Компьютерный практикум к курсу “Стохастический анализ и моделирование”

Требования к оформлению отчета:

1. Все используемые построения должны быть обоснованы.
2. Каждое задание следует иллюстрировать графически с объяснением полученных результатов.
3. При использовании нетривиальных теорем необходимо привести их полную формулировку с доказательством или ссылкой на литературу.
4. Окончательное оформление отчета должно быть выполнено в системе LaTeX.
5. Текст программ в отчет не включать.

Задание №1

1. Реализовать генератор схемы Бернулли с заданной вероятностью успеха p. На основе генератора схемы Бернулли построить датчик для биномиального распределения и геометричекого распределения.
2. Для геометрического распределения проверить свойство отсутствия памяти.
3. Рассмотрим игру в орлянку – бесконечную последовательность независимых испытаний с бросанием правильной монеты. Обозначим через $X_1, X_2, \ldots$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, каждая из которых принимает значения 1, если в соответствующем испытании выпал герб, и -1 в противном случае (с вероятностью $= 1/2$). Обозначим суммарный выигрыш через $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Необходимо произвести $N = 1000$ испытаний Бернулли и построить траекторию процесса $Y(t)$, $t \in [0, 1]$, которая в точках $t_n = n/N$, где $n = 0, 1, \ldots N$, равна $Y(t_n) = S_n/\sqrt{N}$, а в остальных случаях определяется с помощью кусочно-линейной интерполяции (т. е. в виде ломаной).

Задание №2

1. Построить датчик для сингулярного распределения, отвечающий канторовой функции распределения.
2. Для канторовых случайных величин проверить свойство симметричности относительно $\frac{1}{2}$ (X и $1 - X$ распределены одинаково) и самоподобия (условное распределение Y при условии $Y \in [0, 1/4]$ совпадает с распределением $Y/4$).

Задание №3

1. Построить датчик экспоненциального распределения. Проверить свойство отсутствия памяти.

2. На основе датчика экспоненциального распределения построить датчик пуассоновского распределения.

3. Построить датчик пуассоновского распределения как предел биномиального распределения. С помощью критерия хи-квадрат Пирсона убедиться, что получен датчик распределения Пуассона.

4. Построить датчик стандартного нормального распределения методом моделирования случайных величин парами с переходом в полярные координаты (вывод обосновать).

Задание №4

1. Построить датчик распределения Коши.

2. Мажорируя плотность стандартного нормального распределения плотностью распределения Коши с параметрами сдвига a и масштаба b, обеспечить максимальную эффективность метода фон Неймана моделирования нормального распределения.

3. Сравнить скорость моделирования в задании 3 и задании 4.

Задание №5

1. Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Убедиться эмпирически в справедливости ЗБЧ и ЦПТ, т. е. исследовать поведение суммы $\frac{S_n}{n}$ и эмпирического распределения величины
$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right).$$

2. Считая μ и σ^2 неизвестными, для п. 1 построить доверительные интервалы для среднего и дисперсии.

3. Пусть $X_i \sim a + b\xi$, ξ имеет стандартное распределение Коши. Проверить эмпирически, как ведет себя $\frac{S_n}{n}$. Результат объяснить.

Задание №6

Посчитать интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\left(x_1^2+\ldots+x_{10}^2+\frac{1}{2^7\cdot x_1^2\cdot\ldots\cdot x_{10}^2}\right)}}{x_1^2\cdot\ldots\cdot x_{10}^2}\,dx_1\ldots dx_{10}$$

- методом Монте-Карло;
- методом квадратур, сводя задачу к вычислению собственного интеграла Римана.

Для каждого случая оценить точность вычислений.