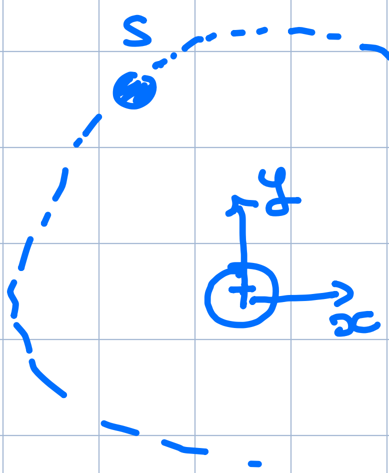
STABILITÀ



$$x(t) = \rho \cos(t)$$

$$y(t) = \rho \sin(t)$$

→ EQUILIBRIO

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$x(t+1) = A x(t) + B u(t)$$

$$(0_x, 0_u)$$

→ INGRESSO MANTENUTO COSTANTE $(u_{eq} = 0)$

STATO INIZIALE $x_0 \neq 0_x$

$(0_x, 0_u)$ INSTABILE $\Leftrightarrow$

① $\exists\ \lambda_i \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ T.C.

$$Re(\lambda_i) > 0$$

$$(|\lambda_i| > 1)$$

OR

② $\exists\ \lambda_i \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ T.C.

$$Re(\lambda_i) = 0 \quad E \quad m.a.(\lambda_i) \neq m.g(\lambda_i)$$

$$(|\lambda_i| = 1)$$

PROSPETTIVA DI PERTURBAZIONE DIFFERENTE

→ PERTURBARE L'INGRESSO RISPETTO A $u_{eq} = 0$

MANTENERE $X_0 = 0_x$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}$$

$$Y_f(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$$U(s) = \int_0^{+\infty} u(\xi)\, e^{-s\xi}\, d\xi$$

$$G(s) = \int_0^{+\infty} g(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau$$

$$Y_f(s) = G(s) \cdot 1$$

LA FdT È LA RISPOSTA FORZATA IN S ALL'IMPULSO UNITARIO.

g(t) È QUINDI LA RISPOSTA ALL'IMPULSO DEL SISTEMA.

(L⁻¹-TRASF. DELLA G(s))

$$Y_f(s) = \int_0^{+\infty} y_f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$G(s)\cdot U(s) = \int_0^{+\infty} g(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau \int_0^{+\infty} u(\xi)\, e^{-s\xi}\, d\xi =$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} g(\tau)\, e^{-s\tau}\, u(\xi)\, e^{-s\xi}\, d\tau\, d\xi =$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} g(\tau)\, u(\xi)\, e^{-s(\tau+\xi)}\, d\tau\, d\xi$$

$t = \tau + \xi$ SOSTITUISCO ξ

$dt = d\xi$

$$\xi = t - \tau$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} g(\tau)\, u(t-\tau)\, e^{-st}\, d\tau\, dt =$$

(τ) (t)

$$= \int_{0}^{+\infty} \left(\int_{0}^{+\infty} g(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau \right) e^{-st}\, dt$$

(t) (τ)

$u(t)$ È RIGHT-SIDED

$$u(t-\tau) = 0 \iff t - \tau < 0$$

$$\tau > t$$

$\Rightarrow$ L'INTEGRALE INTERNO È DEFINITO $[0, t)$ A PATTO CHE t SIA FINITO

$$Y_f(s) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\left(\int_0^t g(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau \right)}_{\text{FUNZIONE IN } t} e^{-st}\, dt =$$

(t)

$$= \int_0^{+\infty} y_f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$y_f(t) = \int_0^t g(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$

INTEGRALE DI CONVOLUZIONE

O PRODOTTO DI CONVOLUZIONE TC

FRA LA RISPOSTA ALL'IMPULSO E

L'INGRESSO.

$$y_f(t) = (g * u)(t)$$

SENZA PROVA FORMALE (CASO TD)

$$Y_f(z) = G(z) \cdot U(z)$$

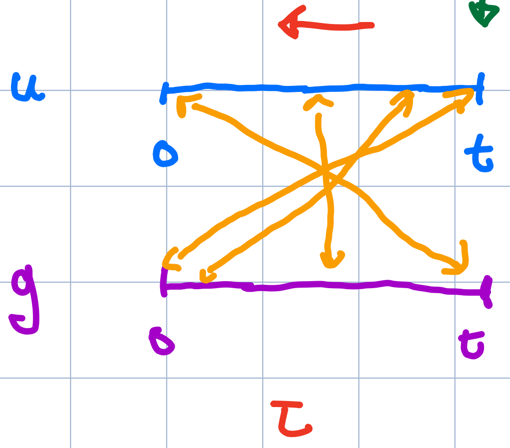
$$y_f(k) = \sum_{n=0}^{k} g(n)\, u(k-n) = (g * u)(k)$$

SOMMA DI CONVOLUZIONE

$$y_f(t) = \int_0^t g(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$

È UNA SOMMA PESATA

PRESENTE



$* \to y_F(t)$

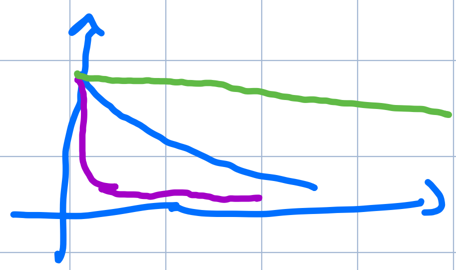
$t \leftarrow$ PRESENTE

$$g(\tau)\, u(t-\tau)$$

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \qquad g(t) = e^{-t}\, 1(t)$$

$$G(s) = \frac{100}{s+100} \qquad G(s) = \frac{0.01}{s+0.01}$$

e^{-t}, e^{-100t} $e^{-0.01t}$



① IL PRODOTTO DI CONVOLUZIONE È COMMUTATIVO

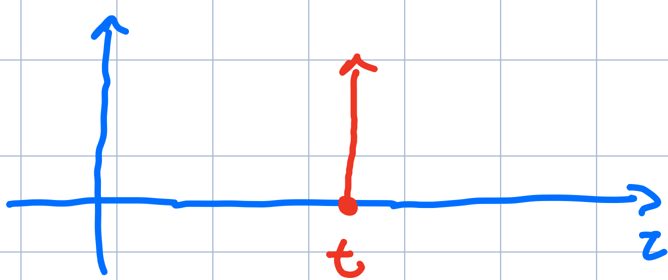
$$y_f(t) = (g * u)(t) = (u * g)(t)$$

② L'IMPULSO È L'ELEMENTO NEUTRO DEL PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

$$Y_f(s) = G(s) \cdot 1 = G(s)$$

$$y_f(t) = (g * \delta)(t) = g(t)$$

$$\int_0^t g(\tau)\,\delta(t-\tau)\,dt = g(t)$$



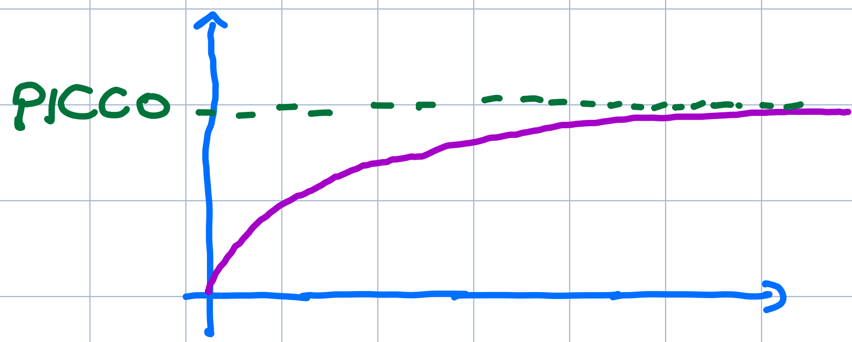
$$y_f(t) = \int_0^t g(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau$$

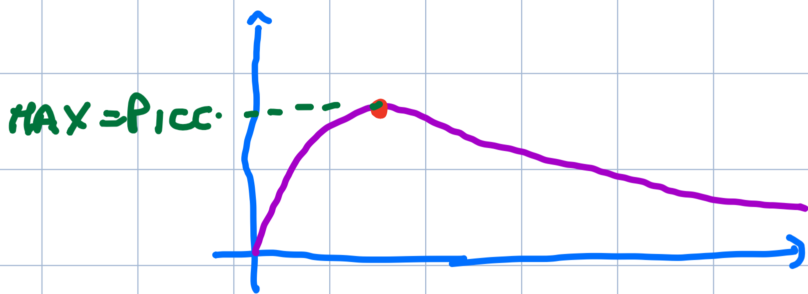
RAPPRESENTAZIONE ESPLICITA I/U
(BIAS-FREE)

SEGNALE LIMITATO

UN SEGNALE $f: T \to \mathbb{R}$ È LIMITATO
SE IL SUO VALORE DI PICCO È FINITO.

$$\sup_{t \in T} |f(t)| < \infty \implies f \text{ LIMITATO}$$





$\sin(t)\,1(t)$

$t \cdot 1(t)$

$1(t)$

BIBO STABILITÀ (BOUNDED INPUT BOUNDED OUTPUT)

UN SISTEMA DINAMICO È BIBO STABILE SE PER OGNI INGRESSO LIMITATO LA CORRISPONDENTE USCITA FORZATA È LIMITATA.

NEGO DEF. PRECEDENTE

UN SISTEMA DINAMICO NON È BIBO STABILE SE ESISTE UN INGRESSO LIMITATO LA CUI CORRISPONDENTE USCITA FORZATA NON È LIMITATA.

CRITERIO DI BIBO STABILITÀ (DOMINIO DEL TEMPO)

UN SISTEMA LTI - TC È BIBO STABILE SE E SOLO SE LA SUA RISPOSTA ALL'IMPULSO È ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE

$$\int_0^{+\infty} |g(t)|\, dt < \infty$$

SUFFICIENZA

A. I. $\Rightarrow$ BIBO STABILE

CONSIDERIAMO UN INGRESSO LIMITATO GENERICO $u(t)$

$$y_F(t) = \int_0^t g(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$

$$|y_F(t)| \leq \int_0^t |g(\tau)| \cdot |u(t-\tau)|\, d\tau$$

SE $u(t)$ È LIMITATO $\exists\ K_u > 0$ T.C.

$$|u(t)| \leq K_u \quad \forall\ t \geq 0$$

$$|y_f(t)| \leq \int_0^t |g(\tau)|\, k_u \, d\tau =$$

$$= k_u \int_0^t |g(\tau)|\, d\tau \leq k_u \int_0^{+\infty} |g(\tau)|\, d\tau \leq k_u \cdot k_g$$

NECESSITÀ

BIBO STABILE $\Rightarrow$ A. I.

PER ASSURDO

NEGARE CHE $g(t)$ SIA A.I. IMPLICA CHE ESISTE SEMPRE $\bar{t} > 0$ T.C. $\forall\, M > 0$

$$\int_0^{\bar{t}} |g(\tau)|\, d\tau > M$$

SIA ARBITRARIAMENTE GRANDE

PRENDO IN CONSIDERAZIONE $u(t)$ ORGANIZZATO COME SEGUE

$$u(\bar{t}-\tau) = \begin{cases} +1 & \text{SE } g(\tau) > 0 \\ -1 & \text{SE } g(\tau) < 0 \\ 0 & \text{SE } g(\tau) = 0 \end{cases}$$

LIMITATO PERCHÈ ASSUME TRE VALORI LIMITATI $(+1, -1, 0)$

$$y_f(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} g(\tau)\, u(\bar{t}-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^{\bar{t}} |g(\tau)|\, d\tau > M$$

$y_f(t)$ NON SAREBBE QUINDI LIMITATA

CONTRADDIZIONE CON L'IPOTESI.

$$\int_0^{+\infty} |g(t)|\, dt \quad \text{CONVERGE}$$

$$G(s) = \int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$|G(s)| \leq \int_0^{+\infty} |g(t)|\, e^{-\sigma t}\, dt$$

$$\int_0^{+\infty} |g(t)|\, dt \quad \text{CONVERGE}$$

$\int_0^{+\infty} |g(t)|\, dt$ È UN MAGGIORANTE DEL MODULO DI $G(s)$ PER $\sigma = \mathrm{Re}(s) = 0$

(ASSE IMMAGINARIO)

LA FdT DEVE CONVERGERE SULL'ASSE IMMAGINARIO

$|G(0)|$ FINITA