Compte rendu de TP

Diffusion de charge le long d'une ligne électrique (R,C)

Tom SALES

20 décembre 2023

Sommaire

Liste des figures

1 Introduction

Le but de ce TP est l'étude de la diffusion de charge électrique sur une ligne électrique de 20 cellules (R,C). Cette expérience est analogue à celle de la diffusion thermique le long d'une barre solide ca- lorifugée, placée hors d'équilibre thermique par des conditions aux limites constantes ou variables.

On considèrera une ligne de 20 cellules (R,C), espacées de $a = 7mm$

Les composants auront les valeurs suivantes :

- $R = 1000\Omega$
- $C = 100nF$

Ci dessous voici une photo suivie d'un schéma de la ligne utilisée

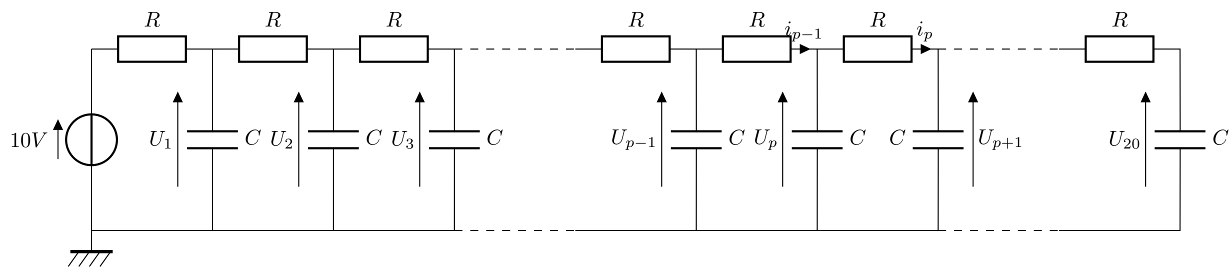

Figure 1: Ligne en régime stationnaire

2 Première étude théorique de la méthode

2.1 Equations vérifiées par $U_p(t)$ et par $I_p(t)$

En appliquant la loi des mailles à la cellule numéro p, on obtient une première relation entre les tensions

Relation entre les tensions

$$U_p = U_{p+1} + RI_{p+1} \tag{1}$$

En appliquant la loi des noeuds à la cellule numéro p, on obtient une relation entre les courants

Relation entre les courants

$$I_p = I_{p+1} + C\frac{\partial U_{p+1}}{\partial t} \tag{2}$$

2.2 Passage au modèle continu

Remarque :Pour passer du modèle discontinu au modèle continu, on définit l'abcisse $x = pa$ et les 3 fonctions suivantes :

- $(x,t) \longrightarrow U(x,t)$
- $(x,t) \longrightarrow Q(x,t)$
- $(x,t) \longrightarrow I(x,t)$

Dans notre cas, on a donc:

- $\forall p \in [0,20], U(x,t) = U(pa,t) = U_p(t)$
- $\forall p \in [0,20], Q(x,t) = Q(pa,t) = Q_p(t)$
- $\forall p \in [0,20], I(x,t) = I(pa,t) = I_p(t)$

Par un développement Taylor de $U(x+a,t) = U_p(t)$, à l'ordre 1, on relie les fonctions du modèle continu relatives aux tensions

$$\boxed{U(x+a,t) = U(x,t) + a\frac{\partial U}{\partial x}(x,t)} \quad (3)$$

De meme, on obtient une relations entre les fonction continues relatives aux courants en développant $I(x+a,t)$ à l'ordre 1

$$\boxed{I(x+a,t) = I(x,t) + a\frac{\partial I}{\partial x}(x,t)} \quad (4)$$

2.3 Etablissement de l'équation d'onde

D'après l'equation (1) et l'equation (3),

$U(x+a,t) - U(x,t) = a\frac{\partial U}{\partial x}(x,t) = -RI(x+a,t) \approx -RI(x,t)$

D'après les equations (2) et (4), $I(x+a,t) - I(x,t) = a\frac{\partial I}{\partial x}(x,t) = -C\frac{\partial U}{\partial t}(x+a,t) \approx -C\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)$

Finalement, on obtient les relations suivantes

$$a\frac{\partial I}{\partial x}(x,t) = -C\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) \tag{5}$$

$$a\frac{\partial U}{\partial x}(x,t) = -RI(x,t) \tag{6}$$

On peut maintenant déterminer l'equation d'onde grâce aux equations (5) et (6)

On peut maintenant déterminer l'equation d'onde grâce aux equations (5) et (6)

En dérivant (6), on obtient

$$a\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x}(x,t) = -R\frac{\partial I}{\partial x}(x,t) \tag{7}$$

On remplace $\frac{\partial I}{\partial x}(x,t)$ dans (7) avec (5), alors

$$a^2\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x}(x,t) = RC\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) \tag{8}$$

Ce qui donne l'equation d'onde recherchée

$$D\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x}(x,t) = \frac{\partial U}{\partial t}(x,t) \tag{9}$$

$$D = \frac{a^2}{RC} \tag{10}$$

Application numérique : $\boxed{D = 0.49m^2.s^{-1}}$

Remarque : *Ce n'est pas l'équation de d'Alembert mais une equation de diffusion*

On peut remarquer que l'on obtient la meme équation que l'équation de la diffusion thermique à une dimension, qui régit l'évolution de la température au sein d'un barreau cylindrique homogène de métal, calorifugé sur son manchon

$$D_{th}\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x}(x,t) = \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) \tag{11}$$

Où D_{th} est le coefficient de diffusion thermique du milieu

3 Experiences en régime stationnaire

3.1 Théorie

On applique à l'entrée de la ligne une tension continue $U_0 = 10V$ à l'aide d'une alimentation stabilisée, et on met la sortie de la ligne en court circuit par un fil positionné en $p = 20$ ($U_{20} = 0V$)

Comme la tension d'entrée est continue, les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts, on obtient donc le schéma suivant

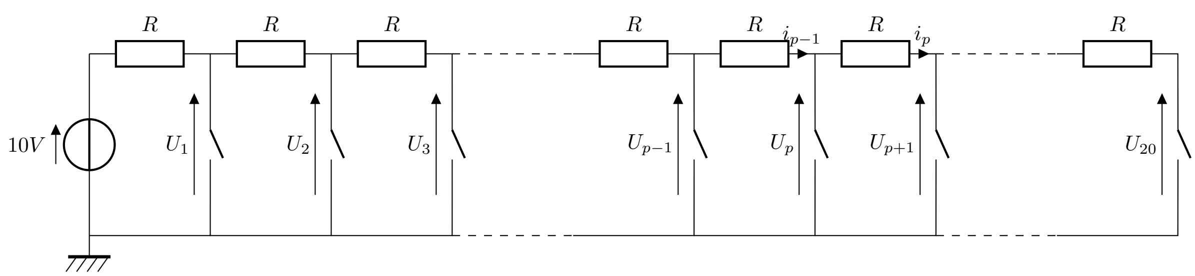

Figure 2: Ligne en régime stationnaire

Grace à plusieurs ponts diviseurs de tension succesifs, on obtient la relation entre U_p, p et U_0

Relation théorique entre U_p , p et U_0

$$U_p = U_0(1 - \frac{p}{20}) \tag{12}$$

3.2 Experience

On mesure $U_0 = 10.057V$ grâce à un voltmètre et $I_0 = 97mA$ grâce à un ampèremètre.

On en déduit la résistance de la ligne de cellules vue de l'entrée : $\boxed{R_{entree} = 103.7\Omega}$

Nous mesurons maintenant différentes valeurs de U_p, repertoriées dans le tableau ci-dessous

p	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
U_p (V)	9.025	8.015	7.009	6.001	5.004	4.004	2.997	1.998	1.007	0.000

Table 1: Mesure de U_p pour différentes valmeurs de p

A l'aide du programme python présent en annexe 2, on obtient une courbe affine et sa régression linéaire. Le coefficient de corrélation est de 0.999996 et est dont tres proche de 1, la régression linéaire est donc licite et de bonne qualité.

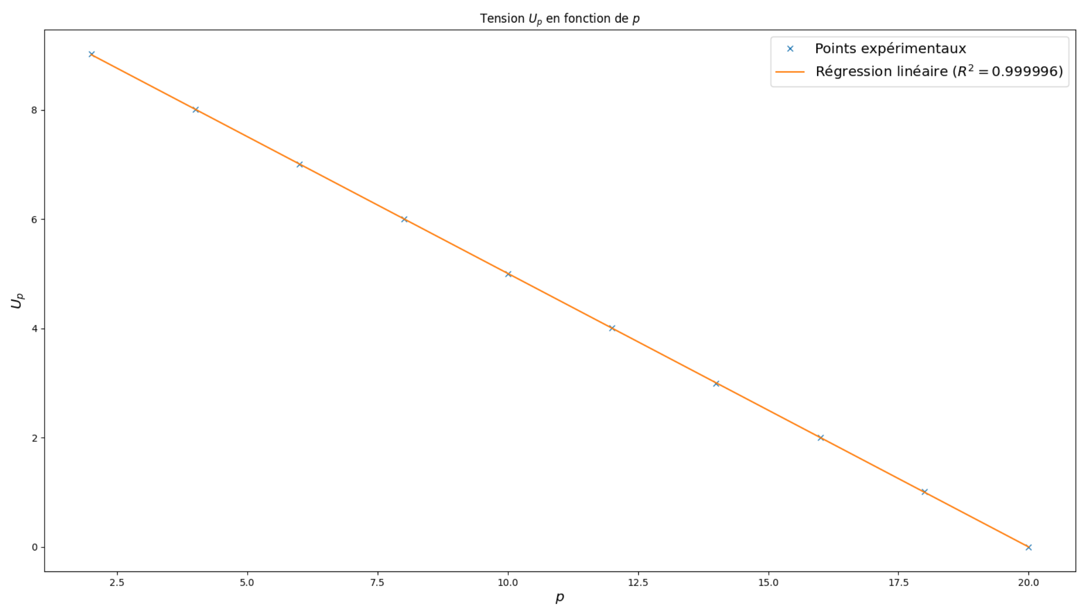

Figure 3: Tracé des points expérimentaux et de la régression linéaire

On peut maintenant comparer théorie et experience

En théorie, $\boxed{U_p = 10.057 - 0.5028p}$

En pratique, on obtient grâce au code python $\boxed{U_p = 10.017 - 0.5010p}$

On peut calculer l'ecart relatif sur l'ordonnée à l'origine et la pente obtenues

	Pente	Ordonnée à l'origine
Valur calculée	-0.5028	10.057
Valeur expérimentale	-0.5010	10.017
Ecart relatif (pourcentage)	3.58×10^{-3}	3.98×10^{-3}

Table 2: Mesure de U_p pour différentes valeurs de p

On retrouve donc bien quelque chose de très proche du modèle calculé grâce à l'experience (Les écarts relatifs sont proches de 0)

4 Experience en régime sinusoidal établi

4.1 Théorie

On impose une tension $U_0(t) = Ecos(\omega t)$ et on laisse la **sortie ouverte**

Remarque : La sortie est ouverte donc l'onde est réfléchie sur la sortie en p = 20

On recherche une solution de type $OPPS^*$ de la forme $\underline{U}(x,t) = Eexp(j(\omega t - \underline{k}x))$, où

$\underline{k} = k_1 + jk_2$

En injectant cette expression dans l'equation d'onde (11), on obtient la relation de dispersion de $k(\omega)$

Relation de dispersion

$$k(\omega) = \sqrt{\frac{\omega}{2D}} - j\sqrt{\frac{\omega}{2D}} \tag{13}$$

En remplaçant dans l'expression de $\underline{U}(x,t)$, on obtient

$$\boxed{\underline{U}(x,t) = Eexp(-\sqrt{\tfrac{\omega}{2D}}x)exp(j(\omega t - \sqrt{\tfrac{\omega}{2D}}x))}$$

On dégage de cette expression une profondeur de pénétration notée $\delta(\omega)$, et on peut repasser en formalisme réel pour obtenir l'expression de $u(x,t)$

Expresion de l'$OPPS^*$

$$u(x,t) = Eexp(-\delta(\omega)x)cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}x) \tag{14}$$

Où $\delta(\omega) = \sqrt{\frac{\omega}{2D}}$

On repasse maintenant au modèle discret (rappelons que dans ce modèle, on a posé $x = pa$

On injecte dans (14) l'expression de D avec (10) où on pose $RC = \tau$

Alors $u(x,t) = Eexp(-\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}\frac{x}{a})cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}\frac{x}{a})$

Avec le modèle discret ($p = \frac{x}{a}$), on obtient donc l'expression de U_p

Expresion de $U_p(t)$

$$U_p(t) = Eexp(-\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}p)cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}p) \quad (15)$$

On pose maintenant $U_p(t) = A_p cos(\omega(t - \frac{pa}{v_\varphi}))$

On peut exprimer A_p et v_φ grace à l'expression précédente de $U_p(t)$

On déduit directement

$$\boxed{A_p = Eexp(-\sqrt{\tfrac{\omega\tau}{2}}p)}$$

De plus $\frac{pa}{v_\varphi} = p\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}$

Donc

$$\boxed{v_\varphi = a\sqrt{\tfrac{2}{\omega\tau}}}$$

Finalement

$$v_\varphi = a\sqrt{\frac{2}{\omega\tau}} \quad (16)$$

$$A_p = Eexp(-\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}p) \quad (17)$$

Remarque : Vitesse du groupe :

On peut calculer la vitesse de groupe de manière théorique. Par définition, $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k_1}$

On différencie l'expression $k_1^2 = \frac{\omega}{2D}$ pour obtenir v_g

Expresion de v_g

$$v_g = 4D\sqrt{\frac{\omega}{2D}} \quad (18)$$

Application numérique : $\boxed{v_g = 28.0 m.s^{-1}}$

4.2 Experience

On applique en entrée un signal sunusoidal de fréquence $f = 100Hz$ et d'amplitude $7.5V$

On mesure ensuites les valeurs de A_p et de du retard Δt_p pour différentes valeurs de p et on les regoupe dans le tableau ci dessous

p	0	1	2	4	6	8	10	12
A_p (V)	15.5	12.9	10.7	7.6	5.2	3.8	2.8	2.0
Δt_p (μs)	20	331.2	620	1205.6	1775.2	2361.6	2993.6	3645.6

Table 3: Mesure de A_p et de Δt_p pour différentes valmeurs de p

On peut déduire τ par deux méthodes : en utilisant le retard ou l'amplitude

4.2.1 Détermination de τ avec les amplitudes A_p

On peut isoler τ dans l'expression de A_p

$$\boxed{ln(\frac{A_p}{E}) = -\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}p}$$

Le code python en annexe 4 trace $ln(\frac{A_p}{E}) = f(p)$ et effectue une regression linéaire.

Voici ci-dessous le résultat du code python

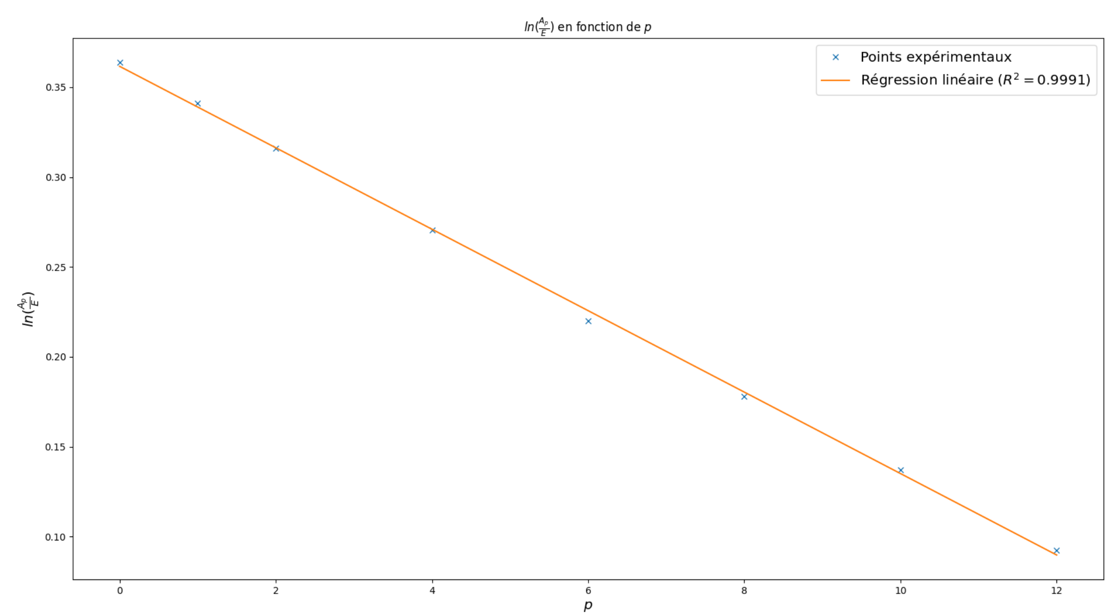

Figure 4: $ln(\frac{A_p}{E})$ en fonction de p

Le coefficient de corrélation est de 0.991 et est dont tres proche de 1, la régression linéaire est donc **licite et de bonne qualité**.

Le code python donne la pente de la régression linéaire : $\kappa = -0.0226$

Avec la formule démontrée précédemment,

$$\boxed{\tau = \frac{2\kappa^2}{\omega}}$$

Application numérique : $\boxed{\tau_{exp} = 1.62 \times 10^{-6} s}$

Or en théorie, $\tau = RC$

Application numérique : $\boxed{\tau_{theo} = 10^{-4} s}$

Cette valeur est éloignée de la théorie, ce qui peut etre dû à une erreur de manipulation ou de report des résultats

4.2.2 Détermination de τ avec les retards Δt_p

On peut isoler τ dans l'expression de Δ_p On sait que $\varphi_p = \sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}$ et $\varphi_p = \frac{2\pi\Delta t_p}{T}$

Alors

$$\boxed{\Delta t_p = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}} p}$$

Le code python en annexe 5 trace $\Delta t_p = f(p)$ et effectue une regression linéaire.

Voici ci-dessous le résultat du code python

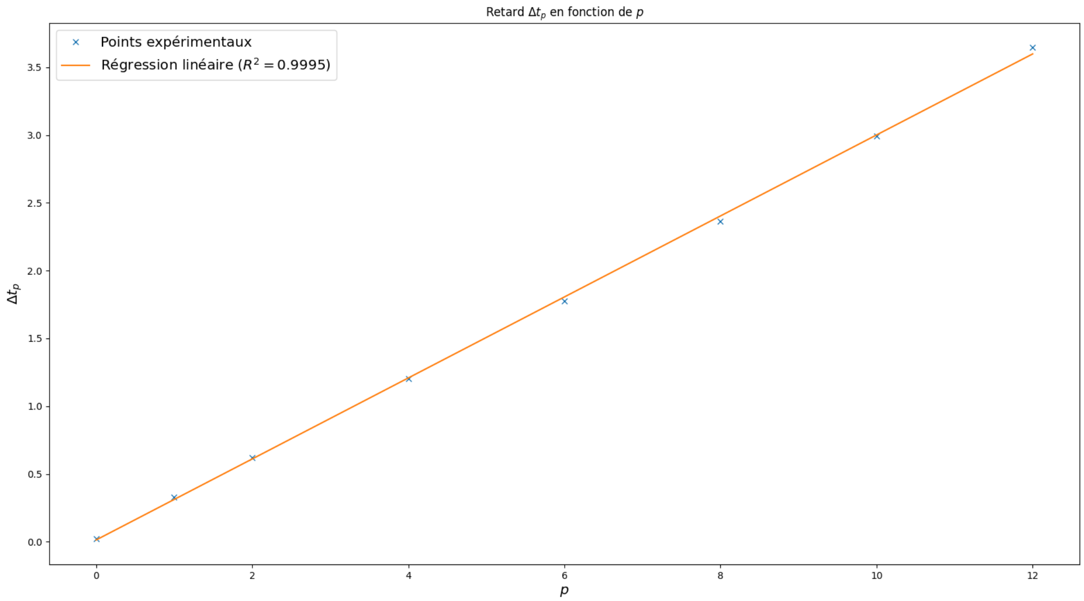

Figure 5: Δt_p en fonction de p

Le coefficient de corrélation est de 0.9995 et est dont tres proche de 1, la régression linéaire est donc **licite et de bonne qualité**.

Le code python donne la pente de la régression linéaire : $\alpha = 0.299$

Application numérique : $\boxed{\tau_{exp} = 1.12 \times 10^{-6}}$

Cette valeur est éloignée de la théorie, ce qui peut etre dû à une erreur de manipulation ou de report des résultats

5 Réponse à une impulsion

À l'aide du générateur arbitraire, créer une impulsion de tension située entre $0V$ et $10V$ (on ajoute un offset de $5V$), de largeur $100s$ et de fréquence $f = 100Hz$. La sortie reste ouverte.

Figure 6: Ecran du GBF pour envoyer une impulsion de tension

On observe maintenant la tension $U_5(t)$

Cette tension est distordue et l'impulsion est élargie, représentant le phénomène de dispersion.

On écrit une impulsion comme un paquet d'ondes de type OPPS*

$$\boxed{U(x,t) = \int_{\omega-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega+\frac{\Delta\omega}{2}} E(\omega)exp(j[\omega t - \underline{k}x + \varphi(\omega)])d\omega}$$

Dans un milieu peu absorbant, on définit la vitesse de groupe par

$$\boxed{v_g(\omega) = (\frac{\partial\omega}{\partial k_1})(\omega)}$$

On mesure le retard de U_5 sur U_0 : $\Delta t_5 = 460\mu s$ On mesure la longeuer de 5 cellules : $L = 35mm$

Finalement, $\boxed{v_g = \frac{L}{\Delta t_5 - \Delta t_0}}$

Application numérique : $\boxed{v_g = 79m.s^{-1}}$ On peut calculer l'ecart relatif avce la valeur théorique calculée plus tot dans ce compte rendu.

$$\boxed{\text{Ecart relatif : 75 \%}}$$

Cet écart relatif es très grand, cette mesure de vitesse de groupe est donc très peu précise

6 Conclusion

Les méthodes de mesure de τ n'ont pas été concluantes car éloignées de la théorie.

La méthode de mesure de v_g est aussi éloignée de la valeur attendue.

Les valeurs mesurées en régime stationnaire sont cependant tres proches des valeurs attendues, ces méthodes de mesure sont donc très concluantes.

7 Annexes

7.1 Fonction "r_{carre}"

```
import numpy as np

def r_carre(valeurs_mesurees,valeurs_predites):
    somme1, somme2 = 0,0
    moyenne = np.mean(valeurs_mesurees)
    for k in range(len(valeurs_mesurees)):
        somme1 += (valeurs_mesurees[k]-valeurs_predites[k])**2
        somme2 += (valeurs_mesurees[k]-moyenne)**2
    return float(1-(somme1/somme2))
```

Figure 7: Fonction python "r_{carre}"

7.2 Traitement de l'experience en régime stationnaire

```python
from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from fonctions import *

#Données

p = [2,4,6,8,10,12,14,16,18,20]
U_p = [9.025,8.015,7.009,6.001,5.0040,4.0042,2.9968,1.9986,1.007,0.0004]

#Regressions
parametres = np.polyfit(p, U_p, 1)

Regression = [parametres[0]*p[k] + parametres[1] for k in range(len(p))]

#Correlation
R_carre = np.round(r_carre(U_p, Regression),6)

#Tracés
plt.figure("DC")

plt.title("Tension $U_p$ en fonction de $p$")

plt.plot(p,U_p,"x", label = "Points expérimentaux")
plt.plot(p, Regression, label = f"Loi prédite ($R^2 = {R_carre}$)")

plt.xlabel("$p$", size = "x-large")
plt.ylabel("$U_p$", size = "x-large")
plt.legend(fontsize = "x-large")

plt.show()
```

Figure 8: Traitement de l'experience en régime stationnaire

7.3 Traitement de l'experience en régime sinusoidal (retard)

```
from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from fonctions import *

#Données
p = [0,1,2,4,6,8,10,12]
retard_p = [0.020,0.3312,0.620,1.2056,1.7752,2.3616,2.9936,3.6456]

#Regressions
parametres = np.polyfit(p, retard_p,1)

Regression = [(parametres[0]*p[k] + parametres[1]) for k in range(len(p))]

#Correlation
R_carre = np.round(r_carre(retard_p, Regression),4)

#Tracés
plt.figure("AC retard")
plt.title("Retard $\Delta t_p$ en fonction de $p$")
plt.plot(p,retard_p,"x", label = "Points expérimentaux")
plt.plot(p, Regression, label = f"Loi prédite ($R^2 = {R_carre}$)")
plt.xlabel("$p$", size = "x-large")
plt.ylabel("$\Delta t_p$", size = "x-large")
plt.legend(fontsize = "x-large")
plt.show()
```

Figure 9: Traitement de l'experience en régime sinusoidal (retard)

7.4 Traitement de l'experience en régime sinusoidal (amplitude)

```python
from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from fonctions import *

#Données

p = [0,1,2,4,6,8,10,12]
Amplitude = [15.3,12.9,10.7,7.6,5.2,3.8,2.8, 2.0]
E = 15

#Regressions
parametres = np.polyfit(p, np.divide(np.log(Amplitude),15),1)

Regression = [(parametres[0]*p[k] + parametres[1]) for k in range(len(p))]

#Correlation
R_carre = np.round(r_carre(np.divide(np.log(Amplitude), 15), Regression),4)

#Tracés
plt.figure("AC amplitude")
plt.title("$ln(\\frac{A_p}{E})$ en fonction de $p$")
plt.plot(p, np.divide(np.log(Amplitude),15), "x", label = "Points expérimentaux")
plt.plot(p, Regression, label = f"Régression linéaire ($R^2 = {R_carre}$)")
plt.xlabel("$p$", size = "x-large")
plt.ylabel("$A_p$", size = "x-large")
plt.legend(fontsize = "x-large")
plt.plot()
plt.show()
```

Figure 10: Traitement de l'experience en régime sinusoidal (amplitude)