Funções – Stewart §1.5 e §1.6

1. Determine o domínio das seguintes expressões na variável x:

   (a) $\ln(4-|x|)$;

   (b) $\dfrac{x^5-1}{x^3+3x^2-4}$;

   (c) $\dfrac{1}{x^2+1-|2x|}$;

   (d) $\dfrac{\sqrt{x+1}-2x}{x^2-3}$;

   (e) $\sqrt{2-|x-3|}$;

   (f) $\sqrt{\dfrac{x-3}{1-x}}$;

   (g) $\sqrt{x^3+3x^2-4}$;

   (h) $\sqrt{\dfrac{4-x^2}{x^2-3x}}$;

   (i) $\sqrt{|x^3-2x|+x}$;

   (j) $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)$;

   (k) $\ln(\sin(x)-\cos(x))$;

   (l) $\left(\dfrac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}\right)^x$.

2. Indique quais das funções seguintes, dadas pelas expressões e domínios indicados, são injetivas e quais não são:

   (a) $\sqrt{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$;

   (b) $x^2, \quad x \in \left]-2, \tfrac{1}{2}\right[$;

   (c) $x^2, \quad x \in [1,2]$;

   (d) $\sin(x), \quad x \in \left]0, \tfrac{5\pi}{4}\right]$;

   (e) $\sin(x), \quad x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$;

   (f) $\cos(x), \quad x \in \left]-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}\right[$.

3. Indique o valor lógico das seguintes afirmações. Para as que são falsas, dê um contraexemplo.

   (a) Se f e g forem injetivas, então $f+g$ é injetiva.

   (b) Se f não for injetiva, então fg não é injetiva.

   (c) Se $f(x)$ não for injetiva então $f(e^x)$ não é injetiva.

4. Calcule:

   (a) $\arcsin(\cos(-5))$;

   (b) $\arctan(\cot(3))$;

   (c) $\sin(\arccos(4/5))$;

   (d) $\cos(\arcsin(12/13))$;

   (e) $\sin(\arctan(2))$;

   (f) $\arccos(2\cos(3)\sin(3))$;

   (g) $\cos\left(2\arccos(5/13)\right)$;

   (h) $\sin\left(\tfrac{1}{2}\arccos(3/5)\right)$.

5. Indique o valor lógico das seguintes afirmações. Para as que são falsas, dê um contraexemplo.

   (a) Se $|x| \leqslant 1$ então $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$.

   (b) Se $|x| \leqslant 1/2$ então $\arcsin(2x) = 2\arcsin(x)$.

   (c) Se $|x| \leqslant 1$ então $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$.

   (d) Se $|x| \leqslant 1$ então $\sin(2\arcsin(x)) = 2x$.

6. Determine o domínio das seguintes expressões na variável x:

   (a) $\arccos(|x-1|-1)$;

   (b) $\arcsin\left(\frac{3x+2}{x+1}\right)$;

   (c) $\arccos\left(\frac{3-x^2}{x^2-1}\right)$;

   (d) $\sqrt{\pi/2 - \arccos(x^2)}$;

   (e) $\dfrac{\arcsin(x)}{\arcsin(2x)}$;

   (f) $\ln(\arcsin(x^2-1))$.

Limites – Stewart §2.2, §2.3, §2.4 e §2.6

7. Determine o conjunto dos pontos de acumulação dos seguintes conjuntos.

   (a) $[1,2[\cup]2,3[$;

   (b) $]1,2] \cup \{3\}$;

   (c) $]-\infty,-1[$;

   (d) $\{-1,0,2\}$;

   (e) $\{1/n : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$;

   (f) $\{0,1\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$;

   (g) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;

   (h) $\mathbb{R}^+ \setminus \left\{\frac{2}{k} : k \in \mathbb{Z}\right\}$;

8. Estude o limite das seguintes funções no ponto (ou pontos) indicado(s).

   (a) $\dfrac{|x|-x}{2x}, \quad x = 0$;

   (b) $\dfrac{1}{1-x^4}, \quad x = 1$;

   (c) $(x^3 - 4x^2 + 5x - 2)^{-1}, \quad x = 1$;

   (d) $\dfrac{\sin(\pi x)}{x^2 + (5/2)x + 1}, \quad x = -1/2$;

   (e) $\cot^2(x), \quad x = k\pi$;

   (f) $\dfrac{|x|}{x} \arcsin\left(\dfrac{|x|e^{-x^2}}{2x}\right), \quad x = 0$;

   (g) $\arccos(\cos(x)); \quad x = 0$

   (h) $\dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}, \quad x \in \mathbb{Z}$.

   [Nota: $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x.]

9. Calcule os seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-\sqrt{x^3}-x}{\cos(x)-3x^2}$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\cdot\operatorname{arccot}(x)+\sqrt[3]{x-1}}{1+x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{\sqrt{x^2+1}+x^2}}{x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-e^{3x}}{e^{\sin(x)}}$;

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x/2}x^3-xe^x+x^2}{x(1-x^2)e^x}$;

(f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\arctan(1/x)}{x}$.

10. O Teorema de Heine diz que se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe e é L, então, para toda a sucessão $x_n\in D_f$ com $\lim x_n=a$, tem-se $\lim f(x_n)=L$. Use-o para mostrar que os limites seguintes não existem.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\cdot\cos(x)+1}{x+1}$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sin(x)\cos(x)}$;

(d) $\lim\limits_{x\to0} \cot(1/x)$;

(e) $\lim\limits_{x\to0} \sin(1/x)$;

(f) $\lim\limits_{x\to0} e^x\tan(1/x)$;

Continuidade – Stewart §2.5

11. Indique o conjunto de pontos onde a função dada é contínua.

(a) $\begin{cases} 1/x, & \text{se } x<0 \\ x, & \text{se } x\geqslant 0; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+|x|, & \text{se } x>-1 \\ -1, & \text{se } x\leqslant -1; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \sin(1/x), & \text{se } x\neq 0 \\ 0, & \text{se } x=0; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} (1+e^{1/x^2})^{-1}, & \text{se } x\neq 0 \\ 0, & \text{se } x=0; \end{cases}$

(e) $\begin{cases} (1/x)\sin(3x), & \text{se } x\neq 0 \\ 3, & \text{se } x=0; \end{cases}$

(f) $\begin{cases} \frac{x^2+2x+1}{x^2+x}, & \text{se } x\notin\{-1,0\} \\ 0, & \text{se } x\in\{-1,0\}; \end{cases}$

(g) $\begin{cases} \frac{\sin(x)}{x^2-x}, & x\notin\{0,1\} \\ -1, & x\in\{0,1\}; \end{cases}$

(h) $\begin{cases} \frac{\sin(x)\sin(\pi x)}{x^3-x}, & x\notin\{0,\pm1\} \\ 0, & x\in\{0,\pm1\}; \end{cases}$

(i) $\begin{cases} cx^2+2x, & x>2 \\ x^3-cx, & x\leqslant 2, \quad \text{onde } c\in\mathbb{R}; \end{cases}$

(j) $\begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é racional} \\ x, & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$

12. Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Em que condições a função $h\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{x+|x|}{2x} f(x) + \frac{x-|x|}{2x} g(x)$, para todo o $x \neq 0$, admite um prolongamento contínuo a $\mathbb{R}$?

13. As funções seguintes são contínuas em $[0,1]$ e satisfazem $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Determine, para cada uma delas, as soluções de $f(x) = 1/2$, com $x \in]0,1[$.

    (a) $-x^2 + 2x$;
    (b) $1 - |x^2 - 1|$;
    (c) $\sin\left(\frac{5\pi}{2} x\right)$;
    (d) $\ln(1+x^2)(\ln(2))^{-1}$;
    (e) $\left|1 - |3(x - 2/3) + 1|\right|$;
    (f) $8x^3 - 12x^2 + 5x$.

14. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ existem e têm sinais opostos. Mostre que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$.

Diferenciabilidade – Stewart §2.8, §3.1 e §3.4

15. Determine os pontos do gráfico das funções seguintes com reta tangente horizontal.

    (a) $f(x) = x^5 - 5x^3 + 10x + 1$;
    (b) $f(x) = (x^4 - x^2 + 1)^5$;
    (c) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$;
    (d) $f(x) = e^{x^3 - 3x}$;
    (e) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$;
    (f) $f(x) = \sin(x) - x\cos(x)$;

Formulário: $\left[u^r\right]' = r u' u^{r-1}$, $(e^u)' = u' e^u$, $\left[\ln(u)\right]' = \frac{u'}{u}$.

16. Determine as equações da retas tangente e normal às curvas seguintes, nos pontos dados.

    (a) $y = \sqrt{x}$, $P = (4,2)$;
    (b) $y = 4\sin^2(x)$, $P = (\pi/6, 1)$;
    (c) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $P = (0,-1)$;
    (d) $y = (2+x)e^{-x}$, $P = (0,2)$;
    (e) $y^2 = 1 + 4\sin(x)$, $P = (0,1)$;
    (f) $x^2 + 4xy + y^2 = 4$, $P = (0,-2)$.

17. Calcule os domínios de diferenciabilidade das seguintes funções.

    (a) $\sqrt{|x| + 1}$, $x \in \mathbb{R}$;
    (b) $\ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$;
    (c) $\sqrt{|x| - x|x-1|}$, $x \in]-\infty, 2]$;
    (d) $\sin(|x| + x)$, $x \in \mathbb{R}$.
    (e) $|\cos(x)|$, $x \in \mathbb{R}$;
    (f) $|\ln(1/2 + |x|)|$, $x \in \mathbb{R}$.

18. As seguintes funções são diferenciáveis e injetivas nos intervalos dados. Calcule as derivadas das suas funções inversas nos pontos indicados.

(a) $-x^3+2x^2-3x+1, \quad x \in \mathbb{R}, y_0 = 1;$

(b) $x^5+5x-6, \quad x \in \mathbb{R}, y_0 = 0;$

(c) $x^3+\sqrt{x+2}, \quad x \in]-2,+\infty[, y_0 = \sqrt{2};$

(d) $\cos(x)-2x-x^3, \quad x \in \mathbb{R}, y_0 = 1;$

(e) $x+(1/2)\sin(x), \quad x \in \mathbb{R}, y_0 = \frac{\pi+1}{2};$

(f) $e^x+\sin(x), \quad x \in]-\frac{\pi}{2},+\infty[, y_0 = 1;$

(g) $e^x\sin^2(x), \quad x \in]0,\frac{\pi}{2}[, y_0 = \frac{1}{2}e^{\pi/4};$

(h) $(1+2x)^x, \quad x \in \mathbb{R}^+, y_0 = \sqrt{2}.$

19. Determine as funções derivadas, e os seus respetivos domínios, das funções seguintes.

(a) $\ln(|x|);$

(b) $\ln(\ln(x));$

(c) $\ln|\cos(x)|;$

(d) $x\sin(\ln(x))-x\cos(\ln(x));$

(e) $x\tan(x)+\ln|\cos(x)|;$

(f) $\ln\left|\frac{1}{\sin(x)}-\cot(x)\right|;$

(g) $2^{x^2+1};$

(h) $(1+x^2)^x;$

(i) $\tan(\arcsin(x));$

(j) $\arcsin(\sqrt{1-x^2});$

(k) $\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right);$

(l) $\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right).$

Formulário:

$(\tan(u))' = \frac{u'}{\cos^2(u)};$ $\quad (\arcsin(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},$ $\quad (\arctan(u))' = \frac{u'}{1+u^2},$

$(\cot(u))' = \frac{-u'}{\sin^2(u)};$ $\quad (\arccos(u))' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}},$ $\quad (\text{arccot}(u))' = \frac{-u'}{1+u^2}.$

Extremos – Stewart §4.1

20. Determine o valor mínimo e o valor máximo das seguintes funções, nos intervalos dados.

(a) $\dfrac{x}{x^2+1}, \quad x \in [0,2];$

(b) $\sqrt[3]{x}(8-x), \quad x \in [0,8];$

(c) $e^{x^3-3x}, \quad x \in [-2,3];$

(d) $2\cos(x)+\sin(2x), \quad x \in [0,\pi/2];$

(e) $\ln(\cos(x)+x\sin(x)), \quad x \in [-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}];$

(f) $x+\cot(x/2), \quad x \in [\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{4}];$

(g) $[\cos(x^2-1)]^{-1}, \quad x \in [0,\pi/3];$

(h) $\arcsin(x)-x^2, \quad x \in [-1,1].$

Teoremas de Rolle e de Lagrange – Stewart §4.2

21. Verifique que as funções dadas satisfazem as hipóteses do Teorema de Rolle nos intervalos dados e determine os zeros de cada função derivada no interior do intervalo.

    (a) $x^3 - x^2 - 4x,\ x \in [1,2]$;

    (b) $\sqrt{x} - (1/3)x,\ x \in [0,9]$;

    (c) $\ln^2(x),\ x \in [1/e, e]$;

    (d) $\arctan(x) - \frac{\pi}{4}x,\ x \in [0,1]$.

22. Prove que as seguintes equações têm exatamente uma solução no intervalo indicado.

    (a) $x^3 + x = 3,\ x \in \mathbb{R}$;

    (b) $1 + 2x + x^3 + 4x^5 = 0,\ x \in \mathbb{R}$;

    (c) $2x - \sin(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}$;

    (d) $e^x + x^3 = 0,\ x \in \mathbb{R}$;

    (e) $x^3 - 15x + 10 = 0,\ x \in [-2,2]$;

    (f) $\sin(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$.

23. Mostre que as funções do exercício 18 são injetivas nos intervalos dados.

24. Demonstre as seguintes desigualdades, no intervalo indicado.

    (a) $\cos(x) + x > 1,\ \forall x \in]0, \pi/2[$;

    (b) $\sin(2x) < x - \pi,\ \forall x \in]\frac{5\pi}{6}, \pi[$;

    (c) $e^x - x > 1,\ \forall x \in]0, +\infty[$;

    (d) $\sqrt{1+x} < 1 + (1/2)x,\ \forall x \in]0, +\infty[$.

25.* Seja $f\colon]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável tal que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ para certo $L \in \mathbb{R}$. Mostre que existe $c \in]1, +\infty[$ tal que $f'(c) = 0$.

    [*Sugestão:* Use a mudança de variável $y = 1/x$.]

Regra de L'Hôpital – Stewart §4.4

26. Calcule os seguintes limites.

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + 1}$;

    (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{100} - 1}{\sin(x\pi)}$;

    (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1}$;

    (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$;

    (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (3^x - 2^x)x^{-1}$;

    (f) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^5 - \cos(\pi x)}{\arcsin(2 + 2x)}$;

    (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arccos(x^2) - \pi/2}{x^2}$.

    (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - x}{x^2 \sin(x)}$;

    (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x}$;

    (j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$.

Primitivas Elementares – Stewart §4.9

27. Calcule as primitivas das funções seguintes:

(a) $x^2(\sqrt{x}+3x)$;

(b) $x\sin(x^2)$;

(c) $\dfrac{3}{1+x^2}$;

(d) $\dfrac{1}{1+2x^2}$;

(e) $\dfrac{1}{x+3}$;

(f) $(x^2)(x^3+1)^{-1}$;

(g) $\sin(x)\cos(x)$;

(h) $\cos^3(x)\sin(x)$;

(i) $\cos^2(x)$;

(j) $\dfrac{\arctan(x)}{1+x^2}$;

(k) $x\sqrt{x^2+1}$;

(l) $\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$;

(m) $\dfrac{e^x}{e^x-1}$;

(n) xe^{1-x^2}.

Formulário:

$$\int f' f^m\,dx = \frac{f^{m+1}}{m+1} + C \quad (\text{se } m \neq -1);$$

$$\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln|f| + C;$$

$$\int f' e^f\,dx = e^f + C;$$

$$\int \frac{f'}{1+f^2}\,dx = \arctan(f) + C;$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2};$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$

28. Sejam f e g funções quaisquer e $\lambda > 0$ um número real positivo qualquer. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas. Para as falsas, dê contra-exemplos.

(a) $\displaystyle\int (\lambda f)\,dx = \sqrt{\lambda}\int \sqrt{\lambda} f\,dx$;

(b) $\displaystyle\int 2xf\,dx = x^2\int f\,dx$;

(c) $\displaystyle\int fg\,dx = \left(\int f\,dx\right)\left(\int g\,dx\right)$;

(d) $\displaystyle\int \frac{f}{g}\,dx = \frac{\int f\,dx}{\int g\,dx}$.

Primitivação por partes – Stewart §7.1

29. Usando o método de primitivação por partes, calcule as primitivas das funções seguintes.

(a) $x^3 \ln(x)$;

(b) $\sqrt{x}\ln(x)$;

(c) $\ln(x)x^{-\frac{1}{2}}$;

(d) $e^{3x}(2x+3)$;

(e) $x \arctan(\sqrt{x^2-1})$;

(f) $\ln^2(x)$;

(g) $\ln(1+x^2)$;

(h) $\sin(\ln(x))$;

(i) $\arccos(x)$;

(j) $\arctan\left(1/x\right)$;

(k) $e^x \cdot \sin(2x)$;

(l) $e^{-x}\sin^2(x)$.

(m) $x^{-3}e^{1/x}$;

(n) $e^{2x}\cos(e^x)$;

Primitivação de frações racionais – Stewart §7.4

30. Calcule as primitivas das funções dadas pelas frações racionais seguintes.

(a) $\dfrac{x^3+2x^2-4}{x^3-x}$;

(b) $\dfrac{-x^4+x-4}{x^3-x}$;

(c) $\dfrac{3x+2}{x^3+x^2-2x}$;

(d) $\dfrac{x}{2x^2-3x-2}$;

(e) $\dfrac{2x^2-10x+4}{x^3-3x^2-x+3}$;

(f) $\dfrac{x^4-7x^2+7x+1}{x^3-3x^2+2x}$;

(g) $\dfrac{1}{(x-1)^2(2x+1)}$;

(h) $\dfrac{-3x^3+6x^2-x-1}{x^2-2x+1}$.

Integral de Riemann – Stewart §5.1 e §5.2

31. Escreva as somas de Riemann das funções seguintes, associadas à partição uniforme (para um n arbitrário) dos intervalos dados, com as escolhas de x_k^* indicadas.

(a) $f(x) = x$, $[0,1]$ e x_k^* ext. esquerdos;

(b) $f(x) = x$, $[0,1]$ e x_k^* pontos médios;

(c) $f(x) = 1$, $[-1,2]$ e x_k^* quaisquer;

(d) $f(x) = x^2$, $[0,2]$ e x_k^* ext. direitos;

(e) $f(x) = x^2$, $[a,b]$ e x_k^* ext. esquerdos;

(f) $f(s) = e^x$, $[a,b]$ e x_k^* ext. esquerdos.

32. Mostre, a partir da definição, que a função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$, para todo o $x \in [a,b]$ é integrável em $[a,b]$ e calcule $\int_a^b f(x)\,dx$.

33. Partindo da definição, mostre que não é integrável, a função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

34. Considere a função $f(x) = x^2$. Seja n um inteiro positivo.

    (a) Escreva a soma de Riemann de $f(x)$ associada à partição uniforme de $[0,1]$ em n subintervalos, com escolha de x_k^* no extremo esquerdo.

    (b) Usando a fórmula $1^2 + 2^2 + \cdots + r^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$, calcule o limite da soma de Riemann da alínea anterior, quando $n \to +\infty$.

    (c) Usando a condição suficiente para a integrabilidade, mostre que $\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$.

35. Considere a função $f(x) = e^x$. Seja n um inteiro positivo.

    (a) Escreva a soma de Riemann de $f(x)$ associada à partição uniforme de $[0,1]$ em n subintervalos, com escolha de x_k^* no extremo esquerdo.

    (b) Usando a fórmula $1 + r + r^2 + \cdots + r^{m-1} = \frac{1-r^m}{1-r}$, calcule o limite da soma de Riemann da alínea anterior, quando $n \to +\infty$.

    (c) Usando a condição suficiente para a integrabilidade, mostre que $\int_0^1 e^x\,dx = e - 1$.

36. Em cada uma das alíneas seguintes, determine o valor do integral definido indicado interpretando-o como a área (com sinal) sob o gráfico da função integranda.

    (a) $\displaystyle\int_{-3}^{2} (2x+6)\,dx$;

    (b) $\displaystyle\int_{-1}^{3} (7-3x)\,dx$;

    (c) $\displaystyle\int_{-1}^{3} |x-1|\,dx$;

    (d) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (2-|x-1|)\,dx$;

    (e) $\displaystyle\int_{0}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$;

    (f) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

37. Usando as propriedades do integral, a relação com a área sob o gráfico da função integranda e os resultados dos Exercícios 34 e 35, calcule os seguintes integrais.

    (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\,dx$;

    (b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\,dx$;

    (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1+\sin(\pi x))\,dx$;

    (d) $\displaystyle\int_{0}^{2} (\sqrt{4-x^2}+x)\,dx$;

(e) $\int_0^1 (1 - x - x^2)\, dx$;

(f) $\int_{-1}^1 (1 - 2x + 3x^2)\, dx$;

(g) $\int_0^1 (|2x - 1| - 3e^x)\, dx$;

(h) $\int_{-1}^1 (e^{|x|} - x^2)\, dx$.

38. Demonstre as seguintes desigualdades.

(a) $2 \leqslant \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leqslant 2\sqrt{2}$;

(b) $\frac{e}{\ln(2)+1} \leqslant \int_e^{2e} ({}^{1}/\ln(x))\, dx \leqslant e$;

(c) $2e^{-1} \leqslant \int_{-1}^1 e^{-x^2}\, dx \leqslant 2$;

(d) $2e^{-1} \leqslant \int_{-1}^1 (x^3 + e^{-x^2})\, dx \leqslant 2$;

(e) $\frac{9}{8} \leqslant \int_0^{\frac{3}{2}} (x + \sin(x^2))\, dx \leqslant \frac{21}{8}$;

(f) $1 \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x}\, dx \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Teorema Fundamental do Cálculo – Stewart §5.3

39. Considere a função $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [0,1] \\ -1, & \text{se } t \in]1,2]. \end{cases}$$

(a) Calculando explicitamente a função $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, com $x \in [0,2]$, mostre que $F(x)$ é contínua $]0,2[$ mas não é diferenciável em $x = 1$.

(b) Mostre que $F(x)$ é diferenciável em $]0,1[\cup]1,2[$ e que $F'(x) = f(x)$.

40. Considere a função $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t, & \text{se } t \in [0,2] \\ t - 3, & \text{se } t \in]2,4]. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua no seu domínio.

(b) Calculando explicitamente a função $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, com $x \in [0,4]$, mostre que $F(x)$ é diferenciável em $]0,4[$ e que a sua derivada coincide com $f(x)$.

(c) Mostre que $F(x)$ tem um máximo em $x = 1$ e um mínimo em $x = 3$ e relacione estas propriedades com o valor de $f(x)$ nestes pontos.

(d) Repita as duas alíneas anteriores para $G(x) = \int_1^x f(t)\, dt$.

(e) Qual é a relação entre $F(x)$ e $G(x)$?

41. Calcule as derivadas das seguintes funções na variável x.

(a) $\displaystyle\int_1^{\ln x} \sin(t+e^t)\,dt$;

(b) $\displaystyle\int_0^{x^3} e^{-t^2+1}\,dt$;

(c) $\displaystyle\int_{3x}^{0} \frac{t}{1+t^2}\,dt$;

(d) $\displaystyle\int_{1/x}^{0} \arctan(t)\,dt$;

(e) $\displaystyle\int_{-x}^{x} \cos(t)\,dt$;

(f) $\displaystyle\int_{x}^{x^2} (2t^2+t)\,dt$.

42. Calcule os seguintes integrais definidos.

(a) $\displaystyle\int_4^1 (5-3t^3)\,dt$;

(b) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{t}\,dt$;

(c) $\displaystyle\int_0^1 t^{3/7}\,dt$;

(d) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \cos(t)\,dt$;

(e) $\displaystyle\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{6}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$;

(f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+t^2}{t^3}\,dt$.

Integração por substituição e por partes – Stewart §5.5 e §7.1

43. Calcule os integrais seguintes, usando a substituição indicada.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\,dx, \quad x=\sqrt{2}\sin(t)$;

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2}\,dx, \quad x=2\sin(t)$;

(c) $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{3-x^2}}\,dx, \quad x=\sqrt{3}\sin(t)$;

(d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx, \quad x=\tan(t)$;

(e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(3+x^2)^2}\,dx, \quad x=\sqrt{3}\tan(t)$;

(f) $\displaystyle\int_0^1 x^3(1+x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx, \quad 1+x^2=t^3$.

44. Use integração por partes para calcular os integrais seguintes.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx$;

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+x^2)\sin(x)\,dx$;

(c) $\displaystyle\int_{-1}^1 xe^x\,dx$;

(d) $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{x^2}\,dx$;

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)e^x\,dx$;

(f) $\displaystyle\int_1^e \sin(\pi\ln(x))\,dx$.

Cálculo de áreas e volumes – Stewart §6.1, §6.2 e §6.3

45. Esboce e calcule as áreas das regiões do plano definidas pelas condições seguintes.

(a) $1 \leqslant x \leqslant 2 \ \wedge \ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}$;

(b) $1 \leqslant x \leqslant 3 \ \wedge \ x^2-4x+7 \leqslant y \leqslant 4$;

(c) $1 \leqslant x \leqslant 2 \ \wedge \ {}^{x^2}\!/_2 - 2 \leqslant y \leqslant {}^1\!/_x$;

(d) $1 \leqslant x \leqslant 2 \ \wedge \ x^2-3 \leqslant y \leqslant 3-x$;

(e) $2x^2-2 \leqslant y \leqslant -x^2+4$;

(f) $x^2-4 \leqslant y \leqslant 2-|x|$;

(g) $0 \leqslant x \leqslant y^2 \ \wedge \ x^2+y^2 \leqslant 2$;

(h) $0 \leqslant x \leqslant 2-y-y^2$;

46. Faça um esboço de cada uma das regiões definidas pelas condições seguintes e calcule o volume dos sólidos gerados pela rotação das regiões em torno do eixo x.

(a) $1 \leqslant x \leqslant 2 \ \wedge \ 1 \leqslant y \leqslant x+3$;

(b) $0 \leqslant x \leqslant 1 \ \wedge \ 0 \leqslant y \leqslant x^2$;

(c) $1 \leqslant x \leqslant 2 \ \wedge \ 0 \leqslant y \leqslant 1/x$;

(d) $0 \leqslant x \leqslant 1 \ \wedge \ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$;

(e) $0 \leqslant x \leqslant 1 \ \wedge \ x \leqslant y \leqslant 2-x^2$;

(f) $2x^2+1 \leqslant y \leqslant -x^2+4$.

47. Faça um esboço de cada uma das regiões definidas pelas condições seguintes e calcule o volume dos sólidos gerados pela rotação das regiões em torno do eixo y.

(a) $0 \leqslant x \leqslant 1 \ \wedge \ 0 \leqslant y \leqslant x^2$;

(b) $1 \leqslant x \leqslant 2 \ \wedge \ 0 \leqslant y \leqslant 1/x$;

(c) $\sqrt{5} \leqslant x \leqslant 3 \ \wedge \ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{9-x^2}$;

(d) $0 \leqslant x \leqslant 1 \ \wedge \ 1 \leqslant y \leqslant \sqrt{2-x^2}$;

(e) $0 \leqslant x \leqslant 1 \ \wedge \ x \leqslant y \leqslant e^{-x^2+1}$;

(f) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \ \wedge \ \sin x \leqslant y \leqslant 1$.

Integrais impróprios – Stewart §7.8

48. Use a definição e, se for necessário, uma decomposição adequada, para determinar a natureza dos seguintes integrais impróprios. Nos casos de convergência, indique o valor do integral.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^{1/3}}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$;

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$;

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$;

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$;

(f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$;

(g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ln(x)\,dx$;

(h) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,dx$;

(i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x}\,dx$;

(j) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$;

49. Usando o critério de comparação, após, se necessário, uma decomposição adequada determine a natureza dos seguintes integrais impróprios.

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{3+\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx$;

(b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+e^x}\,dx$;

(c) $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{3x^4+x^3}\,dx$;

(d) $\int_1^{+\infty} \frac{3+x}{\sqrt[3]{x^5+1}}\,dx$;

(e) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x+x^2}\,dx$;

(f) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\ln(x)}\,dx$.

[*Sugestão:* Nos exercícios 49e, 49f use $\ln(x) < \sqrt{x}$.]

Equações diferenciais – Stewart §9.1 (volume 2)

50. Considere a equação diferencial $xy' + y = 1$.

(a) Observando que $(xy)' = xy' + y$, indique o conjunto-solução da equação num intervalo que não contenha o ponto $x = 0$.

(b) Mostre que a equação tem uma única solução em qualquer intervalo contendo 0.

51. Considere a equação diferencial dada por $2yy' = -e^x$.

(a) Observando que $(y^2)' = 2yy'$, mostre que não existem soluções com domínio $\mathbb{R}$;

(b) Seja $a \in \mathbb{R}$. Indique as soluções com domínio $]-\infty, a[$.

52. Determine o conjunto-solução das seguintes equações diferenciais.

(a) $y' = x^2 + \ln(x)$;

(b) $\dfrac{d^2y}{d^2\theta} = \theta\cos(\theta)$;

(c) $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 1$;

(d) $e^x(y'' + x^2) = 0$;

(e) $e^x y'' = 1$;

(f) $yy' = x$;

(g) $xy' + y = e^x$;

(h) $y'\cos x = y\sin x$;

Equações separáveis – Stewart §9.3 (volume 2)

53. Resolva as seguintes equações diferenciais com variáveis separáveis.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = y^2$;

(b) $\dfrac{dy}{dt} = 1 + y^2$;

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{2x}}{4y^3}$;

(d) $y\frac{dy}{dx} = \frac{1-y^2}{x}$;

(e) $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx} = xy$;

(f) $y' = \frac{x^2 y}{x^2+1}$;

(g) $y' = y^2 - 3y$.

(h) $\dfrac{dy}{d\theta} = y^2 \sin(\theta)$;

54. Resolva os seguintes problemas de valor inicial.

(a) $y' = y^2 \ln(x)$, $y(1)=-1$;

(b) $y' = \dfrac{2x + \frac{1}{\cos^2(x)}}{2y}$, $y(0)=-1$;

(c) $xy' + y = y^2$, $y(1)=-1$;

(d) $y' \tan x = 1 + y$, $y(\pi/3)=1$;

(e) $y^2 y' = y^3 + 1$, $y(1)=0$;

(f) $y' = 3\sqrt{xy}$, $y(1)=1$.

Equações lineares – Stewart §9.5 (volume 2)

55. Mostre que cada uma das equações diferenciais seguintes é equivalente a uma equação diferencial linear de primeira ordem, $y' + a(x)y = b(x)$, num intervalo adequado, indicando as funções $a(x)$ e $b(x)$.

(a) $xy + \sqrt{x} = e^x y'$;

(b) $y' + e^x(y+1) = -x^2 y'$;

(c) $y + \sin(x) = x^3(y'+1)$;

(d) $xy' + \ln(x) - x^2 y = 0$;

(e) $e^y y' = (x^2+y)e^y$;

(f) $(y')^2 + \frac{y^2}{4} = -yy'$.

56. Determine as soluções das seguintes equações diferenciais, num intervalo adequado.

(a) $y' + 2y = 2e^x$;

(b) $y' + y = \sin(e^x)$;

(c) $y' - y = x$;

(d) $y' + y = x + e^x$;

(e) $y' + y = \cos(x)$;

(f) $y' - 2xy = 3x^2 e^{x^2}$;

(g) $xy' + y = \sqrt{x}$;

(h) $2xy' + y = 6x$;

(i) $xy' - y = x^2 \sin(x)$;

(j) $(1+x)y' + y = 1 + x$;

(k) $x^2 y' + 2xy = \cos^2(x)$;

(l) $y' + \frac{y}{x} = e^{x^2}$;

(m) $(1+x^2)y' + xy = x$;

(n) $x\ln(x)y' + y = xe^x$;

(o) $xy' - 2y = x^3$.

Soluções

1. a) $]-4,4[$;

b) $\mathbb{R}\setminus\{1,-2\}$;

c) $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$;

d) $[-1,\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3},+\infty[$;

e) $[1,5]$;

f) $]1,3]$;

g) $\{-2\}\cup[1,+\infty[$;

h) $[-2,0[\cup[2,3[$;

i) $[-\sqrt{3},0]\cup[1,+\infty[$;

j) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi,(2k+1)\pi[$;

k) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi+\pi/4,(2k+1)\pi+\pi/4[$;

l) $]e^{-1},e[$;

2. a) Não é injetiva;

b) Não é injetiva;

c) É injetiva;

d) Não é injetiva;

e) É injetiva;

f) Não é injetiva;

3. a) Falso, x e $-x$;

b) Falso, x^2+1 e x;

c) Falso, $f(x)=x^2$;

4. a) $5-\frac{3\pi}{2}$;

b) $\frac{\pi}{2}-3$;

c) $\frac{3}{5}$;

d) $\frac{5}{13}$;

e) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$;

f) $\frac{5\pi}{2}-6$;

g) $-\frac{119}{169}$;

h) $\frac{\sqrt{5}}{5}$;

5. a) Verdadeiro;

b) Falso, tome-se $x=1$;

c) Verdadeiro;

d) Falso, $\sin(2\arcsin(x))=2x\sqrt{1-x^2}$;

6. a) $[-1,3]$;

b) $[-3/4,-1/2]$;

c) $]-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty[$;

d) $[-1,1]$;

e) $[-1/2,0[\cup]0,1/2]$;

f) $[-\sqrt{2},-1[\cup]1,\sqrt{2}]$;

7. a) $[1,3]$;

b) $[1,2]$;

c) $]-\infty,-1]$;

d) $\emptyset$;

e) $\{0\}$;

f) $\{0\}$;

g) $\mathbb{R}$;

h) $\mathbb{R}_0^+$;

8. a) Não existe;

b) Não existe;

c) $-\infty$;

d) Não existe;

e) $+\infty$;

f) $\pi/6$;

g) 0;

h) Não existe;

9. a) $-1/3$;

b) 0;

c) -1;

d) $-\infty$;

e) 0;

f) $+\infty$;

11. a) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

b) $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$;

c) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

d) $\mathbb{R}$;

e) $\mathbb{R}$;

f) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

g) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$;

h) $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$;

i) $\mathbb{R}$, se $c = 2/3$, $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ se $c \neq 2/3$;

j) $\{0\}$;

12. h é contínua se e só se $f(0) = g(0)$;

13. a) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$;

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $1/15$, $1/3$, $13/15$;

d) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$;

e) $1/6$, $1/2$, $5/6$;

f) $1/2$, $\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$;

15. a) $\left\{(\pm\sqrt{2},\pm 4\sqrt{2}+1),(-1,-5),(1,6)\right\}$;

b) $\left\{(0,1),(\sqrt{2}/2,(3/4)^5),(-\sqrt{2}/2,(3/4)^5)\right\}$;

c) $(-1,\sqrt[3]{4})$;

d) $\left\{(-1,e^2),(1,e^{-2})\right\}$;

e) $(-1,\ln(2))$;

f) $\left\{(k\pi,k\pi(-1)^{k+1}) : k\in\mathbb{Z}\right\}$;

16. a) $x-4y=-4$ e $4x+y=14$;

b) $2\sqrt{3}x-y=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}-1$ e $\frac{1}{2\sqrt{3}}x+y=\frac{\pi}{12\sqrt{3}}+1$;

c) $y=-1$ e $x=0$;

d) $x+y=2$ e $x-y=-2$;

e) $2x-y=-1$ e $x+2y=2$;

f) $2x+y=-2$ e $x-2y=4$;

17. a) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

b) $\mathbb{R}$;

c) $]-\infty,2[\setminus\{0,1\}$;

d) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

e) $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$;

f) $\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{1}{2},0\right\}$;

18. a) $-1/3$;

b) $1/10$;

c) $2\sqrt{2}$;

d) $-1/2$;

e) 1;

f) $\frac{1}{2}$;

g) $\frac{2}{3}e^{-\pi/4}$;

h) $\frac{\sqrt{2}}{\ln(4e)}$;

19. a) $\frac{1}{x}$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

b) $\frac{1}{x\ln(x)}$, $\mathbb{R}^+$;

c) $-\tan(x)$, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$;

d) $\sin(\ln(x))$, $\mathbb{R}^+$;

e) $\frac{x}{\cos^2(x)}$, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$;

f) $\frac{1}{\sin(x)}$, $x\neq k\pi$;

g) $x\ln(2)2^{x^2+2}$, $\mathbb{R}$;

h) $\left(\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}\right)(1+x^2)^x$, $\mathbb{R}$;

i) $(1-x^2)^{-3/2}$, $]-1,1[$;

j) $\frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$, $]-1,0[\cup]0,1[$;

k) $\frac{2x}{|x|(1+x^2)}$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

l) $-\frac{1}{x^2+2x+2}$, $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$;

20. a) 0 e $1/2$;

b) 0 e $6\sqrt[3]{2}$;

c) e^{-2} e e^{18};

d) 0 e $\frac{3\sqrt{3}}{2}$;

e) 0 e $\ln(\pi/2)$;

f) $\frac{\pi}{2}+1$ e $\frac{3\pi}{2}-1$;

g) 1 e $\frac{1}{\cos(1)}$;

h) $-\frac{\pi}{2}-1$ e $\frac{\pi}{2}-1$;

21. a) $\frac{1+\sqrt{13}}{3}$;

b) $9/4$;

c) 1;

d) $\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$;

26. a) $2/3$;

b) $-\frac{100}{\pi}$;

c) $-\pi$;

d) $1/2$;

e) $\ln(3/2)$;

f) $5/2$;

g) -1;

h) $-1/3$;

i) 0;

j) 1;

27. a) $\frac{2}{7}\sqrt{x^7}+\frac{3}{4}x^4+C$;

b) $-\frac{1}{2}\cos(x^2)+C$;

c) $3\arctan(x)+C$;

d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x)+C$;

e) $\ln|x+3|+C$;

f) $\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$;

g) $\frac{1}{2}\sin^2(x)+C$;

h) $-\frac{1}{4}\cos^4(x)+C$;

i) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin(2x)+C$;

j) $\frac{1}{2}(\arctan(x))^2+C$;

k) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$;

l) $\ln|\sin(x)|+C$;

m) $\ln|e^x-1|+C$;

n) $-\frac{1}{2}e^{1-x^2}+C$;

28. a) Verdadeira;

b) Falsa, $f=0$;

c) Falsa, $f=g=1$;

d) Falsa, $f=x, g=1$;

29. a) $\frac{1}{4}x^4\ln(x)-\frac{1}{16}x^4+C$;

b) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln(x)-\frac{4}{9}\sqrt{x^3}+C$;

c) $2\sqrt{x}\ln(x)-4\sqrt{x}+C$;

d) $((2/3)x+7/9)e^{3x}+C$;

e) $\frac{x^2}{2}\arctan(\sqrt{x^2-1})-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$;

f) $x\ln^2(x)-2x\ln(x)+2x+C$;

g) $x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan(x)+C$;

h) $\frac{x}{2}[\sin(\ln(x))-\cos(\ln(x))]+C$;

i) $x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}+C$;

j) $x\arctan(1/x)+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$;

k) $\frac{1}{5}e^x(\sin(2x)-2\cos(2x))+C$;

l) $-e^{-x}(\sin^2(x)+\frac{1}{5}\sin(2x)+\frac{2}{5}\cos(2x))+C$;

m) $-\frac{e^{1/x}}{x}+e^{1/x}+C$;

n) $e^x\sin(e^x)+\cos(e^x)+C$;

30. a) $x+4\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{3}{2}\ln|x+1|+C$;

b) $-\frac{x^2}{2}+4\ln|x|-2\ln|x-1|-3\ln|x+1|+C$;

c) $\frac{5}{3}\ln|x-1|-\ln|x|-\frac{2}{3}\ln|x+2|+C$;

d) $\frac{2}{5}\ln|x-2|+\frac{1}{10}\ln|x+1/2|+C$;

e) $\ln|x-1|+2\ln|x+1|-\ln|x-3|+C$;

f) $\frac{x^2}{2}+3x+\frac{1}{2}\ln|x|-2\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|x-2|+C$;

g) $\frac{-1/3}{x-1}-\frac{2}{9}\ln|x-1|+\frac{2}{9}\ln|2x+1|+C$;

h) $-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|+C$;

31. a) $\frac{(n-1)n}{2n^2}$;

b) $1/2$;

c) 3;

d) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)^2 8}{n^2}\left[=\frac{8n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right]$;

e) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)^2$;

f) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}e^{(a+k\frac{b-a}{n})}$;

36. a) 25;

b) 16;

c) 4;

d) 3;

e) $\frac{9\pi}{4}$;

f) $\frac{a^2\pi}{2}$;

37. a) 0;

b) 0;

c) 2;

d) $\pi+2$;

e) $1/6$;

f) 4;

g) $3e-\frac{7}{2}$;

h) $2e-8/3$;

41. a) $\frac{1}{x}\sin(\ln(x)+x)$;

b) $3x^2e^{-x^6+1}$;

c) $-\frac{9x}{1+9x^2}$;

d) $\frac{1}{x^2}\arctan(1/x)$;

e) $2\cos(x)$;

f) $4x^5+2x^3-2x^2-x$;

42. a) $\frac{705}{4}$;

b) $16/3$;

c) ${}^{7}\!/_{10}$;

d) 0;

e) π;

f) ${}^{3}\!/_{8}+\ln(2)$;

43. a) $\frac{2+\pi}{4}$;

b) $\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}$;

c) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$;

d) $\frac{2+\pi}{4}$;

e) $\frac{1}{12}+\frac{\sqrt{3}\pi}{54}$;

f) $\frac{9}{56}+\frac{3\sqrt[3]{2}}{28}$;

44. a) -2;

b) $\pi-1$;

c) ${}^{2}\!/_{e}$;

d) ${}^{1}\!/_{2}$;

e) $-\frac{e^{\pi}+1}{2}$;

f) $\frac{\pi}{1+\pi^2}(e+1)$;

45. a) $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) ${}^{4}\!/_{3}$;

c) $\ln(2)+{}^{5}\!/_{6}$;

d) ${}^{13}\!/_{6}$;

e) $8\sqrt{2}$;

f) ${}^{44}\!/_{3}$;

g) $\frac{\sin(2)}{2}-\frac{1}{3}$;

h) ${}^{9}\!/_{2}$;

46. a) $\frac{58\pi}{3}$;

b) ${}^{\pi}\!/_{5}$;

c) $\frac{\pi}{2}$;

d) ${}^{\pi}\!/_{2}$;

e) $\frac{38\pi}{15}$;

f) $\frac{104\pi}{5}$;

47. a) ${}^{\pi}\!/_{2}$;

b) 2π;

c) $\frac{16\pi}{3}$;

d) $\frac{\pi}{3}(4\sqrt{2}-5)$;

e) $\pi(e-{}^{5}\!/_{3})$;

f) $\frac{\pi^3-8\pi}{4}$;

48. a) Divergente;

b) Convergente, 1;

c) Divergente;

d) Convergente, π;

e) Divergente;

f) Convergente, $1-\cos(1)$;

g) Divergente;

h) Convergente, $\frac{1}{\ln(2)}$;

i) Convergente, $\frac{2}{e}$;

j) Convergente, 1;

49. a) Divergente;

b) Convergente;

c) Convergente;

d) Divergente;

e) Convergente;

f) Divergente;

52. a) $\frac{x^3}{3}+x\ln(x)-x+c$;

b) $-x\cos x+2\sin x+c_1x+c_2$;

c) $\frac{x^3}{6}+c_1\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3$;

d) $-\frac{x^4}{12}+c_1x+c_2$;

e) $e^{-x}+c_1x+c_2$;

f) $\sqrt{x^2+c}$ ou $-\sqrt{x^2+c}$;

g) $\frac{e^x+c}{x}$;

h) $\frac{c}{\cos(x)}$;

53. a) $-\frac{1}{x+c}$;

b) $\tan(t+c)$;

c) $\pm\sqrt[4]{(1/2)e^{2x}+c}$;

d) $\pm\sqrt{1-\frac{d}{x^2}}$;

e) $d\sqrt{x^2+1}$;

f) $de^{x-\arctan(x)}$;

g) $\frac{3}{1+de^{3x}}$;

h) $\frac{1}{\cos(\theta)-c}$;

54. a) $(x-x\ln(x)-2)^{-1}$;

b) $-\sqrt{1+x^2+\tan(x)}$;

c) $\frac{1}{1-2e^{x-1}}$;

d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin(x)-1$;

e) $\sqrt[3]{e^{3(x-1)-1}}$;

f) x^3 ou $(x^{3/2}-2)^2$;

55. a) $y'-xe^{-x}=e^{-x}\sqrt{x}$;

b) $y'+\frac{e^x}{1+x^2}y=-\frac{e^x}{1+x^2}$;

c) $y'-\frac{1}{x^3}y=\frac{\sin(x)}{x^3}-1$;

d) $y'-xy=-\frac{\ln(x)}{x}$;

e) $y'-y=x^2$;

f) $y'-\frac{y}{2}=0$;

56. a) $\frac{2}{3}e^x+ce^{-2x}$;

b) $-e^{-x}\cos(e^x)+ce^{-x}$;

c) $-x-1+ce^{-x}$;

d) $x-1+e^x/2+ce^{-x}$;

e) $\frac{1}{2}(\cos(x)+\sin(x))+ce^{-x}$;

f) $e^{x^2}(x^3+c)$;

g) $\frac{2}{3}\sqrt{x}+\frac{c}{x}$;

h) $2x+\frac{c}{\sqrt{x}}$;

i) $-x\cos(x)+cx$;

j) $\frac{x+x^2/2+c}{1+x}$;

k) $\frac{1}{2x}+\frac{\sin(2x)}{4x^2}+\frac{c}{x^2}$;

l) $\frac{e^{x^2}}{2x}+\frac{c}{x}$;

m) $1+\frac{c}{\sqrt{1+x^2}}$;

n) $\frac{e^x+c}{\ln(x)}$;

o) x^3+cx^2;