

TP3-bis : Mesure d'impédance ou de phase par détection synchrone

Térence Marchi, Anycia Raulet

Soit $Z(jw)$ un dipôle tel que $Z(jw) = R_z + jX_z$ En passant en notation complexe on a que $Z(jw) = Z_d e^{j\varphi_d}$ ainsi :

$$\Re(Z(jw)) = R_z = Z_d \cos(\varphi_d)$$

$$\Im(Z(jw)) = X_z = Z_d \sin(\varphi_d)$$

1 Détection synchrone de l'impédance d'un dipôle (D) passif :

1.1 Montage

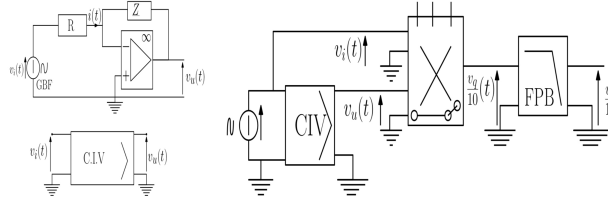


Figure 1: schéma du montage de détection de la partie réelle de $Z(jw)$

Ce montage permet de mesurer séparément la partie réelle \mathcal{R}_z et la partie imaginaire \mathcal{X}_z de l'impédance $Z_z = \mathcal{R}_z + j\mathcal{X}_z$ d'un dipôle \mathcal{D} .

1.2 Théorie

On applique une loi des noeuds en terme de potentiel en v_- , ainsi :

$$v_- = \frac{\frac{v_i}{R} + \frac{v_u}{Z(jw)}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{Z(jw)}}$$

Or l'ALI fonctionne en régime linéaire ainsi $v_+ = v_-$, et $v_0 = 0$ donc :

$$\frac{\frac{v_i}{R} + \frac{v_u}{Z(jw)}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{Z(jw)}} = 0 \iff \frac{v_i}{R} + \frac{v_u}{Z(jw)} = 0 \iff v_u = -v_i \frac{Z(jw)}{R}$$

Ainsi après que v_i et v_u soient passés dans le multiplieur :

$$\begin{aligned} v_q &= kv_i v_u = k \left(-Z_d \frac{E_m^2}{R} \cos(wt) \cos(wt + \varphi_d) \right) \\ \iff v_q &= -kZ_d \frac{E_m^2}{2R} (\cos(2wt + \varphi_d) + \cos(\varphi_d)) \end{aligned}$$

Puis finalement après que le signal v_q soit passé dans le filtre passe bas (nous préférons un multimètre en mode ohmmètre qui réalise bien mieux la fonction de filtre passe bas qu'un filtre RC par exemple) :

$$\begin{aligned} v_d &= -\frac{kE_m^2 Z_d}{2R} \cos(\varphi_d) \\ \iff R_z &= -\frac{2R}{kE_m^2} v_d \end{aligned}$$

1.3 Résultats

Nous avons pris comme amplitude de la tension d'entrée $E_m = 9,5V$, une résistatnce $R = 10k\Omega$ et le multiplieur fixe $k = 0,1$. Ainsi nous mesurons en tension de sortie une valeur $v_d = -46mV$.

$$R_z = -\frac{2R}{kE_m^2}v_d \iff R_z = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 9,5^2} \cdot 46 \cdot 10^{-3} = 102 \Omega$$

Il faut maintenant établir l'incertitude sur la mesure de R_z que l'on nomera $(u_{R_x})_{calcul}$. Nous prendrons la définition de $(u_{R_x})_{calcul}$ tel que :

$$(u_{R_x})_{calcul} = R_x \sqrt{\left(\frac{u_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{u_{v_d}}{v_d}\right)^2 + 2\left(\frac{u_{E_m}}{E_m}\right)^2}$$

Avec u_R , u_{v_d} et u_{E_m} les incertitudes respectives de R , v_d et E_m . Il est à noter qu'il faudrait aussi prendre en compte l'incertitude sur la valeur k du multiplieur, mais nous n'avons pas réussi à trouver celle-ci.

- $u_R = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{5}{100} \cdot 10000 = 288,7 \Omega$
- $u_{v_d} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0,002606 = 1,505 mV$
- $u_{E_m} = 2 mV$ datasheet du constructeur

Ce qui nous donne :

$$(u_{R_x})_{calcul} = 102 \sqrt{\left(\frac{288}{10000}\right)^2 + \left(\frac{1,5}{46}\right)^2 + 2\left(\frac{2 \cdot 10^{-3}}{9,5}\right)^2} = 4,39 \Omega$$

Ainsi :

$$R_x = 102 \pm 4,39 \Omega$$

2 Détection de la partie imaginaire de l'impédance

2.1 Montage

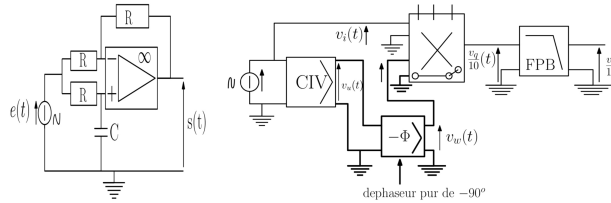


Figure 2: schéma du montage de détection de la partie imaginaire de $Z(jw)$

2.2 Théorie

On applique la même loi des noeuds en terme de potentiel en v_- , ainsi :

$$v_- = \frac{\frac{v_i}{R} + \frac{v_u}{Z(jw)}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{Z(jw)}}$$

Or l'ALI fonctionne en régime linéaire ainsi $v_+ = v_-$, et $v_0 = 0$ donc :

$$\frac{\frac{v_i}{R} + \frac{v_u}{Z(jw)}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{Z(jw)}} = 0 \iff \frac{v_i}{R} + \frac{v_u}{Z(jw)} = 0 \iff v_u = -v_i \frac{Z(jw)}{R}$$

Contrairement à la première partie on déphase de $-\frac{\pi}{2}$ le signal v_i avant de le multiplier avec v_u . Ainsi après que v_i et v_u soient passés dans le multiplieur :

$$v_q = kv_i v_u = k(-Z_d \frac{E_m^2}{R} \cos(wt - \frac{\pi}{2}) \cos(wt + \varphi_d))$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow v_q &= -kZ_d \frac{E_m^2}{2R} (\cos(2\omega t + \varphi_d - \frac{\pi}{2}) + \cos(\varphi_d + \frac{\pi}{2})) \\ \Leftrightarrow v_q &= -kZ_d \frac{E_m^2}{2R} (\cos(2\omega t + \varphi_d - \frac{\pi}{2}) - \sin(\varphi_d))\end{aligned}$$

Puis finalement après que le signal v_q soit passé dans le filtre passe bas (nous préférons un multimètre en mode ohmmètre qui réalise bien mieux la fonction de filtre passe bas qu'un filtre RC par exemple) :

$$\begin{aligned}v_d &= \frac{kE_m^2 Z_d}{2R} \sin(\varphi_d) \\ \Leftrightarrow X_z &= \frac{2R}{kE_m^2} v_d\end{aligned}$$

2.3 Résultats

Nous avons pris comme amplitude de la tension d'entrée $E_m = 10V$, une résistance $R = 10k\Omega$ et le multiplicateur fixe $k = 0,1$. Ainsi nous mesurons en tension de sortie une valeur $v_d = 4,13V$.

$$X_z = \frac{2R}{kE_m^2} v_d \Leftrightarrow X_z = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 10^2} \cdot 4,13 = 8260$$

or

$$X_z = L\omega \Leftrightarrow L = \frac{X_z}{2\pi f} = \frac{8260}{2\pi \cdot 16 \cdot 10^3} = 82,16 \text{ mH}$$

Il faut maintenant établir l'incertitude sur la mesure de L que l'on nommera $(u_L)_{calcul}$. Nous prendrons la définition de $(u_L)_{calcul}$ tel que :

$$(u_L)_{calcul} = L \sqrt{\left(\frac{u_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{u_{v_d}}{v_d}\right)^2 + 2\left(\frac{u_{E_m}}{E_m}\right)^2}$$

Avec u_R , u_{v_d} et u_{E_m} les incertitudes respectives de R , v_d et E_m . Il est à noter qu'il faudrait aussi prendre en compte l'incertitude sur la valeur k du multiplicateur tout comme l'incertitude sur la fréquence délivrée par le GBF, mais nous n'avons pas réussi à trouver celles-ci.

- $u_R = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{5}{100} \cdot 10000 = 288,7 \Omega$
- $u_{v_d} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0,002606 = 1,505 \text{ mV}$
- $u_{E_m} = 2 \text{ mV}$ datasheet du constructeur

Ce qui nous donne :

$$(u_L)_{calcul} = 82,16 \sqrt{\left(\frac{288}{10000}\right)^2 + \left(\frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{4,13}\right)^2 + 2\left(\frac{2 \cdot 10^{-3}}{10}\right)^2} = 2,37 \text{ mH}$$

Ainsi :

$$L = 82 \pm 2,4 \text{ mH}$$