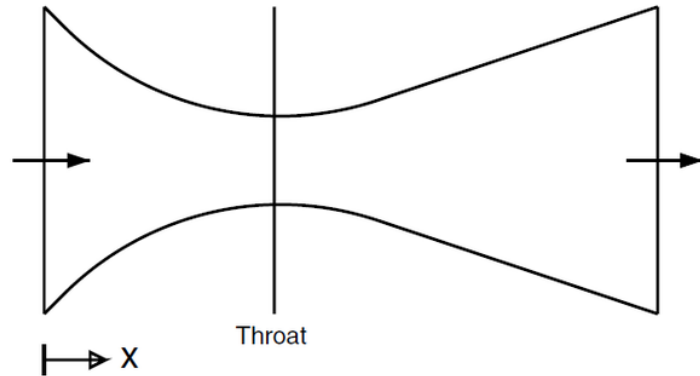


### 3<sup>η</sup> Εργασία Υπολογιστική Ρευστομηχανική

#### Convergent-Divergent nozzle

Το φαινόμενο που κληθήκαμε να αναλύσουμε είναι η ροή εντός ενός συγκλίνοντος-αποκλίνοντος ακροφυσίου για τις περιπτώσεις: α) Υποηχητική-Υπερηχητική ισεντροπική ροή, β) Καθαρά υποηχητική ροή και γ) Υποηχητική-Υπερηχητική ροή με κρουστικό κύμα. Αρχικά η συγκεκριμένη διάταξη αποτελείται ουσιαστικά από ένα ακροφύσιο με ένα διαχύτη συνδεδεμένα μαζί. Βέβαια η ιδιαιτερότητα είναι ότι για υπερηχητικές ροές ( $M > 1$ ) λόγω φαινομένου των ροϊκών γραμμών αντιστρέφεται η λειτουργία του διαχύτη και του ακροφυσίου με αποτέλεσμα στο 2<sup>ο</sup> μέρος να έχουμε επιτάχυνση της ροής όπως και στο 1<sup>ο</sup> μέρος. Επίσης, το σημείο της μικρότερης γεωμετρίας ονομάζεται λαιμός (throat). Οι συνθήκες εισόδου ονομάζονται συνθήκες reservoir με ιδιότητες:  $P_o, T_o, \rho_o, V_o \sim 0, M_o$ . Η ταχύτητα στις αρχικές συνθήκες για την θεωρητική ροή είναι περίπου μηδέν ( $V_o \sim 0$ ) εφόσον ισχύει ότι ( $A_o \sim \infty$ ). Στον λαιμό έχουμε ιδιότητες:  $P_t, T_t, \rho_t, V_t, M_t$  τα οποία για την θεωρητική ροή γίνονται  $P_t = P^*, T_t = T^*, V_t = V^*, M_t = M^*$  και για τις συνθήκες εξόδου:  $P_e, T_e, \rho_e, V_e, M_e$ .



Οι αρχικές εξισώσεις της ροής είναι: α) Εξίσωση συνέχειας (Continuity), β) Εξίσωση ορμής (Momentum), γ) Εξίσωση ενέργειας (Energy)

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 A_2 V_2 \\ \beta) \quad & p_1 A_1 + \rho_1 V_1^2 A_1 + \int_{A_1}^{A_2} p \, dA = p_2 A_2 + \rho_2 V_2^2 A_2 \\ \gamma) \quad & h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \\ \delta) \quad & p = \rho R T \\ \epsilon) \quad & h = c_p T \end{aligned}$$

#### Για την ισεντροπική ροή

Με την χρήση των παραπάνω εξισώσεων, καταλήγουμε στην εξίσωση της γεωμετρίας του ακροφυσίου συνάρτηση του Mach, όπου τα μεγέθη που αναφέρονται είναι αδιάστατα.

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{(\gamma + 1)}$$

Οι αναλυτικές λύσεις της πίεσης (P), της θερμοκρασίας (T) και της πυκνότητας (ρ) για την ισεντροπική ροή προκύπτουν:

$$\begin{aligned} \frac{p}{p_0} &= \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-\gamma/(\gamma - 1)} \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1/(\gamma - 1)} \\ \frac{T}{T_0} &= \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \end{aligned}$$

#### Για την μη-ισεντροπική

Σε αυτές τις περιπτώσεις, η μη-αντιστρεπτότητα υπάρχει λόγω εμφάνισης κρουστικού κύματος το οποίο κυβερνάται από τον λόγο  $P_e/P_{o1}$  και το οποίο εμφανίζεται για κάποιους λόγους μικρότερους από έναν λόγο αναφοράς, στην περιοχή του αποκλίνοντος ακροφυσίου. Επιπλέον, ορίζονται δύο ηχητικές διατομές, η  $A_1^*$  που είναι και στο λαιμό του ακροφυσίου, πριν το κρουστικό κύμα και συσχετίζεται με την ισεντροπική ροή του από την είσοδο του ακροφυσίου μέχρι και την ηχητική κατάσταση στον λαιμό του και η  $A_2^*$  που είναι η διατομή του ακροφυσίου, αμέσως μετά το κρουστικό κύμα, κατόπιν του οποίου η ροή είναι ισεντροπική έως την έξοδο του αγωγού. Η παροχή μάζας μέσα από το ακροφύσιο είναι:  $\dot{m} = \frac{p_{o1} A_1^*}{\sqrt{T_{o1}}} \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}$ . Για το κρουστικό κύμα, ο λόγος ολικών πιέσεων κατά μήκος του κρουστικού κύματος γίνεται:  $\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \left[\frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2}\right]^{\gamma/(\gamma-1)} \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}\right]^{\frac{1}{(\gamma-1)}}$ , και αμέσως μετά το κρουστικό κύμα, ο αριθμός Mach δίνεται από:  $M_2 = \left\{\frac{1+[(\gamma-1)/2]M_1^2}{\gamma M_1^2 - (\gamma-1)/2}\right\}$ , καθώς και ο λόγος πιέσεων κατά μήκος του κρουστικού κύματος:  $\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1)$ .

Για την επίλυση του θέματος μας ζητήθηκε να αναλύσουμε την ροή για την συντηρητική μορφή (conservative) και την μη συντηρητική (non conservative). Για να γίνει αυτό χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω γενικές ρευστομηχανικές σχέσεις.

### Non-Conservative

Οι ρευστομηχανικές σχέσεις που χρησιμοποιήθηκαν είναι:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho'}{\partial t'} &= -\rho' \frac{\partial V'}{\partial x'} - \rho' V' \frac{\partial (\ln A')}{\partial x'} - V' \frac{\partial \rho'}{\partial x'} \\ \frac{\partial V'}{\partial t'} &= -V' \frac{\partial V'}{\partial x'} - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\partial T'}{\partial x'} + \frac{T'}{\rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial x'} \right) \\ \frac{\partial T'}{\partial t'} &= -V' \frac{\partial T'}{\partial x'} - (\gamma - 1) T' \left[ \frac{\partial V'}{\partial x'} + V' \frac{\partial (\ln A')}{\partial x'} \right]\end{aligned}$$

Στην non-conservative μέθοδο παρατηρούμαι ότι η πυκνότητα δεν μπαίνει στις παραγώγους. Επίσης, μελετάμε την ροή σαν ροϊκό στοιχείο.

### Conservative

Οι ρευστομηχανικές σχέσεις που χρησιμοποιήθηκαν για την συντηρητική είναι:

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\rho' A')}{\partial t'} + \frac{\partial (\rho' A' V')}{\partial x'} &= 0 \\ \frac{\partial (\rho' A' V')}{\partial t'} + \frac{\partial [\rho' A' V'^2 + (1/\gamma) p' A']}{\partial x'} &= \frac{1}{\gamma} p' \frac{\partial A'}{\partial x'} \\ \frac{\partial [\rho' (\frac{e'}{\gamma-1} + \frac{\gamma}{2} V'^2) A']}{\partial t'} + \frac{\partial [\rho' (\frac{e'}{\gamma-1} + \frac{\gamma}{2} V'^2) V' A' + p' A' V']}{\partial x'} &= 0\end{aligned}$$

Όπου στην ενέργεια (e) μπορούμε να αντικαταστήσουμε την θερμοκρασία (T). Επιπλέον, με χρήση πινάκων καταλήγουμε στις παρακάτω μορφές:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_1}{\partial t'} &= -\frac{\partial F_1}{\partial x'} \\ \frac{\partial U_2}{\partial t'} &= -\frac{\partial F_2}{\partial x'} + J_2 \\ \frac{\partial U_3}{\partial t'} &= -\frac{\partial F_3}{\partial x'} \\ U_1 &= \rho' A' \\ U_2 &= \rho' A' V'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_3 &= \rho' \left( \frac{e'}{\gamma - 1} + \frac{\gamma}{2} V'^2 \right) A' \\
 F_1 &= \rho' A' V' \\
 F_2 &= \rho' A' v'^2 + \frac{1}{\gamma} p' A' \\
 F_3 &= \rho' \left( \frac{T'}{\gamma - 1} + \frac{\gamma}{2} V'^2 \right) V' A' + p' A' V' \\
 J_2 &= \frac{1}{\gamma} p' \frac{\partial A'}{\partial x'}
 \end{aligned}$$

Στην μέθοδο της Conservative τα U,F,J αποτελούν solution vectors και έχουν στους τύπους τους (ρ, ρυ, e, V, ρυ, ρυ<sup>2</sup>, καθώς και το J περιέχει pf). Επιπλέον, για την conservative μελετάμε την ροή ως προς όγκους ελέγχου (slice της γεωμετρίας του ακροφυσίου με πάχος dx), όπου εξάγονται οι σχετικές σχέσεις. Αξίζει να αναφερθεί ότι η πυκνότητα (ρ) μπαίνει στις παραγώγους σε αντίθεση με την non-conservative.

#### McCormack technique:

Η τεχνική McCormack, η οποία αποτελεί μια ρητή προσέγγιση, σε αντίθεση με αυτή των Lax-Wendroff αποτελεί μια απλούστερη μέθοδος προώθησης στον χρόνο, η βασική ιδέα της οποίας στηρίζεται στο ανάπτυγμα του Taylor. Η δεύτερη χρονική παράγωγος έχει εξαλειφθεί (σε σχέση με την Lax-Wendroff) αλλά έχει εισαχθεί η παραγωγή με το δείκτη "av" (average, μέσης τιμή) που θα υπολογισθεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε να εισάγεται και όρος ακριβείας δεύτερης τάξης. Με αυτόν τον τρόπο θα εξασφαλίσουμε μικρότερο αριθμό πράξεων. Για τον υπολογισμό των μεγεθών πυκνότητας, ταχύτητας, πίεσης και θερμοκρασίας στο ακροφύσιο, χρησιμοποιήθηκε η τεχνική McCormack με τους εξής τύπους:

$$\begin{aligned}
 \rho_{i,j}^{t+\Delta t} &= \rho_{i,j}^t + \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{av} \Delta t \\
 v_{i,j}^{t+\Delta t} &= v_{i,j}^t + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_{av} \Delta t \\
 T_{i,j}^{t+\Delta t} &= T_{i,j}^t + \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{av} \Delta t \\
 P_{i,j}^{t+\Delta t} &= P_{i,j}^t + \left( \frac{\partial P}{\partial t} \right)_{av} \Delta t
 \end{aligned}$$

Βέβαια αυτές οι εξισώσεις διαφέρουν στην συντηρητική (conservative) μορφή και στην μη συντηρητική (non-conservative). Αυτές παρουσιάζονται αναλυτικά παρακάτω.

#### Non-conservative

Αρχίζοντας από την εξίσωση Euler, και έπειτα από πράξεις προκύπτει η εξίσωση για quasi 1-dimensional συνάρτηση της ροής στο ακροφύσιο η οποία μοιάζει πολύ με την εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho A V)}{\partial x} = 0$$

Επίσης λαμβάνοντας υπόψιν τις αδιαστατοποιημένες τιμές  $T' = \frac{T}{T_0}$ ,  $\rho' = \frac{\rho}{\rho_0}$ ,  $x' = \frac{x}{x_0}$ ,  $a_0 = \sqrt{\gamma R T_0}$ ,  $V' = \frac{V}{a_0}$ ,  $t' = \frac{t}{L/a_0}$ ,  $A' = \frac{A}{A^*}$ , οι εξισώσεις της συνέχειας (a), ορμής (b) και ενέργειας (c) μπορούν να γραφούν:

$$a) \frac{\partial \rho'}{\partial t'} = -\rho' \frac{\partial V'}{\partial x'} - \rho' V' \frac{\partial(\ln A')}{\partial x'} - V' \frac{\partial \rho'}{\partial x'}$$

$$b) \frac{\partial V'}{\partial t'} = -V' \frac{\partial V'}{\partial x'} - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\partial T'}{\partial x'} + \frac{T'}{\rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial x'} \right)$$

$$c) \frac{\partial T'}{\partial t'} = -V' \frac{\partial T'}{\partial x'} - (\gamma - 1) T' \left[ \frac{\partial V'}{\partial x'} + V' \frac{\partial (\ln A')}{\partial x'} \right]$$

Η τεχνική McCormack περιλαμβάνει και για τις 2 περιπτώσεις στάδιο πρόβλεψης (predictors step), και στάδιο επαλήθευσης (correctors step). Εισάγοντας τις διαφορικές εξισώσεις στις παραπάνω εξισώσεις, αξίζει να αναφέρουμε ότι και για non-conservative και για conservative το Predictors step περιλαμβάνει κατάντη παραγωγή και το Correctors step περιλαμβάνει ανάντη παραγωγή.

Predictors step: Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει:

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)'_i = -\rho'_i \frac{V'_{i+1} - V'_i}{\Delta x} - \rho'_i V'_i \frac{\ln A_{i+1} - \ln A_i}{\Delta x} - V'_i \frac{\rho'_{i+1} - \rho'_i}{\Delta x}$$

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)'_i = -V'_i \frac{V'_{i+1} - V'_i}{\Delta x} - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{T'_{i+1} - T'_i}{\Delta x} + \frac{T'_i}{\rho'} \frac{\rho'_{i+1} - \rho'_i}{\Delta x} \right)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)'_i = -V'_i \frac{T'_{i+1} - T'_i}{\Delta x} - (\gamma - 1) T'_i \left( \frac{V'_{i+1} - V'_i}{\Delta x} + V'_i \frac{\ln A_{i+1} - \ln A_i}{\Delta x} \right)$$

Έπειτα για το predictors step παρατίθενται οι bar μεταβλητές:

$$\vec{\rho}_i^{t+\Delta t} = \rho'_i + \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)'_i \Delta t$$

$$\vec{V}_i^{t+\Delta t} = V'_i + \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)'_i \Delta t$$

$$\vec{T}_i^{t+\Delta t} = T'_i + \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)'_i \Delta t$$

Correctors step: όπως αναφέραμε και πριν, στο Correctors step οι παραγωγίσεις γίνονται ανάντη, χρησιμοποιώντας τις τιμές που έχουν προβλεφθεί στο predictor's step. Συγκεκριμένα:

$$\left( \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} \right)^{t+\Delta t}_i = -\bar{\rho}_i^{t+\Delta t} \frac{\bar{V}_i^{t+\Delta t} - \bar{V}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} - \bar{\rho}_i^{t+\Delta t} \bar{V}_i^{t+\Delta t} \frac{\ln A_i - \ln A_{i-1}}{\Delta x}$$

$$- \bar{V}_i^{t+\Delta t} \frac{\bar{\rho}_i^{t+\Delta t} - \bar{\rho}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x}$$

$$\left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \right)^{t+\Delta t}_i = -\bar{V}_i^{t+\Delta t} \frac{\bar{V}_i^{t+\Delta t} - \bar{V}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\bar{T}_i^{t+\Delta t} - \bar{T}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \frac{\bar{T}_i^{t+\Delta t}}{\bar{\rho}_i^{t+\Delta t}} \frac{\bar{\rho}_i^{t+\Delta t} - \bar{\rho}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right)$$

$$\left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \right)^{t+\Delta t}_i = -\bar{V}_i^{t+\Delta t} \frac{\bar{T}_i^{t+\Delta t} - \bar{T}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} - (\gamma - 1) \bar{T}_i^{t+\Delta t}$$

$$\times \left( \frac{\bar{V}_i^{t+\Delta t} - \bar{V}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \bar{V}_i^{t+\Delta t} \frac{\ln A_i - \ln A_{i-1}}{\Delta x} \right)$$

Το επόμενο βήμα είναι να εισάγουμε τις διαφορικές μέσες τιμές (average).

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{av} = 0.5 \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_i^t + \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_i^{t+\Delta t} \right]$$

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)_{av} = 0.5 \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)'_i + \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)_i^{t+\Delta t} \right]$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{av} = 0.5 \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^t + \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^{t+\Delta t} \right]$$

Και τελικά καταλήγουμε στις τελικές εξισώσεις της τεχνικής McCormack για την ροή στο συγκλίνον-αποκλίνον ακροφύσιο για non-conservative μέθοδο, οι οποίες αφορούν χρόνο  $t+\Delta t$ .

$$\begin{aligned}\rho_i^{t+\Delta t} &= \rho_i^t + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{av} \Delta t \\ V_i^{t+\Delta t} &= V_i^t + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{av} \Delta t \\ T_i^{t+\Delta t} &= T_i^t + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{av} \Delta t\end{aligned}$$

### Conservative

Για την conservative μέθοδο ξεκινάμε πάλι από την αδιαστατοποιημένη εξίσωση της ροής:

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho AV)}{\partial x} = 0$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις αδιαστατοποιημένες τιμές καθώς και τις διαφορετικές ιδιότητες της conservative όπως αναφέρθηκαν πριν, προκύπτουν οι εξισώσεις της α) συνέχειας, β) ορμής και γ) ενέργειας:

$$a) \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho AV)}{\partial x} = 0$$

$$c) \frac{\partial[\rho'(\frac{e'}{\gamma-1} + \frac{\gamma}{2}V'^2)A']}{\partial t'} + \frac{\partial[\rho'(\frac{e'}{\gamma-1} + \frac{\gamma}{2}V'^2)V'A' + p'A'V']}{\partial x'} = 0$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις παραπάνω εξισώσεις όπως και ότι έχουμε 1d ροή, εισάγουμε τις U,F,J, που η U είναι solutions vector, η F flux vector και η J που είναι source term με τύπους:

$$\begin{aligned}U_1 &= \rho' A' \\ U_2 &= \rho' A' V' \\ U_3 &= \rho' \left(\frac{e'}{\gamma-1} + \frac{\gamma}{2}V'^2\right) A' \\ F_1 &= \rho' A' V' \\ F_2 &= \rho' A' V'^2 + \frac{1}{\gamma} p' A' \\ F_3 &= \rho' \left(\frac{T'}{\gamma-1} + \frac{\gamma}{2}V'^2\right) V' A' + p' A' V' \\ J_2 &= \frac{1}{\gamma} p' \frac{\partial A'}{\partial x'} \\ \frac{\partial U_1}{\partial t} &= -\frac{\partial F_1}{\partial x'} \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} &= -\frac{\partial F_2}{\partial x'} + J_2 \\ \frac{\partial U_3}{\partial t} &= -\frac{\partial F_3}{\partial x'}\end{aligned}$$

Επιπλέον η θερμοκρασία, η πίεση, η πυκνότητα και η ταχύτητα μπορούν να γραφούν συνάρτηση των  $U_1, U_2, U_3$ :

$$\begin{aligned}\rho' &= \frac{U_1}{A'} \\ V' &= \frac{U_2}{U_1} \\ T' = e' &= (\gamma - 1) \left( \frac{U_3}{U_1} - \frac{\gamma}{2} V'^2 \right) \\ p' &= \rho' T'\end{aligned}$$

Τα  $F_1, F_2, F_3, J_2$  μπορούν να εκφραστούν συνάρτηση των  $U_1, U_2, U_3$ . Αναλυτικά:

$$\begin{aligned}F_1 &= \rho' A' V' = U_2 \\ F_2 &= \rho' A' v'^2 + \frac{1}{\gamma} p' A' = \frac{U_2^2}{U_1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left( U_3 - \frac{\gamma}{2} \frac{U_2^2}{U_1} \right) \\ F_3 &= \rho^{+(\frac{T'}{\gamma-1} + \frac{V'^2}{2})} V' A' + p' A' V' = \gamma \frac{U_2 U_3}{U_1} - \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2} \frac{U_2^3}{U_1^2} \\ J_2 &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left( U_3 - \frac{\gamma}{2} \frac{U_2^2}{U_1} \right) \frac{\partial(\ln A')}{\partial x'}\end{aligned}$$

Predictors step: Λύνοντας με μέθοδο McCormack με κατάντη παραγωγή σε αυτό το στάδιο όπως είχαμε αναφέρει, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις των  $F_1, F_2, F_3, J_2$ , προκύπτουν:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial U_1}{\partial t'}\right)_i^{t'} &= - \frac{(F_1)_{i+1} - (F_1)_i}{\Delta x'} \\ \left(\frac{\partial U_2}{\partial t'}\right)_i^{t'} &= - \frac{(F_2)_{i+1} - (F_2)_i}{\Delta x'} + J_2 \\ \left(\frac{\partial U_3}{\partial t'}\right)_i^{t'} &= - \frac{(F_3)_{i+1} - (F_3)_i}{\Delta x'}\end{aligned}$$

Επίσης με βάση τα μεγέθη που βρήκαμε προηγουμένως και οι σχέσεις με bar ως τελευταίο βήμα του Correctors step:

$$\begin{aligned}(\bar{U}_1)_i^{t'+\Delta t'} &= (U_1)_i^{t'} + \left(\frac{\partial U_1}{\partial t'}\right)_i^{r'} \Delta t' \\ (\bar{U}_2)_i^{t'+\Delta t'} &= (U_2)_i^{t'} + \left(\frac{\partial U_2}{\partial t'}\right)_i^{r'} \Delta t' \\ (\bar{U}_3)_i^{t'+\Delta t'} &= (U_3)_i^{t'} + \left(\frac{\partial U_3}{\partial t'}\right)_i^{r'} \Delta t'\end{aligned}$$

Επιπλέον για την πυκνότητα και την θερμοκρασία:

$$\begin{aligned}(\bar{\rho}')_i^{t'+\Delta t'} &= \frac{(\bar{U}_1)_i^{t'+\Delta t'}}{(A')_i} \\ (\bar{T}')_i^{t'+\Delta t'} &= (\gamma - 1) \left\{ \frac{(\bar{U}_3)_i^{t'+\Delta t'}}{(\bar{U}_1)_i^{t'+\Delta t'}} - \frac{\gamma}{2} \left[ \frac{(\bar{U}_2)_i^{r'+\Delta t'}}{(\bar{U}_1)_i^{t'+\Delta t'}} \right]^2 \right\}\end{aligned}$$

Correctors step: Οι διαφορικές εξισώσεις bar και average είναι:

$$\left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial t'}\right)_i^{t'+\Delta t'} = - \frac{(\bar{F}_1)_i - (\bar{F}_1)_{i-1}}{\Delta x'}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{U}_2}{\partial t'}\right)_i^{t'+\Delta t'} = -\frac{(\bar{F}_2)_i - (\bar{F}_2)_{i-1}}{\Delta x'} + \frac{1}{\gamma} \bar{\rho}' \bar{T}' \frac{\partial A'}{\partial x'}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{U}_3}{\partial t'}\right)_i^{t'+\Delta t'} = -\frac{(\bar{F}_3)_i - (\bar{F}_3)_{i-1}}{\Delta x'}$$

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)_{av} = 0.5 \left[ \left(\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)_i^t + \left(\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)_i^{t+\Delta t} \right]$$

$$\left(\frac{\partial U_2}{\partial t}\right)_{av} = 0.5 \left[ \left(\frac{\partial U_2}{\partial t}\right)_i^t + \left(\frac{\partial U_2}{\partial t}\right)_i^{t+\Delta t} \right]$$

$$\left(\frac{\partial U_3}{\partial t}\right)_{av} = 0.5 \left[ \left(\frac{\partial U_3}{\partial t}\right)_i^t + \left(\frac{\partial U_3}{\partial t}\right)_i^{t+\Delta t} \right]$$

Τελικά, από την μέθοδο McCormack για conservative form προκύπτουν τα  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ ,  $\rho$ ,  $V$ ,  $T$ :

$$(U_1)_i^{t'+\Delta t'} = (U_1)_i^{t'} + \left(\frac{\partial U_1}{\partial t'}\right)_{av} \Delta t$$

$$(U_2)_i^{t'+\Delta t'} = (U_2)_i^{t'} + \left(\frac{\partial U_2}{\partial t'}\right)_{av} \Delta t$$

$$(U_3)_i^{t'+\Delta t'} = (U_3)_i^{t'} + \left(\frac{\partial U_3}{\partial t'}\right)_{av} \Delta t$$

$$(\rho)_i^{t'+\Delta t'} = (\rho)_i^{t'+\Delta t'}$$

$$(V)_i^{t'+\Delta t'} = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)_i^{t'+\Delta t'}$$

$$(T')_i^{t'+\Delta t'} = (\gamma - 1) \left( \frac{U_3}{U_1} - \frac{\gamma}{2} V'^2 \right)_i^{t'+\Delta t'}$$

#### Υπολογισμός χρονικού βήματος (timestep)

Επειδή οι αρχικές εξισώσεις είναι "υπερβολικές", προκυμμένον να έχουμε την απαιτούμενη ευστάθεια, προχωρήσαμε στην εκλογή του  $\Delta t$ , ως:

$$(\Delta t)_{i+1}^t = C \frac{\Delta x}{a_{i+1}^t + V_{i+1}^t}$$

Το οποίο αδιαστατοποιώντας γίνεται:

$$(\Delta t)_i^t = C' \frac{\Delta x'}{a_i'^t + V_i'^t}$$

Και για κάθε επόμενο στοιχείο:

$$(\Delta t)_{i+1}^t = C' \frac{\Delta x'}{a'^t_{i+1} + V'^t_{i+1}}$$

Όπου (C) είναι ο αριθμός Courant, ο οποίος εκλαμβάνει τιμές  $C \leq 1$  για ρητές μεθόδους (όπως συμβαίνει και στην περίπτωση μας, αφού η τεχνική McCormack αποτελεί ρητή μέθοδο. Ο αριθμός Courant χρησιμοποιείται όταν έχουμε μη γραμμικό πρόβλημα. Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται αλλιώς *κριτήριο CFL* για quasi-1d ροή όπου (V) είναι η τοπική ταχύτητα και (a) η τοπική ταχύτητα του ήχου. Το  $\Delta t$  θα πρέπει να είναι μικρότερο ή στην χειρότερη περίπτωση ίσο με τον χρόνο που απαιτείται να διαδοθεί ένα ηχητικό κύμα από ένα σημείο στο αμέσως επόμενο του. Για την περίπτωση του “local time stepping” όπως έχουμε και στην δική μας είναι πιο πιθανό και γρήγορο να πετύχουμε μόνιμη ροή. Επίσης μια άλλη μέθοδος (την οποία εκλέξαμε για την περίπτωση μας), είναι η επιλογή του min.  $\Delta t$  ( $\Delta t = \min(\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \dots, \Delta t_N)$ ). Περαιτέρω ανάλυση στον αριθμό Courant θα παρουσιαστεί παρακάτω για κάθε περίπτωση ξεχωριστά. Βέβαια αξίζει να αναφερθεί ότι για την επίλυση του θέματος, χρησιμοποιήσαμε πλέγμα με  $\Delta x = 40$ ,  $\Delta x = 80$  και  $\Delta x = 160$  υπολογιστικά σημεία. Το πόσο πυκνό είναι το πλέγμα παίζει ρόλο επηρεάζει άμεσα την λύση.

Κριτήριο σύγκλισης και truncation error: ως κριτήριο σύγκλισης εκλέχθηκε η μέθοδος κατά την οποία συγκρίνονται οι τιμές των ζητούμενων μεταβλητών (αυτές από την τεχνική McCormack) με τις τιμές των ίδιων μεταβλητών στις προηγούμενες επαναλήψεις. Επομένως όταν οι τιμές των μεταβλητών έχουν πολύ μικρή διαφορά μεταξύ τους (της τάξης του  $10^{-5}$ ) τότε ο κώδικας συγκλίνει. Ο λόγος ο οποίος η διαφορά αυτή δεν μπορεί να μηδενιστεί ποτέ, είναι η ύπαρξη του truncation error, το οποίο εμφανίζεται λόγω της φύσεως της υπολογιστικής μεθόδου (αριθμητική μέθοδος)

Εύρεση αναλυτικών αποτελεσμάτων: Οι αναλυτικές σχέσεις προκύπτουν από τους τύπους που έχουν αναλυθεί εκτενέστερα παραπάνω. Τα αναλυτικά αποτελέσματα χρησιμοποιήθηκαν για την διερεύνηση της εγκυρότητας των αποτελεσμάτων, τα οποία παρουσιάζονται στους πίνακες στο παράρτημα Α



## α) Subsonic-Supersonic

Στο συγκεκριμένο ερώτημα κληθήκαμε να αναλύσουμε υποηχητική-υπερηχητική ροή σε συγκλίνον-αποκλίνον ακροφύσιο συγκεκριμένης γεωμετρίας. Η ροή στο reservoir (inlet) είναι βαθιά υποηχητική. Καθώς εξελίσσεται στο ακροφύσιο, αυτή επιταχύνεται έως την ηχητική ( $M=1$ ) κατάσταση στον λαιμό ( $A_i$ ) για  $x=1.5$ . Έπειτα εφόσον η ροή έχει υπερηχητικές ιδιότητες, θα συνεχίσει να επιταχύνεται αφού βρισκόμαστε στην περιοχή του διαχύτη (όπως είχαμε αναφέρει για τις υπερηχητικές ροές επιταχύνονται στον διαχύτη και επιβραδύνονται στο ακροφύσιο σε αντίθεση με τις υποηχητικές). Επομένως εκλαμβάνουμε έναν αριθμό Mach της τάξης του  $M_e = 3.5$  στην έξοδο του συγκλίνοντος αποκλίνοντος ακροφυσίου.

Γεωμετρία ακροφυσίου: η γεωμετρία του ακροφυσίου που δίνεται στην εκφώνηση είναι,

$$A(x) = 1 + 2.2(x - 1.5)^2 \quad \text{για } 0 \leq x \leq 3, \text{ όπου για } x=1.5 \text{ είναι η περιοχή του λαιμού}$$

### Initial conditions:

#### Non-conservative:

Για την επίλυση του προβλήματος και για να «βοηθήσουμε» τον αλγόριθμο να συγκλίνει γρηγορότερα, είναι απαραίτητο να ορίσουμε κάποιες αρχικές συνθήκες, στον χρόνο 0, από τις οποίες θα ξεκινήσει τους υπολογισμούς. Οι αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιήσαμε στον κώδικα που αναπτύξαμε εκλήφθηκαν από το βιβλίο του Andersson για την πυκνότητα την ταχύτητα και την θερμοκρασία. Αξίζει να αναφερθεί ότι οι αρχικές συνθήκες δεν συμβάλουν στην λύση του κώδικα, αλλά τον βοηθούν να συγκλίνει πιο γρήγορα, δίνοντας μια κατεύθυνση προς την λύση. Αυτές, στο  $t=0$ , είναι:

$$\rho = 1 - 0.3146x, \quad T = 1 - 0.2314x, \quad \text{και} \quad V = (0.1 + 1.09x)T^{0.5}$$

#### Conservative:

Για τις συντηρητικές σχέσεις που αναφέρθηκαν και προηγουμένως χρησιμοποιούμε:

$$\text{Για } x \leq 0.5, \quad \rho = 1, \quad T = 1$$

$$\text{Για } 0.5 \leq x \leq 1.5, \quad \rho = 1 - 0.366(x - 0.5), \quad T = 1 - 0.167(x - 0.5)$$

$$\text{Για } 1.5 \leq x \leq 3.5, \quad \rho = 0.634 - 0.3879(x - 1.5), \quad T = 0.833 - 0.3507(x - 1.5)$$

Και για την ταχύτητα εκλαμβάνοντας σταθερή ροή μάζας, την υπολογίζουμε σε κάθε σημείο:  $V = \frac{0.59}{\rho A}$ , αφού

$$U_2 = \rho AV \approx 0.59, \text{ όπως και επίσης } U_1 = \rho A, \quad U_2 = \rho AV, \quad U_3 = \rho' \left( \frac{e'}{\gamma-1} + \frac{\gamma}{2} V'^2 \right) A'$$

### Boundary conditions:

#### Non-conservative:

Οι οριακές συνθήκες είναι αυτές που καθορίζουν την φυσική υπόσταση του προβλήματός μας, και εδώ αφορούν το 1° και το τελευταίο στοιχείο της επαναληπτικής διαδικασίας στον κώδικα που αναπτύξαμε, ή αλλιώς το 1° στοιχείο στην είσοδο και το τελευταίο στην έξοδο.

Για την είσοδο θα λάβουμε οριακές συνθήκες:  $\rho_1=1$  και  $T_1=1$

Για το στοιχείο της ταχύτητας εισόδου χρησιμοποιήσαμε την τεχνική extrapolation. Η τεχνική αυτή δίνει τιμές στις μεταβλητές του ζητούμενου στοιχείου (πρώτο ή τελευταίο) λαμβάνοντας υπόψιν τα 2 προηγούμενα (ή επόμενα) του. Δηλαδή για το πρώτο στοιχείο, λαμβάνονται τιμές από τα στοιχεία 2,3. Θα ορίσουμε μια μεταβλητή “slope” που εκφράζει τον λόγο των ταχυτήτων ως προς τον χρόνο, και μετά από πράξεις βρίσκουμε την τελική ζητούμενη σχέση για το τελευταίο σημείο. Αναλυτικά:

$$slope = \frac{(V_3 - V_2)}{\Delta x}$$

$$\text{Όμως ισχύει ότι: } V_1 = V_2 - \frac{(V_3 - V_2)}{\Delta x} * \Delta x$$

$$\text{Και τελικά προκύπτει για το πρώτο σημείο: } V_1 = 2V_2 - V_3$$

Ομοίως με extrapolation λαμβάνονται και οι μεταβλητές για το τελευταίο σημείο:

$$V_N = 2V_{N-1} - V_{N-2}, \quad \rho_N = 2\rho_{N-1} - \rho_{N-2}, \quad T_N = 2T_{N-1} - T_{N-2}$$

**Conservative:**

Για την είσοδο θα λάβουμε οριακές συνθήκες:  $\rho_1=1$  και  $T_1=1$

Για την conservative εκλέγουμε:  $U_1 = A_{i=1} = constant, \quad U_{2,i=1} = 2U_{2,i=2} - U_{2,i=3}$

Και για τα σημεία της εξόδου:  $U_{1,N} = 2U_{1,N-1} - U_{1,N-2}, \quad U_{2,N} = 2U_{2,N-1} - U_{2,N-2}, \quad U_{3,N} = 2U_{3,N-1} - U_{3,N-2}$

$$\bar{U}_{1,N} = 2\bar{U}_{1,N-1} - \bar{U}_{1,N-2}, \quad \bar{U}_{2,N} = 2\bar{U}_{2,N-1} - \bar{U}_{2,N-2}, \quad \bar{U}_{3,N} = 2\bar{U}_{3,N-1} - \bar{U}_{3,N-2},$$

Υπολογισμοί-Διαγράμματα:

**Non-conservative:**

Οι υπολογισμοί για την περίπτωση αυτή έγιναν με την βοήθεια της τεχνικής McCormack όπως αναφέρθηκε και παραπάνω. Οι τύποι που χρησιμοποιήσαμε είναι:

$$\rho_i^{t+\Delta t} = \rho_i^t + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{av} \Delta t$$

$$V_i^{t+\Delta t} = V_i^t + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{av} \Delta t$$

$$T_i^{t+\Delta t} = T_i^t + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{av} \Delta t$$

**Conservative:**

Οι υπολογισμοί για την περίπτωση αυτή έγιναν με την βοήθεια της τεχνικής McCormack όπως αναφέρθηκε και παραπάνω. Οι τύποι που χρησιμοποιήσαμε είναι:

$$(U_1)_i^{t'+\Delta t'} = (U_1)_i^{t'} + \left(\frac{\partial U_1}{\partial t'}\right)_{av} \Delta t$$

$$(U_2)_i^{t'+\Delta t'} = (U_2)_i^{t'} + \left(\frac{\partial U_2}{\partial t'}\right)_{av} \Delta t$$

$$(U_3)_i^{t'+\Delta t'} = (U_3)_i^{t'} + \left(\frac{\partial U_3}{\partial t'}\right)_{av} \Delta t$$

$$(\rho)_i^{t'+\Delta t'} = (U_1)_i^{t'+\Delta t'}$$

$$(V)_i^{t'+\Delta t'} = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)_i^{t'+\Delta t'}$$

$$(T')_i^{t'+\Delta t'} = (\gamma - 1) \left( \frac{U_3}{U_1} - \frac{\gamma}{2} V'^2 \right)_i^{t'+\Delta t'}$$

Διερεύνηση Courant:

Προκειμένου να αναλύσουμε την επίδραση του αριθμού Courant (C) στις (αδιάστατες) μεταβλητές της πυκνότητας ( $\rho$ ), θερμοκρασίας (T), πίεσης (P), αριθμού Mach (M), υπολογιστικών βημάτων-steps (k) και χρόνου για

steady state κατάσταση ( $t$ ), αλλά και στην διαδικασία της επίλυσης γενικότερα, υπολογίσαμε τις παρακάτω μεταβλητές για διαφορετικούς αριθμούς Courant ( $C$ ).

Courant number						
Courant number	$\rho^*/\rho_0$	$T^*/T_0$	$P^*/P_0$	M	K	$t'$
C=0.3	0.638	0.835	0.533	1.000	1430	12.86
C=0.5	0.6383	0.8359	0.5336	0.9998	876	13.13
C=0.7	0.6381	0.8358	0.5333	0.9993	697	14.64
C=0.9	0.6383	0.8359	0.5336	0.9992	550	14.86
C=1.1	0.6385	0.836	0.5338	0.9991	454	14.99
C=1.2	Blew up	Blew up	Blew up	Blew up	Blew up	Blew up
Analytical solution	0.62	0.83	0.528	1.000		

Σχόλια:

Ο αριθμός Courant και το CFL κριτήριο γενικότερα, αποδεικνύει ότι το  $\Delta t$  πρέπει να μην είναι μεγαλύτερο από τον χρόνο που θα κάνει ένα κρουστικό κύμα να ταξιδέψει από ένα σημείο του πλέγματός μας στο επόμενο.

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός Courant, απαιτούνται λιγότερες επαναλήψεις ώστε να φτάσουμε σε steady-state κατάσταση, ιδιαίτερα για  $C=1.1$  χρειάζονται 454 επαναλήψεις μέχρι να συγκλίνει ο κώδικας σε αντίθεση με την περίπτωση  $C=0.3$  που χρειαζόμαστε 1430 steps για να συγκλίνει, κάτι το οποίο φαίνεται απολύτως λογικό μιας και μεγαλώνει το χρονικό βήμα. Από θεωρία γνωρίζουμε ότι ο αριθμός Courant παίρνει τιμές για  $C \leq 1$ , παραδόξως ο κώδικας δεν “χτυπάει” για  $C=1.1$ . Αλλά για  $C \geq 1.1$  κάνει blew up. Οι τιμές των μεταβλητών πυκνότητας ( $\rho$ ), θερμοκρασίας ( $T$ ), πίεσης ( $P$ ) και αριθμού Mach ( $M$ ) υπολογίστηκαν πολύ κοντά στην αναλυτική λύση με πολύ μικρή απόκλιση. Όσον αφορά τον χρόνο σύγκλισης, όσο πιο μικρό αριθμό είχαμε τόσο πιο λίγο χρόνο ήθελε η ροή να φτάσει σε μόνιμη κατάσταση, δηλαδή ο μικρότερος χρόνος για  $C=0.3$  ήταν  $t'=12.86$ , ενώ για  $C=1.1$  ήθελε  $t'=14.99$  για την steady state κατάσταση.

Από την εξίσωση της  $\Delta t$ , παρατηρούμε ότι για μεγαλύτερους αριθμούς Courant, μεγαλώνει η τιμή των timestep και παρόλο που ο κώδικας “τρέχει” πιο γρήγορα επειδή έχουμε μεγαλύτερα  $\Delta t$ , υπάρχει πιθανότητα να μην αποτυπωθούν στην λύση ιδιότητες της ροής (όπως μικρές δίνες). Επίσης για πολύ μικρό αριθμό Courant που θα λέγαμε ότι θα είχαμε μια πιο αναλυτική λύση, ο αριθμός των επαναλήψεων γίνεται μεγαλύτερος και παρόλο που χρειάζεται λιγότερος χρόνος ( $t'$ ) μέχρι να φτάσει στην μόνιμη κατάσταση δεν αποτελεί την κατάλληλη λύση (λόγω των αριθμό των επαναλήψεων). Επομένως καταλήγουμε σε έναν αριθμό Courant ( $C$ ) μέσα στα όρια ( $C \leq 1$ ) ο οποίος να είναι περίπου στην μέση. Αξίζει να σημειωθεί ότι για κάθε φαινόμενο, ο κατάλληλος αριθμός Courant, διαφέρει.

### Grid independence:

Υπολογίσαμε τα αδιάστατα μεγέθη της πυκνότητας, θερμοκρασίας, πίεσης και αριθμού Mach για διαφορετικά πλέγματα και συγκεκριμένα για πλέγμα με  $\Delta x=40,80,160$  σημεία.

Η διαδικασία χωρίστηκε σε 2 περιπτώσεις: Αρχικά διατηρώντας σταθερό τον αριθμό Courant σε όλες τις περιπτώσεις, και στην συνέχεια μεταβάλλοντας τον ώστε ο συνολικός χρόνος ανάπτυξης της ροής να παραμένει σταθερός.

Για την διερεύνηση της επίδρασης του πόσο πυκνό είναι ένα πλέγμα στην λύση, καταλήξαμε στον παρακάτω πίνακα, όπου παρουσιάζονται οι τιμές των υπό μελέτη μεγεθών, καθώς και ο αριθμός των επαναλήψεων μέχρι την σύγκλιση(K) και ο αδιάστατος χρόνος ( $t'$ )

Grid indepedence (for C=0.5)						
Grid points	$\rho^*/\rho_0$	$T^*/T_0$	$P^*/P_0$	M	K	$t'$
Case 1:40 points	0.638	0.8358	0.5333	0.9993	800	14.1
Case 1:80 points	0.6376	0.8353	0.5326	1.001	1463	11.52
Case 1:160 points	0.6372	0.835	0.5321	1.004	2795	11,01
Analytical value	0.62	0.83	0.528	1.000		

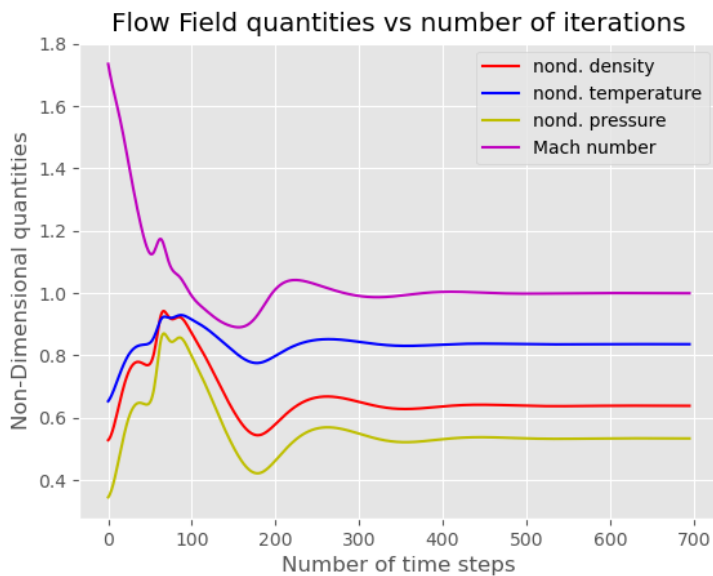
Grid indepedence (for $t'$ constant )							
Grid points	$\rho^*/\rho_0$	$T^*/T_0$	$P^*/P_0$	M	K	$t'$	C
Case 1:40 points	0.638	0.8358	0.5333	0.9993	800	13.14	0.5
Case 1:80 points	0.6202	0.8257	0.5121	1.03	1094	12.93	0.75
Case 1:160 points	0.6392	0.8304	0.5320	1.001	1681	11.45	0.95
Analytical value	0.62	0.83	0.528	1.000			

### Σχόλια:

Παρατηρούμε ότι όλες οι τιμές των παραπάνω μεταβλητών έρχονται σε συμφωνία με τις αναλυτικές λύσεις που υπολογίσαμε με πολύ μικρή απόκλιση μεταξύ των τιμών. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι όσο πιο αραιό είναι το πλέγμα, τόσο λιγότερα υπολογιστικά βήματα χρειαζόμαστε για να συγκλίνει ο κώδικας και ο χρόνος για να φτάσει σε μόνιμη κατάσταση είναι μεγαλύτερος σε σχέση με πιο πυκνά πλέγματα. Γενικότερα, θέλουμε να έχουμε πιο πυκνό πλέγμα έτσι ώστε να λαμβάνουμε υπόψιν καλύτερα τις ιδιότητες της ροής. Αλλά δεν σημαίνει ότι όσο πιο πυκνό το πλέγμα, τόσο καλύτερη είναι η λύση. Από το αραιό στο πυκνό πλέγμα όντως αυξάνει η ακρίβεια του αποτελέσματος αλλά μέχρι ένα σημείο, μετά η ακρίβεια συνάρτηση της πυκνότητας του πλέγματος πάει ασυμπτωτικά με αποτέλεσμα όσο πυκνώνουμε το πλέγμα απλά να του προσθέτουμε αριθμούς επαναλήψεων, αναγκάζοντας το να κάνει περισσότερες επαναλήψεις για να συγκλίνει, χωρίς να κερδίζουμε σε ακρίβεια αποτελεσμάτων. Επομένως επιλέγουμε ένα πιο πυκνό πλέγμα ώστε το mesh να είναι καλύτερο και να καταλήγουμε σε καλύτερη σύγκλιση χωρίς όμως να είναι τόσο πυκνό ώστε να επιβαρύνεται ο κώδικας.

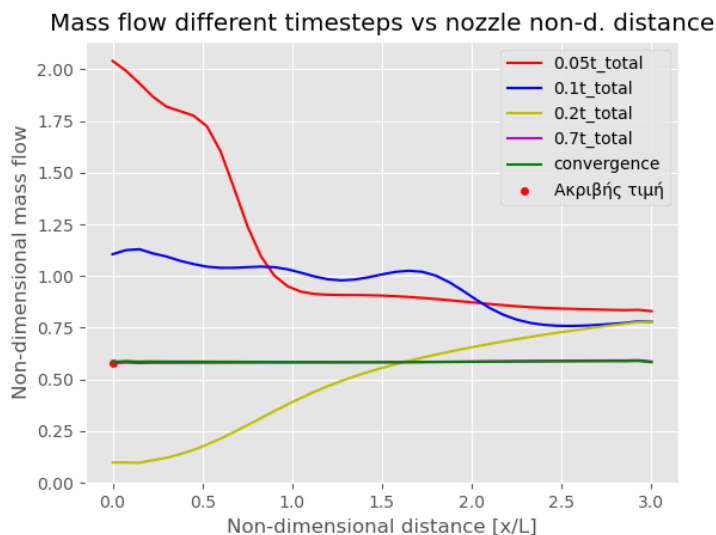
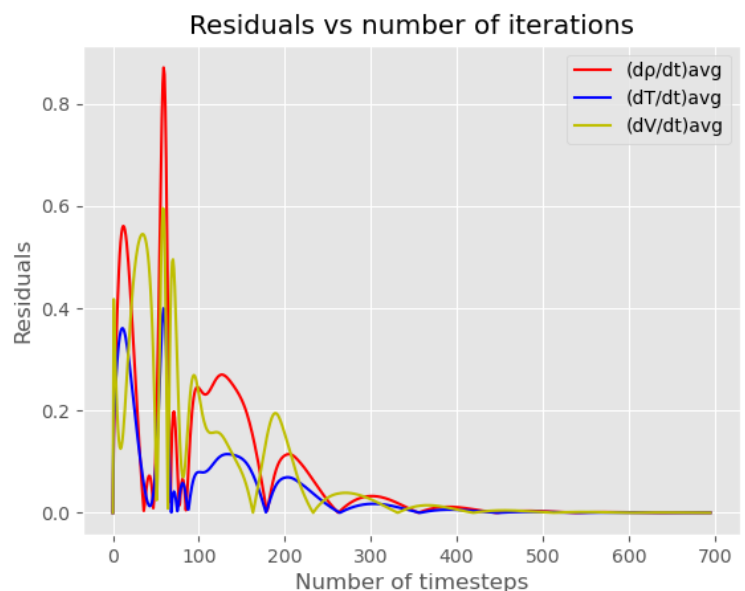
### Διαγράμματα:

#### Non-Conservative:



Διάγραμμα 2°: παρόμοιο με το διάγραμμα 7.10 του Andersson, αφορά τις διαφορικές μέσες τιμές των μεταβολών, το οποίο είναι καλός δείκτης στο να κατανοήσουμε την πορεία της επίλυσης.

Σχόλια: Τα αποτελέσματα(residuals, average) της πυκνότητας ( $\rho$ ) της θερμοκρασίας ( $T$ ), και της ταχύτητας ( $V$ ) ως προς τα βήματα της επαναληπτικής διαδικασίας, παρουσιάζονται σε απόλυτη τιμή και παρατηρούμε ότι έπειτα από μερικές εκατοντάδες επαναλήψεις, η τάξη μεγέθους των μεταβολών πέφτουν κάτω από το 0.1 και καταλήγουν κοντά στο  $10^{-5}$  όπου και έχουμε βάλει όριο σύγκλισης.



Διάγραμμα 1°: παρόμοιο με το διάγραμμα 7.9 του Andersson, αφορά τα αδιάστατα μεγέθη της πυκνότητας ( $\rho$ ), θερμοκρασίας ( $T$ ), πίεσης ( $P$ ) και αριθμού Mach ( $M$ ) κατά μήκος του ακροφυσίου, ως προς τον αριθμό των βημάτων της επαναληπτικής διαδικασίας.

Σχόλια: παρατηρείται εξομάλυνση των διαταραχών έπειτα από περίπου 350 time-steps.

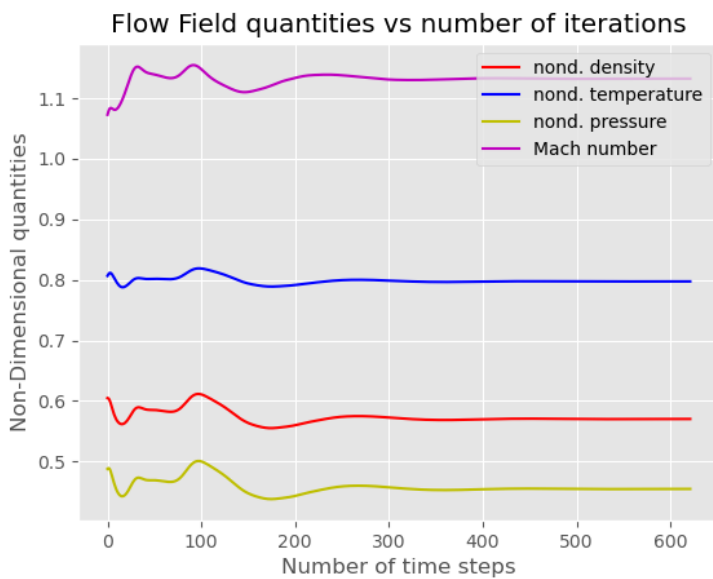
Διάγραμμα 3°: παρόμοιο με το διάγραμμα 7.11 του Andersson, αφορά την ροή μάζας για διαφορετικές τιμές του  $\Delta t$ , ως προς το αδιάστατο μήκος του ακροφυσίου.

Σχόλια: Στην non conservative, όπου υπολογίζουμε απευθείας τα μεγέθη ενδιαφέροντος: (πυκνότητα, θερμοκρασία, ταχύτητα) η ροή μάζας είναι παράγωγο μέγεθος που προκύπτει από τα πρώτα. Θα γίνει μια μικρή σύγκριση στο εδάφιο της conservative.

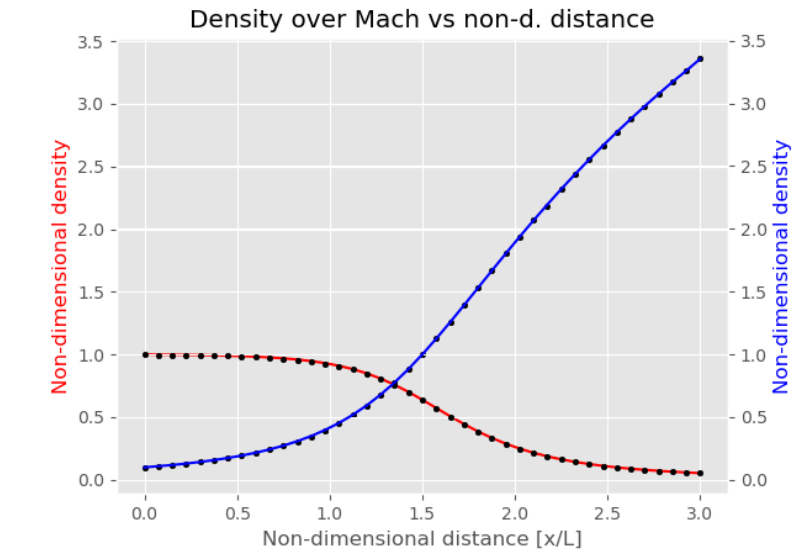
Διάγραμμα 4°: παρόμοιο με το διάγραμμα 7.12 του Andersson, αφορά την εξέλιξη των αδιάστατων Mach και πυκνότητας ως προς το αδιαστατοποιημένο μήκος του ακροφυσίου.

Σχόλια: Με τις τελείες παριστάνονται οι αναλυτικές λύσεις, οι οποίες έρχονται σε απόλυτη συμφωνία με τις υπολογισμένες τιμές. Επίσης παρατηρούμε ο Mach φτάνει την ηχητική κατάσταση περίπου στον λαιμό όπως αναφέραμε και προηγουμένως.

Conservative:

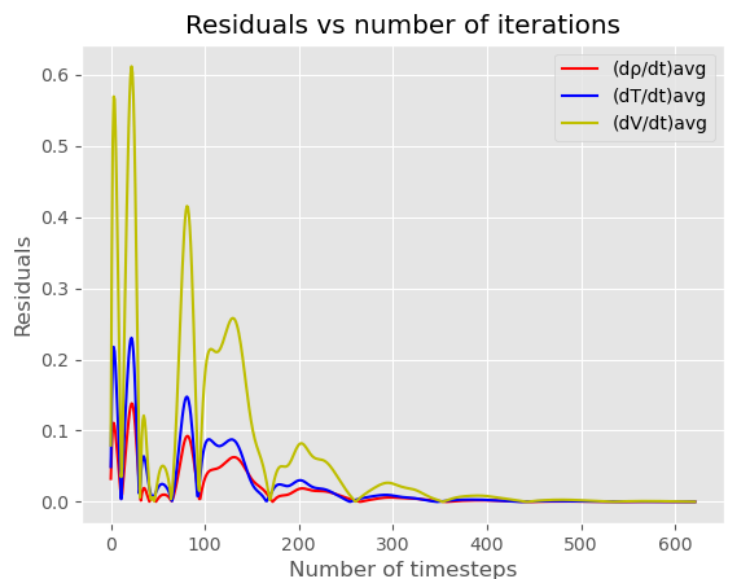


Διάγραμμα 6°: παρόμοιο με το διάγραμμα 7.10 του Andersson, αφορά τις διαφορικές μέσες τιμές (residuals, average) της πυκνότητας ( $\rho$ ) της θερμοκρασίας ( $T$ ), και της ταχύτητας ( $V$ ) ως προς τα βήματα της επαναληπτικής διαδικασίας.

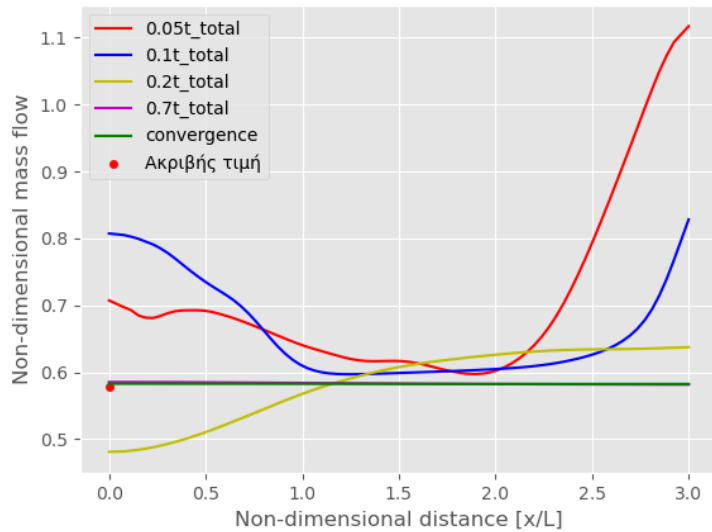


Διάγραμμα 5°: παρόμοιο με το διάγραμμα 7.9 του Andersson, , αφορά τα αδιάστατα μεγέθη της πυκνότητας ( $\rho$ ), θερμοκρασίας ( $T$ ), πίεσης ( $P$ ) και αριθμού Mach ( $M$ ) κατά μήκος του ακροφυσίου, ως προς τον αριθμό των βημάτων της επαναληπτικής διαδικασίας.

Σχόλια: Παρατηρείται εξομάλυνση των διαταραχών σε time-steps περίπου 280 το οποίο είναι μικρότερο σε σχέση με τον αριθμό που σύγκλινε στην non-conservative.



Mass flow different timesteps vs nozzle non-d. distance



Διάγραμμα 8°: παρόμοιο με το διάγραμμα 7.12 του Andersson, αφορά την εξέλιξη των αδιαστατων Mach και πυκνότητας ως προς το αδιαστατοποιημένο μήκος του ακροφυσίου.

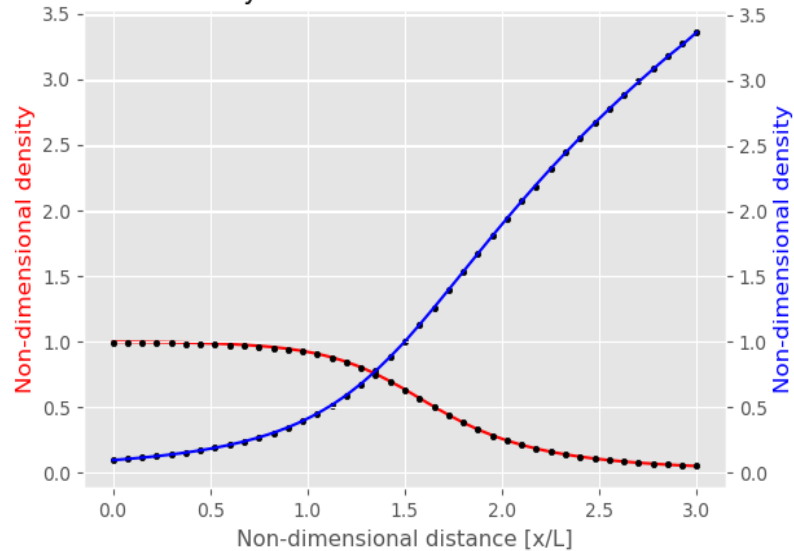
Σχόλια:

Παρατηρούμε συμπεριφορά παρόμοια με την non-conservative

Διάγραμμα 7°: παρόμοιο με το διάγραμμα 7.11 του Andersson, αφορά την ροή μάζας για διαφορετικές τιμές του  $\Delta t$ , ως προς το αδιάστατο μήκος του ακροφυσίου.

Σχόλια: Στην περίπτωσης της επίλυσης μέσω conservative, η ροή μάζας είναι ένα από τα μεγέθη που επιλύουμε απευθείας μέσω των διανυσμάτων  $U_1$ ,  $U_2$  και  $U_3$ . Συνεπώς βλέπουμε μια εντελώς διαφορετική συμπεριφορά στην πορεία της επίλυσης από αυτήν της non conservative

Density over Mach vs non-d. distance



## β) Pure Subsonic

Η ανάλυση της ροής για το 2<sup>ο</sup> ερώτημα αφορά την καθαρά υποηχητική κατάσταση, όπου η ροή εισέρχεται με τον ίδιο τρόπο όπως και στο 1<sup>ο</sup> ερώτημα και εξελίσσεται με τον ίδιο τρόπο μέχρι τον λαιμό ( $x=1.5$ ) φτάνοντας σχεδόν (οριακά) την ηχητική ταχύτητα ( $M=1$ ) χωρίς να την περάσει. Έπειτα στον διαχύτη η ταχύτητα επιβραδύνεται με αποτέλεσμα να πέφτει ο Mach και στην έξοδο να είναι της τάξης του  $M=0.3$ . Για να έχουμε καθαρά υποηχητική ροή στο συγκλίνον-αποκλίνον ακροφύσιο θα πρέπει οριακά ο λόγος  $\frac{P_e}{P_0} = 0.588$ . Εάν είναι μεγαλύτερος η ροή θα γίνει υπερηχητική.

Γεωμετρία ακροφυσίου: Η γεωμετρία του ακροφυσίου δίνεται στην εκφώνηση ως

$$\frac{A}{A_t} = \begin{cases} 1 + 2.2\left(\frac{x}{L} - 1.5\right)^2 & \text{για } 0 \leq \frac{x}{L} \leq 1.5 \\ 1 + 0.2223\left(\frac{x}{L} - 1.5\right)^2 & \text{για } 1.5 \leq \frac{x}{L} \leq 3.0 \end{cases}$$

### Initial conditions:

#### Non-conservative:

Για την non-conservative οι αρχικές συνθήκες επιλέχθηκαν αυτές που δίνονται από τον Andersson, για την συγκεκριμένη περίπτωση.

$$\rho = 1 - 0.023x, \quad T = 1 - 0.009333x, \quad \text{και} \quad V = 0.05 + 0.11x$$

#### Conservative:

Για την συντηρητική (conservative) ως αρχικές συνθήκες για τις τιμές  $U_1, U_2, U_3$ , εκλέχθηκαν οι ίδιες με την 1<sup>ο</sup> ερώτημα. Δηλαδή:

$$V = \frac{0.59}{\rho A}, \quad \text{αφού} \quad U_2 = \rho A V \approx 0.59, \quad \text{όπως και επίσης} \quad U_1 = \rho A, \quad U_2 = \rho A V, \quad U_3 = \rho' \left( \frac{e'}{\gamma-1} + \frac{\gamma}{2} V'^2 \right) A'$$

Αλλά οι initial conditions για την conservative όσον αφορά την πυκνότητα, την θερμοκρασία και την ταχύτητα στο ακροφύσιο είναι ίδιες με αυτές της υποηχητικής περίπτωση για την non-conservative μέθοδο. Δηλαδή:

$$\rho = 1 - 0.023x, \quad T = 1 - 0.009333x, \quad \text{και} \quad V = 0.05 + 0.11x$$

### Boundary conditions:

#### Non-conservative:

Οι οριακές συνθήκες για την non-conservative, θα είναι ίδιες με αυτές της non-conservative για subsonic-supersonic με μόνη διαφορά την εισαγωγή του όρου του  $\Delta P$ , που την ορίζουμε ως  $\Delta P = \frac{P_e}{P_0}$  με σκοπό την εισαγωγή του υποηχητικού φαινομένου στην επαναληπτική διαδικασία. Δηλαδή:

$$\text{Για την είσοδο θα λάβουμε οριακές συνθήκες: } \rho_1=1 \text{ και } T_1=1, \quad V_1 = 2V_2 - V_3$$

$$\text{Για την έξοδο: } V_N = 2V_{N-1} - V_{N-2}, \quad \rho_N = 2\rho_{N-1} - \rho_{N-2}, \quad T_N = \Delta P / \rho_N$$

#### Conservative:

Οι σχέσεις θα είναι ίδιες με την conservative του subsonic-supersonic, δηλαδή:

$$\text{Για την είσοδο θα λάβουμε οριακές συνθήκες: } \rho_1=1 \text{ και } T_1=1$$

$$\text{Για την conservative εκλέγουμε: } U_1 = A_{i=1} = \text{constant}, \quad U_{2,i=1} = 2U_{2,i=2} - U_{2,i=3}$$



Και για τα σημεία της εξόδου:  $U_{1,N} = 2U_{1,N-1} - U_{1,N-2}$ ,  $U_{2,N} = 2U_{2,N-1} - U_{2,N-2}$ ,  $U_{3,N} = 2U_{3,N-1} - U_{3,N-2}$

Όμως για να εισάγουμε τον όρο της διαφοράς πίεσης στην επαναληπτική διαδικασία έπρεπε να αλλάξουμε τον τύπο του  $\bar{U}_3$  αναλυτικά όπως παρακάτω

$$\bar{U}_{1,N} = 2\bar{U}_{1,N-1} - \bar{U}_{1,N-2}, \quad \bar{U}_{2,N} = 2\bar{U}_{2,N-1} - \bar{U}_{2,N-2}, \quad \bar{U}_{3,N} = \bar{U}_{1,N} \left( \frac{\bar{T}_N}{\gamma - 1} + \left( \frac{\gamma}{2} \right) \bar{V}_N^2 \right), \quad \text{όπου } \bar{V}_N = \frac{\bar{U}_{2,N}}{\bar{U}_{1,N}}$$

### Υπολογισμοί-Διαγράμματα:

Υπολογισμοί:

Non-conservative:

Οι υπολογισμοί για την περίπτωση αυτή έγιναν με την βοήθεια της τεχνικής McCormack όπως αναφέρθηκε και παραπάνω. Οι τύποι που χρησιμοποιήσαμε είναι:

$$\begin{aligned} \rho_i^{t+\Delta t} &= \rho_i^t + \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{av} \Delta t \\ V_i^{t+\Delta t} &= V_i^t + \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)_{av} \Delta t \\ T_i^{t+\Delta t} &= T_i^t + \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{av} \Delta t \end{aligned}$$

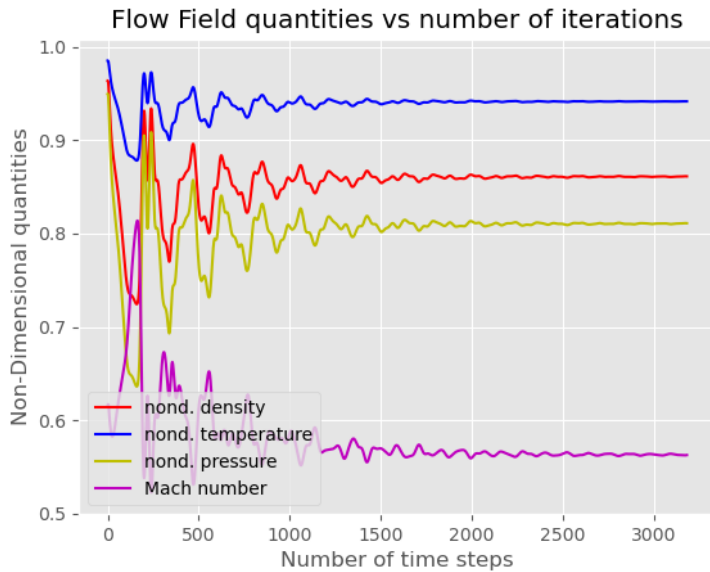
Conservative:

Οι υπολογισμοί για την περίπτωση αυτή έγιναν με την βοήθεια της τεχνικής McCormack όπως αναφέρθηκε και παραπάνω. Οι τύποι που χρησιμοποιήσαμε είναι:

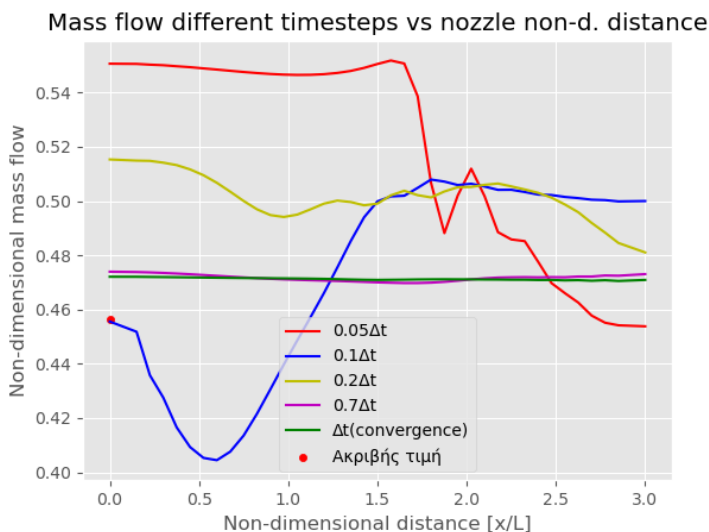
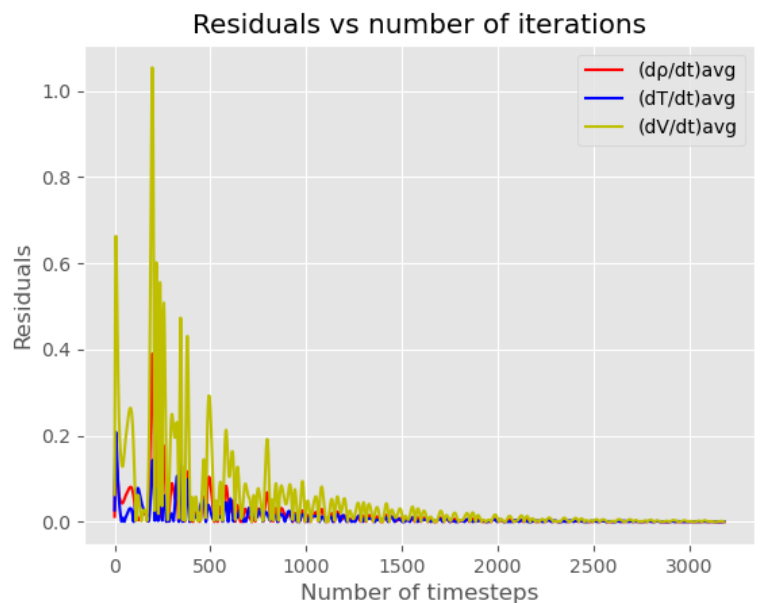
$$\begin{aligned} (U_1)_i^{t'+\Delta t'} &= (U_1)_i^{t'} + \left( \frac{\partial U_1}{\partial t'} \right)_{av} \Delta t \\ (U_2)_i^{t'+\Delta t'} &= (U_2)_i^{t'} + \left( \frac{\partial U_2}{\partial t'} \right)_{av} \Delta t \\ (U_3)_i^{t'+\Delta t'} &= (U_3)_i^{t'} + \left( \frac{\partial U_3}{\partial t'} \right)_{av} \Delta t \\ (\rho)_i^{t'+\Delta t'} &= (\rho)_i^{t'+\Delta t'} \\ (V)_i^{t'+\Delta t'} &= \left( \frac{U_2}{U_1} \right)_i^{t'+\Delta t'} \\ (T')_i^{t'+\Delta t'} &= (\gamma - 1) \left( \frac{U_3}{U_1} - \frac{\gamma}{2} V'^2 \right)_i^{t'+\Delta t'} \end{aligned}$$

### Διαγράμματα:

Non-conservative:



**Διάγραμμα 10°:** παρόμοιο με το διάγραμμα 7.10 του Andersson, αφορά τις διαφορικές μέσες τιμές (residuals, average) της πυκνότητας ( $\rho$ ) της θερμοκρασίας ( $T$ ), και της ταχύτητας ( $V$ ) ως προς τα βήματα της επαναληπτικής διαδικασίας.



**Διάγραμμα 9°:** παρόμοιο με το διάγραμμα 7.9 του Andersson, αφορά τα αδιάστατα μεγέθη της πυκνότητας ( $\rho$ ), θερμοκρασίας ( $T$ ), πίεσης ( $P$ ) και αριθμού Mach ( $M$ ) κατά μήκος του ακροφυσίου, ως προς τον αριθμό των βημάτων της επαναληπτικής διαδικασίας.

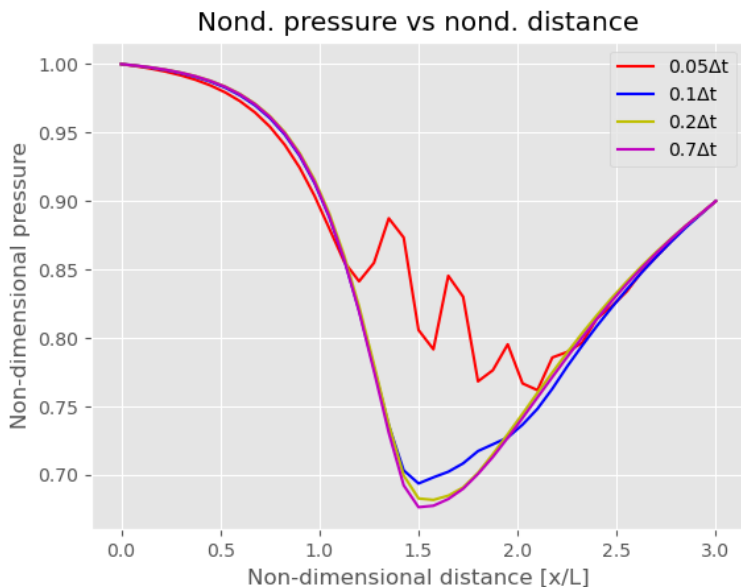
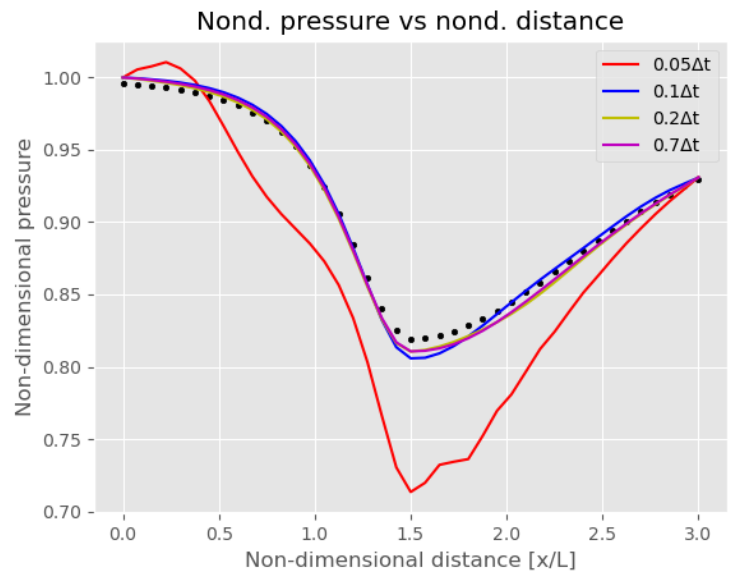
**Σχόλια:** Στην περίπτωση της subsonic ροής, παρατηρούμε ότι η διαδικασία της επίλυσης, κρατάει αρκετά περισσότερες επαναλήψεις από αυτήν της sub-supersonic. Αυτό εξηγείται στο ότι η ροή, επειδή κινείται με χαμηλούς Mach, χρειάζεται και ένα εύλογο χρονικό διάστημα ώστε να διασχίσει το ακροφύσιο και στην συνέχεια να αναπτυχθεί.

**Διάγραμμα 11°:** παρόμοιο με το διάγραμμα 7.16 του Andersson, αφορά την αδιάστατη ροή μάζας ως προς το αδιάστατο μήκος του ακροφυσίου για διαφορετικά  $\Delta t$ .

**Σχόλια:** Παρατηρούμε ότι η τιμή που έχει υπολογισθεί, απέχει ελάχιστα από την πραγματική, αναλυτική τιμή (3% σφάλμα)

Διάγραμμα 12°: παρόμοιο με το διάγραμμα 7.17 του Andersson, αφορά την αδιάστατη πίεση ως προς το αδιάστατο μήκος του ακροφυσίου. Με βούλες απεικονίζονται οι αναλυτικές τιμές.

Σχόλια: Παρατηρούμε μια καλή συσχέτιση μεταξύ των αναλυτικών τιμών και αυτών που υπολογίσανε, πιο κοντά είναι για  $0.1\Delta t$  και  $0.7\Delta t$ .



Διάγραμμα 13°: παρόμοιο με το διάγραμμα 7.18 του Andersson, αφορά την αδιάστατη πίεση ως προς το αδιάστατο μήκος του ακροφυσίου. Εδώ μελετάται η περίπτωση της διαφοράς πίεσης εξόδου-εισόδου για 0.9 σε σχέση με την αρχική τιμή των 0.93

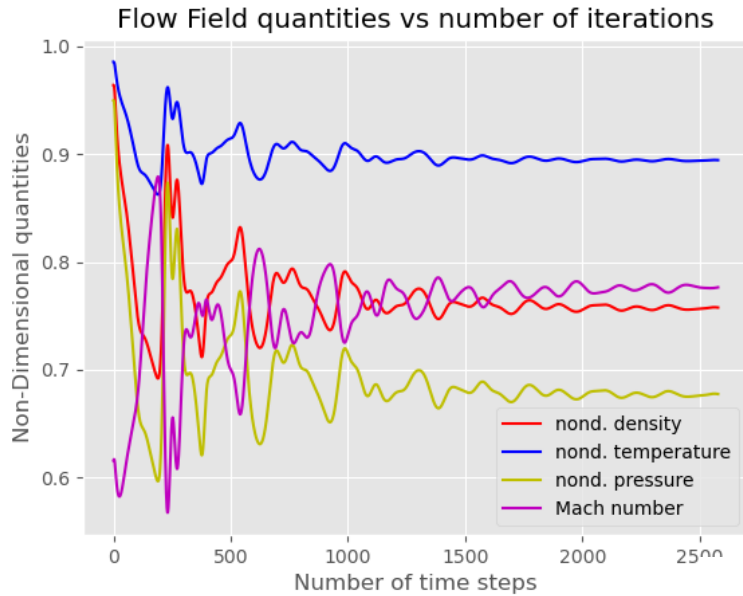
Σχόλια: Αρχικά πρέπει να σχολιασθεί ότι η πτώση πίεσης είναι μεγαλύτερη σε αυτήν την περίπτωση λόγω της αύξησης της ταχύτητάς στον λαίμο.

Επίσης, η λύση παρουσιάζεται σχετικά πιο ασταθής, λόγω κάποιων αριθμητικών πεπερασμένων κυμάτων που σχηματίζονται κατάντη της ροής και κάνουν τον αλγόριθμο ασταθή.

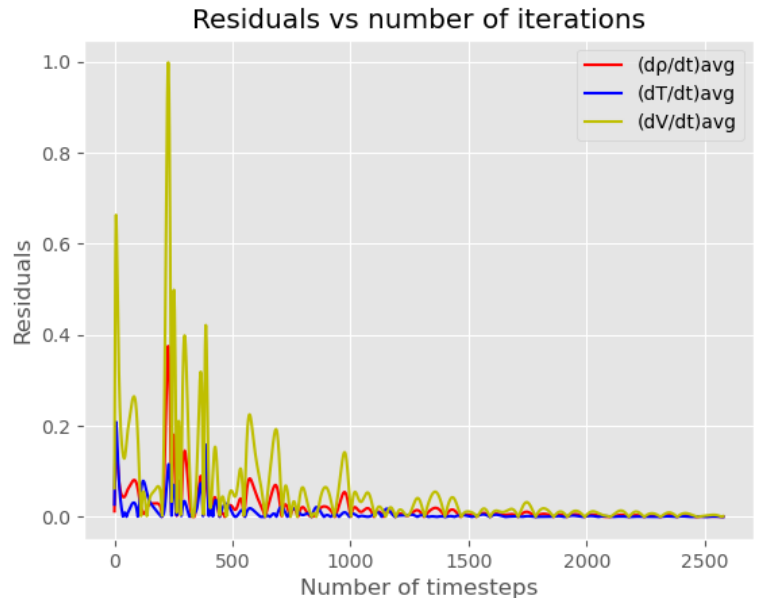
Έγινε μια προσπάθεια να φτάσουμε τα όρια του αλγορίθμου, κατεβάζοντας ολοένα και περισσότε-

τερο την διαφορά πίεσης εισόδου-εξόδου. Αυτό αποδείχθηκε για την τιμή 0.88 όπου από εκεί και ύστερα ο αλγόριθμος «μούλιαζε» και έβγαζε παντού NaN.

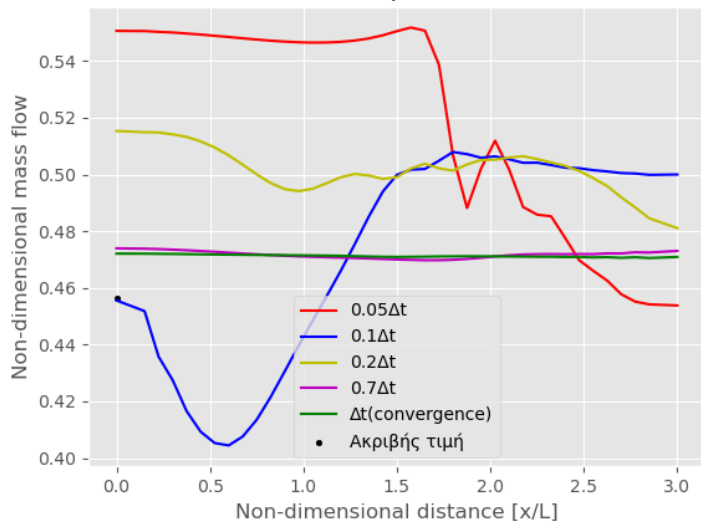
Conservative:



Διάγραμμα 15°: παρόμοιο με το διάγραμμα 7.10 του Andersson, αφορά τις διαφορικές μέσες τιμές (residuals, average) της πυκνότητας ( $\rho$ ) της θερμοκρασίας ( $T$ ), και της ταχύτητας ( $V$ ) ως προς τα βήματα της επαναληπτικής διαδικασίας

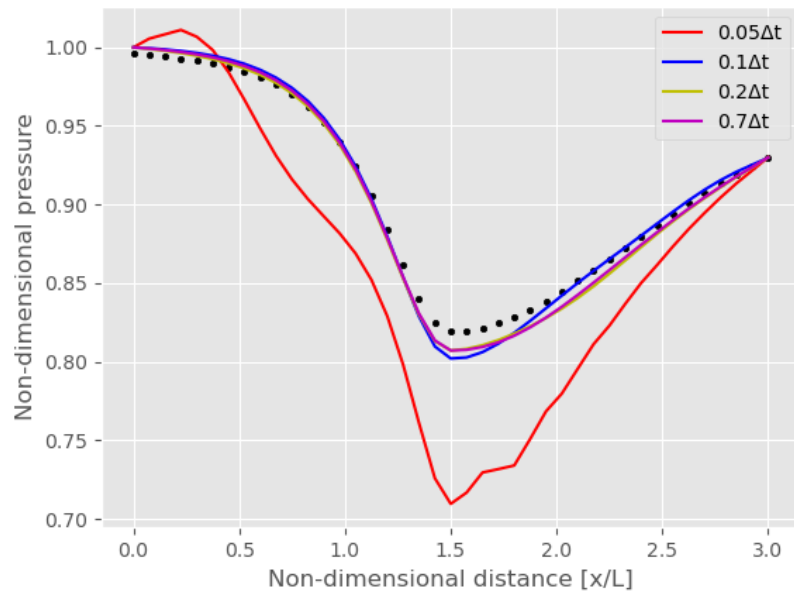


Mass flow different timesteps vs nozzle non-d. distance



Διάγραμμα 16°: παρόμοιο με το διάγραμμα 7.16 του Andersson, αφορά την αδιάστατη ροή μάζας ως προς το αδιάστατο μήκος του ακροφύσιου για διαφορετικά  $\Delta t$ .

Nond. pressure vs nond. distance



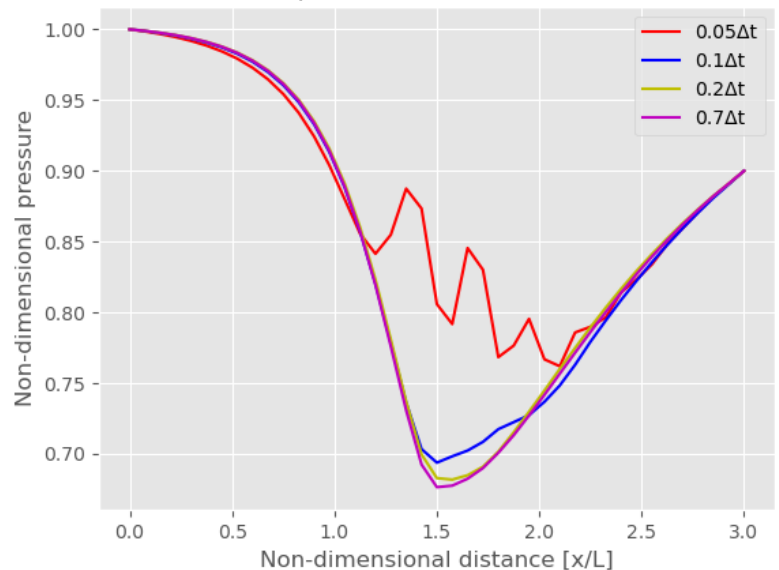
Διάγραμμα 18°: Παρόμοιο με το διάγραμμα 7.18 του Andersson, αφορά την αδιάστατη πίεση ως προς το αδιάστατο μήκος του ακροφυσίου.

Διάγραμμα 17°: παρόμοιο με το διάγραμμα 7.17 του Andersson, αφορά την αδιάστατη πίεση ως προς το αδιάστατο μήκος του ακροφυσίου. Με βούλες απεικονίζονται οι αναλυτικές τιμές.

Σχόλια:

Παρατηρούμαι μια καλή συσχέτιση μεταξύ των αναλυτικών τιμών και αυτών που υπολογίσαμε, πιο κοντά είναι για  $0.1\Delta t$  και  $0.7\Delta t$ .

Nond. pressure vs nond. distance



## γ) Supersonic-Shock case

Σε αυτό το ερώτημα θα αναλύσουμε την ροή σε συγκλίνον-αποκλίνον ακροφύσιο με την ύπαρξη ενός κρουστικού κύματος. Αυτό θα συμβεί τόσο για την conservative όσο και για την non-conservative form. Στην συγκεκριμένη περίπτωση η ροή εισάγεται υποηχητικά, επιταχύνεται στο ακροφύσιο και φτάνει στον λαιμό την ηχητική κατάσταση, δηλαδή για  $x=1.5$ ,  $M=1$ . Αμέσως μετά έχουμε επιτάχυνση της ροής ως ένα σημείο στο οποίο έχουμε εμφάνιση κρουστικού κύματος για περίπου  $M=2$ . Η ροή όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις είναι ισεντροπική εκτός στο σημείο που έχουμε το κρουστικό κύμα. Εκεί διακόπτεται η ισεντροπικότητα της ροής. Μετά το κρουστικό κύμα, όπου έχει επανέλθει η υποηχητική ροή, συνεχίζει να επιβραδύνεται στον διαχύτη μέχρι την έξοδο από την διάταξη. Επιπλέον για να συμβεί η περίπτωση του κρουστικού κύματος, δόθηκε από την βιβλιογραφία ένας λόγος πιέσεων  $\frac{P_e}{P_0} = 0.6784$ .

Γεωμετρία ακροφυσίου:

Για την περίπτωση του κρουστικού κύματος, έχουμε την ίδια γεωμετρία με την 1<sup>η</sup> περίπτωση που εξετάσαμε, δηλαδή:  $A(x) = 1 + 2.2(x - 1.5)^2$  για  $0 \leq x \leq 3$ , όπου για  $x=1.5$  είναι η περιοχή του λαιμού

### Initial conditions:

#### Non-conservative:

Για την non-conservative οι αρχικές συνθήκες για πυκνότητα, θερμοκρασία και ταχύτητα, είναι:

$$\text{Για } x \leq 0.5, \quad \rho = 1, \quad T = 1, \quad V = (0.1 + 1.09x) T^{0.5}$$

$$\text{Για } 0.5 \leq x \leq 1.5, \quad \rho = 1 - 0.366(x - 0.5), \quad T = 1 - 0.167(x - 0.5), \quad V = (0.1 + 1.09x) T^{0.5}$$

$$\text{Για } 1.5 \leq x \leq 2.1, \quad \rho = 0.634 - 0.3879(x - 1.5), \quad T = 0.833 - 0.3507(x - 1.5), \quad V = (0.1 + 1.09x) T^{0.5}$$

$$\text{Για } 2.1 \leq x \leq 3, \quad \rho = 0.5892 - 0.10228(x - 2.1), \quad T = 0.93968 - 0.0622(x - 2.1), \quad V = 0.05 + 0.11x$$

#### Conservative:

Για την Conservative ανάλογα με την θέση  $x/L$  στο ακροφύσιο προκύπτουν οι εξής αρχικές συνθήκες:

$$\text{Για } x \leq 0.5, \quad \rho = 1, \quad T = 1$$

$$\text{Για } 0.5 \leq x \leq 1.5, \quad \rho = 1 - 0.366(x - 0.5), \quad T = 1 - 0.167(x - 0.5)$$

$$\text{Για } 1.5 \leq x \leq 2.1, \quad \rho = 0.634 - 0.3879(x - 1.5), \quad T = 0.833 - 0.3507(x - 1.5)$$

$$\text{Για } 2.1 \leq x \leq 3, \quad \rho = 0.5892 - 0.10228(x - 2.1), \quad T = 0.93968 - 0.0622(x - 2.1)$$

Επίσης όπως και προηγούμενος ισχύουν:  $V = \frac{0.59}{\rho A}$ , αφού  $U_2 = \rho A V \approx 0.59$ , όπως και επίσης  $U_1 = \rho A$ ,  $U_2 = \rho A V$ ,  $U_3 = \rho' \left( \frac{e'}{\gamma - 1} + \frac{\gamma}{2} V'^2 \right) A'$

### Boundary conditions:

#### Non-conservative:

Οι οριακές συνθήκες για την περίπτωση, αποτελούν ίδιες όπως και για την περίπτωση του pure subsonic, δηλαδή:

Για την είσοδο θα λάβουμε οριακές συνθήκες:  $\rho_1=1$  και  $T_1=1$ ,  $V_1 = 2V_2 - V_3$

$$\text{Για την έξοδο: } V_N = 2V_{N-1} - V_{N-2}, \rho_N = 2\rho_{N-1} - \rho_{N-2}, T_N = \Delta P / \rho_N$$

### Conservative:

Για το κρουστικό κύμα, οι οριακές συνθήκες, γίνονται:

Για την είσοδο θα λάβουμε οριακές συνθήκες:  $\rho_1=1$  και  $T_1=1$

Για την conservative εκλέγουμε:  $U_1 = A_{i=1} = \text{constant}$ ,  $U_{2,i=1} = 2U_{2,i=2} - U_{2,i=3}$

Και για τα σημεία της εξόδου:  $U_{1,N} = 2U_{1,N-1} - U_{1,N-2}$ ,  $U_{2,N} = 2U_{2,N-1} - U_{2,N-2}$ ,  $U_{3,N} = 2U_{3,N-1} - U_{3,N-2}$

Όμως για να εισάγουμε τον όρο της διαφοράς πίεσης στην επαναληπτική διαδικασία όπως και στην pure sub-sonic έπρεπε να αλλάξουμε τον τύπο του  $\bar{U}_3$  αναλυτικά όπως παρακάτω

$$\bar{U}_{1,N} = 2\bar{U}_{1,N-1} - \bar{U}_{1,N-2}, \quad \bar{U}_{2,N} = 2\bar{U}_{2,N-1} - \bar{U}_{2,N-2}, \quad \bar{U}_{3,N} = \bar{U}_{1,N} \left( \frac{\bar{T}_N}{\gamma - 1} + \left( \frac{\gamma}{2} \right) \bar{V}_N^2 \right), \text{ όπου } \bar{V}_N = \frac{\bar{U}_{2,N}}{\bar{U}_{1,N}}$$

### Υπολογισμοί-Διαγράμματα:

#### Υπολογισμοί:

#### Non-conservative:

Οι υπολογισμοί για την περίπτωση αυτή έγιναν με την βοήθεια της τεχνικής McCormack όπως αναφέρθηκε και παραπάνω. Οι τύποι που χρησιμοποιήσαμε είναι:

$$\begin{aligned} \rho_i^{t+\Delta t} &= \rho_i^t + \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{av} \Delta t \\ V_i^{t+\Delta t} &= V_i^t + \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)_{av} \Delta t \\ T_i^{t+\Delta t} &= T_i^t + \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{av} \Delta t \end{aligned}$$

### Conservative:

Οι υπολογισμοί για την περίπτωση αυτή έγιναν με την βοήθεια της τεχνικής McCormack όπως αναφέρθηκε και παραπάνω. Η διαφορά με τις προηγούμενες περιπτώσεις είναι ότι θα εισάγουμε τον όρο της τεχνικής διάχυσης ( $S_i^t$ ) η οποία περιέχει και την μεταβλητή  $C_x$  η οποία θα αναλυθεί και παρακάτω.

$$\begin{aligned} S_i^t &= \frac{C_x |(p')_{i+1}' - 2(p')_i' + (p')_{i-1}'|}{(p')_{i+1}' + 2(p')_i' + (p')_{i-1}'} (U_{i+1}' - 2U_i' + U_{i-1}') \\ \bar{S}_i^{t+\Delta t} &= \frac{C_x |(\bar{p}')_{i+1}^{t+\Delta t'} - 2(\bar{p}')_i^{t+\Delta t'} + (\bar{p}')_{i-1}^{t+\Delta t'}|}{(\bar{p}')_{i+1}^{t+\Delta t'} + 2(\bar{p}')_i^{t+\Delta t'} + (\bar{p}')_{i-1}^{t+\Delta t'}} \\ &\quad \times [(\bar{U})_{i+1}^{t+\Delta t'} - 2(\bar{U})_i^{t+\Delta t'} + (\bar{U})_{i-1}^{t+\Delta t'}] \\ (U_1)_i^{t'+\Delta t'} &= (U_1)_i^{t'} + \left( \frac{\partial U_1}{\partial t'} \right)_{av} \Delta t + \bar{S}_1^t \\ (U_2)_i^{t'+\Delta t'} &= (U_2)_i^{t'} + \left( \frac{\partial U_2}{\partial t'} \right)_{av} \Delta t + \bar{S}_2^t \\ (U_3)_i^{t'+\Delta t'} &= (U_3)_i^{t'} + \left( \frac{\partial U_3}{\partial t'} \right)_{av} \Delta t + \bar{S}_3^t \\ (\rho)_i^{t'+\Delta t'} &= (U_1)_i^{t'+\Delta t'} \\ (V)_i^{t'+\Delta t'} &= \left( \frac{U_2}{U_1} \right)_i^{t'+\Delta t'} \end{aligned}$$

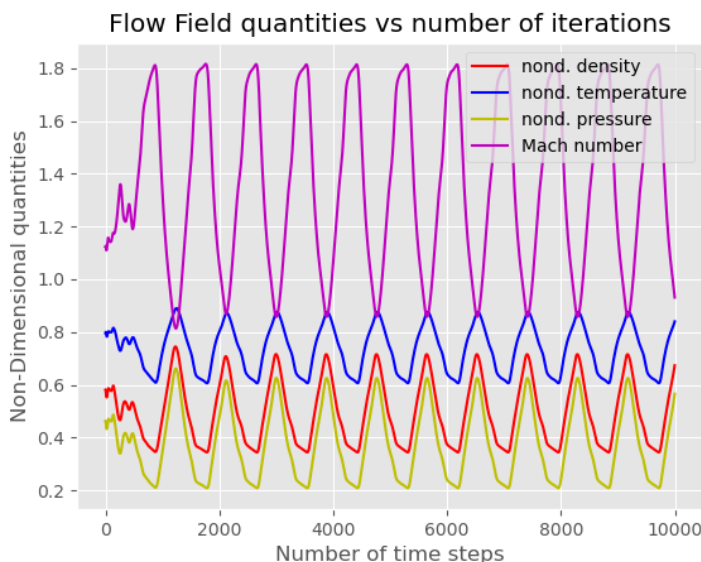
$$(T')_i^{t'+\Delta t'} = (\gamma - 1) \left( \frac{U_3}{U_1} - \frac{\gamma}{2} V'^2 \right)_i^{t'+\Delta t'}$$

#### Διερεύνηση για τον συντελεστή Cx στον λαιμό (throat):

Παρακάτω παρουσιάζονται οι μεταβλητές πυκνότητα ( $\rho$ ), ταχύτητα ( $V$ ), θερμοκρασία ( $T$ ), πίεση ( $P$ ), αριθμό Mach ( $M$ ), ροή μάζας ( $\dot{m}$ ) και αριθμό υπολογιστικών επαναλήψεων ( $k$ ) για διαφορετικούς συντελεστές Cx της τεχνητού ιξώδους (artificial viscosity Si) για το σημείο του λαιμού του ακροφυσίου (throat).

Shock case at Throat							
	$\rho^*/\rho_0$	$V/a_0$	$T^*/T_0$	$P^*/P_0$	$M$	$\dot{m}$	$k$
Analytical value	0.6339	0.9128	0.8333	0.5282	1	0.5282	
Cx=0 (non-converged)	0.6329	0.898	0.84	0.5317	0.9798	0.5684	9998
Cx=0.1	0.6243	0.9343	0.8274	0.5166	1.027	0.5833	1311
Cx=0.2	0.6291	0.9273	0.8299	0.5221	1.017	0.5834	1411
Cx=0.3	0.6318	0.9235	0.8311	0.5251	1.022	0.5835	1530

Σχόλια: Καταρχήν στην συγκεκριμένη διερεύνηση για Cx=0 παρατηρήσαμε ότι ενώ βγάλαμε αποτελέσματα, ο κώδικας δεν συνέκλινε. Όπως θα δείτε και στο παρακάτω διάγραμμα, ακόμα και μετά από 10000 επαναλήψεις, οι τιμές συνέχιζαν να έχουν τη ίδια ταλαντωτική μορφή με σταθερό πλάτος, χωρίς σημάδια απόσβεσης.



Τα αποτελέσματα για τα 4 διαφορετικά Cx που χρησιμοποιήσαμε, ήταν αρκετά παρόμοια με αυτά της αναλυτικής λύσης. Η διαφορά όμως βρίσκονταν στην ποιότητα της λύσης και των διάφορων διαγραμμάτων, όπως θα παρατηρήσετε και στα διαγράμματα 20 και 21. Βλέπουμε λοιπόν, ότι με την χρήση αριθμητικής διάχυσης, τα διαγράμματα έρχονται και γίνονται πιο στρωτά.

Επίσης, παρατηρούμε ότι όσο πιο μικρό συντελεστή Cx βάζαμε τόσο πιο λίγα υπολογιστικά βήματα προκύπτανε και συγκεκριμένα για Cx=0.1 είχαμε 1311 σε αντίθεση με το Cx=0.3 που είχαμε 1530 επαναληπτικά βήματα. Αυτό όμως δεν μας πειράζει εφόσον η διαφορά στις επαναλήψεις είναι μι-

κρή ενώ η ποιότητα των αποτελεσμάτων είναι πολύ καλύτερη.



### Διερεύνηση για τον συντελεστή $C_x$ στην έξοδο του ακροφυσίου:

Παρακάτω παρουσιάζονται οι μεταβλητές πυκνότητα ( $\rho$ ), ταχύτητα ( $V$ ), θερμοκρασία ( $T$ ), πίεση ( $P$ ), αριθμό Mach ( $M$ ), ροή μάζας ( $\dot{m}$ ) και αριθμό υπολογιστικών επαναλήψεων ( $k$ ) για διαφορετικούς συντελεστές  $C_x$  του τεχνητού ιξώδους (artificial viscosity,  $Si$ ) για το σημείο της εξόδου του ακροφυσίου (Nozzle exit).

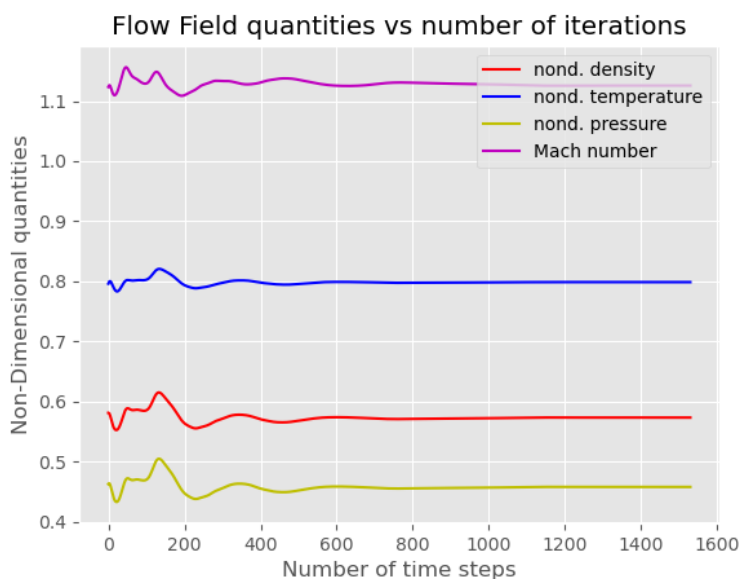
Shock case at Nozzle Exit							
	$\rho^*/\rho_0$	$V/a_0$	$T^*/T_0$	$P^*/P_0$	$M$	$\dot{m}$	$k$
Analytical value	0.6819	0.1427	0.9959	0.6784	0.14307	0.6391	
$C_x=0$	0.6705	0.1413	1.016	0.6784	0.1404	0.563	9998
$C_x=0.1$	0.6960	0.1497	0.9746	0.6783	0.1517	0.6203	1311
$C_x=0.2$	0.699	0.1512	0.9704	0.6784	0.1535	0.629	1453
$C_x=0.3$	0.708	0.1525	0.9651	0.6784	0.1552	0.6378	1530

#### Σχόλια:

Για την έξοδο του ακροφυσίου παρατηρούμε ότι οι τιμές αλλάζουν σε σχέση με αυτές στον λαιμό κάτι το οποίο είναι λογικό και αναμενόμενο. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση στον λαιμό, δεν έχουν μεγάλη απόκλιση σε σχέση με την αναλυτική λύση, εξαιρούμενος τις τιμές για  $C_x=0$ , που εμφανίζουν την μεγαλύτερη απόκλιση. Επίσης, για  $C_x=0$  όπως και την προηγούμενη φορά, ο κώδικας δεν συνέκλινε μετά από 9998 υπολογιστικές επαναλήψεις, ενώ ισχύουν οι ίδιες παρατηρήσεις που έγιναν και παραπάνω.

#### Διαγράμματα:

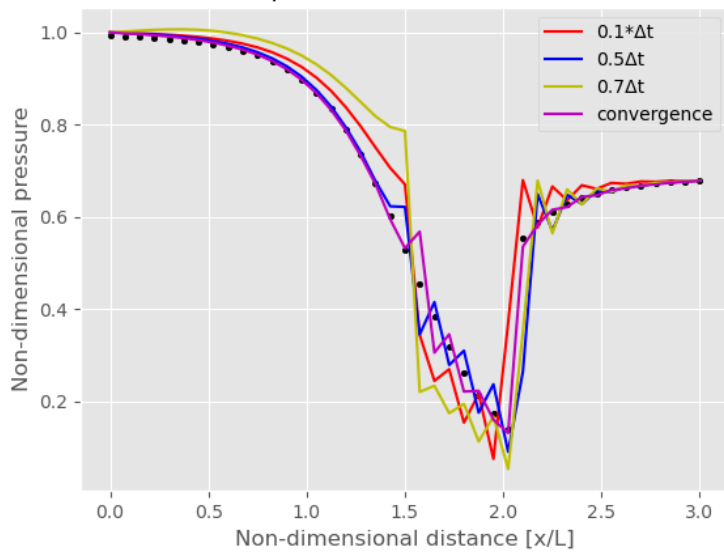
##### Conservative:



Διάγραμμα 19<sup>ο</sup>: παρόμοιο με το διάγραμμα 7.9 του Andersson, αφορά τα αδιάστατα μεγέθη της πυκνότητας ( $\rho$ ), θερμοκρασίας ( $T$ ), πίεσης ( $P$ ) και αριθμού Mach ( $M$ ) κατά μήκος του ακροφυσίου, ως προς τον αριθμό των βημάτων της επαναληπτικής διαδικασίας.

Σχόλια: Παρατηρείται εξομάλυνση των τιμών για time-steps περίπου 450. Επίσης παρατηρούμε πολύ λιγότερα wiggles σε σχέση με τις άλλες 2 ροές (προς έκπληξή μας) ενώ μελετάται ένα πιο «δύσκολο» φαινόμενο

Nond. pressure vs nond. distance

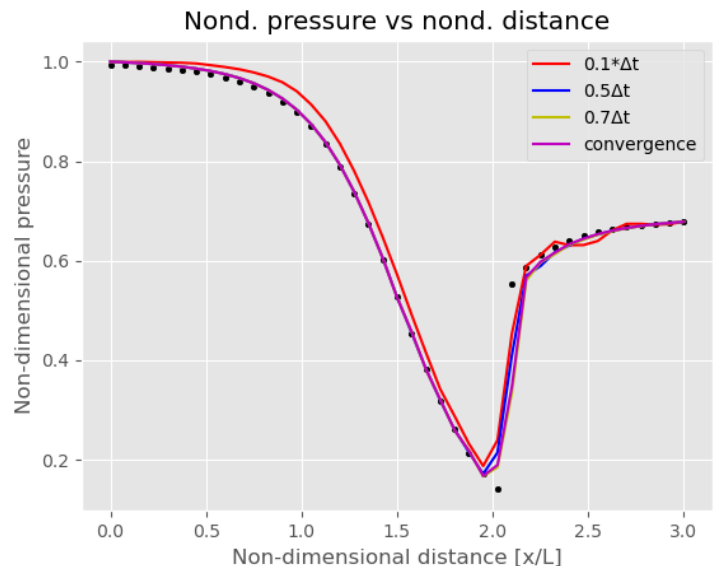


Διάγραμμα 20°: παρόμοιο με το διάγραμμα 7.23 του Andersson, αφορά το αδιάστατο μέγεθος της πίεσης ως συνάρτηση του αδιάστατου μήκους του ακροφυσίου, χωρίς την χρήση αριθμητικής διάχυσης. Με τελείες αναφέρονται οι αναλυτικές τιμές.

Σχόλια: Όπως ήδη σημειώθηκε κατά την διερεύνηση της σταθεράς του τεχνητού ιξώδους, για την πίεση ισχύει ότι τα wiggles είναι περισσότερα σε σχέση με τις άλλες μεθόδους. Επίσης είναι εμφανής η θέση εμφάνισης του κρουστικού κύματος ( $x/L=2.1$ ).

Διάγραμμα 21°: παρόμοιο με το διάγραμμα 7.24 του Andersson, αφορά το αδιάστατο μέγεθος της πίεσης ως συνάρτηση του αδιάστατου μήκους του ακροφυσίου. Με τελείες αναφέρονται οι αναλυτικές τιμές. Είναι για διαφορετικά timesteps με το προηγούμενο.

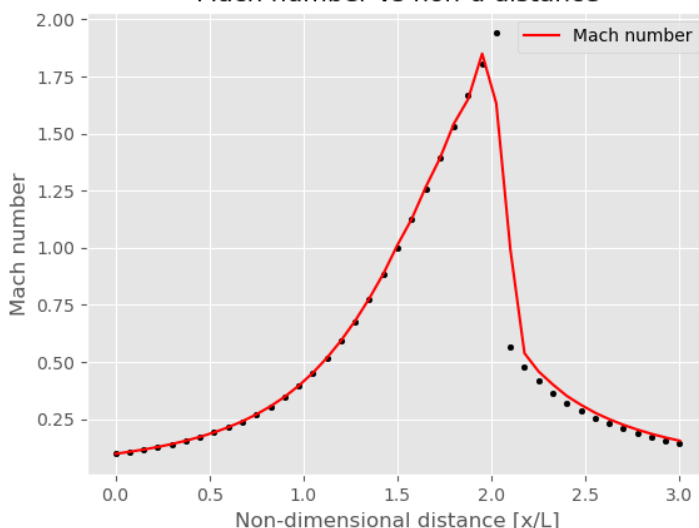
Σχόλια: Παρατηρείται πολύ καλή συσχέτιση με τις αναλυτικές τιμές. Όπως επίσης είναι εμφανής η θέση εμφάνισης του κρουστικού κύματος λόγω της απότομης αύξησης της πίεσης στο  $x/L=2.1$ . Επίσης είναι κάτι παραπάνω από ξεκάθαρο ότι το διάγραμμα αυτό είναι πολύ ανώτερο σε σχέση με το διάγραμμα 20 ως αναφορά την ποιότητα της λύσης.



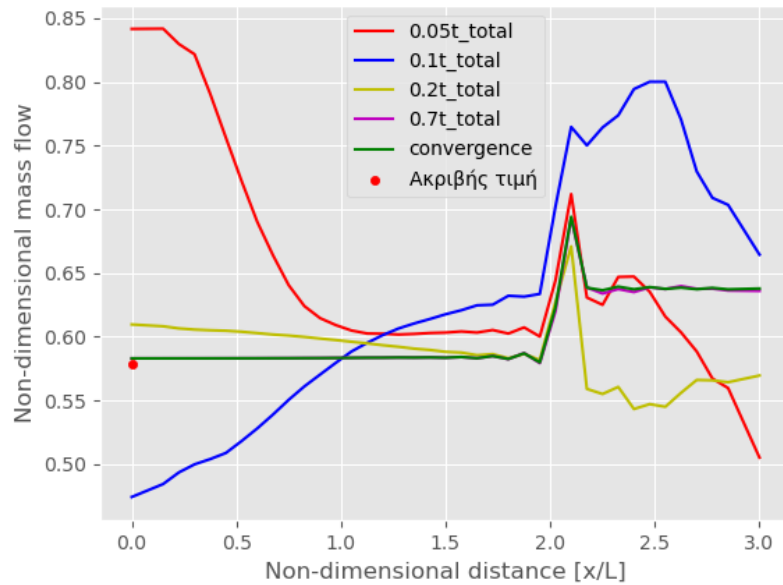
Διάγραμμα 22°: παρόμοιο με το διάγραμμα 7.25 του Andersson, αφορά τον αδιάστατο αριθμό Mach ως συνάρτηση του αδιάστατου μήκους του ακροφυσίου. Με τελείες αναφέρονται οι αναλυτικές τιμές.

Σχόλια: Παρατηρείται πολύ καλή συσχέτιση με τις αναλυτικές τιμές. Όπως επίσης είναι εμφανής η θέση εμφάνισης του κρουστικού κύματος λόγω της απότομης πτώσης του Mach στο  $x/L=2.1$ . Η μετάβαση σε χαμηλότερο Mach δεν είναι ακαριαία καθώς διαρκεί για ένα μικρό  $\Delta x$ .

Mach number vs non-d distance



Mass flow different timesteps vs nozzle non-d. distance



Διάγραμμα 23<sup>ο</sup>: παρόμοιο με το διάγραμμα 7.26 του Andersson, αφορά την αδιάστατη ροή μάζας για διαφορετικά  $\Delta t$  (timesteps)

Σχόλια: Παρατηρούμε ότι στην περιοχή ακριβώς πριν το κρουστικό κύμα αρχίζει η απότομη αύξηση της αδιάστατης μάζας λόγω της αύξησης της πίεσης που βρίσκεται στον τύπο της για την θέση  $x/L=2.1$

#### Non-Conservative:

Για την Non-conservative, εφαρμόσαμε τις προαναφερθείς initial conditions και τα boundary conditions που αναφέραμε. Ο κώδικας δυστυχώς δεν είχε το ανάλογο αντίκτυπο και έκανε blow up.

Έπειτα σκεφτήκαμε ένα concept, να εισάγουμε μέσα έναν τύπο σαν αριθμητική διάχυση ( $S_i$ ) και να το τρέξουμε. Αυτό αφού όταν ο  $C_x$  της αριθμητικής διάχυσης ήταν μηδενικός παρατηρούσαμε wiggles και αστάθεια. Ουσιαστικά είναι ένας συντελεστής που εξομαλύνει την λύση κάνοντας την πιο smooth.

Αφού ούτε με την συμβολή της αριθμητικής διάχυσης έτρεξε. Δοκιμάσαμε να εισάγουμε υποχαλάρωση αρκετά μεγάλης ισχύος (0.1) αλλά αποδείχτηκε και αυτό μάταιο, αφού ο κώδικας έκανε απλά μερικές επαναλήψεις παραπάνω μέχρις ότου να σκάσει.

Από θεωρητικής άποψης, έχει λογική αυτή η τόσο μεγάλη αστάθεια στην υπολογιστική διαδικασία, μιας και η προς μελέτη ροή, είναι μη ισεντροπική, ενώ η non conservative μέθοδος, ενδείκνυται περισσότερο για περιπτώσεις ροής ισεντροπικής.

## Παράρτημα

Στο παρόν παράρτημα παρουσιάζονται αναλυτικά οι υπολογιστικοί πίνακες για όλες τις περιπτώσεις.

Παρακάτω παριστάνονται οι πίνακες των αποτελεσμάτων όπως προέκυψαν για την subsonic-supersonic, non conservative

Non-conservative:

Πίνακας 1 (παρόμοιος με 7.3):

x/L	A/A*	V/a	$\rho/\rho_0$	T/T <sub>0</sub>	p/p <sub>0</sub>	M	m <sub>dot</sub>
0	5,95	0,098313	1	1	1	0,098313	0,584961
0,075	5,467375	0,107743	0,998573	0,999428	0,998002	0,107774	0,588231
0,15	5,0095	0,117173	0,997942	0,999176	0,997119	0,117222	0,585772
0,225	4,576375	0,128694	0,996301	0,998519	0,994826	0,128789	0,586773
0,3	4,168	0,141346	0,994734	0,997891	0,992636	0,141495	0,586026
0,375	3,784375	0,156051	0,992502	0,996995	0,989519	0,156286	0,586128
0,45	3,4255	0,172764	0,98983	0,99592	0,985791	0,173118	0,585785
0,525	3,091375	0,192065	0,986347	0,994515	0,980937	0,192594	0,585638
0,6	2,782	0,214284	0,981933	0,992732	0,974796	0,215067	0,585369
0,675	2,497375	0,240008	0,976218	0,990418	0,966864	0,241166	0,585135
0,75	2,2375	0,269799	0,968834	0,987416	0,956643	0,271513	0,584862
0,825	2,002375	0,304358	0,95923	0,983494	0,943397	0,306901	0,584591
0,9	1,792	0,34441	0,946738	0,978358	0,926249	0,348199	0,584311
0,975	1,606375	0,39073	0,930504	0,971624	0,9041	0,396394	0,584039
1,05	1,4455	0,444036	0,909521	0,962816	0,875702	0,45253	0,58378
1,125	1,309375	0,504911	0,88267	0,951369	0,839745	0,517655	0,583549
1,2	1,198	0,573636	0,848863	0,936659	0,795095	0,592715	0,583353
1,275	1,111375	0,650029	0,807276	0,918077	0,741142	0,678412	0,583197
1,35	1,0495	0,733278	0,757673	0,895147	0,678228	0,775036	0,583087
1,425	1,012375	0,821867	0,700719	0,867669	0,607993	0,882317	0,583025
1,5	1	0,913645	0,638128	0,835856	0,533383	0,999336	0,583022
1,575	1,012375	1,006077	0,572489	0,800377	0,458207	1,124563	0,583095
1,65	1,0495	1,096612	0,506787	0,762282	0,386315	1,256015	0,583258
1,725	1,111375	1,183058	0,4438	0,722823	0,320789	1,391521	0,583518
1,8	1,198	1,263824	0,385627	0,683236	0,263474	1,528979	0,583863
1,875	1,309375	1,337994	0,333501	0,644569	0,214964	1,666554	0,584272
1,95	1,4455	1,405244	0,287857	0,607597	0,174901	1,802784	0,584718
2,025	1,606375	1,465698	0,248538	0,572812	0,142366	1,936593	0,585173
2,1	1,792	1,519762	0,215031	0,540461	0,116216	2,067252	0,585619
2,175	2,002375	1,567993	0,186655	0,510614	0,095309	2,194309	0,586042
2,25	2,2375	1,611003	0,16269	0,483214	0,078614	2,317537	0,586434
2,325	2,497375	1,649392	0,142455	0,458133	0,065263	2,436846	0,586792
2,4	2,782	1,683736	0,12534	0,435201	0,054548	2,552284	0,587113
2,475	3,091375	1,714525	0,110826	0,414239	0,045909	2,663903	0,587407
2,55	3,4255	1,742251	0,098467	0,395053	0,0389	2,771937	0,587658
2,625	3,784375	1,767221	0,087907	0,377488	0,033184	2,876335	0,587908
2,7	4,168	1,789964	0,078823	0,361335	0,028482	2,977755	0,588068
2,775	4,576375	1,810351	0,071018	0,346544	0,024611	3,075273	0,588377
2,85	5,0095	1,829559	0,064175	0,332771	0,021355	3,171564	0,588171
2,925	5,467375	1,845922	0,058427	0,320372	0,018718	3,261264	0,589663
3	5,95	1,862284	0,052679	0,307973	0,016224	3,355751	0,583715

Πίνακας 2 (παρόμοιος με 7.4):

x/L	A/A*	$\rho/\rho_0$	$\rho/\rho_0(\text{analytic})$	%difference	M	M(analytical)	%difference
0	5,95	1	0,995232	0,005038	0,098313	0,09782	0,005038
0,075	5,467375	0,998573	0,994345	0,011392	0,107774	0,10656	0,011392
0,15	5,0095	0,997942	0,993251	0,006541	0,117222	0,11646	0,006541
0,225	4,576375	0,996301	0,991894	0,008609	0,128789	0,12769	0,008609
0,3	4,168	0,994734	0,990199	0,007152	0,141495	0,14049	0,007152
0,375	3,784375	0,992502	0,988068	0,007453	0,156286	0,15513	0,007453
0,45	3,4255	0,98983	0,985368	0,006791	0,173118	0,17195	0,006791
0,525	3,091375	0,986347	0,981927	0,006552	0,192594	0,19134	0,006552
0,6	2,782	0,981933	0,977512	0,006069	0,215067	0,21377	0,006069
0,675	2,497375	0,976218	0,971815	0,005655	0,241166	0,23981	0,005655
0,75	2,2375	0,968834	0,964429	0,005157	0,271513	0,27012	0,005157
0,825	2,002375	0,95923	0,95482	0,004618	0,306901	0,30549	0,004618
0,9	1,792	0,946738	0,942308	0,004033	0,348199	0,3468	0,004033
0,975	1,606375	0,930504	0,926039	0,003402	0,396394	0,39505	0,003402
1,05	1,4455	0,909521	0,905011	0,002769	0,45253	0,45128	0,002769
1,125	1,309375	0,88267	0,87811	0,002101	0,517655	0,51657	0,002101
1,2	1,198	0,848863	0,844267	0,001445	0,592715	0,59186	0,001445
1,275	1,111375	0,807276	0,802683	0,000814	0,678412	0,67786	0,000814
1,35	1,0495	0,757673	0,753145	0,00024	0,775036	0,77485	0,00024
1,425	1,012375	0,700719	0,696332	0,000253	0,882317	0,88254	0,000253
1,5	1	0,638128	0,633938	0,000664	0,999336	1	0,000664
1,575	1,012375	0,572489	0,568534	0,000975	1,124563	1,12566	0,000975
1,65	1,0495	0,506787	0,503065	0,00122	1,256015	1,25755	0,00122
1,725	1,111375	0,4438	0,440298	0,001405	1,391521	1,39348	0,001405
1,8	1,198	0,385627	0,382328	0,001555	1,528979	1,53136	0,001555
1,875	1,309375	0,333501	0,330401	0,001669	1,666554	1,66934	0,001669
1,95	1,4455	0,287857	0,284954	0,001764	1,802784	1,80597	0,001764
2,025	1,606375	0,248538	0,245837	0,001833	1,936593	1,94015	0,001833
2,1	1,792	0,215031	0,212532	0,001882	2,067252	2,07115	0,001882
2,175	2,002375	0,186655	0,188521	0,007243	2,194309	2,17853	0,007243
2,25	2,2375	0,16269	0,160578	0,001944	2,317537	2,32205	0,001944
2,325	2,497375	0,142455	0,140522	0,001959	2,436846	2,44163	0,001959
2,4	2,782	0,12534	0,123589	0,001922	2,552284	2,5572	0,001922
2,475	3,091375	0,110826	0,109214	0,001966	2,663903	2,66915	0,001966
2,55	3,4255	0,098467	0,096997	0,001942	2,771937	2,77733	0,001942
2,625	3,784375	0,087907	0,086558	0,001969	2,876335	2,88201	0,001969
2,7	4,168	0,078823	0,077599	0,001879	2,977755	2,98336	0,001879
2,775	4,576375	0,071018	0,069872	0,00204	3,075273	3,08156	0,00204
2,85	5,0095	0,064175	0,063178	0,001642	3,171564	3,17678	0,001642
2,925	5,467375	0,058427	0,05735	0,002425	3,261264	3,26919	0,002425
3	5,95	0,052679	0,052254	0,000952	3,355751	3,35895	0,000952

Conservative:

Παρακάτω παριστάνονται οι πίνακες των αποτελεσμάτων όπως προέκυψαν για την non conservative

Πίνακας 3 (παρόμοιος με 7.3):

x/L	A/A*	V/a	$\rho/\rho_0$	T/To	$\rho/\rho_0$	M	m_dot
0	5,95	0,098146	1	1	1	0,098146	0,583967
0,075	5,467375	0,106906	0,999106	0,999643	0,99875	0,106925	0,583974
0,15	5,0095	0,116808	0,998005	0,999202	0,997208	0,116854	0,583981
0,225	4,576375	0,12804	0,996637	0,998654	0,995295	0,128127	0,58399
0,3	4,168	0,14083	0,994926	0,997969	0,992905	0,140973	0,584001
0,375	3,784375	0,155446	0,99277	0,997107	0,989899	0,155671	0,584013
0,45	3,4255	0,172209	0,990038	0,996014	0,986092	0,172553	0,584026
0,525	3,091375	0,191501	0,986555	0,994615	0,981243	0,192019	0,584043
0,6	2,782	0,213773	0,982086	0,992813	0,975028	0,214545	0,584063
0,675	2,497375	0,239553	0,976317	0,990477	0,96702	0,240702	0,584086
0,75	2,2375	0,269453	0,968837	0,987434	0,956662	0,271162	0,584113
0,825	2,002375	0,304164	0,959105	0,983451	0,943233	0,306712	0,584142
0,9	1,792	0,344441	0,946431	0,978226	0,925823	0,348253	0,584173
0,975	1,606375	0,39107	0,929959	0,971365	0,903329	0,396792	0,584204
1,05	1,4455	0,444793	0,908674	0,962383	0,874493	0,453403	0,584231
1,125	1,309375	0,506204	0,881473	0,950699	0,838016	0,519164	0,584251
1,2	1,198	0,575587	0,847293	0,935685	0,792799	0,59504	0,584254
1,275	1,111375	0,652735	0,805361	0,916729	0,738298	0,681736	0,584236
1,35	1,0495	0,73678	0,755495	0,893374	0,674939	0,779509	0,584186
1,425	1,012375	0,826136	0,698396	0,865447	0,604425	0,888037	0,584111
1,5	1	0,917086	0,636806	0,833758	0,530942	1,004362	0,584006
1,575	1,012375	1,01116	0,570398	0,797507	0,454897	1,132276	0,583901
1,65	1,0495	1,101839	0,504856	0,759225	0,383299	1,264541	0,583805
1,725	1,111375	1,188208	0,442039	0,719707	0,318138	1,400602	0,583732
1,8	1,198	1,268755	0,384013	0,680161	0,26119	1,53841	0,583687
1,875	1,309375	1,34263	0,332006	0,641604	0,213016	1,676188	0,583668
1,95	1,4455	1,40956	0,28646	0,604778	0,173245	1,812531	0,583668
2,025	1,606375	1,469699	0,247229	0,570153	0,140958	1,946403	0,58368
2,1	1,792	1,52347	0,213804	0,537963	0,115019	2,077103	0,583698
2,175	2,002375	1,571435	0,185508	0,508267	0,094287	2,204198	0,583719
2,25	2,2375	1,614206	0,16162	0,481007	0,077741	2,327466	0,583738
2,325	2,497375	1,652384	0,141461	0,456054	0,064514	2,446826	0,583757
2,4	2,782	1,686536	0,12442	0,433237	0,053903	2,562316	0,583771
2,475	3,091375	1,717157	0,109975	0,412378	0,045351	2,674008	0,583788
2,55	3,4255	1,744721	0,097681	0,393287	0,038416	2,78209	0,583792
2,625	3,784375	1,769568	0,087179	0,375802	0,032762	2,886608	0,583814
2,7	4,168	1,792141	0,078155	0,359733	0,028115	2,988011	0,583793
2,775	4,576375	1,8125	0,070388	0,345004	0,024284	3,085786	0,58385
2,85	5,0095	1,831408	0,06363	0,331284	0,02108	3,181886	0,583767
2,925	5,467375	1,847941	0,057789	0,319031	0,018436	3,271687	0,58386
3	5,95	1,864769	0,05263	0,3064	0,016126	3,368839	0,583952

Πίνακας 4 (παρόμοιος με 7.4):

x/L	A/A*	$\rho/\rho_0$	$\rho/\rho_0(\text{analytic})$	%difference	M	M(analytical)	%difference
0	5,95	1	0,995232	0,003329	0,098146	0,09782	0,003329
0,075	5,467375	0,999106	0,994345	0,003427	0,106925	0,10656	0,003427
0,15	5,0095	0,998005	0,993251	0,003386	0,116854	0,11646	0,003386
0,225	4,576375	0,996637	0,991894	0,003419	0,128127	0,12769	0,003419

0,3	4,168	0,994926	0,990199	0,00344	0,140973	0,14049	0,00344
0,375	3,784375	0,99277	0,988068	0,003489	0,155671	0,15513	0,003489
0,45	3,4255	0,990038	0,985368	0,00351	0,172553	0,17195	0,00351
0,525	3,091375	0,986555	0,981927	0,003548	0,192019	0,19134	0,003548
0,6	2,782	0,982086	0,977512	0,003628	0,214545	0,21377	0,003628
0,675	2,497375	0,976317	0,971815	0,00372	0,240702	0,23981	0,00372
0,75	2,2375	0,968837	0,964429	0,003858	0,271162	0,27012	0,003858
0,825	2,002375	0,959105	0,95482	0,004	0,306712	0,30549	0,004
0,9	1,792	0,946431	0,942308	0,004191	0,348253	0,3468	0,004191
0,975	1,606375	0,929959	0,926039	0,004409	0,396792	0,39505	0,004409
1,05	1,4455	0,908674	0,905011	0,004705	0,453403	0,45128	0,004705
1,125	1,309375	0,881473	0,87811	0,005021	0,519164	0,51657	0,005021
1,2	1,198	0,847293	0,844267	0,005373	0,59504	0,59186	0,005373
1,275	1,111375	0,805361	0,802683	0,005718	0,681736	0,67786	0,005718
1,35	1,0495	0,755495	0,753145	0,006013	0,779509	0,77485	0,006013
1,425	1,012375	0,698396	0,696332	0,006229	0,888037	0,88254	0,006229
1,5	1	0,636806	0,633938	0,004362	1,004362	1	0,004362
1,575	1,012375	0,570398	0,568534	0,005878	1,132276	1,12566	0,005878
1,65	1,0495	0,504856	0,503065	0,005559	1,264541	1,25755	0,005559
1,725	1,111375	0,442039	0,440298	0,005111	1,400602	1,39348	0,005111
1,8	1,198	0,384013	0,382328	0,004604	1,53841	1,53136	0,004604
1,875	1,309375	0,332006	0,330401	0,004102	1,676188	1,66934	0,004102
1,95	1,4455	0,28646	0,284954	0,003633	1,812531	1,80597	0,003633
2,025	1,606375	0,247229	0,245837	0,003223	1,946403	1,94015	0,003223
2,1	1,792	0,213804	0,212532	0,002874	2,077103	2,07115	0,002874
2,175	2,002375	0,185508	0,188521	0,011782	2,204198	2,17853	0,011782
2,25	2,2375	0,16162	0,160578	0,002332	2,327466	2,32205	0,002332
2,325	2,497375	0,141461	0,140522	0,002128	2,446826	2,44163	0,002128
2,4	2,782	0,12442	0,123589	0,002	2,562316	2,5572	0,002
2,475	3,091375	0,109975	0,109214	0,00182	2,674008	2,66915	0,00182
2,55	3,4255	0,097681	0,096997	0,001714	2,78209	2,77733	0,001714
2,625	3,784375	0,087179	0,086558	0,001595	2,886608	2,88201	0,001595
2,7	4,168	0,078155	0,077599	0,001559	2,988011	2,98336	0,001559
2,775	4,576375	0,070388	0,069872	0,001371	3,085786	3,08156	0,001371
2,85	5,0095	0,06363	0,063178	0,001607	3,181886	3,17678	0,001607
2,925	5,467375	0,057789	0,05735	0,000764	3,271687	3,26919	0,000764
3	5,95	0,05263	0,052254	0,002944	3,368839	3,35895	0,002944

Παρακάτω παρατίθενται οι πίνακες με τους αναλυτικούς υπολογισμούς για την pure subsonic όπως προέκυψαν.

Non-conservative:

Πίνακας 5 (παρόμοιος με τον 7.7 από τον Andersson)

x/L	A/A*	V/a	$\rho/\rho_0$	T/To	p/po	M	m_dot
0	5,95	0,079344	1	1	1	0,079344	0,472095
0,075	5,467375	0,086393	0,999458	0,999783	0,999241	0,086403	0,472088
0,15	5,0095	0,094352	0,998777	0,999511	0,998289	0,094376	0,472081



0,225	4,576375	0,103358	0,997932	0,999173	0,997107	0,103401	0,472026
0,3	4,168	0,113596	0,996862	0,998746	0,995611	0,113667	0,47198
0,375	3,784375	0,125264	0,99551	0,998204	0,993723	0,125376	0,471916
0,45	3,4255	0,138609	0,993787	0,997514	0,991317	0,138781	0,471854
0,525	3,091375	0,15391	0,991586	0,996631	0,988246	0,15417	0,47179
0,6	2,782	0,171493	0,988761	0,995496	0,984308	0,17188	0,471731
0,675	2,497375	0,19172	0,985129	0,994033	0,979251	0,192294	0,471676
0,75	2,2375	0,214985	0,980452	0,992144	0,97275	0,215835	0,471626
0,825	2,002375	0,241689	0,974439	0,989705	0,964407	0,242943	0,471583
0,9	1,792	0,272189	0,966743	0,986568	0,953757	0,274036	0,471542
0,975	1,606375	0,306709	0,956993	0,982565	0,940308	0,309419	0,471501
1,05	1,4455	0,345188	0,944855	0,977544	0,923637	0,349131	0,471454
1,125	1,309375	0,387035	0,930188	0,971408	0,903592	0,39269	0,471395
1,2	1,198	0,430775	0,913277	0,964252	0,880629	0,438688	0,471314
1,275	1,111375	0,473613	0,895224	0,9565	0,856282	0,484263	0,471212
1,35	1,0495	0,51109	0,878262	0,949126	0,833582	0,524608	0,47109
1,425	1,012375	0,537377	0,865739	0,94361	0,81692	0,5532	0,470985
1,5	1	0,546958	0,861	0,94153	0,810657	0,563686	0,470931
1,575	1,00125	0,546137	0,861309	0,941664	0,811063	0,562799	0,47098
1,65	1,005002	0,543341	0,862599	0,942231	0,812768	0,55975	0,47103
1,725	1,011254	0,538717	0,864768	0,943176	0,815628	0,554708	0,471108
1,8	1,020007	0,532234	0,867864	0,944532	0,819726	0,547639	0,471148
1,875	1,031261	0,524096	0,871763	0,946221	0,824881	0,538784	0,471171
1,95	1,045016	0,51447	0,876346	0,948223	0,830972	0,528329	0,471149
2,025	1,061271	0,503625	0,881464	0,950418	0,837759	0,516595	0,471127
2,1	1,080028	0,491781	0,886926	0,952802	0,845064	0,503814	0,471079
2,175	1,101285	0,479162	0,892674	0,955224	0,852704	0,490264	0,471059
2,25	1,125044	0,46595	0,898483	0,957775	0,860544	0,476111	0,470998
2,325	1,151303	0,452314	0,904445	0,960218	0,868464	0,461589	0,47099
2,4	1,180063	0,438404	0,910216	0,962804	0,87636	0,446792	0,470895
2,475	1,211324	0,424355	0,916113	0,965099	0,884139	0,43196	0,470911
2,55	1,245086	0,410294	0,921526	0,967656	0,89172	0,417095	0,470762
2,625	1,281348	0,396316	0,92719	0,969642	0,899042	0,402472	0,470844
2,7	1,320112	0,382523	0,93198	0,972184	0,906057	0,387957	0,470625
2,775	1,361376	0,368948	0,937373	0,973696	0,912717	0,373899	0,470822
2,85	1,405142	0,355734	0,941355	0,976338	0,919081	0,360019	0,470543
2,925	1,451408	0,342662	0,946502	0,977147	0,924872	0,346646	0,470736
3	1,500175	0,330526	0,949745	0,980262	0,930998	0,333837	0,470928

Πίνακας 6 (παρόμοιος με τον 7.8 από τον Andersson)

x/L	A/A*	ρ/ρ <sub>0</sub>	ρ/ρ <sub>0</sub> (analytic)	%difference	M	M(analytical)	%difference
0	5,95	1	0,997045	0,031041	0,079344	0,076955	0,031041
0,075	5,467375	0,999458	0,996497	0,031008	0,086403	0,083804	0,031008
0,15	5,0095	0,998777	0,995823	0,030999	0,094376	0,091538	0,030999
0,225	4,576375	0,997932	0,994987	0,030893	0,103401	0,100302	0,030893
0,3	4,168	0,996862	0,993946	0,030824	0,113667	0,110268	0,030824
0,375	3,784375	0,99551	0,99264	0,030732	0,125376	0,121638	0,030732
0,45	3,4255	0,993787	0,990992	0,030682	0,138781	0,13465	0,030682
0,525	3,091375	0,991586	0,9889	0,030672	0,15417	0,149582	0,030672
0,6	2,782	0,988761	0,98623	0,030722	0,17188	0,166757	0,030722



0,675	2,497375	0,985129	0,982812	0,030864	0,192294	0,186537	0,030864
0,75	2,2375	0,980452	0,978423	0,031104	0,215835	0,209324	0,031104
0,825	2,002375	0,974439	0,972793	0,031479	0,242943	0,235529	0,031479
0,9	1,792	0,966743	0,965598	0,032019	0,274036	0,265534	0,032019
0,975	1,606375	0,956993	0,956491	0,032752	0,309419	0,299606	0,032752
1,05	1,4455	0,944855	0,945166	0,033717	0,349131	0,337743	0,033717
1,125	1,309375	0,930188	0,931492	0,034938	0,39269	0,379433	0,034938
1,2	1,198	0,913277	0,915747	0,036404	0,438688	0,423279	0,036404
1,275	1,111375	0,895224	0,898961	0,038045	0,484263	0,466514	0,038045
1,35	1,0495	0,878262	0,883226	0,039656	0,524608	0,504598	0,039656
1,425	1,012375	0,865739	0,87164	0,040913	0,5532	0,531457	0,040913
1,5	1	0,861	0,867322	0,041452	0,563686	0,54125	0,041452
1,575	1,00125	0,861309	0,86777	0,041759	0,562799	0,540239	0,041759
1,65	1,005002	0,862599	0,869098	0,041906	0,55975	0,537236	0,041906
1,725	1,011254	0,864768	0,871259	0,042048	0,554708	0,532325	0,042048
1,8	1,020007	0,867864	0,874182	0,041851	0,547639	0,52564	0,041851
1,875	1,031261	0,871763	0,877772	0,041425	0,538784	0,517353	0,041425
1,95	1,045016	0,876346	0,881925	0,040715	0,528329	0,50766	0,040715
2,025	1,061271	0,881464	0,886528	0,039905	0,516595	0,496771	0,039905
2,1	1,080028	0,886926	0,891471	0,03901	0,503814	0,484898	0,03901
2,175	1,101285	0,892674	0,896647	0,038153	0,490264	0,472246	0,038153
2,25	1,125044	0,898483	0,90196	0,03726	0,476111	0,459008	0,03726
2,325	1,151303	0,904445	0,907324	0,036444	0,461589	0,445358	0,036444
2,4	1,180063	0,910216	0,912666	0,03555	0,446792	0,431454	0,03555
2,475	1,211324	0,916113	0,917924	0,034803	0,43196	0,417432	0,034803
2,55	1,245086	0,921526	0,923049	0,033925	0,417095	0,403409	0,033925
2,625	1,281348	0,92719	0,928003	0,033351	0,402472	0,389482	0,033351
2,7	1,320112	0,93198	0,932758	0,032531	0,387957	0,375734	0,032531
2,775	1,361376	0,937373	0,937293	0,032213	0,373899	0,36223	0,032213
2,85	1,405142	0,941355	0,941596	0,0315	0,360019	0,349025	0,0315
2,925	1,451408	0,946502	0,94566	0,031202	0,346646	0,336157	0,031202
3	1,500175	0,949745	0,949484	0,03145	0,333837	0,323658	0,03145

Conservative:

Πίνακας 7 (παρόμοιος με τον 7.7 από τον Andersson)

x/L	A/A*	V/a	$\rho/\rho_0$	T/T <sub>0</sub>	p/p <sub>0</sub>	M	m <sub>dot</sub>
0	5,95	0,079344	1	1	1	0,079344	0,472095
0,075	5,467375	0,086393	0,999458	0,999783	0,999241	0,086403	0,472088
0,15	5,0095	0,094352	0,998777	0,999511	0,998289	0,094376	0,472081
0,225	4,576375	0,103358	0,997932	0,999173	0,997107	0,103401	0,472026
0,3	4,168	0,113596	0,996862	0,998746	0,995611	0,113667	0,47198
0,375	3,784375	0,125264	0,99551	0,998204	0,993723	0,125376	0,471916
0,45	3,4255	0,138609	0,993787	0,997514	0,991317	0,138781	0,471854
0,525	3,091375	0,15391	0,991586	0,996631	0,988246	0,15417	0,47179
0,6	2,782	0,171493	0,988761	0,995496	0,984308	0,17188	0,471731
0,675	2,497375	0,19172	0,985129	0,994033	0,979251	0,192294	0,471676
0,75	2,2375	0,214985	0,980452	0,992144	0,97275	0,215835	0,471626
0,825	2,002375	0,241689	0,974439	0,989705	0,964407	0,242943	0,471583
0,9	1,792	0,272189	0,966743	0,986568	0,953757	0,274036	0,471542
0,975	1,606375	0,306709	0,956993	0,982565	0,940308	0,309419	0,471501
1,05	1,4455	0,345188	0,944855	0,977544	0,923637	0,349131	0,471454
1,125	1,309375	0,387035	0,930188	0,971408	0,903592	0,39269	0,471395
1,2	1,198	0,430775	0,913277	0,964252	0,880629	0,438688	0,471314
1,275	1,111375	0,473613	0,895224	0,9565	0,856282	0,484263	0,471212
1,35	1,0495	0,51109	0,878262	0,949126	0,833582	0,524608	0,47109
1,425	1,012375	0,537377	0,865739	0,94361	0,81692	0,5532	0,470985
1,5	1	0,546958	0,861	0,94153	0,810657	0,563686	0,470931
1,575	1,00125	0,546137	0,861309	0,941664	0,811063	0,562799	0,47098
1,65	1,005002	0,543341	0,862599	0,942231	0,812768	0,55975	0,47103
1,725	1,011254	0,538717	0,864768	0,943176	0,815628	0,554708	0,471108
1,8	1,020007	0,532234	0,867864	0,944532	0,819726	0,547639	0,471148
1,875	1,031261	0,524096	0,871763	0,946221	0,824881	0,538784	0,471171
1,95	1,045016	0,51447	0,876346	0,948223	0,830972	0,528329	0,471149
2,025	1,061271	0,503625	0,881464	0,950418	0,837759	0,516595	0,471127
2,1	1,080028	0,491781	0,886926	0,952802	0,845064	0,503814	0,471079
2,175	1,101285	0,479162	0,892674	0,955224	0,852704	0,490264	0,471059
2,25	1,125044	0,46595	0,898483	0,957775	0,860544	0,476111	0,470998
2,325	1,151303	0,452314	0,904445	0,960218	0,868464	0,461589	0,47099
2,4	1,180063	0,438404	0,910216	0,962804	0,87636	0,446792	0,470895
2,475	1,211324	0,424355	0,916113	0,965099	0,884139	0,43196	0,470911
2,55	1,245086	0,410294	0,921526	0,967656	0,89172	0,417095	0,470762
2,625	1,281348	0,396316	0,92719	0,969642	0,899042	0,402472	0,470844
2,7	1,320112	0,382523	0,93198	0,972184	0,906057	0,387957	0,470625
2,775	1,361376	0,368948	0,937373	0,973696	0,912717	0,373899	0,470822
2,85	1,405142	0,355734	0,941355	0,976338	0,919081	0,360019	0,470543
2,925	1,451408	0,342662	0,946502	0,977147	0,924872	0,346646	0,470736
3	1,500175	0,330526	0,949745	0,980262	0,930998	0,333837	0,470928

Πίνακας 8 (παρόμοιος με τον 7.8 από τον Andersson)

x/L	A/A*	$\rho/\rho_0$	$\rho/\rho_0(\text{analytic})$	%difference	M	M(analytical)	%difference
0	5,95	1	0,997045	0,031041	0,079344	0,076955	0,031041
0,075	5,467375	0,999458	0,996497	0,031008	0,086403	0,083804	0,031008
0,15	5,0095	0,998777	0,995823	0,030999	0,094376	0,091538	0,030999
0,225	4,576375	0,997932	0,994987	0,030893	0,103401	0,100302	0,030893
0,3	4,168	0,996862	0,993946	0,030824	0,113667	0,110268	0,030824
0,375	3,784375	0,99551	0,99264	0,030732	0,125376	0,121638	0,030732
0,45	3,4255	0,993787	0,990992	0,030682	0,138781	0,13465	0,030682
0,525	3,091375	0,991586	0,9889	0,030672	0,15417	0,149582	0,030672
0,6	2,782	0,988761	0,98623	0,030722	0,17188	0,166757	0,030722
0,675	2,497375	0,985129	0,982812	0,030864	0,192294	0,186537	0,030864
0,75	2,2375	0,980452	0,978423	0,031104	0,215835	0,209324	0,031104
0,825	2,002375	0,974439	0,972793	0,031479	0,242943	0,235529	0,031479
0,9	1,792	0,966743	0,965598	0,032019	0,274036	0,265534	0,032019
0,975	1,606375	0,956993	0,956491	0,032752	0,309419	0,299606	0,032752
1,05	1,4455	0,944855	0,945166	0,033717	0,349131	0,337743	0,033717
1,125	1,309375	0,930188	0,931492	0,034938	0,39269	0,379433	0,034938
1,2	1,198	0,913277	0,915747	0,036404	0,438688	0,423279	0,036404
1,275	1,111375	0,895224	0,898961	0,038045	0,484263	0,466514	0,038045
1,35	1,0495	0,878262	0,883226	0,039656	0,524608	0,504598	0,039656
1,425	1,012375	0,865739	0,87164	0,040913	0,5532	0,531457	0,040913
1,5	1	0,861	0,867322	0,041452	0,563686	0,54125	0,041452
1,575	1,00125	0,861309	0,86777	0,041759	0,562799	0,540239	0,041759
1,65	1,005002	0,862599	0,869098	0,041906	0,55975	0,537236	0,041906
1,725	1,011254	0,864768	0,871259	0,042048	0,554708	0,532325	0,042048
1,8	1,020007	0,867864	0,874182	0,041851	0,547639	0,52564	0,041851
1,875	1,031261	0,871763	0,877772	0,041425	0,538784	0,517353	0,041425
1,95	1,045016	0,876346	0,881925	0,040715	0,528329	0,50766	0,040715
2,025	1,061271	0,881464	0,886528	0,039905	0,516595	0,496771	0,039905
2,1	1,080028	0,886926	0,891471	0,03901	0,503814	0,484898	0,03901
2,175	1,101285	0,892674	0,896647	0,038153	0,490264	0,472246	0,038153
2,25	1,125044	0,898483	0,90196	0,03726	0,476111	0,459008	0,03726
2,325	1,151303	0,904445	0,907324	0,036444	0,461589	0,445358	0,036444
2,4	1,180063	0,910216	0,912666	0,03555	0,446792	0,431454	0,03555
2,475	1,211324	0,916113	0,917924	0,034803	0,43196	0,417432	0,034803
2,55	1,245086	0,921526	0,923049	0,033925	0,417095	0,403409	0,033925
2,625	1,281348	0,92719	0,928003	0,033351	0,402472	0,389482	0,033351
2,7	1,320112	0,93198	0,932758	0,032531	0,387957	0,375734	0,032531
2,775	1,361376	0,937373	0,937293	0,032213	0,373899	0,36223	0,032213
2,85	1,405142	0,941355	0,941596	0,0315	0,360019	0,349025	0,0315
2,925	1,451408	0,946502	0,94566	0,031202	0,346646	0,336157	0,031202
3	1,500175	0,949745	0,949484	0,03145	0,333837	0,323658	0,03145

Παρακάτω παρατίθενται οι πίνακες με τους αναλυτικούς υπολογισμούς για την shock wave case όπως προέκυψαν.

Conservative:

Πίνακας 9 (παρόμοιος με τον 7.13 από τον Andersson)

x/L	A/A*	V/a	$\rho/\rho_0$	T/T <sub>0</sub>	p/p <sub>0</sub>	M	m_dot
0	5,95	0,097987	1	1	1	0,097987	0,583023
0,075	5,467375	0,106732	0,999118	0,999629	0,998748	0,106752	0,583031
0,15	5,0095	0,11662	0,998	0,999198	0,9972	0,116667	0,58304
0,225	4,576375	0,127833	0,996642	0,998639	0,995285	0,12792	0,583048
0,3	4,168	0,140603	0,994916	0,997964	0,99289	0,140747	0,583055
0,375	3,784375	0,155194	0,992779	0,997084	0,989884	0,155421	0,583073
0,45	3,4255	0,171931	0,990038	0,996	0,986077	0,172276	0,583082
0,525	3,091375	0,191191	0,98658	0,99458	0,981232	0,191711	0,583111
0,6	2,782	0,213427	0,982101	0,992792	0,975023	0,2142	0,583126
0,675	2,497375	0,239165	0,976366	0,990435	0,967027	0,240317	0,583167
0,75	2,2375	0,269016	0,96888	0,987414	0,956685	0,270725	0,583192
0,825	2,002375	0,303672	0,959197	0,983406	0,94328	0,306223	0,583254
0,9	1,792	0,343887	0,946526	0,97821	0,925901	0,347696	0,583292
0,975	1,606375	0,390448	0,930125	0,971315	0,903445	0,396172	0,583381
1,05	1,4455	0,444097	0,908849	0,962373	0,874651	0,452695	0,583428
1,125	1,309375	0,505439	0,88174	0,950639	0,838217	0,518395	0,583543
1,2	1,198	0,574743	0,847549	0,935692	0,793045	0,594166	0,583574
1,275	1,111375	0,651848	0,805714	0,916655	0,738562	0,680837	0,583698
1,35	1,0495	0,735765	0,75583	0,893442	0,67529	0,778406	0,583641
1,425	1,012375	0,824986	0,698946	0,865422	0,604883	0,886814	0,583756
1,5	1	0,923524	0,631871	0,831166	0,52519	1,012988	0,583548
1,575	1,012375	1,006163	0,573441	0,798784	0,458056	1,12578	0,584116
1,65	1,0495	1,10288	0,503829	0,758704	0,382257	1,26617	0,583168
1,725	1,111375	1,181786	0,445292	0,721454	0,321257	1,391344	0,584849
1,8	1,198	1,272064	0,382273	0,678706	0,259451	1,544073	0,582558
1,875	1,309375	1,327656	0,337662	0,647014	0,218472	1,650551	0,586991
1,95	1,4455	1,428256	0,280876	0,595845	0,167358	1,850288	0,57988
2,025	1,606375	1,302238	0,29792	0,636118	0,189512	1,632757	0,623213
2,1	1,792	0,881662	0,4394	0,788912	0,346648	0,992631	0,694225
2,175	2,002375	0,51481	0,619413	0,914052	0,566176	0,538469	0,638516
2,25	2,2375	0,441972	0,643636	0,928852	0,597842	0,458587	0,6365
2,325	2,497375	0,389083	0,657994	0,936526	0,616228	0,402052	0,639364
2,4	2,782	0,341575	0,670633	0,944473	0,633395	0,351472	0,637276
2,475	3,091375	0,30419	0,67952	0,948073	0,644235	0,312409	0,638998
2,55	3,4255	0,271424	0,685759	0,953163	0,653641	0,278013	0,637594
2,625	3,784375	0,244044	0,691405	0,954898	0,660221	0,249741	0,63855
2,7	4,168	0,22025	0,694291	0,958954	0,665793	0,224914	0,63736
2,775	4,576375	0,199638	0,69873	0,95866	0,669845	0,203897	0,638372
2,85	5,0095	0,181873	0,699403	0,962827	0,673404	0,185351	0,637222
2,925	5,467375	0,165899	0,702888	0,961515	0,675837	0,169186	0,637541
3	5,95	0,152516	0,702898	0,965148	0,6784	0,155246	0,63786

Πίνακας 10 (παρόμοιος με τον 7.14 από τον Andersson)

x/L	A/A*	$\rho/\rho_0$	$\rho/\rho_0(\text{analytic})$	%difference	M	M(an.)	%difference
0	5,95	1	0,995232	0,001707	0,097987	0,09782	0,001707
0,075	5,467375	0,999118	0,994345	0,001803	0,106752	0,10656	0,001803
0,15	5,0095	0,998	0,993251	0,001776	0,116667	0,11646	0,001776
0,225	4,576375	0,996642	0,991894	0,001803	0,12792	0,12769	0,001803
0,3	4,168	0,994916	0,990199	0,001826	0,140747	0,14049	0,001826
0,375	3,784375	0,992779	0,988068	0,001877	0,155421	0,15513	0,001877
0,45	3,4255	0,990038	0,985368	0,001895	0,172276	0,17195	0,001895
0,525	3,091375	0,98658	0,981927	0,00194	0,191711	0,19134	0,00194
0,6	2,782	0,982101	0,977512	0,002012	0,2142	0,21377	0,002012
0,675	2,497375	0,976366	0,971815	0,002113	0,240317	0,23981	0,002113
0,75	2,2375	0,96888	0,964429	0,002241	0,270725	0,27012	0,002241
0,825	2,002375	0,959197	0,95482	0,0024	0,306223	0,30549	0,0024
0,9	1,792	0,946526	0,942308	0,002583	0,347696	0,3468	0,002583
0,975	1,606375	0,930125	0,926039	0,00284	0,396172	0,39505	0,00284
1,05	1,4455	0,908849	0,905011	0,003136	0,452695	0,45128	0,003136
1,125	1,309375	0,88174	0,87811	0,003533	0,518395	0,51657	0,003533
1,2	1,198	0,847549	0,844272	0,003913	0,594166	0,59185	0,003913
1,275	1,111375	0,805714	0,802688	0,004407	0,680837	0,67785	0,004407
1,35	1,0495	0,75583	0,753145	0,004589	0,778406	0,77485	0,004589
1,425	1,012375	0,698946	0,696332	0,004843	0,886814	0,88254	0,004843
1,5	1	0,631871	0,633938	0,012988	1,012988	1	0,012988
1,575	1,012375	0,573441	0,568534	0,000107	1,12578	1,12566	0,000107
1,65	1,0495	0,503829	0,503065	0,006855	1,26617	1,25755	0,006855
1,725	1,111375	0,445292	0,440298	0,001533	1,391344	1,39348	0,001533
1,8	1,198	0,382273	0,382328	0,008302	1,544073	1,53136	0,008302
1,875	1,309375	0,337662	0,330401	0,011256	1,650551	1,66934	0,011256
1,95	1,4455	0,280876	0,284954	0,02454	1,850288	1,80597	0,02454
2,025	1,606375	0,29792	0,245837	0,158438	1,632757	1,94015	0,158438
2,1	1,792	0,4394	0,589554	0,756931	0,992631	0,56498	0,756931
2,175	2,002375	0,619413	0,614621	0,11953	0,538469	0,480978	0,11953
2,25	2,2375	0,643636	0,632013	0,101684	0,458587	0,41626	0,101684
2,325	2,497375	0,657994	0,644589	0,103841	0,402052	0,36423	0,103841
2,4	2,782	0,670633	0,653905	0,09362	0,351472	0,321384	0,09362
2,475	3,091375	0,67952	0,660926	0,094108	0,312409	0,285538	0,094108
2,55	3,4255	0,685759	0,666291	0,089396	0,278013	0,255199	0,089396
2,625	3,784375	0,691405	0,670438	0,089216	0,249741	0,229285	0,089216
2,7	4,168	0,694291	0,673677	0,086645	0,224914	0,20698	0,086645
2,775	4,576375	0,69873	0,67623	0,086545	0,203897	0,187656	0,086545
2,85	5,0095	0,699403	0,678261	0,08509	0,185351	0,170816	0,08509
2,925	5,467375	0,702888	0,67989	0,084104	0,169186	0,156061	0,084104
3	5,95	0,702898	0,681207	0,085103	0,155246	0,14307	0,085103

Πίνακας 11 (παρόμοιος με τον 7.15 από τον Andersson)

x/L	A/A*	V/a	$\rho/\rho_0$	T/T <sub>0</sub>	$\rho/\rho_0$	M	m_dot
0	5,95	0,098984	1	1	1	0,098984	0,588957
0,075	5,467375	0,107693	1,000003	1,000001	1,000005	0,107693	0,588803
0,15	5,0095	0,117506	1,000004	1,000001	1,000005	0,117506	0,588649
0,225	4,576375	0,128588	1,000005	1,000002	1,000006	0,128588	0,588471
0,3	4,168	0,141138	1,000006	1,000002	1,000008	0,141138	0,588267
0,375	3,784375	0,155383	1,000007	1,000003	1,00001	0,155382	0,588031
0,45	3,4255	0,172451	0,99981	0,999939	0,999749	0,172457	0,59062
0,525	3,091375	0,195484	0,990489	0,995733	0,986263	0,195903	0,598568
0,6	2,782	0,225064	0,963505	0,983401	0,947512	0,226955	0,603277
0,675	2,497375	0,256929	0,936062	0,970877	0,908801	0,260754	0,600622
0,75	2,2375	0,294176	0,90862	0,95835	0,870777	0,3005	0,598071
0,825	2,002375	0,33757	0,881179	0,94582	0,833437	0,347104	0,595625
0,9	1,792	0,387801	0,853737	0,933284	0,796779	0,401423	0,593296
0,975	1,606375	0,445343	0,826291	0,92074	0,760799	0,464115	0,591118
1,05	1,4455	0,510222	0,798835	0,908185	0,72549	0,535393	0,589162
1,125	1,309375	0,581719	0,771363	0,895615	0,690845	0,614685	0,587538
1,2	1,198	0,658019	0,743867	0,883029	0,656856	0,700247	0,586396
1,275	1,111375	0,735942	0,716344	0,870422	0,623521	0,788821	0,585903
1,35	1,0495	0,810908	0,688799	0,857794	0,590847	0,875548	0,5862
1,425	1,012375	0,877369	0,661256	0,845145	0,558857	0,95437	0,587345
1,5	1	0,929783	0,633668	0,833232	0,527992	1,018589	0,589174
1,575	1,012375	1,004908	0,58123	0,797825	0,46372	1,125052	0,591311
1,65	1,0495	1,067709	0,528592	0,760815	0,402161	1,22409	0,59232
1,725	1,111375	1,121236	0,475999	0,723703	0,344482	1,318005	0,593149
1,8	1,198	1,169727	0,423437	0,686469	0,290676	1,411803	0,593376
1,875	1,309375	1,220191	0,3709	0,64905	0,240733	1,514567	0,592582
1,95	1,4455	1,282483	0,3184	0,611308	0,19464	1,640294	0,590259
2,025	1,606375	1,353835	0,269559	0,587045	0,158243	1,766973	0,586228
2,1	1,792	1,421813	0,23248	0,597164	0,138828	1,839907	0,592332
2,175	2,002375	0,498995	0,586648	0,947159	0,555649	0,512725	0,586164
2,25	2,2375	0,43707	0,604569	0,949663	0,574137	0,448503	0,591234
2,325	2,497375	0,387309	0,612271	0,953732	0,583942	0,396593	0,592223
2,4	2,782	0,342625	0,619934	0,958384	0,594135	0,349985	0,590911
2,475	3,091375	0,303924	0,627599	0,96304	0,604402	0,309702	0,589657
2,55	3,4255	0,270417	0,635264	0,967697	0,614743	0,274893	0,588453
2,625	3,784375	0,241376	0,64293	0,972357	0,625158	0,244783	0,58729
2,7	4,168	0,216159	0,650598	0,977017	0,635645	0,218687	0,586157
2,775	4,576375	0,194206	0,658266	0,981679	0,646206	0,19601	0,58504
2,85	5,0095	0,175039	0,665935	0,986341	0,656839	0,176247	0,583931
2,925	5,467375	0,158252	0,673604	0,991004	0,667544	0,158969	0,582818
3	5,95	0,144355	0,677259	0,995851	0,674448	0,144656	0,581706

## Βιβλιογραφία

- 1) Διδακτικές σημειώσεις μαθήματος: Υπολογιστική Ρευστομηχανική
- 2) Computational fluid mechanics, John D. Anderson Jr., Mc-Graw Hills series

## Code listing: