

## Propagation d'ondes électromagnétiques le long d'une ligne électrique

### Matériel :

- un câble d'environ  $\mathcal{L} = 100\text{m}$ , de structure coaxiale, modélisé par l'ensemble de deux conducteurs cylindriques coaxiaux  $C_a$  et  $C_b$ , d'axe  $Oz$ , de rayons  $a$  et  $b$  ( $a < b$ ), séparés par un diélectrique très bon isolant de permittivité  $\varepsilon_0 \varepsilon_r$  et de perméabilité magnétique  $\mu_0$  (voir figure (1)-haut);
- ou un câble bifilaire d'environ  $\mathcal{L} = 100\text{m}$ , modélisé par un ensemble de deux fils conducteurs rectilignes  $F_a$  et  $F_b$ , parallèles à l'axe  $Oz$ , noyés dans un manchon cylindrique de mousse diélectrique, de permittivité  $\varepsilon_0 \varepsilon_r$  et de perméabilité magnétique  $\mu_0$  (voir figure (1)-bas);
- un générateur BF arbitraire montant à des fréquences de plusieurs  $\text{MHz}$  et permettant la génération d'impulsions très fines, de rapport cyclique très faible;
- un oscilloscope numérique interfaçable;
- une carte SySam, un ordinateur muni des logiciels Latispro et Regressi;
- une boîte de capacité et une boîte de résistance à décades;
- des fils courts, un multimètre mesurant R,L et C .

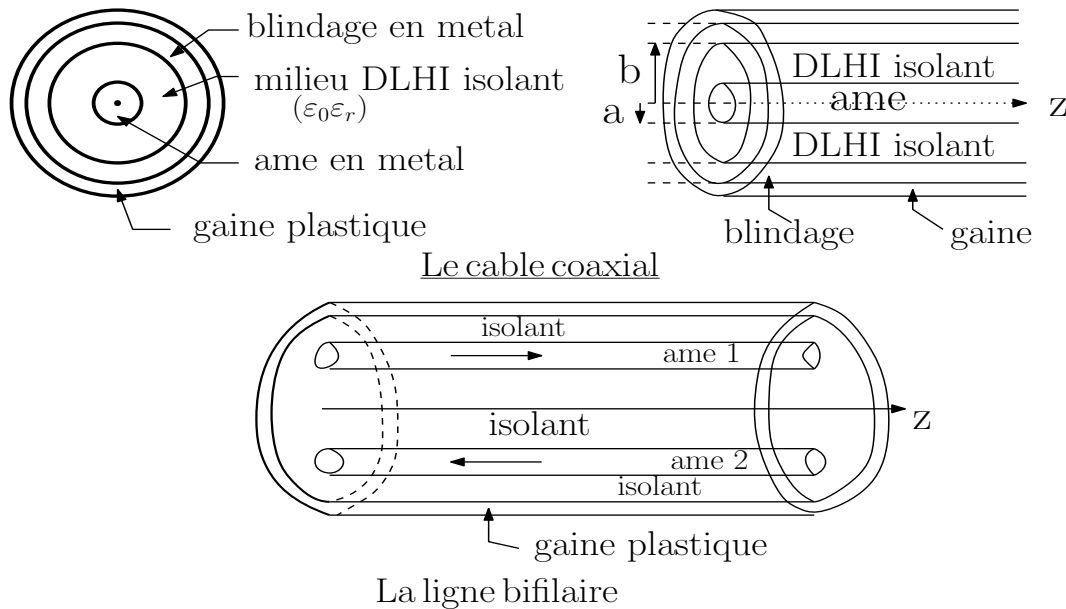


FIGURE 1 – Les deux types de lignes électriques.

### Introduction :

**Le but de ce TP est l'étude d'une ligne électrique de 100m, à fréquence comprise entre 100kHz et  $f = 10\text{MHz}$ .**

Le câble coaxial est la ligne de transmission la plus répandue, d'une onde électromagnétique en mode TEM (transverse électrique et transverse magnétique) si les rayons  $a$  et  $b$  sont faibles devant la longueur d'onde  $\lambda$  du signal. Son domaine d'application s'étend de la mesure, aux télécommunications, et aux liaisons entre dispositifs hyperfréquence.

Une telle ligne se caractérise par des constantes linéiques résistance  $r$ , inductance  $L$ , conductance  $g$ , capacité  $C$ . Ces constantes dépendent des dimensions de la ligne, des paramètres physiques des matériaux qui la constituent.

Dans le cas du câble coaxial, le cylindre  $C_a$  achemine le courant-aller  $i(z, t)$  a priori orienté dans le sens des  $z$  croissants et le cylindre  $C_b$  achemine le courant-retour  $-i(z, t)$ .

Dans l'isolant diélectrique occupant l'espace inter-conducteurs de permittivité relative  $\epsilon_r$ , règne un champ électromagnétique :

$$\vec{E} = E(r, z, t)\vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{B} = B(r, z, t)\vec{e}_\theta.$$

Le champ électromagnétique cherché du type "onde progressive suivant  $\vec{e}_z$ ".

Pour la ligne bifilaire, un des fils achemine  $i(z, t)$  a priori orienté dans le sens des  $z$  croissants et l'autre fil achemine  $-i(z, t)$ . On peut en expliquer le fonctionnement par un modèle identique à celui du câble coaxial.

Le modèle de la ligne est fourni en figure (2).

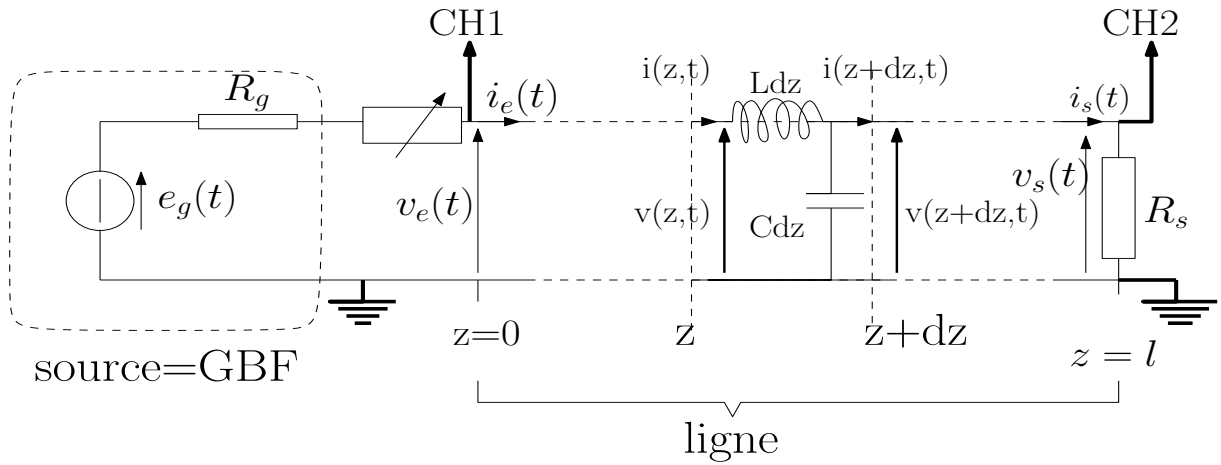


FIGURE 2 – Schéma équivalent à la ligne électrique alimentée par sa source et chargée par une résistance.

vide	$\epsilon_0 = 8.84 \times 10^{-12} \text{F.m}^{-1}$	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$
$a \approx 1.6 \text{mm}$	$b \approx 5 \text{mm}$	$LC = \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r$
mousse diélectrique :	$n = \sqrt{\epsilon_r}$	$\epsilon_r \approx 2$
valeurs constructeur	$C \approx 97 \text{pF.m}^{-1}$	$L \approx 0.23 \mu\text{H.m}^{-1}$
Cu	$\gamma = 5.9 \times 10^7 \text{S.m}^{-1}$	$c = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = 3 \cdot 10^8 \text{m.s}^{-1}$
ligne coaxiale : $R_c = 50 \Omega$	ligne bifilaire : $R_c = 100 \Omega$	

**Retrouver l'équation d'onde satisfaite par  $i(z, t)$  ou par la différence de potentiel  $v(z, t)$  entre cylindres/fils, sous forme :**

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

et **exprimer la célérité  $c_0$**  en fonction de l'inductance linéique  $L$  et de la capacité linéique  $C$  puis de la célérité de la lumière dans le vide  $c$  et de  $\epsilon_r$ .

## I. Calcul théorique de la célérité des ondes le long de la ligne

### 1. Capacité et inductance :

Soit un élément de volume, de type inter-cylindres  $[r; r + dr] \times [z; z + h]$ , pris dans l'isolant diélectrique où  $a < r < b$ . On admet que ce volume présente la capacité  $dC = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r 2\pi r h}{dr}$ .

i. Montrer que  $\frac{1}{hC} = \int_a^b \frac{1}{dC}$  puis exprimer  $C$ .

ii. On rappelle le théorème d'Ampère :

$$\oint_{P \in (\Gamma)} \vec{B}(P, t) \cdot \overrightarrow{PP'} = \mu_0 \times \iint_{M \in S(\Gamma)} \left[ \vec{j}_v(M, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M, t) \right] \cdot d\vec{S}(M)$$

En appliquant ce théorème le long d'un cercle de rayon  $r$ , centré en un point  $H(z)$  de l'axe  $Oz$ , et situé dans le plan de cote  $z$ , montrer que :  $B(r, z, t) = \frac{\mu_0 i(z, t)}{2\pi r}$ .

iii. En déduire le flux magnétique  $d^2\phi$  à travers une méso-section rectangulaire d'aire  $dz dr$  située à la distance  $r$  de l'axe, dans un plan méridien  $\theta = cte$ , de dimension radiale  $dr$  et de hauteur  $dz$  selon  $Oz$ .

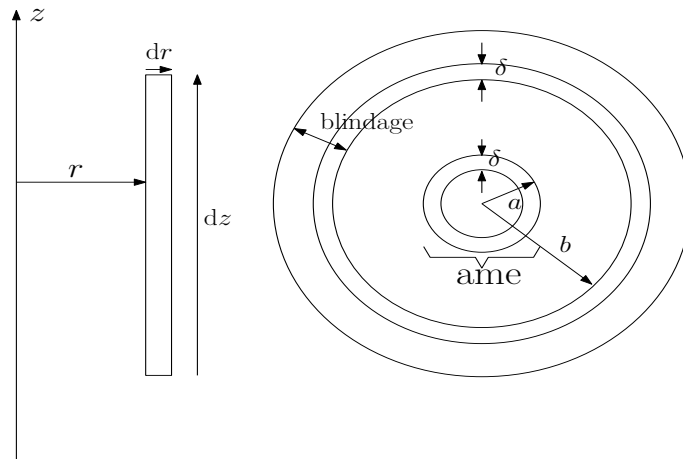


FIGURE 3 – Méso-surface pour le calcul d'un flux magnétique élémentaire (à gauche). Coupe du câble coaxial figurant l'épaisseur de peau.

iv. On écrit par définition :  $d^2\phi = (dL) dz i(z, t)$ . Exprimer  $dL$  puis, par intégration, l'inductance linéique du câble  $L$ .

v. Évaluer l'o.d.g de la capacité  $C_L$  du câble coaxial au  $LCR$ -mètre (on laisse la sortie ouverte). En déduire l'o.d.g. de la capacité linéique  $C$ . Commenter.

- vi. Évaluer l'o.d.g. de l'inductance totale du câble en fermant son extrémité par un court-circuit. En déduire l'o.d.g. de son inductance linéique  $L$ . Commenter.  
 RMQ : Pour faire un bon mesurage de  $L$  et  $C$ , il conviendrait d'abaisser la température du câble. Pourquoi ? En outre, les mesures de  $L$  et  $C$  par le LCR-mètre s'effectue en BF. Conclure.
- vii. Déduire des valeurs théoriques de  $L$  et  $C$ , la célérité des ondes le long de la ligne.

## 2. Résistance série de la ligne

Chacun des conducteurs est caractérisé par une résistance qui dépend du métal dont il est fait et de sa forme.

- i. Pour un fil métallique de section  $S$ , de longueur  $l$  et de conductivité  $\gamma$ , la résistance  $R$  est :

$$R = \frac{l}{\sigma \times S}$$

- ii. À fréquence  $f$ , le courant circule à la périphérie du fil dans une peau d'épaisseur  $\delta = \sqrt{\frac{1}{\gamma \mu_0 f}}$ .  
 Estimer  $\delta$  dans le cuivre pour  $f \approx 1\text{MHz}$ .

Si  $\delta \ll a$ , alors les sections utiles des conducteurs sont sensiblement de  $2\pi a\delta$  et  $2\pi b\delta$ .

En déduire que la résistance-série linéique du câble coaxial est :

$$r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0 f}{\gamma}} [1/a + 1/b].$$

- iii. La calculer et commenter sa valeur pour des conducteurs en cuivre à  $f = 100\text{kHz}$ . On la néglige par la suite.

## 3. Résistance caractéristique du câble

**Définition :**

c'est l'impédance en ligne  $R_c = \frac{v(z,t)}{i(z,t)}$  de l'OPPS(+) électrique, dont les grandeurs ondulatoires sont :

$$v(z,t) = V' \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c_0}\right)\right] \quad \text{et} \quad i(z,t) = I' \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c_0}\right)\right]$$

- i. Montrer qu'elle s'écrit :

$$R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

et la calculer numériquement pour la ligne. Une étiquette indique sa valeur pour le câble de la paillasse. Comparer.

Que vaut ce même rapport tension/courant pour une onde harmonique OPPS(-) régressant dans le sens des  $z$  décroissants ?

## II. Mesure de la résistance caractéristique :

### 1. Théorie : coefficient de réflexion en bout de ligne, en régime sinusoïdal :

si on alimente la ligne en tension sinusoïdale et si on la ferme à son extrémité en  $z = \mathcal{L}$ , sur une résistance  $R_s$ , alors :

— la tension  $\underline{v}(z, t)$  est la superposition des tensions des ondes incidente et réfléchie :

$$\begin{aligned}\underline{v}(z, t) &= \underline{v}_{(+)}(z, t) + \underline{v}_{(-)}(z, t) \\ &= \underline{V}' \exp \left\{ j \left[ \omega \left( t - \frac{z}{c_0} \right) \right] \right\} + \underline{V}'' \exp \left\{ j \left[ \omega \left( t + \frac{z}{c_0} \right) \right] \right\}\end{aligned}$$

— le courant  $\underline{i}(z, t)$  est la superposition des courants des ondes incidentes et réfléchies :

$$\begin{aligned}\underline{i}(z, t) &= \underline{i}_{(+)}(z, t) + \underline{i}_{(-)}(z, t) \\ &= \underline{I}' \exp \left\{ j \left[ \omega \left( t - \frac{z}{c_0} \right) \right] \right\} + \underline{I}'' \exp \left\{ j \left[ \omega \left( t + \frac{z}{c_0} \right) \right] \right\}.\end{aligned}$$

i. Quel est le lien entre  $\underline{I}'$ ,  $\underline{V}'$  et  $R_c$  ? Quel est le lien entre  $\underline{I}''$ ,  $\underline{V}''$  et  $R_c$  ?

ii. Le coefficient complexe de réflexion en tension à la sortie du câble est :

$$\underline{r}_s = \frac{\underline{V}''}{\underline{V}'}.$$

Comment s'exprime-t-il en fonction de  $R_c$ ,  $R_s$ ,  $\exp(-2j k \mathcal{L})$  où  $k = \frac{\omega}{c_0}$  ?

Monter que si l'on prend l'origine  $x = 0$  en bout de ligne, alors :

$$\underline{r}_s = \frac{R_s - R_c}{R_s + R_c}.$$

Que devient ce coefficient quand  $R_s = R_c$  ? Montrer que tout se passe comme si la ligne était infinie, quand on la ferme sur son impédance caractéristique.

iii. Comment obtient-on les cas  $r_s = 0$ ,  $r_s = -1$  et  $r_s = 1$  ?

On montre que le coefficient de réflexion en tension à l'entrée du câble (en  $x = 0$ ), pour une OPPS(-) est :

$$r_e = \frac{R_e - R_c}{R_e + R_c} \quad \text{avec} \quad R_e = R + R_g.$$

## 2. Manipulation

### i. Première méthode

Alimenter la ligne grâce au GBF arbitraire, par une **tension d'entrée en créneaux** de fréquence  $f \in [100\text{kHz} ; 5\text{MHz}]$ .

Adopter une résistance  $R$  telle que la résistance d'entrée  $R_e = R + R_g$  soit égale à la valeur de  $R_c$  donnée par le constructeur (l'impédance sera ainsi «adaptée» en entrée).

Fermer la ligne sur une résistance variable  $R_s$  (boîte de résistances à décades).

Visualiser à l'oscilloscope les tensions  $v_e(t)$  et  $v_s(t)$ .

En théorie, la forme d'onde de ces tensions n'est rigoureusement en créneaux (non entachée de marches d'escaliers) que pour  $R_s = R_c$ . Voir figure (4).

Vérifier expérimentalement la valeur-constructeur de  $R_c$ . Retrouver la valeur de  $L$ .

### ii. Deuxième méthode

Adapter l'impédance en entrée ( $R_e = R_c$ ). En extrémité de câble, fermé sur la résistance  $R_s$ , on a :  $v(\mathcal{L}, t) = v_{(+)}(\mathcal{L}, t) + v_{(-)}(\mathcal{L}, t)$ . Mesurer la valeur  $V_{seff0}$  de la tension efficace à l'extrémité, quand la ligne est ouverte ( $R_s \rightarrow \infty$ ).

Selon la loi  $\frac{V_{seff0}}{V_{seff}} = 1 + \frac{R_c}{R_s}$ , l'unique valeur de  $R_s$  pour laquelle  $V_{seff} = \frac{1}{2} V_{seff0}$  est  $R_s = R_c$ . Mesurer  $R_c$  pour une tension d'alimentation sinusoïdale. Conclure.

## III. Mesure de l'atténuation

Le câble est fermé sur une résistance  $R_s \rightarrow \infty$  et alimenté par **un train d'impulsions extra-fines, entièrement positif, de haute fréquence**.

On adapte l'impédance en entrée ( $R_e = R_c$ ).

Mesurer en  $x = 0$ , l'amplitude d'une impulsion incidente et de l'impulsion réfléchie qui lui correspond (après un aller-retour). Pour cela, visualiser la tension  $v_e(t)$  en  $x = 0$  (voir fig. 5). En déduire que l'OPPS(+) est en fait une pseudo-OPPS :

$$\underline{v}(z, t) = V' \exp(-\alpha z) \exp\{j[\omega t - k z]\}$$

et évaluer le coefficient d'atténuation  $\alpha$ . D'où viennent les pertes ?

#### IV. Mesure de célérité

On alimente la ligne avec une tension d'entrée en créneaux positifs (ou un train d'impulsions très fines, totalement positif) de haute fréquence. Pour rendre le créneau (ou le train d'impulsions) entièrement positif, on utilise la fonction offset du GBF.

On ferme la ligne sur  $R_s \rightarrow \infty$  et on l'adapte en entrée ( $R_e = R_c$ ).

1. Mesurer la durée  $2\tau$  nécessaire à un front de créneau (ou à l'impulsion) pour réaliser un aller-retour depuis l'entrée du câble, et en déduire  $c_0$ . Calculer alors  $\varepsilon_r$ .

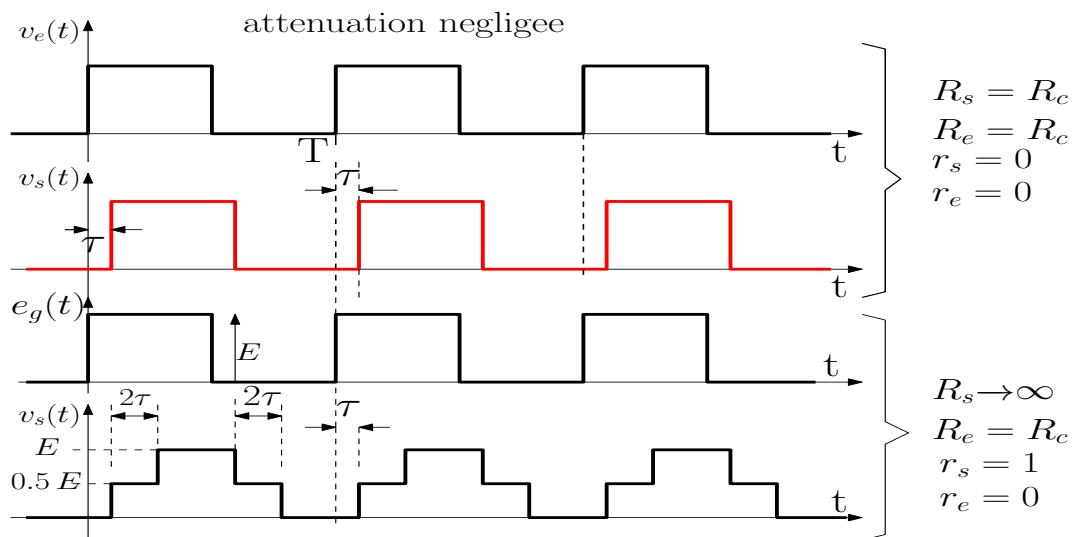


FIGURE 4 – Chronogrammes avec une tension d'entrée en créneaux, dans deux cas précis.

2. L'impulsion à l'arrivée est-elle étirée ? Sachant qu'en transformée de Fourier, le spectre d'une impulsion de largeur  $\tau$  est un sinus cardinal dont le pic principal est de largeur  $\frac{1}{\tau}$ , dire si le milieu est dispersif (si la vitesse de phase dépend de la pulsation et si une impulsion se déforme lors de la propagation).

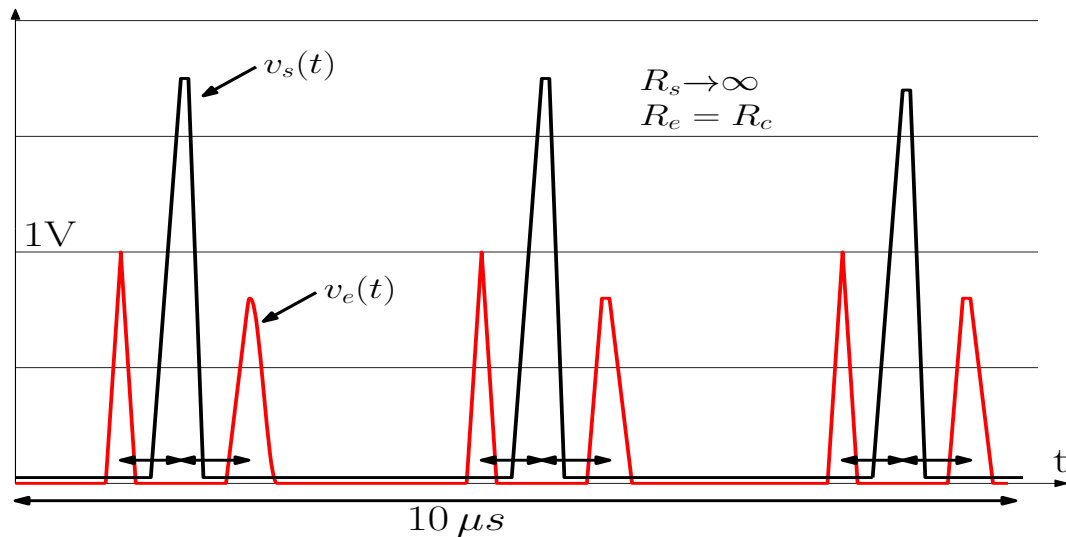


FIGURE 5 – Chronogrammes pour une tension d'alimentation en impulsions.

## V. Résonances du câble vu comme une cavité Fabry-Pérot

1. Entre le GBF d'alimentation et l'entrée du câble, intercaler en série une résistance de  $R = 10\text{k}\Omega$ . Exprimer l'impédance d'entrée en considérant que  $R \gg R_g$  et  $R \gg R_c$ .

À l'extrémité  $x = \mathcal{L}$  du câble, brancher simplement une voie d'entrée d'oscilloscope (résistance d'entrée  $1\text{M}\Omega$ ). Exprimer l'impédance de sortie. Alimenter le câble à l'aide d'une tension sinusoïdale.

L'onde de tension et l'onde de courant sont désormais stationnaires :

$$v(z, t) = V \sin(\omega t + \varphi) \sin(kz + \psi).$$

$$i(z, t) = I \sin(\omega t + \varphi') \sin(kz + \psi').$$

2. Rappeler la relation entre  $\omega$ ,  $k$  et  $c_0$ . Que vaut approximativement la valeur efficace du courant d'entrée et celle du courant de sortie de la ligne ? Appliquer les conditions aux limites en  $x = 0$  et en  $x=L$  et obtenir les modes propres stationnaires de ce système.

3. Chercher les fréquences  $f_n$  propres en détectant faisant varier la fréquence d'alimentation et en détectant les résonances à l'oscilloscope.

4. Pourquoi le câble constitue-t-il ici un résonateur ? Quelles sont les conditions aux limites ?



5. Quel est le rôle de la résistance  $R = 10\text{k}\Omega$  ? Justifier la valeur choisie.

6. En faisant varier la fréquence mesurer la vitesse de phase à diverses fréquences (on pourra monter jusqu'à plusieurs MHz).

7. Pour une fréquence de résonance donnée, calculer théoriquement la position des nœuds et des ventres de la tension  $v(z, t)$ .

8. Pour quelles fréquences le câble est-il demi-onde ( $\mathcal{L} = \frac{\lambda}{2}$ ), ou quart d'onde ( $\mathcal{L} = \frac{\lambda}{4}$ ) ?

Peut-on retrouver une mesure de  $c_0$  ?

9. Si on considère  $c_0$  comme bien connue, peut-on tracer une courbe  $k(\omega)$  et qualifier la dispersion ?

## VI. Adaptation d'impédance en sortie

On garde  $R = 10\text{k}\Omega$ , mais en sortie de câble, on branche en parallèle sur l'entrée de l'oscilloscope une résistance de  $R_s = R_c$ .

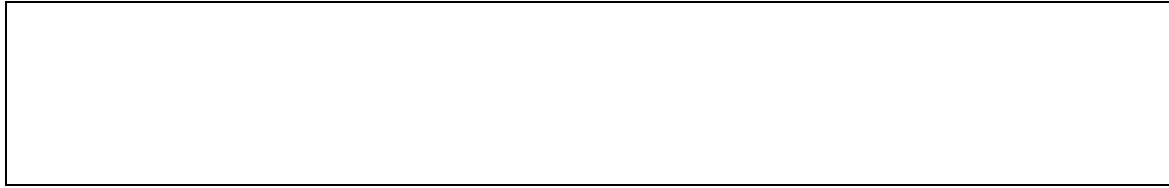
Balayer les fréquences et recommencer la détermination des modes propres. Conclure.

## VII. Structure des modes propres stationnaires d'un méga-câble

L'association en série de deux câbles coaxiaux de 100m est appelée un méga-câble.

Alimenter le méga-câble en tension sinusoïdale avec le GBF, en glissant une résistance de  $R = 10\text{k}\Omega$  en série entre les deux. Fermer l'association sur une résistance de charge infinie.

Mesurer à l'oscilloscope (résistance d'entrée  $1\text{M}\Omega$ ) les tensions efficaces  $V_{eff}(x = \mathcal{L}_1)$  à la jonction et  $V_{eff}(x = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)$  à l'extrémité libre.



Balayer les fréquences et exciter les différents modes propres du méga-câble en veillant pour chacun, à déceler le profil spatial en tension. On fera des schémas.