Relazione progetto automatica - Matteo Orlando 213430

Esercizio A

Studio del seguente sistema proprio LTI-TC $\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$ dove:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{9403}{288} & \frac{3847}{144} & \frac{-2933}{72} & \frac{-10747}{288} \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ \frac{8827}{288} & \frac{3847}{144} & \frac{-2789}{72} & \frac{-10747}{288} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Il sistema assegnato è proprio in quanto la matrice ingresso-uscita è nulla, $D = 0_{m \times n}$

1.A Modi naturali del sistema

I modi naturali caratterizzano qualitativamente il comportamento di un sistema dinamico in evoluzione libera. Essi sono legati agli autovalori della matrice A e sono essenziali per studiare il comportamento della risposta forzata. Gli autovalori di A che calcolo tramite la funzione Eigenvalues, coincidono con le soluzioni del polinomio caratteristico

```
λ = Eigenvalues[A]
```

$$\left\{-3+\frac{i}{4},\ -3-\frac{i}{4},\ -\frac{1}{3}+2\,i,\ -\frac{1}{3}-2\,i\right\}$$

```
CP = CharacteristicPolynomial[A, x]
```

$$\frac{5365}{144}+\frac{737\,x}{24}+\frac{2473\,x^2}{144}+\frac{20\,x^3}{3}+x^4$$

```
Solve[CP == 0]
```

$$\left\{\left\{x\to -3-\frac{i}{4}\right\},\ \left\{x\to -3+\frac{i}{4}\right\},\ \left\{x\to -\frac{1}{3}-2\,i\right\},\ \left\{x\to -\frac{1}{3}+2\,i\right\}\right\}$$

Ho ottenuto autovalori complessi e coniugati ed in particolare, avendo tutti parte reale negativa il sistema è asintoticamente stabile. Affinché la matrice A sia diagonalizzabile, occorre che sia soddisfatta la seguente condizione necessaria:

> Per ogni autovalore di A, la molteplicità algebrica degli autovalori deve essere pari alla sua molteplicità geometrica.

Oppure se il numero di modi naturali coincide esattamente con il grado del polinomio minimo, la matrice risulta diagonalizzabile. Dato che gli autovalori sono distinti potrei già asserire che la matrice sia diagonalizzabile.
Per correttezza vado a calcolare la molteplicità geometrica, ovvero la

dimensione della base di $\ker(A - \lambda I)$:

```
NullSpace[A - λ[[1]] × IdentityMatrix[4]]
```

$$\left\{\left\{\frac{583099}{1249755} - \frac{30808\,i}{1249755}, \frac{108768}{416585} + \frac{56192\,i}{1249755}, -\frac{420736}{1249755} + \frac{2104\,i}{416585}, 1\right\}\right\}$$

```
NullSpace[A - λ[[2]] × IdentityMatrix[4]]
```

$$\left\{\left\{\frac{583099}{1249755} + \frac{30808\,i}{1249755}, \frac{108768}{416585} - \frac{56192\,i}{1249755}, -\frac{420736}{1249755} - \frac{2104\,i}{416585}, 1\right\}\right\}$$

```
NullSpace[A - λ[[3]] × IdentityMatrix[4]]
```

$$\left\{\left\{\frac{3709}{7585} - \frac{11268\,i}{7585}, -\frac{5652}{7585} + \frac{54\,i}{7585}, -\frac{1641}{1517} - \frac{1854\,i}{1517}, 1\right\}\right\}$$

```
NullSpace[A - λ[[4]] × IdentityMatrix[4]]
```

$$\left\{\left\{\frac{3709}{7585} + \frac{11268\,i}{7585}, -\frac{5652}{7585} - \frac{54\,i}{7585}, -\frac{1641}{1517} + \frac{1854\,i}{1517}, 1\right\}\right\}$$

Come volevasi dimostrare, la molteplicità geometrica è pari alla molteplicità per ogni singolo autovalore, $m.a. = m.g. = 1$, dunque la matrice A è diagonalizzabile. Essendo gli autovalori complessi e coniugati, i modi naturali del sistema sono nella forma esponenziale: $e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $e^{\sigma t}\sin(\omega t)$ con $\sigma = Re(\lambda)$, $\omega = Im(\lambda)$

```
σ1 = Re[λ[[1]]]

-3

ω1 = Im[λ[[1]]]

1
-
4

σ2 = Re[λ[[3]]]

 1
- -
 3

ω2 = Im[λ[[3]]]

2
```

I modi naturali convergono a zero, dato che la parte reale è strettamente negativa. I modi naturali sono dunque:

```
Exp[σ1 t] × Cos[ω1 t]
```

$$e^{-3t} \text{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]$$

```
Exp[σ1 t] × Sin[ω1 t]
```

$$e^{-3t} \text{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]$$

```
Exp[σ2 t] × Cos[ω2 t]
```

$$e^{-t/3} \text{Cos}[2\,t]$$

```
Exp[σ2 t] × Sin[ω2 t]
```

$$e^{-t/3} \text{Sin}[2\,t]$$

I modi sono pseudo oscillatori di periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, dove i singoli periodi sono:

```
T1 = 2π/ω1
8 π
T2 = 2π/ω2
π
```

Verifico i modi naturali del sistema calcolando la matrice canonica Λ simile ad A, definita come:
$\Lambda = T^{-1}AT$, con T matrice di cambiamento di base costruita a partire da $T0$ matrice degli autovettori che sono correlati a ciascun autovalore

```
T0 = Transpose[Eigenvectors[A]]
```

$$\left\{\left\{\frac{583099}{1249755}-\frac{30808\,i}{1249755},\frac{583099}{1249755}+\frac{30808\,i}{1249755},\frac{3709}{7585}-\frac{11268\,i}{7585},\frac{3709}{7585}+\frac{11268\,i}{7585}\right\},\left\{\frac{108768}{416585}+\frac{56192\,i}{1249755},\frac{108768}{416585}-\frac{56192\,i}{1249755},-\frac{5652}{7585}+\frac{54\,i}{7585},-\frac{5652}{7585}-\frac{54\,i}{7585}\right\},\left\{-\frac{420736}{1249755}+\frac{2104\,i}{416585},-\frac{420736}{1249755}-\frac{2104\,i}{416585},-\frac{1641}{1517}-\frac{1854\,i}{1517},-\frac{1641}{1517}+\frac{1854\,i}{1517}\right\},\{1,1,1,1\}\right\}$$

```
T0 // MatrixForm
```

atrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{583099}{1249755}-\frac{30808\,i}{1249755} & \frac{583099}{1249755}+\frac{30808\,i}{1249755} & \frac{3709}{7585}-\frac{11268\,i}{7585} & \frac{3709}{7585}+\frac{11268\,i}{7585} \\ \frac{108768}{416585}+\frac{56192\,i}{1249755} & \frac{108768}{416585}-\frac{56192\,i}{1249755} & -\frac{5652}{7585}+\frac{54\,i}{7585} & -\frac{5652}{7585}-\frac{54\,i}{7585} \\ -\frac{420736}{1249755}+\frac{2104\,i}{416585} & -\frac{420736}{1249755}-\frac{2104\,i}{416585} & -\frac{1641}{1517}-\frac{1854\,i}{1517} & -\frac{1641}{1517}+\frac{1854\,i}{1517} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice di cambiamento di base T è per definizione così strutturata:
T=[Re(v_{12}), Im(v_{12}),Re(v_{34}), Im(v_{34})] dove v_{12} è l'autovettore associato a

λ_1 e λ_2 v_{34} è l'autovettore associato a λ_3 e λ_4

```
T = Transpose[{Re[T0[[All, 1]]], Im[T0[[All, 1]]], Re[T0[[All, 3]]], Im[T0[[All, 3]]]}]
```

$$\left\{\left\{\frac{583099}{1249755}, -\frac{30808}{1249755}, \frac{3709}{7585}, -\frac{11268}{7585}\right\}, \left\{\frac{108768}{416585}, \frac{56192}{1249755}, -\frac{5652}{7585}, \frac{54}{7585}\right\}, \left\{-\frac{420736}{1249755}, \frac{2104}{416585}, -\frac{1641}{1517}, -\frac{1854}{1517}\right\}, \{1, 0, 1, 0\}\right\}$$

```
T // MatrixForm
```

MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{583099}{1249755} & -\frac{30808}{1249755} & \frac{3709}{7585} & -\frac{11268}{7585} \\ \frac{108768}{416585} & \frac{56192}{1249755} & -\frac{5652}{7585} & \frac{54}{7585} \\ -\frac{420736}{1249755} & \frac{2104}{416585} & -\frac{1641}{1517} & -\frac{1854}{1517} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Costruisco la matrice canonica come per definizione e verifico che sia diagonale a blocchi

```
Λ = Simplify[Inverse[T].A.T]
```

$$\left\{\left\{-3, \frac{1}{4}, 0, 0\right\}, \left\{-\frac{1}{4}, -3, 0, 0\right\}, \left\{0, 0, -\frac{1}{3}, 2\right\}, \left\{0, 0, -2, -\frac{1}{3}\right\}\right\}$$

```
Λ // MatrixForm
```

MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La matrice è diagonale a blocchi, dunque passo a verificare i modi naturali attraverso la forma esponenziale di matrice

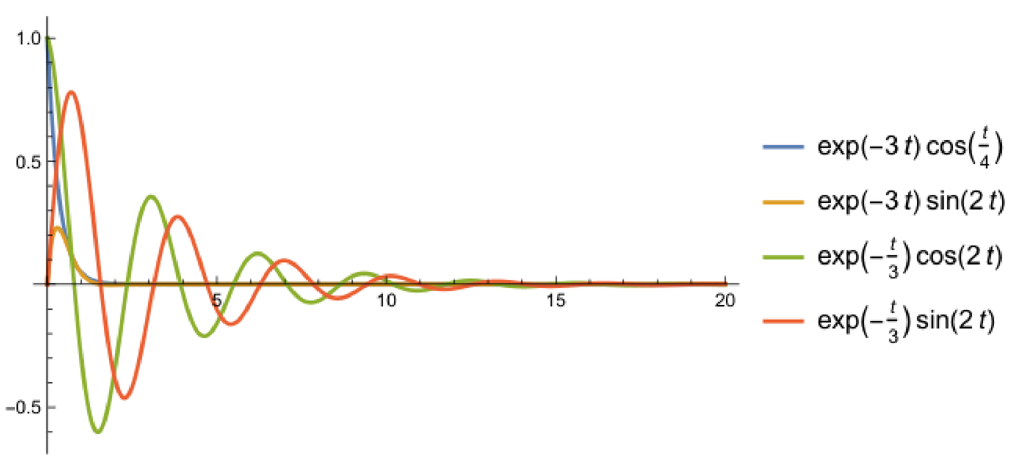
```
MatrixForm[MatrixExp[Λ t]]
```

MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} e^{-3t}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{4}\right] & e^{-3t}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{4}\right] & 0 & 0 \\ -e^{-3t}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{4}\right] & e^{-3t}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{4}\right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t/3}\,\mathrm{Cos}[2t] & e^{-t/3}\,\mathrm{Sin}[2t] \\ 0 & 0 & -e^{-t/3}\,\mathrm{Sin}[2t] & e^{-t/3}\,\mathrm{Cos}[2t] \end{pmatrix}$$

Come volevasi verificare, i modi naturali coincidono quelli calcolati in precedenza. Passo infine a tracciare il grafico

```
Plot[{Exp[σ1 t] × Cos[ω1 t], Exp[σ1 t] × Sin[ω2 t], Exp[σ2 t] × Cos[ω2 t],
  Exp[σ2 t] × Sin[ω2 t]}, {t, 0, 20}, PlotRange → All, PlotLegends → "Expressions"]
```



Il grafico conferma la convergenza a zero dei modi, come assunto precedentemente.

2.A Risposta libera

Determinare la risposta libera nello stato del sistema, equivale a studiare il suo comportamento nella configurazione in cui: l'ingresso è nullo e lo stato iniziale è assegnato e noto. La risposta libera nello stato per un sistema LTI-TC è pari a: $x_l(t) = e^{At}x_0 = e^{At}Tz_0 = Te^{\hat{\Lambda}t}z_0$

Dunque, posso calcolare la risposta libera nello stato utilizzando z_0, cioè lo

stato iniziale x_0, proiettato lungo le colonne di T la matrice di cambiamento di base, e la matrice di Rotation-Scaling $\hat{\Lambda}$.
Lo stato iniziale che andrò a considerare è:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Calcolo la risposta libera come per definizione, cioè $x_l(t) = e^{At}x_0$, in particolare non essendo lo stato combinazione lineare di nessuna delle colonne della matrice di cambiamento di base, nell'espansione modale della risposta libera mi aspetto che compaiano tutti i modi naturali del sistema.

```
xl1[t_] := Expand[Simplify[MatrixExp[A t].x0]]

xl1[t] // MatrixForm
```

atrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{31761999\, e^{-3t} \operatorname{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]}{2568145} - \frac{31761999\, e^{-t/3} \operatorname{Cos}[2t]}{2568145} - \frac{1472190137\, e^{-3t} \operatorname{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]}{10272580} - \frac{372104693\, e^{-t/3} \operatorname{Sin}[2t]}{23113305} \\ -\frac{28657472\, e^{-3t} \operatorname{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]}{2568145} + \frac{23521182\, e^{-t/3} \operatorname{Cos}[2t]}{2568145} - \frac{207507256\, e^{-3t} \operatorname{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]}{2568145} - \frac{7991314\, e^{-t/3} \operatorname{Sin}[2t]}{2568145} \\ -\frac{12853166\, e^{-3t} \operatorname{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]}{2568145} + \frac{20557601\, e^{-t/3} \operatorname{Cos}[2t]}{2568145} + \frac{265900552\, e^{-3t} \operatorname{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]}{2568145} - \frac{151125371\, e^{-t/3} \operatorname{Sin}[2t]}{7704435} \\ \frac{26323869\, e^{-3t} \operatorname{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]}{2568145} - \frac{31460159\, e^{-t/3} \operatorname{Cos}[2t]}{2568145} - \frac{3160905657\, e^{-3t} \operatorname{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]}{10272580} + \frac{99224467\, e^{-t/3} \operatorname{Sin}[2t]}{23113305} \end{pmatrix}$$

Proprio come mi aspettavo, compaiono tutti i modi naturali. Verifico il risultato calcolando la risposta libera a partire dalla matrice di cambiamento di base che genera la matrice di Rotation-Scaling, infatti partendo dalla relazione $AT = T\hat{\Lambda}$, si ottiene che la matrice di Rotation-Scaling è pari a $\hat{\Lambda} = T^{-1}AT$.
Per semplicità di calcoli riutilizzo la matrice di cambiamento di base T, calcolata in precedenza cambiando la sua nomenclatura con $\hat{T}$

$\hat{T} = T$

$$\left\{\left\{\frac{583099}{1249755}, -\frac{30808}{1249755}, \frac{3709}{7585}, -\frac{11268}{7585}\right\}, \left\{\frac{108768}{416585}, \frac{56192}{1249755}, -\frac{5652}{7585}, \frac{54}{7585}\right\}, \left\{-\frac{420736}{1249755}, \frac{2104}{416585}, -\frac{1641}{1517}, -\frac{1854}{1517}\right\}, \{1, 0, 1, 0\}\right\}$$

MatrixForm[$\hat{T}$]

MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{583099}{1249755} & -\frac{30808}{1249755} & \frac{3709}{7585} & -\frac{11268}{7585} \\ \frac{108768}{416585} & \frac{56192}{1249755} & -\frac{5652}{7585} & \frac{54}{7585} \\ -\frac{420736}{1249755} & \frac{2104}{416585} & -\frac{1641}{1517} & -\frac{1854}{1517} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proietto lo stato iniziale lungo le colonne di $\hat{T}$ e calcolo la matrice di Rotation-Scaling

z_0 = Inverse[$\hat{T}$].x_0

$$\left\{\left\{\frac{26323869}{2568145}\right\}, \left\{-\frac{3160905657}{10272580}\right\}, \left\{-\frac{31460159}{2568145}\right\}, \left\{\frac{99224467}{23113305}\right\}\right\}$$

$\hat{\Lambda} = \Lambda$

$$\left\{\left\{-3, \frac{1}{4}, 0, 0\right\}, \left\{-\frac{1}{4}, -3, 0, 0\right\}, \left\{0, 0, -\frac{1}{3}, 2\right\}, \left\{0, 0, -2, -\frac{1}{3}\right\}\right\}$$

MatrixForm[$\hat{\Lambda}$]

MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

A questo punto non mi resta che calcolare la risposta libera nello stato tramite matrice di Rotation-Scaling

```
xl2[t_] := Expand[Simplify[T̂.MatrixExp[Λ̂ t].z0]]

xl2[t] // MatrixForm
```

MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{31761999\, e^{-3t} \operatorname{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]}{2568145} - \frac{31761999\, e^{-t/3} \operatorname{Cos}[2t]}{2568145} - \frac{1472190137\, e^{-3t} \operatorname{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]}{10272580} - \frac{372104693\, e^{-t/3} \operatorname{Sin}[2t]}{23113305} \\ -\frac{28657472\, e^{-3t} \operatorname{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]}{2568145} + \frac{23521182\, e^{-t/3} \operatorname{Cos}[2t]}{2568145} - \frac{207507256\, e^{-3t} \operatorname{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]}{2568145} - \frac{7991314\, e^{-t/3} \operatorname{Sin}[2t]}{2568145} \\ -\frac{12853166\, e^{-3t} \operatorname{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]}{2568145} + \frac{20557601\, e^{-t/3} \operatorname{Cos}[2t]}{2568145} + \frac{265900552\, e^{-3t} \operatorname{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]}{2568145} - \frac{151125371\, e^{-t/3} \operatorname{Sin}[2t]}{7704435} \\ \frac{26323869\, e^{-3t} \operatorname{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]}{2568145} - \frac{31460159\, e^{-t/3} \operatorname{Cos}[2t]}{2568145} - \frac{3160905657\, e^{-3t} \operatorname{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]}{10272580} + \frac{99224467\, e^{-t/3} \operatorname{Sin}[2t]}{23113305} \end{pmatrix}$$

Come volevasi verificare i risultati sono i medesimi.Una verifica esaustiva per accertarsi che il risultato sia corretto, è assicurarsi che la risposta libera converga a zero, componente per componente.

```
Limit[xl2[t], t → ∞]

{{0}, {0}, {0}, {0}}
```

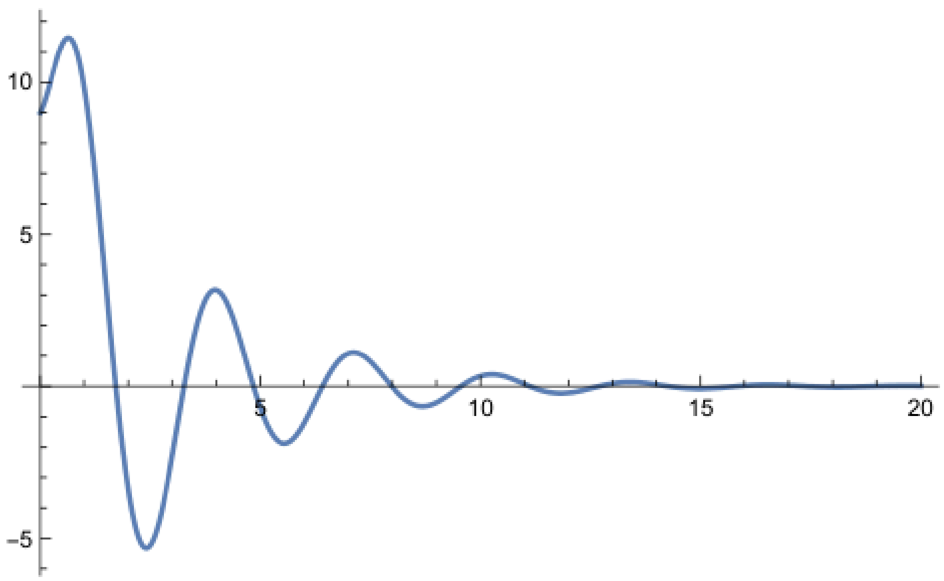
La risposta libera nell'uscita è pari al prodotto tra la matrice di uscita C e la risposta libera nello stato: $y_l(t) = Cx_l(t)$

```
yl[t_] := Expand[Simplify[C1.xl2[t]]]

yl[t]
```

$$\left\{\left\{\frac{31098528\, e^{-3t} \operatorname{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]}{2568145} - \frac{7985223\, e^{-t/3} \operatorname{Cos}[2t]}{2568145} + \frac{153686784\, e^{-3t} \operatorname{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]}{2568145} + \frac{29958291\, e^{-t/3} \operatorname{Sin}[2t]}{2568145}\right\}\right\}$$

il cui grafico è

```
Plot[y_l[t], {t, 0, 20}, PlotRange → All]
```



3.A Studio della configurazione degli stati iniziali che attivano sulla risposta libera alcuni modi naturali ed altri no

La risposta libera nello stato è una combinazione lineare dipendente dai modi naturali del sistema, perciò scegliendo un particolare stato iniziale che è "allineato" lungo la direzione di un autovalore, sulla risposta libera si accenderanno solo i modi associati a quell'autovalore. Se invece scegliessi combinazioni lineari dei modi naturali, si attiverebbero solo i modi presenti in quella combinazione lineare. Operativamente, si pone come stato iniziale una combinazione lineare delle colonne della matrice T, relative agli stato che voglio visualizzare. Analizzo la configurazione che attiva i modi naturali corrispondenti alla coppia di autovalori $-3+\frac{i}{4}, -3-\frac{i}{4}$, costruendo il seguente stato iniziale

```
x1 = 1 / 2 T̂[[All, 1]] + 1 / 2 T̂[[All, 2]]
```

$$\left\{\frac{184097}{833170}, \frac{191248}{1249755}, -\frac{207212}{1249755}, \frac{1}{2}\right\}$$

la risposta libera sarà

```
x_l3[t_] := Expand[Simplify[MatrixExp[A t].x1]]

MatrixForm[x_l3[t]]
```

atrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{184097\, e^{-3t}\cos\left[\frac{t}{4}\right]}{833170}+\frac{613907\, e^{-3t}\sin\left[\frac{t}{4}\right]}{2499510} \\ \frac{191248\, e^{-3t}\cos\left[\frac{t}{4}\right]}{1249755}+\frac{135056\, e^{-3t}\sin\left[\frac{t}{4}\right]}{1249755} \\ -\frac{207212\, e^{-3t}\cos\left[\frac{t}{4}\right]}{1249755}-\frac{213524\, e^{-3t}\sin\left[\frac{t}{4}\right]}{1249755} \\ \frac{1}{2}e^{-3t}\cos\left[\frac{t}{4}\right]+\frac{1}{2}e^{-3t}\sin\left[\frac{t}{4}\right] \end{pmatrix}$$

Verifico proiettando lo stato lungo le colonne di $\hat{T}$ e calcolando la risposta libera nello stato

```
z1 = Inverse[T̂].x1
```

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right\}$$

```
x_l3z[t_] := Expand[Simplify[T̂.MatrixExp[Λ̂ t].z1]]

x_l3z[t] // MatrixForm
```

atrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{184097\, e^{-3t}\cos\left[\frac{t}{4}\right]}{833170}+\frac{613907\, e^{-3t}\sin\left[\frac{t}{4}\right]}{2499510} \\ \frac{191248\, e^{-3t}\cos\left[\frac{t}{4}\right]}{1249755}+\frac{135056\, e^{-3t}\sin\left[\frac{t}{4}\right]}{1249755} \\ -\frac{207212\, e^{-3t}\cos\left[\frac{t}{4}\right]}{1249755}-\frac{213524\, e^{-3t}\sin\left[\frac{t}{4}\right]}{1249755} \\ \frac{1}{2}e^{-3t}\cos\left[\frac{t}{4}\right]+\frac{1}{2}e^{-3t}\sin\left[\frac{t}{4}\right] \end{pmatrix}$$

Come volevasi verificare. Analizzo adesso la configurazione che attiva i modi naturali corrispondenti alla coppia di autovalori $\frac{1}{3} + 2\imath, \frac{1}{3} - 2\imath$

```
x2 = 5 T̂[[All, 3]] + 3 T̂[[All, 4]]

{-15259/7585, -28098/7585, -13767/1517, 5}

xl4[t_] := Expand[Simplify[MatrixExp[A t].x2]]

MatrixForm[xl4[t]]
```

MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{15259\, e^{-t/3} \text{Cos}[2\,t]}{7585} + \frac{67467\, e^{-t/3} \text{Sin}[2\,t]}{7585} \\ -\frac{28098\, e^{-t/3} \text{Cos}[2\,t]}{7585} - \frac{17226\, e^{-t/3} \text{Sin}[2\,t]}{7585} \\ -\frac{13767\, e^{-t/3} \text{Cos}[2\,t]}{1517} + \frac{4347\, e^{-t/3} \text{Sin}[2\,t]}{1517} \\ 5\, e^{-t/3} \text{Cos}[2\,t] + 3\, e^{-t/3} \text{Sin}[2\,t] \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso, verifico proiettando lo stato lungo le colonne di $\hat{T}$ e calcolando la risposta libera nello stato

```
z2 = Inverse[T̂].x2

{0, 0, 5, 3}

xl4z[t_] := Expand[Simplify[T̂.MatrixExp[Λ̂ t].z2]]

xl4z[t] // MatrixForm
```

MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{15259\, e^{-t/3} \text{Cos}[2\,t]}{7585} + \frac{67467\, e^{-t/3} \text{Sin}[2\,t]}{7585} \\ -\frac{28098\, e^{-t/3} \text{Cos}[2\,t]}{7585} - \frac{17226\, e^{-t/3} \text{Sin}[2\,t]}{7585} \\ -\frac{13767\, e^{-t/3} \text{Cos}[2\,t]}{1517} + \frac{4347\, e^{-t/3} \text{Sin}[2\,t]}{1517} \\ 5\, e^{-t/3} \text{Cos}[2\,t] + 3\, e^{-t/3} \text{Sin}[2\,t] \end{pmatrix}$$

Come volevasi verificare.

4.A Funzione di trasferimento, i suoi poli e zeri

La funzione di trasferimento di un sistema LTI-TC è quella funzione di variabile complessa s tale che moltiplicata algebricamente per la L-Trasformata dell'ingresso restituisce la L-Trasformata della risposta forzata. È definita come

$$G(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)}$$

ovvero il rapporto tra L-Trasformata della risposta forzata e L-Trasformata dell'ingresso.
Esplicitando la L-Trasformata della risposta forzata:
$Y_f(s) = [C(sI_n - A)^{-1}B + D] \cdot U(s)$ la funzione di trasferimento è pari a $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$ e nel caso di sistema proprio $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$.
Calcolo la funzione di trasferimento tramite la definizione ricavata

```
G[s_] := Simplify[C1.Inverse[s IdentityMatrix[4] - A].B]

G[s]
```

$$\left\{\left\{\frac{432}{5365 + 4422\, s + 2473\, s^2 + 960\, s^3 + 144\, s^4}\right\}\right\}$$

Un polo è un numero complesso ρ tale che: $\lim_{s \to p} G(s) = \infty$, inoltre i poli sono le radici del denominatore della funzione di trasferimento ed anche un sottoinsieme dello spettro di A.
Uno zero è un numero complesso ζ tale che: $G(\zeta) = 0$, dunque gli zeri rappresentano le radici del numeratore della funzione di trasferimento.

Calcolo i poli e gli zeri della funzione di trasferimento

```
PoliFdt = Solve[Denominator[G[s]] == 0, s]
```

$$\left\{\left\{s \to -3 - \frac{i}{4}\right\}, \left\{s \to -3 + \frac{i}{4}\right\}, \left\{s \to -\frac{1}{3} - 2\,i\right\}, \left\{s \to -\frac{1}{3} + 2\,i\right\}\right\}$$

```
ZeriFdt = Solve[Numerator[G[s]] == 0, s]
```

{}

In questo caso i poli coincidono con gli autovalori di A.

Passo a verificare i calcoli tramite funzioni built-in di Mathematica

```
Σ = StateSpaceModel[{A, B, C1}]
```

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \frac{9403}{288} & \frac{3847}{144} & -\frac{2933}{72} & -\frac{10747}{288} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{8827}{288} & \frac{3847}{144} & -\frac{2789}{72} & -\frac{10747}{288} & \frac{1}{2} \\ \hline -3 & -3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)^{\mathcal{S}}$$

```
TransferFunctionModel[Σ]
```

$$\left(\frac{3}{\frac{5365}{144} + \frac{737\,s}{24} + \frac{2473\,s^2}{144} + \frac{20\,s^3}{3} + s^4}\right)^{\mathcal{T}}$$

```
TransferFunctionPoles[Σ][[1, 1]]
```

$$\left\{-3 - \frac{i}{4}, -3 + \frac{i}{4}, -\frac{1}{3} - 2\,i, -\frac{1}{3} + 2\,i\right\}$$

```
TransferFunctionZeros[Σ]
```

{{{}}}

come volevasi verificare.

5.A Risposta al gradino unitario

5.1A Calcolo risposta al gradino unitario

Il gradino unitario è un segnale di tipo polinomiale, right-sided definito tramite notazione piece-wise:

$$\$1(t) = \begin{cases} 1 \; t \geq 0 \\ 0 \; t < 0 \end{cases}$$

Per determinare la risposta al gradino unitario, utilizzerò la risposta forzata, che è pari al prodotto tra funzione di trasferimento e la L-Trasformata dell'ingresso. In questo caso l'ingresso è il gradino unitario quindi si utilizzerà la L-Trasformata del gradino unitario ricavata dalla L-Trasformata dell'esponenziale, considerando $a = 0$:

$$L[e^{at}] := \frac{1}{s-a}$$

da cui si ottiene che la L-Trasformata del gradino è pari a $L[e^{0t}] = \frac{1}{s}$.
Calcolo perciò la risposta forzata al gradino unitario:

```
U[s] = LaplaceTransform[1, t, s]

1/s

Yf[s_] := G[s] × U[s]

Yf[s]

{{432 / (s (5365 + 4422 s + 2473 s^2 + 960 s^3 + 144 s^4))}}
```

La risposta forzata ottenuta è però nel dominio della variabile complessa s e non nel dominio del tempo. Per ottenere la risposta forzata nel dominio del tempo, occorre anti-trasformare il risultato ottenuto. Dato che la risposta forzata è esprimibile come combinazione lineare del contributo dell'ingresso più la combinazione lineare dei modi naturali, posso anche usare la scomposizione in fratti semplici e la formula elementare di Heaviside per passare al dominio del tempo. La scomposizione in fratti semplici in questo caso oltre a considerare i poli della funzione di trasferimento, considera un polo aggiuntivo legato all'ingresso pari a $s = 0$. La formula elementare di Heaviside è pari a:

$$F(s) = \frac{n_f(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)} = \frac{C_1}{(s-p_1)} + \frac{C_2}{(s-p_2)} + \ldots + \frac{C_n}{(s-p_n)}$$

dove l'i-esimo coefficiente C_i è pari a: $C_i = \lim_{s \to p_i}(s-p_i)F(s)$. La scomposizione in fratti semplici risulta essere la seguente:

$$\mathbf{fs} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+3+\frac{i}{4}} + \frac{C_3}{s+3-\frac{i}{4}} + \frac{C_4}{s+\frac{1}{3}+2\,i} + \frac{C_4}{s+\frac{1}{3}-2\,i}$$

$$\frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{\left(3+\frac{i}{4}\right)+s} + \frac{C_3}{\left(3-\frac{i}{4}\right)+s} + \frac{C_4}{\left(\frac{1}{3}-2\,i\right)+s} + \frac{C_4}{\left(\frac{1}{3}+2\,i\right)+s}$$

I coefficienti risultano essere

C_1 = Limit[s Y_f[s], s → 0]

$$\left\{\left\{\frac{432}{5365}\right\}\right\}$$

C_2 = Limit[$\left(s+3+\frac{i}{4}\right)$ Y_f[s], s → $-3-\frac{i}{4}$]

$$\left\{\left\{-\frac{2\,692\,224}{74\,476\,205}-\frac{2\,612\,736\,i}{14\,895\,241}\right\}\right\}$$

C_3 = Limit[$\left(s+3-\frac{i}{4}\right)$ Y_f[s], s → $-3+\frac{i}{4}$]

$$\left\{\left\{-\frac{2\,692\,224}{74\,476\,205}+\frac{2\,612\,736\,i}{14\,895\,241}\right\}\right\}$$

C_4 = Limit[$\left(s+\frac{1}{3}+2\,i\right)$ Y_f[s], s → $-\frac{1}{3}-2\,i$]

$$\left\{\left\{-\frac{390\,744}{95\,021\,365}-\frac{3\,134\,052\,i}{95\,021\,365}\right\}\right\}$$

C_5 = Limit[$\left(s+\frac{1}{3}-2\,i\right)$ Y_f[s], s → $-\frac{1}{3}+2\,i$]

$$\left\{\left\{-\frac{390\,744}{95\,021\,365}+\frac{3\,134\,052\,i}{95\,021\,365}\right\}\right\}$$

perciò i fratti semplici sono pari a

fs

$$\left\{\left\{\frac{432}{5365\,s}-\frac{\frac{390\,744}{95\,021\,365}+\frac{3\,134\,052\,i}{95\,021\,365}}{\left(\frac{1}{3}-2\,i\right)+s}-\frac{\frac{390\,744}{95\,021\,365}+\frac{3\,134\,052\,i}{95\,021\,365}}{\left(\frac{1}{3}+2\,i\right)+s}-\frac{\frac{2\,692\,224}{74\,476\,205}-\frac{2\,612\,736\,i}{14\,895\,241}}{\left(3-\frac{i}{4}\right)+s}-\frac{\frac{2\,692\,224}{74\,476\,205}+\frac{2\,612\,736\,i}{14\,895\,241}}{\left(3+\frac{i}{4}\right)+s}\right\}\right\}$$

Ricordando di nuovo che la L-Trasformata dell'esponenziale è $L[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$, passo al dominio del tempo con le anti-trasformate dei singoli addendi della scomposizione.

$$\frac{1}{s} \to 1(t),\ \frac{1}{s+3+\frac{i}{4}} \to e^{(-3-\frac{i}{4})t}1(t),\ \frac{1}{s+3-\frac{i}{4}} \to e^{(-3+\frac{i}{4})t}1(t)$$

$$\frac{1}{s+\frac{1}{3}+2\imath} \rightarrow e^{(-\frac{1}{3}-2\imath)t}1(t), \frac{1}{s+\frac{1}{3}-2\imath} \rightarrow e^{(-\frac{1}{3}+2\imath)t}1(t)$$

La risposta forzata nel dominio del tempo sarà:

$$Y_f[t\_] := C_1 \, \text{UnitStep}[t] + C_2 \, \text{Exp}\left[\left(-3-\frac{i}{4}\right) t\right] \times \text{UnitStep}[t] + C_3 \, \text{Exp}\left[\left(-3+\frac{i}{4}\right) t\right] \times \text{UnitStep}[t] + C_4 \, \text{Exp}\left[\left(-\frac{1}{3}-2 i\right) t\right] \times \text{UnitStep}[t] + C_5 \, \text{Exp}\left[\left(-\frac{1}{3}+2 i\right) t\right] \times \text{UnitStep}[t]$$

$$Y_f[t]$$

$$\left\{\left\{\frac{432 \, \text{UnitStep}[t]}{5365} - \left(\frac{2692224}{74476205}+\frac{2612736 \, i}{14895241}\right) e^{\left(-3-\frac{i}{4}\right) t} \text{UnitStep}[t] - \left(\frac{2692224}{74476205}-\frac{2612736 \, i}{14895241}\right) e^{\left(-3+\frac{i}{4}\right) t} \text{UnitStep}[t] - \left(\frac{390744}{95021365}+\frac{3134052 \, i}{95021365}\right) e^{\left(-\frac{1}{3}-2 i\right) t} \text{UnitStep}[t] - \left(\frac{390744}{95021365}-\frac{3134052 \, i}{95021365}\right) e^{\left(-\frac{1}{3}+2 i\right) t} \text{UnitStep}[t]\right\}\right\}$$

Si può verificare il risultato attraverso funzione anti-trasformata di Laplace di Mathematica

$$Y_{f2}[t\_] := \text{Expand}\left[\text{InverseLaplaceTransform}\left[Y_f[s], s, t\right]\right]$$

$$Y_{f2}[t]$$

$$\left\{\left\{\frac{432}{5365} - \left(\frac{2692224}{74476205}+\frac{2612736 \, i}{14895241}\right) e^{\left(-3-\frac{i}{4}\right) t} - \left(\frac{2692224}{74476205}-\frac{2612736 \, i}{14895241}\right) e^{\left(-3+\frac{i}{4}\right) t} - \left(\frac{390744}{95021365}+\frac{3134052 \, i}{95021365}\right) e^{\left(-\frac{1}{3}-2 i\right) t} - \left(\frac{390744}{95021365}-\frac{3134052 \, i}{95021365}\right) e^{\left(-\frac{1}{3}+2 i\right) t}\right\}\right\}$$

Tuttavia la risposta forzata è combinazione lineare di termini reali. I termini complessi e coniugati della risposta forzata nel dominio del tempo devono essere convertiti in reali.

```
C23 = Simplify[ComplexExpand[C2 e^((-3-i/4) t) + C3 e^((-3+i/4) t)]]
```

$$\left\{\left\{-\frac{6912\, e^{-3t}\left(779\, \mathrm{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]+3780\, \mathrm{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]\right)}{74476205}\right\}\right\}$$

```
C45 = Simplify[ComplexExpand[C4 e^((-1/3-2 i) t) + C5 e^((-1/3+2 i) t)]]
```

$$\left\{\left\{-\frac{648\, e^{-t/3}\left(1206\, \mathrm{Cos}[2t]+9673\, \mathrm{Sin}[2t]\right)}{95021365}\right\}\right\}$$

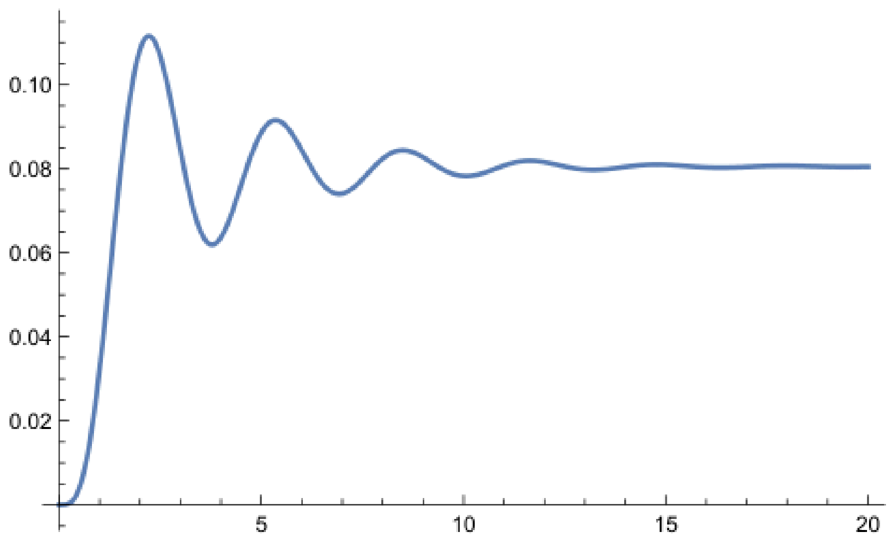
In definitiva la risposta al gradino unitario nel dominio del tempo dopo la conversione è pari a:

```
Yf3[t_] := C1 + C23 + C45
Yf3[t]
```

$$\left\{\left\{\frac{432}{5365}-\frac{6912\, e^{-3t}\left(779\, \mathrm{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]+3780\, \mathrm{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]\right)}{74476205}-\frac{648\, e^{-t/3}\left(1206\, \mathrm{Cos}[2t]+9673\, \mathrm{Sin}[2t]\right)}{95021365}\right\}\right\}$$

il cui grafico risulta essere il seguente:

```
Plot[Yf3[t], {t, 0, 20}, PlotRange → All]
```



5.2A Scomposizione risposta

La risposta forzata è composta da: risposta a regime o steady state response, che descrive il valore a cui la risposta forzata convergere e risposta transitoria, presente solo se i modi naturali convergono. La risposta a regime è pari al contributo dato dall'ingresso, ottenuto prendendo il gradino unitario e scalandolo di un fattore, interpretato come fattore di distorsione sul gradino. La risposta a regime è definita come segue:

$$\lim_{s \to 0} sY_f(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot G(s)\frac{1}{s} = G(0)$$

che in questo caso coincide con C_1 che sarà il fattore di distorsione. Inoltre $G(0)$ viene detto guadagno statico del sistema e rappresenta il livello su cui si assesta la risposta forzata a transitorio esaurito.

```
RispRegime = C1
```

$$\left\{\left\{\frac{432}{5365}\right\}\right\}$$

La risposta transitoria è data in questo caso, dagli ultimi quattro termini della risposta al gradino unitario.

```
RispTransitoria = Yf3[t] - C1
```

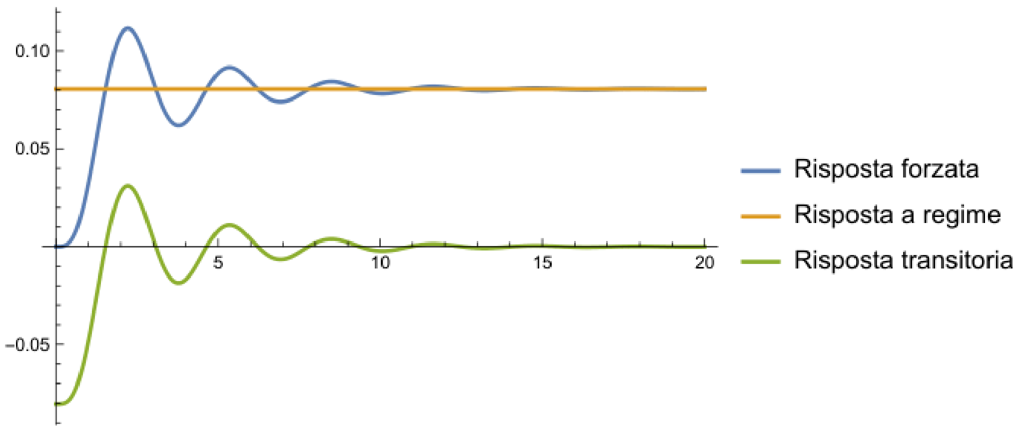
$$\left\{\left\{-\frac{6912\,e^{-3t}\left(779\,\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]+3780\,\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]\right)}{74\,476\,205}-\frac{648\,e^{-t/3}\left(1206\,\mathrm{Cos}[2\,t]+9673\,\mathrm{Sin}[2\,t]\right)}{95\,021\,365}\right\}\right\}$$

La risposta transitoria è tale perché si esaurisce nel tempo per $t \to \infty$. Infatti si può verificare che il limite per $t \to \infty$, della risposta transitoria è pari a zero

```
Limit[RispTransitoria, t → ∞]

{{0}}
```

Grafico dellla risposta forzata evidenziando la risposta a regime e la risposta transitoria.

```
Plot[{Yf3[t], RispRegime, RispTransitoria}, {t, 0, 20}, PlotRange → All,
 PlotLegends → {"Risposta forzata", "Risposta a regime", "Risposta transitoria"}]
```



da notare come appunto la risposta si assesta sulla sua componente a regime.

6.A Risposta al segnale periodico elementare $u(t) = A\sin(\omega t + \psi)1(t)$

6.1A Calcolo della risposta al segnale periodico elementare

Come nel caso del gradino unitario, per determinare la risposta al segnale periodico elementare, si utilizzerà la risposta forzata, valutando come ingresso il segnale periodico: $u(t) = A\sin(\omega t + \psi)1(t)$.
La L-Trasformata del segnale periodico elementare seno è pari a:

$$L[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Per semplificare i calcoli scelgo la seguente terna $A = 1, \omega = 1, \psi = 0$ affinché la L-Trasformata del segnale sarà $L[\sin(t)] = \dfrac{1}{s^2+1}$.

```
Uss[s_] := LaplaceTransform[Sin[t] × UnitStep[t], t, s]

Uss[s]
```

$$\frac{1}{1+s^2}$$

Calcolo la risposta forzata nel dominio della variabile complessa s

```
Yss[s_] := G[s] Uss[s]

Yss[s]
```

$$\left\{\left\{\frac{432}{(1+s^2)\,(5365+4422\,s+2473\,s^2+960\,s^3+144\,s^4)}\right\}\right\}$$

anche in questo caso utilizzo la scomposizione in fratti semplici e la formula elementare di Heaviside per ritornare nel dominio del tempo.

$$\frac{D_1}{s+i}+\frac{D_2}{s-i}+\frac{D_3}{s+3+\frac{i}{4}}+\frac{D_4}{s+3-\frac{i}{4}}+\frac{D_5}{s+\frac{1}{3}+2i}+\frac{D_6}{s+\frac{1}{3}-2i}$$

$$\frac{D_1}{i+s}+\frac{D_2}{-i+s}+\frac{D_3}{\left(3+\frac{i}{4}\right)+s}+\frac{D_4}{\left(3-\frac{i}{4}\right)+s}+\frac{D_5}{\left(\frac{1}{3}+2i\right)+s}+\frac{D_6}{\left(\frac{1}{3}-2i\right)+s}$$

A differenza del gradino unitario, in questo caso i fratti semplici sono sei, i primi due quali sono legati dall'ingresso ed i restanti quattro sono legati dai modi naturali. I coefficienti sono calcolati come visto in precedenza per il gradino unitario.

$$D_1 = \mathbf{Limit}\left[(s + i)\ Y_{ss}[s],\ s \to -i\right]$$

$$\left\{\left\{-\frac{20772}{588965} + \frac{18216\, i}{588965}\right\}\right\}$$

$$D_2 = \mathbf{Limit}\left[(s - i)\ Y_{ss}[s],\ s \to i\right]$$

$$\left\{\left\{-\frac{20772}{588965} - \frac{18216\, i}{588965}\right\}\right\}$$

$$D_3 = \mathbf{Limit}\left[\left(s + 3 + \frac{i}{4}\right) Y_{ss}[s],\ s \to -3 - \frac{i}{4}\right]$$

$$\left\{\left\{\frac{105541632}{7378280585} + \frac{381482496\, i}{7378280585}\right\}\right\}$$

$$D_4 = \mathbf{Limit}\left[\left(s + 3 - \frac{i}{4}\right) Y_{ss}[s],\ s \to -3 + \frac{i}{4}\right]$$

$$\left\{\left\{\frac{105541632}{7378280585} - \frac{381482496\, i}{7378280585}\right\}\right\}$$

$$D_5 = \mathbf{Limit}\left[\left(s + \frac{1}{3} + 2\, i\right) Y_{ss}[s],\ s \to -\frac{1}{3} - 2\, i\right]$$

$$\left\{\left\{\frac{2207412}{105293945} + \frac{63666\, i}{21058789}\right\}\right\}$$

$$D_6 = \mathbf{Limit}\left[\left(s + \frac{1}{3} - 2\, i\right) Y_{ss}[s],\ s \to -\frac{1}{3} + 2\, i\right]$$

$$\left\{\left\{\frac{2207412}{105293945} - \frac{63666\, i}{21058789}\right\}\right\}$$

In conclusione la scomposizione in fratti semplici sarà:

$$D_1\left(\frac{1}{s+i}\right)+D_2\left(\frac{1}{s-i}\right)+D_3\left(\frac{1}{s+3+\frac{i}{4}}\right)+D_4\left(\frac{1}{s+3-\frac{i}{4}}\right)+D_5\left(\frac{1}{s+\frac{1}{3}+2i}\right)+D_6\left(\frac{1}{s+\frac{1}{3}-2i}\right)$$

$$\left\{\left\{-\frac{\frac{20772}{588965}+\frac{18216\,i}{588965}}{-i+s}-\frac{\frac{20772}{588965}-\frac{18216\,i}{588965}}{i+s}+\frac{\frac{2207412}{105293945}-\frac{63666\,i}{21058789}}{\left(\frac{1}{3}-2\,i\right)+s}+\frac{\frac{2207412}{105293945}+\frac{63666\,i}{21058789}}{\left(\frac{1}{3}+2\,i\right)+s}+\frac{\frac{105541632}{7378280585}-\frac{381482496\,i}{7378280585}}{\left(3-\frac{i}{4}\right)+s}+\frac{\frac{105541632}{7378280585}+\frac{381482496\,i}{7378280585}}{\left(3+\frac{i}{4}\right)+s}\right\}\right\}$$

Utilizzo la L-Trasformata dell'esponenziale per passare al dominio del tempo:

$$\frac{1}{s+\imath}\to e^{(-\imath t)}1(t),\ \frac{1}{s-\imath}\to e^{(\imath t)}1(t),\ \frac{1}{s+3+\frac{\imath}{4}}\to e^{(-3-\frac{\imath}{4})t}1(t),\ \frac{1}{s+3-\frac{\imath}{4}}\to$$

$$\frac{1}{s+\frac{1}{3}+2\imath}\to e^{(-\frac{1}{3}-2\imath)t}1(t),\ \frac{1}{s+\frac{1}{3}-2\imath}\to e^{(-\frac{1}{3}+2\imath)t}1(t)$$

Anche in questo caso ricavo i termini reali e costruisco la risposta

```
D12 = Simplify[ComplexExpand[D1 e^(-i t) + D2 e^(i t)]]
```

$$\left\{\left\{-\frac{72\,(577\,\text{Cos}[t]-506\,\text{Sin}[t])}{588\,965}\right\}\right\}$$

```
D34 = Simplify[ComplexExpand[D3 e^((-3-i/4) t) + D4 e^((-3+i/4) t)]]
```

$$\left\{\left\{\frac{9216\,e^{-3t}\left(22\,904\,\text{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]+82\,787\,\text{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]\right)}{7\,378\,280\,585}\right\}\right\}$$

```
D56 = Simplify[ComplexExpand[D5 e^((-1/3-2 i) t) + D6 e^((-1/3+2 i) t)]]
```

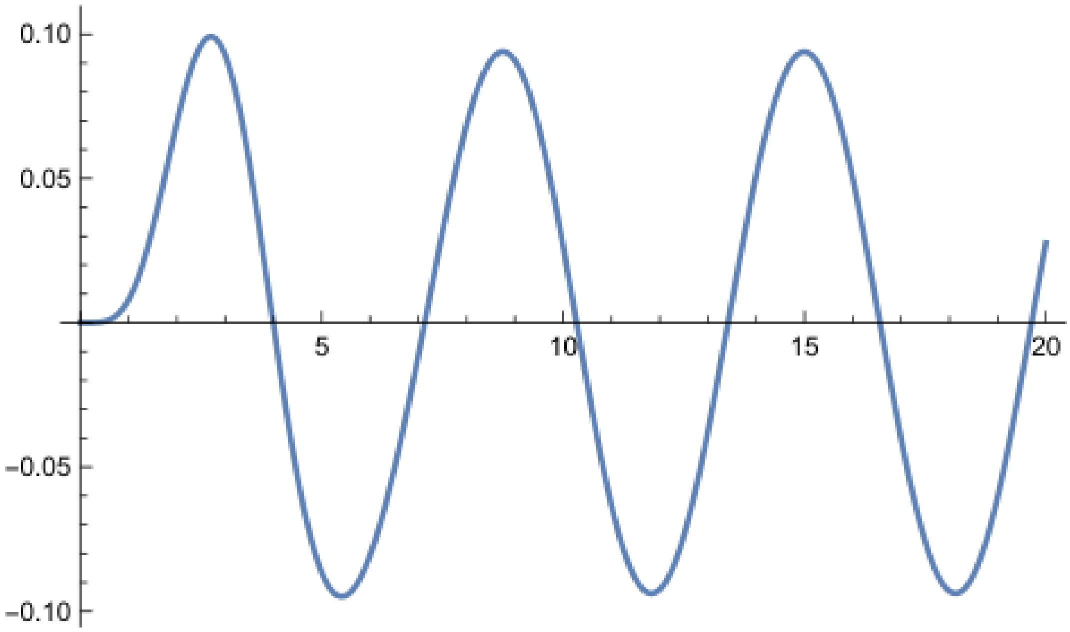
$$\left\{\left\{\frac{972\,e^{-t/3}\,(4542\,\text{Cos}[2\,t]+655\,\text{Sin}[2\,t])}{105\,293\,945}\right\}\right\}$$

```
Yss[t_] := D12 UnitStep[t] + D34 UnitStep[t] + D56 UnitStep[t]
Yss[t]
```

$$\left\{\left\{\frac{9216\,e^{-3t}\left(22\,904\,\text{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]+82\,787\,\text{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]\right)\text{UnitStep}[t]}{7\,378\,280\,585}-\frac{72\,(577\,\text{Cos}[t]-506\,\text{Sin}[t])\,\text{UnitStep}[t]}{588\,965}+\frac{972\,e^{-t/3}\,(4542\,\text{Cos}[2\,t]+655\,\text{Sin}[2\,t])\,\text{UnitStep}[t]}{105\,293\,945}\right\}\right\}$$

Grafico della risposta al segnale periodico elementare

```
Plot[Yss[t], {t, 0, 20}, PlotRange → All]
```



6.2A Scomposizione della risposta

Anche la risposta forzata del segnale periodico elementare si scompone in risposta a regime e risposta transitoria. La risposta avrà stessa pulsazione del segnale in ingresso ma con una distorsione su ampiezza e fase. La risposta a regime è pari a: $2Re[De^{it}]$ con D coefficiente legato all'ingresso. Uso la forma Amplitude-Fase per determinare la coppia ampiezza-fase della risposta a regime. Ponendo $Y_{ss}(t) = X + \sin(t + \phi)$

```
RispRegimePerio = ComplexExpand[2 Re[D2 e^(i t)]]
```

$$\left\{\left\{-\frac{41544 \, \text{Cos}[t]}{588965} + \frac{36432 \, \text{Sin}[t]}{588965}\right\}\right\}$$

Devo determinare $X > 0, \phi$ tale che $-\frac{41544\cos(t)}{588965} + \frac{36432\sin(t)}{588965} = X\sin(t + \phi)$ Ho un'equazione e due incognite, spezzo perciò l'equazione in due dove: nella prima valuto il tutto per $t = 0$ e nella seconda valuto le rispettive derivate per $t = 0$

```
AmpF = RispRegimePerio == X Sin[t + ϕ]
```

$$\left\{\left\{-\frac{41544\,\mathrm{Cos}[t]}{588965}+\frac{36432\,\mathrm{Sin}[t]}{588965}\right\}\right\} == X\,\mathrm{Sin}[t+\phi]$$

$$\mathrm{Solve}\left[\left\{(\mathrm{AmpF})\ /.\ \{t\to 0\},\ \left(D\left[-\frac{41544\,\mathrm{Cos}[t]}{588965}+\frac{36432\,\mathrm{Sin}[t]}{588965},t\right] == D[X\,\mathrm{Sin}[t+\phi],t]\right)\ /.\ \{t\to 0\},\ X>0\right\},\ \{X,\phi\}\right]$$

$$\left\{\left\{X\to \boxed{\frac{72}{13\sqrt{3485}}\ \text{if}\ c_1\in\mathbb{Z}},\ \phi\to \boxed{2\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{-45305+506\sqrt{3485}}{577\sqrt{3485}}\right]+2\pi c_1\ \text{if}\ c_1\in\mathbb{Z}}\right\}\right\}$$

Trasformo la coppia ampiezza fase in decimale per semplicità

$$N\left[\frac{72}{13\sqrt{3485}}\right]$$

0.0938183

$$N\left[2\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{-45305+506\sqrt{3485}}{577\sqrt{3485}}\right]\right]\left(\frac{180}{\pi}\right)$$

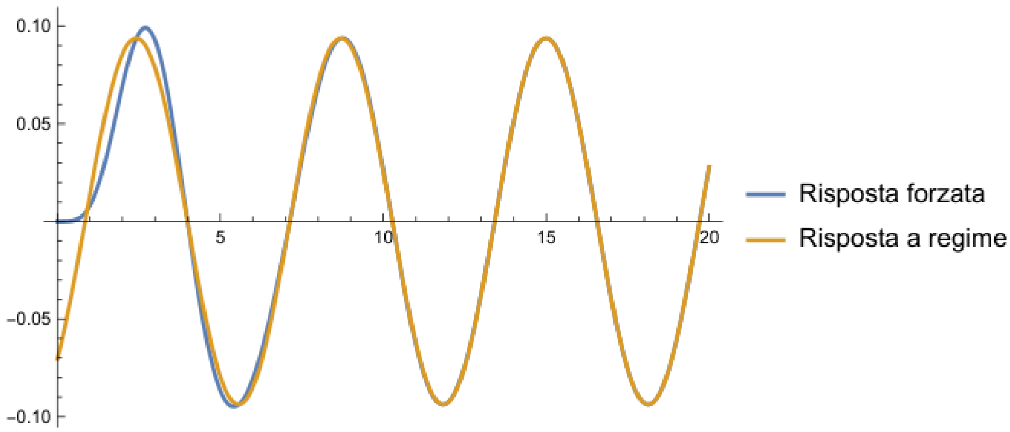
-48.7509

Dato che $\phi < 0$ si ha un ritardo di fase. Procedo infine con il grafico della risposta forzata e della risposta a regime:

```
Yss2[t_] := D12 + D34 + D56

Yss2[t]
```

$$\left\{\left\{\frac{9216\, e^{-3t}\left(22904 \operatorname{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]+82787 \operatorname{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]\right)}{7378280585}-\frac{72\,(577 \operatorname{Cos}[t]-506 \operatorname{Sin}[t])}{588965}+\frac{972\, e^{-t/3}\,(4542 \operatorname{Cos}[2t]+655 \operatorname{Sin}[2t])}{105293945}\right\}\right\}$$

```
Plot[{Yss2[t], RispRegimePerio}, {t, 0, 20}, PlotRange → All,
 PlotLegends → {"Risposta forzata", "Risposta a regime"}]
```



da notare anche come la risposta transitoria scompaia molto rapidamente.

7.A Modello ARMA e risposta alla rampa unitaria

7.1A Modello ARMA

Occorre adesso determinare il modello ARMA equivalente, individuando le condizioni iniziali sull'uscita compatibili con lo stato iniziale

$$x_{0ar} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Per determinare il modello ARMA, occorre valutare il sistema dinamico nella rappresentazione Ingresso-Uscita. Rispetto alla rappresentazione Ingresso-Stato-Uscita, per t equivalente qualsiasi sia l'ingresso, con condizioni iniziali nulle, l'uscita forzata corrispondente è la stessa a parità di ingresso. Ciò vale anche per la risposta libera e risposta forzata a patto che ci siano le stesse condizioni iniziali. Per prima cosa si valuta la funzione di trasferimento come un'identità dunque: $\frac{432}{5365+4422s+2473s^2+960s^3+144s^4} = \frac{Y(s)}{U(s)}$ da cui attraverso operazioni algebriche si ottiene la seguente equazione:

```
id = Expand[Denominator[G[s]] × Yar[s]] == Expand[Numerator[G[s]] × Uar[s]]

{{5365 Yar[s] + 4422 s Yar[s] + 2473 s² Yar[s] + 960 s³ Yar[s] + 144 s⁴ Yar[s]}} ==
  {{432 Uar[s]}}
```

L'equazione è nel dominio della variabile complessa s e va riportata nel dominio del tempo, attraverso l'anti-trasformata di Laplace. In particolare si sfrutta l'estensione del teorema della derivata per la L-Trasformata, che consente di valutare la L-Trasformata della derivata di ordine n di una funzione:

$$L[F^n(t)] = s^n F(s) + s^{n-1}F(0) + s^{n-2}F(0) + \ldots + s^n F^{n-2}(0) + s^n F^{n-1}(0)$$

nel caso in oggetto

$$y' = L^{-1}[sY(s)], y'' = L^{-1}[s^2Y(s)], y''' = L^{-1}[s^3Y(s)], y'''' = L^{-1}[s^4Y(s)]$$

Per passare da una rappresentazione Ingresso-Stato-Uscita, ad una rappresentazione Ingresso-Uscita, è necessario che le condizioni iniziali sulla risposta forzata siano nulle: $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 0$

```
InverseLaplaceTransform[id, s, t] /. {Yar[s] → LaplaceTransform[yar[t], t, s],
   Uar[s] → LaplaceTransform[uar[t], t, s]} /.
 {yar[0] → 0, yar'[0] → 0, yar''[0] → 0, yar'''[0] → 0, yar''''[0] → 0, uar[0] → 0}

{{5365 yar[t] + 4422 yar′[t] + 2473 yar″[t] + 960 yar^(3)[t] + 144 yar^(4)[t]}} ==
  {{432 uar[t]}}

EqDiff = 5365 yar[t] + 4422 yar′[t] + 2473 yar″[t] + 960 yar^(3)[t] + 144 yar^(4)[t] == 432 uar[t]

5365 yar[t] + 4422 yar′[t] + 2473 yar″[t] + 960 yar^(3)[t] + 144 yar^(4)[t] == 432 uar[t]
```

L'equazione differenziale costruita, presenta solo l'ingresso e l'uscita e ho dunque la rappresentazione Ingresso-Uscita del sistema. Ho ottenuto il modello ARMA del sistema.

A questo punto risolvo l'equazione differenziale nel dominio della variabile complessa s e ne ricavo la risposta e la risposta libera

```
EqDiffs =
 LaplaceTransform[EqDiff, t, s] /. {yar[t] → InverseLaplaceTransform[Yar[s], s, t],
   uar[t] → InverseLaplaceTransform[Uar[s], s, t]}

5365 Yar[s] + 4422 (-yar[0] + s Yar[s]) + 2473 (-s yar[0] + s^2 Yar[s] - yar'[0]) +
  960 (-s^2 yar[0] + s^3 Yar[s] - s yar'[0] - yar''[0]) +
  144 (-s^3 yar[0] + s^4 Yar[s] - s^2 yar'[0] - s yar''[0] - yar^(3)[0]) == 432 Uar[s]

Risposta = Collect[Solve[EqDiffs, Yar[s]][[1, 1]][[2]], Uar[s]]

           432 Uar[s]
---------------------------------------- +
5365 + 4422 s + 2473 s^2 + 960 s^3 + 144 s^4
 (4422 yar[0] + 2473 s yar[0] + 960 s^2 yar[0] + 144 s^3 yar[0] + 2473 yar'[0] +
    960 s yar'[0] + 144 s^2 yar'[0] + 960 yar''[0] + 144 s yar''[0] + 144 yar^(3)[0]) /
  (5365 + 4422 s + 2473 s^2 + 960 s^3 + 144 s^4)

Libera = Collect[Solve[EqDiffs, Yar[s]][[1, 1]][[2]], Uar[s]][[2]]

(4422 yar[0] + 2473 s yar[0] + 960 s^2 yar[0] + 144 s^3 yar[0] + 2473 yar'[0] +
   960 s yar'[0] + 144 s^2 yar'[0] + 960 yar''[0] + 144 s yar''[0] + 144 yar^(3)[0]) /
 (5365 + 4422 s + 2473 s^2 + 960 s^3 + 144 s^4)
```

Per calcolare la risposta libera mi occorrono altre quattro condizioni iniziali sull'uscita: $y(0) = Cx_0, y'(0) = CAx_0, y''(0) = CA^2x_0, y'''(0) = CA^3x_0$

```
yfar[0] = C1.x0ar
{{3}}
yfar'[0] = C1.A.x0ar
{{-6}}
yfar''[0] = C1.A.A.x0ar
{{6}}
yfar'''[0] = C1.A.A.A.x0ar
{{18}}
Yliberas[s_] := Libera
Yliberas[s]
```

$$\frac{6780 + 2523\, s + 2016\, s^2 + 432\, s^3}{5365 + 4422\, s + 2473\, s^2 + 960\, s^3 + 144\, s^4}$$

Riporto nel dominio del tempo la risposta libera nel dominio della variabile complessa s tramite l'anti-trasformata di Laplace

```
Ylibera[t_] := FullSimplify[InverseLaplaceTransform[Yliberas[s], s, t]]
Ylibera[t]
```

$$\frac{1}{5136290} 3\, e^{-3t} \left(5162912 \operatorname{Cos}\left[\frac{t}{4}\right] + 24377216 \operatorname{Sin}\left[\frac{t}{4}\right] - 9\, e^{8t/3} \left(2958 \operatorname{Cos}[2t] + 49279 \operatorname{Sin}[2t]\right)\right)$$

Verifico con un confronto tra rappresentazione Ingresso-Stato-Uscita e rappresentazione Ingresso-Uscita

```
YISU[t_] := InverseLaplaceTransform[C1.Inverse[s IdentityMatrix[4] - A].x0ar, s, t]

YISU[t]
```

$$\left\{\left\{\frac{24\,e^{\left(-3-\frac{i}{4}\right)t}\left((161341+761788\,i)+(161341-761788\,i)\,e^{\frac{i t}{2}}\right)}{2568145}-\frac{27\,e^{\left(-\frac{1}{3}-2i\right)t}\left((2958+49279\,i)+(2958-49279\,i)\,e^{4 i t}\right)}{10272580}\right\}\right\}$$

```
FullSimplify[Ylibera[t] - YISU[t]]

{{0}}
```

come volevasi verificare.

7.2A Risposta alla rampa unitaria

Procedo adesso a calcolare la risposta alla rampa unitaria, segnale polinomiale che può essere interpretato come velocità di variazione del segnale $u(t)$. La rampa unitaria è definita tramite notazione piece-wise:

$$t \cdot 1(t) = \begin{cases} t \; t \geq 0 \\ 0 \; t < 0 \end{cases}$$

La L-Trasformata della rampa unitaria si ottiene a partire da $L[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!e^{at}1(t)}] = \frac{1}{(s-a)^n}$ considerando $a = 0$ e $n = 2$ perciò $L[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^2}$. Calcolo la risposta forzata alla rampa unitaria, partendo dal modello ARMA ricavatomi

```
U_rampa[s] = LaplaceTransform[t UnitStep[t], t, s]
```

$$\frac{1}{s^2}$$

```
RispostaArmas = Solve[EqDiffs, Yar[s]][[1, 1]] /.
  {yar[0] → 3, yar'[0] → -6, yar''[0] → 6, yar'''[0] → 18}
```

$$\mathrm{Yar}[s] \to \frac{6780 + 2523\,s + 2016\,s^2 + 432\,s^3 + 432\,\mathrm{Uar}[s]}{5365 + 4422\,s + 2473\,s^2 + 960\,s^3 + 144\,s^4}$$

Calcolo la risposta forzata alla rampa unitaria nel dominio del tempo tramite l'anti-trasformata di Laplace

```
RispostaArmat = FullSimplify[ComplexExpand[InverseLaplaceTransform[
   (6780 + 2523 s + 2016 s^2 + 432 s^3 + 432 Uar[s])/(5365 + 4422 s + 2473 s^2 + 960 s^3 + 144 s^4) /. Uar[s] → 1/s^2, s, t]]]
```

$$\frac{1}{29\,567\,798\,147\,050}\, 3\left(147\,925\,152\,(-4422 + 5365\,t) + 43\,808\,e^{-3t}\left(686\,000\,633\,\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{4}\right] + 3\,228\,997\,196\,\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]\right) + 37\,845\,e^{-t/3}\,(4\,481\,634\,\mathrm{Cos}[2t] - 67\,112\,023\,\mathrm{Sin}[2t])\right)$$

"Scompongo" la risposta tramite la funzione Apart in risposta a regime che è la componente legata algebricamente all'ingresso, e risposta transitoria

```
RispostaArma = Apart[RispostaArmat]
```

$$\frac{432\,(-4422+5365\,t)}{28\,783\,225}+\frac{48\,e^{-3\,t}\left(686\,000\,633\,\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]+3\,228\,997\,196\,\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]\right)}{10\,799\,049\,725}+\frac{27\,e^{-t/3}\,(4\,481\,634\,\mathrm{Cos}[2\,t]-67\,112\,023\,\mathrm{Sin}[2\,t])}{7\,031\,581\,010}$$

```
RisRegimeRampa = RispostaArma[[1]]
```

$$\frac{432\,(-4422+5365\,t)}{28\,783\,225}$$

```
RisTransitoriaRampa = RispostaArma - RisRegimeRampa
```

$$\frac{48\,e^{-3\,t}\left(686\,000\,633\,\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]+3\,228\,997\,196\,\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]\right)}{10\,799\,049\,725}+\frac{27\,e^{-t/3}\,(4\,481\,634\,\mathrm{Cos}[2\,t]-67\,112\,023\,\mathrm{Sin}[2\,t])}{7\,031\,581\,010}$$

Come verifica, procedo a calcolare la risposta alla rampa sfruttando la scomposizione in fratti semplici e la formula elementare di Heaviside

Y_{rampa}[s_] := G[s] U_{rampa}[s]

Y_{rampa}[s]

$$\left\{\left\{\frac{432}{s^2\,(5365+4422\,s+2473\,s^2+960\,s^3+144\,s^4)}\right\}\right\}$$

$$\frac{F_1}{s}+\frac{F_2}{s^2}+\frac{F_3}{s+3+\frac{i}{4}}+\frac{F_4}{s+3-\frac{i}{4}}+\frac{F_5}{s+\frac{1}{3}+2\,i}+\frac{F_6}{s+\frac{1}{3}-2\,i}$$

$$\frac{F_1}{s}+\frac{F_2}{s^2}+\frac{F_3}{\left(3+\frac{i}{4}\right)+s}+\frac{F_4}{\left(3-\frac{i}{4}\right)+s}+\frac{F_5}{\left(\frac{1}{3}+2\,i\right)+s}+\frac{F_6}{\left(\frac{1}{3}-2\,i\right)+s}$$

Anche in questo caso i fratti semplici sono sei, i primi due quali sono legati dall'ingresso ed i restanti quattro sono legati dai modi naturali.

$$F_1 = \text{Limit}\left[D\left[s^2\, Y_{rampa}[s], s\right], s \to 0\right]$$

$$\left\{\left\{-\frac{1\,910\,304}{28\,783\,225}\right\}\right\}$$

$$F_2 = \text{Limit}\left[s^2\, Y_{rampa}[s], s \to 0\right]$$

$$\left\{\left\{\frac{432}{5365}\right\}\right\}$$

$$F_3 = \text{Limit}\left[\left(s + 3 + \frac{i}{4}\right) Y_{rampa}[s], s \to -3 - \frac{i}{4}\right]$$

$$\left\{\left\{\frac{181\,481\,472}{10\,799\,049\,725} + \frac{616\,287\,744\, i}{10\,799\,049\,725}\right\}\right\}$$

$$F_4 = \text{Limit}\left[\left(s + 3 - \frac{i}{4}\right) Y_{rampa}[s], s \to -3 + \frac{i}{4}\right]$$

$$\left\{\left\{\frac{181\,481\,472}{10\,799\,049\,725} - \frac{616\,287\,744\, i}{10\,799\,049\,725}\right\}\right\}$$

$$F_5 = \text{Limit}\left[\left(s + \frac{1}{3} + 2\, i\right) Y_{rampa}[s], s \to -\frac{1}{3} - 2\, i\right]$$

$$\left\{\left\{\frac{57\,585\,168}{3\,515\,790\,505} + \frac{2\,368\,764\, i}{3\,515\,790\,505}\right\}\right\}$$

$$F_6 = \text{Limit}\left[\left(s + \frac{1}{3} - 2\, i\right) Y_{rampa}[s], s \to -\frac{1}{3} + 2\, i\right]$$

$$\left\{\left\{\frac{57\,585\,168}{3\,515\,790\,505} - \frac{2\,368\,764\, i}{3\,515\,790\,505}\right\}\right\}$$

Ne estraggo le parti reali e calcolo la risposta alla rampa nel dominio del tempo t

```
F34 = Simplify[ComplexExpand[F3 e^((-3-i/4) t) + F4 e^((-3+i/4) t)]]
```

$$\left\{\left\{\frac{27648\, e^{-3t}\left(13128\,\text{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]+44581\,\text{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]\right)}{10799049725}\right\}\right\}$$

```
F56 = Simplify[ComplexExpand[F5 e^((-1/3-2i) t) + F6 e^((-1/3+2i) t)]]
```

$$\left\{\left\{\frac{1944\, e^{-t/3}\left(59244\,\text{Cos}[2t]+2437\,\text{Sin}[2t]\right)}{3515790505}\right\}\right\}$$

```
Yrampa[t_] := F1 UnitStep[t] + F2 t UnitStep[t] + F34 UnitStep[t] + F56 UnitStep[t]
Yrampa[t]
```

$$\left\{\left\{-\frac{1910304\,\text{UnitStep}[t]}{28783225}+\frac{432\,t\,\text{UnitStep}[t]}{5365}+\frac{27648\, e^{-3t}\left(13128\,\text{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]+44581\,\text{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]\right)\text{UnitStep}[t]}{10799049725}+\frac{1944\, e^{-t/3}\left(59244\,\text{Cos}[2t]+2437\,\text{Sin}[2t]\right)\text{UnitStep}[t]}{3515790505}\right\}\right\}$$

A meno di qualche manipolazione algebrica il risultato coincide con quello ottenuto precedentemente, una "verifica visiva" di ciò è facilitata dalla funzione Apart sulla risposta forzata

```
Apart[Yrampa[t]]
```

$$\left\{\left\{\frac{432\,(-4422+5365\,t)\,\text{UnitStep}[t]}{28783225}+\frac{27648\, e^{-3t}\left(13128\,\text{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]+44581\,\text{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]\right)\text{UnitStep}[t]}{10799049725}+\frac{1944\, e^{-t/3}\left(59244\,\text{Cos}[2t]+2437\,\text{Sin}[2t]\right)\text{UnitStep}[t]}{3515790505}\right\}\right\}$$

8.A Stato iniziale x_0 tale che la risposta al gradino coincida con il suo valore di regime

Per definizione la risposta è composta da risposta libera e risposta forzata, che a sua volta è composta da risposta a regime e risposta transitoria, dunque: risposta = risposta libera + risposta a regime + risposta transitoria. Affinché la risposta al gradino coincida con il suo valore di regime, è necessario che la risposta libera vada a compensare la risposta transitoria, in modo tale che la risposta del sistema sia pari alla sua componente di regime. Parto definendo il vettore stato iniziale

$$x0 = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix}$$

dopodiché calcolo risposta libera e risposta forzata e costruisco una combinazione lineare, dove entrambe si vanno a compensare

```
libera = Simplify[C1.Inverse[s IdentityMatrix[4] - A].x0] [[1]] [[1]]
```

$$\left(3\left(-\left(\left(6751+3433\,s+1104\,s^2+144\,s^3\right)\,x1\right)-\left(5382+2617\,s+960\,s^2+144\,s^3\right)\,x2+7711\,x3+3577\,s\,x3+1104\,s^2\,x3+144\,s^3\,x3+7039\,x4+3433\,s\,x4+1104\,s^2\,x4+144\,s^3\,x4\right)\right)/\left(5365+4422\,s+2473\,s^2+960\,s^3+144\,s^4\right)$$

```
forzata = Simplify[G[s] (1/s)] [[1]] [[1]]
```

$$\frac{432}{s\left(5365+4422\,s+2473\,s^2+960\,s^3+144\,s^4\right)}$$

Calcolo la componente a regime della risposta al gradino e la risposta transitoria come risposta forzata - risposta a regime

```
regime = (G[0] (1/s)) [[1]] [[1]]
```

$$\frac{432}{5365\ s}$$

```
transitoria = Factor[forzata - regime]
```

$$-\frac{432\ (4422+2473\ s+960\ s^2+144\ s^3)}{5365\ (37+6\ s+9\ s^2)\ (145+96\ s+16\ s^2)}$$

sommo risposta libera e transitoria, ne estraggo il numeratore e lo pongo pari a zero

```
Numerator[Simplify[Expand[libera + transitoria]]]
```

$$\begin{aligned}-3\ (&636\,768+36\,219\,115\ x1+28\,874\,430\ x2-41\,369\,515\ x3+\\ &s\ (356\,112+18\,418\,045\ x1+14\,040\,205\ x2-19\,190\,605\ x3-18\,418\,045\ x4)+\\ &240\ s^2\ (576+24\,679\ x1+21\,460\ x2-24\,679\ x3-24\,679\ x4)+\\ &144\ s^3\ (144+5365\ x1+5365\ x2-5365\ x3-5365\ x4)-37\,764\,235\ x4)\end{aligned}$$

Ho quattro incognite. Estraggo i coefficienti del polinomio al numeratore e determino le incognite x_i che annullano il set dei coefficienti del polinomio al numeratore

```
CL = CoefficientList[Numerator[Simplify[Expand[libera + transitoria]]], s]
```

$$\{-1910304 - 108657345\, x1 - 86623290\, x2 + 124108545\, x3 + 113292705\, x4,\ -3\,(356112 + 18418045\, x1 + 14040205\, x2 - 19190605\, x3 - 18418045\, x4),\ -720\,(576 + 24679\, x1 + 21460\, x2 - 24679\, x3 - 24679\, x4),\ -432\,(144 + 5365\, x1 + 5365\, x2 - 5365\, x3 - 5365\, x4)\}$$

```
Solve[CL == {0, 0, 0, 0}, {x1, x2, x3, x4}]
```

$$\left\{\left\{x1 \to -\frac{144}{5365},\ x2 \to -\frac{144}{5365},\ x3 \to -\frac{144}{5365},\ x4 \to 0\right\}\right\}$$

Verifico il risultato ottenuto, calcolando la risposta a partire dallo stato iniziale ricavato

```
Σ1 = StateSpaceModel[{A, B, C1}]
```

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \frac{9403}{288} & \frac{3847}{144} & -\frac{2933}{72} & -\frac{10747}{288} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{8827}{288} & \frac{3847}{144} & -\frac{2789}{72} & -\frac{10747}{288} & \frac{1}{2} \\ \hline -3 & -3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)^{\mathcal{S}}$$

```
Simplify[OutputResponse[{Σ1, {-144 / 5365, -144 / 5365, -144 / 5365, 0}}, 1, t]]
```

$$\left\{\frac{432}{5365}\right\}$$

Come volevasi verificare si è ottenuta la risposta a regime.

9.A Risposta al segnale $u(t) = 1(-t)$

Il calcolo della risposta al segnale $1(-t)$ presuppone la BIBO stabilità o in generale l'asintotica stabilità dato che l'asintotica stabilità implica la BIBO stabilità. Come visto in precedenza, il sistema è asintoticamente stabile dato che soddisfa il criterio di asintotica stabilità, dunque è BIBO stabile e posso procedere al calcolo della risposta al segnale $1(-t)$. La risposta al segnale è definita tramite la notazione piece-wise seguente:

$$y(t) = \begin{cases} y_{ss}(t) \; t < 0 \\ y_{\text{libera}}(t) \; t \geq 0 \end{cases}$$

Occorre perciò valutare la risposta per $t < 0$, pari alla risposta a regime e per $t \geq 0$ pari alla risposta libera. Per $t = 0$ l'ingresso del sistema è assente ed anche se la risposta è senza ingresso, tiene conto delle condizioni iniziali legate alla commutazione da uno a zero, dove in zero per continuità, valgono le seguenti relazioni:
$y_{ss}(0^-) = y_{\text{libera}}(0^+), y'_{ss}(0^-) = y'_{\text{libera}}(0^+), \ldots, y_{ss}^{(n-1)}(0^-) = y_{\text{libera}}^{(n-1)}(0^+)$
Per $t < 0$ la risposta è pari alla risposta a regime del gradino unitario

```
yneg = G[0][[1, 1]]

432
────
5365
```

per $t > 0$ mi ricavo lo stato iniziale a partire da: $\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \\ y'''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix}$ dove $\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} = O$ è detta matrice d'osservabilità da cui ricavo lo stato iniziale

$$x_0 = O^{-1} \begin{pmatrix} G(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
Obs = {C1⟦1⟧, (C1.A)⟦1⟧, (C1.A.A)⟦1⟧, (C1.A.A.A)⟦1⟧}

{{-3, -3, 3, 3}, {-3, 0, 3, 3}, {0, -3, 3, 0}, {3, 0, -3, 3}}

x0neg = Inverse[Obs].{{G[0]⟦1, 1⟧}, {0}, {0}, {0}}
```

$$\left\{\left\{-\frac{144}{5365}\right\}, \left\{-\frac{144}{5365}\right\}, \left\{-\frac{144}{5365}\right\}, \{0\}\right\}$$

A questo punto posso calcolare la risposta per $t > 0$ tramite scomposizione in fratti semplici e formula elementare di Heaviside come fatto più volte

```
ylibs = Simplify[(C1.Inverse[s IdentityMatrix[4] - A].x0neg)[[1, 1]]]
```

$$\frac{432\,(4422 + 2473\,s + 960\,s^2 + 144\,s^3)}{5365\,(5365 + 4422\,s + 2473\,s^2 + 960\,s^3 + 144\,s^4)}$$

$$\frac{H_1}{s + 3 + \frac{i}{4}} + \frac{H_2}{s + 3 - \frac{i}{4}} + \frac{H_3}{s + \frac{1}{3} + 2\,i} + \frac{H_4}{s + \frac{1}{3} - 2\,i}$$

$$\frac{H_1}{\left(3 + \frac{i}{4}\right) + s} + \frac{H_2}{\left(3 - \frac{i}{4}\right) + s} + \frac{H_3}{\left(\frac{1}{3} + 2\,i\right) + s} + \frac{H_4}{\left(\frac{1}{3} - 2\,i\right) + s}$$

$$H_1 = \mathtt{Limit}\left[\left(s + 3 + \frac{i}{4}\right) \mathtt{ylibs},\ s \to -3 - \frac{i}{4}\right]$$

$$\frac{2\,692\,224}{74\,476\,205} + \frac{2\,612\,736\,i}{14\,895\,241}$$

$$H_2 = \mathtt{Limit}\left[\left(s + 3 - \frac{i}{4}\right) \mathtt{ylibs},\ s \to -3 + \frac{i}{4}\right]$$

$$\frac{2\,692\,224}{74\,476\,205} - \frac{2\,612\,736\,i}{14\,895\,241}$$

$$H_3 = \mathtt{Limit}\left[\left(s + \frac{1}{3} + 2\,i\right) \mathtt{ylibs},\ s \to -\frac{1}{3} - 2\,i\right]$$

$$\frac{390\,744}{95\,021\,365} + \frac{3\,134\,052\,i}{95\,021\,365}$$

$$H_4 = \mathtt{Limit}\left[\left(s + \frac{1}{3} - 2\,i\right) \mathtt{ylibs},\ s \to -\frac{1}{3} + 2\,i\right]$$

$$\frac{390\,744}{95\,021\,365} - \frac{3\,134\,052\,i}{95\,021\,365}$$

anche in questo caso calcolo la parte reale dei coefficienti per avere la risposta nel dominio del tempo t

```
H12 = Simplify[ComplexExpand[H1 e^((-3-i/4) t) + H2 e^((-3+i/4) t)]]
```

$$\frac{6912\, e^{-3t}\left(779 \,\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]+3780\,\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]\right)}{74\,476\,205}$$

```
H34 = Simplify[ComplexExpand[H3 e^((-1/3-2i) t) + H4 e^((-1/3+2i) t)]]
```

$$\frac{648\, e^{-t/3}\left(1206\,\mathrm{Cos}[2t]+9673\,\mathrm{Sin}[2t]\right)}{95\,021\,365}$$

```
ylib[t_] := H12 UnitStep[t] + H34 UnitStep[t]
ylib[t]
```

$$\frac{6912\, e^{-3t}\left(779 \,\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]+3780\,\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]\right)\mathrm{UnitStep}[t]}{74\,476\,205}+\frac{648\, e^{-t/3}\left(1206\,\mathrm{Cos}[2t]+9673\,\mathrm{Sin}[2t]\right)\mathrm{UnitStep}[t]}{95\,021\,365}$$

```
FullSimplify[ylib[t]]
```

$$\frac{1}{2\,755\,619\,585}216\, e^{-3t}\left(922\,336\,\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]+4\,475\,520\,\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]+87\,e^{8t/3}\left(1206\,\mathrm{Cos}[2t]+9673\,\mathrm{Sin}[2t]\right)\right)\mathrm{UnitStep}[t]$$

Verifico la correttezza del risultato tramite anti-trasformata di Laplace della risposta nel dominio della variabile complessa s

```
ylibt = FullSimplify[ComplexExpand[InverseLaplaceTransform[ylibs, s, t]]]
```

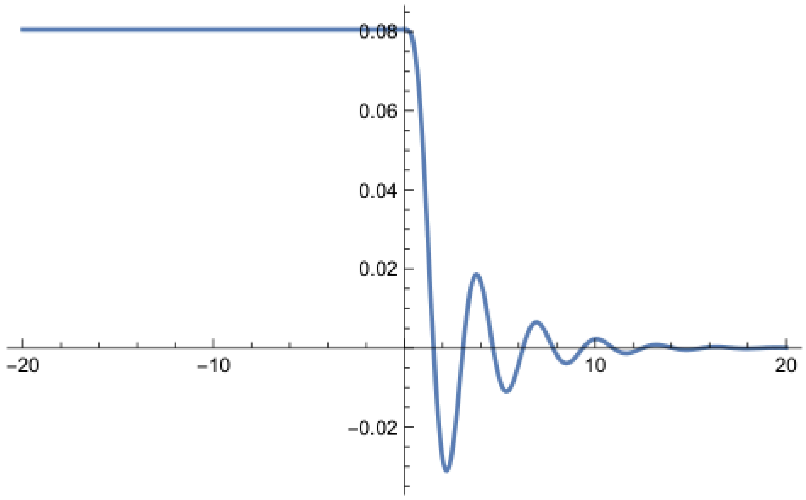
$$\frac{1}{2\,755\,619\,585}216\, e^{-3t}\left(922\,336\,\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]+4\,475\,520\,\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]+87\,e^{8t/3}\left(1206\,\mathrm{Cos}[2t]+9673\,\mathrm{Sin}[2t]\right)\right)$$

Combino le risposte per ottenere la risposta al segnale $1(-t)$ e ne faccio il grafico

```
y[t_] := { yneg   t < 0
         { ylibt  t ≥ 0

y[t]
```

$$\begin{cases} \frac{432}{5365} & t < 0 \\ \frac{216\, e^{-3t} \left(922336\, \mathrm{Cos}\left[\frac{t}{4}\right] + 4475520\, \mathrm{Sin}\left[\frac{t}{4}\right] + 87\, e^{8t/3}\, (1206\, \mathrm{Cos}[2t] + 9673\, \mathrm{Sin}[2t])\right)}{2755619585} & t \geq 0 \\ 0 & \mathrm{True} \end{cases}$$

```
Plot[y[t], {t, -20, 20}, PlotRange → All]
```



Esercizio B

Studio del seguente sistema proprio LTI-TD $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{76}{125} & -\frac{139}{125} & -\frac{64}{125} \\ -\frac{201}{125} & \frac{139}{125} & -\frac{61}{125} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema assegnato è proprio in quanto la matrice ingresso-uscita è nulla, $D = 0_{m \times n}$

1.B Modi naturali

Come per il caso tempo continuo, i modi naturali caratterizzano qualitativamente il comportamento di un sistema dinamico in evoluzione libera. Gli autovalori di A che calcolo tramite la funzione Eigenvalues, coincidono con le soluzioni del polinomio caratteristico

```
λ = Eigenvalues[A]
```

$$\left\{-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right\}$$

```
CP = CharacteristicPolynomial[A, x]
```

$$-\frac{1}{125} - \frac{3x}{25} - \frac{3x^2}{5} - x^3$$

```
Solve[CP == 0]
```

$$\left\{\left\{x \to -\frac{1}{5}\right\}, \left\{x \to -\frac{1}{5}\right\}, \left\{x \to -\frac{1}{5}\right\}\right\}$$

Essendo tutti gli autovalori strettamente inferiori di uno, i modi naturali del sistema convergeranno a zero, inoltre essendo in modulo strettamente inferiore all'unità, il criterio di asintotica stabilità è soddisfatto quindi il sistema è asintoticamente stabile. Gli autovalori o meglio, l'autovalore è reale e multiplo cioè ha molteplicità algebrica pari a tre. Devo verificare che la matrice A sia diagonalizzabile, tramite la stessa condizione necessaria del caso tempo discreto ovvero:

> La molteplicità algebrica di un autovalore deve essere pari alla sua molteplicità geometrica, questo per ogni autovalore nello spettro di A.

Calcolo dunque la molteplicità geometrica, ovvero la dimensione della base di $\ker(A - \lambda I)$

```
NullSpace[A - λ[[1]] × IdentityMatrix[3]]
```

$$\left\{\left\{-\frac{20}{19}, -\frac{24}{19}, 1\right\}\right\}$$

La molteplicità geometrica è pari a uno, dunque la matrice A non è diagonalizzabile. Per procedere farò uso della forma canonica di Jordan, generalizzazione della forma canonica diagonale. La matrice A è simile, tramite una opportuna matrice T, matrice di cambiamento di base non singolare ad una forma diagonale a blocchi. La matrice di Jordan è diagonale a blocchi e presenta tanti blocchi quanti sono gli autovalori di A e ha una struttura del tipo:

$$\begin{bmatrix} j_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & j_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & j_{k_n}(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

dove il blocco $j_{k_i}(\lambda_i)$ è il blocco di Jordan corrispondente all'autovalore λ_i di dimensione k_i. Costruisco la matrice di cambiamento di base T e la matrice di Jordan Λ:

```
{T, Λ} = JordanDecomposition[A]
```

$$\left\{\left\{\left\{-\frac{20}{19}, \frac{225}{361}, -\frac{17375}{6859}\right\}, \left\{-\frac{24}{19}, \frac{650}{361}, -\frac{25125}{6859}\right\}, \{1, 0, 0\}\right\}, \left\{\left\{-\frac{1}{5}, 1, 0\right\}, \left\{0, -\frac{1}{5}, 1\right\}, \left\{0, 0, -\frac{1}{5}\right\}\right\}\right\}$$

```
T // MatrixForm
```

atrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{20}{19} & \frac{225}{361} & -\frac{17375}{6859} \\ -\frac{24}{19} & \frac{650}{361} & -\frac{25125}{6859} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Λ // MatrixForm
```

atrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Si ha un unico blocco associato all'autovalore $-\frac{1}{5}$ I modi naturali del sistema a tempo discreto, sono del tipo polinomial-potenza e vengono individuati facilmente con la potenza di matrice

```
Λ̂ = MatrixPower[Λ, k] // MatrixForm
```

MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{5}\right)^{k} & -(-1)^{k}\,5^{1-k}\,k & \frac{1}{2}\,(-1)^{k}\,5^{2-k}\,(-1+k)\,k \\ 0 & \left(-\frac{1}{5}\right)^{k} & -(-1)^{k}\,5^{1-k}\,k \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{5}\right)^{k} \end{pmatrix}$$

I modi naturali sono tre e sono: $(-\dfrac{1}{5})^k$, $\dbinom{k}{1}(-\dfrac{1}{5})^{k-1}$, $\dbinom{k}{2}(-\dfrac{1}{5})^{k-2}$. La verifica del numero di modi naturali si può fare attraverso il grado del polinomio minimo

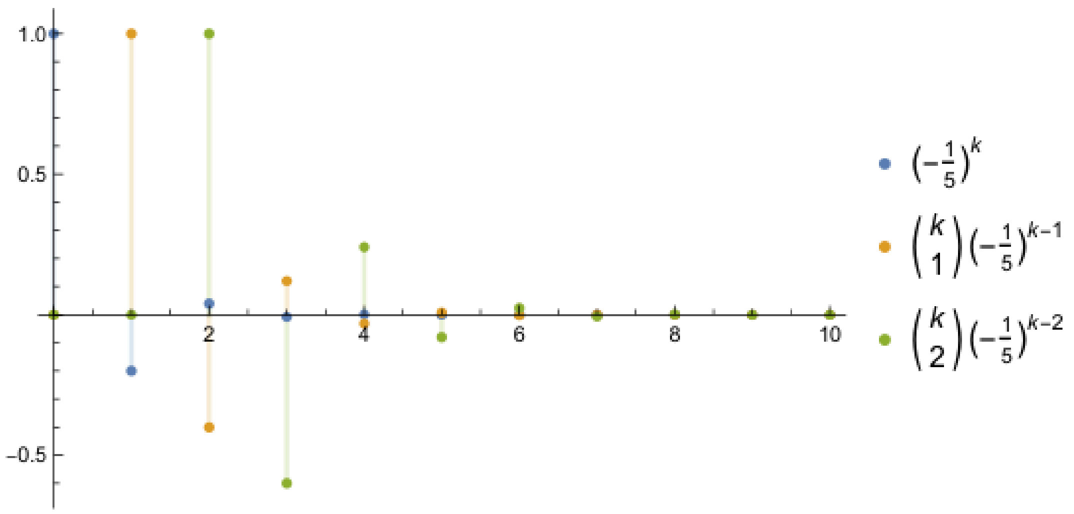
```
MatrixMinimalPolynomial[a_List?MatrixQ, x_] :=
 Module[{i, n = 1, qu = {}, mnm = {Flatten[IdentityMatrix[Length[a]]]}},
  While[Length[qu] == 0, AppendTo[mnm, Flatten[MatrixPower[a, n]]];
   qu = NullSpace[Transpose[mnm]];
   n++];
  First[qu].Table[x^i, {i, 0, n - 1}]]

Factor[MatrixMinimalPolynomial[A, x]]
```

$$\frac{1}{125}\,(1+5\,x)^{3}$$

Come volevasi verificare.

Grafico dei modi naturali

```
DiscretePlot[{(-1/5)^k, Binomial[k, 1] (-1/5)^(k-1), Binomial[k, 2] (-1/5)^(k-2)},
 {k, 0, 10}, PlotRange → All, PlotLegends → "Expressions"]
```



anche il grafico mostra come i modi naturali di natura pseudo-oscillatoria, convergano a zero.

2.B Risposta libera

La risposta libera nello stato per un sistema LTI-TD è pari a: $x_l(k) = A^k x_0 = T \cdot \Lambda^k \cdot z_0$, mentre la risposta libera nell'uscita, è pari a: $y_l(k) = C \cdot x_l(k)$. Posso perciò calcolare la risposta libera nello stato anche utilizzando z_0, cioè lo stato iniziale x_0 proiettato lungo le colonne di T, matrice di cambiamento di base, e la matrice di Jordan Λ.

```
x0 = {{-1}, {-2}, {3}}
```

$\{\{-1\}, \{-2\}, \{3\}\}$

```
z0 = Inverse[T].x0
```

$\left\{\{3\}, \left\{-\frac{37}{25}\right\}, \left\{-\frac{152}{125}\right\}\right\}$

```
xl[k_] := Simplify[T.MatrixPower[Λ, k].z0]
xl[k] // MatrixForm
```

atrixForm=

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{5}\right)^k \left(-1 - 20k + 16k^2\right) \\ 2\,(-1)^k\, 5^{-1-k} \left(-5 - 44k + 48k^2\right) \\ \left(-\frac{1}{5}\right)^{1+k} \left(-15 - 113k + 76k^2\right) \end{pmatrix}$$

La risposta libera è ottenuta come combinazione lineare dei modi del sistema, anche se attraverso le manipolazioni algebriche di Mathematica non si intuisce, sono presenti tutti i modi naturali. Verifico il risultato calcolando la risposta libera nello stato attraverso la sua definizione $x_l(k) = A^k x_0$

```
xl2[k_] := Simplify[MatrixPower[A, k].x0]
xl2[k] // MatrixForm
```

atrixForm=

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{5}\right)^k \left(-1 - 20k + 16k^2\right) \\ 2\,(-1)^k\, 5^{-1-k} \left(-5 - 44k + 48k^2\right) \\ \left(-\frac{1}{5}\right)^{1+k} \left(-15 - 113k + 76k^2\right) \end{pmatrix}$$

la risposta libera nell'uscita invece è pari a:

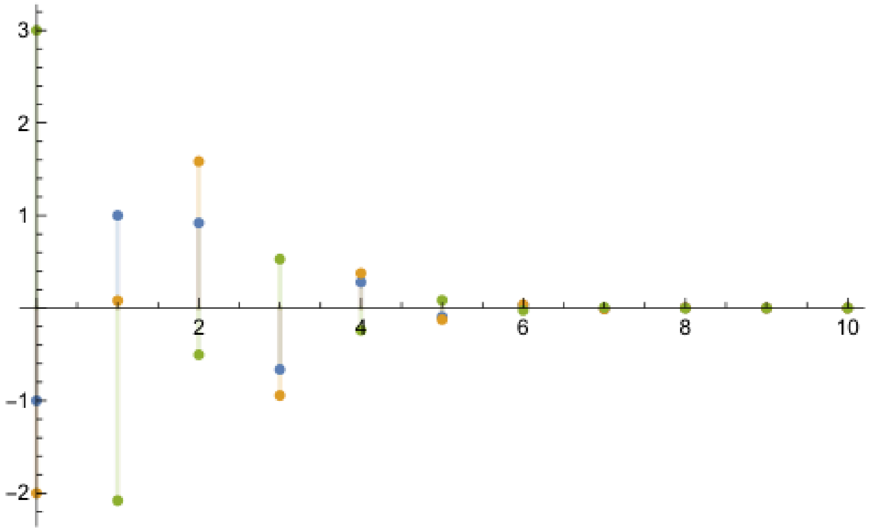
```
yl[k_] := Simplify[C1.xl[k]]
yl[k] // MatrixForm
```

atrixForm=

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{5}\right)^k \left(-1 - 20k + 16k^2\right) \end{pmatrix}$$

Grafico della risposta libera nello stato

```
DiscretePlot[{x_l[k][[1]], x_l[k][[2]], x_l[k][[3]]}, {k, 0, 10}, PlotRange → All]
```



anche in questo caso dal grafico si nota che la risposta nello stato converge a zero.

3.B Studio della configurazione degli stati iniziali che attivano sulla risposta libera alcuni modi naturali ed altri no

La risposta libera nello stato è una combinazione lineare dipendente dai modi naturali del sistema, perciò scegliendo un particolare stato iniziale che è “allineato” lungo la direzione di un autovalore, sulla risposta libera si accenderanno solo i modi associati a quell'autovalore. Se invece scegliessi combinazioni lineari dei modi naturali, si attiverebbero solo i modi presenti in quella combinazione lineare. Operativamente, si pone come stato iniziale una combinazione lineare delle colonne della matrice T relative allo stato che voglio visualizzare. Avendo un solo autovalore multiplo $-\frac{1}{5}$, attivo tutte le colonne

```
x1 = 15 T[[All, 1]] + 3 T[[All, 2]] + 4 T[[All, 3]]
```

$$\left\{-\frac{164975}{6859}, -\frac{193410}{6859}, 15\right\}$$

```
xl3[k_] := Simplify[MatrixPower[A, k].x1]

xl3[k] // MatrixForm
```

atrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{(-1)^k 5^{2-k} (6599-15352 k+14440 k^2)}{6859} \\ -\frac{2 (-1)^k 5^{1-k} (19341-31616 k+43320 k^2)}{6859} \\ (-1)^k 5^{1-k} (3-13 k+10 k^2) \end{pmatrix}$$

verifico proiettando lo stato lungo le colonne di T

```
z1 = Inverse[T].x1
```

$$\{15, 3, 4\}$$

```
xl3z[k_] := Simplify[T.MatrixPower[Λ, k].z1]

xl3z[k] // MatrixForm
```

atrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{(-1)^k 5^{2-k} (6599-15352 k+14440 k^2)}{6859} \\ -\frac{2 (-1)^k 5^{1-k} (19341-31616 k+43320 k^2)}{6859} \\ (-1)^k 5^{1-k} (3-13 k+10 k^2) \end{pmatrix}$$

come volevasi verificare.

4.B Funzione di trasferimento, i suoi poli e zeri

La funzione di trasferimento di un sistema LTI-TD è quella funzione di variabile complessa z tale che moltiplicata algebricamente per la Z-Trasformata dell'ingresso restituisce la Z-Trasformata della risposta forzata. È definita come $G(z) = \frac{Y_f(z)}{U(z)}$, ovvero il rapporto tra Z-Trasformata della risposta forzata e Z-Trasformata dell'ingresso. Esplicitando la Z-Trasformata della risposta forzata: $Y_f(z) = [C(zI_n - A)^{-1}B + D] \cdot U(z)$ la funzione di trasferimento è pari a $G(z) = C(zI_n - A)^{-1}B + D$ e nel caso di sistema proprio $G(z) = C(zI_n - A)^{-1}B$

```
G[z_] := Simplify[C1.Inverse[z IdentityMatrix[3] - A].B]
G[z]
```

$$\left\{\left\{\frac{125\ (1+z)}{(1+5\ z)^3}\right\}\right\}$$

la definizione di poli e zeri è la medesima del caso di sistema a tempo continuo perciò posso calcolarli alla stessa maniera:

```
PoliFdt = Solve[Denominator[G[z]] == 0, z]
```

$$\left\{\left\{z \to -\frac{1}{5}\right\}, \left\{z \to -\frac{1}{5}\right\}, \left\{z \to -\frac{1}{5}\right\}\right\}$$

```
ZeriFdt = Solve[Numerator[G[z]] == 0, z]
```

$$\{\{z \to -1\}\}$$

Anche in questo caso i poli coincidono con gli autovalori di A.Verifico i calcoli tramite funzioni built-in di Mathematica

```
Σ = StateSpaceModel[{A, B, C1}]
```

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{76}{125} & -\frac{139}{125} & -\frac{64}{125} & -1 \\ -\frac{201}{125} & \frac{139}{125} & -\frac{61}{125} & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)^{\mathcal{S}}$$

```
Simplify[TransferFunctionModel[Σ]]
```

$$\left(\frac{125\,(1+s)}{(1+5\,s)^3}\right)^{\mathcal{T}}$$

```
TransferFunctionPoles[Σ][[1, 1]]
```

$$\left\{-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right\}$$

```
TransferFunctionZeros[Σ]
```

$$\{\{\{-1\}\}\}$$

e come volevasi verificare i risultati sono corretti.

5.B Risposta al gradino unitario discreto

5.1B Calcolo risposta al gradino unitario discreto

Il gradino unitario è un segnale di tipo polinomiale, right-sided definito tramite notazione piece-wise:

$$1(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Per determinare la risposta al gradino unitario discreto, utilizzerò la risposta

forzata, che è pari al prodotto tra funzione di trasferimento e la Z-Trasformata dell'ingresso. In questo caso l'ingresso è il gradino unitario discreto quindi si utilizzerà la sua Z-Trasformata ricavata dalla Z-Trasformata dell'esponenziale, $Z[a^k 1(k)] := \dfrac{z}{z-a}$ considerando $a = 1$
$Z[1(k)] := \dfrac{z}{z-1}$

```
U[z] = ZTransform[UnitStep[k], k, z]
```

$$\frac{z}{-1+z}$$

```
Yf[z_] := G[z] × U[z]
Yf[z]
```

$$\left\{\left\{\frac{125\, z\, (1+z)}{(-1+z)\, (1+5\, z)^3}\right\}\right\}$$

La risposta forzata ottenuta è però nel dominio della variabile complessa z e non nel dominio del tempo. Per ottenere la risposta forzata nel dominio del tempo, occorre anti-trasformare il risultato ottenuto. Dato che la risposta forzata è esprimibile come combinazione lineare del contributo dell'ingresso più la combinazione lineare dei modi naturali, posso utilizzare la scomposizione in fratti semplici e la formula di Heaviside per passare al dominio del tempo, ma prima di fare ciò occorre dividere la risposta forzata per z.

$$\frac{Y_f[z]}{z}$$

$$\left\{\left\{\frac{125\, (1+z)}{(-1+z)\, (1+5\, z)^3}\right\}\right\}$$

La formula di Heaviside è pari a:

$$F(z) = \frac{n_f(z)}{(z-p_1)^{v_1}(z-p_2)^{v_2}\ldots(z-p_r)^{v_r}} = \frac{C_{11}}{(z-p_1)} + \frac{C_{12}}{(z-p_1)^2} + \ldots + \frac{}{(z}$$
$$+\frac{C_{21}}{(z-p_2)} + \frac{C_{22}}{(z-p_1)^2} + \ldots + \frac{C_{2v_2}}{(z-p_n)^{v_2}} + \ldots + \frac{C_{r_1}}{(z-p_r)} + \frac{C_{r_2}}{(z-p_r)^2} + \ldots +$$

con $i = 1..\,.r$, $j = 1..\,.v_i$ dove il coefficiente C_{ij} è pari a:
$C_{ij} = \frac{1}{(v_i - j)!} \lim_{z \to p_i} \frac{d^{v_i - j}}{dz^{v_i - j}}((z-p_i)^{v_i} F(z))$ con v_i molteplicità algebrica e j ordine. La scomposizione in fratti semplici ed il calcolo dei coefficienti risulta essere la seguente:

$$\frac{C_1}{z-1} + \frac{C_{21}}{z+\frac{1}{5}} + \frac{C_{22}}{\left(z+\frac{1}{5}\right)^2} + \frac{C_{23}}{\left(z+\frac{1}{5}\right)^3}$$

$$\frac{C_1}{-1+z} + \frac{C_{21}}{\frac{1}{5}+z} + \frac{C_{22}}{\left(\frac{1}{5}+z\right)^2} + \frac{C_{23}}{\left(\frac{1}{5}+z\right)^3}$$

$$C_1 = \text{Limit}\left[(z-1)\,\frac{Y_f[z]}{z},\ z \to 1\right]$$

$$\left\{\left\{\frac{125}{108}\right\}\right\}$$

$$C_{23} = \text{Limit}\left[\left(z+\frac{1}{5}\right)^3 \frac{Y_f[z]}{z},\ z \to -\frac{1}{5}\right]$$

$$\left\{\left\{-\frac{2}{3}\right\}\right\}$$

$$C_{22} = \text{Limit}\left[D\left[\left(z+\frac{1}{5}\right)^3 \frac{Y_f[z]}{z},\ z\right],\ z \to -\frac{1}{5}\right]$$

$$\left\{\left\{-\frac{25}{18}\right\}\right\}$$

$$C_{21} = \left(\frac{1}{5}\right)\text{Limit}\left[D\left[D\left[\left(z+\frac{1}{5}\right)^3 \frac{Y_f[z]}{z},\ z\right],\ z\right],\ z \to -\frac{1}{5}\right]$$

$$\left\{\left\{-\frac{25}{54}\right\}\right\}$$

Moltiplico per z i fratti semplici per "sistemare" e dalla Z-Trasformata

$Z[a^k 1(k)] := \dfrac{z}{z-a}$ mi ricavo la risposta forzata:

$$C_1\left(\frac{z}{z-1}\right)+C_{21}\left(\frac{z}{z+\frac{1}{5}}\right)+C_{22}\left(\frac{z}{\left(z+\frac{1}{5}\right)^2}\right)+C_{23}\left(\frac{z}{\left(z+\frac{1}{5}\right)^3}\right)$$

$$\left\{\left\{\frac{125\,z}{108\,(-1+z)}-\frac{2\,z}{3\left(\frac{1}{5}+z\right)^3}-\frac{25\,z}{18\left(\frac{1}{5}+z\right)^2}-\frac{25\,z}{54\left(\frac{1}{5}+z\right)}\right\}\right\}$$

$$y_f[k\_] := C_1\,\text{UnitStep}[k]+C_{21}\left(-\frac{1}{5}\right)^k\text{UnitStep}[k]+ C_{22}\,\text{Binomial}[k,1]\left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1}\text{UnitStep}[k]+C_{23}\,\text{Binomial}[k,2]\left(-\frac{1}{5}\right)^{k-2}\text{UnitStep}[k]$$

$$y_f[k]$$

$$\left\{\left\{\frac{125\,\text{UnitStep}[k]}{108}-\frac{1}{54}(-1)^k 5^{2-k}\,\text{UnitStep}[k]-\frac{1}{18}(-1)^{-1+k}5^{3-k}\,k\,\text{UnitStep}[k]-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2+k}(-1+k)\,k\,\text{UnitStep}[k]\right\}\right\}$$

Verifico i calcoli tramite la Z-Trasformata inversa di Mathematica

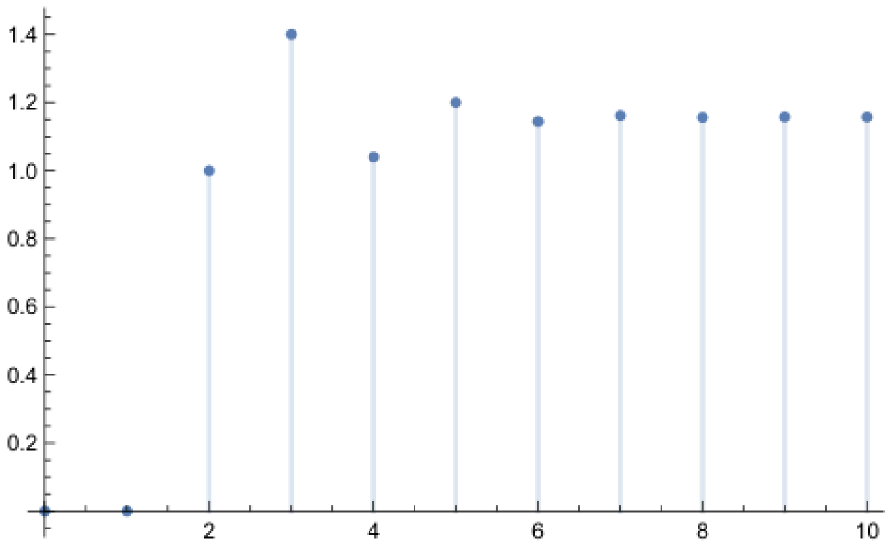
$$y_{f2}[k\_] := \text{Expand}\left[\text{InverseZTransform}\left[Y_f[z], z, k\right]\right]$$

$$y_{f2}[k]$$

$$\left\{\left\{\frac{125}{108}-\frac{1}{108}(-1)^k 5^{3-k}+\frac{11}{18}(-1)^k 5^{2-k}\,k-\frac{1}{3}(-1)^k 5^{2-k}\,k^2\right\}\right\}$$

Come volevasi verificare a meno di qualche manipolazione algebrica le risposte risultano uguali. Il grafico risulta essere il seguente:

```
DiscretePlot[{y_f2[k]〚1, 1〛}, {k, 0, 10}, PlotRange → All]
```



Da notare che la differenza tra numero di poli e numero di zeri, restituisce il numero di passi iniziali in cui la risposta al gradino è pari a zero, avendo tre poli ed uno zero il numero di passi iniziali è pari a due come il grafico della risposta mostra.

5.2 Scomposizione risposta

La risposta forzata è composta da: risposta a regime o steady state response, che descrive il valore a cui la risposta forzata convergere e risposta transitoria, presente solo se i modi naturali convergono. La risposta a regime è pari a $G[1] = C_1$

`RispRegime = ` C_1 `UnitStep[k]`

$$\left\{\left\{\frac{125\ \text{UnitStep}[k]}{108}\right\}\right\}$$

La risposta transitoria è ricavabile facilmente rimuovendo la componente a regime dalla risposta forzata ottenuta.

```
RispTransitoria = yf[k] - RispRegime
```

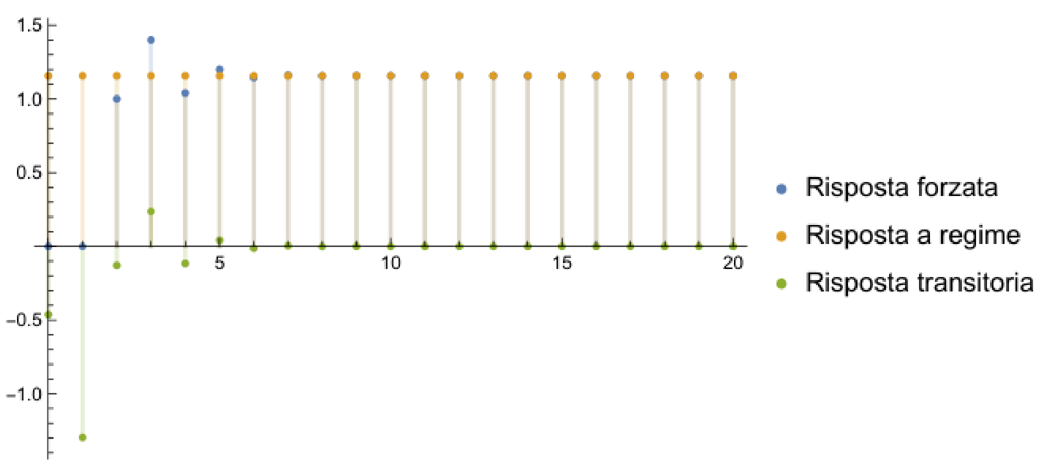
$$\left\{\left\{-\frac{1}{54}(-1)^k 5^{2-k}\,\text{UnitStep}[k]-\frac{1}{18}(-1)^{-1+k}5^{3-k}\,k\,\text{UnitStep}[k]-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2+k}(-1+k)\,k\,\text{UnitStep}[k]\right\}\right\}$$

La risposta transitoria è tale perché si esaurisce nel tempo per $k \to \infty$. Infatti si può verificare che il limite per $k \to \infty$, della risposta transitoria è pari a zero

```
Limit[RispTransitoria, k → ∞]

{{0}}
```

Grafico della risposta forzata evidenziando la risposta a regime e la risposta transitoria.

```
DiscretePlot[{yf2[k][[1, 1]], RispRegime[[1, 1]], RispTransitoria[[1, 1]]},
 {k, 0, 20}, PlotRange → All,
 PlotLegends → {"Risposta forzata", "Risposta a regime", "Risposta transitoria"}]
```



---

6. Modelli ARMA e risposta all'ingresso $u(k)$

6.1B Modello ARMA

Occorre adesso determinare i modello ARMA equivalenti, individuando le condizioni iniziali sull'uscita compatibili con lo stato iniziale

$$x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Un modello ARMA a tempo discreto si determina allo stesso modo che a tempo continuo. Per prima cosa si valuta la funzione di trasferimento come un'identità dunque: $\dfrac{125(1+z)}{(1+5z)^3} = \dfrac{Y(z)}{U(z)}$ da cui attraverso operazioni algebriche si ottiene la seguente equazione:

```
id = Expand[Denominator[G[z]] × Yar[z]] == Expand[Numerator[G[z]] × Uar[z]]

{{Yar[z] + 15 z Yar[z] + 75 z^2 Yar[z] + 125 z^3 Yar[z]}} == {{125 Uar[z] + 125 z Uar[z]}}
```

Per poter portare l'equazione dal dominio della variabile complessa z al dominio del tempo k, utilizzo l'estensione ad n del teorema del anticipo elementare che risulta essere il seguente:
$Z[f(k+n)] = z^n F(z) - z^n F(0) - z^{n-1} F(1) - \ldots - zF(n-1)$ e
$Z[f(k-n)] = z^{-n} F(z)$
Perciò l'equazione diventa:

```
eq = id /. {Yar[z] → Yar[k], z Yar[z] → Yar[k + 1], z^2 Yar[z] → Yar[k + 2],
   z^3 Yar[z] → Yar[k + 3], Uar[z] → Uar[k], z Uar[z] → Uar[k + 1]}

{{Yar[k] + 15 Yar[1 + k] + 75 Yar[2 + k] + 125 Yar[3 + k]}} == {{125 Uar[k] + 125 Uar[1 + k]}}
```

L'equazione costruita, presenta solo l'ingresso e l'uscita e ho dunque la rappresentazione Ingresso-Uscita del sistema o meglio un modello ARMA. Un altro modo per vedere il modello ARMA, è quello di trasformare gli anticipi in ritardi:

```
eq2 = eq /. {Yar[k] → Yar[k' - 3], Yar[k + 1] → Yar[k' - 2], Yar[k + 2] → Yar[k' - 1],
   Yar[k + 3] → Yar[k'], Uar[k] → Uar[k' - 3], Uar[k + 1] → Uar[k' - 2]}

{{Yar[-3 + k'] + 15 Yar[-2 + k'] + 75 Yar[-1 + k'] + 125 Yar[k']}} ==
 {{125 Uar[-3 + k'] + 125 Uar[-2 + k']}}
```

A questo punto risolvo l'equazione nel dominio della variabile complessa z e mi calcolo la risposta e la componente libera di essa:

```
eqz = ZTransform[eq, k, z] /.
  {ZTransform[Yar[k], k, z] → Yar[z], ZTransform[Uar[k], k, z] → Uar[z]}
```

$$\{\{Yar[z] + 15\,(-z\,Yar[0] + z\,Yar[z]) + 75\,(-z^2\,Yar[0] - z\,Yar[1] + z^2\,Yar[z]) + 125\,(-z^3\,Yar[0] - z^2\,Yar[1] - z\,Yar[2] + z^3\,Yar[z])\}\} == \{\{125\,Uar[z] + 125\,(-z\,Uar[0] + z\,Uar[z])\}\}$$

```
Risposta = Collect[Solve[eqz, Yar[z]][[1, 1]][[2]], Uar[z]]
```

$$\frac{5\,(25 + 25\,z)\,Uar[z]}{(1 + 5\,z)^3} + \frac{1}{(1 + 5\,z)^3} 5\,(-25\,z\,Uar[0] + 3\,z\,Yar[0] + 15\,z^2\,Yar[0] + 25\,z^3\,Yar[0] + 15\,z\,Yar[1] + 25\,z^2\,Yar[1] + 25\,z\,Yar[2])$$

```
Libera = Collect[Solve[eqz, Yar[z]][[1, 1]][[2]], Uar[z]][[2]]
```

$$\frac{1}{(1 + 5\,z)^3} 5\,(-25\,z\,Uar[0] + 3\,z\,Yar[0] + 15\,z^2\,Yar[0] + 25\,z^3\,Yar[0] + 15\,z\,Yar[1] + 25\,z^2\,Yar[1] + 25\,z\,Yar[2])$$

Per calcolare la risposta libera, occorre risolvere l’equazione imponendo le condizioni iniziali sull'uscita compatibili ovvero:

$$\begin{aligned} Y(0) &= C \cdot x_0 \\ Y(1) &= C \cdot A \cdot x_0 \\ Y(2) &= C \cdot A^{2\cdot} x_0 \\ U(0) &= 0 \end{aligned}$$

Poste le condizioni iniziali ottengo la risposta libera nel dominio della variabile complessa z

```
Yar[0] = C1.xar
```

$\{\{3\}\}$

```
Yar[1] = C1.A.xar
```

$\{\{0\}\}$

```
Yar[2] = C1.A.A.xar
```

$$\left\{\left\{-\frac{3}{125}\right\}\right\}$$

```
Uar[0] = 0
```

0

```
YLiberaz[z_] := Libera
YLiberaz[z]
```

$$\left\{\left\{\frac{5\left(\frac{42 z}{5}+45 z^2+75 z^3\right)}{(1+5 z)^3}\right\}\right\}$$

Non mi resta che riportare la risposta nel dominio del tempo k tramite l'anti-trasformata Z:

```
YLibera[k_] := Expand[InverseZTransform[YLiberaz[z], z, k]]
YLibera[k]
```

$$\left\{\left\{3\left(-\frac{1}{5}\right)^k-21(-1)^k 5^{-1-k} k+6(-1)^k 5^{-1-k} k^2\right\}\right\}$$

6.2B Risposta all'ingresso $u(k)$

Valuto ora la risposta al segnale in ingresso:

$$u(k) = \begin{cases} 1 \; 0 \leq k \leq 10 \\ 0 \; k > 10 \\ 0 \; k < 0 \end{cases}$$

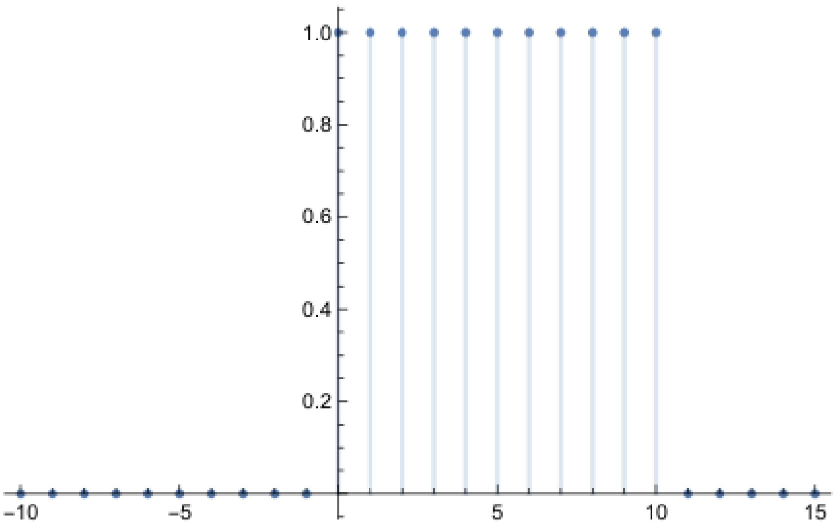
Per capire meglio la natura del segnale e di conseguenza come valutarne la risposta ne faccio il grafico

$$\texttt{u[k\_] :=} \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq 10 \\ 0 & k > 10 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

```
u[k]
```

$$\begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq 10 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

```
DiscretePlot[u[k], {k, -10, 15}, PlotRange → All]
```



Si tratta dunque di un gradino unitario limitato nell'intervallo [0, 10]. Per calcolare la risposta al segnale, è necessario prima di tutto calcolare l'anti-trasformata zeta della funzione di trasferimento

```
FdT[z_] := Simplify[C1.Inverse[z IdentityMatrix[3] - A].B]

FdT[z]
```

$$\left\{\left\{\frac{125\ (1+z)}{(1+5\ z)^3}\right\}\right\}$$

```
g[k_] := InverseZTransform[FdT[z], z, k]

g[k]
```

$$\left\{\left\{(-1)^{1+k}\, 5^{2-k}\left(5-7\,k+2\,k^2\right)\ (1-\text{UnitStep}[-k])\right\}\right\}$$

Questa risulta essere inoltre, la risposta all'impulso, che per definizione è l'anti-trasformata zeta della funzione di trasferimento del sistema. Per calcolare la risposta forzata al segnale u(k), utilizzo la somma di convoluzione: $y_f(k) = \sum_{i=0}^{k} g(i)u(k-i)$

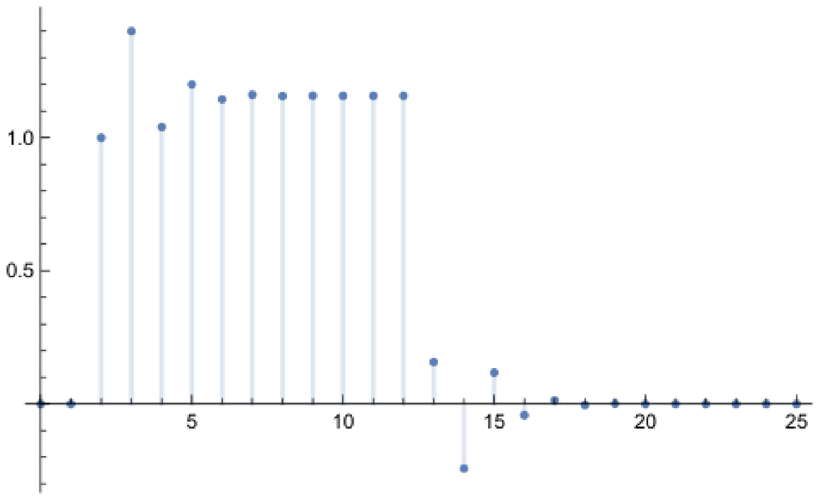
$$Y_{fu}[k\_] := \sum_{i=0}^{k} g[i] \times u[k-i]$$

$$Y_{fu}[k]$$

$$\left\{\left\{\begin{cases} -(-1)^k\, 5^{2-k}\left(2\,299\,895\,110-387\,912\,327\,k+16\,276\,042\,k^2\right) & k>10 \\ \frac{1}{108}\times 5^{2-k}\left(-5\ (-1)^k+5^{1+k}+66\ (-1)^k\,k-36\ (-1)^k\,k^2\right) & 0<k\le 10 \\ 0 & \text{True}\end{cases}\right\}\right\}$$

Grafico della risposta all'ingresso

```
DiscretePlot[{Y_fu[k][[1, 1]]}, {k, -10, 25}, PlotRange → All]
```



7.B Condizioni iniziali tali che la risposta al gradino coincide con il suo valore di regime

Come per il caso tempo continuo affinché la risposta al gradino coincida con il suo valore di regime, è necessario che la risposta libera vada a compensare la risposta transitoria. Per individuare tale combinazione lineare, parto definendo il vettore stato iniziale

$$x0 = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix}$$

vado perciò a considerare come ingresso il gradino unitario discreto e calcolo la componente a regime della risposta al gradino

$$U_g[z] = \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{z}{-1+z}$$

$$\text{regime} = \left(G[1]\ U_g[z]\right)[[1]][[1]]$$

$$\frac{125\,z}{108\,(-1+z)}$$

dopodiché calcolo la risposta libera, la risposta forzata e la risposta transitoria

```
libera = Simplify[z C1.Inverse[z IdentityMatrix[3] - A].x0][[1]][[1]]
```

$$\frac{z\left(64\,x3 - x2\,(61+125\,z) + x1\left(139+200\,z+125\,z^2\right)\right)}{(1+5\,z)^3}$$

$$\text{forzata} = \text{Simplify}\left[G[z]\ U_g[z]\right][[1]][[1]]$$

$$\frac{125\,z\,(1+z)}{(-1+z)\,(1+5\,z)^3}$$

```
transitoria = Factor[forzata - regime]
```

$$-\frac{125\,z\left(107+200\,z+125\,z^2\right)}{108\,(1+5\,z)^3}$$

sommo libera e transitoria, ne estraggo il numeratore e lo pongo pari a zero

```
Numerator[Simplify[Expand[libera + transitoria]]]
```

$$z\left(-13\,375 + 6912\,x3 - 25\,000\,z - 15\,625\,z^2 - 108\,x2\,(61+125\,z) + 108\,x1\left(139+200\,z+125\,z^2\right)\right)$$

Ho tre incognite. Estraggo i coefficienti del polinomio al numeratore e determino le incognite x_i che annullano il set dei coefficienti del polinomio al numeratore

```
CL = CoefficientList[Numerator[Simplify[Expand[libera + transitoria]]], z]
```

{0, −13 375 + 15 012 x1 − 6588 x2 + 6912 x3, −25 000 + 21 600 x1 − 13 500 x2, −15 625 + 13 500 x1}

```
Solve[CL == {0, 0, 0, 0}, {x1, x2, x3}]
```

$$\left\{\left\{x1 \to \frac{125}{108},\ x2 \to 0,\ x3 \to -\frac{125}{216}\right\}\right\}$$

Verifico il risultato ottenuto, calcolando la risposta a partire dallo stato iniziale ricavato

```
Σ1 = StateSpaceModel[{A, B, C1}, SamplingPeriod → 1]
```

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{76}{125} & -\frac{139}{125} & -\frac{64}{125} & -1 \\ -\frac{201}{125} & \frac{139}{125} & -\frac{61}{125} & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_1^{\mathcal{S}}$$

```
FullSimplify[OutputResponse[{Σ1, {125 / 108, 0, -125 / 216}}, 1, k]]
```

$$\left\{\frac{125}{108}\right\}$$

come volevasi verificare coincide con la risposta a regime

Esercizio C

Studio della seguente catena di Markov Tempo Discreto avente numero di stati finiti

$$x(k+1) = Ax(k)$$

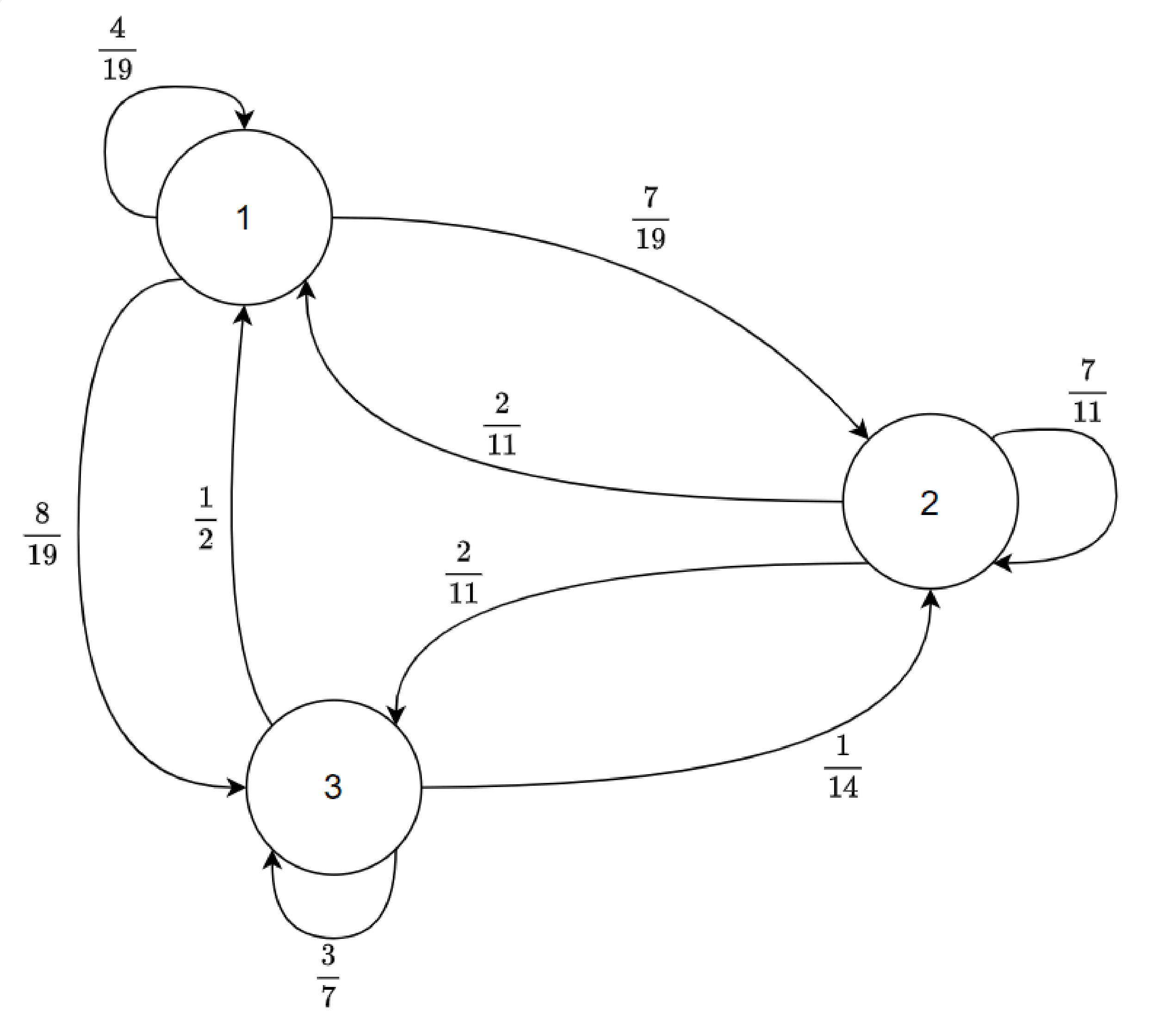
la cui matrice di transizione è

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{2}{11} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{19} & \frac{7}{11} & \frac{1}{14} \\ \frac{8}{19} & \frac{2}{11} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Una catena di Markov è un modello matematico che descrive un sistema dove all'interno di un insieme di stati possibili, è possibile transitare da uno stato all'altro. La probabilità di transizione da uno stato all'altro dipende solo dallo stato attuale e non da quelli passati, si parla quindi di "assenza di memoria".

1.C Grafo di transizione della catena

Il grafo di transizione si costruisce a partire dalla matrice di transizione i cui elementi, a_{ji} adimensionali rappresentano la probabilità di trovarsi la configurazione i-esima al passo $k+1$ condizionata alla probabilità di essere nella configurazione j-esima al passo k. Il peso di un arco rappresenta la probabilità di rimanere nello stesso stato, nel caso ci sia un auto anello o di passare ad un altro stato.
Il grafo della catena in oggetto è il seguente:



2.C Stato stazionario della catena

2.1C A partire da ricorsione numerica, a partire da uno stato iniziale stocastico scelto in maniera pseudo-casuale

Lo stato stazionario della catena di Markov, è una distribuzione di probabilità che rappresenta la frequenza con cui il sistema si trova in ciascuno stato, quando converge ad un comportamento stazionario. A partire da uno stato iniziale pseudo-casuale stocastico, dopo un numero arbitrario di passi la Catena di Markov tende ad un vettore stocastico Π, detto distribuzione di probabilità stazionaria. Un vettore stocastico moltiplicato per la matrice di transizione resta uguale, ovvero lo stato successivo è uguale allo stato precedente:

$$\Pi = A\Pi$$

Dimostro attraverso lo script Python "markov.py", che a partire da uno stato iniziale stocastico, scelto in maniera pseudo casuale, la catena di Markov tende ad una distribuzione di probabilità stazionaria.
Per prima cosa andrò ad inizializzare uno stato iniziale casuale che verrà normalizzato per essere stocastico. Dopodiché andrò a moltiplicare per un numero n di volte lo stato per la matrice di transizione per dimostrare la tesi.
Per semplicità e per evitare una mole elevata di dati andrò a considerare l'evoluzione dello stato ogni dieci passi per un totale di 50 passi.

markov.py

```
import numpy as np
def main():
        evaluate_data()
def evaluate_data():
        A=[[4/19,2/11,1/2],[7/19,7/11,1/14],[8/19,2/11,3/7]]
     x0=np.random.rand(3,1)
     print('Inizializzo lo stato casuale x0=',x0)
     print()
     x0=x0/np.sum(x0)
     print('Ho reso x0 stocastico', sum(x0))
     print()
     for i in range(50):
         if(i%10==0 or i==49):
             print('x0=',x0)
             print()
         x0=A@x0

if __name__== "__main__":
        main()
```

I risultati che ottengo sono i seguenti:

Valore stato	**Passo n°**
$x0 = \begin{matrix}[0.73767283] \\ [0.31741799] \\ [0.59095022]\end{matrix}$	Stato iniziale
$x0 = \begin{matrix}[0.44814972 \\ [0.19283723] \\ [0.35901305]\end{matrix}$	0 - stato stocastico
$x0 = \begin{matrix}[0.29719897] \\ [0.36701624] \\ [0.33578479]\end{matrix}$	10
$x0 = \begin{matrix}[0.0.29718457] \\ [0.367049] \\ [0.33576643]\end{matrix}$	20
$x0 = \begin{matrix}[0.29718457] \\ [0.36704901] \\ [0.33576642]\end{matrix}$	30
$x0 = \begin{matrix}[0.29718457] \\ [0.36704901] \\ [0.33576642]\end{matrix}$	40
$x0 = \begin{matrix}[0.29718457] \\ [0.36704901] \\ [0.33576642]\end{matrix}$	50

Si nota che già dopo dieci passi la catena inizia a convergere e che anche prima di cinquanta passi converge allo stato stazionario.

2.2C A partire dal calcolo in forma chiusa dell'equilibrio stocastico della catena

Calcolo lo stesso vettore che esprime l'equilibrio stocastico della catena in forma chiusa. Dato che $\Pi = A\Pi$, ottengo:
$(\Pi - A\Pi) = 0_{3\times 1} \implies (I - A)\Pi = 0_{3\times 1}$ con $\Pi \in ker(I - A)$. Effettuo i

calcoli attraverso Mathematica

```
risultato = IdentityMatrix[3] - A
```

$$\left\{\left\{\frac{15}{19}, -\frac{2}{11}, -\frac{1}{2}\right\}, \left\{-\frac{7}{19}, \frac{4}{11}, -\frac{1}{14}\right\}, \left\{-\frac{8}{19}, -\frac{2}{11}, \frac{4}{7}\right\}\right\}$$

```
risultato // MatrixForm
```

fatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{15}{19} & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{19} & \frac{4}{11} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{8}{19} & -\frac{2}{11} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

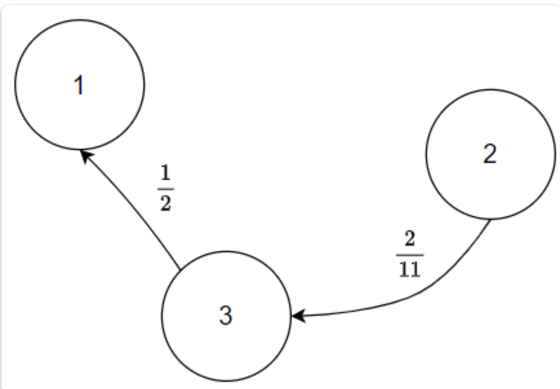
```
N[Solve[{15 / 19 x1 - 2 / 11 x2 - 1 / 2 x3 == 0,
   -7 / 19 x1 + 4 / 11 x2 - 1 / 14 x3 == 0, x1 + x2 + x3 == 1}, {x1, x2, x3}]]

{{x1 → 0.297185, x2 → 0.367049, x3 → 0.335766}}
```

I valori coincidono con lo stato ottenuto in precedenza come volevasi verificare.

3.C Evidenziare nel grafo un possibile spanning tree

> Uno spanning tree, è un albero che contiene tutti i nodi del grafo ed un sottoinsieme degli archi, in modo tale da connettere tra loro tutti i nodi con uno e un solo cammino senza cicli.

Un possibile spanning tree del grafo di transizione è il seguente:



un ulteriore spanning tree è: