Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

Изучение динамических систем с непрерывным временем

Студент 315 группы
В. С. Терёшин

Преподаватель
д.ф.-м.н., профессор А. С. Братусь

Москва, 2014

Содержание

1 Постановка задачи

Дана непрерывная динамическая система, описывающая некую модель типа хищник-жертва:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{ax^2}{N+x}\left(\dfrac{K-x}{K}\right) - bxy, \\ \dot{y} = -cy + dxy, \end{cases} \tag{1}$$

где $x, y \geqslant 0$, а $a, b, c, d, N, K > 0$. Необходимо выполнить:

1. Дать биологическую интерпретацию системе;
2. Ввести безразмерные переменные, максимально уменьшив число входящих параметров;
3. Найти неподвижные точки системы и исследовать их характер;
4. Построить параметрический портрет системы;
5. Для каждой области параметрического портрета построить фазовый портрет;
6. Если в системе возникает бифуркация Андронова-Хопфа, то вычислить первое Ляпуновское число;
7. Дать биологическое объяснение поведению системы при разных значениях параметров.

2 Биологическая интерпретация системы

Эта система является моделью хищник-жертва, где x — численность попопуляции жертв, а y — хищников. Жертвы в данной системе являются автотрофами, то есть питаются за счёт некоторого биологического ресурса за пределами данной системы, а хищники являются гетеротрофами и питаются жертвами. При отсутствии жертв ($x = 0$) они очень быстро вымрут в силу уравнения $\dot{y} = -cy$. Отсюда видно, что параметр c обозначает скорость вымирания хищников при отсутствии жертв, а параметр d — какое влияние оказывают жертвы на рост популяции хищников. Параметр a обозначает скорость размножения жертв.

Параметр K обозначает биологическую ёмкость рассматриваемой системы. При достижении жертвами численности K их размножение прекращается. Параметр N характеризует резкое уменьшение скорости роста популяции при её численности $x \ll N$. b — скорость истребления жетрв хищниками. Кроме того, если жертв не очень много, то хищники съедают их со скоростью, зависящей и от их численности, и от численности жертв. Если же число жертв привосходит число хищников, то скорость поедания зависит только от числа хищников.

3 Ввод безразмерных параметров

Пусть $x = Au$, $y = Bv$, $t = T\tau$. Тогда система 1 принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{A}{T}\dot{u} = \dfrac{aA^2u^2}{N + Au}\left(\dfrac{K - Au}{K}\right) - bABuv, \\ \dfrac{B}{T}\dot{v} = -cBv + dABuv. \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{aTu^2}{\frac{N}{A} + u}\left(1 - \dfrac{A}{K}u\right) - bTBuv, \\ \dot{v} = -cBv + dTBuv. \end{cases} \tag{3}$$

Положим $bTB = 1$, $dTA = 1$, $\frac{N}{A} = 1$. Отсюда получаем:

$$\begin{cases} A = N, \\ B = \dfrac{dN}{b}, \\ T = \dfrac{1}{dN}. \end{cases} \tag{4}$$

Введём обозначения $\alpha = aT$, $\beta = \frac{B}{K}$, $\gamma = cT$ и получим систему:

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{\alpha u^2}{1 + u}(1 - \beta u) - uv, \\ \dot{v} = -\gamma v + uv. \end{cases} \tag{5}$$

Зафиксируем $\beta = 1$, вернёмся к прежним обозначениям и будем исследовать систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\alpha x^2}{1 + x}(1 - x) - xy, \\ \dot{y} = -\gamma y + xy. \end{cases} \tag{6}$$

4 Исследование непожвижных точек

Теорема 1 (Ляпунова-Пуанкаре). *Пусть u^* — положение равновесия, а $J(u)$ — матрица Якоби исследуемой динамической системы. Тогда если вещественные части всех собственных значений матрицы $J(u^*)$ отрицательны, тогда положение равновесия u^* ассимптотически устойчиво, а если есть хотя бы одно собственное значение с положительной вещественной частью, то положение равновесия u^* неустойчиво.*

Для нахождения неподвижных точек режим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha x^2}{1 + x}(1 - x) - xy = 0, \\ -\gamma y + xy = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Точки $O(0, 0)$ и $P(1, 0)$, очевидно, являются неподвижными для любых значений параметров. При $\gamma \in (0, 1)$ также существует неподвижная точка $Q\left(\gamma, \frac{\alpha\gamma(1-\gamma)}{1+\gamma}\right)$.

Матрица Якоби для данной системы:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} -2\alpha x\frac{x^2+x-1}{(x+1)^2} & -x \\ y & x - \gamma \end{bmatrix}$$

4.1 Точка $O(0,0)$

Подставим в матрицу Якоби неподвижную точку $O(0,0)$:

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, а значит, в данном случае мы не можем применить теорему Ляпунова–Пуанкаре для анализа этой неподвижной точки.

4.2 Точка $P(1,0)$

Подставим в матрицу Якоби неподвижную точку $P(1,0)$:

$$J(1,0) = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 1-\gamma \end{bmatrix}$$

В данном случае получаем собственные значения $\lambda_1 = -\frac{\alpha}{2}$ и $\lambda_2 = 1-\gamma$. При этом $\lambda_1 < 0$ при любых допустимых значениях параметра. Таким образом, характер неподвижной точки $P(1,0)$ зависит только от λ_2:

1. $\gamma \in (0,1) \Rightarrow \lambda_2 > 0$ — в этом случае точка P является седлом.
2. $\gamma > 1 \Rightarrow \lambda_2 < 0$ — в этом случае точка P является устойчивым узлом.
3. $\gamma = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$ — в этом случае происходит бифуркация типа седло-узел.

4.3 Точка $Q\left(\gamma, \frac{\alpha\gamma(1-\gamma)}{1+\gamma}\right)$

Матрица Якоби в точке Q:

$$J(Q) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha\gamma(-\gamma^2-2\gamma+1)}{(\gamma+1)^2} & -\gamma \\ \frac{\alpha\gamma(1-\gamma)}{1+\gamma} & 0 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим след и определитель получившейся матрицы:

$$\operatorname{Tr} J = -\frac{\alpha\gamma(\gamma^2+2\gamma-1)}{(\gamma+1)^2},$$

$$\det J = \frac{\alpha\gamma^2(1-\gamma)}{1+\gamma},$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Tr} J \pm \sqrt{(\operatorname{Tr} J)^2 - 4\det J}\right).$$

Исследуем знак подкоренного выражения:

$$D = (\mathrm{Tr}\, J)^2 - 4\det J = \frac{\alpha^2 \gamma^2}{\gamma + 1}^3 (\gamma^2 + 2\gamma - 1)^2 - \frac{4\alpha\gamma^2(1-\gamma)}{1+\gamma} =$$
$$= \frac{\alpha\gamma^2}{\gamma+1}\left(\alpha\frac{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}{(\gamma+1)^3} - 4(1-\gamma)\right),$$
$$D > 0 \Rightarrow \alpha\frac{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}{(\gamma+1)^3} - 4(1-\gamma > 0) \Rightarrow \alpha > \frac{4(1-\gamma)(\gamma+1)^3}{(\gamma^2+2\gamma-1)^2},$$
$$D < 0 \Rightarrow \alpha < \frac{4(1-\gamma)(\gamma+1)^3}{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}.$$

Исследуем знак $\mathrm{Tr}\, J$. Так как параметры положительны, то знак зависит только от знака выражения $\gamma^2 + 2\gamma - 1$. Значит, $\mathrm{Tr}\, J > 0$ при $\gamma \in (0, -1+\sqrt{2})$ и $\mathrm{Tr}\, J < 0$ если $\gamma \in (-1+\sqrt{2}, 1)$.

Отметим, что при $\gamma \in (0,1)$ выполнено неравенство $\left|\sqrt{D}\right| < \left|\sqrt{\mathrm{Tr}\, J}\right|$. Поэтому возможны следующие случаи:

1. $\mathrm{Tr}\, J > 0, D > 0 \Rightarrow$ оба собственных значения будут вещественными и положительными, а значит, неподвижная точка является неустойчивым узлом.

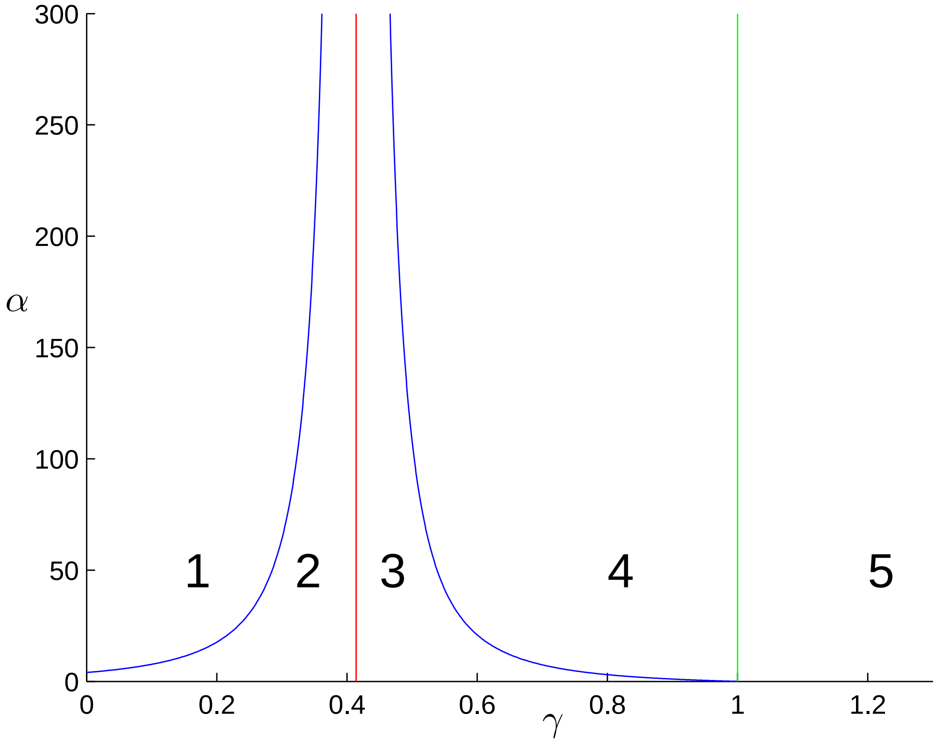
2. $\mathrm{Tr}\, J > 0, D < 0 \Rightarrow$ оба собственных значения будут комплексыными с положительными вещественными частями, а значит, неподвижная точка является неустойчивым фокусом.

3. $\mathrm{Tr}\, J < 0, D > 0 \Rightarrow$ оба собственных значения будут вещественными и отрицательными, а значит, неподвижная точка является устойчивым узлом.

4. $\mathrm{Tr}\, J < 0, D < 0 \Rightarrow$ оба собственных значения будут комплексыными с отрицательными вещественными частями, а значит, неподвижная точка является устойчивым фокусом.

5 Параметрический и фазовые портреты

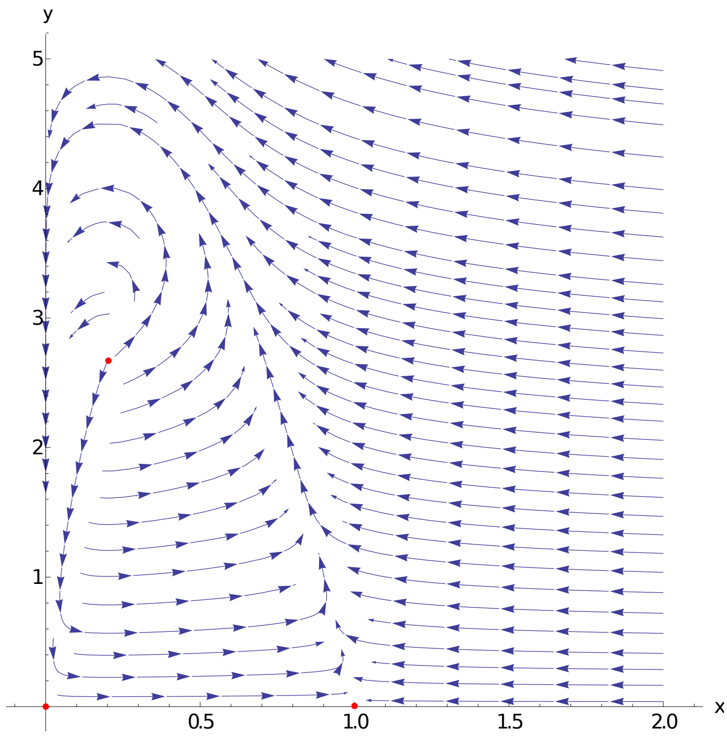
На следующей иллюстрации изображён параметрический портрет системы:



В областях 1–4 существует 3 неподвижных точки и точка $P(1,0)$ является седлом, а в области 5 две неподвижные точки и точка $P(1,0)$ является устойчивым узлом. Рассмотрим каждую область и приведём примеры фазовых портретов:

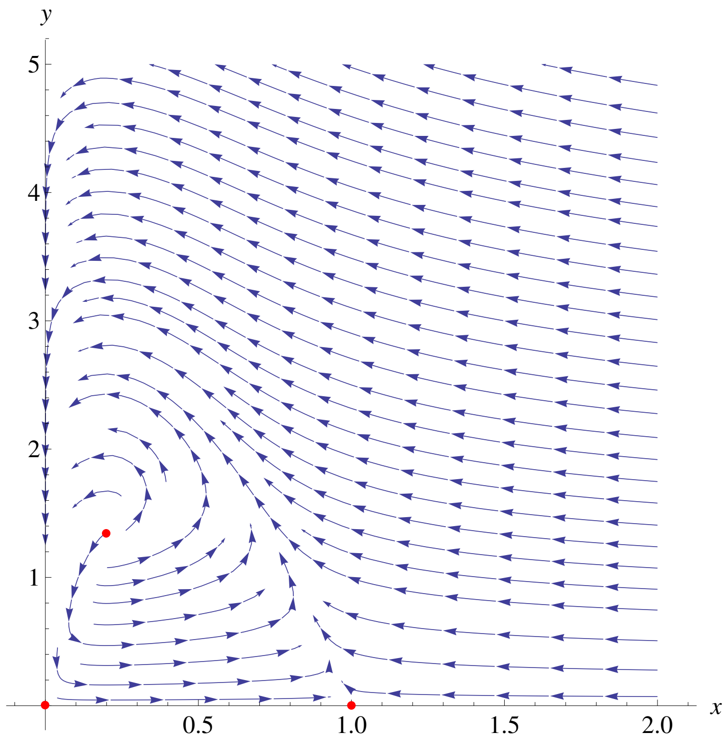
1. В этой области $0 < \gamma < \sqrt{2} - 1$, $\alpha > \frac{4(1-\gamma)(\gamma+1)^3}{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}$. При этом $D > 0$ и $\operatorname{Tr} J(Q) > 0$, то есть точка Q является неустойчивым узлом.

   Пример с $\alpha = 20$, $\gamma = 0.2$:



2. В этой области $0 < \gamma < \sqrt{2} - 1$, $\alpha < \frac{4(1-\gamma)(\gamma+1)^3}{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}$, $D < 0$, $\operatorname{Tr} J(Q) > 0$, то есть Q — неустойчивый фокус.

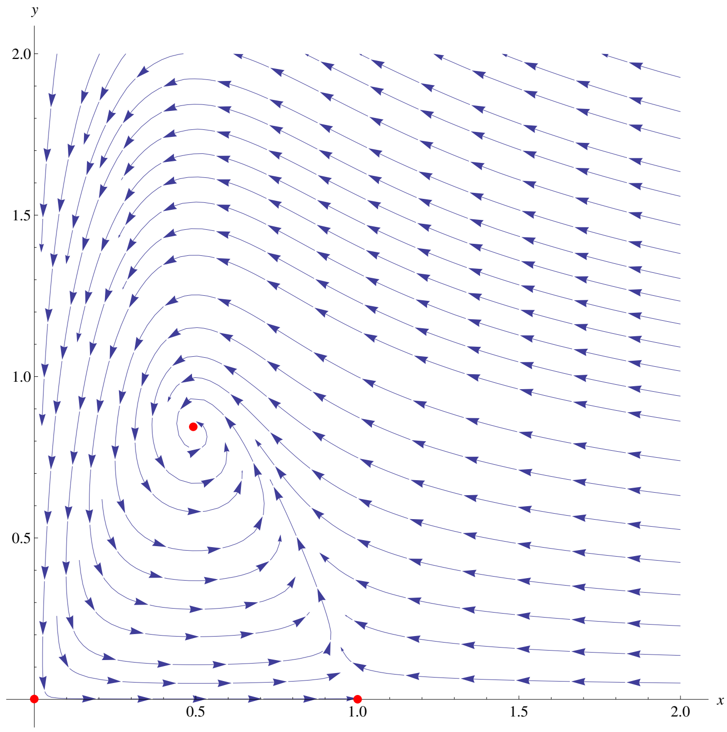
   Пример с $\alpha = 10$, $\gamma = 0.2$:



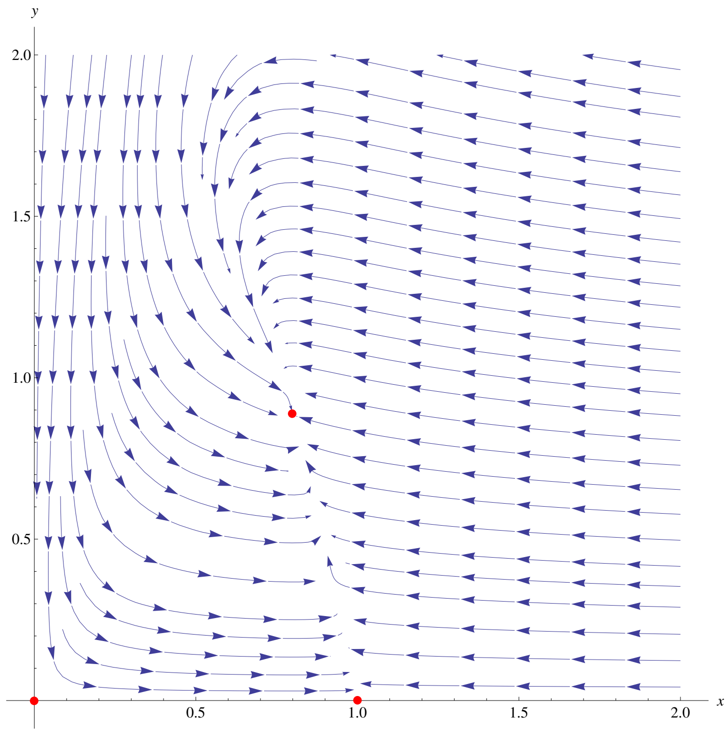
3. В данном случае $\sqrt{2} - 1 < \gamma < 1$, $\alpha < \frac{4(1-\gamma)(\gamma+1)^3}{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}$, $D < 0$, $\operatorname{Tr} J(Q) < 0$, значит, Q —

устойчивый фокус.

Пример с $\alpha = 5$, $\gamma = 0.5$:

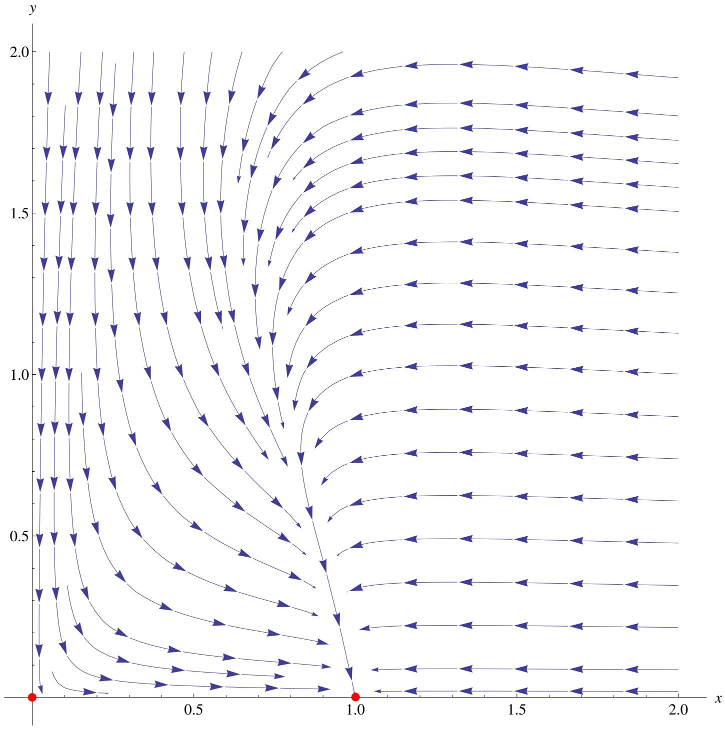


4. В этом случае $\sqrt{2} - 1 < \gamma < 1$, $\alpha > \frac{4(1-\gamma)(\gamma+1)^3}{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}$, $D > 0$, $\operatorname{Tr} J(Q) < 0$, значит, Q — устойчивый узел.



5. В этом случае $\gamma > 1$, то есть точка Q не существует.

   Например, $\alpha = 10$, $\gamma = 1.3$:



6 Бифуркация Андронова-Хопфа

Определение 1. *Бифуркация положения равновесия, соответствующая появлению собственных чисел $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$, называется бифуркацией Пуанкаре-Андронова-Хопфа или бифуркацией рождения цикла.*

Теорема 2. *Любая двумерная однопараметрическая система $\dot{u} = f(u, \alpha)$, имеющая при достаточно малых $|\alpha|$ положение равновесия $u = 0$ с собственными числами $\lambda_{1,2} = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ и удовлетворяющая условиям невырожденности*

$$\frac{d}{d\alpha}\mu(\alpha) \neq 0,$$
$$l_1(0) \neq 0, \tag{8}$$

где

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0}\operatorname{Re}(ig_{20}(0)g_{11}(0) + \omega_0 g_{21}(0)),$$

в окрестностях начала координат локально топологически эквивалентна одной из двух динамических систем:

$$\dot{v_1} = \alpha v_1 - v_2 + \operatorname{sgn} l_1(0)v_1(v_1^2 + v_2^2), \dot{v_2} = v_1 - \alpha v_2 + \operatorname{sgn} l_1(0)v_2(v_1^2 + v_2^2). \tag{9}$$

В исследуемой системе появление чисто мнимых собственных значений возможно только для точки Q при $\gamma = \sqrt{2} - 1$. Следовательно, точка Q имеент координаты

$\left(\sqrt{2}-1, \alpha(\sqrt{2}-1)^2\right)$. Матрица Якоби имеет вид:

$$J(\sqrt{2}-1, \alpha(\sqrt{2}-1)^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1-\sqrt{2} \\ \alpha(\sqrt{2}-1)^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha(\sqrt{2}-1)^3}$.

Проверим применимость теоремы 2. Проверим условие

$$\frac{d}{d\alpha}\mu(\alpha) \neq 0.$$

Из исследований устойчивости Q следует, что $\mu(\gamma) = \operatorname{Tr} J(Q) = -\frac{\alpha(\gamma^2+2\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}$.

$$\begin{gathered} \mu(\sqrt{2}-1) = 0, \\ \frac{d}{d\gamma}\mu(\gamma) = \frac{\alpha(-1+\gamma(5+\gamma(3+\gamma)))}{2(1+\gamma)^3}, \\ \frac{d}{d\gamma}\mu(\sqrt{2}-1) = \alpha(\sqrt{2}-2) \neq 0. \end{gathered}$$

Найдём собственные векторы матриц $J(Q)$ и $J^T(Q)$, соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2:

$$p = \begin{bmatrix} i\frac{1}{\sqrt{\alpha(\sqrt{2}-1)}} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$q = \begin{bmatrix} i\sqrt{\alpha(\sqrt{2}-1)} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Представим $f(u,\gamma)$ в виде $J(Q)u + F(u,\gamma)$. Нормируем p и q так, чтобы $\langle p, q\rangle = 1$ и $\langle \overline{p}, q] = 0\rangle$, для чего поделим p на 2. В данном случае $\langle p, q\rangle = \overline{p_1}q_1 + \overline{p_2}q_2$. Для того, чтобы найти первую ляпуновскую величину, введём комплекснозначную функцию:

$$G(z,\omega) = \langle p, F(zq_1 + \omega\overline{q_1}, zq_2 + \omega\overline{q_2})\rangle.$$

Вычислим некоторые её частные производные по z, ω при $z = \omega = 0$:

$$\begin{gathered} g_{20} = G_{zz}, \\ g_{11} = G_{z\omega}, \\ g_{21} = G_{zz\omega}. \end{gathered}$$

Вычислим ляпуновскую величину по формуле:

$$l_1(0) = \frac{1}{\omega_0}\operatorname{Re}(ig_{20}(0)g_{11}(0) + \omega_0 g_{21}(0)),$$

где $\omega_0 = \sqrt{\alpha(\sqrt{2}-1)^3}$, и получим:

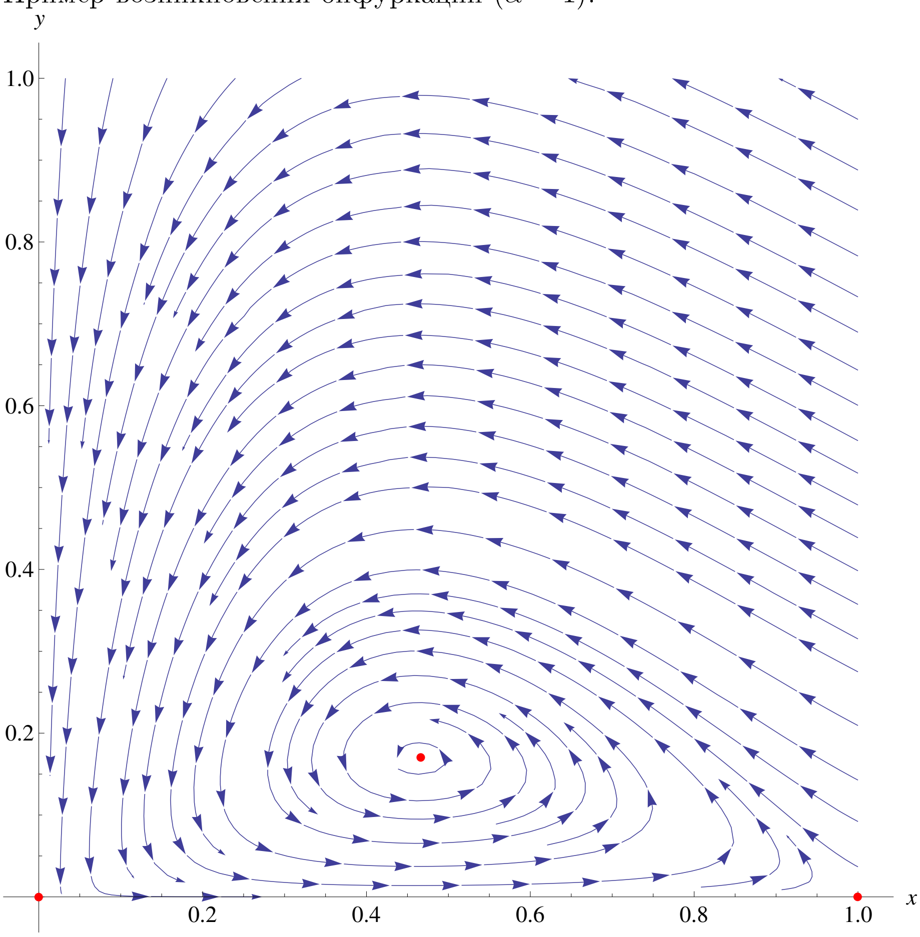
$$l_1(0) = -\frac{1}{4}\frac{\alpha^{3/2}(5\sqrt{2}\alpha - 7\alpha - 3\sqrt{2}+4)}{(\sqrt{(2)}-1)^{3/2}}.$$

Из полученной формулы следует, что $l_1(0) > 0$ при $\alpha \in \left(0, \frac{3\sqrt{2}-4}{5\sqrt{2}-7}\right)$, и $l_1(0) < 0$ при $\alpha > \frac{3\sqrt{2}-4}{5\sqrt{2}-7} \approx 3.414213562373090$. Тогда в зависимости от α бифуркация может иметь различный характер:

1. $l_1 > 0$. В этом случае имеет место суперкритическая бифуркация (мягкая) с рождением единственного устойчивого цикла.

2. В случае $l_1 < 0$ происходит субкритическая бифуркация (жёсткая), то есть система выбрасывается из окарестности неподвижной точки.

Пример возникновения бифуркации ($\alpha = 1$):



Список литературы

[1] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. М.: Физмалит, 2010.