TRASFORMATE INTEGRALI PER IL CALCOLO DELLA RISPOSTA FORZATA IN SISTEMI LTI (TC o TD) NELL'IPOTESI SISO (INGRESSO SCALARE, USCITA SCALARE)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(k+1) = A x(k) + B u(k) \\ y(k) = C x(k) + D u(k) \end{cases}$$

L-TRASFORMATA

$$f : T \to \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = \bar{F}(s)$$

$t \longleftarrow$ PIANO ORIGINE

$s \longleftarrow$ PIANO IMMAGINE

$$F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f : T \to \mathbb{R}^n$$

$$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$$

Z-TRASFORMATA

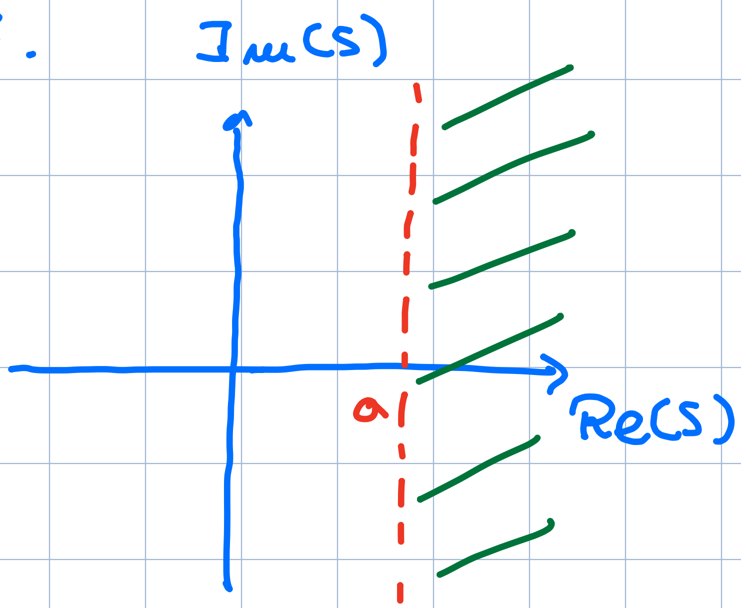
$f : T \to \mathbb{R}$ (SUCCESSIONE)

$$Z(f(k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)\, z^{-k} = F(z)$$

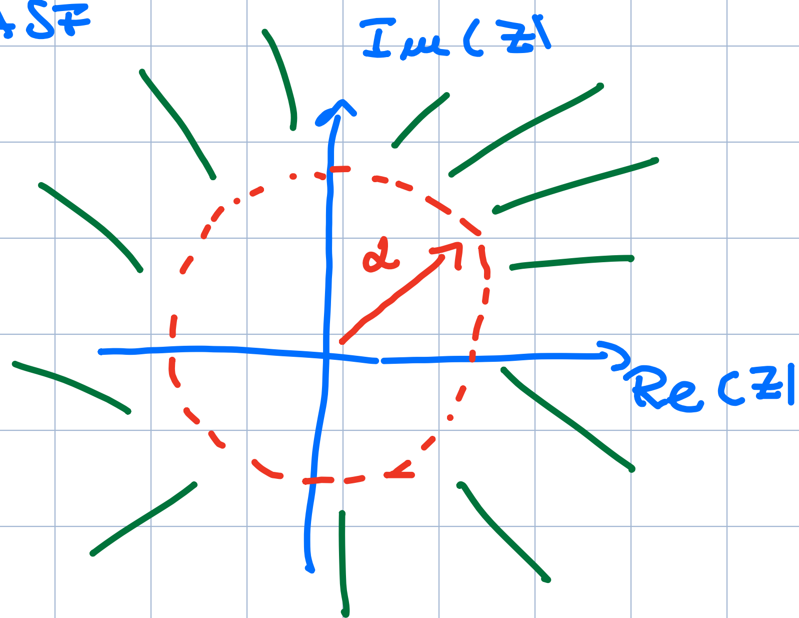
$$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

ROC (REGION OF CONVERGENCE)

$\mathcal{L}$-TRASF.



Z- TRASF



f CONTINUA E DI CLASSE $\mathcal{L}$

$$f \doteq F$$

$$\mathcal{L}(\dot{f}(t)) = sF(s) - f(0)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$x \doteq X$$

$$u \doteq U$$

$$y \doteq Y$$

$$X(s) = (sI_n - A)^{-1} x_0 + (sI_n - A)^{-1} B U(s)$$

$$Y(s) = C(sI_n - A)^{-1} x_0 +$$

$$+ (C(sI_n - A)^{-1} B + D) U(s)$$

$$X_\ell(s) = (sI_n - A)^{-1} x_0$$

$$x_\ell(t) = e^{At} x_0$$

$$e^{At} \doteq (sI_n - A)^{-1}$$

$$e^{at} \doteq \frac{1}{s-a}$$

$$Y_F(s) = (\underset{(1\times n)}{C}\underbrace{(sI_n - A)^{-1}}_{n\times n}\underset{(n\times 1)}{B} + \underset{(1\times 1)}{D}) \cdot U(s)$$

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D = \frac{n_G(s)}{d_G(s)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$D = 0 \Rightarrow$ SISTEMA PROPRIO

$D \neq 0 \Rightarrow$ SISTEMA IMPROPRIO

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI_n - A)} \cdot \operatorname{adj}(sI_n - A)$$

ZERI E POLI DI UNA FdT

ZERO : NUMERO COMPLESSO $\xi \in \mathbb{C}$

T.C.

$$G(\xi) = 0$$

POLO : NUMERO COMPLESSO $p \in \mathbb{C}$

T.C.

$$\lim_{s \to p} G(s) = \infty$$

N.B. I POLI DELLA FdT (POLI DEL SISTEMA) SONO UN SOTTOINSIEME DEGLI AUTOVALORI DI A (AUTOVALORI DEL SISTEMA).

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+3)$$

$$\lambda + 1 \Rightarrow e^{-t}$$

$$\lambda + 3 \Rightarrow e^{-3t}$$

TEOREMA DELL'ANTICIPO ELEMENTARE

$$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k)$$

$$x \doteq X$$

$$\mathcal{Z}[x(k+1)] = ?$$

$$\mathcal{Z}[x(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\,z^{-k} = \underline{X(z)}$$

$$\mathcal{Z}[x(k+1)] = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k+1)\,z^{-k} = ?$$

1. CAMBIO DI VARIABILE

$$k' = k+1 \qquad k = k'-1$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x(k+1)\,z^{-k} = \sum_{k'=1}^{+\infty} x(k')\,z^{-(k'-1)} =$$

$$= \sum_{k'=1}^{+\infty} x(k')\, z^{-k'+1} = z\left(\sum_{k'=1}^{+\infty} x(k')\, z^{-k'}\right) =$$

$$z^{-k'+1} = z^{-k'} \cdot z$$

$$= z\left(\sum_{k'=1}^{+\infty} x(k')\, z^{-k'} + x(0)\, z^{0} - x(0)\right) =$$

$$= z\left(\underbrace{\sum_{k'=0}^{+\infty} x(k')\, z^{-k'}} - x(0)\right) =$$

$$= z\, X(z) - z\, x(0)$$

$$\begin{cases} x(k+1) = A\, x(k) + B\, u(k) \\ y(k) = C\, x(k) + D\, u(k) \end{cases}$$

$$x \doteq X$$

$$u \doteq U$$

$$y \doteq Y$$

$$\begin{cases} \mathcal{Z}[x(k+1)] = A\,X(z) + B\,U(z) \\ Y(z) = C\,X(z) + D\,U(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z\,X(z) - z\,x(0) = A\,X(z) + B\,U(z) \\ Y(z) = C\,X(z) + D\,U(z) \end{cases}$$

$$z\,X(z) - A\,X(z) = z\,x(0) + B\,U(z)$$

$$(z I_n - A)\,X(z) = z\,x(0) + B\,U(z)$$

$$\det(z I_n - A) = 0$$

$$X(z) = (zI_n - A)^{-1} \underset{\sim}{z}\, x(0) + (zI_n - A)^{-1} B\, U(z)$$

$$X_e(z) = z\,(zI_n - A)^{-1} x(0)$$

$$x_e(k) = A^k x(0)$$

$$A^k \doteq z\,(zI_n - A)^{-1}$$

$$a^k \doteq \frac{z}{z - a}$$

$$Y(z) = C\,X(z) + D\,U(z) =$$

$$= C\left(z\,(zI - A)^{-1} x(0) + (zI - A)^{-1} B\,U(z)\right) +$$

$$+ D\,U(z) =$$

$$= C\,z\,(zI - A)^{-1} x(0) +$$

$$+ \left[C\,(zI - A)^{-1} B + D\right] U(z)$$

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

FdT → CASO TD

DEFINIZIONE DI FUNZIONE DI TRASFERIMENTO.

LA FdT È QUELLA FUNZIONE DI VARIABILE COMPLESSA $G(s)$ (o $G(z)$) T.C. MOLTIPLICATA ALGEBRICAMENTE PER LA L-TRASF. DELL'INGRESSO (O Z-TRASF. DELL'INGRESSO) RESTITUISCE LA L-TRASF. DELLA RISPOSTA FORZATA (Z-TRASF. DELLA RISPOSTA FORZATA).

$$Y_F(s) = G(s)\,U(s)$$

$$Y_F(z) = G(z)\,U(z)$$

$$G(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)}$$

$$G(z) = \frac{Y_f(z)}{U(z)}$$

— o —

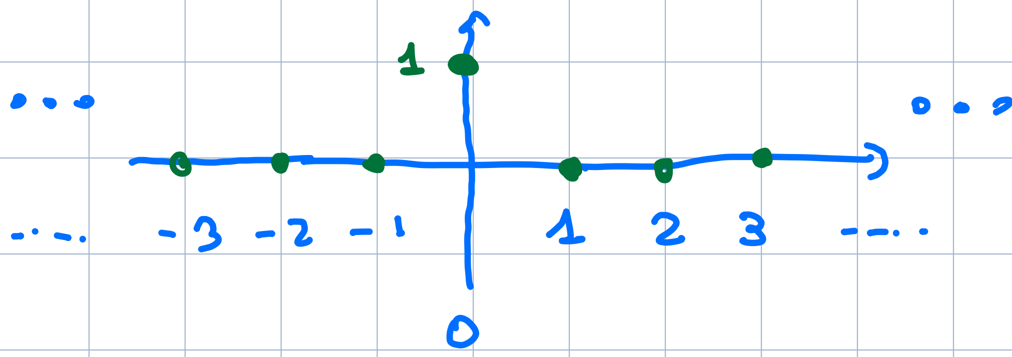
$$Y_f(s) = G(s)\,\boxed{U(s)} \rightarrow 1$$

$$Y_f(z) = G(z)\,\boxed{U(z)} \rightarrow 1$$

$$U(z) = u(0) + u(1)\,z^{-1} + u(2)\,z^{-2} + \dots$$

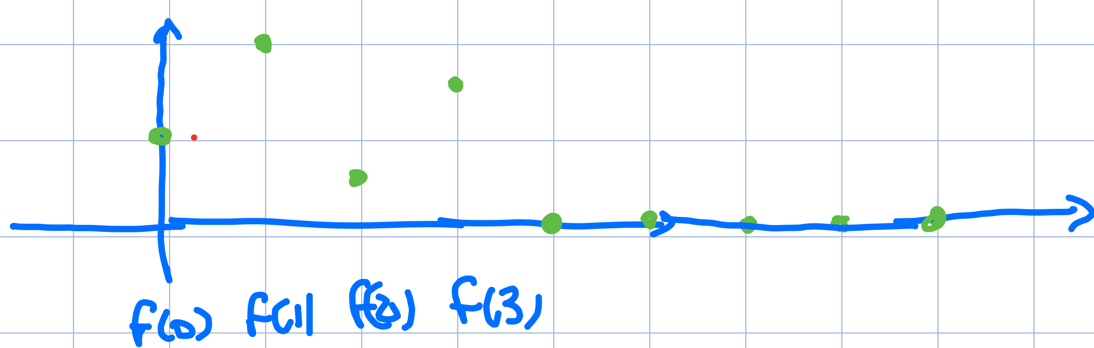
$$1 = 1 + 0 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + 0 \cdot z^{-3} + \dots$$

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{PER } k = 0 \\ 0 & \text{PER } k \neq 0 \end{cases}$$



δ DI KRONECKER (IMPULSO UNITARIO DISCRETO)

UNA SUCCESSIONE DI DURATA FINITA NEL DOMINIO DELLA Z-TRASFORMATA È UN POLINOMIO IN z^{-1}



$$F(z) = f(0) + f(1)\,z^{-1} + f(2)\,z^{-2} + f(3)\,z^{-3}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$