Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Работа по теме

«Анализ системы типа Муравейник»

Студент 515 группы
А. А. Лесничий

Руководитель
д.ф.-м.н., профессор А. С. Братусь

Москва, 2015

Содержание

1 Постановка задачи

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_1(\alpha\sqrt{u_4} - \bar{f}) \\ \dot{u}_2 = u_2(\alpha\sqrt{u_4} - \bar{f}) \\ \dot{u}_3 = u_3(\alpha\sqrt{u_4} - \bar{f}) \\ \dot{u}_4 = u_4(\beta S - \bar{f}) \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $S = u_1 + u_2 + u_3$. При этом должны выполняться условия: $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1, u_i \geq 0, i = 1, \ldots, 4$.

2 Нахождение фитнеса

Для нахождения фитнеса $\bar{f}$ приравняем производные системы (1) к 0:

$$\dot{u}_1 = \dot{u}_2 = \dot{u}_3 = \dot{u}_4 = 0$$

и просуммируем полученные выражения. Заметим, что, в силу условий на переменные, переменную u_4 можно представить в виде

$$u_4 = 1 - S$$

Получим

$$\begin{aligned} 0 = \alpha u_1\sqrt{u_4} + \alpha u_2\sqrt{u_4} + \alpha u_3\sqrt{u_4} + \beta u_4 S - u_1\bar{f} - u_2\bar{f} - u_3\bar{f} - u_4\bar{f} = \alpha\sqrt{u_4}(u_1 + u_2 + u_3) + \\ + \beta u_4 S - \bar{f}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) = \{u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1; S = u_1 + u_2 + u_3\} = \\ = \alpha\sqrt{u_4}S + \beta u_4 S - \bar{f} = \{u_4 = 1 - S\} = \alpha S\sqrt{1 - S} + \beta(1 - S)S - \bar{f} \end{aligned} \tag{2}$$

Отсюда следует, что

$$\bar{f} = S\sqrt{1 - S}\left(\alpha - \beta\sqrt{1 - S}\right) \tag{3}$$

3 Поиск неподвижных точек S

Вместо совокупности переменных $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, мы будем рассматривать одну переменную S. Найдем уравнение для S из системы (1):

$$\begin{aligned} \dot{S} = \dot{u}_1 + \dot{u}_2 + \dot{u}_3 = S(\alpha\sqrt{u_4} - \bar{f}) = \\ = S\left(\alpha\sqrt{1 - S} - S\sqrt{1 - S}\left(\alpha - \beta\sqrt{1 - S}\right)\right) = S(1 - S)\left(\alpha\sqrt{1 - S} - \beta S\right) \end{aligned} \tag{4}$$

В итоге мы получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{S} = S(1 - S)\left(\alpha\sqrt{1 - S} - \beta S\right) \tag{5}$$

Приравняем $\dot{S}$ к 0:

$$\left[\begin{array}{c} S = 0 \\ S = 1 \\ \left(\alpha\sqrt{1-S} - \beta S\right) = 0 \end{array}\right.$$

Для третьего случая мы получаем два корня

$$S_1 = \frac{-\alpha^2 + \alpha\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2}}{2\beta^2} > 0,\ S_2 = \frac{-\alpha^2 - \alpha\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2}}{2\beta^2} < 0$$

Второй корень нам не подходит, так как он меньше 0, что противоречит условиям системы. Несложно показать, что $S_1 < 1$. В итоге мы имеем 3 устойчивые точки:

$$\left[\begin{array}{c} S = 0 \\ S = 1 \\ S = \frac{-\alpha^2 + \alpha\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2}}{2\beta^2} \end{array}\right.$$

Рассмотрим производную функции

$$f(x) = \left(\alpha\sqrt{1-x} - \beta x\right)$$

Она имеет вид

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = -\frac{\alpha}{2\sqrt{1-x}} - \beta < 0$$

В силу того, что производная функции $f(S)$ меньше 0, а сама функция имеет единственный корень S_1 на отрезке $[0, 1]$, то можно утверждать, что выполнены неравенства:

$$\begin{cases} f(S) > 0, & S \in [0, S_1) \\ f(S) < 0, & S \in (S_1, 1] \end{cases}$$

Из этого следует, что точки 0 и 1 являются неустойчивыми, а точка S_1 устойчивым положением равновесия уравнения (5).

В терминах изначальных переменных мы получаем следующее:

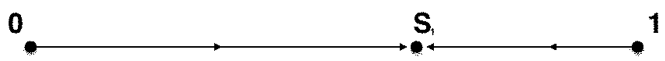

Рис. 1: Характеристика устойчивости точек переменной S

- Неустойчивая точка

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) = (0, 0, 0, 1)$$

- «Неустойчивая плоскость»

$$u_4 = 0$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = 1$$

- «Устойчивая плоскость»

$$u_4 = 1 - S_1$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = S_1$$

4 Предельное положение точки S_1

Изучим вопрос «схлопывания» отрезков $[0, S_1]$ и $[S_1, 1]$. Для этого определим, при каких значениях на параметры α и β выполняются равенства

$$S_1 = 1$$

и

$$S_1 = 0$$

Для первого равенства имеем

$$\frac{-\alpha^2 + \alpha\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2}}{2\beta^2} = 1$$

Такое миеет место быть, только в случае $\alpha = 1$. В терминах муравейника это означает, что если королева не «подпитывает» своих поданных, то они вымирают.
Случай $S_1 = 0$ оказался невозможным ни для каких значений параметров.

5 Примеры

Проведем эмуляцию поведения системы при разных значениях параметров. Эмуляция будет проводится в среде `Matlab`. Начальные точки траекторий генерируются случайным образом.

5.1 Пример 1

Для начала возьмем следующие значения параметров

$$\alpha = 0.1,\ \beta = 0.01$$

При таких параметрах $S_1 \approx 0.990195$.
Как мы видим из илюстрации (2), значения S стремятся к устойчивой точке S_1. На изображении (3) показаны фазовые траектории на интервале $[0, 1000]$. Все они стремятся к найденной ранее «устойчивой» плоскости $u_1 + u_2 + u_3 = S_1$.

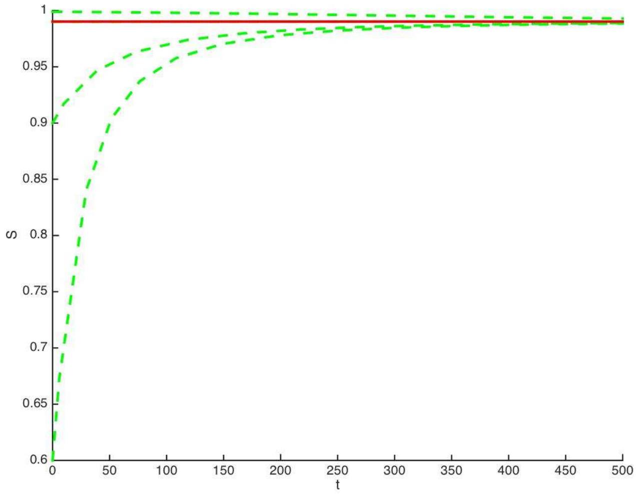

Рис. 2: Зависимость параметра от S времени. Красным выделена линия значения S_1

5.2 Пример 2

В первом примере значение S было очень близко к 1. Подберм теперь параметры так, чтобы оно стало чуть меньше. Пусть теперь

$$\beta = 0.07$$

а α оставим неизменным. Теперь S примерно равно 0.7352. Изображения (4) и (5) так же подтверждают все выводы, полученные до этого аналитическим путем.

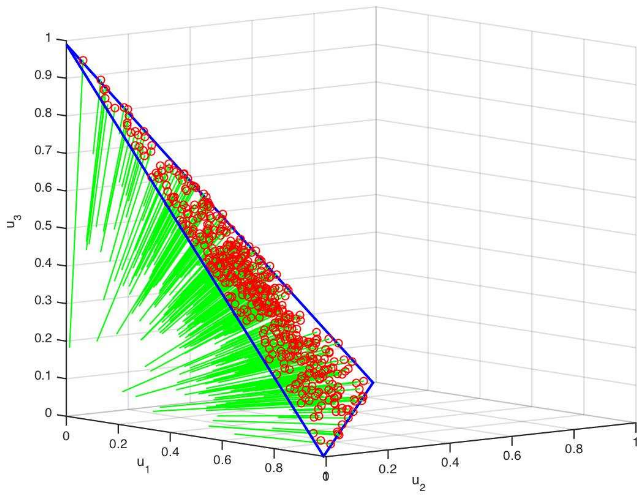

Рис. 3: Фазовый портрет переменных u_1, u_2, u_3. Красмым цветом выделены позиции траекторий в конечный момент времени. Синем – плоскость $u_1 + u_2 + u_3 = S_1$

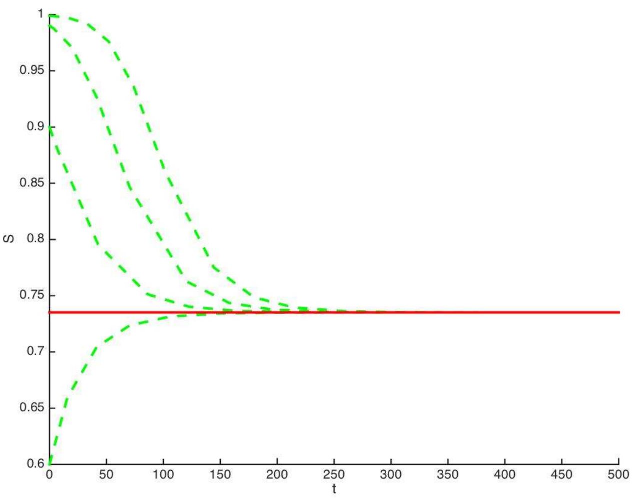

Рис. 4: Зависимость параметра от S времени

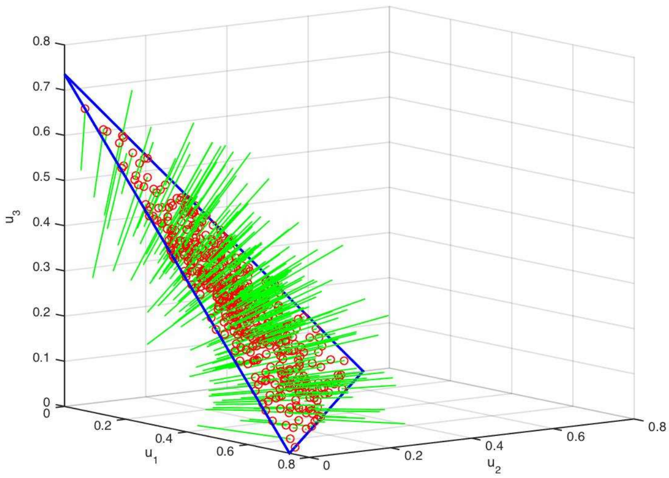

Рис. 5: Фазовый портрет переменных u_1, u_2, u_3.