SISTEMA DINAMICO

$$\Sigma = (T, X, U, Y, \mathcal{U}, \mathcal{Y}, \phi, \eta)$$

$T \rightarrow$ insieme dei tempi

$X \rightarrow$ spazio di stato

$U \rightarrow$ insieme (s.a.) dei valori che può assumere un ingresso ammissibile

$Y \rightarrow$ insieme (s.a.) dei valori che può assumere l'uscita

$\mathcal{U} \rightarrow$ insieme (s.a.) delle funzioni (sequenze) di ingresso ammissibili.

$$u(\cdot) \in \mathcal{U}$$

$$u : T \longrightarrow U$$

$\mathcal{Y} \to$ insieme delle uscite

$$y(\cdot) \in \mathcal{U}$$

$$y : T \longrightarrow Y$$

FUNZIONE DI TRANSIZIONE DI STATO

$$\phi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$$

$$\phi : T \times T \times X \times \mathcal{U} \longrightarrow X$$

$$x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0, t)}(\cdot))$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}\, x(t_0) + b \int_{t_0}^{t} e^{a(t-t_0-\tau)}\, u(\tau)\, d\tau .$$

DOVE (ASSE DEI TEMPI) ϕ È DEFINITA ?

CERTAMENTE ϕ È DEFINITA $\forall\, t \geq t_0$

IN ALCUNI CASI ϕ È DEFINITA ANCHE PER $t < t_0$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$t > 0$

$t < 0$ POSSIBILE ?

$\tau = -t$

$$\frac{d}{dt} x(\tau) = \frac{d}{dt} x(-t) = -\frac{d}{d\tau} x(-t) =$$

$$= -\dot{x}(\tau)$$

$$-\dot{x}(\tau) = a\, x(\tau) + b\, u(\tau)$$

$$\dot{x}(\tau) = -a\, x(\tau) - b\, u(\tau)$$

$$x(k+1) = a\, x(k) + b\, u(k)$$

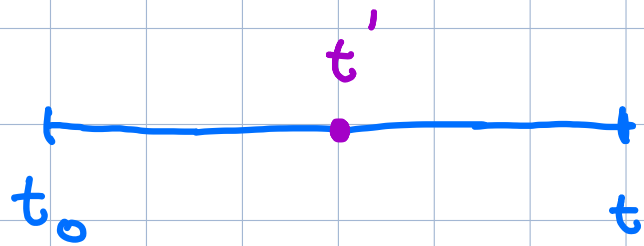
$$a\, x(k) = -x(k+1) + b\, u(k)$$

$$x(k) = +\frac{1}{a} x(k+1) - \frac{b}{a} u(k)$$

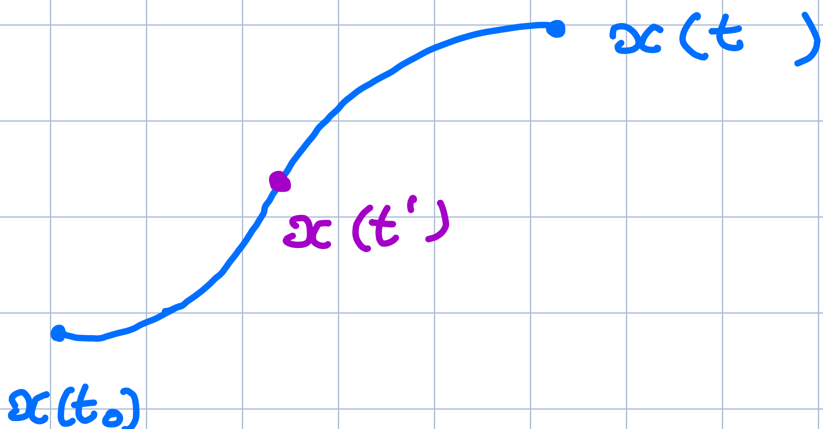
CONSISTENZA

$$x_0 = \phi\left(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t)}(\cdot)\right)\Big|_{t=t_0}$$

COMPOSIZIONE



$$t_0 \leq t' \leq t$$



$$x(t) = \phi(t, t', x(t'), u_{[t', t)}(\cdot))$$

$$x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0, t)}(\cdot))$$

$$x(t') = \phi(t', t_0, x(t_0), u_{[t_0, t')}(\cdot))$$

$$x(t) = \phi(t, t', \phi(t', t_0, x(t_0), u_{[t_0, t')}(\cdot)), u_{[t', t)}(\cdot))$$

$$u_{[t_0, t)}(\cdot) = u_{[t_0, t')}(\cdot) \otimes u_{[t', t)}(\cdot)$$

CONCATENAZIONE

CAUSALITÀ

$[t_0, t)$

$$u'_{[t_0,t)}(\cdot) = u''_{[t_0,t)}(\cdot)$$

ϕ GODE DELLA SEG. PROPRIETÀ

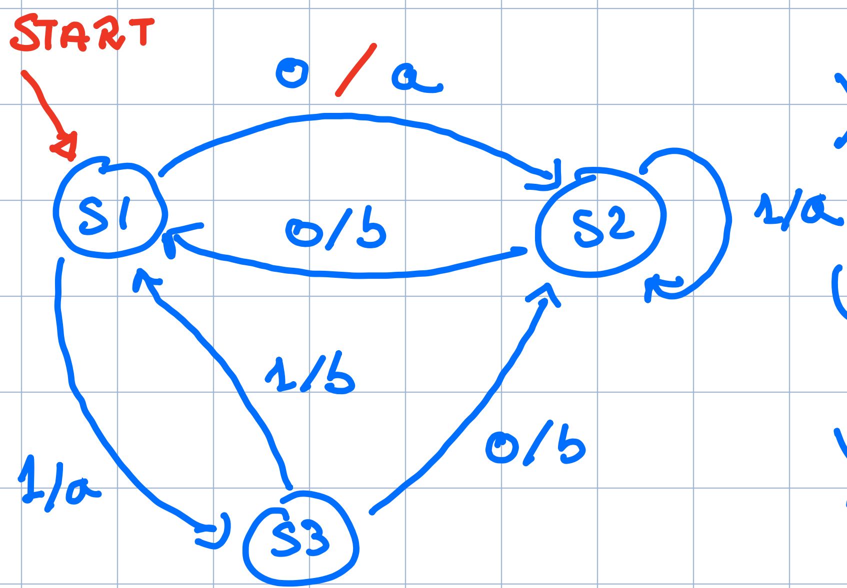
$$\phi(t, t_0, x_0, u'_{[t_0,t)}(\cdot)) = \phi(t, t_0, x_0, u''_{[t_0,t)}(\cdot))$$

FUNZIONE (O MAPPA) DI USCITA

$$\eta(\cdot, \cdot, \cdot)$$

$$\eta : T \times X \times U \longrightarrow Y$$

$$y(t) = \eta\,(t, x(t), u(t))$$



$X = \{S1, S2, S3\}$

$U = \{0, 1\}$

$Y = \{a, b\}$

$$\begin{cases} x(t+1) = f\,(x(t), u(t)) \\ y(t) = g\,(x(t), u(t)) \end{cases}$$

$x \backslash u$	0	1
S1	S2	S3
S2	S1	S2
S3	S2	S1

$f(x, u)$

$x \backslash u$	0	1
S1	a	a
S2	b	a
S3	b	a

$g(x, u)$

LINEARITÀ (PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI)

$t_0, t \in T$

$x_0', x_0'' \in X$

$u'(\cdot), u''(\cdot) \in \mathcal{U}$

RISPOSTA

$$x'(t) = \phi(t, t_0, x_0', u'_{[t_0,t)}(\cdot))$$

$$x''(t) = \phi(t, t_0, x_0'', u''_{[t_0,t)}(\cdot))$$

$$y'(t) = \eta(t, x'(t), u'(t))$$

$$y''(t) = \eta(t, x''(t), u''(t))$$

$$\alpha x_0' + \beta x_0''$$

$$\alpha u'(\cdot) + \beta u''(\cdot)$$

α, β COPPIA DI SCALARI ARBITRARI

$$X = \mathbb{C}^n$$

$$\phi(t, t_0, \alpha x_0' + \beta x_0'', \alpha u'_{[t_0,t)}(\cdot) + \beta u''_{[t_0,t)}(\cdot)) =$$

$$\alpha \phi(t, t_0, x_0', u'_{[t_0,t)}(\cdot)) +$$

$$\beta \phi(t, t_0, x_0'', u''_{[t_0,t)}(\cdot)) =$$

$$= \alpha x'(t) + \beta x''(t)$$

$$\eta(t, \alpha x'(t) + \beta x''(t), \alpha u'(t) + \beta u''(t)) =$$

$$= \alpha \eta(t, x'(t), u'(t)) + \beta \eta(t, x''(t), u''(t)) =$$

$$= \alpha y'(t) + \beta y''(t)$$

1 x_0, INGRESSO IDENTICAMENTE NULLO

$\diamond_t \rightarrow u(t) = 0, \forall t$

2 0_x, $u(\cdot)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3) $x_0 = 1 \cdot x_0 + 1 \cdot 0_x \quad , \quad u(\cdot) = 1 \cdot \diamond_t + 1 \cdot u(\cdot)$

$$\phi(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}(\cdot)) =$$

$$= \phi(t, t_0, x_0 + 0_x, (\diamond_t + u)_{[t_0,t)}(\cdot)) =$$

$$= \phi(t, t_0, x_0, \diamond_t) +$$

$$+ \phi(t, t_0, 0_x, u_{[t_0,t)}(\cdot)) =$$

$$= x_\ell(t) + x_f(t)$$

$$y(t) = \eta(t, x(t), u(t)) =$$

$$= \eta(t, x_\ell(t) + x_f(t), 0 + u(t)) =$$

$$= \eta(t, x_e(t), 0) + \eta(t, x_f(t), u(t))$$

$$= y_e(t) + y_f(t)$$

RISPOSTA LIBERA => STATO INIZIALE ASSEGNATO, INGRESSO ID. NULLO

RISPOSTA FORZATA => SISTEMA IN QUIETE ($x_0 = 0_x$), INGRESSO ASSEGNATO