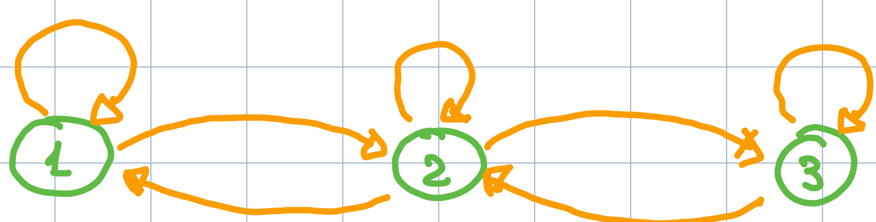
MODELLI DI TRANSIZIONE

NON DESCRIVONO IN GENERALE L'ANDAMENTO TEMPORALE DEL TRASFERIMENTO DI RISORSE MA SI FOCALIZZANO SUL COMPORTAMENTO TEMPORALE DI ALCUNE PROPRIETÀ LEGATE AD UN DATO FENOMENO_

CONSIDERIAMO IL NUMERO DI UTENTI IN CODA AD UN UFFICIO POSTALE.

- NESSUNA PERSONA IN CODA
- 1 PERSONA IN CODA
- 2 PERSONE IN CODA



$x_i(k) \quad i = 1, \dots, n$

$i \leftarrow$ PROPRIETÀ LEGATA AL FENOMENO

$x_i(k)$ DESCRIVE LA PROBABILITÀ CHE IL FENOMENO CHE STO ANALIZZANDO SI TROVI NELL' i-SIMA CONFIGURAZIONE

$$0 \leq x_i(k) \leq 1 \qquad \forall i, k$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(k) = 1 \qquad \forall k$$

STATO STOCASTICO

IN GENERALE $x_i(k)$ DIPENNDE DALLA STORIA PASSATA DELLE PROBABILITÀ

$x_j(l) \quad j = 1, \dots, n \; ; \; l = k-1, k-2, \dots$

IPOTESI DI MARKOV

$x_i(k)$ DIPENDE DA $x_j(k-1)$, $j=1,\dots,n$

DIPENDENZA LINEARE

$$x_i(k+1) = a_{ii}\, x_i(k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \alpha_{ji}\, x_j(k)$$

α_{ji} È LA PROBABILITÀ DI "TROVARMI" NELLA CONFIGURAZIONE i-SIMA AL PASSO $k+1$ CONDIZIONATA ALLA PROBABILITÀ DI ESSERE NELLA CONFIGURAZIONE j-SIMA AL PASSO k

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

CATENA DI MARKOV LINEARE A TEMPO DISCRETO E CON UN NUMERO DI STATI FINITI

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ È LA MATRICE DI TRANSIZIONE DELLA CATENA DI MARKOV

IPOTESI

$x(k) = e_1 \Rightarrow$ EVENTO CERTO SU PROPRIETÀ 1

$e_1^T = [1\ 0\ \cdots\ 0]$

$$x(k+1) = A e_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{1n} \end{bmatrix}$$

$$0 \le \alpha_{1i} \le 1 \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i} = 1$$

IN GENERALE, SE CONSIDERO COME STATO CORRENTE

$$e_j \qquad j = 1, \dots, n$$

GLI STATI SUCCESSIVI SARANNO, PER CIASCUN j, LA j-SIMA COLONNA DELLA MATRICE DI TRANSIZIONE

$$\begin{bmatrix} \alpha_{j1} \\ \alpha_{j2} \\ \vdots \\ \alpha_{jn} \end{bmatrix}$$

IL VETTORE RISULTANTE ESSENDO LO STATO DELLA CATENA DEVE GODERE DI QUESTE PROPRIETÀ.

$$0 \leq \alpha_{ji} \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} = 1$$

A È UNA MATRICE STOCASTICA PER COLONNA.

MODELLO DEL TEMPO ATMOSFERICO

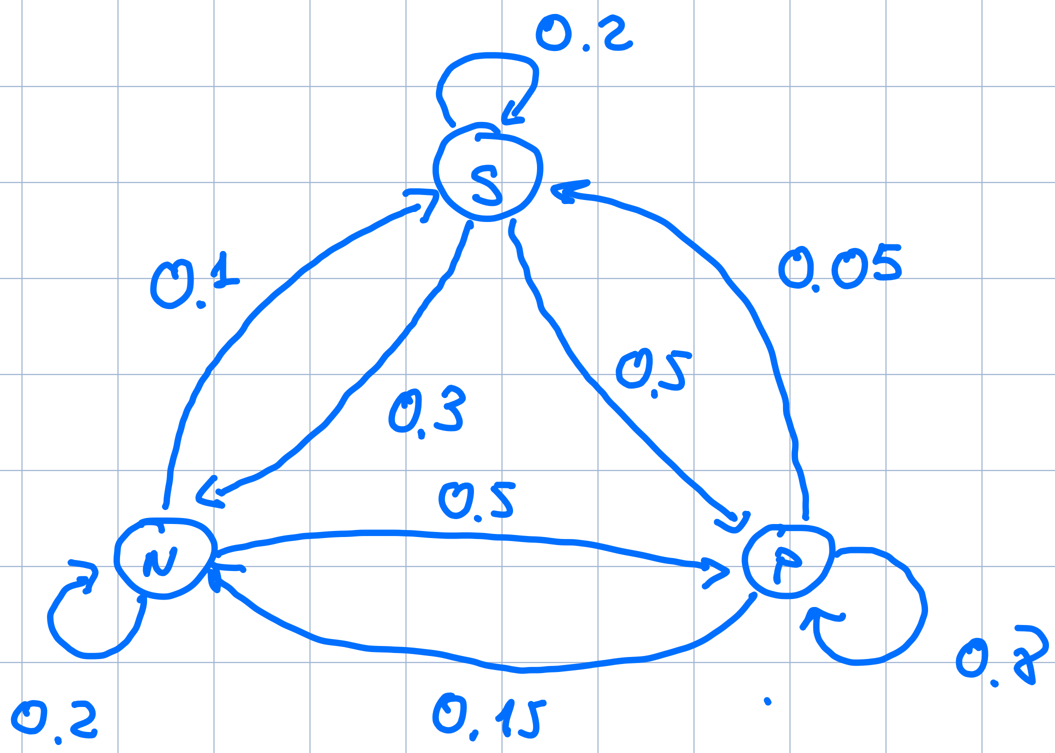
SI DESIDERA RAPPRESENTARE LA PROBABILITÀ CHE IL TEMPO ATMOSFERICO DI UNA LOCALITÀ / REGIONE SIA SOLEGGIATO, NUVOLOSO, PIOVOSO IN BASE ALLE SEGUENTI TRE IPOTESI RICAVATE DA OSSERVAZIONI EMPIRICHE.

LA PROB. CHE IN UN DATO GIORNO IL TEMPO SIA SOLEGGIATO È PARI A 0.2 VOLTE LA PROBABILITÀ CHE NEL GIORNO PRECEDENTE IL TEMPO ERA SOLEGGIATO PIÙ 0.1 VOLTE LA PROBABILITÀ CHE NEL GIORNO PREC. IL TEMPO FOSSE NUVOLOSO PIÙ 0.05 VOLTE LA PROB. CHE NEL GIORNO PREC. IL TEMPO FOSSE PIOVOSO

	S	N	P
S	0.2	0.1	0.05
N	0.3	0.2	0.15
P	0.5	0.7	0.8

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.05 \\ 0.3 & 0.2 & 0.15 \\ 0.5 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$

SCELTO UNO STATO INIZIALE STOCASTICO RANDOM, VALUTARE LO STATO DELLA CATENA DOPO UN NUMERO DI PASSI SUFFICIENTEMENTE LUNGO



DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ STAZIONARIA

$$\pi \in \mathbb{R}^3$$

$$\pi = A\pi$$

$$(\pi - A\pi) = 0_{3\times 1}$$

$$(I - A)\pi = 0_{3\times 1}$$

$$\pi \in \ker(I - A)$$

E, IN AGGIUNTA, È UN VETTORE STOCASTICO.

LA MATRICE $I - A$ È SINGOLARE.

A È STOCASTICA PER COLONNA

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \boxed{\alpha_{21}} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

$= 1$.

$$1 \cdot \alpha_{21} + 1 \cdot \alpha_{22} + 1 \cdot \alpha_{23} + \dots + 1 \cdot \alpha_{2n}$$

$$\mathbb{1}_n^T = [1 \ 1 \ \cdots \ 1]$$

CON QUESTA OPERAZIONE

$$\mathbb{1}_n^T \cdot A = \mathbb{1}_n^T$$

STO COSTRUENDO UN VETTORE RIGA I CUI ELEMENTI RAPPRESENTANO LA SOMMA DELLE COLONNE DI A.

$$\mathbb{1}_n^T - \mathbb{1}_n^T A = 0_{1\times n}$$

$$\mathbb{1}_n^T (I_n - A) = 0_{1\times n}$$

$$(I_n - A)^T \mathbb{1}_n = 0_{n\times 1}$$

$\mathbb{1}_n$ SI TROVA NEL $\ker (I_n - A)^T$.

$\Rightarrow (I_n - A)^T$ (E $(I_n - A)$) È SINGOLARE $\Rightarrow$

$$\det(I_n - A) = 0$$

SE $I_n - A$ È SINGOLARE, SICURAMENTE ESISTE $\pi \neq 0_{n\times 1}$ T.C.

$$\pi = A\pi$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.05 \\ 0.3 & 0.2 & 0.15 \\ 0.5 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$I_3 - A = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.1 & -0.05 \\ -0.3 & 0.8 & -0.15 \\ -0.5 & -0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.8\,x_1 - 0.1\,x_2 - 0.05\,x_3 = 0 \\ -0.3\,x_1 + 0.8\,x_2 - 0.15\,x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

MODELLO RCA

ASSICURAZIONE È RIPARTITA IN CLASSI DI MERITO (14)

$x_i(k)$ $i = 1, \dots, 14$

↳ PROBABILITÀ DI ESSERE O DI APPARTENERE ALLA CLASSE DI MERITO i-SIMA.

p <- PROBABILITÀ DI AVERE UN SINISTRO

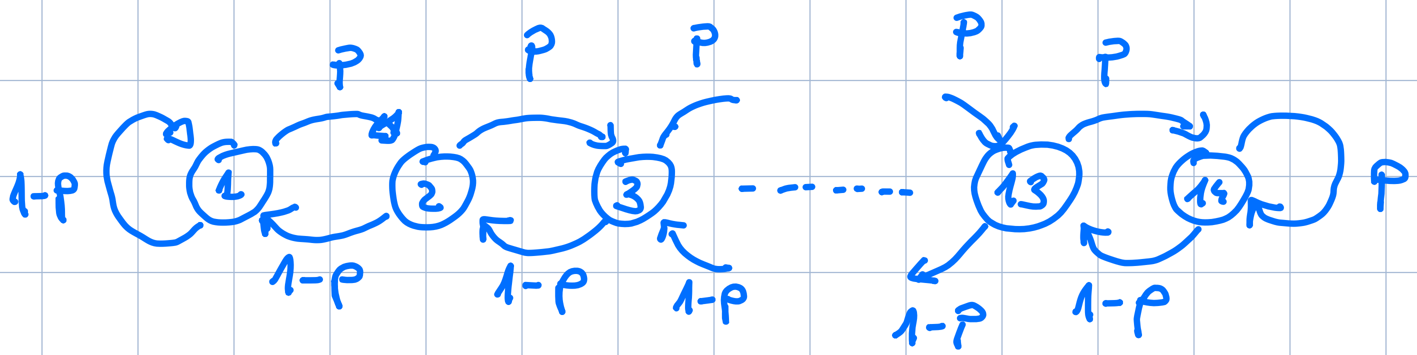
SE HO UN SINISTRO PASSO ALLA CLASSE SUPERIORE

SE NON SUBISCO UN SINISTRO PASSO ALLA CLASSE INFERIORE.

SE MI TROVO NELLA CLASSE 1 CI RIMANGO SE NON SUBISCO SINISTRI

SE MI TROVO NELLA CLASSE 14

CI RIMANGO SE SUBISCO SINISTRI



$$
\begin{cases}
x_1(k+1) = (1-p)\,x_1(k) + (1-p)\,x_2(k) \\
x_2(k+1) = p\,x_1(k) + (1-p)\,x_3(k) \\
\vdots \\
x_i(k+1) = p\,x_{i-1}(k) + (1-p)\,x_{i+1}(k) \\
\vdots \\
x_{14}(k+1) = p\,x_{13}(k) + p\,x_{14}(k)
\end{cases}
$$

$$
A = \begin{bmatrix}
(1-p) & (1-p) & 0 & \cdots & & 0 \\
p & 0 & 1-p & \cdots & & 0 \\
& \ddots & & & & \\
0 & p & 0 & 1-p & \cdots & 0 \\
& & \ddots & & 0 & 1-p \\
0 & \cdots & & \cdots & p & p
\end{bmatrix}
$$