RISPOSTA FORZATA
(SISTEMA LTI-TC o TD)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases} \qquad 1/S/U$$

$$\begin{cases} x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) = C\,x(k) + D\,u(k) \end{cases} \qquad 1/S/U$$

INGRESSO E USCITA SIANO SCALARI

$u(t)$ (o $u(k)$) $\in \mathbb{R}$

$y(t)$ (o $y(k)$) $\in \mathbb{R}$

$B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ (VETTORE COLONNA)

$C \in \mathbb{R}^{1\times n}$ (VETTORE RIGA)

$D \in \mathbb{R}$ (SCALARE)

UN SISTEMA DINAMICO IN CUI INGRESSO E USCITA SONO SCALARI È DEFINITO CON L'APPELLATIVO DI SISTEMA SISO (SINGLE INPUT SINGLE OUTPUT)

SISTEMA MIMO (MULTIPLE INPUT MULTIPLE OUTPUT)

RISPOSTA FORZATA: CALCOLO DI $y(t)$ (O $y(k)$) DA $t=0$ IN POI ($k=0$ IN POI) NELL'IPOTESI CHE

- $x(0) = x_0 = 0_x$ (QUIETE)
- $u(t)$ (O $u(k)$) È NOTO DA $t=0$ IN POI (DA $k=0$ IN POI)

TRASFORMATE INTEGRALI

OPERATORE IL CUI OBIETTIVO PRINCIPALE

È QUELLO DI SEMPLIFICARE UN

PROBLEMA DIFFERENZIALE (TC) O

RICORSIVO (TD) RENDENDOLI

UN PROBLEMA ALGEBRICO

TRASFORMATA DI LAPLACE (L-TRASFORMATA)
CASO TC

TRASFORMATA ZETA (Z-TRASFORMATA)
CASO TD

SEGNALE RIGHT-SIDED NULLO PER $t<0$
ED È DEFINITO PER $t \geq 0$.

$$F : T \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\mathbb{R}^n, \mathbb{C}, \mathbb{C}^n)$$

$$T = \mathbb{R}$$

$$F(t) = 0 \quad , \quad t < 0$$

$$\int_0^{+\infty} F(t)\, e^{-st}\, dt \qquad s \in \mathbb{C}$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$\sigma = \mathrm{Re}(s)$$

$$\omega = \mathrm{Im}(s)$$

INTEGRALE IMPROPRIO DIPENDENTE DA
UN PARAMETRO $s \in \mathbb{C}$

TRASFORMATA ZETA

$$f : T \longrightarrow \mathbb{R} \ (\mathbb{R}^n, \mathbb{C}, \mathbb{C}^n)$$

$$T = \mathbb{Z}$$

$f(k) = 0$ per $k < 0$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f(k)\, z^{-k} \qquad z \in \mathbb{C}$$

$$z = \rho \cdot e^{j\theta}$$

$$\rho = |z|$$

$$\theta = \measuredangle z$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$Z(f(k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)\, z^{-k}$$

CONVERGENZA ASSOLUTA

$$\int_0^{+\infty} |f(t)\, e^{-st}|\, dt$$

$$|e^{st}| = |e^{(\sigma + j\omega)t}| =$$

$$= |e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}| = e^{\sigma t} |e^{j\omega t}| =$$

$$= e^{\sigma t} |\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)| =$$

$$= e^{\sigma t} \sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = e^{\sigma t}$$

$$\int_0^{+\infty} |f(t)\, e^{-st}|\, dt \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|\, |e^{-st}|\, dt =$$

$$|f(t)\, e^{-st}| \leq |f(t)| \cdot |e^{-st}|$$

$$= \int_0^{+\infty} |f(t)|\, e^{-\sigma t}\, dt$$

CONVERGENZA DI L-TRASFORMATA

DIPENDE DA ASCISSA DI s $(\sigma = Re(s))$

FUNZIONE DI CLASSE L ("SOTTOINSIEME" DI FUNZIONI RIGHT-SIDED PER LE QUALI LA L-TRASFORMATA CONVERGE)

1. CONTINUA A DX IN ZERO

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) \quad \text{ESISTE}$$

2. CONTINUA A TRATTI SUL DOMINIO DI INTEGRAZIONE

3. MAGGIORABILE DA UNA FUNZIONE ESPONENZIALE

$$\exists\ k > 0 \ , \quad a \in \mathbb{R}$$

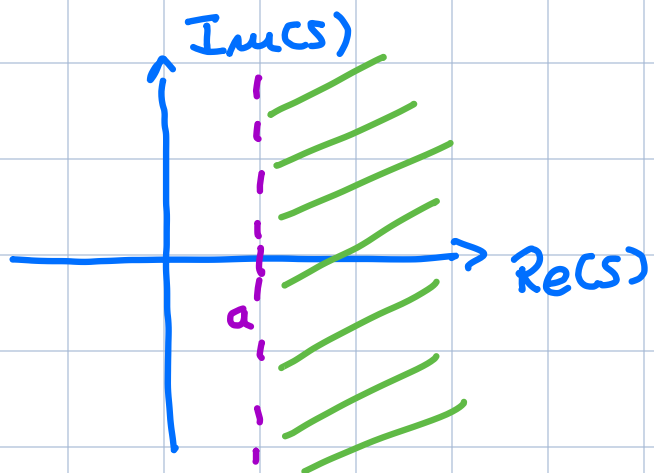
$$|f(t)| \leq k\, e^{at} \qquad \forall\ t \geq 0$$

LA SUA L-TRASFORMATA ESISTE ED IL DOMINIO DI CONVERGENZA È

DATO DA QUEI NUMERI COMPLESSI

s T.C. $\sigma = Re(s) > a$

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLA REGIONE DI CONVERGENZA DELLA L-TRASFORMATA (FUNZIONI DI CLASSE L)



ROC

Z-TRASFORMATA

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |f(k)\, z^{-k}| \qquad z = \rho e^{j\theta}$$

$$|z| = |\rho e^{j\theta}| = \rho\, |e^{j\theta}| = \rho$$

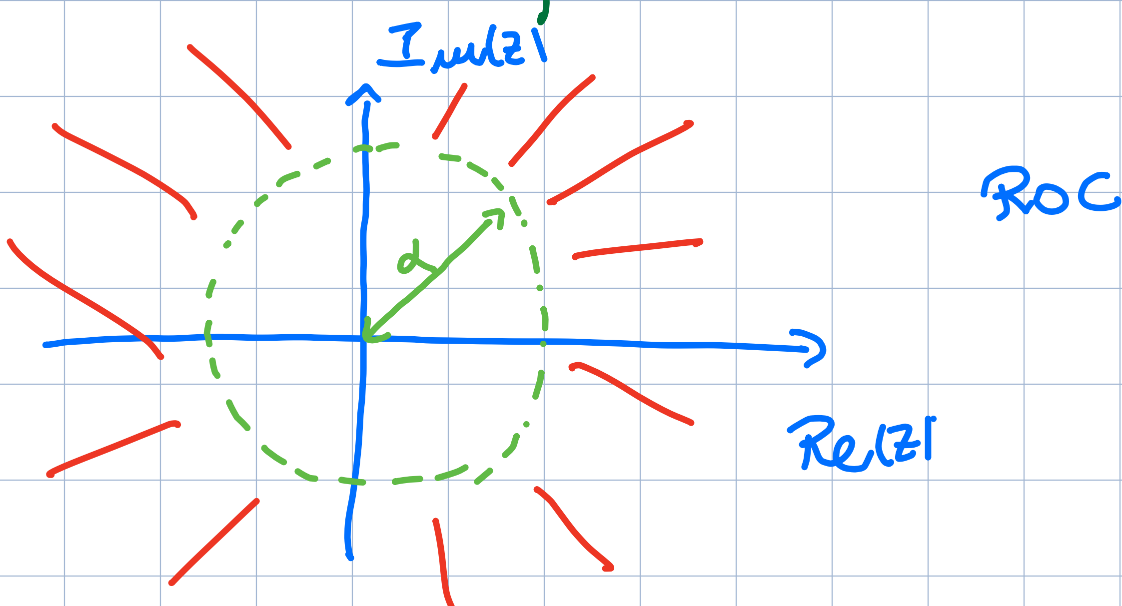
$$\sum_{k=0}^{+\infty} |f(k)\, z^{-k}| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |f(k)|\, \rho^{-k}$$

$f(k)$ DEVE ESSERE MAGGIORABILE DA UNA SUCCESSIONE POTENZA, DEVONO ESISTERE $M > 0$, $\alpha > 0$ T.C.

$$|f(k)| \leq M \cdot \alpha^{k} \quad \forall\, k \geq 0$$

ALLORA $f(k)$ È Z-TRASFORMABILE E IL SUO DOMINIO DI CONVERGENZA È DATO DA

$$z : |z| = \rho > \alpha$$



$f(t)$ FUNZIONE CONTINUA DI CLASSE

L

$$\mathcal{L}(\dot{f}(t))$$

(A PARTIRE DA $\mathcal{L}(f(t))$ CHE INDICHERÒ CON $F(s)$)

$$\mathcal{L}(\dot{f}(t)) = \int_0^{+\infty} \dot{f}(t)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= f(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)\,(-s)\,e^{-st}\, dt =$$

$$= f(t)\,e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-st}\, dt$$

$$f(t)\, e^{-st}\Big|_0^{+\infty} = \underbrace{\lim_{t\to+\infty} f(t)\, e^{-st}} - f(0)$$

$\lim_{t\to+\infty} f(t)\, e^{-st}$ VA ANALIZZATO PER

s T.C. $\sigma > a$

$$|f(t)| < k\, e^{at}$$

$$f(t)\, e^{-st}$$

$$\lim_{t\to+\infty} |f(t)\, e^{-st}| = \lim_{t\to+\infty} |f(t)|\, |e^{-st}| =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} |f(t)|\, e^{-\sigma t} \le \lim_{t\to+\infty} k\, e^{at}\, e^{-\sigma t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} k\, e^{-(\sigma - a)t} = 0 \qquad \sigma - a > 0$$

(ROC)

NELLA ROC DI f

$$\lim_{t \to +\infty} f(t)\, e^{-st} = 0$$

$$\int_0^{+\infty} \dot{f}(t)\, e^{-st}\, dt = -f(0) + s \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

LA TRASFORMATA DI LAPLACE È RAPPRESENTABILE ANCHE COME UNA FUNZIONE DI VARIABILE COMPLESSA s

$$t \xrightarrow{\mathcal{L}} s$$

$$f(t) \qquad F(s)$$

$$\mathcal{L}(\dot{f}(t)) = -f(0) + s\,F(s)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

TRASPORTO IN s IL SISTEMA

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\dot{x}(t)) = \mathcal{L}(Ax(t) + Bu(t)) \\ \mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(Cx(t) + Du(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\dot{x}(t)) = A\mathcal{L}(x(t)) + B\mathcal{L}(u(t)) \\ \mathcal{L}(y(t)) = C\mathcal{L}(x(t)) + D\mathcal{L}(u(t)) \end{cases}$$

$u(t)$ FUNZIONE DI CLASSE L

$$U(s) = \mathcal{L}(u(t)) \in \mathbb{C}$$

$$X(s) = \mathcal{L}(x(t)) \in \mathbb{C}^n$$

$$Y(s) = \mathcal{L}(y(t)) \in \mathbb{C}$$

$$\begin{cases} \underset{(n\times1)}{\mathcal{L}(\dot{x}(t))} = \underset{(n\times n)}{A}\ \underset{(n\times1)}{X(s)} + \underset{(n\times1)}{B}\ \underset{(1\times1)}{U(s)} \\ \underset{(1\times1)}{Y(s)} = \underset{(1\times n)}{C}\ \underset{(n\times1)}{X(s)} + \underset{(1\times1)}{D}\ \underset{(1\times1)}{U(s)} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(\dot{f}(t)) = s\,F(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = s\,X(s) - x(0)$$

$$s\,X(s) - x(0) = A\,X(s) + B\,U(s)$$

$$s\,X(s) - A\,X(s) = x(0) + B\,U(s)$$

$$(sI_n - A)\,X(s) = x(0) + B\,U(s)$$

$$X(s) = \underbrace{(sI_n - A)^{-1} x(0)}_{\text{RISP. LIBERA NELLO STATO}} + \underbrace{(sI_n - A)^{-1} B\,U(s)}_{\text{RISP. FORZATA NELLO STATO}}$$

$$Y(s) = C\,X(s) + D\,U(s)$$

$$Y(s) = C\left((sI_n - A)^{-1} x(0) + (sI_n - A)^{-1} B\,U(s)\right) +$$
$$+ D\,U(s)$$

$$Y(s) = C(sI_n - A)^{-1} x(0) + C(sI_n - A)^{-1} B\, U(s) +$$
$$+ D\, U(s)$$

$$Y(s) = C(sI_n - A)^{-1} x(0) + \left(C(sI_n - A)^{-1} B + D\right) U(s)$$

— o —

$$X(s) = (sI_n - A)^{-1} x_0 + (sI_n - A)^{-1} B\, U(s)$$

$$Y(s) = C(sI_n - A)^{-1} x_0 + \left(C(sI_n - A)^{-1} B + D\right) U(s)$$

LA RISPOSTA LIBERA NELLO STATO IN s
È

$$(sI_n - A)^{-1} x_0$$

MA NEL DOMINIO DEL TEMPO SAPPIAMO GIÀ
CHE FORMA HA

$$e^{At} x_0$$

$$\mathcal{L}(e^{At}) = (sI_n - A)^{-1}$$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{(s-a)}$$

RISPOSTA FORZATA = PONGO $x_0 = 0_x$

$$\underset{(1\times 1)}{Y(s)} = \Big(\underset{(1\times n)}{C}\,\underset{(n\times n)}{(sI_n - A)^{-1}}\,\underset{(n\times 1)}{B} + \underset{(1\times 1)}{D}\Big) \cdot \underset{(1\times 1)}{U(s)}$$

LA RISPOSTA FORZATA (CASO SISO) IN s PER UN SISTEMA LTI-TC È IL PRODOTTO ALGEBRICO DELLA

- L-TRASFORMATA DELL'INGRESSO
- $C(sI_n - A)^{-1}B + D$
  - SCALARE
  - LEGATA AI PARAMETRI (A, B, C, D)

DEL SISTEMA

- FUNZIONE DELLA VARIABILE COMPLESSA s

$$G(s) = \underset{(1\times n)}{C}\,(s\underset{(n\times n)}{I_n} - A)^{-1}\underset{(n\times 1)}{B} + \underset{(1\times 1)}{D}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s)$$

$G(s) \triangleq$ FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL SISTEMA

$$Y(s) = G(s)\,U(s) \qquad 1/U$$

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\,\mathrm{adj}(M)$$

$adj(M) \rightarrow$ MATRICE AGGIUNTA DI M

TRASPOSTA DEI COMPLEMENTI ALGEBRICI

$$
\begin{array}{cc}
 & \quad\quad\quad j \\
M = & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & \vdots & & \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \leftarrow i
\end{array}
$$

$M_{ij} = \det(\text{minore } n-1 \text{ tolta riga } i \text{ col } j)(-1)^{i+j}$

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI_n - A)} adj(sI_n - A)$$

$\hookrightarrow$ POL. CAR. DI A

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D =$$

$$= C\left(\frac{1}{\det(sI_n-A)}\,\mathrm{adj}(sI_n - A)\right)B + D =$$

POLINOMIO AL PIÙ DI GRADO n-1

$$= \underbrace{\frac{1}{\det(sI_n - A)}}_{p_A(s)} \cdot \underbrace{C\,\mathrm{adj}(sI_n - A)B}_{\gamma(s)} + D$$

POLINOMIO DI GRADO n

$$G(s) = \frac{\gamma(s)}{p_A(s)} + D = \frac{n_G(s)}{d_G(s)}$$

$$\partial(d_G) \geq \partial(n_G)$$