Calcolo antitrasformata di Laplace per risposta forzata di un sistema LTI-TC ad un ingresso periodico elementare

Inserisco la funzione di trasferimento

In[ ]:=
```
G[s_] := (1 + 2 s)/((s + 1) (s + 3) (s + 7))
```

e considero la trasformata di Laplace dell'ingresso periodico elementare $\sin(t)\,1(t)$

In[ ]:=
```
U[s_] := LaplaceTransform[Sin[t] × UnitStep[t], t, s]
```

In[ ]:=
```
U[s]
```

Out[ ]=

$$\frac{1}{1+s^2}$$

La risposta forzata (in s) e' il prodotto algebrico fra la FdT e U(s)

In[ ]:=
```
Y[s_] := G[s] × U[s]
```

In[ ]:=
```
Y[s]
```

Out[ ]=

$$\frac{1+2\,s}{(1+s)\,(3+s)\,(7+s)\,\left(1+s^2\right)}$$

In[ ]:=
```
Apart[Y[s]]
```

Out[ ]=

$$-\frac{1}{24\,(1+s)}+\frac{1}{16\,(3+s)}-\frac{13}{1200\,(7+s)}+\frac{7-s}{100\,\left(1+s^2\right)}$$

In[ ]:=
```
InverseLaplaceTransform[Y[s], s, t]
```

Out[ ]=

$$-\frac{13\,e^{-7\,t}}{1200}+\frac{e^{-3\,t}}{16}-\frac{e^{-t}}{24}+\frac{1}{100}\,(-\mathrm{Cos}[t]+7\,\mathrm{Sin}[t])$$

Scrivo in maniera simbolica la Y(s) mettendo in evidenza i fratti semplici (tutti, considero il trinomio non scomponibile)

In[∘]:= $\frac{C_1}{s-i}+\frac{C_2}{s+i}+\frac{C_3}{s+1}+\frac{C_4}{s+3}+\frac{C_5}{s+7}$

Out[∘]=

$$\frac{C_1}{-i+s}+\frac{C_2}{i+s}+\frac{C_3}{1+s}+\frac{C_4}{3+s}+\frac{C_5}{7+s}$$

Calcolo i coefficienti dei fratti semplici applicando la formula elementare di Heaviside

In[∘]:= $C_1 = \lim_{s\to i} (s-i)\, Y[s]$

Out[∘]=

$$-\frac{1}{200}-\frac{7\,i}{200}$$

In[∘]:= $C_2 = \lim_{s\to -i} (s+i)\, Y[s]$

Out[∘]=

$$-\frac{1}{200}+\frac{7\,i}{200}$$

In[∘]:= $C_3 = \lim_{s\to -1} (s+1)\, Y[s]$

Out[∘]=

$$-\frac{1}{24}$$

In[∘]:= $C_4 = \lim_{s\to -3} (s+3)\, Y[s]$

Out[∘]=

$$\frac{1}{16}$$

In[∘]:= $C_5 = \lim_{s\to -7} (s+7)\, Y[s]$

Out[∘]=

$$-\frac{13}{1200}$$

In[∘]:= $\frac{C_1}{s-i}+\frac{C_2}{s+i}+\frac{C_3}{s+1}+\frac{C_4}{s+3}+\frac{C_5}{s+7}$

Out[∘]=

$$-\frac{\frac{1}{200}+\frac{7\,i}{200}}{-i+s}-\frac{\frac{1}{200}-\frac{7\,i}{200}}{i+s}-\frac{1}{24\,(1+s)}+\frac{1}{16\,(3+s)}-\frac{13}{1200\,(7+s)}$$

Mi scrivo ora la componente di regime della risposta forzata al segnale periodico elementare sin(t)

In[∘]:= `y`$_{ss}$`[t_] := 2 ComplexExpand[Re[`C_1` Exp[I t]]]`

In[∘]:= `y`$_{ss}$`[t]`

Out[∘]=

$$2\left(-\frac{\text{Cos}[t]}{200}+\frac{7\,\text{Sin}[t]}{200}\right)$$

In[∘]:=
```
InverseLaplaceTransform[Y[s], s, t]
```

Out[∘]=

$$-\frac{13\, e^{-7t}}{1200}+\frac{e^{-3t}}{16}-\frac{e^{-t}}{24}+\frac{1}{100}\,(-\mathrm{Cos}[t]+7\,\mathrm{Sin}[t])$$

Determino la coppia ampiezza-fase della risposta a regime $y_{ss}(t) = X\sin(t+\theta)$. Devo quindi determinare la coppia $X>0$, θ tale che

$$-\frac{1}{100}\cos(t)+\frac{7}{100}\sin(t) = X\sin(t+\theta)$$

che si traduce in due equazioni (la prima valutando in zero il legame, la seconda valutando in zero le rispettive derivate prime)

$$-\frac{1}{100}\cos(t)+\frac{7}{100}\sin(t)\Big|_{t=0} = X\sin(t+\theta)\,|_{t=0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{100}\cos(t)+\frac{7}{100}\sin(t)\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}X\sin(t+\theta)\Big|_{t=0}$$

In[∘]:=

$$\mathrm{Solve}\left[\left\{\left(2\left(-\frac{\mathrm{Cos}[t]}{200}+\frac{7\,\mathrm{Sin}[t]}{200}\right) == X\,\mathrm{Sin}[t+\theta]\right) /. \{t\to 0\},\right.\right.$$
$$\left.\left.\left(D\left[2\left(-\frac{\mathrm{Cos}[t]}{200}+\frac{7\,\mathrm{Sin}[t]}{200}\right), t\right] == D[X\,\mathrm{Sin}[t+\theta], t]\right) /. \{t\to 0\},\ X>0\right\},\ \{X,\theta\}\right]$$

Out[∘]=

$$\left\{\left\{X\to \boxed{\frac{1}{10\sqrt{2}}\ \text{if}\ c_1\in\mathbb{Z}},\ \theta\to\boxed{2\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{-10+7\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right]+2\,\pi\,c_1\ \text{if}\ c_1\in\mathbb{Z}}\right\}\right\}$$

In[∘]:=

$$N\left[\frac{1}{10\sqrt{2}}\right]$$

Out[∘]=

0.0707107

In[∘]:=

$$N\left[2\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{-10+7\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right]\right]\left(\frac{180}{\pi}\right)$$

Out[∘]=

-8.1301

Grafico della risposta forzata e della risposta a regime

In[ ]:=

```
Plot[{-13 E^(-7 t)/1200 + E^(-3 t)/16 - E^(-t)/24 + 1/100 (-Cos[t] + 7 Sin[t]), 2 (-Cos[t]/200 + 7 Sin[t]/200)},
 {t, 0, 10}, PlotRange → All]
```

$$\text{Plot}\left[\left\{-\frac{13\, e^{-7t}}{1200}+\frac{e^{-3t}}{16}-\frac{e^{-t}}{24}+\frac{1}{100}\left(-\text{Cos}[t]+7\,\text{Sin}[t]\right),\ 2\left(-\frac{\text{Cos}[t]}{200}+\frac{7\,\text{Sin}[t]}{200}\right)\right\},\ \{t,0,10\},\ \text{PlotRange}\to\text{All}\right]$$

Out[ ]=