IN UN SISTEMA LINEARE LA RISPOSTA

RISPOSTA → EVOLUZIONE TEMPORALE DELLO STATO (E DELL'USCITA) A PARTIRE DA

- CONDIZIONI INIZIALI ASSEGNATE
- INGRESSO NOTO

LA RISPOSTA È SEMPRE PARI ALLA SOMMA DELLA RISPOSTA LIBERA E DELLA RISPOSTA FORZATA

$u(t) = A \sin(\omega t)$

AMPIEZZA A

PULSAZIONE ω $\left[\frac{rad}{sec}\right]$ $\omega = 2\pi F$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}$$

$x(0) \leftarrow$ ASSEGNATO

$$\begin{cases} x(k+1) = A x(k) + B u(k) \\ y(k) = C x(k) + D u(k) \\ x(0) \leftarrow \text{ASSEGNATO} \end{cases}$$

I/S/U ISU

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

$$\begin{cases} x_e(k+1) = A x_e(k) \\ y_e(k) = C x_e(k) \end{cases}$$

$x_e(0) = x_0$

$$x(k+1) = A\,x(k)$$

x_0 NOTO

$$x(k) = A^k x_0$$

1. VERA PER $k=1$
2. VERA PER k $\Rightarrow$ VERA PER $k+1$

$$x(1) = A\,x(0) = A\,x_0$$

$$x(k) = A^k x_0 \implies x(k+1) = A\,x(k) =$$

$$= A \cdot A^k x_0 = A^{k+1} x_0$$

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ volte}}$$

$$A^{-k} = (A^{-1})^k$$

A <u>nonsingolare</u>

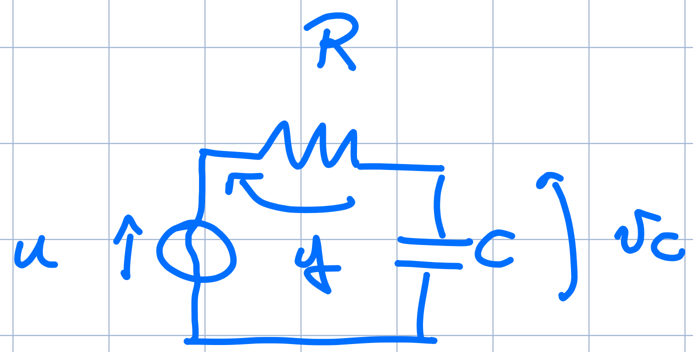
$$A^0 \quad \exists$$

$$x_0 = x(k)\Big|_{k=0} = A^k x_0 \Big|_{k=0} =$$

$$= A^k\Big|_{k=0} x_0$$

$$x_0 = A^k\Big|_{k=0} x_0 = I \cdot x_0$$

$$A^0 = A^{k-k} = A^k \cdot A^{-k} = I$$



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\dfrac{1}{RC}\, x(t) + \dfrac{1}{RC}\, u(t) \\[2ex] y(t) = -x(t) + u(t) \end{cases}$$

x_0 NOTA

$$\dot{y}(t) = -\dot{x}(t) + \dot{u}(t) =$$

$$= -\underbrace{\left(-\frac{1}{RC}\, x(t) + \frac{1}{RC}\, u(t)\right)}_{\dot{x}(t)} + \dot{u}(t)$$

$$y(t) = -x(t) + u(t)$$

$$x(t) = -y(t) + u(t)$$

$$\dot{y}(t) = -\left(-\frac{1}{RC}(-y(t) + u(t)) + \frac{1}{RC}u(t)\right) +$$

$$+ \dot{u}(t)$$

$$\dot{y}(t) = -\left(\frac{1}{RC}y(t) - \cancel{\frac{1}{RC}u(t)} + \cancel{\frac{1}{RC}u(t)}\right) +$$

$$+ \dot{u}(t)$$

$$\dot{y}(t) = -\frac{1}{RC}y(t) + \dot{u}(t)$$

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \dot{u}(t)$$

1/U

1U

$$y(0) = -x(0) + \cancel{u(0)}^{\,0}$$

0^-

POTENZA DI UNA MATRICE

DEF A^k $\quad k > 0$

$$A^k \triangleq \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ volte}}$$

PROPR. 1 $\quad A^0 = I$

PROPR. 2 $\quad$ SE A nonsing.

$$A^{-k} = (A^{-1})^k$$

$A = (a_{ij}) \quad i = 1, \ldots, n \quad j = 1, \ldots, n$

$$A^k \neq (a_{ij}^k)$$

PROPR. 3 A diagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & & 0 \\ & a_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n^k \end{pmatrix}$$

IN GENERALE A È DIAGONALE?

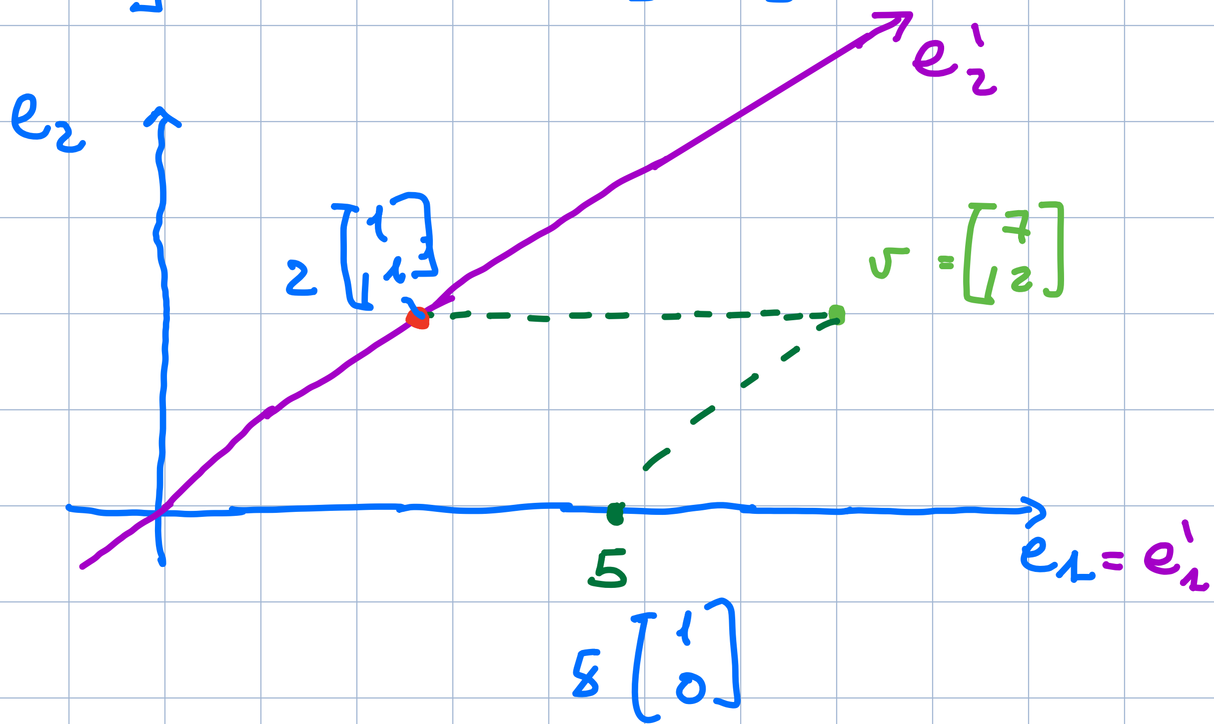
NO. PERÒ .....

CAMBIAMENTO DI BASE

$$v = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$v = 7 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$e'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v = a_1 e'_1 + a_2 e'_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 7 \\ a_2 = 2 \end{cases} \implies a_1 = 5$$

v nella base (e'_1, e'_2)

ha coordinate $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}_{(e'_1, e'_2)}$

ESISTE UN MODO "GENERALE" PER "PASSARE" DA UNA BASE ALL'ALTRA ?

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

$$(e_1 \; e_2 \; \dots \; e_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$v = \beta_1 e_1' + \beta_2 e_2' + \dots + \beta_n e_n'$$

$$(e_1' \; e_2' \; \dots \; e_n') \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$v = (e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_n) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} =$$

$$= (e_1' \ e_2' \ \cdots \ e_n') \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

IDEA: LEGARE FRA LORO LA NUOVA E LA VECCHIA BASE

$$(e_1' \quad e_2' \quad \dots \quad e_n') = (e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n) \cdot T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (e_1 \quad e_2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (e_1' \quad e_2')$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{T}$$

HO QUINDI UN MODO "RAPIDO" PER CALCOLARE T

$E = (e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n)$ BASE VECCHIA

$E' = (e_1' \quad e_2' \quad \dots \quad e_n')$ BASE NUOVA

$$E' = E \cdot T$$

$$T = E^{-1} \cdot E'$$

$$v = E \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = E' \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = E \cdot T \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$E \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = E \cdot T \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$[v]_\beta = T^{-1} [v]_\alpha$ controvarianti

$E' = E\,T$ covarianti

$$X = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

VOGLIO RAPPRESENTARE x

NELLE COLONNE DI T.

$$z = T^{-1} \cdot x$$

È POSSIBILE INDIVIDUARE UN CAMBIAMENTO DI BASE SUL SISTEMA

$$x(k+1) = A\, x(k)$$

$$\forall \quad z(k) = T^{-1}\, x(k)$$

$$x(k) = T\, z(k)$$

$$x(k+1) = T\, z(k+1)$$

$$z(k+1) = T^{-1}\, x(k+1) =$$

$$= T^{-1} A\, x(k) =$$

$$= T^{-1} A T\, z(k)$$

$$z(k+1) = T^{-1} A T \, z(k)$$

IDEA : CERCARE T T.C.

$T^{-1} A T$ DIAGONALE

NON SEMPRE POSSIBILE

T ESISTE SOLO SE A DIAGONALIZZABILE

$$T^{-1} A T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

1° SOTTOCASO: AUTOVALORI REALI E DISTINTI

$$T^{-1} A T = \Lambda$$

$$A T = T \Lambda$$

$$A \overset{T}{\sim} \Lambda$$

A E Λ SONO MATRICI SIMILI PER TRAMITE DI T.

A E Λ HANNO IN COMUNE GLI AUTOVALORI

$\lambda \in \mathbb{C}$ AUTOV. DI A

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det(\lambda I - A) =$$

$$= \det(\lambda T^{-1} \cdot T - T^{-1} A T) =$$

$$= \det(T^{-1}(\lambda I - A) T) =$$

$$= \det(T^{-1}) \cdot \det(\lambda I - A) \cdot \det(T) = 0$$