Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

Изучение динамических систем с дискретным временем

Студент 315 группы
В. С. Терёшин

Преподаватель
д.ф.-м.н., профессор А. С. Братусь

Москва, 2014

Содержание

1 Постановка задачи

Дана дискретная динамическая система, описывающая некую модель популяции планктона:

$$u_{t+1} = u_t \exp\left\{\frac{0.081}{u_t} - \frac{0.001}{u_t^2} - 0.305\right\},$$
$$u_t|_{t=0} = u_0, \quad u_0 > 0.$$

Необходимо для данной системы:

1. Найти неподвижные точки отображения и исследовать их устойчивость;
2. Исследовать систему на наличие циклов длины два;
3. Исследовать систему на наличие циклов длины три;
4. Построить графики показателя Ляпунова.

2 Неподвижные точки отображения и их устойчивость

Определение 1. *Точка u_* называется неподвижной, если $u^* = f(u^*)$.*

Очевидно, что точка $u_0^* = 0$ является неподвижной.
Найдём остальные неподвижные точки отображения:

$$u \exp\left\{\frac{0.081}{u} - \frac{0.001}{u^2} - 0.305\right\} = u.$$

Так как $u \neq 0$, то можно данное уравнение поделить на u:

$$\exp\left\{\frac{0.081}{u} - \frac{0.001}{u^2} - 0.305\right\} = 1,$$

что эквивалентно

$$\frac{0.081}{u} - \frac{0.001}{u^2} - 0.305 = 0$$
$$0.305u^2 - 0.081u + 0.001 = 0.$$

Откуда неподвижные точки равны:

$$u_1^* = \frac{0.081 - \sqrt{0.005341}}{0.61} \approx 0.01298008924, \quad u_2^* = \frac{0.081 + \sqrt{0.005341}}{0.61} \approx 0.25259368125.$$

2.1 Устойчивость

Определение 2. *Неподвижная точка u^* устойчива, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|u_0 - u^*| < \delta$, то $|u_t - u^*| < \varepsilon$ для любого натурального t.*
Если $\lim\limits_{t\to\infty} u_t = u^*$, то точка u^* называется ассимптотически устойчивой.

Утверждение 1 (Достаточное условие устойчивости)**.** *Пусть u^* — неподвижная точка и $|f'(u^*)| < 1$. Тогда u^* устойчива и ассимптотически устойчива. Если $|f'(u^*)| > 1$, то точка u^* не является устойчивой.*

В данной системе

$$f(u) = u \exp\left\{\frac{0.081}{u} - \frac{0.001}{u^2} - 0.305\right\},$$

а производная равна

$$f'(u) = \exp\left\{\frac{0.081}{u} - \frac{0.001}{u^2} - 0.305\right\} + u\exp\left\{\frac{0.081}{u} - \frac{0.001}{u^2} - 0.305\right\}\left(-\frac{0.081}{u^2} + \frac{0.002}{u^3}\right) =$$
$$= \exp\left\{\frac{0.081}{u} - \frac{0.001}{u^2} - 0.305\right\}\left(1 + \frac{0.002}{u^2} - \frac{0.081}{u}\right).$$

2.1.1 Точка u_1^*

$$f'(u_1^*) = f'\left(\frac{0.081 - \sqrt{0.005341}}{0.61}\right) \approx 6.630326895276139$$
$$\left|f'(u_1^*)\right| > 1,$$

а значит, неподвижная точка u_1^* не является устойчивой, то есть является репеллером.

2.1.2 Точка u_2^*

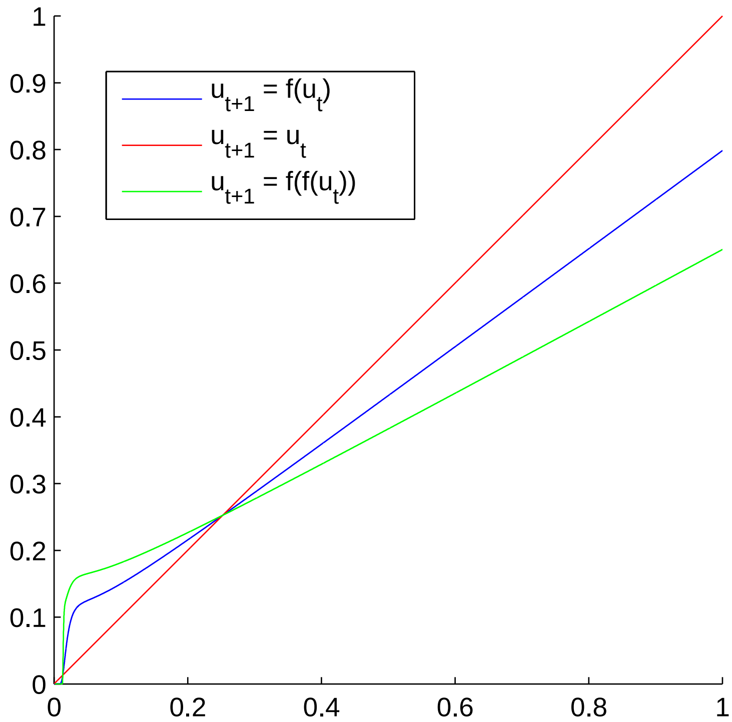
$$f'(u_2^*) = f'\left(\frac{0.081 + \sqrt{0.005341}}{0.61}\right) \approx 0.710673104723859$$
$$\left|f'(u_2^*)\right| < 1,$$

а значит, неподвижная точка u_2^* является устойчивой, то есть является аттрактором.

3 Циклы длины два

Определение 3 (Цикл длины m)**.** *$f(u)$ имеет цикл длины m, если существуют $u_1, u_2, \ldots, u_m$ такие, что $u_2 = f(u_1), u_3 = f(u_2), \ldots, u_m = f(u_{m-1}), u_1 = f(u_m)$, но $u_i \neq u_j$ если $i \neq j$.*

Установим наличие или отсутствие в данной системе циклов длины два. Рассмотрим следующее изображение:



Из графика видно, что $f(f(u)) < f(u) < u$ при $0 = u_0^* < u < u_1^*$ и при $u > u_2^*$, но $u < f(u) < f(f(u))$ при $u_1^* < u < u_2^*$. Докажем это формально.

Сначала докажем отношения между u и $f(u)$ на указанных промежутках. Для этого необходимо оценить знак выражения:

$$\frac{0.081}{u} - \frac{0.001}{u^2} - 0.305.$$

Найдём, когда оно будет отрицательным:

$$\frac{0.081}{u} - \frac{0.001}{u^2} - 0.305 < 0,$$
$$0.305u^2 - 0.081u + 0.001 > 0.$$

Откуда получим ответ на поставленный вопрос: выражение отрицательно при $0 = u_0^* < u < u_1^*$ и при $u > u_2^*$. Аналогично получим, что оно положительно при $u_1^* < u < u_2^*$. Из этого следует, что опредено отношение между $\exp\left\{\frac{0.081}{u} - \frac{0.001}{u^2} - 0.305\right\}$ и 1. А из этого получаем те же отношения между $f(u)$ и u, как было указано выше.

Оценим теперь отношение между $f(u)$ и $f(f(u))$ в указанных промежутках. Для этого оценим знак выражения:

$$\frac{0.081}{u\exp\left\{\frac{0.081}{u} - \frac{0.001}{u^2} - 0.305\right\}} - \frac{0.001}{u^2\left(\exp\left\{\frac{0.081}{u} - \frac{0.001}{u^2} - 0.305\right\}\right)^2} - 0.305 =$$
$$= \frac{0.081}{f(u)} - \frac{0.001}{\left(f(u)\right)^2} - 0.305.$$

Это выражение отрицательно, если $0 = u_0^* < f(u) < u_1^*$ или $f(u) > u_2^*$, и положительно, если $u_1^* < f(u) < u_2^*$.

Покажем, что $f(u)$ возрастает при положительных u. Для этого рассмотрим её производную:

$$f'(u) = \exp\left\{\frac{0.081}{u} - \frac{0.001}{u^2} - 0.305\right\}\left(1 + \frac{0.002}{u^2} - \frac{0.081}{u}\right).$$

Её знак совпадает со знаком $1+\frac{0.002}{u^2}-\frac{0.081}{u}$. Найдём, когда это выражение положительно:

$$1 + \tfrac{0.002}{u^2} - \tfrac{0.081}{u} > 0,$$
$$u^2 - 0.081u + 0.002 > 0.$$

Данный квадратный трёхчлен не имеет корней, следовательно, он положителен при всех значениях u. А значит, $f(u)$ возрастает при всех u. Следовательно, $0 = u_0^* < f(u) < u_1^*$ при $0 = u_0^* < u < u_1^*$ и $f(u) > u_2^*$ при $u > u_2^*$. Аналогично $u_1^* < f(u) < u_2^*$ при $u_1^* < u < u_2^*$.

Отсюда следует, что $f(f(u)) < f(u)$ при $0 = u_0^* < u < u_1^*$ и $u > u_2^*$ и $f(f(u)) > f(u)$ при $u_1^* < u < u_2^*$. А значит, $f(f(u)) < f(u) < u$ при $0 = u_0^* < u < u_1^*$ и при $u > u_2^*$, но $u < f(u) < f(f(u))$ при $u_1^* < u < u_2^*$.

Значит, не существует точек $u^{**} \geqslant 0$ таких, что $f(f(u^{**})) = u^{**}$, но $f(u^{**}) \neq u^{**}$. А значит, у данной системы не существует циклов длины два.

4 Циклы длины три

Вопрос о существовании циклов длины три решает следующая теорема. Упорядочим натуральные числа следующим образом:

$$3 \to 5 \to 7 \to \ldots \to 3{\cdot}2 \to 5{\cdot}2 \to 7{\cdot}2 \to \ldots \to 3{\cdot}2^k \to 5{\cdot}2^k \to 7{\cdot}2^k \to \ldots \to 2^3 \to 2^2 \to 2 \to 1.$$

Теорема 1 (Шарковского)**.** *Пусть дискретная динамическая система с непрерывным f имеет цикл длины n. Тогда она имеет циклы длины m для всех m таких, что $n \to m$.*

Из этой теоремы легко видеть, что в данной системе не существует циклов длины три. В противном случае существовали бы и циклы длины два, но в предыдущем параграфе было показано, что это не так.

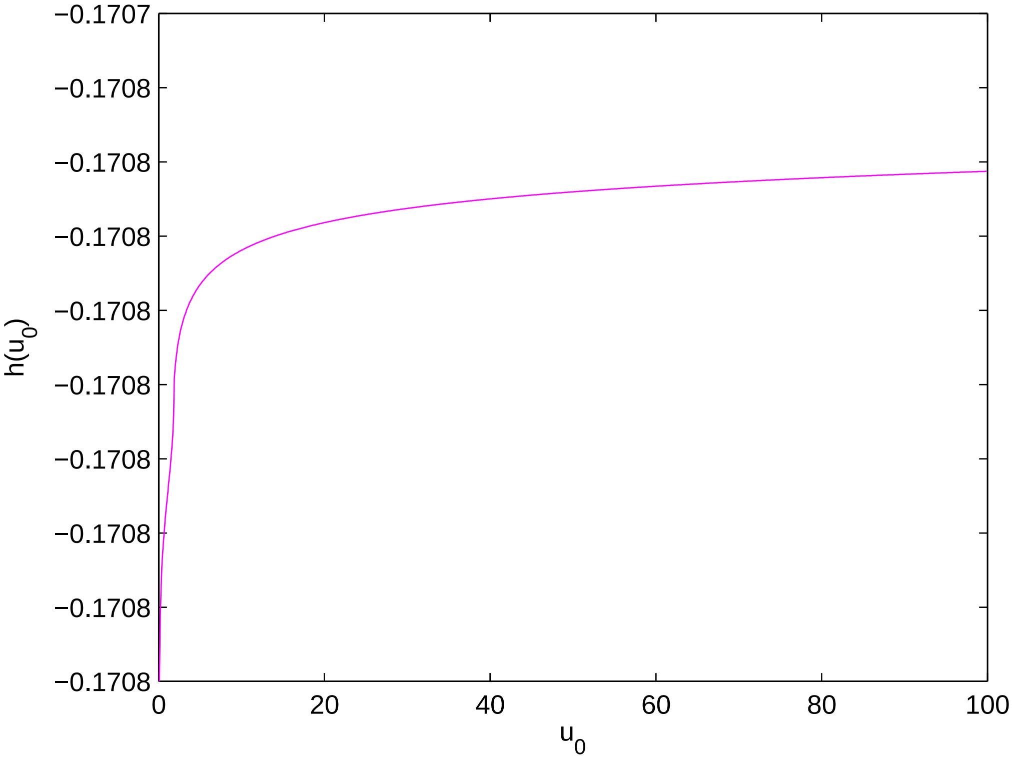
5 Показатели Ляпунова

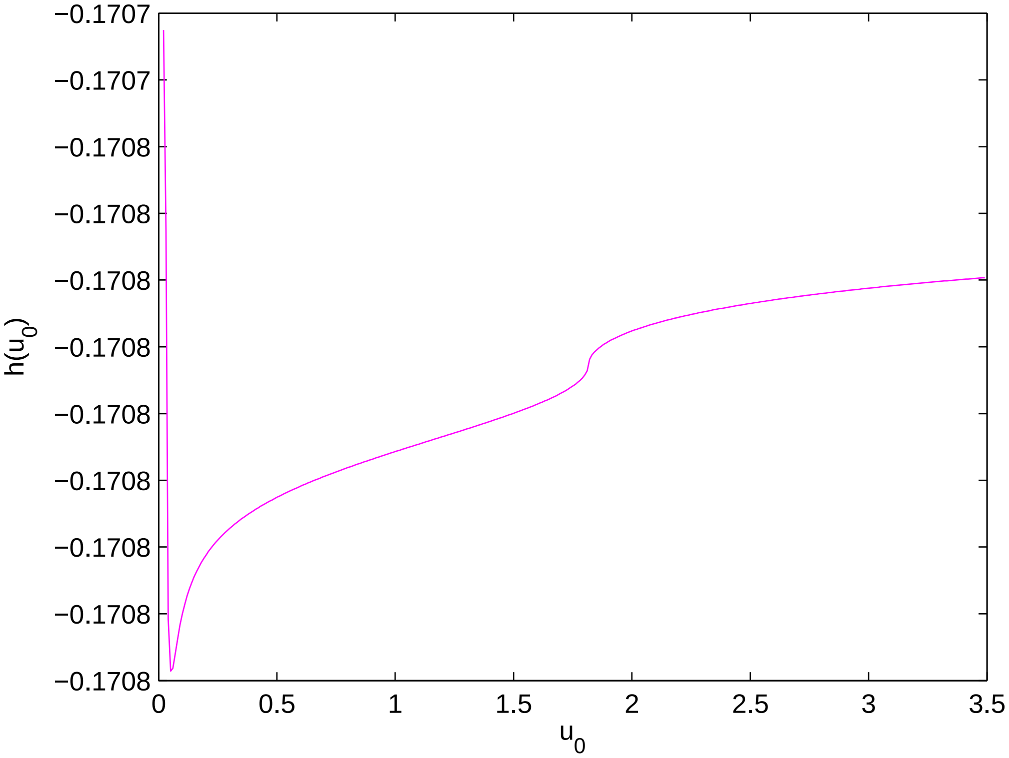
В этом пункте приведены результаты расчёта показателя Ляпунова для нашей задачи. Напомним, что показателем Ляпунова траектории $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называется величина

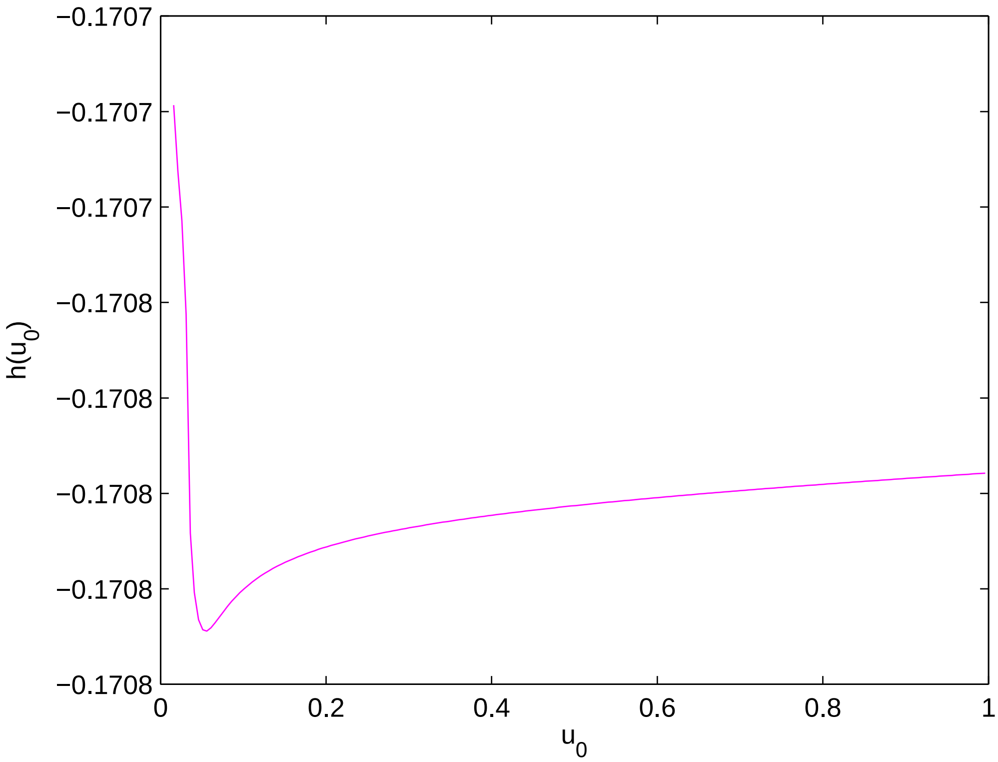
$$h(u_0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \left|f'(u_k)\right|,$$

если она существует. Показатель Ляпунова используется как "мера близости" орбит: если он отрицателен, то близкие орбиты притягиваются, а если положителен, то они, наоборот, отталкиваются.

На следующих графиках приведены зависимости показателя Ляпунова от различных начальных точек:


−0.1707
−0.1708
−0.1708
−0.1708
−0.1708
−0.1708
−0.1708
−0.1708
−0.1708
−0.1708
h(u0)
0
20
40
60
80
100
u0


−0.1707
−0.1707
−0.1708
−0.1708
−0.1708
−0.1708
−0.1708
−0.1708
−0.1708
−0.1708
−0.1708
h(u0)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
u0



Графики явно подтверждают, что хаотическое поведение в данной системе, описывающей популяцию одного из видов планктона, отсутствует. Показатель Ляпунова для любой начальной точки отрицателен, а значит, система обладает единственным устойчивым положением равновесия, являющимся глобальным аттрактором системы.

6 Исследование двумерной системы

Рассмотрим следующую двумерную систему:

$$n_{t+1} = n_t \exp\left\{\frac{0.081}{n_t} - \frac{0.001}{n_{t-1}^2} - 0.305\right\}.$$

Перепишем её в виде системы без запаздывания, введя новые переменные:

$$\begin{cases} u_{t+1} = u_t \exp\left\{\dfrac{0.081}{u_t} - \dfrac{0.001}{v_t^2} - 0.305\right\}, \\ v_{t+1} = u_t. \end{cases}$$

Для краткости будем записывать правую часть системы как $F(X) = [F_1(X), F_2(X)]^T$, где $X = [u, v]^T \in \mathbb{R}^2$. Компоненты неподвижных точек этой системы сопадают с неподвижными точками ранее исследованной одномерной системы, так как являются решениями одного и того же уравнения:

$$\begin{cases} u_{t+1} = u_t, \\ v_{t+1} = v_t \end{cases}$$

$$\exp\left\{\frac{0.081}{u_t} - \frac{0.001}{v_t^2} - 0.305\right\} = 1,$$

$$\begin{cases} \dfrac{0.081}{u_t} - \dfrac{0.001}{v_t^2} - 0.305 = 0, \\ v_{t+1} = u_t = v_t = u_{t-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{0.081}{u} - \frac{0.001}{u^2} - 0.305 = 0 \quad (u_t = u).$$

Теорема 2. *Пусть у дискретной динамической системы $X_{t+1} = F(X_t), X_t \in \mathbb{R}^n$, правая часть есть гладкая функция. Тогда, если X^* — неподвижная точка этой системы, то ограниченность единицей модулей всех собственных значений якобиана, взятого в X^* влечёт ассимптотическую устойчивость X^*. Если хоть одно собственное значение по модулю больше единицы, то X^* неустойчива.*

В нашем случае якобиан имеет вид:

$$J(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \exp\left\{\frac{0.081}{u} - \frac{0.001}{v^2} - 0.305\right\}\left(1 - \frac{0.081}{u}\right) & 0.002\frac{u}{v^3}\exp\left\{\frac{0.081}{u} - \frac{0.001}{v^2} - 0.305\right\} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

В неподвижной точке (u_1^*, u_1^*) якобиан равен:

$$J(u_1^*, u_1^*) \approx \begin{bmatrix} -5.240326895276133 & 11.870653790552266 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

а его собственные числа $\lambda_1 \approx 1.708336325134350$, $\lambda_2 \approx -6.948663220410483$. Значит, точка (u_1^*, u_1^*) — неустойчивая неподвижная точка отображения.

В неподвижной точке (u_2^*, u_2^*) якобиан равен:

$$J(u_2^*, u_2^*) \approx \begin{bmatrix} 0.679326895276141 & 0.031346209447718 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

а его собственные числа $\lambda_1 \approx 0.722700609163030$, $\lambda_2 \approx -0.043373713886889$. Значит, точка (u_2^*, u_2^*) — устойчивая неподвижная точка отображения.

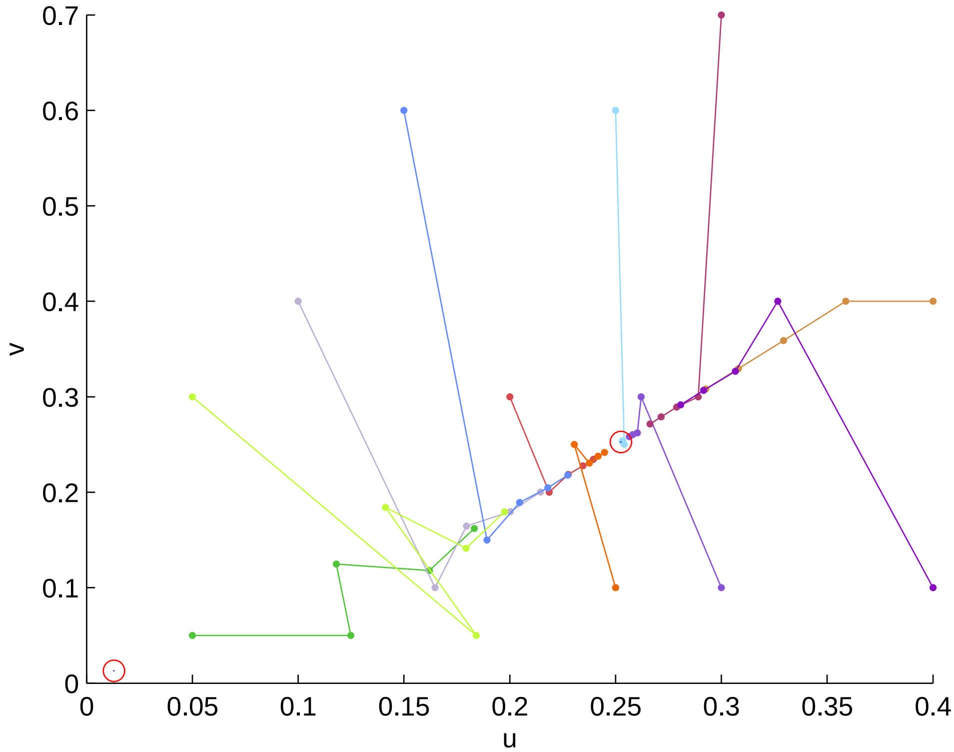
Рассмотрим двумерную динамическую систему с дискретным временем:

$$u \to f(u, r), \quad u \in \mathbb{R}^2,\ r \in \mathbb{R}$$

Определение 4. *Бифуркация положения равновесия в системе, соответствующая появлению собственных значений якобиана* $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1, \lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \lambda_1 \neq \lambda_2$, *называется бифуркацией Неймарка–Сакера или дискретной бифуркацией Хопфа.*

Данная система не обладает бифуркациями типа Неймарка–Сакера, так как все собственные значения во всех положениях равновесия вещественны.

Примеры фазовых портретов системы (красными кругами обозначены неподвижные точки):



Список литературы

[1] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. М.: Физмалит, 2010.

[2] Шарковский А. Н. Существование циклов непрерывного преобразования прямой в себя. Укр. мат. журн., т. 16, 1964. Стр. 61-65.