

TP 7 : Couplage de circuits électriques par induction mutuelle

Térence Marchi, Anycia Raulet

I Couplage de deux bobines carrées par un noyau de fer doux

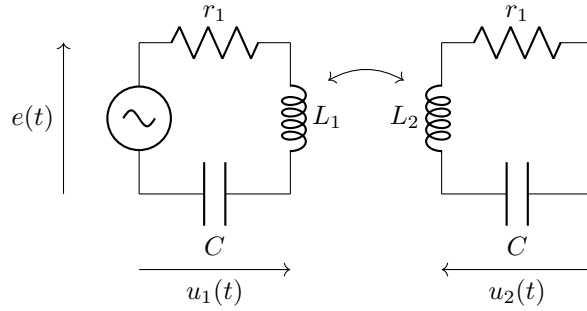


Figure 1: Montage de mutuelle inductance

On applique la loi des mailles sur les deux circuits distincts et on obtient :

$$\begin{cases} r_1 i(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} + u_1(t) = e(t) \\ r_2 i(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} + u_2(t) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} r_1 C u_1(t) + L_1 C \frac{du_1(t)}{dt} + M C \frac{du_2(t)}{dt} + u_1(t) = e(t) \\ r_2 C u_2(t) + L_2 C \frac{du_2(t)}{dt} + M C \frac{du_1(t)}{dt} + u_2(t) = 0 \end{cases}$$

Avec $r_1 \ll 1$, $r_2 \ll 1$, et $L_1 = L_2 = L$ car nous avons deux fois la même bobine et on néglige en premier lieu les résistances internes.

$$\iff \begin{cases} LC \frac{du_1(t)}{dt} + MC \frac{du_2(t)}{dt} + u_1(t) = e(t) \\ LC \frac{du_2(t)}{dt} + MC \frac{du_1(t)}{dt} + u_2(t) = 0 \end{cases}$$

En faisant la somme et la différence des deux lignes on obtient en appelant $s(t) = u_1 + u_2$ et $d(t) = u_1 - u_2$:

$$\iff \begin{cases} LC \ddot{s}(t) + MC \ddot{s}(t) + s(t) = e(t) \\ LC \ddot{d}(t) - MC \ddot{d}(t) + d(t) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (LC + MC) \ddot{s}(t) + s(t) = e(t) \\ (LC - MC) \ddot{d}(t) + d(t) = 0 \end{cases}$$

Ainsi en posant $\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{C(L+M)}}$ et $\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{C(L-M)}}$:

$$\iff \begin{cases} \ddot{s}(t) + \omega_{01}^2 s(t) = \omega_{01}^2 e(t) \\ \ddot{d}(t) + \omega_{02}^2 d(t) = \omega_{02}^2 e(t) \end{cases}$$

En régime sinusoïdal forcé on pose $e(t) = E \cos(\omega t)$, $u_1(t) = U_1 \cos(\omega t)$ et $u_2(t) = U_2 \cos(\omega t)$ cela nous donne :

$$\iff \begin{cases} -(U_1 + U_2)\omega^2 \cos(\omega t) + \omega_{01}^2(U_1 + U_2) \cos(\omega t) = \omega_{01}^2 E \cos(\omega t) \\ -(U_1 - U_2)\omega^2 \cos(\omega t) + \omega_{02}^2(U_1 - U_2) \cos(\omega t) = \omega_{02}^2 E \cos(\omega t) \end{cases} \iff \begin{cases} -(U_1 + U_2)\omega^2 + \omega_{01}^2(U_1 + U_2) = \omega_{01}^2 E \\ -(U_1 - U_2)\omega^2 + \omega_{02}^2(U_1 - U_2) = \omega_{02}^2 E \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} U_1 + U_2 = \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{01}^2 - \omega^2} E \\ U_1 - U_2 = \frac{\omega_{02}^2}{\omega_{02}^2 - \omega^2} E \end{cases} \iff \begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{01}^2}{\omega_{01}^2 - \omega^2} + \frac{\omega_{02}^2}{\omega_{02}^2 - \omega^2} \right) E \\ U_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{01}^2}{\omega_{01}^2 - \omega^2} - \frac{\omega_{02}^2}{\omega_{02}^2 - \omega^2} \right) E \end{cases}$$

Ainsi tous calculs faits, on obtient :

$$U_1 = \frac{(1 - LC\omega^2)E}{(1 - (\frac{\omega}{\omega_{01}})^2)(1 - (\frac{\omega}{\omega_{02}})^2)}$$

$$U_2 = \frac{MC\omega^2 E}{(1 - (\frac{\omega}{\omega_{01}})^2)(1 - (\frac{\omega}{\omega_{02}})^2)}$$

Nous pouvons observer les phénomènes de résonance dès lors que ω approche sensiblement ω_{01} ou ω_{02} . On remarque que selon la théorie nous devrions avoir une tension qui tend vers l'infini lors de la résonance ce qui n'est pas le cas sur les chronogrammes. En effet, nous avons négligé l'influence des résistances internes aux bobines qui sont la cause de cette modification.

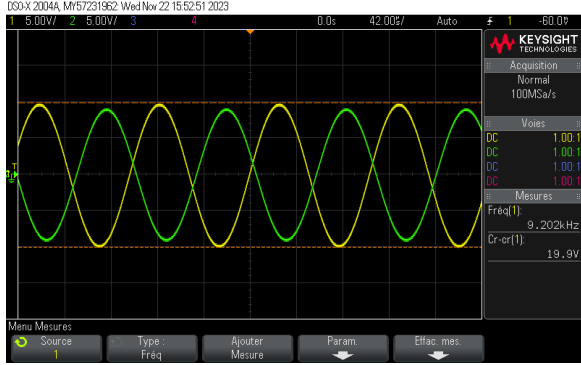


Figure 2: première résonance, $f=9.2$ kHz

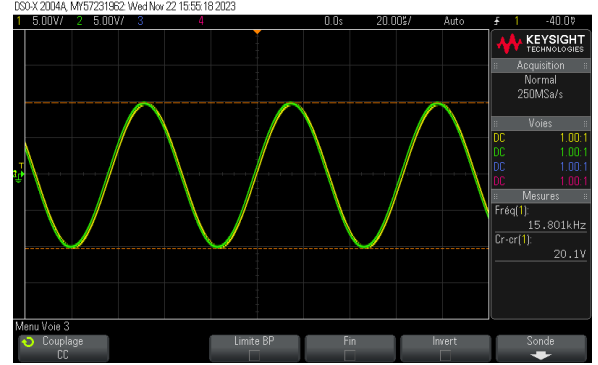


Figure 3: seconde résonance, $f=15,8$ kHz

On mesure $\omega_{01} = 57,8 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$ et $\omega_{02} = 99,3 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$ ainsi vu que $\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{C(L+M)}}$ et $\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{C(L-M)}}$ et que $C = 10 \text{ nF}$ on peut écrire :

$$L = \frac{1}{2C}(\frac{1}{\omega_{01}^2} + \frac{1}{\omega_{02}^2}) \text{ et } M = \frac{1}{2C}(\frac{1}{\omega_{01}^2} - \frac{1}{\omega_{02}^2})$$

Ce qui nous donne par application numérique $L = 20 \text{ mH}$ et $M = 9.8 \text{ mH}$.

De plus par propagation des incertitudes nous avons une incertitude de lecture réduite par l'utilisation des curseurs mais quand même présente $\frac{u_{lec}}{\omega} = 0.1$ sur les fréquences de résonance, une incertitude de la mesure effectuée par l'oscilloscope $\frac{u_{osci}}{\omega} = 0.01$ et une incertitude sur la valeur de la capacité C , $\frac{u_C}{C} = 0,05$. Ainsi :

$$u_L = L \sqrt{\left(\frac{u_{lec}}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{u_{osci}}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{u_C}{C}\right)^2} = 2.24 \text{ mH}$$

$$L = 20.0 \pm 2.2 \text{ mH}$$

De la même manière nous pouvons calculer la propagation des incertitudes sur la valeur de M , ces incertitudes sont relatives au même facteur que celles de L .

$$u_M = M \sqrt{\left(\frac{u_{lec}}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{u_{osci}}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{u_C}{C}\right)^2} = 1.1 \text{ mH}$$

$$M = 9.8 \pm 1.1 \text{ mH}$$

II Expériences et mesures en régime libre

1. Montage 2

Nous avons réalisé le montage ci-dessous :

Nous pouvons remarquer lorsqu'on trace u_1 et u_2 qu'ils sont en phase à la résonance, de plus le régime n'est que pseudo périodique car la résisatnce interne de la bobine n'est pas négligeable et se comporte comme un amortisseur des oscillations. Dans ce montage nous nous trouvons dans le cas du mode symétrique, on a isolé le premier mode propre.

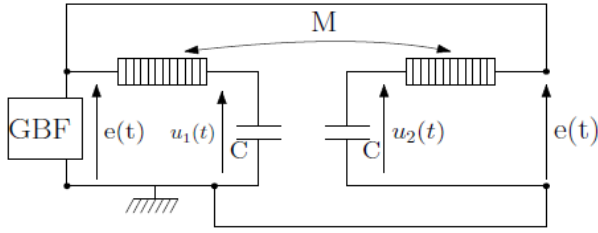


Figure 4: Montage 2

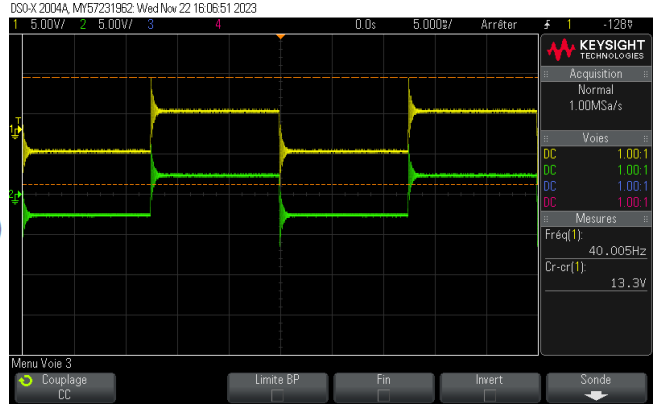


Figure 5: u_1 et u_2

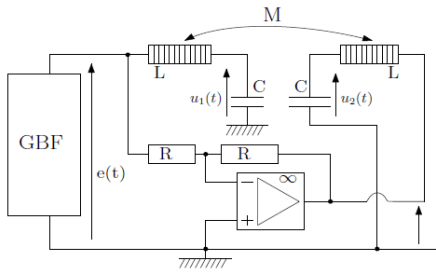


Figure 6: Montage 3

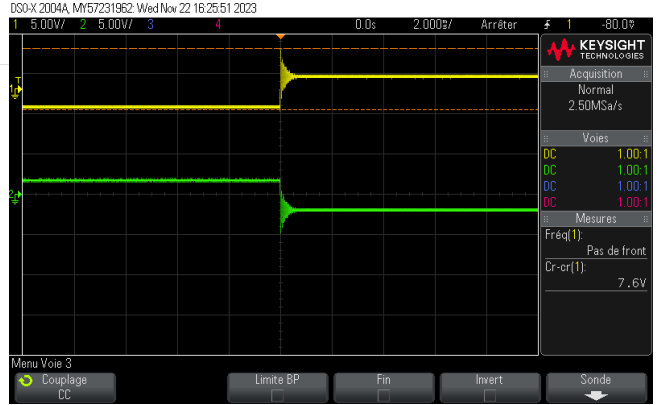


Figure 7: u_1 et u_2

2. Montage 3

Nous avons réalisé le montage ci-dessus :

Nous pouvons remarquer lorsqu'on trace u_1 et u_2 qu'ils sont en opposition de phase à la résonance, de plus le régime n'est que pseudo périodique car la résistance interne de la bobine n'est pas négligeable et se comporte comme un amortisseur des oscillations. Dans ce montage nous nous trouvons dans le cas du mode antisymétrique, on a isolé le second mode propre.

3. Calcul de la résistance interne de la bobine

En reprennant le système d'équation précédent sans négliger les résistance r_1 et r_2 que l'on considèrera comme égales toutes deux à r on obtient :

$$\begin{cases} LC \frac{du_1(t)}{dt} + MC \frac{du_2(t)}{dt} + rC \frac{du_1(t)}{dt} + u_1(t) = e(t) \\ LC \frac{du_2(t)}{dt} + MC \frac{du_1(t)}{dt} + rC \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = 0 \end{cases}$$

En faisant la somme et la différence des deux lignes on obtient en appelant $s(t) = u_1 + u_2$ et $d(t) = u_1 - u_2$:

$$\begin{cases} (LC + MC) \ddot{s}(t) + rC \dot{s}(t) + s(t) = e(t) \\ (LC - MC) \ddot{d}(t) + rC \dot{d}(t) + d(t) = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous donne en posant $\omega_0 = 1/\sqrt{C(M+L)}$ et $Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L+M}{C}}$ pour la première équation avec $e(t)$ en créneau et sur sa partie nulle :

$$\ddot{s}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t) = 0$$

Ainsi nous pouvons résoudre cette équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficient constant en passant par un polynome caractéristique :

$$X^2 + \frac{\omega_0}{Q} X + \omega_0^2 = 0$$

Le déterminant de ce polynome est négatif ce qui nous donne deux solutions complexes conjuguées :

$$X = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Cela nous donne qu'il existe $(A, \psi) \in (\mathbb{R}_+, [0, 2\pi[)$ tel que avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ et $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$:

$$s(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sin(\Omega t + \psi)$$

Soit T la période du signal, on sait que les fonctions trigonométriques sont invariantes par translation de n période, $n \in \mathbb{N}$, ainsi :

$$s(t + nT) = A \exp\left(-\frac{t + nT}{\tau}\right) \sin(\Omega t + \psi)$$

En faisant le quotient des deux nous pouvons faire disparaître l'amplitude A et le déphasage ψ dans le sinus :

$$\frac{s(t)}{s(t + nT)} = \frac{\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}{\exp\left(-\frac{t + nT}{\tau}\right)}$$

En passant au logarithme népérien et en poursuivant les calculs on obtient :

$$\delta = \ln\left(\frac{s(t)}{s(t + nT)}\right) = \frac{nT}{\tau}$$

Or $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_0}$, $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ et $Q = \frac{L+M}{r}\omega_0$ donc après calculs :

$$\delta = n\pi \sqrt{\frac{C}{L+M}} \cdot r$$

Nous pouvons donc maintenant connaître la valeur de la résistance r à l'aide du décrément et des valeurs de L , M et C .

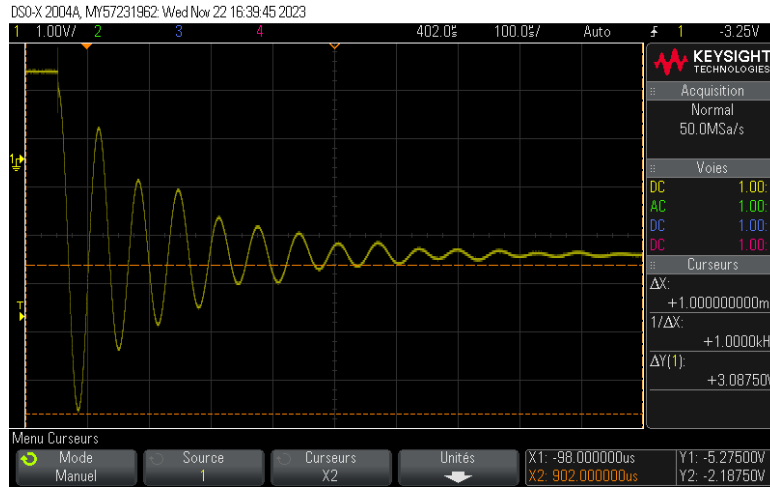


Figure 8: Mesure du décrément $\Delta Y = \delta = 3.08$ pour $n = 8$

Nous pouvons donc avec les valeurs de L et M précédentes calculer r et son incertitude.

$$r = \frac{\delta}{n\pi} \sqrt{\frac{L+M}{C}} = \frac{3.08}{8\pi} \sqrt{\frac{(20 + 9.8)10^{-3}}{10 \cdot 10^{-9}}} = 21.1 \Omega$$

Nous pouvons calculer la propagation des incertitudes, nous rencontrons des incertitudes venant de L , M , C , de la lecture de δ ainsi :

$$u_r = r \sqrt{\left(\frac{u_{lec}}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{u_M}{M}\right)^2 + \left(\frac{u_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{u_C}{C}\right)^2} = 4.1 \Omega$$

On obtient donc la valeur de la résistance interne :

$$r = 21.1 \pm 4.1 \Omega$$