Моделирование динамики биологической системы «Муравейник»

Кафедра системного анализа

2015 г.

Постановка задачи

Рассматривается динамическая система

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_1 \left(\alpha u_4 + k_1 u_2 + k_2 u_3 - \overline{f}\right), \\ \dot{u}_2 = u_2 \left(\alpha u_4 + k_1 u_3 + k_2 u_1 - \overline{f}\right), \\ \dot{u}_3 = u_3 \left(\alpha u_4 + k_1 u_1 + k_2 u_2 - \overline{f}\right), \\ \dot{u}_4 = u_4 \left(\beta \left(u_1 + u_2 + u_3\right) - \overline{f}\right), \end{cases}$$

где

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1,$$
$$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ k = k_1 = k_2 > 0,$$
$$S = u_1 + u_2 + u_3.$$

Нахождение фитнеса

Из $\dot{u}_1 = \dot{u}_2 = \dot{u}_3 = \dot{u}_4 = 0$ получим

$$\begin{cases} \alpha u_4 + k_1 u_2 + k_2 u_3 - \overline{f} = 0, \\ \alpha u_4 + k_1 u_3 + k_2 u_1 - \overline{f} = 0, \\ \alpha u_4 + k_1 u_1 + k_2 u_2 - \overline{f} = 0, \\ \quad \beta\,(u_1 + u_2 + u_3) - \overline{f} = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_4 = 1 - \frac{\overline{f}}{\beta}$$

$$\Rightarrow \overline{f} = \frac{3\alpha\beta}{3\beta - 2k + 3\alpha} > 0.$$

$$\frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \frac{u_3'}{u_3} = 3\alpha(1 - S) + (k_1 + k_2)S - 3\overline{f}.$$

$$(\ln(u_1 u_2 u_3))' = 3\alpha(1 - S) + (k_1 + k_2)S - 3\overline{f}.$$

$$P = u_1 u_2 u_3, P_0 = u_1(0)u_2(0)u_3(0)$$

$$P(t) = P_0 \exp\left\{ \int\limits_0^t \left(3\alpha(1 - S) + (k_1 + k_2)S - 3\overline{f}\right) dt \right\}.$$

Значит, при $t \to \infty$ $P \to 0$, $P \to \infty$ или $P \to \text{const}$.

u_1, u_2, u_3 ограничены $\Rightarrow P \to 0$. Значит, $u_i \to 0$. Из $S \leqslant 1$ следует, что

$$S(2k - 3\alpha) + 3\alpha - 3f \leqslant 2k - 3f \leqslant 0$$

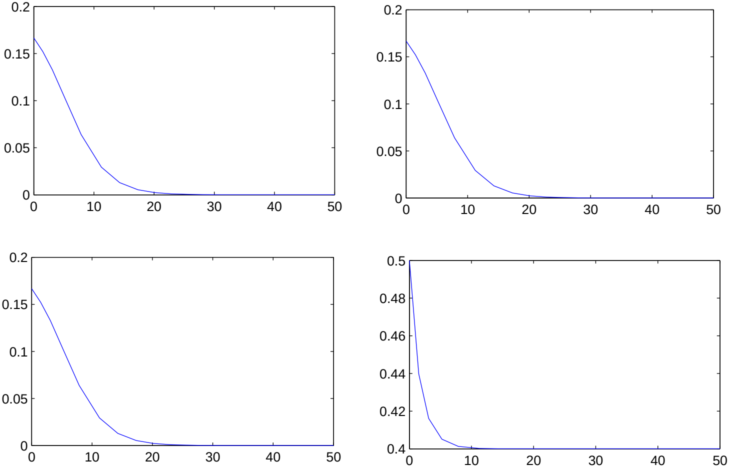
Для выживании в популяции королевы необходимо

$$\begin{cases} 3\beta - 2k + 3\alpha > 0, \\ k < \dfrac{3\alpha\beta}{6\beta - 4k + 3\alpha}, \\ 3k - 3\alpha > 0. \end{cases}$$

Откуда получаем $k = 1.5, \beta = \frac{4}{3}, \alpha = 0.5 \Rightarrow f = \frac{4}{5}$.

Пример 1

Начальные условия: $u_1 = u_2 = u_3 = 1/6, u_4 = 0.5$



Пример 2

Начальные условия: $u_1 = u_2 = 0.2, u_3 = 0.1, u_4 = 0.5$