Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Кафедра Системного Анализа

Отчёт по заданию курса «Суперкомпьютерное моделирование и технологии»

Студент 615 группы
В. С. Терёшин

Москва, 2016г.

Содержание

1. Постановка задачи

В прямоугольной области $\Pi = [A_1, A_2] \times [B_1, B_2]$ требуется найти дважды дифференцируемую функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую дифференциальным уравнению

$$-\Delta u = F(x, y),\ A_1 < x < A_2,\ B_1 < y < B_2$$

и дополнительному условию $u(x, y) = \phi(x, y)$ во всех граничных точках (x, y) прямоугольника.

Оператор Лапласа Δ определяется равенством $\Delta u = \frac{\delta^2 u}{\delta^2 x} + \frac{\delta^2 u}{\delta^2 y}$.

Функции $F(x, y)$ и $\phi(x, y)$ определены следующим образом:

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)\sin(xy),$$
$$\phi(x, y) = 1 + \sin(xy),$$
$$A_1 = -2,\ A_2 = 2,\ B_1 = -2, B_2 = 2.$$

2. Численный алгоритм решения

В расчётной области Π определяется прямоугольная сетка

$$\omega_h = \{x_i, y_j, i = 0, 1, \ldots, N_1, j = 0, 1, 2, \ldots, N_2\},$$

где $A_1 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N_1} = A_2$ — разбиение $[A_1, A_2]$ оси OX, а $B_1 = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{N_2} = B_2$ — разбиение $[B_1, B_2]$ оси OY. Через ω_h обозначим множество внтуренних, а через γ_h — множество граничных узлов сетки. Пусть. Рассмотрим линейное пространство H функций, заданных на сетке. Будем считать, что в этом пространстве заданы скалярное произведение и евклидова норма

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1} \hat{h}_i^{(1)}\hat{h}_j^{(2)} u_{ij} v_{ij}.$$

Где $u_{ij} = u(x_i, y_j)$, $v_{ij} = v(x_i, y_j)$ — любые функции из пространсва H. Для аппроксимации уравнения Пуассона используется пятиточечный разностный оператор Лапласа, который можно определить во внутренних узлах сетки следующим равенством:

$$-\Delta_h p_{ij} = \frac{1}{h_i^{(1)}}\left(\frac{p_{ij} - p_{i-1,j}}{h_{i-1}^{(1)}} - \frac{p_{i+1,j} - p_{ij}}{h_i^{(1)}}\right) + \frac{1}{h_j^{(2)}}\left(\frac{p_{ij} - p_{i,j-1}}{h_{j-1}^{(2)}} - \frac{p_{i,j+1} - p_{ij}}{h_j^{(2)}}\right).$$

Предполагается, что функция $p = p(x_i, y_j)$ определена во всех точках сетки. Приближенным решением искомой задачи Дирихле называется функция $p = p(x_i, y_j)$, удовлетворяющая уравнениям

$$-\Delta_h p_{ij} = F(x_i, y_j),\ x_i, y_j \in \omega_h,$$
$$p_{ij} = \phi(x_i, y_j),\ x_i, y_j \in \gamma_h.$$

3. Решение системы линейных алгебраических уравнений

Приближенное решение СЛАУ получается итерационным методом сопряженных градиентов.

Первая итерация метода выполняется согласно методу скорейшего спуска, а процесс выполнения последующих итераций отличается.

Начальное приближение $p_{ij}(0) = \phi(x_i, y_j),\ x_i, y_j \in \gamma_h$, во внутренних узлах сетки первое приближение осуществляется любыми числами (в нашем случае все внутренние узлы сетки инициализированы значением 0).

Метод является одношаговым, первая итерация $p_{ij}^{(1)}$ вычисляется по итерации $p_{ij}^{(0)}$ согласно следующим равенствам: $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(0)} - \tau^{(k+1)} r_{ij}^{(0)}$. Невязка определяется согласно формуле

$$r_{ij}^{(k)} = -\Delta_h p_{ij}^{(k)} - F(x_i, y_j),\ (x_i, y_j) \in \omega_h,$$
$$r_{ij}^{(k)} = 0,\ (x_i, y_j) \in \gamma_h.$$

Итерационный параметр: $\tau^{(k+1)} = (r^{(k)}, r^{(k)})(-\Delta_h r^{(k)}, r^{(k)})$.

Последующие итерации вычисляются по методу сопряженных градиентов, определенный формулами:

$$p_{ij}^{(k+1)} = p_{ij}^{(k)} - \tau^{(k+1)} g_{ij}^{(k)},$$
$$\tau^{(k+1)} = (r^{(k)}, g^{(k)})(-\Delta_h g^{(k)}, g^{(k)}),$$
$$g_{ij}^{(k)} = r_{ij}^{(k)} - a^k g_{ij}^{(k-1)}, k = 1, 2, \ldots,$$
$$g_{ij}^{(0)} = r_{ij}^{(0)},$$
$$a^k = (-\Delta_h r^{(k)}, g^{(k-1)})(-\Delta_h g^{(k-1)}, g^{(k-1)}).$$

Итерационный процесс останавливается, как только максимум-норма разности приближенных решений на итерациях $(n+1)$ и n становится меньше заранее заданного числа ε, равного 10^{-4}.

4. Описание работы программы

1) Принимает на вход: MPI параметры, определяющие число процессов, OpenMP параметры, определяющие число потоков внутри процесса, задан размер сетки по осям Ox и Oy; задано условие на погрешность;

2) Обмен между процессами осуществляется с помощью функций `MPI_Bcast`, `MPI_Reduce`, `MPI_Allgatherv`;

3) Из средств OpenMP используются конструкции для создания потоков (директива parallel) на одном вычислительном узле.

5. Время работы программы

Результаты работы на ПВС «Ломоносов»:

Число процессоров	Размер сетки	Время работы	Ускорение
8	1000×1000	23.0124	
16	1000×1000	15.1178	1.5222
32	1000×1000	8.9701	1.6853
128	1000×1000	3.0169	2.9732
8	2000×2000	149.8731	
16	2000×2000	86.3512	1.7356
32	2000×2000	47.1164	1.8327
128	2000×2000	12.5504	3.7541

Результаты работы на ПВС IBM BG/P без OpenMP:

Число процессоров	Размер сетки	Время работы	Ускорение
128	1000×1000	20.9734	
256	1000×1000	10.7882	1.9441
512	1000×1000	5.9136	1.8243
128	2000×2000	127.7592	
256	2000×2000	64.0003	1.9962
512	2000×2000	36.7831	1.7399

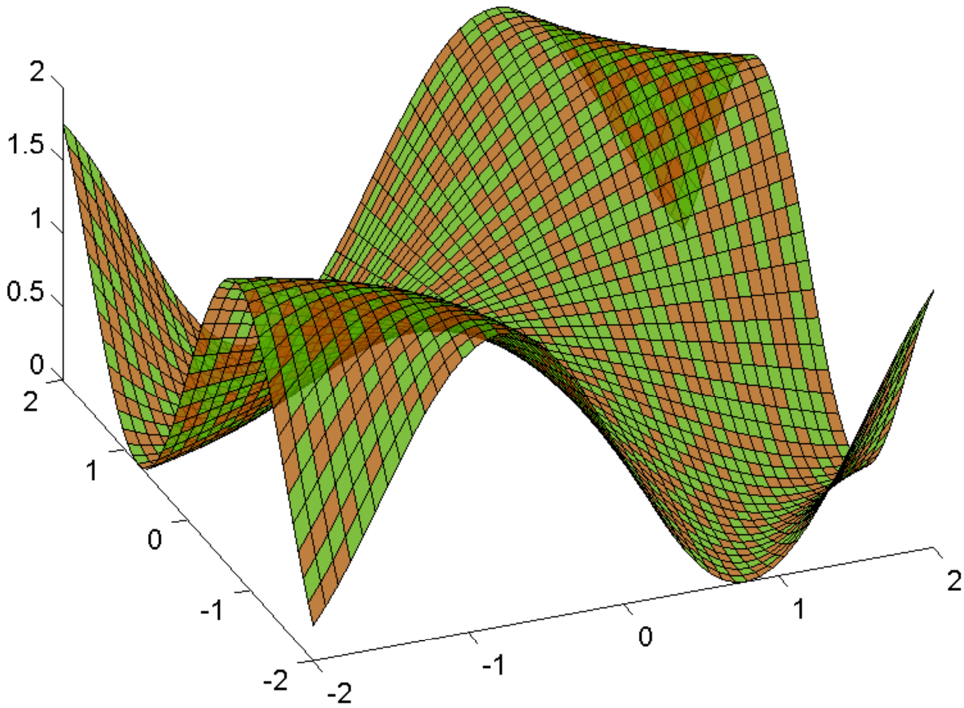
Результаты работы на ПВС IBM BG/P с OpenMP:

Число процессоров	Размер сетки	Время работы	Ускорение
128	1000×1000	10.5649	
256	1000×1000	5.9375	1.7793
512	1000×1000	2.9994	1.9795
128	2000×2000	70.2247	
256	2000×2000	36.1414	1.9430
512	2000×2000	18.4670	1.9570

6. Сравнение с точным решением

Точное решение (найдено подбором): $u(x, y) = 1 + \sin(xy)$.

Красная поверхность: точное решение; зелёная — полученное с помощью численного метода.


2
1.5
1
0.5
0
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2