

TP- Couplage de circuits électriques par induction mutuelle.

Matériel à disposition :

- deux bobines d'inductance, de même nombre de spires, à connecter sur un noyau de fer doux,
- une pince ampère-métrique, capteur de courant inductif délivrant une tension $k \times i(t)$ proportionnelle au courant $i(t)$ mesuré,
- une sonde différentielle de tension,
- un ordinateur avec logiciels LATISPRO, Regressi, Python, Excel,
- une carte d'acquisition Sysam, un câble USB,
- un oscilloscope numérique,
- des multimètres numériques (A, V, Ω),
- un GBF arbitraire,
- un rhéostat beige de 33Ω ,
- des fils, des adaptateurs BNC/bananes.
- une clé USB amenée par l'étudiant(e).

I. Couplage de deux bobines carrées par un noyau de fer doux

Deux circuits électriques (C_1) et (C_2), contenant respectivement les bobines (B_1) et (B_2), parcourus par les courants respectifs $i_1(t)$ et $i_2(t)$, sont couplés par mutuelle induction des deux bobines.

Pour que le couplage soit intense, on accole les deux bobines l'une à l'autre, et on les ajuste autour d'un même noyau de fer, en respectant les branchements de la figure 1.

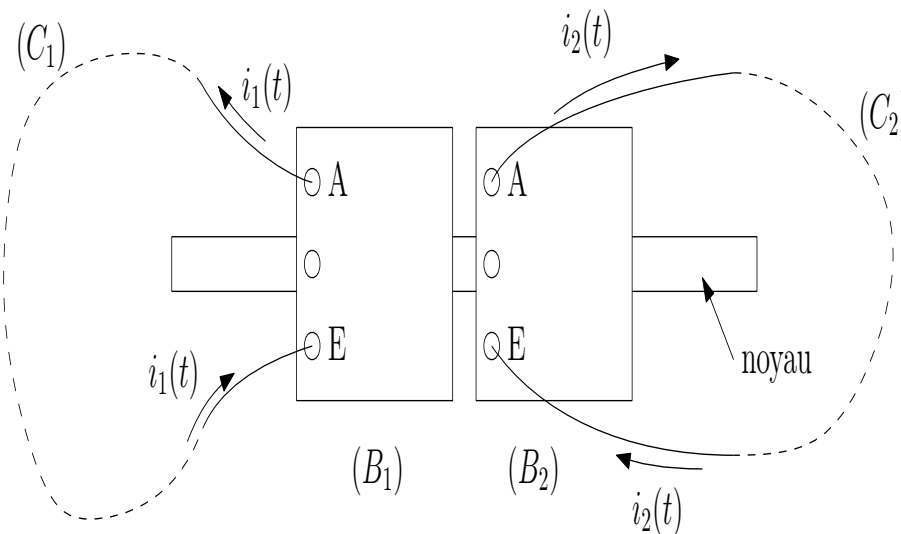


FIGURE 1 – Système de deux bobines connectées sur un même noyau : premières notions.

Notations des flux :

- $\Phi_{1 \rightarrow 1}(t)$ le flux (propre) du champ magnétique $\vec{B}_1(P, t)$ créé par le circuit (C_1) à travers les spires de (C_1),
- $\Phi_{1 \rightarrow 2}(t)$ le flux (mutuel) du champ magnétique $\vec{B}_1(P, t)$ créé par le circuit (C_1) à travers les spires de (C_2),
- $\Phi_{2 \rightarrow 2}(t)$ le flux (propre) du champ magnétique $\vec{B}_2(P, t)$ créé par le circuit (C_2) à travers les spires de (C_2),
- $\Phi_{2 \rightarrow 1}(t)$ le flux (mutuel) du champ magnétique $\vec{B}_2(P, t)$ créé par le circuit (C_2) à travers les spires de (C_1),
- $\Phi_1(t) = \Phi_{1 \rightarrow 1}(t) + \Phi_{2 \rightarrow 1}(t)$ le flux magnétique total à travers les spires de (C_1),
- $\Phi_2(t) = \Phi_{1 \rightarrow 2}(t) + \Phi_{2 \rightarrow 2}(t)$ le flux magnétique total à travers les spires de (C_2).

Lien entre les flux et les courants :

Le champ magnétique $\vec{B}_k(P, t)$ est proportionnel en tout point P, au courant $i_k(t)$ qui en est responsable. Il existe donc une matrice ($M_{2 \times 2}$) deux/deux, assurant le passage du vecteur-courant au vecteur-flux magnétique. On montre que cette matrice (des coefficients d'inductance) est symétrique, de coefficients diagonaux positifs et de déterminant positif :

$$(M_{2 \times 2}) = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad L_1 L_2 - M^2 > 0 \quad , \quad L_1 > 0 \quad \text{et} \quad L_2 > 0 .$$

Ainsi, le passage courants \rightarrow flux s'écrit-il :

$$\begin{bmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}$$

Le coefficient d'auto-inductance L_1 de la bobine (\mathcal{B}_1) - respectivement L_2 de la bobine (\mathcal{B}_2) - est strictement positif et ne dépend que de la géométrie (3D) de cette bobine.

Le coefficient de mutuelle inductance M des deux bobines est de signe quelconque. Sa valeur absolue résulte de la géométrie (3D) de l'ensemble des deux bobines et diminue avec leur distance relative.

Son signe est le résultat des sens d'orientation choisis sur les deux bobines. Il n'existe aucune convention d'orientation de ce couple de bobines, assurant à M d'être positif. Le signe de M n'a pas réellement de sens physique. Si on change l'orientation d'une des deux bobines, le sens de M change. Il reste inchangé si on change l'orientation des deux bobines à la fois.

Soit, le système d'équations algébriques linéaires :

$$\begin{bmatrix} \Phi_1(t) = \underbrace{L_1 i_1(t)}_{\Phi_{1 \rightarrow 1}(t)} + \underbrace{M i_2(t)}_{\Phi_{2 \rightarrow 1}(t)} \\ \Phi_2(t) = \underbrace{M i_1(t)}_{\Phi_{1 \rightarrow 2}(t)} + \underbrace{L_2 i_2(t)}_{\Phi_{2 \rightarrow 2}(t)} \end{bmatrix}$$

II. Système d'équations différentielles

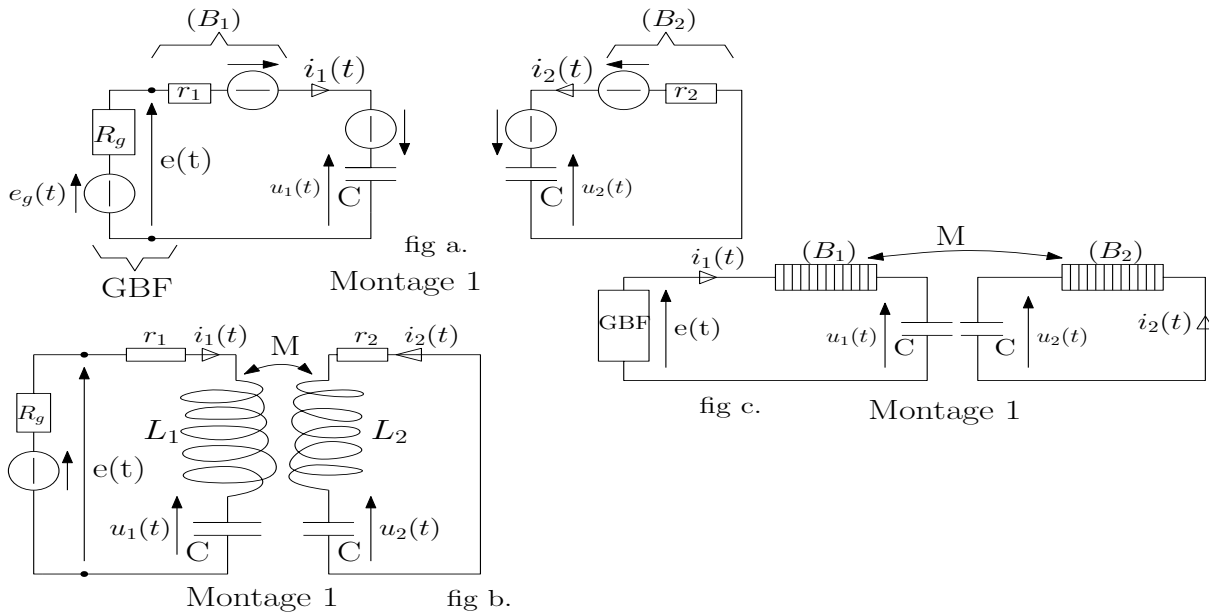


FIGURE 2 – Montage 1.

1. F.e.m d'induction propre et mutuelle

Les f.e.m. induites dans les bobines (\mathcal{B}_1) et (\mathcal{B}_2) sont respectivement :

$$\begin{bmatrix} e_1(t) = e_{11}(t) + e_{21}(t) \\ e_2(t) = e_{12}(t) + e_{22}(t) . \end{bmatrix}$$

En précisant la loi utilisée, exprimer ces deux f.e.m. à l'aide des coefficients d'inductance et des dérivées des courants. Compléter le schéma du montage 1 de la figure 2 (fig a.), en y indiquant les fem auto-induites (flèches horizontales) et mutuellement induites (flèches verticales).

Remarquer la **convention-générateur** pour les fem induites.

Une autres schématisation de ces fem est indiquée en (fig b). de la figure 2. Y remarquer la présence :

- d'un ressort pour indiquer chaque fem auto-induite,
- et celle d'une flèche arrondie à double sens pour schématiser les fem mutuellement induites dans chaque circuit.

2. Système d'équations couplées

En précisant l'approximation effectuée, établir le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} LC \frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 + MC \frac{d^2 u_2}{dt^2} = e(t) \\ LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} + u_2 + MC \frac{d^2 u_1}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

III. Résolution en régime sinusoïdal forcé

On pose : $e(t) = E \cos(\omega t)$; $u_1(t) = U_1 \cos(\omega t)$; $u_2(t) = U_2 \cos(\omega t)$.

- Montrer que :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{E(1-LC\omega^2)}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_{01}}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_{02}}\right)^2\right)} & U_2 = \frac{EMC\omega^2}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_{01}}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_{02}}\right)^2\right)} \\ \text{avec } \omega_{01} = \sqrt{1/C(L+M)} & \text{et } \omega_{02} = \sqrt{1/C(L-M)} \end{cases}$$

Les pulsations ω_{01} et ω_{02} sont appelées les *pulsations propres* du système.

- Que deviennent les amplitudes de $u_1(t)$ et $u_2(t)$, si l'on excite le système avec une tension $e(t)$ sinusoïdale de pulsation $\omega \in \{\omega_{01} ; \omega_{02}\}$? Quelle dénomination ce phénomène spectaculaire porte-t-il ?

- Comment les résistances r_1 et r_2 des bobines modifient-elles ce phénomène spectaculaire ?

IV. Expérience et mesures en régime sinusoïdal forcé : - Réaliser le montage 1 en prenant bien soin d'accoler les deux bobines et de respecter les sens de branchement comme indiqué sur la figure 1.

NE PLUS TOUCHER L'ENSEMBLE «BOBINES-NOYAU» JUSQU'À LA FIN DU TP.

- Modérer l'amplitude du signal $e(t)$ pour que sa valeur crête à crête soit de **1 Volt**.
- Visualiser les deux signaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$ à l'oscilloscope en veillant à relier la base de la tension $u_2(t)$ à la masse.
- Faire varier la fréquence f du signal $e(t)$ et repérer les deux fréquences de résonance.
- Mesurer ω_{01} et ω_{02} puis en déduire les mesures indirectes de L et M , ainsi que leurs incertitudes-types (que l'on justifiera soigneusement).
- Comparer la valeur de L indiquée sur chaque bobine. Expliquer les divergences s'il y en a.

V. Résolution en régime libre transitoire

1. Cas général

On adopte désormais $\forall t \in \mathbb{R} : e(t) = 0$ et on excite le système par une condition initiale à $t=0$, avant de le laisser entrer en oscillations libres.

On fait le changement de fonctions inconnues suivant :

$$s(t) = u_1(t) + u_2(t) \quad \text{et} \quad d(t) = u_1(t) - u_2(t)$$

En précisant les hypothèses faites, établir le nouveau système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_{01}^2 s = 0 \\ \frac{d^2 d}{dt^2} + \omega_{02}^2 d = 0 \end{cases}$$

Monter alors l'existence d'un quadruplet $(S, D, \varphi_s, \varphi_d)$ de constantes de $(\mathbb{R}_+^*)^2 \times [0, 2\pi[$ tel que :

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{1}{2} [S \cos(\omega_{01}t + \varphi_s) + D \cos(\omega_{02}t + \varphi_d)] \\ u_2(t) = \frac{1}{2} [S \cos(\omega_{01}t + \varphi_s) - D \cos(\omega_{02}t + \varphi_d)] \end{cases}$$

Donc, dans le cas général, le régime libre n'est pas sinusoïdal pur. Apparaît ce qu'on appelle un *phénomène de battements* : chaque tension $u_j(t)$ est une combinaison linéaire des deux modes propres du système : en effet, elle comporte une composante de pulsation ω_{01} (premier mode propre du système) et une composante sinusoïdale de pulsation ω_{02} (second mode propre du système).

2. Calcul des constantes dans deux cas particuliers de condition initiale

i. Condition initiale symétrique

On suppose que : $u_1(0) = u_2(0)$ et que $i_1(0) = i_2(0)$.

Exprimer les tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ pour toute date positive. Commenter.

ii. Condition initiale antisymétrique

On suppose que : $u_1(0) = -u_2(0)$ et que $i_1(0) = -i_2(0)$.

Exprimer les tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ pour toute date positive. Commenter.

VI. Expériences et mesures en régime libre

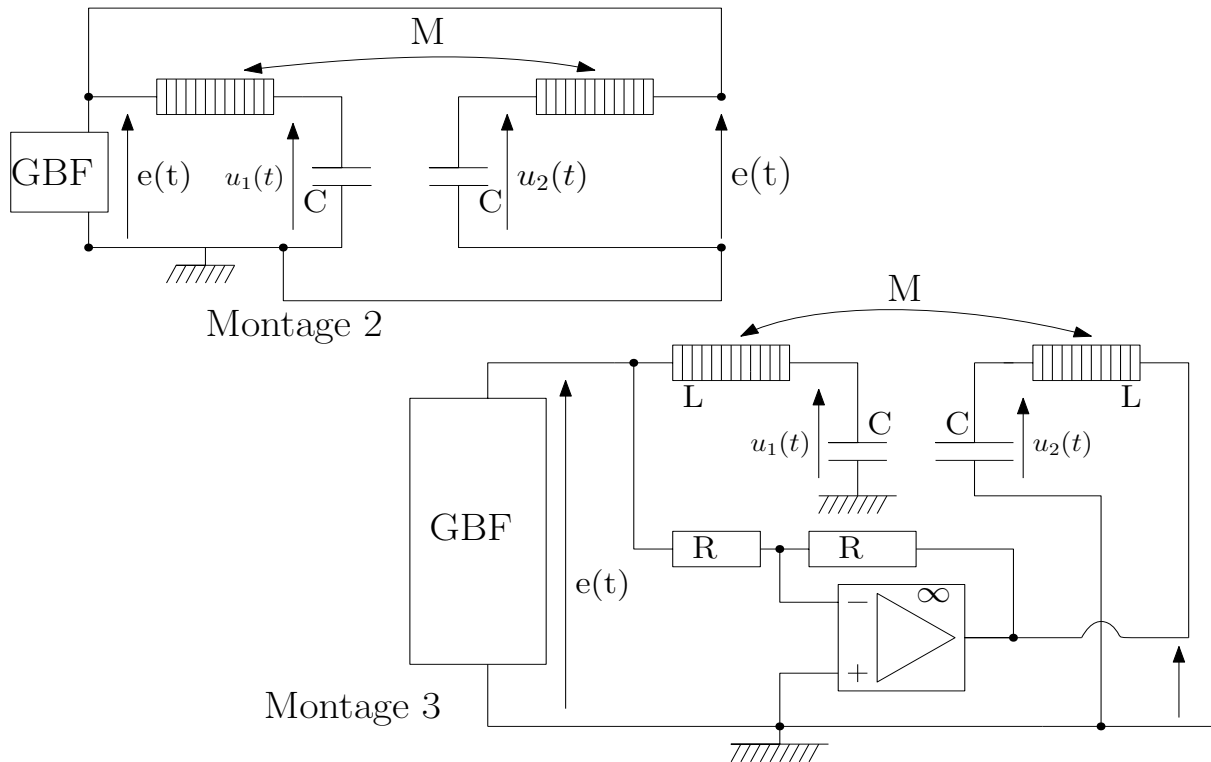


FIGURE 3 – Montages 2 et 3 d'étude du régime libre.

1. Montage 2

- Réaliser le montage 2 de figure 3, où $e(t)$ représente la tension délivrée par le GBF, choisie en créneaux de fréquence f ($f \in [30; 50]$ Hz).

Ainsi, allons-nous créer une succession de régimes transitoires pseudo-périodiques. Afin d'obtenir de belles courbes stables, veiller à ajuster le niveau de déclenchement du *trigger* de l'oscilloscope afin qu'il soit bien dans la plage des variations de $u_j(t)$.

- Justifier le choix d'une faible fréquence de $e(t)$. Pourquoi le régime n'est-il que pseudo-périodique et non pas sinusoïdal ?

- Quel mode propre a-t-on isolé dans ce cas ?

- Refaire une mesure de l'une des pulsations propres.

BONUS :

- trouver le système d'équations couplées auxquelles satisfont les fonctions $s(t)$ et $d(t)$ précédemment définies, sans négliger l'effet des résistances internes r_1 et r_2 des bobines, en les supposant toutes deux égales à une résistance r .
- résoudre ce système d'équations avant de revenir aux fonctions $u_1(t)$ et $u_2(t)$.
- une mesure de décroissement logarithmique permet-elle la mesure indirecte de r , connaissant L et C ?

2. Montage 3

- Réaliser le montage 3 de la figure 3, **sans déplacer l'ensemble « bobines-noyau »**.

- Quel mode propre a-t-on isolé dans ce cas ?

- Refaire une mesure de l'une des pulsations propres.

VII. Montage à deux sources sinusoïdales de fréquences différentes

On s'intéresse au montage 4 de la figure 4, dans lequel on utilise les deux voies de sortie du GBF arbitraire, pour générer les f.e.m de sources $\underline{e}_1(t) = \underline{E}_1 \exp(j\omega_1 t)$ et $\underline{e}_2(t) = \underline{E}_2 \exp(j\omega_2 t)$, sinusoïdales de fréquences f_1 et f_2 différentes.

1. Théorie

- Écrire le système d'équations couplées reliant les courants $i_1(t)$, $i_2(t)$ aux composants (inductances et résistances) et aux f.e.m. $e_1(t)$ et $e_2(t)$ excitatrices.

On cherche des solutions en formalisme complexe sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \underline{i}_1 = \underline{A}_1 \exp(j\omega_1 t) + \underline{B}_1 \exp(j\omega_2 t) \\ \underline{i}_2 = \underline{A}_2 \exp(j\omega_1 t) + \underline{B}_2 \exp(j\omega_2 t) \end{bmatrix}$$

- Écrire le système d'équations algébriques (SA4) reliant \underline{E}_1 , \underline{E}_2 , \underline{A}_1 , \underline{A}_2 , aux composants et aux pulsations excitatrices.

On admet les solutions suivantes :

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_1 = \underline{E}_1 \frac{(j\omega_1 L_2 + r_2)}{(j\omega_1 L_1 + r_1)(j\omega_1 L_2 + r_2) + M^2 \omega_1^2} & \underline{B}_1 = \underline{E}_2 \frac{-(jM\omega_2)}{(j\omega_2 L_1 + r_1)(jL_2 \omega_2 + r_2) + M^2 \omega_2^2} \\ \underline{A}_2 = \underline{E}_1 \frac{-(jM\omega_1)}{(j\omega_1 L_1 + r_1)(jL_2 \omega_1 + r_2) + M^2 \omega_1^2} & \underline{B}_2 = \underline{E}_2 \frac{(jL_1 \omega_2 + r_1)}{(j\omega_2 L_1 + r_1)(jL_2 \omega_2 + r_2) + M^2 \omega_2^2} \end{bmatrix}$$

- Commenter la symétrie du problème. Que deviennent ces solutions si l'on néglige les résistances ?

2. Expérience

- Réaliser le montage 4 **sans bouger le couple des bobines sur le noyau**.

- Observer les intensités avec la pince ampèremétrique, et les tensions aux bornes des bobines avec la sonde différentielle de tension, pour divers couples de fréquences (f_1 , f_2). Les commenter.

- Peut-on réaliser à l'aide de ce montage, le bruitage d'un signal basse fréquence par un signal haute-fréquence ?

- Que se passe-t-il si $f_1 \approx f_2$? Peut-on alors mesurer précisément la différence des deux fréquences excitatrices, et si oui comment ?

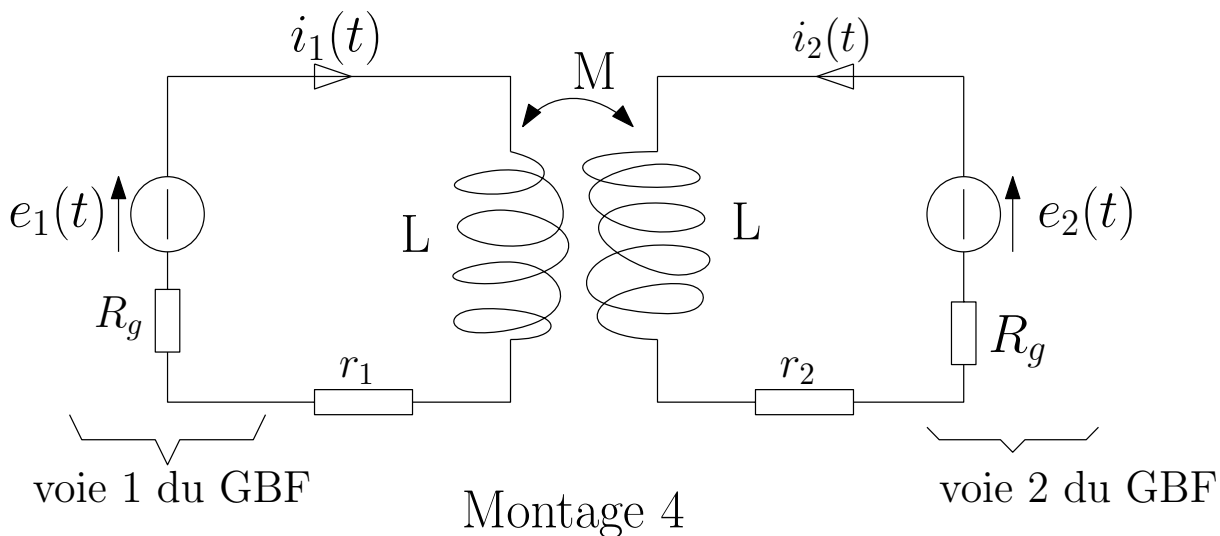


FIGURE 4 – Montage à deux sources de fréquences différentes.