

Compte rendu de TP

Mesure de vitesse d'un modèle réduit de locomotive par effet Doppler acoustique

Tom SALES

13 décembre 2023

Sommaire

1	Introduction	5
2	Etude Théorique	5
2.1	Le détecteur est fixe et seule la source est mobile	5
2.1.1	Source S se translatant en se rapprochant d'un détecteur D, situé sur sa trajectoire	5
2.1.2	Source S se translatant en s'éloignant d'un détecteur D, situé sur sa trajectoire	6
2.2	Le détecteur est mobile et seule la source est fixe	7
2.2.1	Détecteur D se translatant en se rapprochant d'une source S, située sur sa trajectoire	8
2.2.2	Détecteur D se translatant en s'éloignant d'une source S, située sur sa trajectoire	9
3	Mesure expérimentale d'une vitesse de locomotive	10
3.1	Description de l'expérience	10
3.2	Dispositifs expérimentaux	10
3.2.1	Mesure directe de la fréquence reçue	10
3.2.2	Mesure de Δf par les battements (en additionnant $u_2(t)$ et $u_1(t)$)	11
3.2.3	Mesure de Δf par les battements (en multipliant $u_2(t)$ et $u_1(t)$)	15
4	Conclusion du TP	18
5	Annexes	19
5.1	Code python de calcul de l'incertitude statistique	19

Liste des images

1	Illustration de l'effet Doppler (Cas où la source avance vers le récepteur).	5
2	Illustration de l'effet Doppler (Cas où la source s'éloigne du récepteur).	6
3	Illustration de l'expérience	10
4	Rignal reçu et amplifié	11
5	Spectre en fréquence du signal résultant $w(t) = u_1(t) + u_2(t)$	13
6	Montage de détection synchrone	15
7	Spectre en fréquence du signal résultant $q(t) = ku_1(t)u_2(t)$	16
8	Resultats de l'expérience pour les mesures 1 et 4 du tableau de résultats	17

Liste des tableaux

1	Résultats des mesures (Fréquence des battements en addition)	14
2	Résultats des mesures (Fréquence des battements en multiplication)	17
3	Ecart relatifs	18

1 Introduction

But du TP : Mesurer la vitesse d'une locomotive miniature à l'aide d'un radar à effet **Döppler** à **ultrasons** ($f = 40kHz$). Nous assurerons la **mesure précise du décalage fréquentiel** grâce à un dispositif de **détection synchrone**.

2 Etude Théorique

On note c_s la célérité du son dans le milieu de propagation (l'air dans le cas de ce TP). La source sonore s'appelle S et le détecteur sonore s'appelle D. À une date t_i , la distance SD sera notée $SD(t_i) = d_i$.

2.1 Le détecteur est fixe et seule la source est mobile

2.1.1 Source S se translatant en se rapprochant d'un détecteur D, situé sur sa trajectoire



Figure 1: Illustration de l'effet Doppler (Cas où la source avance vers le récepteur).

Dans cette première partie, la source sonore S, mobile à vitesse $\vec{v}_s = v_s \vec{e}_x$ dans le référentiel \mathcal{R}_T terrestre, émet des "bips" sonores périodiques de période T_s . Le détecteur D est fixe dans \mathcal{R}_T , et est situé sur la trajectoire de S. Ce récepteur reçoit les "bips" selon la période T_D .

Un premier bip est émis par S à la date t_1 et reçu par le détecteur à la date t'_1 .

On peut relier d_1, t_1, t'_1 et c_s (Célérité de l'onde sonore)

Relation 1 entre d_1, t_1, t'_1 et c_s

$$c_s(t'_1 - t_1) = d_1 \quad \textcircled{1}$$

Un second bip est émis par S à la date t_2 et reçu par D à la date t'_2 .

De même, on obtient une relation entre d_2, t_2, t'_2 et c_s .

Relation 2 entre d_2 , t_2 , t'_2 et c_s

$$c_s(t'_2 - t_2) = d_2 \quad \textcircled{2}$$

En soustrayant les deux relations précédentes, il vient

$$c_s(t'_2 - t_1 - T_s - t'_1 + t_1) = d_2 - d_1$$

$$\text{Or } T_D = t'_2 - t'_1$$

On exprime alors la période T_D à l'aide de c_s , v_s et T_S

Relation 3 entre c_s , v_s et T_S

$$T_D = T_S(1 - \frac{v_s}{c_s}) \quad \textcircled{3}$$

Par définition de la fréquence, $f_s = \frac{1}{T_s}$ et $f_D = \frac{1}{T_D}$

Finalement on obtient l'expression de la fréquence reçue par le récepteur D en fonction de la fréquence envoyée par la source S

Relation 4 entre f_s , f_D , v_s et c_s

$$f_D = \frac{f_s}{(1 - \frac{v_s}{c_s})}$$

Remarque : On peut obtenir la relation entre les longueurs d'ondes incidentes et reçues car $\lambda = \frac{c_s}{f}$

On aurait la relation : $\lambda_D = \lambda_s(1 - \frac{v_s}{c_s})$

2.1.2 Source S se translatant en s'éloignant d'un détecteur D, situé sur sa trajectoire

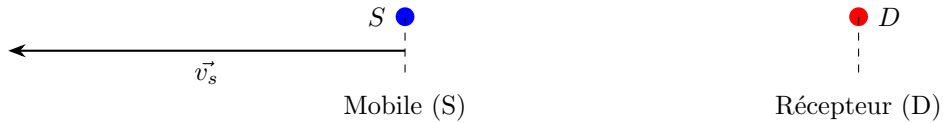


Figure 2: Illustration de l'effet Doppler (Cas où la source s'éloigne du récepteur).

Par analogie avec la situation précédente, on retrouve la relation

$$c_s(t'_2 - t_1 - T_s - t'_1 + t_1) = d_2 - d_1$$

Cependant cette fois ci, le signe de $d_2 - d_1$ change et $d_2 - d_1 = v_s$

La relation ③ change donc en conséquence, pour donner la relation 3'

Relation 3' entre c_s , v_s et T_S

$$T_D = T_S(1 + \frac{v_s}{c_s}) \text{ ③'}$$

On en déduit donc les relations 4' et 5'

Relation 4' entre f_s , f_D , v_s et c_s , et 5' entre les longueurs d'ondes incidente et reçue

$$f_D = \frac{f_s}{(1 + \frac{v_s}{c_s})} \text{ ④'}$$

$$\lambda_D = \lambda_s(1 + \frac{v_s}{c_s}) \text{ ⑤'}$$

Synthèse des deux cas

Dans les deux cas, on obtient la relation $f_D = \frac{c_s}{c_s \pm v_s} f_s$, donc $f_D = \frac{1}{1 \pm \frac{v_s}{c_s}} f_s$

A l'ordre 1 en $\frac{v_s}{c_s}$, $f_D = (1 \pm \frac{v_s}{c_s}) f_s$

Alors $f_D - f_s = \pm \frac{f_s v_s}{c_s}$

On pose maintenant $\Delta f = f_D - f_s$

Approximation de $\frac{\Delta f}{f_s}$

$$\frac{\Delta f}{f_s} \approx \pm \frac{v_s}{c_s}$$

Remarque: Lorsque la source **se rapproche du capteur**, la fréquence perçue par celui ci est **supérieure à celle émise**, et le son perçu est **plus aigu**

Réciproquement, lorsque la source **s'éloigne du capteur**, le son perçu est **plus grave**

2.2 Le détecteur est mobile et seule la source est fixe

Soit une source S fixe dans le référentiel \mathcal{R}_T terrestre. Cette source émet le "Bip" de période T_s .

Cette fois ci le détecteur (D) est mobile à vitesse \vec{v}_D , sur la trajectoire contenant la source (S).

Nous noterons \mathcal{R}' le référentiel lié à (D)

Dans \mathcal{R}' , qualitativement, la vitesse de (D) est opposée à celle de (S), alors on obtient une relation entre $\vec{v}_{(S)(\mathcal{R})'}$ et \vec{v}_D

$$\boxed{\vec{v}_{(S)(\mathcal{R})'} = -\vec{v}_D}$$

Avec cette relation, on peut relier la vitesse de l'onde dans \mathcal{R}' notée c'_s , c_s et v_D

$$\boxed{c'_s = c_s - v_D}$$

Remarque: Dans \mathcal{R}' , le détecteur est fixe et la source bouge, ce qui revient au cas précédent : On peut utiliser les résultats de l'effet Doppler d'une source mobile et d'un émetteur fixe.

2.2.1 Détecteur D se translatant en se rapprochant d'une source S, située sur sa trajectoire

En projection sur l'axe des x, la relation sur les vitesses devient une relation sur les normes

$$\boxed{c'_s = c_s + v_D}$$

Alors $c'_s - c_s = v_D$

En multipliant cette expression par T_s , on obtient $T_s(c'_s - c_s) = v_D T_s$

Or $c'_s - c_s$ est la vitesse d'une impulsion par rapport à l'autre, donc $T_s(c'_s - c_s) = d_1 - d_2$

Finalement, on obtient

$$\boxed{d_2 - d_1 = -v_D T_s}$$

Selon la composition des vitesses établie précédemment, $d_1 - d_2 = c'_s T_D = (c_s + v_D) T_D$

Finalement, on obtient une relation entre les **periodes**, une relation entre les **fréquences** et une relation entre les **longueurs d'ondes**

Relations entre les longueurs d'ondes, entre les fréquences et entre les périodes

$$T_D = T_s \frac{c_s}{c_s + v_D}$$

$$f_D = f_s \frac{c_s + v_D}{c_s}$$

$$\lambda_D = \lambda_s \frac{c_s}{c_s + v_D}$$

2.2.2 Détecteur D se translatant en s'éloignant d'une source S, située sur sa trajectoire

On retrouve l'équation $T_s(c'_s - c_s) = v_D T_s$, mais cette fois-ci le signe de $c'_s - c_s$ change, cela donne la relation suivante : $T_s(c'_s - c_s) = d_2 - d_1$

Finalement

$$d_2 - d_1 = v_D T_s$$

Par le même procédé que dans la partie précédente, on obtient une relation entre les **périodes**, une relation entre les **fréquences** et une relation entre les **longueurs d'ondes**

Relations entre les longueurs d'ondes, entre les fréquences et entre les périodes

$$T_D = T_s \frac{c_s}{c_s - v_D}$$

$$f_D = f_s \frac{c_s - v_D}{c_s}$$

$$\lambda_D = \lambda_s \frac{c_s}{c_s - v_D}$$

Synthèse des deux cas

Dans les deux cas, on obtient la relation $f_D = f_s \frac{c_s \pm v_D}{c_s}$, donc $f_D = (1 \pm \frac{v_D}{c_s}) f_s$

Alors $f_D - f_s = \frac{f_s v_D}{c_s}$

On pose maintenant $\Delta f = f_D - f_s$

Formule de $\frac{\Delta f}{f_s}$

$$\frac{\Delta f}{f_s} = \pm \frac{v_D}{c_s}$$

3 Mesure expérimentale d'une vitesse de locomotive

3.1 Description de l'expérience

Nous allons construire et étudier un **Radar Doppler**

Un émetteur E_1 émet dans l'air une onde acoustique de fréquence $f = 40kHz$. Nous supposons cette onde plane progressive sinusoidale. On alimente cet émetteur avec une tension $u_1(t)$, de fréquence $f = 40kHz$

Le train porte un écran réfléchissant, qui va réfléchir au mieux l'onde émise par E_1 .

Un récepteur est placé au même niveau que l'émetteur et va recevoir cette onde réfléchi. Ce récepteur va renvoyer un signal sinusoidal E_2 , qu'il faudra amplifier avant de pouvoir traiter

Remarque: L'émetteur convertit la tension $u_1(t)$ en onde ultrasonore par le déplacement vibratoire d'une lame de quartz piezoelectrique. Le récepteur, par fonctionnement inverse, capte les vibration du quartz piezoelectrique et les convertit en la tension $u_2(t)$

Le véhicule est une locomotive, dont la vitesse est de $v_s = 6cm.s^{-1}$ (Mesure effectuée grâce à un chronomètre)

3.2 Dispositifs expérimentaux

Nous étudieront 3 dispositifs expérimentaux:

- La mesure directe de la fréquence reçue
- La mesure de Δf par les battements (en additionnant $u_2(t)$ et $u_1(t)$)
- La mesure de Δf par détection synchrone

3.2.1 Mesure directe de la fréquence reçue

Schéma:



Figure 3: Illustration de l'expérience

Pour cette technique, on récupère directement le signal reçu par le récepteur (D), et on mesure sa fréquence.

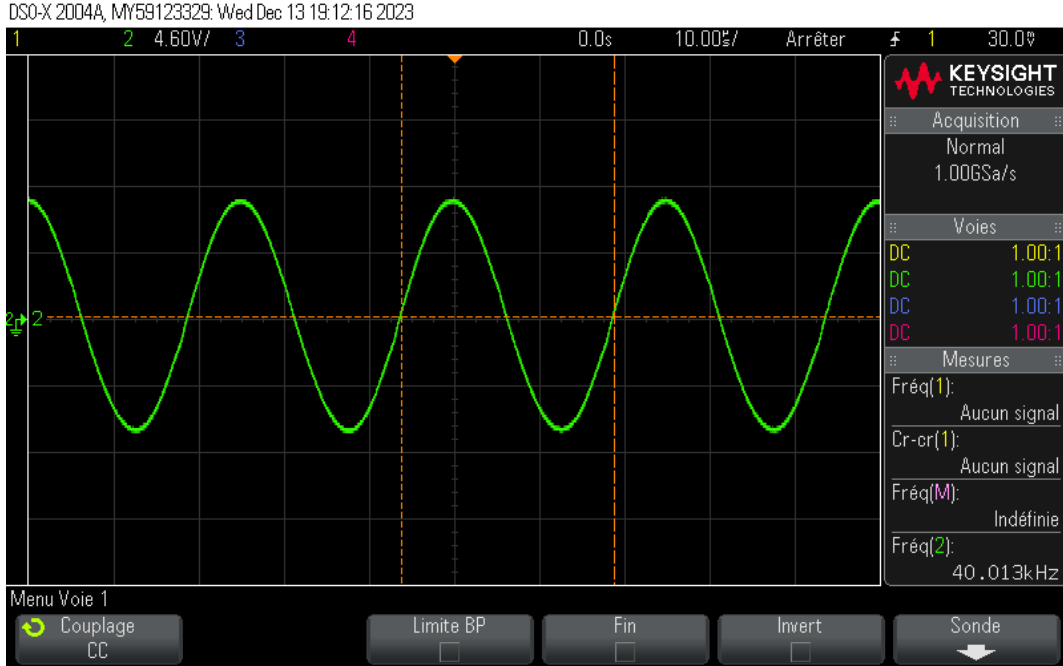


Figure 4: Rignal reçu et amplifié

La mesure de la fréquence donne $f_2 = 40013Hz$, donc $\Delta f = 13Hz$

Avec la formule montrée en théorie, $v_s = \frac{\Delta f c_s}{f_s}$

Vitesse du mobile par mesure directe de la fréquence reçue

$$v_s = 11cm.s^{-1}$$

3.2.2 Mesure de Δf par les battements (en additionnant $u_2(t)$ et $u_1(t)$)

L'émetteur est alimenté par un signal $u_1(t) = U_1 \cos(2\pi f t + \phi_1)$. Avec cette tension sinusoïdale, il émet un signal acoustique

$$s_1(t) = S_1 \cos(2\pi f t + \phi_1).$$

Le récepteur est fixe et identique à l'émetteur, sauf qu'il fonctionne en sens inverse. Il réceptionne une onde sonore $s_2(t)$ plane, sinusoïdale et de fréquence $f + 2\Delta f$, dans le sens et la direction de O_x .

$$s_2(t) = S_2 \cos(2\pi(f + 2\Delta f)t + \phi_2)$$

$$\text{Où } \Delta f = \pm \frac{v}{c_s} f$$

Ce signal acoustique $s_2(t)$ est transformé en tension $u_2(t) = U_2 \cos(2\pi(f + 2\Delta f)t + \phi_2)$

Remarque : On amplifiera ce signal en un signal $u_2^A = A \times u_2(t)$, et on réglerà A de manière à obtenir $U_1 = AU_2 = U$

On notera par la suite $f' = f \pm 2\Delta f$

La superposition de $u_1(t)$ et $u_2(t)$ donne une porteuse de fréquence $f_H = \frac{f+f'}{2} = f + \Delta f$, d'amplitude modulée.

La modulante sera sinusoïdale de fréquence $f_B = \Delta f = |f - f'|$

Avec des formules de trigonométrie, on obtient la forme du signal résultant

$$w(t) = u_1(t) + u_2(t) = 2U_1 \cos(2\pi(f + \Delta f)t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}) \cos(2\pi\Delta f t + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}) + (AU_2 - U_1) \cos(2\pi(f + 2\Delta f)t)$$

Or en première approximation, on peut simplifier cette formule en sachant que $\Delta f \ll f$ et $AU_2 \ll U_1$

$$w(t) = u_1(t) + u_2(t) = 2U_1 \cos(2\pi \Delta f t) \cos(2\pi f t) + (AU_2 - U_1) \cos(2\pi(f + 2\Delta f)t)$$

Remarque : Le phénomène de battements sera d'autant plus marqué que AU_2 sera proche de U_1 . Enfin, en appliquant encore une formule trigonométrique, on peut retrouver le signal de sortie sous la forme d'une somme pour tracer son spectre :

Forme du signal $w(t)$

$$w(t) = U_1 \cos(2\pi(f + \Delta f)t) + \cos(2\pi(f - \Delta f)t) + (AU_2 - U_1) \cos(2\pi(f + 2\Delta f)t)$$

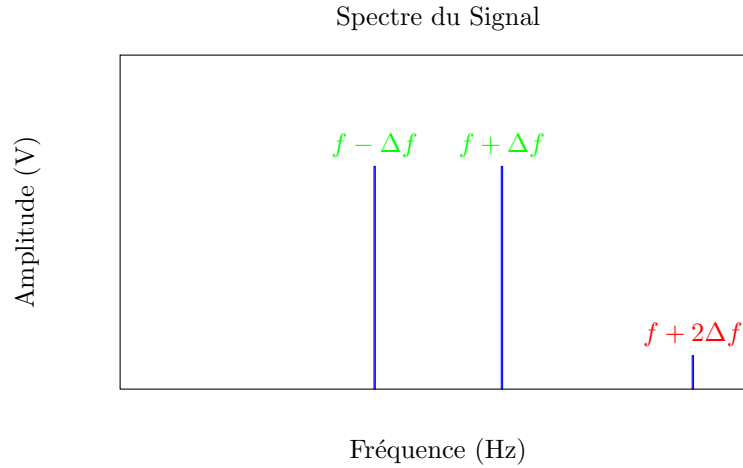


Figure 5: Spectre en fréquence du signal résultant $w(t) = u_1(t) + u_2(t)$

Et grâce à la théorie vue auparavant, on obtient la relation entre Δf , f , c_s et v_s

$$\Delta f = \pm \frac{v_s f}{c_s}$$

**Montrons maintenant grâce à la thermodynamique l'expression de c_s dans l'air
ambiant considéré comme un gaz parfait**

On sait que dans un gaz parfait, $c_s = \frac{1}{\rho_0 \chi_s}$

Considérons l'évolution comme isentropique, alors l'équation de Laplace s'écrit

$$P(\delta V)^\gamma = P_0(\delta V_0)^\gamma$$

Or $dm = \text{constante}$ et $dm = \rho \delta V$, donc on peut transformer l'expression précédente

$$\rho(\delta V)^\gamma = \rho_0(\delta V_0)^\gamma$$

Par différentielle logarithmique, on obtient la relation suivante

$$\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

Finalement la relation suivante donne l'expression de χ_s pour un gaz parfait

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{1}{\gamma P} \approx \frac{1}{\gamma P_0} \quad (\text{Au premier ordre})$$

On peut alors remplacer l'expression de χ_s dans c_s

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{T_0}}$$

Or d'après l'équation d'état des gaz parfaits, $\frac{P_0}{\rho_0} = \frac{RT_0}{M_{air}}$

Expression de c_s dans un gaz parfait

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$$

On peut maintenant mesurer la fréquence des battements et en déduire la vitesse du mobile

Mesure	1	2	3	4	5
$2\Delta f$	15.48	12.4	14.4	14.4	16
v_s	0.066	0.053	0.062	0.062	0.069

Table 1: Résultats des mesures (Fréquence des battements en addition)

On calcule l'incertitude sur la vitesse par une méthode statistique, pour cela, on utilise le code python présent en annexe 1

Avec ce code on obtient $U_{vs} = 0.00549 m.s^{-1}$

Valeur de la vitesse par la méthode des battements en addition des deux signaux

$$v_s = (0.0624 \pm 0.00549) m.s^{-1}$$

3.2.3 Mesure de Δf par les battements (en multipliant $u_2(t)$ et $u_1(t)$)

On met en oeuvre une chaine de traitement comprenant un multiplieur, et un filtre RC passe bas afin de récupérer un signal que l'on notera $q(t)$

Schéma du circuit :

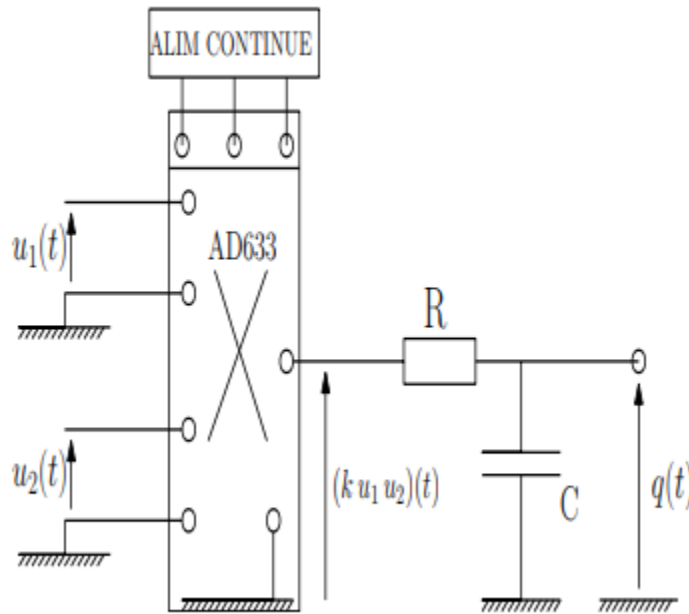


Figure 6: Montage de détection synchrone

Ce montage est un montage de **détection synchrone**

En sortie du multiplieur, on récupère un signal

$$q(t) = kAU_1U_2\cos(2\pi ft + \varphi_1)\cos(2\pi(f + 2\Delta f)t + \varphi_2)$$

Avec des formules trigonométriques, on obtient

$$q(t) = \frac{kAU_1U_2}{2}(\cos(4\pi(f + \Delta f)t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(4\pi\Delta ft + \varphi_1 - \varphi_2))$$

Grâce a cette dernière expression, on peut tracer le spectre en amplitude du signal $q(t)$

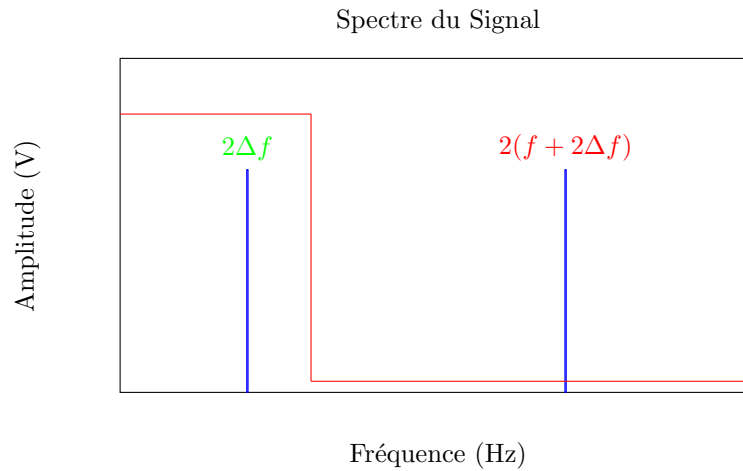
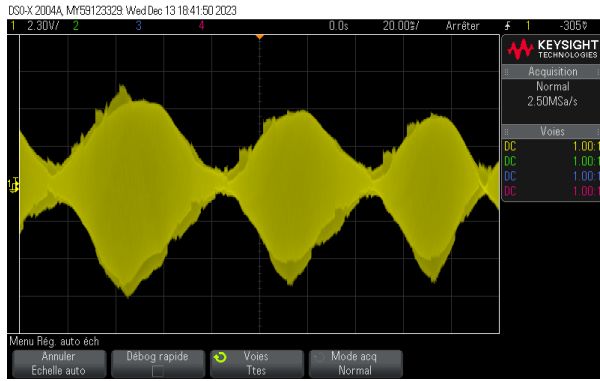


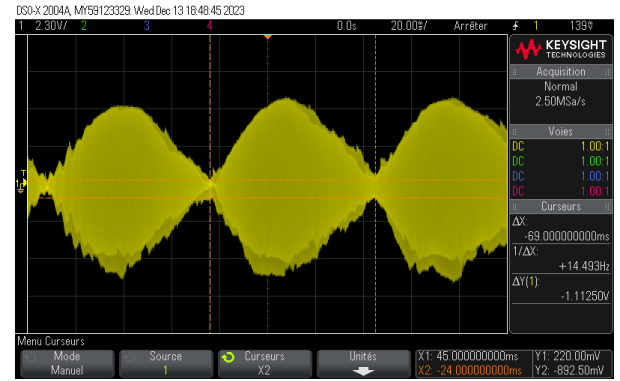
Figure 7: Spectre en fréquence du signal résultant $q(t) = ku_1(t)u_2(t)$

En rouge on a tracé le fonctionnement optimal du filtre RC pour récupérer la fréquence Δf
 On privilégiera une mesure de $2\Delta f$ par la mesure de la fréquence des battements car le bruit empeche d'obtenir un spectre avec peu de "batons"

Résultats obtenus sur l'oscilloscope



(a) Mesure 1



(b) Mesure 4

Figure 8: Résultats de l'expérience pour les mesures 1 et 4 du tableau de résultats

Et voici les résultats numériques pour cette même expérience répétée 5 fois

Mesure	1	2	3	4	5
$2\Delta f$	16.3	18.7	15.7	14.4	14
v_s	0.070	0.081	0.068	0.062	0.061

Table 2: Résultats des mesures (Fréquence des battements en multiplication)

On utilise le code python de l'annexe 1 pour obtenir l'incertitude statistique sur cette mesure

Avec ce code on obtient $U_{vs} = 0.00717 m.s^{-1}$

Valeur de la vitesse par la méthode des battements en multiplication des deux signaux

$$v_s = (0.0684 \pm 0.00717) m.s^{-1}$$

4 Conclusion du TP

Dans ce TP nous avons pu mesurer la vitesse d'une locomotive par 3 méthodes utilisant l'effet Doppler acoustique.

Voici les résultats des différentes expériences réalisées

Chronométrage de la locomotive (Témoin)

$$v_s = 6cm.s^{-1}$$

Mesure directe de la fréquence reçue (1)

$$v_s = 11cm.s^{-1}$$

Mesure par les battements par addition (2)

$$v_s = (6.84 \pm 0.717)cm.s^{-1}$$

Mesure par les battements par multiplication (3)

$$v_s = (6.24 \pm 0.549)cm.s^{-1}$$

La méthode d'addition des battements semble être la plus précise, ci-dessous voici le calcul des écarts relatifs correspondant

Méthode	Témoin	(1)	(2)	(3)
Ecart relatif (%)	x	83	14	4

Table 3: Ecart relatifs

La méthode de mesure directe est par conséquent à proscrire car **tres imprécise** et l'écart relatif des autres grandeurs à la grandeur témoin est **satisfaisante**

5 Annexes

5.1 Code python de calcul de l'incertitude statistique

```
1  import math as m
2
3  def ecart_type(L):
4      n = len(L)
5      c = 0
6      ecart = 0
7      for k in range(n):
8          c += L[k]
9      moyenne = c/n
10     for i in range(n):
11         ecart += (L[i]-moyenne)**2
12
13     sigma = m.sqrt(ecart/n)
14     return (moyenne, sigma)
```