$x \in \mathbb{R}^n$

$T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non-singolare

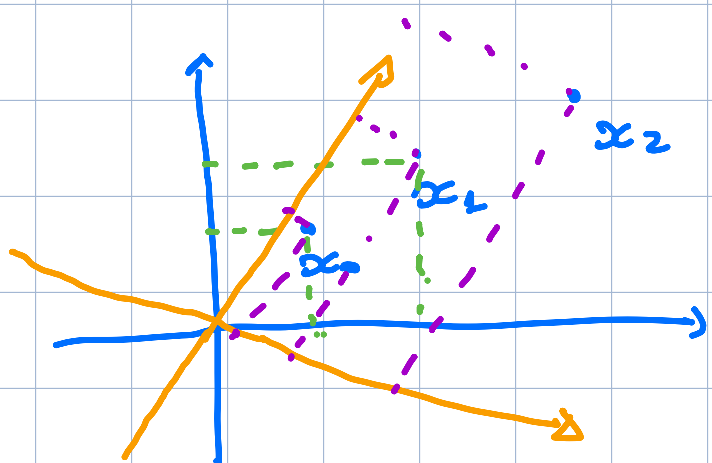
$$T = (t_1 \mid t_2 \mid \cdots \mid t_n)$$

$$x = Tz = (t_1 \ \cdots \ t_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} =$$

$$= t_1 z_1 + t_2 z_2 + \ldots + t_n z_n$$

$$z = T^{-1} x$$

$$\begin{cases} x(k+1) = A\,x(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$



CAMBIARE LA BASE AD UN SISTEMA DINAMICO VUOL DIRE APPLICARE LO STESSO CAMBIAMENTO DI BASE A CIASCUN VETTORE DI STATO $x(k)$

$$x(k) = T\,z(k)$$

$$x(k+1) = T\,z(k+1) = A\,x(k) =$$

$$= A\,T\,z(k)$$

$$T\,z(k+1) = A\,T\,z(k)$$

$$z(k+1) = T^{-1} A\,T\,z(k)$$

$$T^{-1} A\,T = \Lambda \qquad A \to \Lambda$$

$$A\,T = T\,\Lambda$$

$$A = T\,\Lambda\,T^{-1} \qquad \Lambda \to A$$

$$A \overset{T}{\sim} \Lambda$$

SIMILITUDINE FRA A E Λ PER TRAMITE DI T non-SINGOLARE

1. A E Λ HANNO LO STESSO SPETTRO

UN AUTOVALORE DI A È $\lambda \in \mathbb{C}$

T.C.

$$A - \lambda I \qquad (\lambda I - A)$$

È SINGOLARE.

GLI AUTOVALORI SI CALCOLANO ATTRAVERSO L'AZZERAMENTO DI

$$\det(A - \lambda I)$$

PRENDIAMO $\lambda \in \mathbb{C}$ AUTOVALORE DI A

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det(T \Delta T^{-1} - \lambda T T^{-1}) = 0$$

$$\det(T(\Delta - \lambda I) T^{-1}) = 0$$

$$\underbrace{\det(T)}_{\neq 0} \det(\Delta - \lambda I) \underbrace{\det(T^{-1})}_{\neq 0} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\det(\Delta - \lambda I) = 0$$

HYP

A PRESENTA AUTOVALORI REALI E DISTINTI

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad i \neq j$$

QUALE È LA MATRICE DI CAMBIAMENTO DI BASE $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ T.C.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0$$

$$\det(\Lambda - \lambda I) = 0$$

$$A\,T = T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

LE COLONNE DI T SONO GLI AUTOVETTORI DX DI A

UN AUTOVETTORE DX ASSOCIATO AD UN AUTOVALORE λ DI UNA MATRICE A È UN VETTORE $v \in \mathbb{R}^n$ T.C.

$$A v = \lambda v$$

$$A v - \lambda v = 0_n$$

$$(A - \lambda I_n) v = 0_n$$

$$v \in \ker (A - \lambda I_n)$$

$\ker (A - \lambda I_n)$ È UN SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^n$

AUTOSPAZIO

AD AUTOVALORI DISTINTI CORRISPONDONO AUTOVETTORI "DISTINTI" (NEL SENSO CHE APPARTENGONO AD AUTOSPAZI DISTINTI)

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \underline{v_1 \neq v_2}$$ (SI TROVANO IN AUTOSPAZI DISTINTI)

ASS.

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad v_1 = \alpha v_2$

$$A v_1 = A \alpha v_2 = \alpha A v_2 = \alpha \lambda_2 v_2$$

$$A \overbrace{(\alpha v_2)}^{v_1} = \lambda_1 \overbrace{(\alpha v_2)}^{v_1}$$

$$\cancel{\alpha} \lambda_2 \cancel{v_2} = \cancel{\alpha} \lambda_1 \cancel{v_2}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

GLI AUTOVETTORI DI A SONO UNA BASE PER $\mathbb{R}^n$

$$(w_1, \ldots, w_n)$$

$$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n = 0_n$$

$$\alpha_i = 0$$

INDUZIONE

$$v_1$$

$$\alpha_1 v_1 = 0_n$$

$$\alpha_1 = 0$$

$k < n$

$(v_1, \dots, v_k)$ LIN. INDIP. $\Rightarrow$ $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1})$ LIN. INDIP.

VERA

$$v_{k+1} = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_k v_k$$

$\gamma_i \neq 0$

$$A v_{k+1} = \gamma_1 A v_1 + \gamma_2 A v_2 + \dots + \gamma_k A v_k$$

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} = \gamma_1 \lambda_1 v_1 + \gamma_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \gamma_k \lambda_k v_k$$

$$\lambda_{k+1} (\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_k v_k) =$$

$$= \gamma_1 \lambda_1 v_1 + \gamma_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \gamma_k \lambda_k v_k$$

$$(\gamma_1 \lambda_1 - \gamma_1 \lambda_{k+1}) v_1 + (\gamma_2 \lambda_2 - \gamma_2 \lambda_{k+1}) v_2 +$$

$$+ \dots + (\gamma_k \lambda_k - \gamma_k \lambda_{k+1}) v_k = 0_n$$

$$\gamma_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) v_1 + \gamma_2 (\lambda_2 - \lambda_{k+1}) v_2 + \dots +$$

$$+ \gamma_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) v_k = 0_n$$

$$\gamma_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0 \qquad i = 1, \dots, k$$

MA $\quad \lambda_i \neq \lambda_{k+1} \qquad i = 1, \dots, k$

E ALLORA $\quad \gamma_i = 0 \qquad i = 1, \dots, k$

$$v_{k+1} = \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_k v_k$$

$$\gamma_i = 0 \; ; \; i = 1, \dots, k$$

$$T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

È UNA MATRICE DI CAMBIAMENTO DI BASE T.C.

$$A T = T \Lambda$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i) \quad i = 1, \dots, n$$

$$\begin{cases} x(k+1) = A x(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(k) = A^k x_0$$

$$\begin{cases} z(k+1) = \Lambda z(k) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

$$z(k) = \Lambda^k z_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} z_0$$

$$x(k) = T z(k)$$

$$x(k) = T \Lambda^k z_0$$

$z_0 = T^{-1} x_0$ È LO STATO INIZIALE "PROIETTATO" LUNGO GLI AUTOVETTORI DX DI A

$$x(k) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 & \\ & \lambda_2^k & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{01} \\ z_{02} \\ \vdots \\ z_{0n} \end{bmatrix} =$$

$$= (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) \begin{bmatrix} \lambda_1^k z_{01} \\ \lambda_2^k z_{02} \\ \vdots \\ \lambda_n^k z_{0n} \end{bmatrix} =$$

$$= (\lambda_1^k z_{01}) v_1 + (\lambda_2^k z_{02}) v_2 + \dots + (\lambda_n^k z_{0n}) v_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k z_{0i} v_i$$

$$\{ \lambda_i^0, \lambda_i, \lambda_i^2, \lambda_i^3, \dots, \lambda_i^k, \dots \}$$

LA SUCCESSIONE (UNILATERA)

$$\lambda_i^k \qquad k \geq 0$$

SI DEFINISCE CON L'APPELLATIVO DI

i-SIMO MODO NATURALE DEL SISTEMA DINAMICO

$$x(k+1) = A\,x(k)$$

I MODI NATURALI DEL SISTEMA SONO PARI AD n DOVE n È LA DIMENSIONE DELLO SPETTRO E L'ORDINE DI A.

L'ORDINE DI UN SISTEMA DINAMICO È PARI ALLA DIMENSIONE DELLO SPAZIO DI STATO.

SE A È DIAGONALIZZABILE ED HA n AUTOVALORI REALI E DISTINTI, IL SISTEMA DIN. AVRÀ n MODI NATURALI NELLA FORMA

$$\lambda_i^k \qquad i = 1, \dots, n$$

$$x(k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \, z_{0i} \, v_i = A^k x_0$$

ESPANSIONE (O DECOMPOSIZIONE) MODALE DELLA RISPOSTA LIBERA PER UN SISTEMA LTI-TD (A DIAGONALIZZABILE E AUTOVALORI REALI E DISTINTI).

$$\lim_{k \to +\infty} x(k) = 0_x$$

SE E SOLO SE

$$\lim_{k \to +\infty} \lambda_i^k = 0 \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \quad |\lambda_i| < 1 \quad \forall i$$