Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Кафедра Системного Анализа

Анализ системы типа муравейник

Студент 515 группы
В. С. Терёшин

Руководитель практики
д.ф. -м.н., профессор А. С. Братусь

Москва, 2014г.

Содержание

1. Постановка задачи

Рассматривается динамическая система

$$\begin{cases} \dot{u_1} = u_1 \left(\alpha u_4 + k_1 u_2 + k_2 u_3 - \overline{f}\right), \\ \dot{u_2} = u_2 \left(\alpha u_4 + k_1 u_3 + k_2 u_1 - \overline{f}\right), \\ \dot{u_3} = u_3 \left(\alpha u_4 + k_1 u_1 + k_2 u_2 - \overline{f}\right), \\ \quad \dot{u_4} = u_4 \left(\beta \left(u_1 + u_2 + u_3\right) - \overline{f}\right). \end{cases}$$

при условиях $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Введём обозначение $S = u_1 + u_2 + u_3$.

2. Физический смысл задачи

Данная система представляет собой описание колонии муравьёв. Королева (u_4) обслуживается остальными членами популяции (u_1, u_2 и u_3), которые помогают ей размножаться. В свою очередь, королева колонии способствует размножению других видов муравьёв. Муравьи первого, второго и третьего типов также способствуют размножению друг друга.

3. Нахождение фитнеса

Для нахождения фитнеса заметим, что так как $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1$, то $\dot{u_1} + \dot{u_2} + \dot{u_3} + \dot{u_4} = 0$. Выпишем уравнение на $\overline{f}$:

$$\begin{gathered} 0 = u_1 \left(\alpha u_4 + k_1 u_2 + k_2 u_3 - \overline{f}\right) + \\ + u_2 \left(\alpha u_4 + k_1 u_3 + k_2 u_1 - \overline{f}\right) + \\ + u_3 \left(\alpha u_4 + k_1 u_1 + k_2 u_2 - \overline{f}\right) + \\ + u_4 \left(\beta \left(u_1 + u_2 + u_3\right) - \overline{f}\right) = \\ = (\alpha + \beta) u_4 (u_1 + u_2 + u_3) + (k_1 + k_2)(u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3) - (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)\overline{f}. \end{gathered}$$

Принимая во внимание то, что $S = u_1 + u_2 + u_3$, а $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1$, получим

$$\begin{gathered} 0 = (\alpha + \beta)(1 - S)S + (k_1 + k_2)(u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3) - \overline{f}, \\ \Rightarrow \overline{f} = (\alpha + \beta)(1 - S)S + (k_1 + k_2)(u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3). \end{gathered}$$

4. Исследование системы

4.1. Нахождение неподвижных точек

С помощью символьных вычислений среды `MATLAB` можно получить неподвижные точки системы:

1) $u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0,\ u_4 = a;$

2) $u_1 = 1,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0,\ u_4 = 0;$

3) $u_1 = 0,\ u_2 = 1,\ u_3 = 0,\ u_4 = 0;$

4) $u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 1,\ u_4 = 0;$

5) $u_1 = \frac{1}{3},\ u_2 = \frac{1}{3},\ u_3 = \frac{1}{3},\ u_4 = 0;$

6) $u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},\ u_4 = \frac{\beta}{\alpha+\beta};$

7) $u_1 = 0,\ u_2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},\ u_3 = 0,\ u_4 = \frac{\beta}{\alpha+\beta};$

8) $u_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},\ u_2 = 0,\ u_3 = 0,\ u_4 = \frac{\beta}{\alpha+\beta};$

9) $u_1 = \frac{k_1}{k_1+k_2},\ u_2 = \frac{k_2}{k_1+k_2},\ u_3 = 0,\ u_4 = 0;$

10) $u_1 = 0,\ u_2 = \frac{k_1}{k_1+k_2},\ u_3 = \frac{k_2}{k_1+k_2},\ u_4 = 0;$

11) $u_1 = \frac{k_2}{k_1+k_2},\ u_2 = \frac{k_1}{k_1+k_2},\ u_3 = 0,\ u_4 = 0;$

12) $u_1 = \frac{\alpha k_1}{(\alpha+\beta)(k_1+k_2)-k_1k_2},\ u_2 = \frac{\alpha k_2}{(\alpha+\beta)(k_1+k_2)-k_1k_2},\ u_3 = 0,\ u_4 = \frac{(k_1+k_2)\beta-k_1k_2}{(\alpha+\beta)(k_1+k_2)-k_1k_2};$

13) $u_1 = 0,\ u_2 = \frac{\alpha k_1}{(\alpha+\beta)(k_1+k_2)-k_1k_2},\ u_3 = \frac{\alpha k_2}{(\alpha+\beta)(k_1+k_2)-k_1k_2},\ u_4 = \frac{(k_1+k_2)\beta-k_1k_2}{(\alpha+\beta)(k_1+k_2)-k_1k_2};$

14) $u_1 = \frac{\alpha k_2}{(\alpha+\beta)(k_1+k_2)-k_1k_2},\ u_2 = 0,\ u_3 = \frac{\alpha k_1}{(\alpha+\beta)(k_1+k_2)-k_1k_2},\ u_4 = \frac{(k_1+k_2)\beta-k_1k_2}{(\alpha+\beta)(k_1+k_2)-k_1k_2};$

15) $u_1 = \frac{\alpha}{3(\alpha+\beta)-k_1-k_2},\ u_2 = \frac{\alpha}{3(\alpha+\beta)-k_1-k_2},\ u_3 = \frac{\alpha}{3(\alpha+\beta)-k_1-k_2},\ u_4 = \frac{3\beta-k_1-k_2}{3(\alpha+\beta)-k_1-k_2};$

4.2. Нахождение якобиана системы

Якобиан данной системы равен:

$$J(u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{du_1} & \frac{df_1}{du_2} & \frac{df_1}{du_3} & \frac{df_1}{du_4} \\ \frac{df_2}{du_1} & \frac{df_2}{du_2} & \frac{df_2}{du_3} & \frac{df_2}{du_4} \\ \frac{df_3}{du_1} & \frac{df_3}{du_2} & \frac{df_3}{du_3} & \frac{df_3}{du_4} \\ \frac{df_4}{du_1} & \frac{df_4}{du_2} & \frac{df_4}{du_3} & \frac{df_4}{du_4} \end{bmatrix}$$

К сожалению, выписать в полном виде якобиан данной системы на данном формате бумаги не представляется возможным. Он был вычислен с помощью символьных вычислений среды `MATLAB`, как и собственные числа далее.

4.3. Исследование неподвижных точек на устойчивость

Изолированные неподвижные точки можно проверить на устойчивость, воспользовавшись следующей теоремой:

Определение 1 (Гиперболическое положение равновесия)**.** *Положение равновесия динамической системы называется гиперболическим, если не существует собственных значений якобиана системы в этой точке, расположенных на мнимой оси.*

Теорема 1 (Ляпунов, Пуанкаре)**.** *Пусть u^* — гиперболическое положение равновесия системы. Пусть n_+, n_- — число собственных значений $J(u^*)$ с положительной и отрицательной вещественной частью соответственно. Тогда, если $n_+ = 0$, то положение равновесия ассимптотически устойчиво, а если $n_+ > 0$, то неустойчиво.*

4.3.1. Исследование положения равновесия 1

Чтобы удовлетворять условию задачи, необходимо чтобы $a = 1$. В этом случае $\overline{f} = 0$.

$$J(0,0,0,1) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha & 0 \end{bmatrix} =$$

Собственными значениями данной матрицы являются числа:

1) $\lambda_1 = 0$;

2) $\lambda_2 = \alpha$;

3) $\lambda_3 = \alpha$;

4) $\lambda_4 = \alpha$;

Из собственных значений невозможно установить устойчивость неподвижной точки и необходимо провести дополнительное исследование.

4.3.2. Исследование положений равновесия 2–4

В силу симметрии системы можно исследовать любое из этих положений равновесия: остальные будут обладать такими же свойствами. Рассмотрим, например, положении равновесия $(1, 0, 0, 0)$. В этом случае $\overline{f} = 0$.

$$J(1,0,0,0) = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & \alpha+\beta-k_2 & \alpha+\beta-k_1 & \alpha \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} =$$

Собственными значениями данной матрицы являются числа:

1) $\lambda_1 = \beta$;

2) $\lambda_2 = k_1$;

3) $\lambda_3 = k_2$;

4) $\lambda_4 = \alpha + \beta$;

Из собственных значений и теоремы видно, что данная точка является неустойчивой.

4.3.3. Исследование положения равновесия 5

В этом случае $\overline{f} = \frac{k_1+k_2}{3}$, а

$$J\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}-\frac{2\,k_1}{9}-\frac{2\,k_2}{9} & \frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}+\frac{k_1}{9}-\frac{2\,k_2}{9} & \frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}-\frac{2\,k_1}{9}+\frac{k_2}{9} & \frac{\alpha}{3} \\ \frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}-\frac{2\,k_1}{9}+\frac{k_2}{9} & \frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}-\frac{2\,k_1}{9}-\frac{2\,k_2}{9} & \frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}+\frac{k_1}{9}-\frac{2\,k_2}{9} & \frac{\alpha}{3} \\ \frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}+\frac{k_1}{9}-\frac{2\,k_2}{9} & \frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}-\frac{2\,k_1}{9}+\frac{k_2}{9} & \frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}-\frac{2\,k_1}{9}-\frac{2\,k_2}{9} & \frac{\alpha}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \beta-\frac{k_1}{3}-\frac{k_2}{3} \end{bmatrix}.$$

Собственными значениями данной матрицы являются числа:

1) $\lambda_1 = \beta - \frac{k_1+k_2}{3}$;

2) $\lambda_2 = \alpha + \beta - \frac{k_1+k_2}{3}$;

3) $\lambda_3 = -\frac{k_1+k_2}{6} - \frac{\sqrt{3}(k_1-k2)}{6}i$;

4) $\lambda_4 = -\frac{k_1+k_2}{6} + \frac{\sqrt{3}(k_1-k2)}{6}i$;

Из собственных значений и теоремы видно, что данная точка является ассимптотический устойчивой, если $\alpha+\beta < \frac{k_1+k_2}{3}$, неустойчивой, если $\alpha+\beta > \frac{k_1+k_2}{3}$, а в случае $\alpha+\beta = \frac{k_1+k_2}{3}$ необходимо дополнительное исследование.

4.3.4. Исследование положений равновесия 6–8

В силу симметрии будем исследовать положение равновесия $\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta},0,0,\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)$. В этом случае $\overline{f}=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

$$J\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta},0,0,\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)=\begin{bmatrix} \frac{\alpha\,(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta} & -\frac{\alpha\left(-\alpha^2+k_2\,\alpha+\beta^2-1\,k_1\,\beta\right)}{(\alpha+\beta)^2} & -\frac{\alpha\left(-\alpha^2+k_1\,\alpha+\beta^2-1\,k_2\,\beta\right)}{(\alpha+\beta)^2} & \frac{\alpha^2}{\alpha+\beta} \\ 0 & \frac{\alpha\,k_2}{\alpha+\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha\,k_1}{\alpha+\beta} & 0 \\ \frac{\alpha\,\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha\,\beta\,(\alpha+\beta-k_1-k_2)}{(\alpha+\beta)^2} & \frac{\alpha\,\beta\,(\alpha+\beta-k_1-k_2)}{(\alpha+\beta)^2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственными значениями данной матрицы являются числа:

1) $\lambda_1=\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}$;

2) $\lambda_2=-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$;

3) $\lambda_3=\frac{\alpha k_1}{\alpha+\beta}$;

4) $\lambda_4=\frac{\alpha k_2}{\alpha+\beta}$;

Из собственных значений и теоремы видно, что данная точка является неустойчивой, как и другие в этой группе.

4.3.5. Исследование положений равновесия 9–11

Будем исследовать положение равновесия $\left(\frac{k_1}{k_1+k_2},\frac{k_2}{k_1+k_2},0,0\right)$. В этом случае $\overline{f}=$ $=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$.

$$J\left(\frac{k_1}{k_1+k_2},\frac{k_2}{k_1+k_2},0,0\right)=\begin{bmatrix} \frac{k_1\,(\alpha+\beta-k_2)}{k_1+k_2} & \frac{k_1\,(\alpha+\beta)}{k_1+k_2} & \frac{k_1\,(\alpha+\beta-k_1)}{k_1+k_2} & \frac{\alpha\,k_1}{k_1+k_2} \\ \frac{k_2\,(\alpha+\beta)}{k_1+k_2} & \frac{k_2\,(\alpha+\beta-k_1)}{k_1+k_2} & \frac{k_2\,(\alpha+\beta-k_2)}{k_1+k_2} & \frac{\alpha\,k_2}{k_1+k_2} \\ 0 & 0 & \frac{{k_1}^2-k_1\,k_2+{k_2}^2}{k_1+k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta\,k_1+\beta\,k_2-k_1\,k_2}{k_1+k_2} \end{bmatrix}.$$

Собственными значениями данной матрицы являются числа:

1) $\lambda_1=\frac{k_1^2-k_1k_2+k_2^2}{k_1+k_2}$;

2) $\lambda_2=\alpha+\beta-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$;

3) $\lambda_3=\beta-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$;

4) $\lambda_4=-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$;

Рассмотрим числитель λ_1:

$$k_1^2 - k_1k_2 + k_2^2 = (k_1 - k_2)^2 + k_1k_2 > 0.$$

Из собственных значений и теоремы видно, что данная точка является неустойчивой, как и другие в этой группе, если $\beta \neq \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$ и $\alpha + \beta \neq \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$.

4.3.6. Исследование положений равновесия 12–14

Данные положения равновесия существуют при $k_1k_2 < \beta(k_1 + k_2)$.

Будем исследовать положение равновесия

$$\left(\frac{\alpha k_1}{(\alpha+\beta)(k_1+k_2)-k_1k_2}, \frac{\alpha k_2}{(\alpha+\beta)(k_1+k_2)-k_1k_2}, 0, \frac{(k_1+k_2)\beta-k_1k_2}{(\alpha+\beta)(k_1+k_2)-k_1k_2} \right).$$

К сожеланию, якобиан и его собственные значения в этих точках имеют слишком громоздкий вид, поэтому мы его приводить не будем. Заметим лишь, что с помощью символьных вычислений среды `MATLAB` удалось установить, что эти точки почти всегда являются неустойчивыми положениями равновесия (существуют противоположные по знаку вещественные собственные значения).

4.3.7. Исследование положений равновесия 15

Данное положение равновесия существует при $k_1 + k_2 < 3\beta$.

Будем исследовать положение равновесия

$$\left(\frac{\alpha}{3(\alpha+\beta)-k_1-k_2}, \frac{\alpha}{3(\alpha+\beta)-k_1-k_2}, \frac{\alpha}{3(\alpha+\beta)-k_1-k_2}, \frac{3\beta-k_1-k_2}{3(\alpha+\beta)-k_1-k_2} \right).$$

$$J\left(\frac{\alpha}{3(\alpha+\beta)-k_1-k_2}, \frac{\alpha}{3(\alpha+\beta)-k_1-k_2}, \frac{\alpha}{3(\alpha+\beta)-k_1-k_2}, \frac{3\beta-k_1-k_2}{3(\alpha+\beta)-k_1-k_2} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\alpha\,(\alpha-\beta)}{3\,\alpha+3\,\beta-k_1-k_2} & \frac{\alpha\,(\alpha-\beta+k_1)}{3\,\alpha+3\,\beta-k_1-k_2} & \frac{\alpha\,(\alpha-\beta+k_2)}{3\,\alpha+3\,\beta-k_1-k_2} & \frac{\alpha^2}{3\,\alpha+3\,\beta-k_1-k_2} \\ \frac{\alpha\,(\alpha-\beta+k_2)}{3\,\alpha+3\,\beta-k_1-k_2} & \frac{\alpha\,(\alpha-\beta)}{3\,\alpha+3\,\beta-k_1-k_2} & \frac{\alpha\,(\alpha-\beta+k_1)}{3\,\alpha+3\,\beta-k_1-k_2} & \frac{\alpha^2}{3\,\alpha+3\,\beta-k_1-k_2} \\ \frac{\alpha\,(\alpha-\beta+k_1)}{3\,\alpha+3\,\beta-k_1-k_2} & \frac{\alpha\,(\alpha-\beta+k_2)}{3\,\alpha+3\,\beta-k_1-k_2} & \frac{\alpha\,(\alpha-\beta)}{3\,\alpha+3\,\beta-k_1-k_2} & \frac{\alpha^2}{3\,\alpha+3\,\beta-k_1-k_2} \\ -\frac{\alpha\,(k_1-3\,\beta+k_2)}{3\,\alpha+3\,\beta-k_1-k_2} & -\frac{\alpha\,(k_1-3\,\beta+k_2)}{3\,\alpha+3\,\beta-k_1-k_2} & -\frac{\alpha\,(k_1-3\,\beta+k_2)}{3\,\alpha+3\,\beta-k_1-k_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственными значениями данной матрицы являются числа:

1) $\lambda_1 = \frac{\alpha(k_1+k_2-3\beta)}{3(\alpha+\beta)-k_1-k_2}$;

2) $\lambda_2 = -\frac{3\alpha^2}{3(\alpha+\beta)-k_1-k_2}$;

3) $\lambda_3 = \frac{1}{2(3(\alpha+\beta)-k_1-k_2)} \left(-\alpha(k_1 + k_2) - \sqrt{3}(k_1 - k_2)i\right)$;

4) $\lambda_4 = \frac{1}{2(3(\alpha+\beta)-k_1-k_2)} \left(-\alpha(k_1 + k_2) + \sqrt{3}(k_1 - k_2)i\right)$;

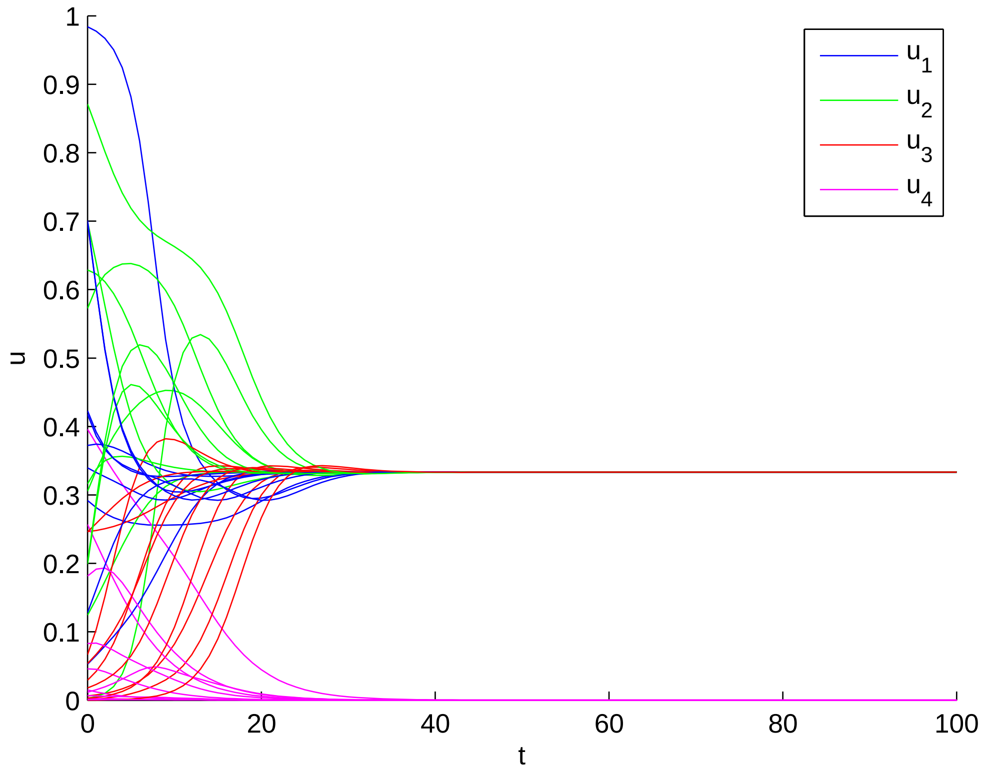
Из собственных значений, полученных с помощью `MATLAB`, видно, что данная неподвижная точка является устойчивой, когда существует, то есть когда $k_1 + k_2 < 3\beta$.

5. Примеры

Примеры динамики системы с разными параметрами были построены в среде `MATLAB`.

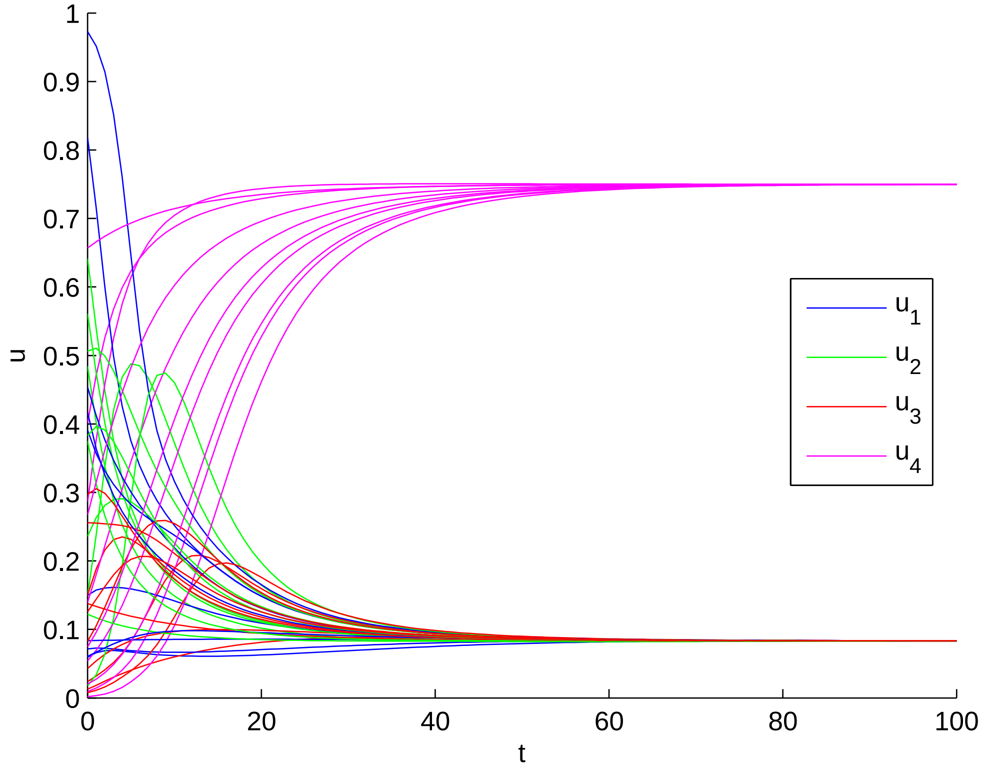
5.1. Пример 1: случай 3

В данном примере $\alpha = 0.1, \beta = 0.5, k_1 = 0.5, k_2 = 1$:



5.2. Пример 2: случай 15

В данном примере $\alpha = 0.1, \beta = 0.8, k_1 = 0.5, k_2 = 1$:



1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
u
0
20
40
60
80
100
t
u_1
u_2
u_3
u_4