1 Vector Calculus

Scalar Fields

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

Vector Fields

$\underline{v}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

Differentiation of Vector Fields

Let $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ be vector fields and φ be a scalar field, then

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\varphi\underline{a}) &=\frac{d\varphi}{dt}\underline{a}+\varphi\frac{d\underline{a}}{dt}\\ \frac{d}{dt}(\underline{a}\cdot\underline{b}) &=\frac{d\underline{a}}{dt}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\frac{d\underline{b}}{dt}\\ \frac{d}{dt}(\underline{a}\times\underline{b}) &=\frac{d\underline{a}}{dt}\times\underline{b}+\underline{a}\times\frac{d\underline{b}}{dt}\\ \frac{d}{dt}(\underline{a}(\varphi(t))) &=\frac{d\underline{a}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\end{aligned}$$

Differential Operators

For a scalar field $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\underline{x}\mapsto f(\underline{x})$ the gradient is

$$\text{grad } f(\underline{x})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

and gives the direction of steepest ascent

For a vector field $\underline{v}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ the divergence is defined as

$$\text{div } \underline{v}(\underline{x})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}(\underline{x})$$

and gives the source density at a point

For a vector field $\underline{v}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ the curl is defined as

$$\text{curl }(\underline{v}(x,y,z))=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\\ \frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\\ \frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\end{pmatrix}$$

and gives the vortex strength

The Laplace operator for a scalar field $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\underline{x}\mapsto f(\underline{x})$ gives

$$\Delta f(\underline{x})=\nabla\cdot\nabla f(\underline{x})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_j}(\underline{x})$$

Expressed with the ∇ operator we get the representations

$$\begin{aligned}\text{grad } f &=\nabla f\\ \text{div } \underline{v} &=\nabla\cdot\underline{v}\\ \text{curl } \underline{v} &=\nabla\times\underline{v}\\ \Delta &=\nabla\cdot\nabla\end{aligned}$$

Computation Rules for Differential Operators

The three operators grad, div and curl are linear. Furthermore

$$\begin{aligned}\text{grad }(f_1f_2) &=f_1\text{grad }(f_2)+f_2\text{grad }(f_1)\\ \text{grad } F(f) &=F'(f)\text{grad }(f)\\ \text{curl } \underline{v}_1+\underline{v}_2 &=\text{curl } \underline{v}_1+\text{curl } \underline{v}_2\\ \text{div }(\underline{v}_1\times\underline{v}_2) &=\underline{v}_2\cdot\text{curl } \underline{v}_1-\underline{v}_1\cdot\text{curl } \underline{v}_2\end{aligned}$$

Rules for the interactions between vector- and scalarfields:

$$\begin{aligned}\text{div } f\underline{v} &=\underline{v}\text{grad }(f)+f\text{div } \underline{v}\\ \text{curl } f\underline{v} &=f\text{curl } \underline{v}-\underline{v}\times\text{grad }(f)\end{aligned}$$

Rules for the concatenation of the operators:

$$\begin{aligned}\text{div curl } \underline{v} &=0\\ \text{curl grad } f &=\underline{0}\\ \text{div grad } f &=\Delta f\\ \text{curl curl } \underline{v} &=\text{grad div } \underline{v}-\Delta\underline{v}\\ \text{div }(\underline{v}_1\times\underline{v}_2) &=\underline{v}_2\cdot\text{curl } \underline{v}_1-\underline{v}_1\cdot\text{curl } \underline{v}_2\end{aligned}$$

1. Wenn $F\wedge G$ eine Tautologie ist, dann ist F eine Tautologie und G auch. 2. Umgekehrt: Sind F und G Tautologien, dann ist auch $F\wedge G$ eine. *Beweis.* 1. Annahme: $F\wedge G$ sei eine Tautologie. Dann: Für jede Belegung B wertet $F\wedge G$ zu wahr aus. Dann: Das ist nur der Fall, wenn sowohl F als auch G (für jedes B) zu wahr auswerten. Dann: Für jede Belegung B wertet F zu wahr aus. Und: Für jede Belegung B wertet G zu wahr aus. Dann: F ist Tautologie und G ist Tautologie. 2. Annahme: F ist Tautologie und G ist Tautologie. Dann: Für jede Belegung B_1 wertet F zu wahr aus. Und: Für jede Belegung B_2 wertet G zu wahr aus. Dann: Für jede Belegung B wertet $F\wedge G$ zu wahr aus. Dann: $F\wedge G$ ist eine Tautologie.

Äquivalenz und Folgerung

$p\equiv q$ gilt genau dann, wenn sowohl $p\models q$ als auch $q\models p$ gelten. *Beweis.* $p\equiv q$ GDW $p\Leftrightarrow q$ ist Tautologie nach Def. von $\equiv$ GDW $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ ist Tautologie GDW $(p\Rightarrow q)$ ist Tautologie und $(q\Rightarrow p)$ ist Tautologie GDW $(p\models q)$ gilt und $q\models p$ gilt.

Substitution

Ersetzt man in einer Formel eine beliebige Teilformel F durch eine logisch äquivalente Teilformel F', so verändert sich der Wahrheitswerteverlauf der Gesamtformel nicht. Man kann Formeln also vereinfachen, indem man Teilformeln durch äquivalente (einfachere) Teilformeln ersetzt.

Universum

Die freien Variablen in einer Aussagenform können durch Objekte aus einer als Universum bezeichneten Gesamtheit wie $\mathbb{N},\mathbb{R},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ ersetzt werden.

Tautologien

$(p\wedge q)\Rightarrow p$ bzw. $p\Rightarrow(p\vee q)$

$(q\Rightarrow p)\vee(\neg q\Rightarrow p)$

$(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\neg p\vee q)$

$(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\neg q\Rightarrow\neg p)$ (Kontraposition)

$(p\wedge(p\Rightarrow q))\Rightarrow q$ (Modus Ponens)

$((p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r))\Rightarrow(p\Rightarrow r)$

$((p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r))\Rightarrow(p\Rightarrow(q\wedge r))$

$((p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p))\Leftrightarrow(p\Leftrightarrow q)$

Nützliche Äquivalenzen

Kommutativität:

$(p\wedge q)\equiv(q\wedge p)$

$(p\vee q)\equiv(q\vee p)$

Assoziativität:

$(p\wedge(q\wedge r))\equiv((p\wedge q)\wedge r)$

$(p\vee(q\vee r))\equiv((p\vee q)\vee r)$

Distributivität:

$(p\wedge(q\vee r))\equiv((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$

$(p\vee(q\wedge r))\equiv((p\vee q)\wedge(p\vee r))$

Idempotenz:

$(p\wedge p)\equiv p$

$(p\vee p)\equiv p$

Doppelnegation:

$\neg(\neg p)\equiv p$

de Morgans Regeln:

$\neg(p\wedge q)\equiv((\neg p)\vee(\neg q))$

$\neg(p\vee q)\equiv((\neg p)\wedge(\neg q))$

Definition Implikation:

$(p\Rightarrow q)\equiv(\neg p\vee q)$

Tautologieregeln:

$(p\wedge q)\equiv p$ (falls q eine Tautologie ist)

$(p\vee q)\equiv q$

Kontradiktionsregeln:

$(p\wedge q)\equiv q$ (falls q eine Kontradiktion ist)

$(p\vee q)\equiv p$

Absorptionsregeln:

$(p\wedge(p\vee q))\equiv p$

$(p\vee(p\wedge q))\equiv p$

Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten:

$p\vee(\neg p)\equiv w$

Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch:

$p\wedge(\neg p)\equiv f$

Äquivalenzen von quant. Aussagen

Negationsregeln:

$\neg\forall x:p(x)\equiv\exists x:(\neg p(x))$

$\neg\exists x:p(x)\equiv\forall x:(\neg p(x))$

Ausklammerregeln:

$(\forall x:p(x)\wedge\forall y:q(y))\equiv\forall z:(p(z)\wedge q(z))$

$(\exists x:p(x)\wedge\exists y:q(y))\equiv\exists z:(p(z)\wedge q(z))$

Vertauschungsregeln

$\forall x\forall y:p(x,y)\equiv\forall y\forall x:p(x,y)$

$\exists x\exists y:p(x,y)\equiv\forall y\exists x:p(x,y)$

Äquivalenzumformung

Wir demonstrieren an der Formel $\neg(\neg p\wedge q)\wedge(p\vee q)$, wie man mit Hilfe der aufgelisteten logischen Äquivalenzen tatsächlich zu Vereinfachungen kommen kann:

$\neg(\neg p\wedge q)\wedge(p\vee q)$

$\equiv(\neg(\neg p)\vee(\neg q))\wedge(p\vee q)$ de Morgan

$\equiv(p\vee(\neg q))\wedge(p\vee q)$ Doppelnegation

$\equiv p\vee((\neg q)\wedge q)$ Distributivtät v.r.n.l.

$\equiv p\vee(q\wedge(\neg q))$ Kommutativtät

$\equiv p\vee f$ Prinzip v. ausgeschl. Widerspruch

$\equiv p$ Kontradiktionsregel