de $\mathbb{R}^4$ encontrados no exercício 71.

85. (a) Escreva o vetor nulo de $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores $(2,-3)$ e $(-4,6)$ de várias maneiras diferentes.

(b) Pode o vetor nulo de $\mathbb{R}^2$ escrever-se como combinação linear dos vetores $(2,-3)$ e $(4,6)$ em mais do que uma maneira?

86. Diga quais dos seguintes conjuntos de vetores de $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes e em caso de dependência escreva um dos vetores como combinação linear dos outros.

(a) $\{(1,-2,3),(3,-6,9)\}$

(b) $\{(1,-2,-3),(3,2,1)\}$

(c) $\{(0,1,-2),(1,-1,1),(1,2,1)\}$

(d) $\{(0,2,-4),(1,-2,-1),(1,-4,3)\}$

(e) $\{(1,-1,-1),(2,3,1),(-1,4,-2),(3,1,2)\}$

87. Considere os vetores de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1,0,1,0),\ v_2 = (1,-1,1,-1),\ v_3 = (-2,0,1,2),\ v_4 = (3,-1,3,-1).$$

(a) Mostre que $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ é linearmente independente.

(b) Mostre que $\{v_1,v_2,v_4\}$ é linearmente dependente.

88. Indique o maior número de vetores linearmente independentes entre

$v_1 = (1,-1,0,0)$, $\quad v_2 = (1,0,-1,0)$, $\quad v_3 = (1,0,0,-1)$,

$v_4 = (0,1,-1,0)$, $\quad v_5 = (0,1,0,-1)$, $\quad v_6 = (0,0,1,-1)$.

89. Discuta segundo os valores de μ a dependência ou independência linear dos vetores de $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1,-2,-5,8),\ v_2 = (-1,1,1,5),\ v_3 = (1,2,11,\mu).$$

90. Diga para que valores de α, β e γ, o conjunto $\{(0,\gamma,-\beta),\ (-\gamma,0,\alpha),\ (\beta,-\alpha,0)\}$ é linearmente independente.

91. Mostre que qualquer conjunto de três vetores de $\mathbb{R}^2$ é linearmente dependente.

92. Seja $\{v_1,v_2,v_3\}$ um conjunto de vetores linearmente independente em $\mathbb{R}^n$. Diga se é linearmente independente cada um dos seguintes conjuntos de vetores.

(a) $\{v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3\}$

(b) $\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_3+v_1\}$

(c) $\{v_1-v_2, v_2-v_3, v_3-v_1\}$

93. Para cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, prove que se trata de um subespaço, determine a dimensão e indique uma base.

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = -z\}$

(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$

(d) $\{(x + y, x + y, 2x + 2y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

(e) $\{(x + y, x - y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

94. Para cada um dos subespaços de $\mathbb{R}^4$ encontrados no exercício 71, determine a dimensão e indique uma base.

95. Para cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, prove que se trata de um subespaço, determine a dimensão e indique uma base.

(a) O conjunto dos vetores com a primeira e a última coordenadas iguais.

(b) O conjunto dos vetores cujas coordenadas de índice par são nulas.

(c) O conjunto dos vetores cujas coordenadas de índice par são todas iguais.

(d) O conjunto dos vetores da forma $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta, ...)$.

96. Indique uma base de $\mathbb{R}^2$ que contenha o vetor $v_1 = (1, 2)$.

97. Indique uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores $v_1 = (1, 0, 1, 0)$ e $v_2 = (0, -1, 2, 1)$.

98. Determine a dimensão e indique duas bases diferentes para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $(1, 2, 3), (4, 5, 6)$ e $(7, 8, 9)$.

99. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_3 \text{ e } x_4 = 2x_2\}$ e $G = \text{ger}\{(1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 1), (-1, 2, -1, 1)\}$.

Determine a dimensão e indique uma base para F, G e $F \cap G$.

100. Considere $v_1 = (1, \alpha, 1)$, $v_2 = (1, \alpha - 1, 1)$, $v_3 = (1, \alpha + 1, 1)$, $v_4 = (\alpha, 1, 1)$. Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais o subespaço gerado por estes quatro vetores de $\mathbb{R}^3$ tenha dimensão 2.

101. Considere os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (2, -3, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2)$ e $v_3 = (1, 1, -2)$.

(a) Mostre que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine as coordenadas do vetor $(3, -3, -3)$ relativamente a essa base.

102. Determine a caraterística e o espaço nulo das matrizes $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

103. Qual é a dimensão do espaço das colunas da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$?

104. Para cada uma das matrizes do exercício I.50:

i. indique a caraterística e a nulidade;

ii. determine uma base para o espaço das linhas e uma base para o espaço das colunas.

105. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 2 \\ \alpha & -1 & 3\alpha - 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, onde α é um parâmetro real. Determine para que valores de α a caraterística de A é, respetivamente, $1, 2$ e 3. Em cada caso, determine bases para o espaço das colunas e para o espaço nulo de A.

106. O mesmo que no exercício anterior para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$.

107. Construa uma matriz cujo espaço nulo seja gerado pelo vetor $(1, 0, 1)$.

108. Existirá uma matriz cujo espaço das linhas contenha o vetor $(1, 1, 1)$ e cujo espaço nulo contenha o vetor $(1, 0, 0)$?

109. Se A é uma matriz real invertível 5×5, qual é o seu espaço das colunas?

110. (a) Construa uma matriz 2×2 cujo espaço nulo coincida com o espaço das colunas.
    (b) Porque é que não existe uma matriz 3×3 com a propriedade anterior?

111. Se A for uma matriz 64×17 com caraterística 11, quantos vetores linearmente independentes satisfazem $Ax = 0$? E quantos vetores linearmente independentes satisfazem $A^T y = 0$?

112. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições.

    (a) Seja $A_{m \times n}$. Os vetores b de $\mathbb{R}^n$ que não pertencem a $C(A)$ formam um espaço vetorial.
    (b) Se $C(A)$ contém apenas o vetor nulo, então A é a matriz nula.
    (c) O espaço das colunas de $2A$ coincide com o espaço das colunas de A.
    (d) Se as colunas de A são linearmente dependentes, então as linhas de A também são.
    (e) As colunas de A constituem uma base de $C(A)$.

IV Transformações lineares

113. Diga se cada uma das seguintes aplicações é ou não linear.

(a) $T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x+1, y) \end{array}$

(b) $T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y^2) \end{array}$

(c) $T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x, y+z) \end{array}$

(d) $T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x-y, 1, x) \end{array}$

(e) $T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, 3x-y+z, 0) \end{array}$

(f) $T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x-y, y-z, z-x) \end{array}$

114. Sejam T e P as aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ definidas por $T(x, y) = (y, x)$ e $P(x, y) = (x, 0)$.
    (a) Prove que T e P são lineares.
    (b) Descreva T e P geometricamente.

115. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(1, 0, 0) = (1, 3),\ T(0, 1, 0) = (3, 1) \text{ e } T(0, 0, 1) = (1, -1).$$

(a) Determine $T(1, 2, 3)$.
(b) Determine os vetores x de $\mathbb{R}^3$ tais que $T(x) = (1, 2)$.

116. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(1, 1, 1) = (1, 2),\ T(1, 1, 0) = (2, 1) \text{ e } T(1, 0, 0) = (1, -1).$$

Determine $T(1, -1, 1)$ e $T(-1, 1, -1)$.

117. Diga, justificando, se existe alguma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1, 1) = (1, 0),\ T(2, -1) = (0, 1) \text{ e } T(8, -5) = (4, 7).$$

118. Uma função f de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ é definida por $f(x) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 - x_3)$.
   (a) Prove que f é uma aplicação linear.
   (b) Determine o núcleo de f e a respetiva dimensão. A aplicação f é injetiva?
   (c) Determine $Im(f)$ e a respetiva dimensão. A aplicação f é sobrejetiva?

119. Considere a aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x, y - z, x)$.
   (a) Determine o núcleo de T.
   (b) A aplicação T é injetiva? Porquê ?

120. Determine a matriz que representa as seguintes aplicações lineares, em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$.
   (a) A aplicação $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $g(x, y) = (x + y, 0, 0)$.
   (b) A aplicação $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (-y, x)$.
   (c) Para $\lambda \in \mathbb{R}$, a aplicação $g_\lambda : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $g_\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

121. Calcule a imagem do vetor $(1, -2, 1)$ pela aplicação linear representada, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$, pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

122. Escreva a matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (2x - y - z, 2y - x - z, 2z - x - y),$$

relativamente à base canónica.

123. Descreva geometricamente a transformação linear T de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ definida, relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$, por cada uma das seguintes matrizes.
   (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$;
   (e) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

124. Para cada uma das seguintes transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, determine a matriz A que a representa relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$.
   (a) a rotação de centro na origem e amplitude $\frac{\pi}{3}$.
   (b) a reflexão ortogonal relativamente à reta $y = x$.
   (c) a simetria central relativamente à origem.
   (d) a projeção ortogonal sobre o eixo dos yy.

V Produto interno em $\mathbb{R}^n$

125. (a) Mostre que $\langle 0, v\rangle = 0$, para todo o $v \in \mathbb{R}^n$.
   (b) Mostre que, se $\langle u, v\rangle = 0$, para todo o $v \in \mathbb{R}^n$, então $u = 0$.
   (c) Mostre que, se $\langle u, v\rangle = \langle u', v\rangle$, para todo o $v \in \mathbb{R}^n$, então $u = u'$.

126. Se os vetores $v_1, v_2, ..., v_k$ forem ortogonais, mostre que, quaisquer que sejam os números reais $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, os vetores $\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, ..., \alpha_k v_k$ são também ortogonais.

127. Prove que, se um vetor w for ortogonal a cada um dos vetores $v_1, v_2, ..., v_k$ também é ortogonal a qualquer combinação linear deles.

128. No espaço $\mathbb{R}^3$, considere os vetores $u = (1, 2, 3)$ e $v = (-3, 0, 1)$.
   (a) Verifique que u e v são ortogonais.
   (b) Calcule as normas de u e de v.
   (c) Escreva os vetores $\frac{u}{\|u\|}$ e $\frac{v}{\|v\|}$.

129. Sejam $x = (1, -1, 1, -1)$ e $y = (1, 0, 0, 0)$.
   (a) Calcule o ângulo entre x e y.
   (b) Calcule a projeção ortogonal de x sobre y.

130. Seja A uma matriz real $n \times n$. Prove que A é simétrica se e só se $< Ax, y >=< x, Ay >$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$. O que acontece se A é antisimétrica?

131. Prove que uma base $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ é ortonormada se e só se a matriz cujas colunas são $u_1, u_2, \ldots, u_n$ for ortogonal.

132. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Demonstre os seguintes resultados.
   (a) Se x e y forem ortogonais, então $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Teorema de Pitágoras).
   (b) Se $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, então x e y são ortogonais.
   (c) Se $\|x\| = \|y\|$, então os vetores $x + y$ e $x - y$ são ortogonais.
   (d) Se x e y forem ortogonais então $\|x + y\| = \|x - y\|$.

   Interprete geometricamente em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, as alíneas (c) e (d).

133. (a) Mostre que, se Q $n \times n$ for ortogonal, então $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$, para quaisquer vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$.
   (b) Conclua que uma matriz $n \times n$ ortogonal não altera os ângulos entre vetores de $\mathbb{R}^n$.

134. Que múltiplo de $v_1 = (1, 1)$ devemos subtrair de $v_2 = (4, 0)$ para que o resultado seja ortogonal a v_1? Interprete geometricamente.

135. Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, obtenha uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ a partir da base constituída pelos vetores $(1, 0, 1)$, $(1, 0, -1)$, $(0, 3, 4)$.

136. Seja F o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $(1, 1, -1)$, $(-2, 1, 5)$ e $(0, 3, 3)$. Determine a dimensão de F e indique uma base ortonormada para F.

137. Indique dois vetores de $\mathbb{R}^3$ que sejam ortogonais entre si e a $(1, 1, 1)$.

138. Projete o vetor $b = (1, 3, 2)$ sobre os vetores (não ortogonais) $v_1 = (1, 0, 0)$ e $v_2 = (1, 1, 0)$. Mostre que, ao contrário do caso ortogonal, a soma das duas projeções não é igual à projeção ortogonal de b sobre o subespaço gerado por v_1 e v_2.

139. Calcule a projeção ortogonal do vetor $(2, -2, 1)$ sobre o plano gerado pelos vetores $(1, 1, 1)$ e $(0, 1, 3)$.

140. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ determine a solução no sentido dos mínimos quadrados de $Ax = b$ por dois processos:
   (a) Calculando a projeção ortogonal p de b sobre $C(A)$ e depois resolvendo $Ax = p$.
   (b) Resolvendo o sistema $A^T Ax = A^T b$.

141. (a) Determine a solução no sentido dos mínimos quadrados do sistema $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$

(b) Designando por A a matriz do sistema, por b o vetor dos segundos membros, e por $\overline{x}$ a solução encontrada, determine a projeção $p = A\overline{x}$ de b sobre o espaço das colunas de A.

(c) Calcule o erro $\|A\overline{x} - b\|$.

(d) Verifique que $b - p$ é perpendicular às colunas de A.

142. Mesmo exercício para o sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 = 2. \end{cases}$

143. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine uma base para o espaço das colunas de A.
   (b) Calcule a projeção ortogonal de $b = (0, 1, 3)$ sobre $C(A)$.
   (c) Usando a alínea anterior, determine a solução no sentido dos mínimos quadrados do sistema $Ax = b$.

144. O sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$ é impossível. Verifique que a solução no sentido dos mínimos quadrados desse sistema não é única. Seria de esperar? Porquê?

145. Determine todas as soluções no sentido dos mínimos quadrados do sistema $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

146. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

   (a) Determine uma base ortonormada para o espaço das colunas de A.
   (b) Calcule a projeção ortogonal de $b = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}^T$ sobre esse espaço.
   (c) O que pode concluir do resultado da alínea anterior sobre o sistema $Ax = b$? (Não resolva o sistema.)

147. Determine a solução no sentido dos mínimos quadrados do sistema (com m equações e uma incógnita) $x = \beta_1$, $x = \beta_2$, ..., $x = \beta_m$. Comente.

148. Determine a linha reta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos seguintes pontos (e represente graficamente).

   (a) $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(3, 12)$
   (b) $(-1, 2)$, $(1, -3)$, $(2, -5)$, $(0, 0)$

149. (a) Determine uma base ortogonal para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $(1, 1, 1)$ e $(0, 3, 6)$.
   (b) Calcule a projeção ortogonal do vetor $(1, 4, 5)$ sobre o subespaço da alínea (a).
   (c) Usando o resultado da alínea anterior, determine a linha reta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos pontos $(0, 1)$, $(3, 4)$, $(6, 5)$. Represente graficamente.

150. Deduza uma fórmula geral para o cálculo do declive e da ordenada na origem da reta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos pontos $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_m, \beta_m)$.

151. Dado um conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ podemos procurar, em vez de uma reta, outras curvas para se ajustarem a esses pontos. Por exemplo, dado os pontos (0,3), (1,2), (2,4), (3,4), determine o polinómio do segundo grau cujo gráfico melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, a esses pontos. Faça uma figura, e compare a curva obtida com a reta de melhor ajuste.

152. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições.

(a) Em $\mathbb{R}^3$, se u é perpendicular a v e w, então v e w são paralelos.

(b) Um espaço vetorial tem uma única base ortonormada.

(c) Se dois vetores v_1 e v_2 são ortogonais, então $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente.

(d) Se $\overline{x}$ é a solução no sentido dos mínimos quadrados de $Ax = b$, então $b - A\overline{x}$ é ortogonal ao espaço das colunas de A.

VI Valores próprios e vetores próprios

153. Calcule os valores próprios e os respetivos espaços próprios de cada uma das seguintes matrizes (indicando uma base para os espaços próprios).

(a) $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

154. Sabe-se que matrizes semelhantes têm os mesmos valores próprios. Verifique que a recíproca não é verdadeira através das matrizes

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

155. (a) Determine os valores e os vetores próprios da matriz $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Generalize para uma matriz diagonal qualquer.

156. Determine os vetores próprios das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$ (estude os casos $\alpha = \beta$ e $\alpha \neq \beta$).

157. Prove que uma matriz quadrada é singular se e só se 0 for valor próprio dela.

158. Dê exemplos que mostrem que os valores próprios de uma matriz podem mudar

(a) quando se subtrai a uma linha um múltiplo de outra linha;

(b) quando se trocam entre si duas linhas da matriz.

Observação: Deste exercício conclui-se que para calcular os valores próprios de uma matriz A não se pode aplicar o método de eliminação à matriz A.

159. Suponhamos que A tem os valores próprios $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Prove que, então, $\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2$ são valores próprios de A^2 e que qualquer vetor próprio de A é também vetor próprio de A^2. Generalize para qualquer potência de A.

160. Diga se cada uma das matrizes do exercício 153 é ou não diagonalizável, e em caso afirmativo determine uma matriz diagonalizante.

161. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine os valores próprios de A.

(b) Determine um vetor próprio de A, associado ao valor próprio 0.

(c) Diga se A é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique duas matrizes diagonalizantes diferentes.

162. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine os valores próprios de A.

(b) Diga se A é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique duas matrizes diagonalizantes diferentes.

(c) Mesmo exercício para a matriz B.

163. Uma matriz quadrada de ordem 2 real A tem valores próprios 3 e 5, e a eles estão associados, respetivamente, os vetores próprios $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ e $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$. Prove que A é simétrica.

164. Seja A uma matriz real de ordem três tal que

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Indique os valores próprios de A.

(b) Indique, se existir, uma matriz diagonal semelhante a A.

(c) Determine, explicitamente, uma matriz A nas condições do enunciado.

165. Calcule $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{2021}$.

166. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule os valores próprios de A.

(b) Sem calcular os vetores próprios de A, mostre que A não é diagonalizável.

167. Determine a solução geral dos seguintes sistemas lineares de equações diferenciais.

(a) $\begin{cases} f'(t) = 4f(t) - 2g(t) \\ g'(t) = f(t) + g(t) \end{cases}$

(b) $\begin{cases} f'(t) = f(t) + h(t) \\ g'(t) = g(t) \\ h'(t) = f(t) + h(t) \end{cases}$

(c) $\begin{cases} f'(t) = f(t) - g(t) + h(t) \\ g'(t) = -f(t) + g(t) - h(t) \\ h'(t) = f(t) - g(t) + h(t) \end{cases}$

168. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições.

(a) Os valores próprios de uma matriz triangular superior são os elementos da sua diagonal.

(b) Dois vetores próprios associados a valores próprios distintos são ortogonais.

(c) Os valores próprios de A e A^T coincidem.

(d) Uma matriz ortogonal pode ter 0 como valor próprio.

(e) Uma matriz 3×3 com valores próprios 2, 2, 5 é diagonalizável.