Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

«Исследование динамических систем с непрерывным временем»

Студент 315 группы
Д. В. Канатников

Преподаватель
д.ф.-м.н., профессор А. С. Братусь

Москва, 2012

Содержание

1 Постановка задачи

Дана динамическая система:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{ax^2}{N+x}\left(\dfrac{K-x}{K}\right) - bxy, \\ \dot{y} = -cy + dxy, \end{cases} \tag{1}$$

где $x, y \geqslant 0$, а $a, b, c, d, N, K > 0$. Необходимо выполнить:

1. Дать биологическую интерпретацию системе.
2. Ввести безразмерные переменные, максимально уменьшив число входящих параметров.
3. Найти неподвижные точки системы и исследовать их характер.
4. Построить параметрический портрет системы.
5. Для каждой области параметрического портрета построить фазовый портрет.
6. Если в системе возникает бифуркация Андронова-Хопфа, то вычислить первое Ляпуновское число.

2 Биологическая интерпретация системы

Эта система является моделью "хищник-жертва где y это численность популяции хищников, а x — жертв. Жертвы в данной системе являются автотрофами, т.е. питаются за счет некоторого биологического ресурса не связанного с системой. Хищники же напротив являются гетеротрофами и питаются жертвами, так при отсутствии жертв ($x = 0$) они очень быстро вымрут в силу уравнения $\dot{y} = -cy$.Параметр c обозначает скорость их вымирания в отсутствии жертв. Параметр d обозначает в какой степени используют хищники жертв для роста своей популяции. Параметр a означает скорость размножения жертв. Параметр K обозначает биологическую емкость системы, в которой существуют жертвы. Если численность жертв достигает значение K; то размножение жертв прекращается. Параметр N характеризует резкое уменьшение скорости роста популяции при ее численности $x \ll N$. Параметр b характеризует скорость, с которой хищники истребляют жертв. Кроме того, если жертв не очень много, то хищники съедают их так быстро, как только могут, пропорционально от численности жертв и хищников. В случае, когда число жертв превосходит число хищников, хищники начинают есть жертв пропорционально численности только своей популяции.

3 Ввод безразмерных параметров

Пусть $x = Au$, $y = Bv$, $t = T\tau$. Тогда система (1) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{A}{T}\dot{u} = \dfrac{aA^2u^2}{N + Au}\left(\dfrac{K - Au}{K}\right) - bABuv, \\ \frac{B}{T}\dot{v} = -cBv + dABuv. \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{aTu^2}{\frac{N}{A} + u}\left(1 - \dfrac{A}{K}u\right) - bTBuv, \\ \dot{v} = -cBv + dTBuv. \end{cases} \tag{3}$$

Положим: $bTB = 1$, $dTA = 1$, $\frac{N}{A} = 1$. Отсюда получаем:

$$\begin{cases} A = N, \\ B = \dfrac{dN}{b}, \\ T = \dfrac{1}{dN}. \end{cases} \tag{4}$$

Введём обозначения $\alpha = aT$, $\beta = \frac{B}{K}$, $\gamma = cT$ и получим систему:

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{\alpha u^2}{1 + u}(1 - \beta u) - uv, \\ \dot{v} = -\gamma v + uv. \end{cases} \tag{5}$$

Зафиксируем $\beta = 1$, вернёмся к прежним обозначениям и будем исследовать систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\alpha x^2}{1 + x}(1 - x) - xy, \\ \dot{y} = -\gamma y + xy. \end{cases} \tag{6}$$

4 Исследование неподвижных точек

Теорема 1 (Ляпунова-Пуанкаре) *Пусть u^* — положение равновесия, а $J(u)$ — матрица Якоби исследуемой динамической системы. Тогда если вещественные всех собственных значений матрицы $J(u^*)$ отрицательны, тогда положение равновесия u^* асимптотически устойчиво, а если* *есть хотя бы одно собственное значение с положительной вещественной частью, то положение равновесия u^* неустойчиво.*

Для нахождения неподвижных точек решим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha x^2}{1+x}(1-x) - xy = 0, \\ y\,(-\gamma + x) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Точки $O(0,0)$ и $P(1,0)$ очевидно являются неподвижными для любых значений параметров. При $\gamma \in (0,1)$ также существует точка $Q\left(\gamma, \frac{\alpha\gamma(1-\gamma)}{1+\gamma}\right)$.

Рассмотрим матрицу Якоби для нашей системы:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} -2ax\frac{x^2+x-1}{(1+x)^2} - y & -x \\ y & x-\gamma. \end{pmatrix}$$

4.1 Точка $O(0,0)$

Подставим в матрицу Якоби неподвижную точку $O(0,0)$:

$$J(O) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma. \end{pmatrix}$$

В данном случае мы не можем применить теорему Ляпунова-Пуанкаре для анализа этой неподвижной точки.

4.2 Точка $P(1,0)$

Рассмотрим неподвижную точку $P(1,0)$:

$$J(P) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 1-\gamma. \end{pmatrix}$$

В данном случаем получаем собственные значения: $\lambda_1 = -\frac{\alpha}{2}$ и $\lambda_2 = 1-\gamma$. При это $\lambda_1 < 0$ при любых допустимых значениях параметра. Таким образом характер неподвижной точки $P(1,0)$ зависит только от λ_2.

1. $\lambda_2 > 0$, т. е. $\gamma \in (0,1)$, в этом случае точка $P(1,0)$ будет седлом.
2. $\lambda_2 < 0$, т. е. $\gamma > 1$, в этом случае точка $P(1,0)$ будет устойчивым узлом.
3. $\lambda_2 = 0$, т. е. $\gamma = 1$, в этом случае происходит бифуркация "седло-узел".

4.3 Точка $Q\left(\gamma, \frac{\alpha\gamma(1-\gamma)}{1+\gamma}\right)$

Подставим точку в матрицу Якоби:

$$J(Q) = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha\gamma(-\gamma^2-2\gamma+1)}{(\gamma+1)^2} & -\gamma \\ \dfrac{\alpha\gamma(1-\gamma)}{1+\gamma} & 0. \end{pmatrix}$$

Рассмотрим следи и определитель получившейся матрицы:

$$\mathrm{Tr}J = -\frac{\alpha\gamma(\gamma^2+2\gamma-1)}{(\gamma+1)^2},$$
$$\det J = \frac{\alpha\gamma^2(1-\gamma)}{1+\gamma},$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}J \pm \sqrt{(\mathrm{Tr}J)^2 - 4\det J}\right)$$

Исследуем знак подкоренного выражения:

$$D = (\mathrm{Tr}J)^2 - 4\det J = \frac{\alpha^2\gamma^2}{(\gamma+1)^3}(\gamma^2+2\gamma-1)^2 - \frac{4\alpha\gamma^2(1-\gamma)}{1+\gamma} = \frac{\alpha\gamma^2}{\gamma+1}\left(\alpha\frac{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}{(\gamma+1)^3} - 4(1-\gamma)\right),$$
$$D \vee 0,$$
$$\alpha\frac{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}{(\gamma+1)^3} - 4(1-\gamma) \vee 0,$$
$$\alpha \vee \frac{4(1-\gamma)(\gamma+1)^3}{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}.$$

Исследуем знак $\mathrm{Tr}J$, так как параметры положительно, то знак зависит только от знака выражения $\gamma^2+2\gamma-1$. Отсюда следует, что $\mathrm{Tr}J > 0$ при $\gamma \in (0, -1+\sqrt{2})$, и $\mathrm{Tr}J < 0$ при $\gamma \in (-1+\sqrt{2}, 1)$.

Отметим, что при $\gamma \in (0,1)$ выполнено неравенство $|\sqrt{D}| < |\mathrm{Tr}J|$. Поэтому возможны следующие случаи:

1. $\mathrm{Tr}J > 0$, $D > 0$: При этом оба собственных значения будут вещественными и положительными, следовательно неподвижная точка является неустойчивым узлом.

2. $\mathrm{Tr}J > 0$, $D < 0$: При этом собственные значения комплексные с положительной вещественной частью, следовательно точка является неустойчивым фокусом.

3. $\mathrm{Tr}J < 0$, $D > 0$: При этом оба собственных значения отрицательные вещественные, таким образом точка является устойчивым узлом.

4. $\mathrm{Tr}J < 0$, $D < 0$: При этом собственные значения комплексные с отрицательной вещественной частью, таким образом неподвижная точка я является устойчивым фокусом.

5 Параметрический и фазовые портреты

Сначала приведём параметрический портрет:

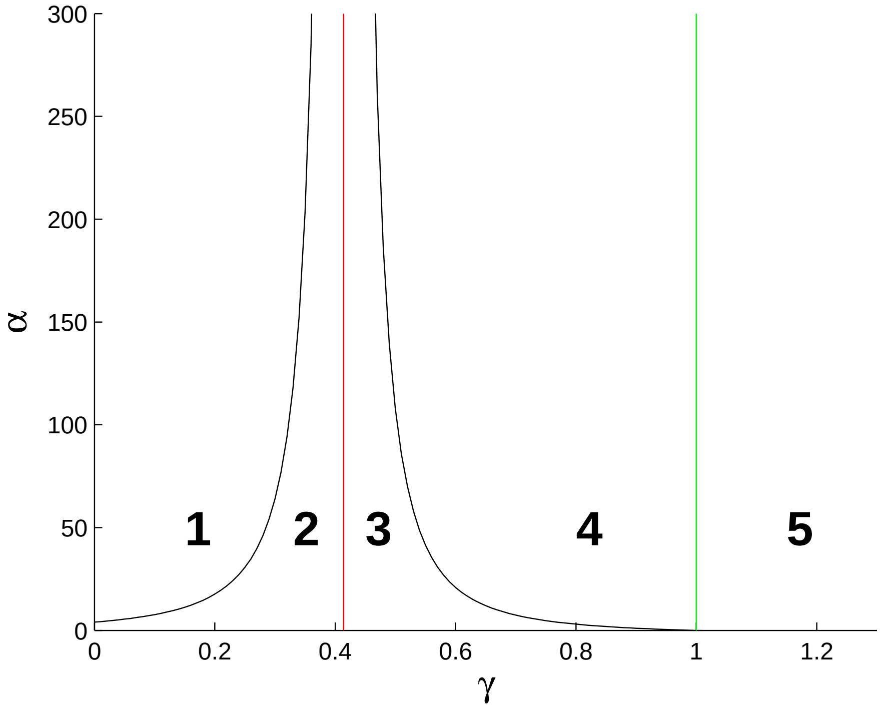

Рис. 1. Параметрический портрет.

В областях 1–4 существует 3 неподвижных точки и точка $P(1,0)$ является седлом, а в области 5 две и точка $P(1,0)$ является устойчивым узлом. Рассмотрим каждую из областей подробнее и приведём примеры фазовых портретов.

1. В данном случае $0 < \gamma < \sqrt{2} - 1$, $\alpha > \frac{4(1-\gamma)(\gamma+1)^3}{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}$ при этом $D > 0$ и $\mathrm{Tr}J(Q) > 0$, то есть точка Q является неустойчивым узлом.

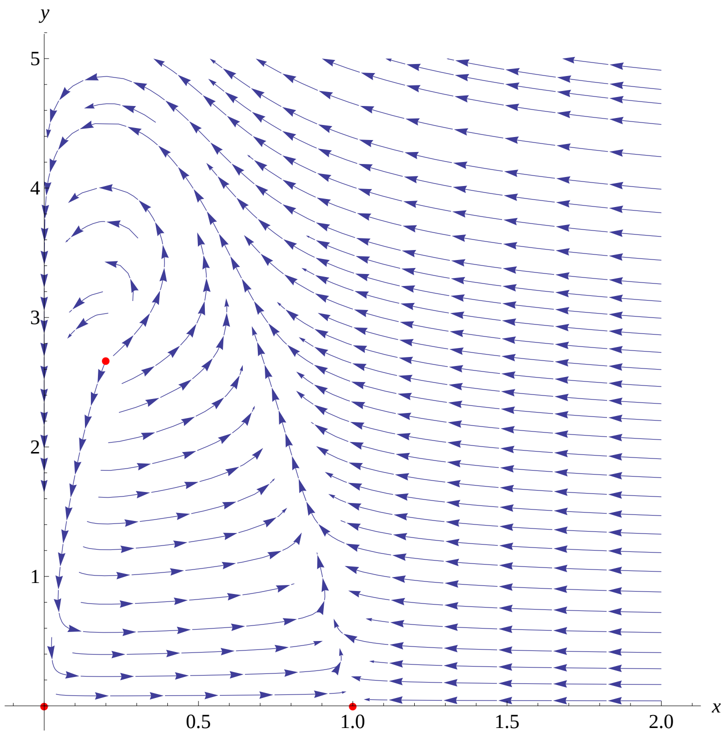

Рис. 2. $\alpha = 20$, $\gamma = 0.2$

2. В данном случае $0 < \gamma < \sqrt{2} - 1$, $\alpha < \frac{4(1-\gamma)(\gamma+1)^3}{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}$ при этом $D < 0$ и $\mathrm{Tr}J(Q) > 0$, то есть точка Q является неустойчивым фокусом.

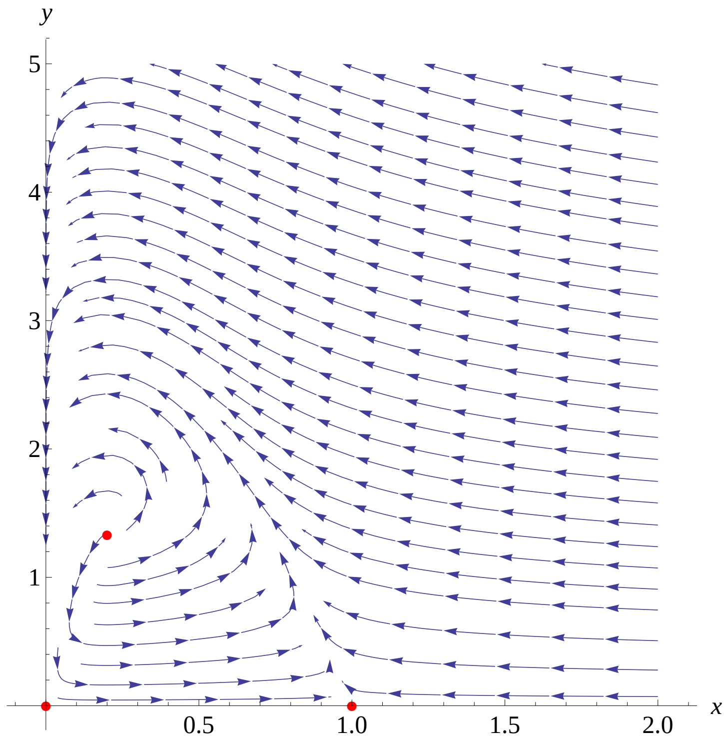

Рис. 3. $\alpha = 10$, $\gamma = 0.2$

3. В данном случае $\sqrt{2} - 1 < \gamma < 1$, $\alpha < \frac{4(1-\gamma)(\gamma+1)^3}{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}$ при этом $D < 0$ и $\mathrm{Tr}J(Q) < 0$, то есть точка Q является устойчивым фокусом.

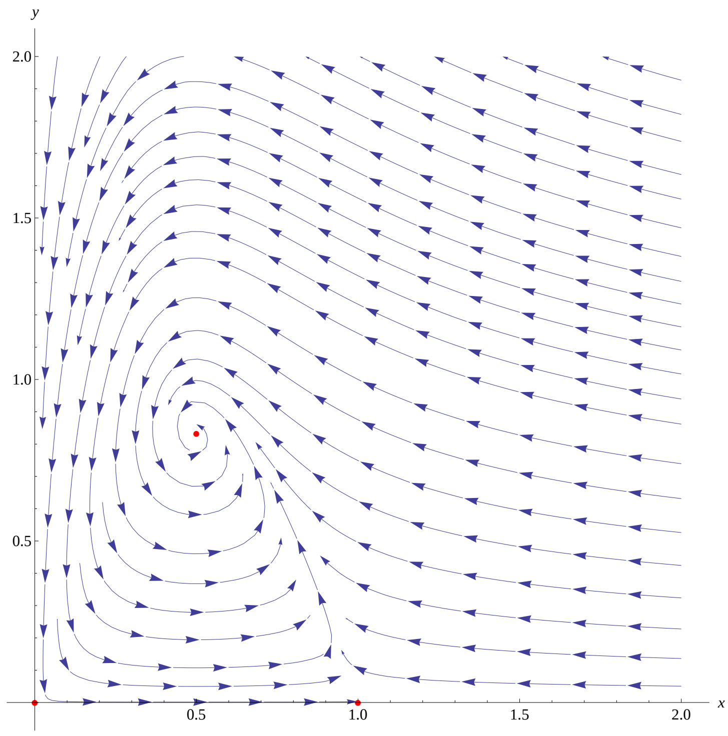

Рис. 4. $\alpha = 5$, $\gamma = 0.5$

4. В данном случае $\sqrt{2}-1 < \gamma < 1$, $\alpha > \frac{4(1-\gamma)(\gamma+1)^3}{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}$ при этом $D > 0$ и $\mathrm{Tr}J(Q) < 0$, то есть точка Q является устойчивым узлом.

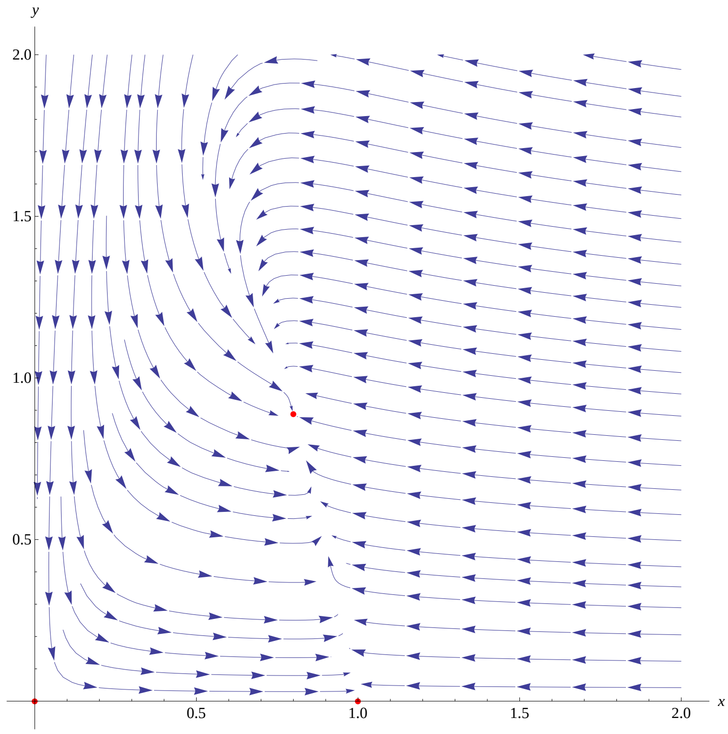

Рис. 5. $\alpha = 10$, $\gamma = 0.8$

5. В данном случае $\gamma > 1$, то есть точка Q не существует.

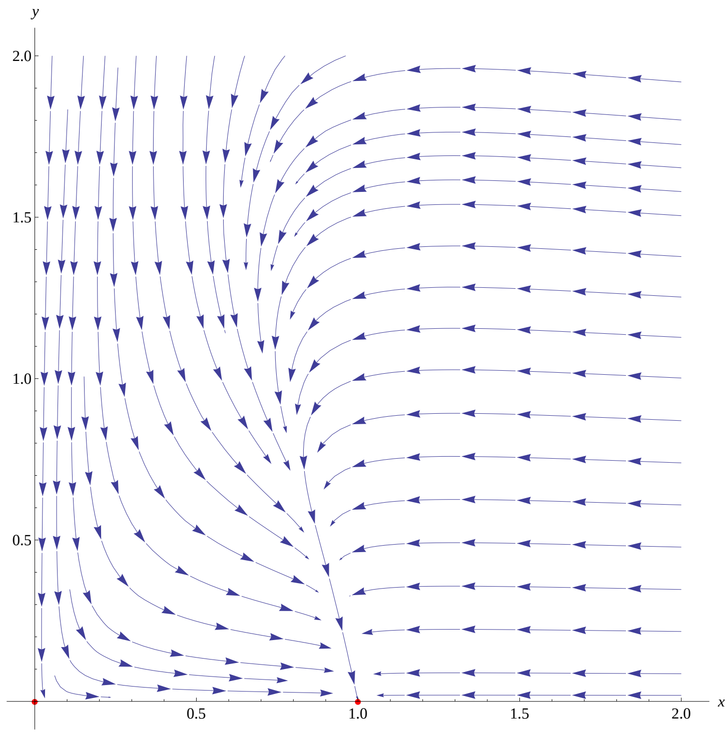

Рис. 6. $\alpha = 10$, $\gamma = 1.3$

6 Бифуркация Андронова-Хопфа

Определение 1. Бифуркация положения равновесия, соответствующая появлению собственных чисел $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$, называется бифуркацией Пуанкаре-Андронова-Хопфа или бифуркацией рождения цикла.

Теорема 2 *Любая двумерная однопараметрическая система* $\dot{u} = f(u;\alpha)$, *имеющая при достаточно малых* $|\alpha|$ *положение равновесия* $u = 0$ *с собственными числами* $\lambda_{1,2} = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ *и удовлетворяющая условиям невырожденности*

$$\left.\frac{d}{d\alpha}\mu(\alpha)\right| \neq 0,$$
$$l_1(0) \neq 0,$$

где

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0}\mathrm{Re}(ig_{20}(0)g_{11}(0) + \omega_0 g_{21}(0)),$$

в окрестностях начала координат локально топологически эквивалентна одной из двух динамических систем

$$\dot{v_1} = \alpha v_1 - v_2 + \mathrm{sign} l_1(0) v_1(v_1^2 + v_2^2),$$
$$\dot{v_2} = v_1 - \alpha v_2 + \mathrm{sign} l_1(0) v_2(v_1^2 + v_2^2),$$

В исследуемой системе появление чисто мнимых собственных значений возможно только для точки Q, при значении параметра $\gamma = \sqrt{2} - 1$. Следовательно точка Q имеет координаты $(\sqrt{2} - 1, \alpha(\sqrt{2} - 1)^2)$. Матрица Якоби имеет следующий вид:

$$J(\sqrt{2} - 1, \alpha(\sqrt{2} - 1)^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 - \sqrt{2} \\ \alpha(\sqrt{2} - 1)^2 & 0. \end{pmatrix}$$

Эта матрица имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha(\sqrt{2} - 1)^3}$.

Проверим применимость теоремы 2. Начнём с условия:

$$\left.\frac{d}{d\alpha}\mu(\alpha)\right| \neq 0.$$

Из исследований устойчивости точки Q мы знаем, что $\mu(\gamma) = \mathrm{Tr} J(Q) = -\dfrac{\alpha\gamma(\gamma^2 + 2\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2}$.

$$\mu(\sqrt{2} - 1) = 0,$$
$$\frac{d}{d\gamma}\mu(\gamma) = \frac{\alpha(-1 + \gamma(5 + \gamma(3 + \gamma)))}{2(1 + \gamma)^3},$$
$$\frac{d}{d\gamma}\mu(\sqrt{2} - 1) = \alpha(\sqrt{2} - 2) \neq 0.$$

Теперь найдём собственные вектора матриц $J(Q)$ и $J^{\mathrm{T}}(Q)$ соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2:

$$p = \begin{pmatrix} i\dfrac{1}{\sqrt{\alpha(\sqrt{2} - 1)}} \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$q = \begin{pmatrix} i\sqrt{\alpha(\sqrt{2} - 1)} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Представим функцию $f(u, \gamma) = J(Q)u + F(u, \gamma)$. Нормируем вектора p и q так, чтобы $\langle p, q\rangle = 1$, а $\langle \overline{p}, q\rangle = 0$; для этого поделим вектор p на 2. В данном случае $\langle p, q\rangle = \overline{p_1}q_1 + \overline{p_2}q_2$. Для того чтобы найти первую ляпуновскую величину введём комплекснозначную функцию:

$$G(z, \omega) = \langle p, F(zq_1 + \omega\overline{q_1}, zq_2 + \omega\overline{q_2})\rangle$$

Далее вычислим некоторые её частные производные по z, ω при $z = \omega = 0$:

$$g_{20} = G_{zz},$$
$$g_{11} = G_{z\omega},$$
$$g_{21} = Gzz\omega.$$

Далее воспользуемся системой Maple и вычислим ляпуновскую величину по формуле:

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0}\mathrm{Re}(ig_{20}(0)g_{11}(0) + \omega_0 g_{21}(0)),$$

где $\omega_0 = \sqrt{\alpha(\sqrt{2}-1)^3}$, в результате получим:

$$l_1(0) = -\frac{1}{4}\frac{\alpha^{3/2}\left(5\,\alpha\sqrt{2} - 7\,\alpha - 3\sqrt{2} + 4\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)^{3/2}}.$$

Из полученной формулы следует, что $l_1(0) > 0$ при $\alpha \in \left(0, \frac{3\sqrt{2}-4}{5\sqrt{2}-7}\right)$, и $l_1(0) < 0$ при $\alpha > \frac{3\sqrt{2}-4}{5\sqrt{2}-7} \approx 3.4169$. В данном случае получается, что в зависимости от α бифуркация может иметь различный характер:

1. $l_1 > 0$. В данном случае имеет место суперкритическая бифуркация (мягкая), с рождением единственного устойчивого цикла.

2. $l_1 < 0$. В данном случае происходит субкритическая бифуркация (жёсткая), т.е. система выбрасывается из окрестности неподвижной точки.

   Приведём пример возникновения бифуркации:

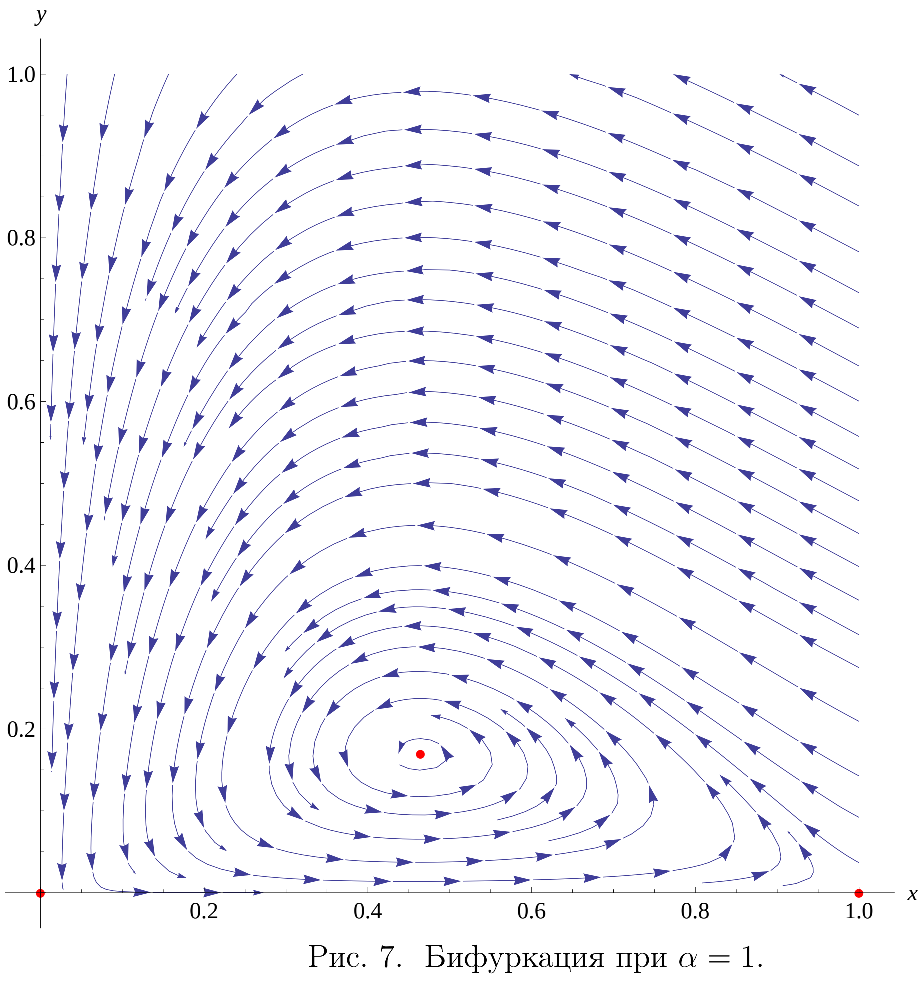

Рис. 7. Бифуркация при $\alpha = 1$.

Список литературы

[1] *Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П.* Динамические системы имодели биологии. М.: Наука, 2010