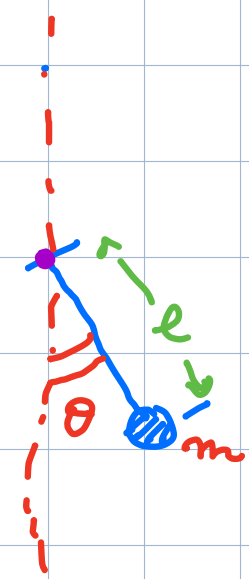
STABILITÀ

LA STABILITÀ DESCRIVE IN MANIERA FORMALE LA PROPRIETÀ DI UN SISTEMA DINAMICO DI MANTENERE UNA CERTA CONFIGURAZIONE DELLE PROPRIE VARIABILI A FRONTE DI PERTURBAZIONI.

CASO DEL PENDOLO



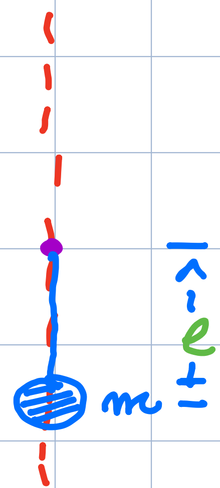
$\begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$ STATO . τ INGRESSO

θ USCITA

IMPONGO UNA COPPIA COSTANTE NULLA.

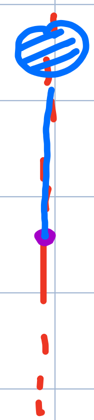
EQUILIBRIO: CONFIGURAZIONE DELLE VARIABILI DI STATO, INGRESSO, USCITA COSTANTI

$\tau_{eq} = 0$ $\begin{pmatrix} \theta_{eq} = 0 \\ \dot{\theta}_{eq} = 0 \end{pmatrix}$



PENDOLO VERSO IL BASSO

$\tau_{eq} = 0$ $\begin{pmatrix} \theta_{eq} = \pi \\ \dot{\theta}_{eq} = 0 \end{pmatrix}$



$$m l^2 \ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = \tau$$

$$mgl \sin(\theta_{eq}) = 0$$

$$\sin(\theta_{eq}) = 0$$

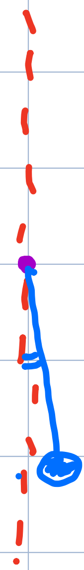
$$\theta_{eq,1} = 0 \qquad \theta_{eq,2} = \pi$$

CASO PENDOLO VERSO IL BASSO

$$\theta(t) = \theta_{eq,1} + \delta\theta(t)$$

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_{eq,1} + \delta\dot{\theta}(t)$$

$$\tau(t) = \tau_{eq,1} + \delta\tau(t)$$



$$m l^2 (\overset{0}{\cancel{\ddot{\theta}_{eq,1}}} + \delta\ddot{\theta}) + m g l \sin(\overset{0}{\cancel{\theta_{eq,1}}} + \delta\theta) =$$

$$= \underbrace{\tau_{eq,1}}_{0} + \delta\tau$$

$$\sin(\delta\theta) \approx \delta\theta$$

$$m l^2 \delta\ddot{\theta} + m g l \delta\theta = \delta\tau$$

SISTEMA LINEARIZZATO RISPETTO ALLA VERTICALE IN BASSO

$$m\ell^2 \ddot{y} + mg\ell\, y = u$$

$$Y(s) \qquad U(s)$$

$$m\ell^2 s^2 Y(s) + mg\ell\, Y(s) = U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{m\ell^2 s^2 + mg\ell}$$

$$\cancel{m}\ell^{\cancel{2}} s^2 + \cancel{m} g \cancel{\ell} = 0$$

$$\ell s^2 + g = 0$$

$$s^2 = -\frac{g}{\ell} \qquad s = \pm j\sqrt{\frac{g}{e}}$$

$$\theta = \pi + \delta\theta$$

$$\dot{\theta} = 0 + \delta\dot{\theta}$$

$$\tau = 0 + \delta\tau$$

$$m l^2 (\cancel{0} + \delta\ddot{\theta}) + m g l \sin(\pi + \delta\theta) =$$

$$= \cancel{0} + \delta\tau$$

$$\sin(\pi + \delta\theta) = -\sin(\delta\theta) \approx -\delta\theta$$

$$m l^2 \delta\ddot{\theta} - m g l \delta\theta = \delta\tau$$

$y = \delta\theta$

$u = \delta\tau$

$$m l^2 \ddot{y} - m g l y = u$$

$Y(s)$, $U(s)$

$$m\ell^2 s^2 Y(s) - mg\ell Y(s) = U(s)$$

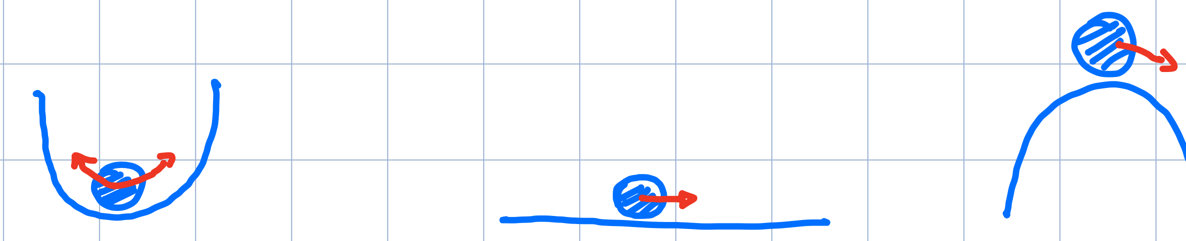
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{m\ell^2 s^2 - mg\ell}$$

$$\cancel{m}\ell^{\cancel{2}} s^2 - \cancel{m} g \cancel{\ell} = 0$$

$$\ell s^2 - g = 0$$

$$s^2 = \frac{g}{\ell} \qquad s = \pm\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

QUALI SONO LE TIPOLOGIE DI STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO.



ASINTOTICA STABILITÀ

STABILITÀ SEMPLICE

INSTABILITÀ

LYAPUNOV

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

$$x(t+1) = f(x(t))$$

$$x_{eq} = 0_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

STABILITÀ (DELLO STATO ZERO)

LO STATO ZERO DI

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$
$$x(t+1) = f(x(t))$$

È STABILE (SEMPLICEMENTE) SE

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ T.C. PRESO

UNO STATO INIZIALE $x_0 \in \mathbb{R}^n$ CON

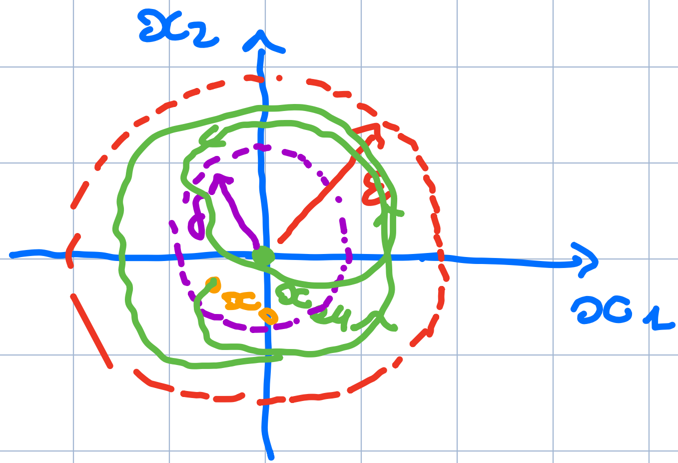
$$\|x_0\| \leq \delta$$

LA RISPOSTA DEL SISTEMA NELLO STATO

A PARTIRE DA x_0 (RISPOSTA LIBERA)

$x(t)$ È T.C.

$$\|x(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall \; t \geq 0$$



ASINTOTICA STABILITÀ

LO STATO $\bar{x}$ DEL SISTEMA

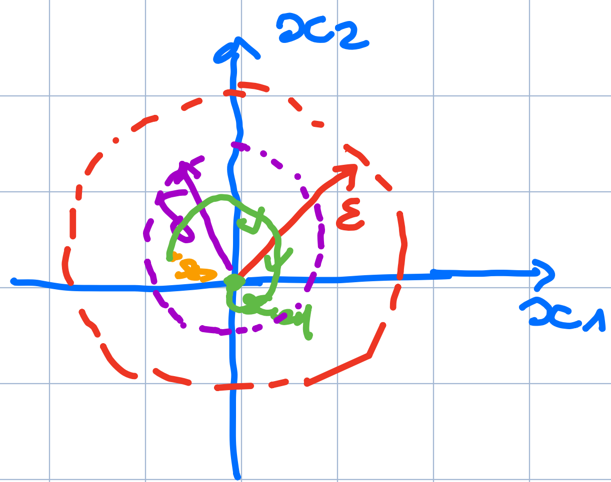
$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

$$x(t+1) = f(x(t))$$

È ASINTOTICAMENTE STABILE SE

È STABILE ED INOLTRE

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \bar{x}$$



INSTABILITÀ

LO STATO ZERO 0_x DI

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$
$$x(t+1) = f(x(t))$$

È INSTABILE SE NON È STABILE.

CASO LTI - TC

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

PROPRIETÀ: LO STATO ZERO È SEMPRE UNO STATO DI EQUILIBRIO DEL SISTEMA LTI-TC

$$(0_x, 0_u)$$

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$\dot{0}_x = A \cdot 0_x + B \cdot 0_u$$

CASO TD: VALE

$$x(t+1) = A x(t) + B u(t)$$

$$0_x = A \cdot 0_x + B \cdot 0_u$$

CRITERIO DI ASINTOTICA STABILITÀ

PER LO STATO 0_x DI UN SISTEMA

LTI-TC

LO STATO ZERO DI

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

È ASINTOTICAMENTE STABILE SE E SOLO SE GLI AUTOVALORI DI A $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ HANNO PARTE REALE STRETTAMENTE NEGATIVA

$$Re(\lambda_i) < 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

LO STATO ZERO DI

$$x(t+1) = A x(t) + B u(t)$$

È ASINTOTICAMENTE STABILE SE E SOLO SE GLI AUTOVALORI DI A $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ HANNO MODULO STRETTAMENTE INFERIORE ALL'UNITÀ

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, \dots, n$$

LO STATO ZERO DI

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

È STABILE SE E SOLO SE GLI AUTOVALORI DI A $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ HANNO PARTE REALE NON-POSITIVA

$$Re(\lambda_i) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

ED INOLTRE PER GLI AUTOVALORI CON PARTE REALE NULLA SI HA CHE LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA COINCIDE CON LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA.

LO STATO ZERO PER UN SISTEMA LTI-TD

$$x(t+1) = A x(t) + B u(t)$$

È STABILE SE E SOLO SE GLI AUTOVALORI DI A $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ SONO TALI CHE

$$|\lambda_i| \leq 1 \quad i = 1, \dots, n$$

E PER GLI AUTOVALORI AVENTI MODULO UNITARIO SI HA CHE LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA CON LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA.

È EQUILIBRIO PER UN SISTEMA LTI-TC

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

QUELLA COPPIA (x_e, u_e)

$$0_x = Ax_{eq} + Bu_{eq}$$

È EQUILIBRIO PER UN SISTEMA LTI-TD

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

QUELLA COPPIA (x_e, u_e)

$$x_e = A x_e + B u_e$$

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$(x_e, u_e)$$

$$\Delta x(t) = x(t) - x_e$$
$$\Delta u(t) = u(t) - u_e$$

$$\Delta x_e = x_e - x_e = 0_x$$
$$\Delta u_e = u_e - u_e = 0_u$$

$$\Delta \dot{x}(t) = \dot{x}(t) - \frac{d}{dt}(x_e) =$$

$$= \dot{x}(t) - 0_x = \dot{x}(t) - A x_e - B u_e =$$

$$= A x(t) + B u(t) - A x_e - B u_e =$$

$$= A\,(x(t) - x_e) + B\,(u(t) - u_e) =$$

$$= A\,\Delta x(t) + B\,\Delta u(t)$$

$$\Delta \dot{x}(t) = A\,\Delta x(t) + B\,\Delta u(t)$$