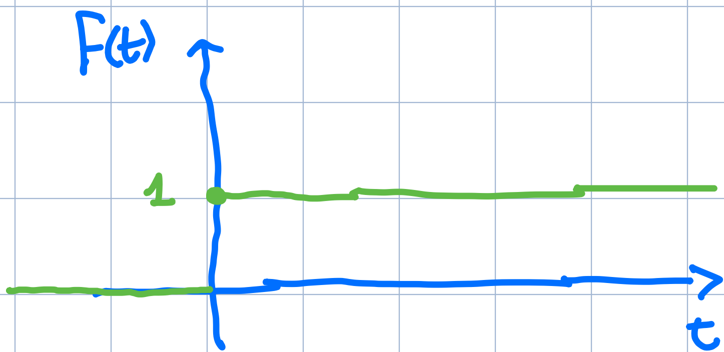
STAZIONARIETÀ o TEMPO-INVARIANZA

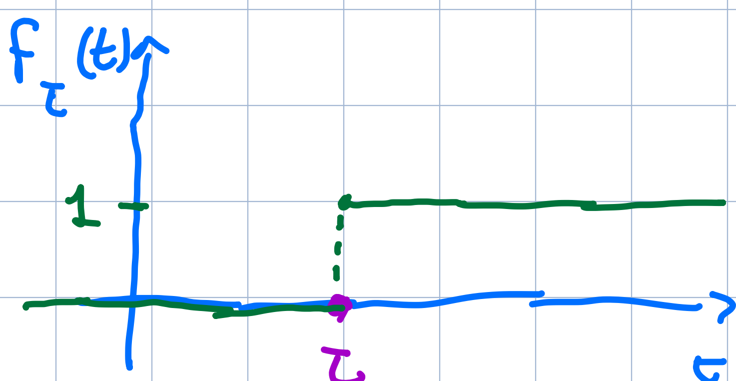
OPERAZIONE DI SHIFTING-TEMPORALE



$$F(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 1 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad 1 \quad t \geq 0$$

VADO A CONSIDERARE QUESTA FUNZIONE

$$f_\tau(t)$$



$$F_\tau(t) = \begin{cases} 1 & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$$

IN CHE MODO POSSO ESPRIMERE $F_\tau(t)$

IN FUNZIONE DI $f(t)$?

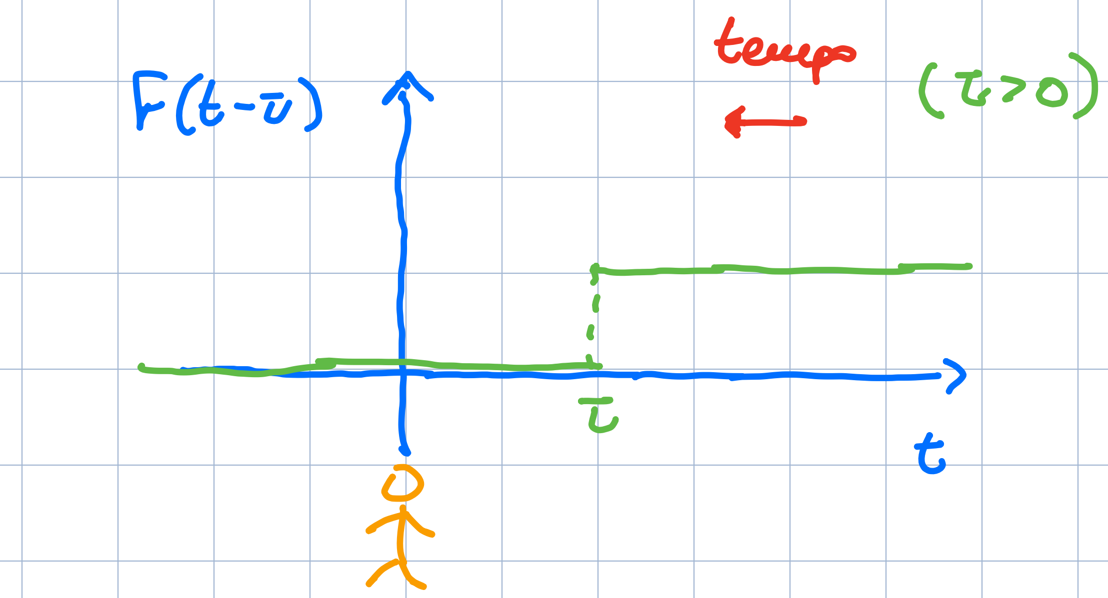
$$F_\tau(t) = f(t-\tau)$$

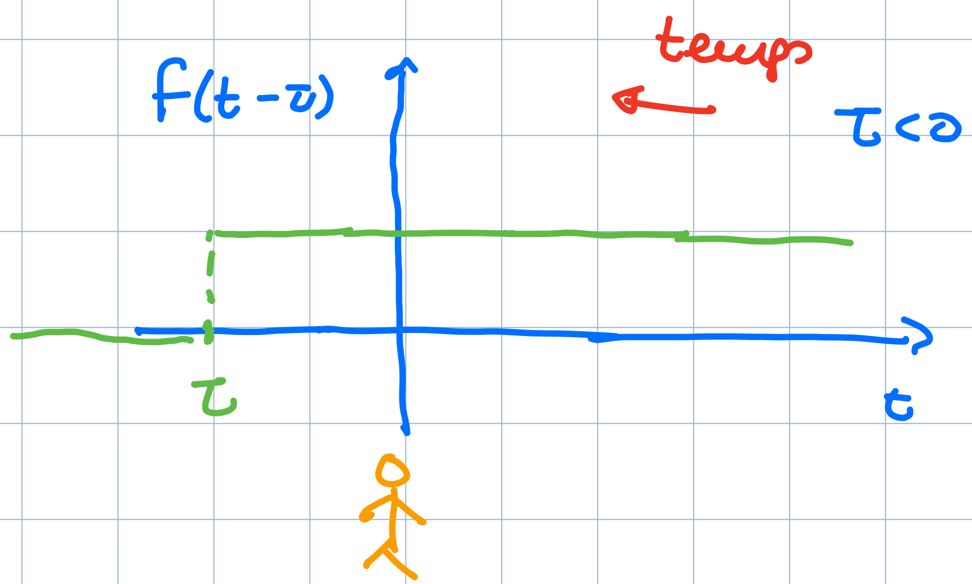
SE UTILIZZO LA "CONVENZIONE"

$$t - \tau$$

PER DENOTARE LO SHIFTING TEMPORALE

- $\tau > 0 \Rightarrow$ SHIFT DX
- $\tau < 0 \Rightarrow$ SHIFT SX





SHIFTING TEMPORALE VIENE UTILIZZATO PER DESCRIVERE OPERAZIONI DI RITARDO (DX) O ANTICIPO (SX).

$$t-\tau$$

$\tau>0 \Rightarrow$ RITARDO, $\tau<0 \Rightarrow$ ANTICIPO

PRENDIAMO IN CONSIDERAZIONE

$\phi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$

$$x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}(\cdot))$$

$$t_0 \leq t$$

$\tau \in T$

$$\phi(t-\tau, t_0-\tau, x_0, u^{\tau}_{[t_0,t)}(\cdot))$$

$$u^{\tau}(t) = u(t-\tau)$$

IL SISTEMA DINAMICO È STAZIONARIO

SE

$$\phi(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}(\cdot)) = \phi(t-\tau, t_0-\tau, x_0, u^{\tau}_{[t_0,t)}(\cdot))$$

$\forall \tau \in T$

SCELGO $\tau = t_0$ E LA TEMPO-INVARIANZA VALE:

$$\phi(t-t_0, 0, x_0, u_{[0, t-t_0)}(\cdot))$$

$t-t_0$ È LA DURATA DELL'ESPERIMENTO.

IL CALCOLO DELLO STATO DIPENDE DALLA DURATA $t-t_0$ DELL'ESPERIMENTO ED INOLTRE L'ISTANTE INIZIALE t_0 PUÒ ESSERE POSTO A ZERO SENZA PERDITA DI GENERALITÀ.

$$x(t) = \phi(t, x_0, u_{[0,t)}(\cdot))$$

SE IL SISTEMA È STAZIONARIO L'USCITA NON DIPENDE ESPLICITAMENTE DAL TEMPO

$$y(t) = \eta(x(t), u(t))$$

UN SISTEMA DINAMICO È REGOLARE SE

- $T = \mathbb{R}$
- X, U, Y SONO SPAZI VETTORIALI
- $\mathcal{U}$, $\mathcal{Y}$ " " "
- È DEFINITA UNA OPERAZIONE DI DISTANZA NEGLI SPAZI CHE CARATTERIZZANO IL SISTEMA
- $\phi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ È CONTINUA NEI SUOI ARGOMENTI

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

SISTEMA REGOLARE È A DIMENSIONE FINITA SE X, U, Y SONO SPAZI VETTORIALI A DIMENSIONE FINITA ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^p$)

COME SI PUÒ ESPRIMERE UN SISTEMA REGOLARE A DIM. FINITA A PARTIRE DA $\phi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$?

$$\dot{x}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

$$x(t+h) = \phi(t+h, t, x(t), u_{[t,t+h)}(\cdot))$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

$$x \in \mathbb{R}^n \qquad u \in \mathbb{R}^m$$

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

SYSTEM FLOW $\Leftarrow f(\cdot,\cdot,\cdot)$

$$y(t) = \eta(t, x(t), u(t))$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) = g(t, x(t), u(t)) \end{cases}$$

COSA ACCADE ALLA RAPPRESENTAZIONE PRECEDENTE SE VALE ANCHE LA TEMPO-INVARIANZA?

$$\phi(t, x(0), u_{[0,t)}(\cdot))$$

$$\dot{x}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\phi(h, x(t), u_{[t,t+h)}(\cdot)) - x(t)}{h} =$$

$$= f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^r$$

SE, IN AGGIUNTA, VALE LA PROPRIETÀ DI LINEARITÀ.

UNA DELLE CONSEGUENZE DELLA PROPRIETÀ DI LINEARITÀ È LA LINEARITÀ DI

$$\phi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$$

NELLO STATO E NELL'INGRESSO

IDEM VALE PER

$$\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \quad (g)$$

QUALE È LA CONSEGUENZA DELLA LINEARITÀ SU

$$f(x,u) \ ?$$

$f(\cdot,\cdot)$ È LINEARE IN x ed u

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f(x,u) = Ax + Bu$$

$$g(x,u) \ ?$$

$$g(x,u) = Cx + Du$$

$$f(t, x(t), u(t))$$

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

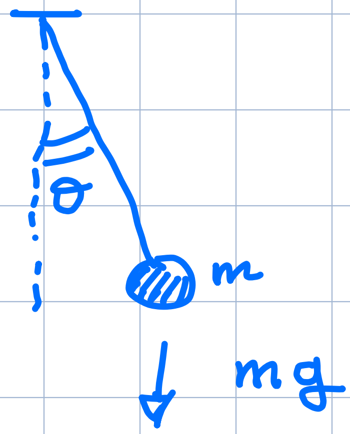
$$f(t, x(t), u(t)) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)$$

$$g(t, x(t), u(t))$$

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$g(t, x(t), u(t)) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t)$$

PENDOLO



$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

BILANCIO DI COPPIA

COPPIA DI INERZIA +
+ COPPIA DI "ATTRITO" +
+ COPPIA DI GRAVITÀ = COPPIA MOTRICE

PENDOLO → ASTA FILIFORME DI LUNGHEZZA ℓ LA CUI MASSA m È CONCENTRATA SULL'ESTREMO LIBERO DELL'ASTA

$$J = m\ell^2$$

$$J\ddot{\theta} + mgl\sin(\theta) + b\frac{2}{\pi}tg^{-1}(10\dot{\theta})\cdot l =$$

$$\tau(t)$$

$$x_1 \leftarrow \theta$$

$$x_2 \leftarrow \dot{\theta}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ ml^2\dot{x}_2 + mgl\sin(x_1) + b\frac{2}{\pi}tg^{-1}(10x_2)l = u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{ml^2}\left(-mgl\sin(x_1) - b\frac{2}{\pi}Tg^{-1}(10x_2)l + u\right) \end{cases}$$

$$= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - b\frac{2}{\pi}\frac{1}{ml}tg^{-1}(10x_2) + \frac{u(t)}{ml^2}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))]$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F(\overbrace{x_1, x_2}^{x}, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin(x_1) - b\frac{1}{ml}\frac{2}{\pi}\operatorname{tg}^{-1}(10x_2) + \frac{u}{ml^2} \end{bmatrix}$$