COSA ACCADE (COME MI DEVO REGOLARE) QUANDO LO SPETTRO DI A PRESENTA AUTOVALORI REALI E C.C.

CALCOLO LO SPETTRO

$$\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_r}_{\text{REALI}}, \underbrace{\tilde{\lambda}_1, \bar{\tilde{\lambda}}_1, \tilde{\lambda}_2, \bar{\tilde{\lambda}}_2, \dots, \tilde{\lambda}_s, \bar{\tilde{\lambda}}_s}_{\text{COMPLESSI E CONIUGATI}}$$

$$r + 2s = n$$

CASO TC

$$\lambda_i \Rightarrow e^{\lambda_i t} \qquad i = 1, \dots, r$$

$$\left.\begin{matrix}\tilde{\lambda}_i \\ \bar{\tilde{\lambda}}_i\end{matrix}\right\} \to \begin{matrix} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t) \\ e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t) \end{matrix}$$

$$T = \left[\, v_1 \;\; v_2 \;\; \dots \;\; v_r \;\vdots\; \mathrm{Re}(\tilde{v}_1) \;\; \mathrm{Im}(\tilde{v}_1) \;\; \dots \;\; \mathrm{Re}(\tilde{v}_s)\,\mathrm{Im}(\tilde{v}_s) \,\right]$$

$$A\,T = T\,\Lambda$$

$$\Lambda = \left[\begin{array}{ccc|cc|c|cc}
\lambda_1 & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & 0 & \\
 & & \lambda_r & & & & & \\
\hline
 & & & \sigma_1 & \omega_1 & & & \\
 & & & -\omega_1 & \sigma_1 & & & \\
\hline
 & & & & & \ddots & & \\
\hline
 & 0 & & & & & \sigma_s & \omega_s \\
 & & & & & & -\omega_s & \sigma_s
\end{array}\right]$$

Λ È DIAGONALE A BLOCCHI

L'ESPONENZIALE DI MATRICE NEL CASO IN CUI LA MATRICE È IN FORMA DIAGONALE A BLOCCHI È UNA MATRICE A BLOCCHI IN CUI CIASCUN BLOCCO È IL "SINGOLO" ESPONENZIALE DI MATRICE DEL BLOCCO

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & e^{\lambda_r t} & & & \\ & & & & e^{\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t) & e^{\sigma_1 t}\sin(\omega_1 t) & \\ & & & & -e^{\sigma_1 t}\sin(\omega_1 t) & e^{\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t) & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -9/2 & 3 & 1/2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -5/2 & 5 & -3/2 \end{bmatrix} x(t) .$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) .$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-3, \; -2 \pm j$

$-3 \Rightarrow e^{-3t}$

$$-2 \pm j \Rightarrow \begin{matrix} \sigma = -2 \\ \omega = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} e^{-2t} \cos(t) \\ e^{-2t} \sin(t) \end{matrix}$$

$$A\,T = T\,\Lambda$$

$$\Lambda = T^{-1} A\, T$$

1. $z_0 = T^{-1} x_0$

2. $x(t) = T\, e^{\Lambda t} z_0$

$$\Lambda = \left[\begin{array}{c|cc} -3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t}\cos(t) & e^{-2t}\sin(t) \\ 0 & -e^{-2t}\sin(t) & e^{-2t}\cos(t) \end{bmatrix}$$

CASO TD

$$\lambda_1, \dots, \lambda_r, \tilde{\lambda}_1, \bar{\tilde{\lambda}}_1, \tilde{\lambda}_2, \bar{\tilde{\lambda}}_2, \dots, \tilde{\lambda}_s, \bar{\tilde{\lambda}}_s$$

$$r + 2s = n$$

$$\lambda_i \Rightarrow (\lambda_i)^k$$

$$\begin{matrix} \tilde{\lambda}_i \\ \bar{\tilde{\lambda}}_i \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \rho_i^k \cos(\vartheta_i k) \\ \rho_i^k \sin(\vartheta_i k) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \rho_i = |\tilde{\lambda}_i| \\ \vartheta_i = \measuredangle \tilde{\lambda}_i \end{matrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & & \\ & & & \rho_1 \cos(\vartheta_1) & \rho_1 \sin(\vartheta_1) & & \\ & & & -\rho_1 \sin(\vartheta_1) & \rho_1 \cos(\vartheta_1) & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & \rho_s \cos(\vartheta_s) & \rho_s \sin(\vartheta_s) \\ & & & & & -\rho_s \sin(\vartheta_s) & \rho_s \cos(\vartheta_s) \end{bmatrix}$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & -7/3 \\ -13/60 & -1/5 & -9/5 \\ 1/12 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} x(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

MODI NATURALI

$$\lambda_1 = -\frac{1}{5} \Rightarrow \left(-\frac{1}{5}\right)^k = \left(\frac{1}{5}\cdot(-1)\right)^k = \left(\frac{1}{5}\right)^k (-1)^k$$

$$\rho = \frac{1}{6}, \quad \theta = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow \begin{array}{l} \left(\frac{1}{6}\right)^k \cos\left(\frac{2}{3}\pi k\right) \\ \left(\frac{1}{6}\right)^k \sin\left(\frac{2}{3}\pi k\right) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(-\frac{1}{5}\right)^k$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PRESENZA DI AUTOVALORI COINCIDENTI NELLO SPETTRO DI A

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A_1 - \lambda I = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A_1 - \lambda I) = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2$$

A_1 presenta due autovalori coincidenti in

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

molteplicità algebrica =>

numero di volte che una radice è presente nei fattori di un dato polinomio.

$\lambda = \frac{1}{2}$ ha m.a. pari a 2

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 - \lambda I = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) & 1 \\ 0 & \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \end{bmatrix}$$

$$\det(A_2 - \lambda I) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2$$

A_2 HA UN AUTOVALORE PARI A $\frac{1}{2}$

CON m.a. PARI A 2

$$A_1^k = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix}$$

$$A_2^k = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^k & k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix}$$

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A_2^{k+1} = A_2 \cdot A_2^k =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(1/2\right)^k & k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ 0 & \left(1/2\right)^k \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} & \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} & (k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

VOGLIO DETERMINARE IL NUMERO DI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI CHE CARATTERIZZANO

$$\ker\left(A_1 - \frac{1}{2}I\right)$$

$$\ker\left(A_2 - \frac{1}{2}I\right)$$

SONO LE BASI DEGLI AUTOSPAZI

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Ker}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \mathbb{R}^2$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ME NE SERVONO 2

$$A_2 - \frac{1}{2} I$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SONO TUTTI QUEI VETTORI T.C.

$$x_2 = 0$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

UN SOLO VETTORE DEFINISCE

$$\ker\left(A_2 - \tfrac{1}{2} I_2\right)$$

MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA DI UN AUTOVALORE $\lambda \Rightarrow$

DIMENSIONE DELLA BASE DI

$$\ker(A - \lambda I)$$

$m.g.(A_1) = 2$

$m.g.(A_2) = 1$

UNA MATRICE A È DIAGONALIZZABILE SE PER OGNI AUTOVALORE λ DI A VALE LA SEGUENTE PROPRIETÀ

$$m.a.(\lambda) = m.g.(\lambda)$$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -7 & -1 & -3 & -3 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 3 \\ 4/3 & 2/3 & -10/3 & -4/3 & 0 \\ -4/3 & -5/3 & 1/3 & -8/3 & 0 \\ -10/3 & -17/3 & -2/3 & -5/3 & -5 \end{pmatrix}$$

CIASCUNA MATRICE È UNO ZERO DEL SUO POLINOMIO CARATTERISTICO

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$p_A(A) = O_{n \times n}$$

ESISTE PERÒ UN DIVISORE DI

$p_A(x)$

TALE CHE A È UN SUO ZERO.

POLINOMIO MINIMO DI A.