# Лабораторная работа №6

## Численные методы

### Вариант 1

**1** [1]. Построить график разности $S_n - S$, где $S_n$ — $n$-я частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = S$. Вывести оценку на погрешность $\psi(n)$ — убывающую и сходящуюся к нулю функцию, такую, что $|S_n - S| \leqslant \psi(n)$ для всех $n$. Построить график $\psi(n)$.

**2** [2]. Пусть $S_n(\ \cdot\ ; f, x_0)$ — приближение функции $f$ рядом Тейлора с центром в точке $x_0$ с $n$ членами. Пусть $\psi_N(x) = |S_n(\ \cdot\ ; f, x_0) - f(x)|$. Построить график $\psi(\cdot)$ (для разных $N$) для следующих функций: $e^x$ с центром в произвольной точке; $|x|x^{20}$ с центром в нуле; $1/x$ с центром в окрестности нуля. Объяснить поведение графиков.

**3** [1]. Найти корни уравнения $\cos(x) = x/\pi$ с помощью функции `fzero`. Использовать указатели на функции. Для определения начальных приближений нарисовать левую и правую часть на графике и воспользоваться функцией `ginput`.

**4** [1]. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

нарисовать график на отрезке $[-1, 1]$: по оси абсцисс — начальное приближение, по оси ординат — корень функции, найденный с помощью `fzero`.

**5** [2]. Реализовать функцию, ищущую минимум функции многих переменных методом градиентного спуска. Функцию, возвращающую градиент, задёт пользователь. Для функции двух переменных построить набор линий уровня, на которых отметить шаги алгоритма. Сравнить результат работы с функцией `fminbnd`.

**6** [2]. По аналогии с функцией `trapz` реализовать аналогичные функции `rectangles` (интегрирование методом прямоугольников) и `simpson` (методом Симпсона). С помощью них построить график первообразной функции $f(x) = \sin(x)/x$. Сравнить внутреннюю скорость сходимости при использовании всех трёх методов (внутренняя скорость сходимости определяется с помощью сравнения разностей решений при шаге $h$ и $h/2$ нарисовать график этой ошибки в зависимости от $h$). Привести примеры интегрирования функций, для которых погрешность интгерирования можно оценить аналитически заранее (через оценки) и апостериори (функция должна интегрироваться аналитически).

**7** [1]. Задать формулу для некоторой функции и её производной. На одном графике в логарифмическом масштабе (`loglog`) вывести:

1. Модуль разности между точным значением производной в некоторой точке и правой разностной производной, в зависимости от шага численного дифференцирования (для получения равномерной сетки в логарифмическом масштабе используйте функцию `logspace`).
2. То же самое для центральной разностной производной.

На получившемся графике показать:

1. Скорость сходимости для правой и центральной разностных производных;
2. Ухудшение точности аппроксимации при малых значениях шага численного дифференцирования (определить значение шага начиная с которого уменьшение шага метода не приводит к увеличению точности аппроксимации).

Методом наименьших квадратов приблизить время рассчёта полиномом.

**8** [2]. Рассмотреть систему «хищник-жертва»:

$$\begin{array}{rcrcrl} \dot{x} &=& \alpha x &-& \gamma xy, & x \in \mathbb{R}, \\ \dot{y} &=& -\beta y &+& \delta xy, & x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Решить систему численно. Нарисовать на плоскости фазовые кривые $(x(t), y(t))$ и в пространстве интегральные $(x(t), y(t), t)$, полученные численно и аналитически, для различных наборов значений параметров $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x_0, y_0)$.

**9** [2]. Движение шарика на плоскости описывается уравнением $\ddot{x} = 0,\ x \in \mathbb{R}^2$. Реализовать моделирование движения шарика внутри участка, окруженного перегородкой в форме окружности. При попадании на перегородку шарик от нее упруго отскакивает (скорость отражается относительно нормали к касательной в точке попадания и уменьшается в $\alpha$ раз). Нарисовать анимацию, изображающую движение шарика с ненулевой начальной скоростью.

**10** [2]. Для линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка построить фазовый портрет. Подобрать системы таким образом, чтобы проиллюстрировать различные виды особых точек (узел, дикритический узел, седло, фокус, центр).

**11** [4]. Построить решение методом бегущих волн задачи Коши для волнового уравнения:

$$u_{tt} = u_{xx},\ u(0, x) = u_0(x),\ u_x(0, x) = v_0(x),\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0, T].$$

Нарисовать анимацию измения профиля струны со временем. Функции $u_0, v_0$ передавать как function handle.

**12** [4]. Создать в системе $\LaTeX$ отчёт по выполнению предыдщуего задания. Отчёт обязательно должен содержать:

1. Полную постановку задачу с описанием всех параметров и определением решения задачи.
2. Подробное описание процесса получения решения.
3. Несколько приммеров работы программы с указнием всех входных праметров.
4. Пример сравнения работы программа для случая, когда решение можно получить в виде элементарной функции.
5. Отчёт должен удовлетворять Требованиям по Написанию Отчетов.

# Лабораторная работа №6

**Численные методы**

Вариант 2

**1** [1]. Построить график разности $S_n - S$, где $S_n$ — $n$-я частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = S$. Вывести оценку на погрешность $\psi(n)$ — убывающую и сходящуюся к нулю функцию, такую, что $|S_n - S| \leqslant \psi(n)$ для всех $n$. Построить график $\psi(n)$.

**2** [2]. Пусть $S_n(\,\cdot\,; f, x_0)$ — приближение функции $f$ рядом Тейлора с центром в точке $x_0$ с $n$ членами. Пусть $\psi_N(x) = |S_n(\,\cdot\,; f, x_0) - f(x)|$. Построить график $\psi(\cdot)$ (для разных $N$) для следующих функций: $\sin(x)$ с центром в произвольной точке; $\exp(-\frac{1}{x^2})$ с центром в окрестности нуля; $x + |x|x^{15} + |x|x^4$ с центром в 0. Объяснить поведение графиков.

**3** [1]. Найти корни уравнения $\sin(x) = x^3 + x - 1$ с помощью функции `fzero`. Использовать указатели на функции. Для определения начальных приближений нарисовать левую и правую часть на графике и воспользоваться функцией `ginput`.

**4** [1]. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} x\cos(\ln x)\,, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

нарисовать график на отрезке $[-1, 1]$: по оси абсцисс — начальное приближение, по оси ординат — корень функции, найденный с помощью `fzero`.

**5** [2]. Реализовать функцию, ищущую минимум функции многих переменных методом покоординатного спуска. (Функцию, возвращающую частные производные, задаёт пользователь.) Для функции двух переменных построить набор линий уровня, на которых отметить шаги алгоритма. Сравнить результат работы с функцией `fminbnd`.

**6** [2]. По аналогии с функцией `trapz` реализовать аналогичные функции `rectangles` (интегрирование методом прямоугольников) и `simpson` (методом Симпсона). С помощью них построить график первообразной функции $f(x) = \exp(-x^2)$. Сравнить внутреннюю скорость сходимости при использовании всех трёх методов (внутренняя скорость сходимости определяется с помощью сравнения разностей решений при шаге $h$ и $h/2$ нарисовать график этой ошибки в зависимости от $h$). Привести примеры интегрирования функций, для которых погрешность интгерирования можно оценить аналитически заранее (через оценки) и апостериори (функция должна интегрироваться аналитически).

**7** [1]. Задать формулу для некоторой функции и её производной. На одном графике в логарифмическом масштабе (`loglog`) вывести:

1. Модуль разности между точным значением производной в некоторой точке и правой разностной производной, в зависимости от шага численного дифференцирования (для получения равномерной сетки в логарифмическом масштабе используйте функцию `logspace`).
2. То же самое для центральной разностной производной.

На получившемся графике показать:

1. Скорость сходимости для правой и центральной разностных производных;
2. Ухудшение точности аппроксимации при малых значениях шага численного дифференцирования (определить значение шага начиная с которого уменьшение шага метода не приводит к увеличению точности аппроксимации).

Методом наименьших квадратов приблизить время рассчёта полиномом.

**8** [2]. Рассмотреть систему двух тел на плоскости:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= G\frac{m_1 m_2(x_2 - x_1)}{\|x_1 - x_2\|^3}, \quad x_1 \in \mathbb{R}^2, \\ m_2\ddot{x}_2 &= G\frac{m_1 m_2(x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|^3}, \quad x_2 \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Решить систему численно. Нарисовать на плоскости анимацию движения траекторий $x_1(t), x_2(t)$. Подобрать параметры так, что бы продемонстрировать движение двух типов: по пересекающимся орбитам (“восьмёрка”) и вокруг общего центра.

**9** [2]. Движение шарика на плоскости описывается уравнением $\ddot{x} = -\alpha x$, $x \in \mathbb{R}^2$. Реализовать моделирование движения шарика внутри участка, окруженного четырьмя перегородками, параллельными осям координат. При попадании на перегородку шарик от нее упруго отскакивает (так, при ударе о вертикальную стенку в момент $t'$ вертикальная компонента скорости меняет знак: $x_1(t'+0) = x_1(t'-0)$, $x_2(t'+0) = -x_2(t'-0)$, и так далее). Нарисовать анимацию, изображающую движение шарика с ненулевой начальной скоростью.

**10** [2]. Для линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка построить фазовый портрет. Подобрать системы таким образом, чтобы проиллюстрировать различные виды особых точек (узел, дикритический узел, седло, фокус, центр).

**11** [4]. Построить решение методом Фурье краевой задачи для уравнения теплопроводности на сегменте $[0, l]$:

$$u_t = a^2 u_{xx},\ u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t \in [0,T],\ u(x,0) = \phi(x),\ x \in [0,l].$$

Нарисовать анимацию изменения тепла со временем. Фунцию $\phi(x)$ передавать как function handle.

**12** [4]. Создать в системе LaTeX отчёт по выполнению предыдщуего задания. Отчёт обязательно должен содержать:

1. Полную постановку задачу с описанием всех параметров и определением решения задачи.
2. Подробное описание процесса получения решения.
3. Несколько приммеров работы программы с указнием всех входных праметров.
4. Пример сравнения работы программа для случая, когда решение можно получить в виде элементарной функции.
5. Отчёт должен удовлетворять Требованиям по Написанию Отчетов.

# Лабораторная работа №6

**Численные методы**

Вариант 3

**1** [1]. Построить график разности $S_n - S$, где $S_n$ — $n$-я частичная сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = S$. Вывести оценку на погрешность $\psi(n)$ — убывающую и сходящуюся к нулю функцию, такую, что $|S_n - S| \leqslant \psi(n)$ для всех $n$. Построить график $\psi(n)$.

**2** [2]. Пусть $S_n(\,\cdot\,; f, x_0)$ — приближение функции $f$ рядом Тейлора с центром в точке $x_0$ с $n$ членами. Пусть $\psi_N(x) = |S_n(\,\cdot\,; f, x_0) - f(x)|$. Построить график $\psi(\cdot)$ (для разных $N$) для следующих функций: $\cos(x)$ с центром в произвольной точке; $1/(x^2+1)$ с центром в нуле; $\ln(1+x)$ с центром в 0. Объяснить поведение графиков.

**3** [1]. Найти корни уравнения $\sqrt{x} = \operatorname{tg} x$ с помощью функции `fzero`. Использовать указатели на функции. Для определения начальных приближений нарисовать левую и правую часть на графике и воспользоваться функцией `ginput`.

**4** [1]. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

нарисовать график на отрезке $[-1, 1]$: по оси абсцисс — начальное приближение, по оси ординат — корень функции, найденный с помощью `fzero`.

**5** [2]. Реализовать функцию, ищущую минимум функции многих переменных методом Ньютона. (Функцию, возвращающую градиент и гессиан, задаёт пользователь.) Для функции двух переменных построить набор линий уровня, на которых отметить шаги алгоритма. Сравнить результат работы с функцией `fminbnd`.

**6** [2]. По аналогии с функцией `trapz` реализовать аналогичные функции `rectangles` (интегрирование методом прямоугольников) и `simpson` (методом Симпсона). С помощью них построить график первообразной функции $f(x) = \cos(x^2)$. Сравнить внутреннюю скорость сходимости при использовании всех трёх методов (внутренняя скорость сходимости определяется с помощью сравнения разностей решений при шаге $h$ и $h/2$ нарисовать график этой ошибки в зависимости от $h$). Привести примеры интегрирования функций, для которых погрешность интгерирования можно оценить аналитически заранее (через оценки) и апостериори (функция должна интегрироваться аналитически).

**7** [1]. Задать формулу для некоторой функции и её производной. На одном графике в логарифмическом масштабе (`loglog`) вывести:

1. Модуль разности между точным значением производной в некоторой точке и правой разностной производной, в зависимости от шага численного дифференцирования (для получения равномерной сетки в логарифмическом масштабе используйте функцию `logspace`).
2. То же самое для центральной разностной производной.

На получившемся графике показать:

1. Скорость сходимости для правой и центральной разностных производных;
2. Ухудшение точности аппроксимации при малых значениях шага численного дифференцирования (определить значение шага начиная с которого уменьшение шага метода не приводит к увеличению точности аппроксимации).

Методом наименьших квадратов приблизить время рассчёта полиномом.

**8** [2]. Рассмотреть систему двух тел в пространстве:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= G\frac{m_1 m_2(x_2 - x_1)}{\|x_1 - x_2\|^3}, \quad x_1 \in \mathbb{R}^3, \\ m_2\ddot{x}_2 &= G\frac{m_1 m_2(x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|^3}, \quad x_2 \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Решить систему численно. Нарисовать в пространстве анимацию движения траекторий $x_1(t), x_2(t)$. Методом наименьших квадратов построить плоскость, в которой происходит движение.

**9** [2]. Для линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка построить фазовый портрет. Подобрать системы таким образом, чтобы проиллюстрировать различные виды особых точек (узел, дикритический узел, седло, фокус, центр).

**10** [2]. Реализовать расчёт траектории нелинейного маятника с диссипацией и отражением при прохождении начала координат:

$$x'' = -\sin(x) - \alpha x', \text{ отражение: } x' := -x' \text{ при } x = 0$$

Вывести график траектории маятника.

**11** [4]. Рассмотреть задачу оптимального управления

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(t),\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1,\ \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle u(t), u(t)\rangle\, dt \to \min,\ x(t) \in \mathbb{R}^2,\ u(t) \in \mathbb{R}^m, m \leqslant 2.$$

Матрицы $A, B$ — постоянные. Решить систему методом моментов и нарисовать оптимальную траекторию на плоскости. Функцию $f(t)$ передавать как function handle.

**12** [4]. Создать в системе LaTeX отчёт по выполнению предыдщуего задания. Отчёт обязательно должен содержать:

1. Полную постановку задачу с описанием всех параметров и определением решения задачи.
2. Подробное описание процесса получения решения.
3. Несколько приммеров работы программы с указнием всех входных праметров.
4. Пример сравнения работы программа для случая, когда решение можно получить в виде элементарной функции.
5. Отчёт должен удовлетворять Требованиям по Написанию Отчетов.