Calcolo della risposta al gradino unitario (discreto) per un sistema LTI-TD (partiamo dalla I/S/U)

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"]
```

Inserisco la terna A, B, C

In[∘]:=
```
A = {{0, 1, 0}, {0, 0, 1}, {1 / 12, 1 / 4, -1 / 3}}; B = {{0}, {0}, {1}}; Cc = {1, 1, 0};
```

In[∘]:=
```
Eigenvalues[A]
```

Out[∘]=

$$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$$

In[∘]:=
```
A // MatrixForm
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
B // MatrixForm
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
Cc // MatrixForm
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mi calcolo la funzione di trasferimento del sistema

In[∘]:=
```
G[z_] := Simplify[Cc.Inverse[z IdentityMatrix[3] - A].B]
```

In[∘]:=
```
G[z]
```

Out[∘]=

$$\left\{\frac{12\,(1+z)}{-1-3\,z+4\,z^2+12\,z^3}\right\}$$

In[∘]:=
```
Factor[G[z]]
```

Out[∘]=

$$\left\{\frac{12\,(1+z)}{(-1+2\,z)\,(1+2\,z)\,(1+3\,z)}\right\}$$

Mi costruisco, nel dominio z, la risposta al gradino (unitario) $Y(z) = G(z)\,\frac{z}{z-1}$

In[∘]:= $Y[z\_] := G[z][[1]] \left(\frac{z}{z-1}\right)$

In[∘]:= `Y[z]`

Out[∘]=

$$\frac{12\,z\,(1+z)}{(-1+z)\,\left(-1-3\,z+4\,z^2+12\,z^3\right)}$$

In[∘]:= `ZTransform[UnitStep[k], k, z]`

Out[∘]=

$$\frac{z}{-1+z}$$

Passo 1. Per determinare l'antitrasformata zeta, divido Y(z) per z

In[∘]:= $\frac{Y[z]}{z}$

Out[∘]=

$$\frac{12\,(1+z)}{(-1+z)\,\left(-1-3\,z+4\,z^2+12\,z^3\right)}$$

I fratti semplici di Y[z]/z saranno 4

In[∘]:=

In[∘]:=

In[∘]:= $\frac{C_1}{z-1} + \frac{C_2}{z-\frac{1}{2}} + \frac{C_3}{z+\frac{1}{2}} + \frac{C_4}{z+\frac{1}{3}};$

In[∘]:= $C_1 = \lim_{z\to 1} (z-1)\left(\frac{Y[z]}{z}\right)$

Out[∘]=

2

In[∘]:= $C_2 = \lim_{z\to \frac{1}{2}} \left(z-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{Y[z]}{z}\right)$

Out[∘]=

$$-\frac{18}{5}$$

In[∘]:= $C_3 = \lim_{z\to -\frac{1}{2}} \left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{Y[z]}{z}\right)$

Out[∘]=

-2

In[∘]:= $C_4 = \lim_{z \to -\frac{1}{3}} \left(z + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{Y[z]}{z}\right)$

Out[∘]=

$$\frac{18}{5}$$

In[∘]:= $\frac{C_1}{z-1} + \frac{C_2}{z-\frac{1}{2}} + \frac{C_3}{z+\frac{1}{2}} + \frac{C_4}{z+\frac{1}{3}}$

Out[∘]=

$$\frac{2}{-1+z} - \frac{18}{5\left(-\frac{1}{2}+z\right)} + \frac{18}{5\left(\frac{1}{3}+z\right)} - \frac{2}{\frac{1}{2}+z}$$

Passo 2, moltiplicare per z la funzione di variabile complessa Y(z)/z

In[∘]:= $C_1 \frac{z}{z-1} + C_2 \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + C_3 \frac{z}{z+\frac{1}{2}} + C_4 \frac{z}{z+\frac{1}{3}}$

Out[∘]=

$$\frac{2z}{-1+z} - \frac{18z}{5\left(-\frac{1}{2}+z\right)} + \frac{18z}{5\left(\frac{1}{3}+z\right)} - \frac{2z}{\frac{1}{2}+z}$$

Passo 3, scrittura della risposta forzata nel dominio del tempo a partire dalle successioni elementari $a^k\, 1(k)$ che generano i fratti semplici nella forma

$$\frac{z}{z-a}$$

In[∘]:= $y_f[k\_] :=$

$C_1\,\text{UnitStep}[k] + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{UnitStep}[k] + C_3 \left(-\frac{1}{2}\right)^k \text{UnitStep}[k] + C_4 \left(-\frac{1}{3}\right)^k \text{UnitStep}[k]$

Rappresentazione grafica

In[∘]:= `DiscretePlot[yf[k], {k, 0, 10}, PlotRange → All]`

Out[∘]=