POLINOMIO MINIMO

POLINOMIO CARATTERISTICO

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) =$$

$$= \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n I_n = O_{n \times n}$$

IL POLINOMIO MINIMO È

UNO DEI DIVISORI DEL POLINOMIO

CARATTERISTICO TALE CHE A È UN

SUO "ZERO".

$$(\lambda - 1)^3 (\lambda - 2)^2$$

1

$(\lambda-1)$

$(\lambda-2)$

$(\lambda-1)(\lambda-2)$

$(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

$(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$

$(\lambda-1)^3(\lambda-2)^2$

SE LA MATRICE A PRESENTA

AUTOVALORI DISTINTI ALLORA

POLINOMIO MINIMO $\equiv$ POLINOMIO CARATTERISTICO

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda - 1/2)^2 \qquad\qquad (\lambda - 1/2)^2$$

CASO A_1

$$(\lambda - 1/2) \qquad A_1 - \frac{1}{2} I_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CASO A_2

$(\lambda - \frac{1}{2})$ $\qquad A_2 - \frac{1}{2} I_2 =$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0_{2\times 2}$$

$(\lambda+1)^3 (\lambda+3)(\lambda+4)$

LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA DI UN AUTOVALORE λ È LA DIMENSIONE DELLA BASE DI

$$\ker(A - \lambda I)$$

FORMA CANONICA DI JORDAN

UNA MATRICE $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ È SIMILE, TRAMITE UNA OPPORTUNA MATRICE $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ NON-SINGOLARE AD UNA FORMA DIAGONALE A BLOCCHI

$$A \overset{T}{\sim} \Lambda_J$$

$$\Lambda_J = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{k_s}(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

DOVE $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ SONO AUTOVALORI

(ANCHE "RIPETUTI") DI A È

$$J_{k_i}(\lambda_i)$$

È IL BLOCCO DI JORDAN DI

DIMENSIONE k_i CORRISPONDENTE A

λ_i.

$$J_{k_i}(\lambda_i) = \overbrace{\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}}^{k_i} \Bigg\} k_i$$

QUALI SONO I MODI NATURALI

CHE "SPUNTANO" FUORI ?

$$x(k+1) = A\,x(k) \quad , \quad x_0$$

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) \quad , \quad x_0$$

$$A \overset{T}{\sim} \Lambda_J$$

$$x(k) = T \Lambda_J^{k} z_0 \qquad z_0 = T^{-1} x_0$$

$$x(t) = T e^{\Lambda_J t} z_0 \qquad z_0 = T^{-1} x_0$$

Λ_J MATRICE DIAGONALE A BLOCCHI $\Rightarrow$

$$\Lambda_J^{k} \quad e \quad e^{\Lambda_J t}$$

SARANNO MATRICI DIAGONALI A BLOCCHI ARRANGIATE NELLA SEGUENTE FORMA

$$\Lambda_J^k = \begin{bmatrix} J_{k_1}^k(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}^k(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_s}^k(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

$$e^{\Lambda_J t} = \begin{bmatrix} e^{J_{k_1}(\lambda_1) t} & & & \\ & e^{J_{k_2}(\lambda_2) t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_{k_s}(\lambda_s) t} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}}_{\ell} = \lambda \cdot I_\ell + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}}_{J_\ell(0)} =$$

$$= \lambda I_\ell + J_\ell(0)$$

N.B. λI_ℓ e $J_\ell(0)$ <u>COMMUTANO</u>

$$J_\ell^2(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 \end{bmatrix}$$

IN CORRISPONDENZA DI UN

DETERMINATO ESPONENTE (?)

$$J_e^{(?)}(0) = 0_{e \times e}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$J_e(0)$ È UNA MATRICE NILPOTENTE

DI ORDINE e

$$J_e^{e}(0) = 0_{n \times n}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}^{k} = \left(\lambda I_{\ell} + J_{\ell}(0)\right)^{k} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\ell-1} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} \cdot I_{\ell} \cdot J_{\ell}^{\,i}(0)$$

MODI NATURALI ED DEL BLOCCO DI JORDAN DI DIMENSIONE ℓ

$$\binom{k}{0} \lambda^{k} \rightarrow \lambda^{k}$$

$$\binom{k}{1} \lambda^{k-1} \rightarrow k \cdot \lambda^{k-1}$$

$$\binom{k}{2}\lambda^{k-2} \rightarrow \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}$$

$$\binom{k}{3}\lambda^{k-3} \rightarrow \frac{k(k-1)(k-2)}{3}\lambda^{k-3}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \cdots & \binom{k}{\ell-1}\lambda^{k-\ell+1} \\ & \lambda^k & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \binom{k}{2}\lambda^{k-1} \\ & 0 & & \ddots & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} \\ & & & & \lambda^k \end{bmatrix}$$

CASO TC

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} t} = e^{(\lambda I_\ell + J_\ell(0))t} = e^{\lambda t\, I_\ell} \cdot e^{J_\ell(0)t}$$

$$e^{J_e(0)t} = I_e + t\cdot J_e(0) + \frac{t^2}{2} J_e^2(0) + \dots + \frac{t^{e-1}}{(e-1)!} J^{e-1}_e(0) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & \frac{t^{e-1}}{(e-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & t^2/2 \\ & 0 & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & 0 & & \lambda \end{bmatrix} t} = e^{\lambda t} \cdot I_e \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & \frac{t^{e-1}}{(e-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & t^2/2 \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t \cdot e^{\lambda t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} e^{\lambda t} \\ & e^{\lambda t} & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} \\ & 0 & & \ddots & t \cdot e^{\lambda t} \\ & & & & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

$e^{\lambda t}$

$t \cdot e^{\lambda t}$

$\frac{t^2}{2} e^{\lambda t}$

$\vdots$

$\frac{t^{(l-1)}}{(l-1)!} e^{\lambda t}$

POLINOMIAL-

ESPONENZIALI

$$\lim_{k \to \infty} k \cdot \lambda^{k-1} = ?$$

SE $|\lambda| < 1$ ALLORA

$$\lim_{k \to \infty} k \lambda^{k-1} = 0$$

SE $|\lambda| \geq 1$ ALLORA

$$\lim_{k \to \infty} k \lambda^{k-1} = \infty$$

$$\lim_{t \to +\infty} t \cdot e^{\lambda t}$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} t \cdot e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda \geq 0 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} t \cdot e^{\lambda t} = +\infty$$