

Opcional: Simulación del péndulo doble con el algoritmo de Runge-Kutta

Profesor: Carlos Pérez Espigares

Usar el algoritmo de Runge-Kutta explicado en clase para simular y estudiar las propiedades dinámicas del péndulo doble.

Un péndulo doble es un sistema compuesto por dos masas m_1 y m_2 unidas por dos varillas de longitud l_1 y l_2 , como se ve en la siguiente figura.

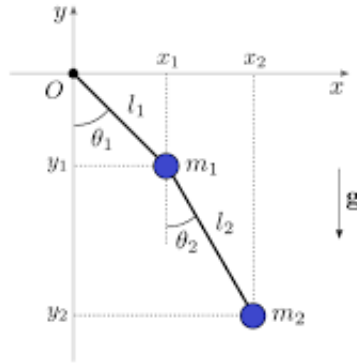


Figure 1: Esquema del péndulo doble

La energía cinética del sistema viene dada por

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2),$$

mientras que la energía potencial es

$$V = -(m_1 + m_2)gl_1\cos\theta_1 - m_2gl_2\cos\theta_2,$$

de manera que el Lagrangiano, $L = T - V$, queda como

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1\cos\theta_1 + m_2gl_2\cos\theta_2 \quad (1)$$

Por tanto, aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0,$$

obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$(m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g \sin \theta_1 = 0,$$

$$m_2l_2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2g \sin \theta_2 = 0.$$

Para resolver numéricamente estas dos ecuaciones de segundo orden por el método de Runge-Kutta, hemos de transformarlas en cuatro ecuaciones de primer orden. Esto es posible igualando $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$ a las velocidades angulares ω_1 y ω_2 respectivamente (así como $\ddot{\theta}_1 = \dot{\omega}_1$ y $\ddot{\theta}_2 = \dot{\omega}_2$), de manera que obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 \\ \dot{\omega}_1 &= \frac{m_2l_1\omega_1^2 \sin(2(\theta_1 - \theta_2)) + 2m_2l_2\omega_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2gm_2 \cos \theta_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2gm_1 \sin \theta_1}{-2l_1(m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))} \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{m_2l_2\omega_2^2 \sin(2(\theta_1 - \theta_2)) + 2(m_1 + m_2)l_1\omega_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2g(m_1 + m_2) \cos \theta_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{2l_2(m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))}\end{aligned}$$

Por conveniencia vamos a elegir $m_1 = 3$, $m_2 = 1$, $l_1 = 2$, $l_2 = 1$ y $g = 1$. Dado que tenemos cuatro variables, necesitamos cuatro condiciones iniciales para cada una de ellas. En general fijaremos inicialmente el valor de tres de ellas y de la energía E (que se conserva), de manera que la cuarta condición inicial se podrá despejar a partir de la expresión $T(\theta_1, \omega_1, \theta_2, \omega_2) + V(\theta_1, \theta_2) = E$.

Por otro lado, el sistema tiene cuatro puntos estacionarios (o de equilibrio), aunque solo uno de ellos corresponde al equilibrio estable. Dichos puntos son:

1. $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, con energía $E_1 = -9$
2. $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, con energía $E_2 = -7$
3. $\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = 0$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, con energía $E_3 = 7$
4. $\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = \pi$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, con energía $E_4 = 9$

A continuación se enumeran las actividades a realizar:

1. Simular la dinámica del sistema para energías $E = E_1 + 0.01$ y $E = E_3 - 0.01$ y diferentes condiciones iniciales. Observar que, para el caso de mayor energía, al variar mínimamente las condiciones iniciales el comportamiento del péndulo varía enormemente, mostrando un comportamiento caótico. Para ello representar en cada caso, y en función del tiempo, el valor de los ángulos de los péndulos.
2. Representar la proyección, para varias condiciones iniciales, de ω_1 frente a θ_1 y de ω_2 frente a θ_2 .
3. Para visualizar mejor el comportamiento dinámico del sistema se utilizan las llamadas secciones de Poincaré. Dichas secciones corresponden a una representación reducida del espacio de las fases (que en nuestro problema tiene cuatro dimensiones) para analizar las propiedades relevantes del sistema, como por ejemplo la existencia de órbitas periódicas, la estabilidad de los puntos fijos o la presencia de caos. En este caso representaremos, con diferentes condiciones iniciales, ω_2 frente a θ_2 con $E = E_1 + 0.01$ cuando $\omega_1 > 0$ y $\theta_1 = 0$, es decir, siempre que el primer péndulo pase por la vertical con velocidad angular positiva. Observar un comportamiento regular, similar al de la figura 2 de la referencia [1].
4. Hacer lo mismo que en el punto anterior para energías $E = E_2 - 0.01$ y $E = E_3 - 0.01$. Comentar las diferencias.
5. Para detectar órbitas periódicas y su número, así como ventanas regulares en el caos, etc., se puede construir un diagrama de bifurcación. Representa la dependencia de una magnitud adecuadamente elegida, que refleje el comportamiento caótico, con algún parámetro del sistema. Como fijamos los valores de masa y longitud, usamos la energía para ese propósito. Por tanto la magnitud, que debería ser diferente para diferentes órbitas,

si éstas existen, podría ser la amplitud de una de las variables. En nuestro caso vamos a elegir θ_2 como dicha variable. Por tanto vamos a necesitar construir la sección de Poincaré de ω_2 frente a θ_2 , con $\omega_2 = 0$ y $\dot{\omega}_2 < 0$, de manera que obtenemos los máximos valores alcanzados por el ángulo del segundo péndulo, $\theta_{2\max}$, para diferentes valores de la energía. Representar $\theta_{2\max}$ frente a la energía, y determinar aproximadamente a partir de qué energía se alcanza el caos global, de manera similar a la figura 5 de [1].

6. Hacer “un zoom” mostrando la convergencia de los valores posibles de $\theta_{2\max}$ para $E \in [0, 0.05]$, $E \in [-8.70, -8.65]$ y $E \in [18, 25]$, obteniendo en los dos últimos figuras similares a las figuras 6 y 7 de [1].
7. Para cuantificar el grado de *caoticidad* de un sistema se usa el llamado exponente de Lyapunov, que mide la tasa exponencial de divergencia de dos trayectorias cercanas en el espacio de las fases:

$$d(t) \approx d_0 e^{\lambda t},$$

donde d_0 es la distancia inicial entre las dos trayectorias en el espacio de las fases. Medir el exponente de Lyapunov para $E = E_1 + 0.01$, $E = E_2 - 0.01$ y $E = E_3 - 0.01$, analizar los resultados obtenidos y compararlos con los de la figura 8 de [1].

References

- [1] T. Stachowiak, T. Okada, *A numerical analysis of chaos in the double pendulum*, Chaos, Solitons and Fractals **29**, 417 (2006)