Práctica 1: El modelo de crecimiento de poblaciones SIR y su Proyección Unidimensional

Mónica Higueras, Daniel Mancheño, Teresa Vargas y Sofía Gutiérrez

13 de noviembre de 2022

Resumen

La Práctica 1 está dividida en 3 partes bien diferenciadas. En la primera parte de revisa el modelo SIR, un modelo epidemiológico básico que describe la dinámica de las poblaciones en la que los sujetos susceptibles pueden contrae una enfermedad y propagarse. En la segunda parte se verá una mejora del modelo SIR básico que incluye técnicas de teoría de juegos. La idea es estudiar cual es la mejor estrategia en términos de coste/beneficio.Por último, veremos proyecciones unidimensionales del modelo, y extraeremos conclusiones de los mismos..

1. Introducción

Este es el guión de la Practica 1 de la asignatura ASDB/BDSA. Para completar la práctica el alumno debe leer detenidamente el presente guión. Junto al mismo, se le ha adjuntado un código jupiter con un programa que está incompleto. Cada grupo debe completar el código según se le vaya indicando en el guión. La práctica consiste en la realización de una serie de ejercicios que se proponen. Una vez realizados, el grupo deberá entregar:

- Memoria de la práctica donde se conteste a todas las preguntas que aparecen en el texto
- Código de la práctica relleno y ejecutable, es decir, sin errores.

2. El modelo epidemiológico SIR

Primero cambiamos los parámetros de nuestro modelo

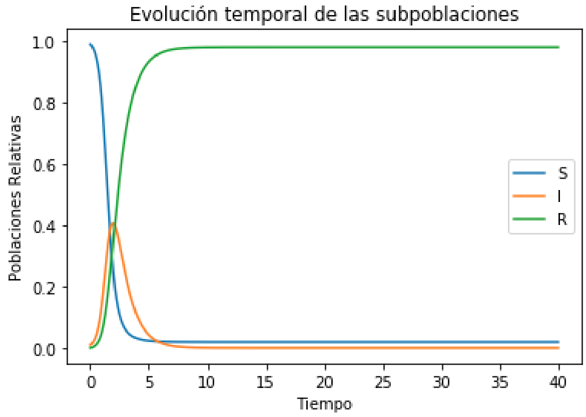
```
In [50]: import numpy as np
         import matplotlib.pyplot as plt
         from scipy.integrate import odeint
         #import seaborn as sns

In [51]: # Modelo SIR Convencional

         beta =  4           # Tasa de infección de los agentes
         gamma =   1         # Tasa de recuperación

         S0 = 0.99               # Susceptibles iniciales (S)
         I0 =  0.01              # Infectados iniciales (I)
         R0 =    0               # Recuperados iniciales (R)

         t0 =     0          # Momento inicial (días)
         tmax =   40             # Tiempo máximo (días)
         h =     0.01            # Paso de integracíon (días)

In [52]: def SIRmodel(y,t,beta,gamma):
             # función que devuelve la derivada temporal dy/dt
             s = y[0]
             i = y[1]

             #Ecuaciones Diferenciales Ordinarias del modelo SIR divididos en 5 
             #S_n, subpoblación susceptible con comportamiento normal (S_n_dot e
             #S_q, subpoblación susceptible en cuarentena (S_q_dot es la derivad
             #I_n, subpoblación infectada con comportamiento normal (I_n_dot es 
             #Q_q, subpoblación infectada en cuarentena (I_q_dot es la derivada 
             #R, subpoblación recuperada (muertos o infectados) (R_dot es la der

             s_d = -beta*s*i
             i_d = s*i*beta-i*gamma
             r_d = i*gamma

             dfdt = [s_d, i_d, r_d]
             return dfdt
```

2.1. Ejercicio 1

Explique detalladamente la evolución de cada una de las poblaciones con el paso del tiempo. Interprete los resultados obtenidos

El modelo utiliza la variable S representa al número de sujetos susceptibles dentro de la población, la variable I al número de infectados y la variable R al número de recuperados.

```
Out[5]: Text(0.5, 1.0, 'Evolución temporal de las subpoblaciones')
```



Como podemos observar, la curva asociada a la población de sujetos susceptibles (S) decrece a medida que crece la curva asociada a la población de sujetos infectados (I) ya que los sujetos que contraen la enfermedad pasan de ser parte de la población susceptible a la población infectada. Factores como la toma de medidas preventivas, la tasa de contacto efectiva (beta) y el tiempo de contacto entre un individuo infectado y uno susceptible influyen en esta transición de poblaciones.

También se observa el crecimiento de la población de sujetos recuperados a medida que los individuos infectados se mejoran.

Si observamos las expresiones analíticas del sistema dinámico, el signo menos (-) en la primera ecuación diferencial (dS/dt) indica que la ecuación es monótona decreciente, haciendo que el número de individuos susceptibles disminuya con el tiempo de manera proporcional a la cantidad de infectados, y la tasa de infección. Esto ocurre ya que a medida que los individuos se infectan pasan del grupo S al grupo I.

La variación de infectados es representada por la segunda ecuación diferencial. Esta muestra un comportamiento creciente, el cual podemos ver reflejado en el signo más (+) de la ED. De esta forma, el número de infectados aumenta pero viéndose este regulado por la cantidad de individuos recuperados con el paso del tiempo.

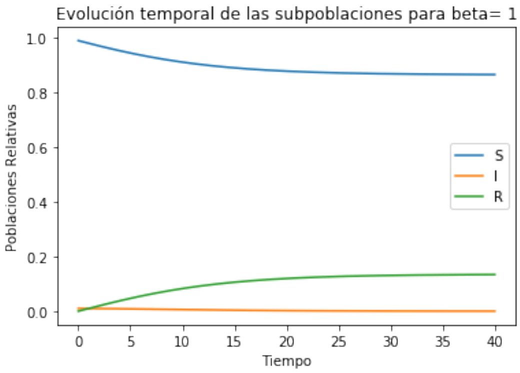
La variación de recuperados es representada por la tercera ecuación diferencial. Esta es monótona creciente en proporción a la población de infectados y la tasa de recuperación (gamma). El número de recuperados va creciendo con el paso del tiempo, debido a que el número de individuos infectados disminuye (se recuperan)

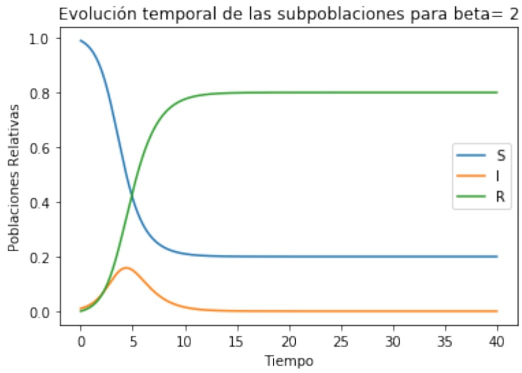
¿Que tipo de población tendremos cuando t tiende a infinito.?
Podemos observar que cuando el tiempo aumenta lo suficiente, se desarrolla inmunidad de rebaño y desaparece la población infectada. El efecto de dicha inmunidad se refleja en el comportamiento asintótico de las curvas de población susceptible (asintótica a 0) y recuperada (asintótica a 1), ya que como no toda la población susceptible ha sido infectada, no todos los sujetos se recuperarán.

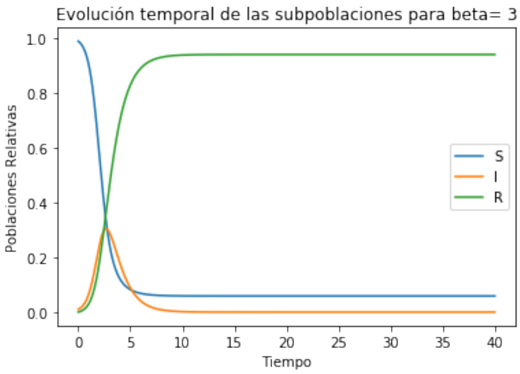
2.2. Ejercicio 2

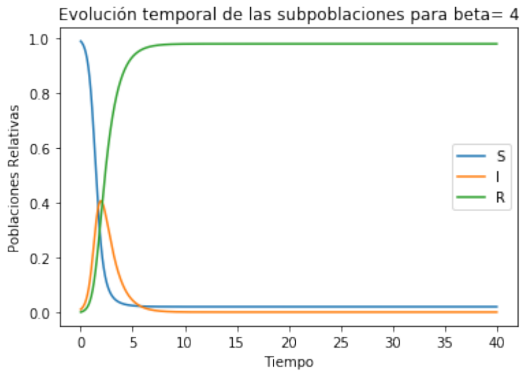
En condiciones del anterior apartado realice un barrido de la tasa de contacto efectiva desde 1 hasta 10. Muestre las 10 simulaciones diferentes.¿Qué observa? Que les sucede a las poblaciones de susceptibles, infectados y recuperados para valores bajos de este parámetro? y ¿y para valores elevados? ¿Para que valores de beta, el número máximo de infectados alcanza un valor mayor?, es decir, ¿cuando sufren más personas la enfermedad, con valores altos o bajos de beta?

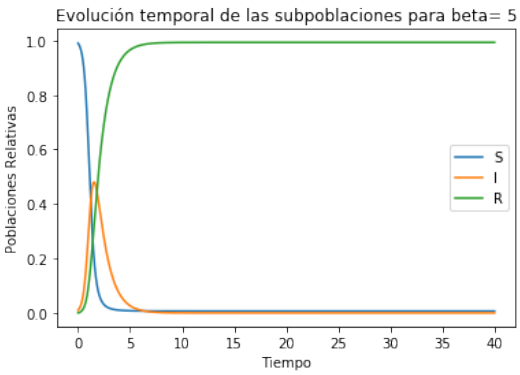
Se puede observar que, cuando la tasa de contacto efectiva es muy pequeña (beta = 1), el número de individuos infectados no aumenta mucho con el tiempo, por lo que no hay una gran variación en el número de

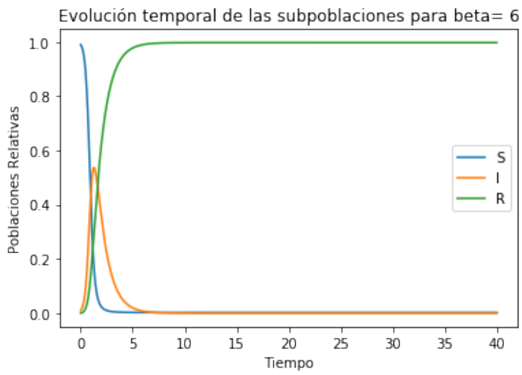

Evolución temporal de las subpoblaciones para beta= 1
Poblaciones Relativas
Tiempo
S
I
R

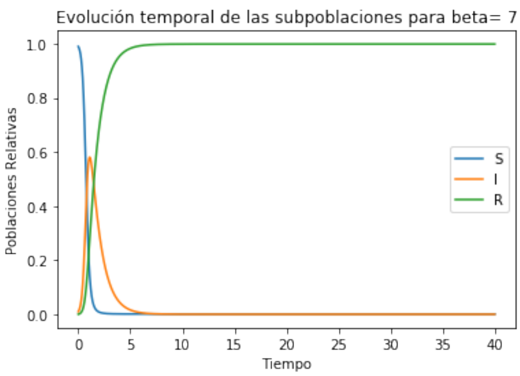

Evolución temporal de las subpoblaciones para beta= 2
Poblaciones Relativas
Tiempo
S
I
R

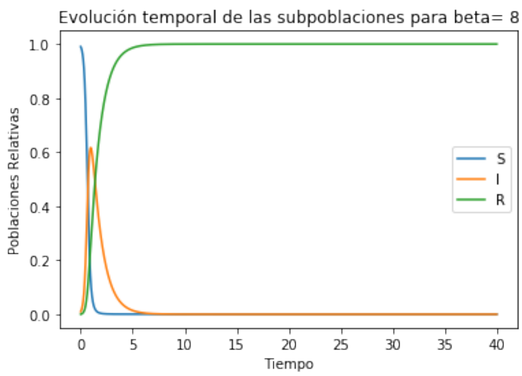

Evolución temporal de las subpoblaciones para beta= 3
Poblaciones Relativas
Tiempo
S
I
R

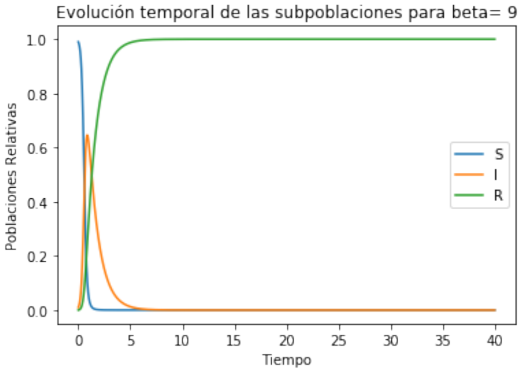

Evolución temporal de las subpoblaciones para beta= 4
Poblaciones Relativas
Tiempo
S
I
R

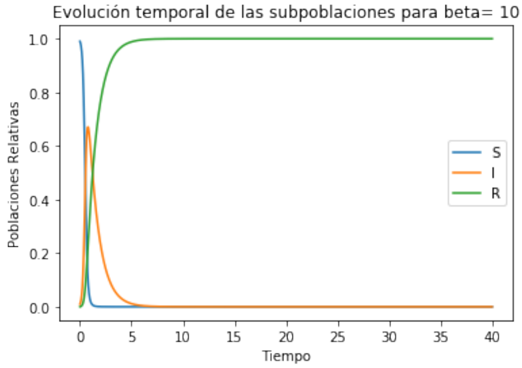

Evolución temporal de las subpoblaciones para beta= 5
Poblaciones Relativas
Tiempo
S
I
R


Evolución temporal de las subpoblaciones para beta= 6
Poblaciones Relativas
Tiempo
S
I
R


Evolución temporal de las subpoblaciones para beta= 7
Poblaciones Relativas
Tiempo
S
I
R


Evolución temporal de las subpoblaciones para beta= 8
Poblaciones Relativas
Tiempo
S
I
R





individuos recuperados. Como consecuencia, el número de individuos susceptibles no disminuye, ya que estos no pasan nunca a ser infectados.

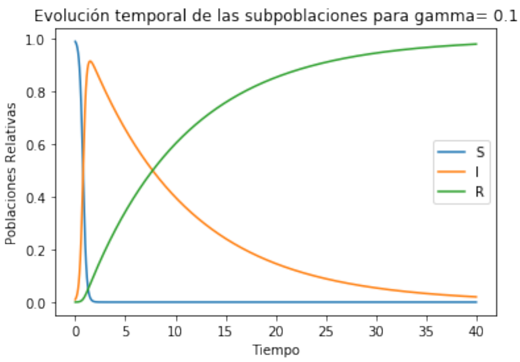
A medida que la tasa de contacto efectiva aumenta, se comienza a ver el mismo patrón en todas las gráficas: los infectados aumentan con el paso del tiempo y todos (o casi todos) los individuos susceptibles acaban siendo infectados, por lo que, cuando pasa un tiempo suficiente, estos infectados acaban recuperándose, alcanzandose la inmunidad de rebaño.

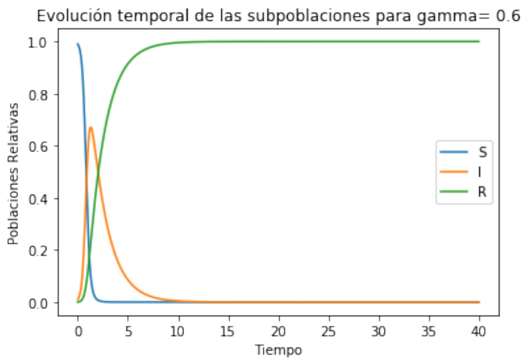
Para valores altos de la tasa de contacto efectiva (beta = 9,10) es más fácil que los susceptibles que entren en contactos con infectados se infecten. Por lo tanto, cuando la tasa de contacto efectiva beta sea mayor, más personas sufren la enfermedad.

2.3. Ejercicio 3

En condiciones del ejercicio original, fijando beta = 6. Realice un barrido para métrico de la tasa de recuperación entre 0,1 y 2 en intervalos de 0,5. Estudie la dinámica de las poblaciones. ¿Afecta este cambio excesivamente a dinámica de los susceptibles? Obtenga y estudie todas las gráficas del barrido paramétrico.

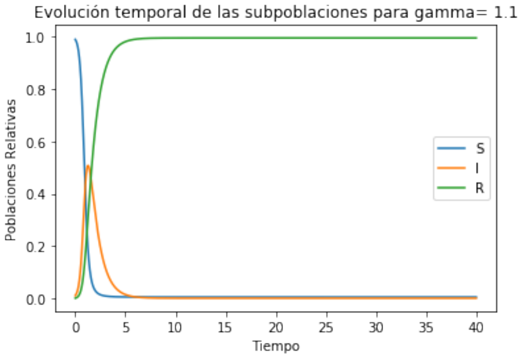
Tal y como vemos en la segunda ED, si la tasa de recuperación es muy pequeña, el número de infectados se asemejará mucho en valor absoluto al número de susceptibles. Sin embargo, a medida que aumentamos la tasa de recuperación el número de infectados disminuye. Con esto podemos concluir que a valores pequeños de gamma (tasa de recuperación), vemos como el número de susceptibles disminuye de manera más rápida debido al rápido crecimiento del número de infectados. Esto se debe a la lenta recuperación que experimentan los individuos, provocando que permanezcan más tiempo en el grupo de infectados.

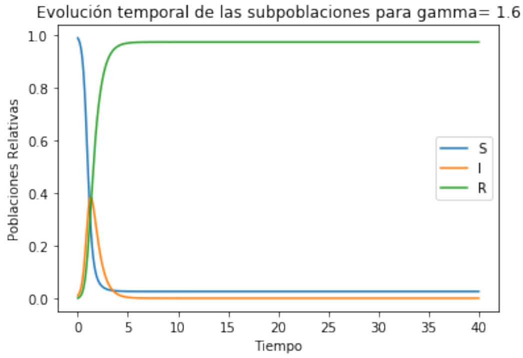




¿Para que valores de gamma alcanzamos una mayor tasa de recuperados?

La cantidad de recuperados es mayor cuando la tasa de recuperación (gamma) es pequeña. Esto es debido a que, cuando gamma toma valores bajos, hay un mayor porcentaje de infectados, dando lugar a una mayor cantidad de recuperados con el paso del tiempo.





3. El modelo SIR mejorado con Teoría de Juegos

Datos de interes: sujetos susceptibles S como los sujetos infectados I pueden optar por elegir dos estrategias para combatir la pandemia:
a) ponerse en cuarentena (Q)
b) seguir con la vida normal (N).

Por tanto, en este nuevo modelo vamos a distinguir sujetos susceptibles que adoptan la estrategia de ponerse en cuarentena Sq, y sujetos susceptibles que deciden seguir con una vida normal Sn los beneficios para evitar el contagio que trae seguir la estrategia de ponerse en cuarentena es evidente (se reduce en número de posibles contactos y por tanto la probabilidad de contagiar y ser contagiado).

	Agente Cuarentena	Agente Normal
Coste	-omega	-alfa*beta*I

3.1. Ejercicio 4

Hay 5 subpoblaciones: Sq , Sn, In, Iq y R
Explique detalladamente la evolución de cada una de las poblaciones con el paso del tiempo. Interprete los resultados obtenidos.

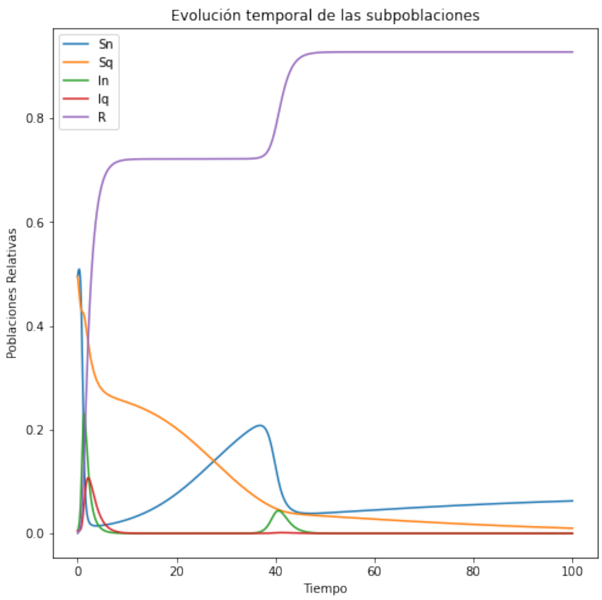


Figura 8: Poblaciones Sq , Sn, In, Iq y R

Si nos fijamos en la gráfica, vemos como la población susceptible con comportamiento de cuarentena va disminuyendo, ya que, como vimos en las fórmulas matemáticas, se ve modificada por la tasa PhiS. Esta tasa nos indica el numero de agentes que pasan de un comportamiento de cuarentena a un comportamiento normal, por lo que es proporcional ya que pasan de un grupo a otro. Esto también lo podemos ver en la poblacion susceptible con comportamiento normal, que aumentará a medida que Sq disminuye, aunque vemos que en un momento determinado empieza a caer, esto se debe a que aumenta el número de infectados.

Todo esto lo podemos ver reflejado en el número de recuperados, que vemos como va aumentando rápidamente pero en un periodo de tiempo es homogénea, lo que nos indica que la tasa de crecimiento de Sn es igual a la tasa de decrecimiento de Sq, ya que el paso d euna a otra es proporcional.
Por último decir, que el numero de infectados con comportamiento normal va a aumentar a medida que disminuya el número de susceptibles con comportamiento normal (se han infectaod por no seguir la cuarentena recomendada), mientras que el número de infectados en cuarentena será nulo a excepción de los primeros que fueron expuestos al virus.

Ahora pinte un gráfico con sólo las poblaciones de susceptibles, infectados y recuperados. ¿Que observa en la gráfica de infectados? ¿Puede ver las conocidas olas de las que tanto hemos oído hablar?

Como podemos ver en el gráfico obtenido, el número de infectados aumenta al principio rápidamente, posiblemente debido a una falta de conocimiento de la enfermedad o de medidas preventivas, como la cuarentena. Cuando la transición de población infectada a recuperada ocurre más rápido en comparación con la transición de susceptible a infectado, la curva empieza a decrecer.
No obstante, a medida que la población de infectados disminuye, el riesgo percibido también diminuye por lo que aumenta la población que decide llevar una vida normal. Esto se refleja en un aumento de contagios. A medida que aumenta la población de infectados, el riesgo percibido aumenta y los sujetos realizan un cambio de estrategia y guardan cuarentena, de manera que la curva de infectados vuelve a disminuir. Este ciclo se conoce olas de infección. En nuestro gráfico observamos únicamente dos olas. Cuando sucede la primera ola de contagios, la población susceptible se infecta y se recupera, de modo que disminuye el total de sujetos suceptibles y aumentan los recuperados. Entre dos olas, cuando no hay infectados, el número de susceptibles y de infectados se mantiene constante.

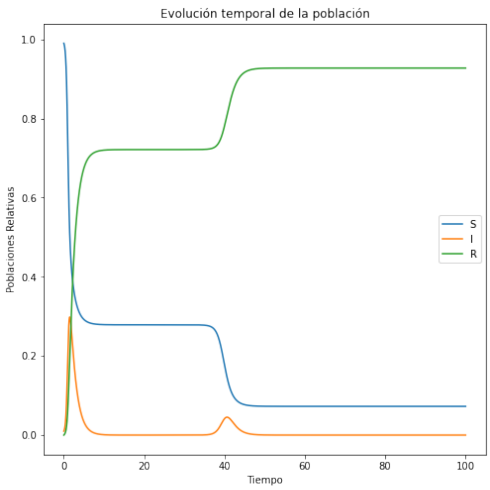


Figura 9: Poblaciones S, I y R

Pinte un gráfico para ver los agentes que optan por la cuarentena frente a los que optan por hacer vida normal. ¿Como fluctúan sus gráficas?
Al principio de la enfermedad, el número de agentes en cuarentena es menor ya que se desconoce la enfermedad y no hay medidas de prevención establecidas. A continuación, se observa un aumento drástico en la población en cuarentena, en respuesta a los primeros casos de infectados y a la creación de medidas preventivas. La población se conciencia y se comienzan a implementar dichas medidas preventivas, de manera que aumentan las preocupaciones de contagio y se percibe mayor coste de infección frente al de hacer cuarentena. Más adelante vemos como disminuye el número de personas en cuarentena, ya que, como vimos en el apartado anterior, la población infectada y el riesgo percibido disminuyen.

Previamente a la aparición de una ola, la mayoria de la poblacion se encuentra haciendo vida normal. Tras aparecer los primeros infectados, comienza una ola, y la poblacion empieza a entrar en cuarentena. Observamos que el número de sujetos infectados disminuye cuando hay mucha más población en cuarentena que llevando una vida normal, lo cual se corresponde al pico de una ola. Tras la primera ola, al existir población recuperada, como estos sujetos no podrán infectarse de nuevo, no contibuirán a la población en cuaretena de futuras olas, sino que se mantendrán como población con comportamiento normal. La aparición de futuras olas, por tanto, depende de la proporción de población susceptible e infectada que decida llevar una vida normal o guardar cuarentena. Tras una ola, la población de sujetos en cuarentena diminuye y la de comportamiento normal aumenta. Cuando la cantidad de agentes llevando una vida normal aumenta y la de agentes en cuarenta disminuye demasiado, vemos el comienzo de una nueva ola.

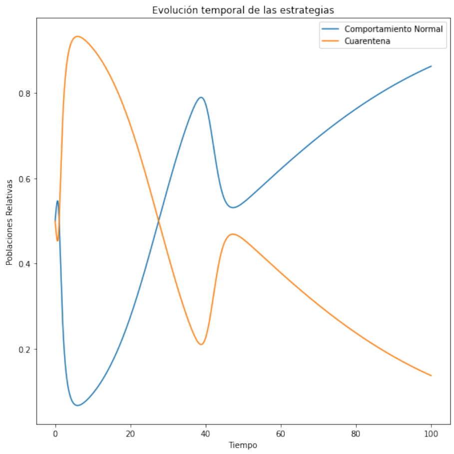
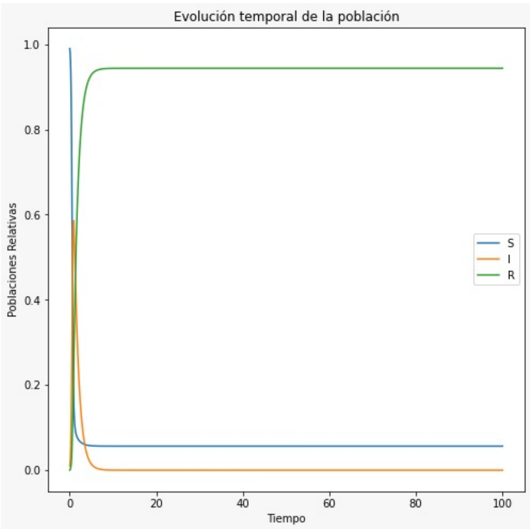


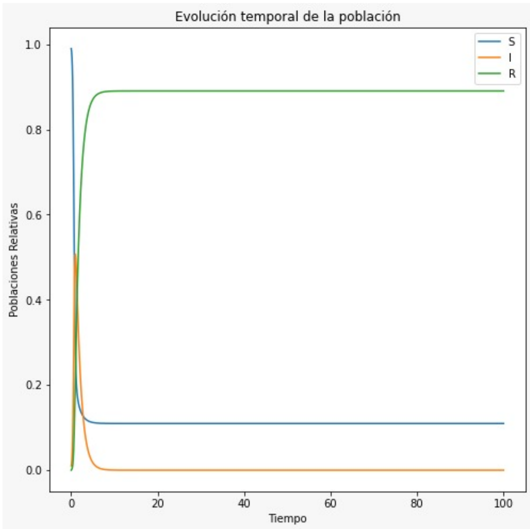
Figura 10: Agentes adoptando distintos comportamientos

3.2. Ejercicio 5

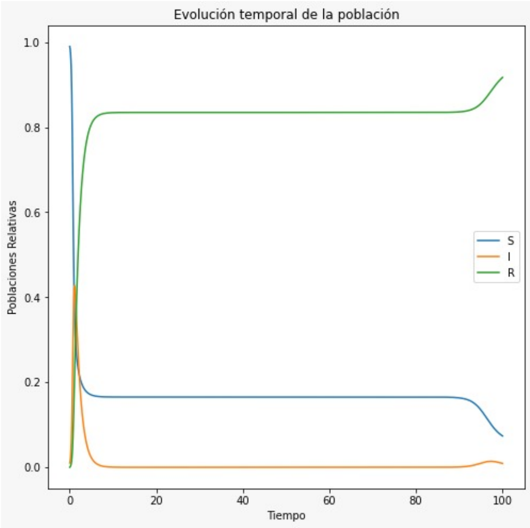
Realice un barrido del parámetro C0, es decir, del número de agentes que escogen la estrategia cuarentena frente a la estrategia de llevar una vida normal. Realice el barrido entre 0,1 y 0,5 en intervalos de 0,1. Realice una gráfica donde se muestren las poblaciones. Comente los resultados obtenidos.



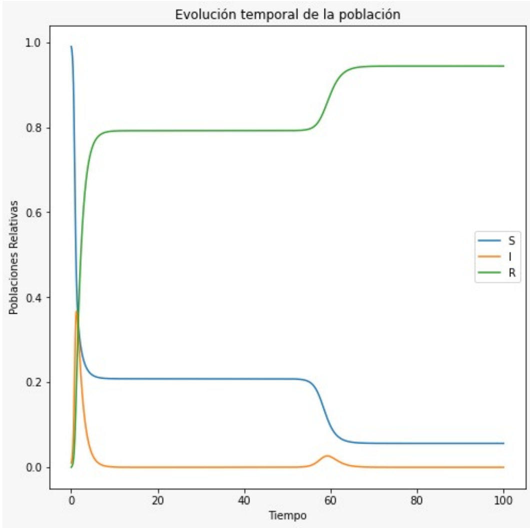
(a) C0 = 0.1



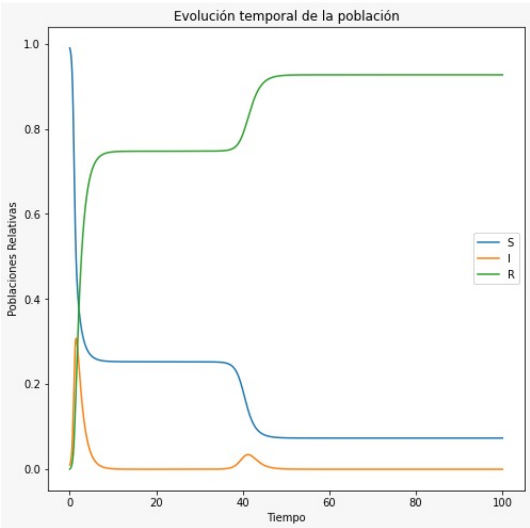
(b) C0 = 0.2



(a) C0 = 0.3



(b) C0 = 0.4



(a) C0 = 0.5

La proporción de los agentes que eligen cuarentena frente a los que deciden llevar una vida normal queda representada por Co.
En las gráficas con valores de Co más pequeños, el número de agentes que han escogido llevar una vida normal es mayor al número de agentes cuya estrategia ha sido ponerse en cuarentena. Por tanto, el número de infectados aumenta a medida que a Co disminuye. Al haber más infectados, aumentará también la cantidad de recuperados.

Cuando el número de agentes que escogen llevar una vida normal es alto (valores de Co pequeños), el contagio de los individuos es mayor provocando una infección mucho más rápida, y dando lugar así a una recuperación de los individuos en un tiempo menor.
A medida que disminuimos el valor de Co, la segunda ola se retrasa en el tiempo. Esto sucede debido a que se alcanzará la inmunidad de la población antes y por lo tanto tardará más en producirse una nueva ola de infectados.

4. Proyección Unidimensional del modelo SIR

El objetivo de este ejercicio es reducir el modelo SIR de la ecuación 2, que es un sistema de tercer orden, a un sistema de primer orden que pueda analizarse con nuestros métodos

- Demuestre que S + I + R = N, donde N es constante.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -SI\beta \\ \frac{dI}{dt} &= SI\beta - I\gamma \\ \frac{dR}{dt} &= I\gamma\end{aligned} \tag{1}$$

Para que esto ocurra se debe cumplir que la suma de:

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} \tag{2}$$

sea una constante, a la que llamaremos N. Entonces sustituyendo:

$$-SI\beta + (SI\beta - I\gamma) + I\gamma = 0 \iff 0 = 0 \tag{3}$$

- **Use la ecuación S y R para mostrar que**

$$S(t) = S0e^{\frac{-\beta R(t)}{\gamma}} \iff S0 = S(0) \tag{4}$$

Para obtener esta ecuación deberemos dividir:

$$\frac{dS}{dt} y \frac{dR}{dt} \tag{5}$$

Entonces obtenemos

$$\frac{\frac{dS}{dt}}{\frac{dR}{dt}} = \frac{dS}{dR} = \frac{-\beta S}{\gamma} \tag{6}$$

Separando las variables R y S:

$$\frac{dS}{S} = -\frac{-\beta dR}{\gamma} \tag{7}$$

Integrando ambos lados:

$$S(t) = S0e^{\frac{-\beta R(t)}{\gamma}} \tag{8}$$

- **Demuestre que R satisface la ecuación de primer orden**

$$\frac{dR}{dt} = \gamma(N - R - S0e^{\frac{-\beta R}{\gamma}}) \tag{9}$$

Sabiendo que:

$$N = S + R + I \iff I = N - R - S \tag{10}$$

$$S(t) = S0e^{\frac{-\beta R(t)}{\gamma}} \tag{11}$$

Sustituyendo I y S:

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \iff \frac{dR}{dt} = \gamma(N - S - R) \iff \frac{dR}{dt} = \gamma(N - Soe^{\frac{-\beta R}{\gamma}} - R) \tag{12}$$

- **Demuestre que esta ecuación puede ser adimensionalizada como**

$$\frac{du}{\tau} = a - bu - e^{-u} \tag{13}$$

mediante un reescalado apropiado.

Primero establecemos unas variables adimensionales de tiempo y espacio para hacer el cambio:

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{\beta R}{\gamma} \\
R &= \frac{u\gamma}{\beta} \\
du &= \frac{\beta dR}{\gamma} \\
dR &= \frac{\gamma du}{\beta} \\
\tau &= \frac{t}{T}
\end{aligned} \tag{14}
$$

Sustituyendo en la ecuación dada obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\gamma T}{\beta}\frac{du}{d\tau} &= \gamma(N - Soe^{-u} - u\frac{\gamma}{\beta}) \\
\frac{du}{d\tau} &= \frac{\beta}{T}(N - Soe^{-u} - u\frac{\gamma}{\beta}) \\
\frac{du}{d\tau} &= \frac{\beta}{T}N - \frac{\beta So}{T}e^{-u} - u\frac{\gamma}{\beta}
\end{aligned} \tag{15}
$$

Si definimos T como:

$$T = S0\beta \tag{16}$$

Sustiuyendo obtenemos que:

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{N}{S0} - e^{-u} - u\frac{\gamma}{S0\beta} \tag{17}$$

Definiendo las siguientes variables quedaría demostrado:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{N}{So} \\
b &= \frac{\gamma}{\beta So}
\end{aligned} \tag{18}
$$

- **Demuestre que**

$$
\begin{aligned}
a &\geq 1 \\
b &> 0
\end{aligned} \tag{19}
$$

Para este apartado nos fijaremos en las ecuaciones obtenidas anteriormente y los valores de los que dependen

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{N}{So} \\
b &= \frac{\gamma}{\beta So}
\end{aligned} \tag{20}
$$

Vemos que 'a' depende de So que es la parte de la población incial susceptible, que será siempre mayor que 0, y también depende de N, que hace referencia a una constante que equivale a la suma de I + R + S. Sustituyendo obtenemos que

$$a = \frac{N}{So} = \frac{S + I + R}{So} \tag{21}$$

Sabemos que al estar dividiento un valor N que es la suma de las tres poblaciones, obtendremos un valor que será mayor que So que es el numero de susceptibles iniciales por lo que se cumple que el valor de a deba ser mayor que 1.

En cuanto a b, sabiendo que la tasa de recuperación (gamma) y la tasa de infección (beta) son siempre positivas, y que So es el número de susceptibles iniciales, el cual es siempre mayor que 0, queda demostrado que b es mayor que 0.

- **Determine el número de puntos fijos u* y clasifique su estabilidad**

$$u' = \frac{du}{\tau} = a - bu - e^{-u} \tag{22}$$

La propiedad que debe cumplir un punto fijo es que:

$$u' = \frac{du}{\tau} = 0 \tag{23}$$

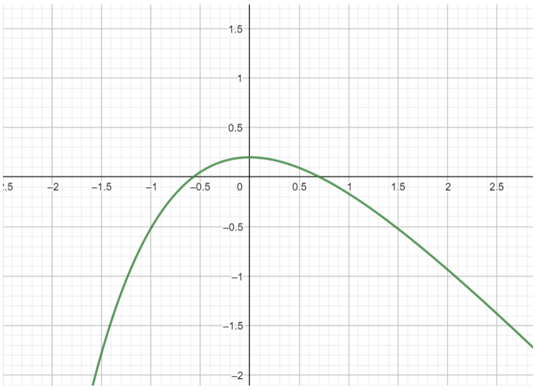
Por lo que

$$a - bu - e^{-u} = 0 \tag{24}$$

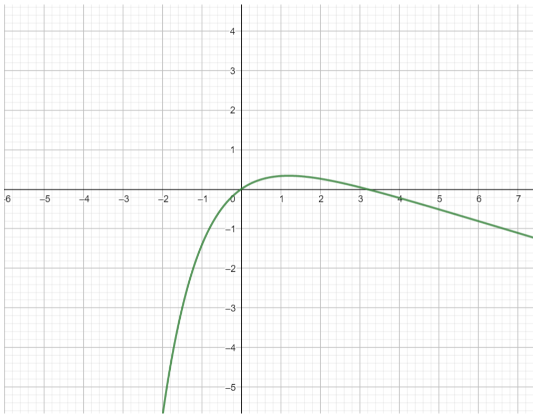
Vemos como es una ecuación sin solución, por lo que tendremos que ir sustituyendo por valores hasta sacar nuestros puntos fijos.
Ya que tenemos que:

$$\begin{aligned} a &\geq 1 \\ b &\geq 0 \end{aligned} \tag{25}$$

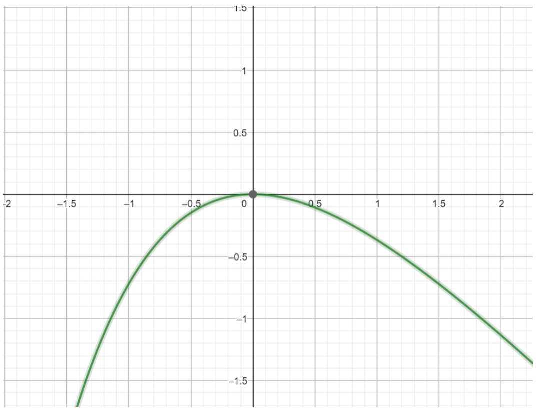
Entonces dibujando nuestra función tendremos diferentes gráficas según los valores de a y b. Debemos darnos cuenta de que a siemplemente nos desplaza la función en el eje y, correspondiente a u'.



(a) b=1



(b) a=1



(a) a=1 y b=1

Como podemos observar vamos a obtener dos puntos fijos en todos los casos excepto cuando a=1 y b=1, para el cual:

$$\begin{aligned} (-\infty, 0) &< 0 \\ (0, \infty) &< 0 \end{aligned} \tag{26}$$

entonces en ambos casos el flujo es negativo, por lo que se trata de un punto semiestable.
Para el resto de casos vemos como tenemos un primer punto fijo inestable y un segundo punto fijo estable ya que:

$$\begin{aligned} (-\infty, x1) &< 0 \\ (x1, x2) &> 0 \\ (x2, \infty) &< 0 \end{aligned} \tag{27}$$

- **Demuestre que el máximo de u'(t) ocurre al mismo tiempo que el máximo de R'(t) e I(t). (Este momento se llama el pico de la epidemia, denotado tpico. En este momento, hay más personas enfermas y una tasa de mortalidad diaria más alta que en cualquier otro momento).**
Para que exista este máximo entonces es necesario que la derivada sea nula. Primero sabemos que :

$$u'(t) = \frac{\beta}{\gamma} R'(t) \tag{28}$$

Entonces para tener un máximo la derivada será nula tal que:

$$\frac{du'(t)}{dt} = \frac{\beta}{\gamma} \frac{dR'(t)}{dt} = 0 \tag{29}$$

Y entonces el máximo de R'(t) es:

$$maxR'(t) = \frac{dR'(t)}{dt} = 0 \tag{30}$$

Vemos que las ecuaciones son muy parecidas ya que la única diferencia entre ellas es una constante positiva que multiplica en una de ellas. El máximo ocurrirá en el mismo t, aunque sean distintos valores.
Ahora para I(t) tenemos que su máximo es:

$$I'(t) = \frac{dR'(t)}{dt} \frac{1}{\gamma} = 0 \tag{31}$$

Por lo que vemos que también se cumple ya que depende de una cte positiva y de R"(t) que como dijimos antes, para que obtengamos un máximo :

$$\frac{dR'(t)}{dt} = 0 \tag{32}$$

- **Demuestre que si b $<$ 1 entonces u'(t) aumenta en t = 0 y alcanza su máximo en algún momento tpico $>$ 0 . Por tanto, las cosas empeoran antes de mejorar. (El término epidemia está reservado para este caso.) Demuestre que u'(t) eventualmente disminuye a 0.**

Sabemos por el apartado anterior:

$$u''(t) = (-b + e^{-u}) = (-b + e^{\frac{-R(t)\beta}{\gamma}}) \tag{33}$$

Para estudiar el crecimiento en t= 0, bastará con evaluar la función en ese instante de tiempo, lo que significará que la función u"(t) sería creciente en ese punto. Como consideramos que en t = 0 no ha pasado el tiempo suficiente para que exista al menos un individuo recuperado, podemos asegurar que $R(0) = 1 \iff e^{\frac{-R(0)\beta}{\gamma}} = 1$. Con lo que nos quedará que:

$$u''(t) = (-b + 1) > 0 \tag{34}$$

ya que partimos de la condición 0 < b < 1

- **Por otro lado, demuestre que tpico = 0 si b $>$ 1. (Por tanto, no se produce una epidemia si b $>$ 1.)**

Como hemos razonado anteriormente, el máximo de infectados que se produce en la función I(t) se produce cuando u = -In(b).

Teniendo en cuenta la condición, b > 1 se traduce a que,

$$u = \frac{\beta}{\gamma} R'(t) \tag{35}$$

y como hemos razonado en el apartado 5, vemos que esto es imposible que suceda, ya que estrictamente b > 0 y no se producirá la llamada epidemia.

- **La condición b = 1 es la condición de umbral para que ocurra una epidemia. ¿Puede dar una interpretación biológica de esta condición?)**

$$b = \frac{\gamma}{\beta So} \tag{36}$$

Podemos interpretar que no se va a producir una epidemia cuando la tasa de recuperación media (γ) sea superior al producto de los individuos iniciales susceptibles (So) y la tasa de contacto efectiva de la enfermedad (β) y. Esto significaría, que podría existir la posibilidad de que, prácticamente, no exista gente que, potencialmente, pueda contraer la enfermedad. Esto se puede deber a que la totalidad de la población ya haya pasado la enfermedad y posean inmunidad total,o sin la posibilidad de volver a recaer en esta o a que la enfermedad no sea realmente efectiva y contagiosa en esa población.

5. Referencias

Para profundizar conocimiento:

- K. W. Ogilvy and M. A. G., “A contribution to the mathematical theory of epidemics” https://www.nytimes.com/2020/12/20/health/virus-vaccine-game-theory.html
- S. Roberts, “The pandemic is a prisoner’s dilemma game” https://www.nytimes.com/2020/12/20/health/virus-vaccine-game-theory.html