Estadística
Curs 2012-2013/2
Grup M4 - Professor: Francesc Pozo

[Feu els Problemes en Fulls Separats]

Primer Parcial. 05/04/2013

1. `[10 punts]` Siguin A, B i C tres esdeveniments independents. Demostreu que els esdeveniments A i $B \cup C$ són dos esdeveniments independents.

2. `[30 punts]` S'ha comés un assassinat i hi ha dos sospitosos, A i B. Un dels dos és l'assassí. Inicialment, però, hi ha les mateixes evidències contra ells. En una investigació posterior, s'ha trobat que la sang de l'assassí és del tipus $O-$. Aquest tipus de sang la té un 10% de la població. Definim els següents esdeveniments: $\alpha =$"el sospitós A és l'assassí"; $\beta =$"el sospitós B és l'assassí"; $M_\alpha =$"el tipus de sang del sospitós A coincideix amb el tipus de sang de l'assassí".

(a) `[5 punts]` Què significa $P(M_\alpha|\alpha)$? Quin és el seu valor?

(b) `[5 punts]` Què significa $P(M_\alpha|\beta)$? Quin és el seu valor?

(c) `[10 punts]` Calculeu $P(M_\alpha)$.

(d) `[10 punts]` Sabem que el sospitós A té el mateix tipus de sang que l'assassí. Amb aquesta informació, quina és la probabilitat que el sospitós A sigui l'assassí?

3. `[30 punts]` Una variable aleatoria discreta X pren només els valors 1 i 3 amb probabilitat no nul·la, és a dir, $X(\Omega) = \{1, 3\}$. La seva esperança matemàtica és $\frac{3}{2}$.

(a) `[10 punts]` Calculeu $P(X = 1)$ i $P(X = 3)$.

(b) `[10 punts]` Calculeu $VAR(X)$.

(c) `[5 punts]` Calculeu la funció de distribució de probabilitat $F_X(x)$ de la variable X i representeu-la gràficament.

(d) `[5 punts]` Considereu ara $Y = X^3$. Calculeu $F_Y(\pi)$.

4. `[30 punts]` Tenim una col·lecció prou gran de fotografies digitals d'igual mida i resolució que poden tenir un numero aleatori discret de "defectes" (píxels defectuosos) identificables per l'ull humà. L'experiència justifica que aquests defectes s'ajusten a un model de Poisson.

(a) `[6 punts]` El percentatge de fotos que tenen 2 defectes es 3 vegades el percentatge de les que tenen 3 defectes. Trobeu el valor mitjà de defectes per fotografia.

(b) `[6 punts]` Calculeu la probabilitat de que, en agafar una fotografia, aquesta no tingui cap defecte i la probabilitat de que tingui algun defecte.

(c) `[6 punts]` Si agafem un grup de 3 fotografies de manera conjunta, quin es el valor mitjà de defectes del grup. Quina es la probabilitat de que en un grup de 3 fotografies es trobin 3 defectes.

(d) `[6 punts]` Escollim a l'atzar 4 fotografies i estem interessats en comptar el nombre de les que no presenten cap defecte. A quin model de probabilitat s'ajusta la variable aleatòria que les compta? Calculeu la probabilitat de que aquest nombre no sigui superior a 1.

(e) `[6 punts]` Escollint a l'atzar una sèrie de fotografies, definim una variable aleatòria que compta el nombre de fotografies que hem d'agafar per arribar a tenir 4 sense cap defecte. Quin és el model que segueix aquesta variable? Calculeu la probabilitat de que aquest nombre sigui 4.

Model	$P(X=k)$	$E(X)$	$VAR(X)$
Bernoulli $b(p)$	$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$	p	pq
Binomial $\mathcal{B}(n,p)$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	npq
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Geomètrica $\mathcal{G}(p)$	$P(X=k)=(1-p)^k p$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Binomial Negativa $\mathcal{BN}(r,p)$	$P(X=k)=\binom{k+r-1}{k}(1-p)^k p^r$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$

Estadística

Curs 2012-2013/2

Grup M4 - Professor: Francesc Pozo

[Feu els Problemes en Fulls Separats]

Primer Parcial. 05/04/2013

1. `[10 punts]` Siguin A, B i C tres esdeveniments independents. Demostreu que els esdeveniments A i $B \cup C$ són dos esdeveniments independents.

Solució. Que els esdeveniments A, B i C siguin independents vol dir que

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

Aleshores, el que volem veure és

$$P(A \cap (B \cup C)) = P(A)P(B \cup C).$$

En efecte,

$$\begin{aligned} P(A \cap (B \cup C)) &= P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= P(A)\left[P(B) + P(C) - P(B)P(C)\right] \\ &= P(A)\left[P(B) + P(C) - P(B \cap C)\right] = P(A)P(B \cup C) \end{aligned}$$

---

2. `[30 punts]` S'ha comés un assassinat i hi ha dos sospitosos, A i B. Un dels dos és l'assassí. Inicialment, però, hi ha les mateixes evidències contra ells. En una investigació posterior, s'ha trobat que la sang de l'assassí és del tipus $O-$. Aquest tipus de sang la té un 10% de la població. Definim els següents esdeveniments: $\alpha =$"el sospitós A és l'assassí"; $\beta =$"el sospitós B és l'assassí"; $M_\alpha =$"el tipus de sang del sospitós A coincideix amb el tipus de sang de l'assassí".

(a) `[5 punts]` Què significa $P(M_\alpha|\alpha)$? Quin és el seu valor?

(b) `[5 punts]` Què significa $P(M_\alpha|\beta)$? Quin és el seu valor?

(c) `[10 punts]` Calculeu $P(M_\alpha)$.

(d) `[10 punts]` Sabem que el sospitós A té el mateix tipus de sang que l'assassí. Amb aquesta informació, quina és la probabilitat que el sospitós A sigui l'assassí?

Solució.

(a) $P(M_\alpha|\alpha)$ és la probabilitat que, si sabem que el sospitós A és l'assassí, la seva sang coincideixi amb la de l'assassí. Aquesta probabilitat és, doncs, 1, ja que és un esdeveniment segur.

(b) $P(M_\alpha|\beta)$ és la probabilitat que, si sabem que el sospitós B és l'assassí (i en conseqüència el sospitós A és innocent), la sang del sospitós A coincideixi amb la de l'assassí. Dit de forma més senzilla, estem intentant calcular la probabilitat que una persona (a l'atzar) tingui la sang del tipus $O-$. Aquesta probabilitat és, segons les dades del problema, d'un 10%.

(c) Per al càlcul de la probabilitat de l'esdeveniment M_α, aplicarem la fórmula de la probabilitat total:

$$\begin{aligned} P(M_\alpha) &= P(M_\alpha|\alpha)P(\alpha) + P(M_\alpha|\beta)P(\beta) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{20} \end{aligned}$$

(d) Ara sabem que el sospitós A té el mateix tipus de sang que l'assassí, és a dir, M_α. Ens demanen, doncs, $P(\alpha|M_\alpha)$. Per a aquest càlcul, aplicarem el teorema de Bayes:

$$P(\alpha|M_\alpha) = \frac{P(M_\alpha|\alpha)P(\alpha)}{M_\alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{11}{20}} = \frac{20}{22} = \frac{10}{11}$$

---

3. `[30 punts]` Una variable aleatoria discreta X pren només els valors 1 i 3 amb probabilitat no nul·la, és a dir, $X(\Omega) = \{1, 3\}$. La seva esperança matemàtica és $\frac{3}{2}$.

(a) `[10 punts]` Calculeu $P(X = 1)$ i $P(X = 3)$.

(b) `[10 punts]` Calculeu $VAR(X)$.

(c) `[5 punts]` Calculeu la funció de distribució de probabilitat $F_X(x)$ de la variable X i representeu-la gràficament.

(d) `[5 punts]` Considereu ara $Y = X^3$. Calculeu $F_Y(\pi)$.

Solució.

(a) Podem suposar que $P(X = 1) = p$. Donat que la variable només pren dos valors, aleshores és evident que $P(X = 3) = 1 - p$. Si calculem l'esperança d'aquesta variable, obtenim

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot P(X = 1) + 3 \cdot P(X = 3) \\ &= p + 3(1 - p) = p + 3 - 3p = 3 - 2p \end{aligned}$$

Com que per l'enunciat del problema sabem que $E(X) = \frac{3}{2}$, aleshores

$$3 - 2p = \frac{3}{2}$$

que té com a solució $p = \frac{3}{4}$. Aleshores,

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \frac{3}{4} \\ P(X = 3) &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(b) La variància de la variable la calcularem fent servir el resultat de Steiner. En efecte,

$$E(X^2) = 1^2 \cdot P(X = 1) + 3^2 \cdot P(X = 3) = 3$$
$$[E(X)]^2 = \frac{9}{4}$$

Per tant,

$$VAR(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

(c) La funció de distribució de probabilitat $F_X(x)$ ve donada per

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 3/4, & 1 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

(d) Considerem ara la variable $Y = X^3$, és a dir, Y és una variable aleatoria que pren per valors $Y(\Omega) = \{1^3, 3^3\} = \{1, 9\}$. A més, sabem que

$$P(Y = 1) = P(X = 1) = \frac{3}{4}$$
$$P(Y = 9) = P(X = 3) = \frac{1}{4}$$

Per tant,

$$F_Y(\pi) = P(Y \leq \pi) = P(Y = 1) = \frac{3}{4}.$$

4. `[30 punts]` Tenim una col·lecció prou gran de fotografies digitals d'igual mida i resolució que poden tenir un numero aleatori discret de "defectes" (píxels defectuosos) identificables per l'ull humà. L'experiència justifica que aquests defectes s'ajusten a un model de Poisson.

(a) `[6 punts]` El percentatge de fotos que tenen 2 defectes es 3 vegades el percentatge de les que tenen 3 defectes. Trobeu el valor mitjà de defectes per fotografia.

(b) `[6 punts]` Calculeu la probabilitat de que, en agafar una fotografia, aquesta no tingui cap defecte i la probabilitat de que tingui algun defecte.

(c) `[6 punts]` Si agafem un grup de 3 fotografies de manera conjunta, quin es el valor mitjà de defectes del grup. Quina es la probabilitat de que en un grup de 3 fotografies es trobin 3 defectes.

(d) `[6 punts]` Escollim a l'atzar 4 fotografies i estem interessats en comptar el nombre de les que no presenten cap defecte. A quin model de probabilitat s'ajusta la variable aleatòria que les compta? Calculeu la probabilitat de que aquest nombre no sigui superior a 1.

(e) `[6 punts]` Escollint a l'atzar una sèrie de fotografies, definim una variable aleatòria que compta el nombre de fotografies que hem d'agafar per arribar a tenir 4 sense cap defecte. Quin és el model que segueix aquesta variable? Calculeu la probabilitat de que aquest nombre sigui 4.

(a) Sigui X la variable que compta el nombre de defectes en una foto. Per l'enunciat del problema, aquesta variable segueix una distribució de Poisson de paràmetre λ desconegut. Però ara sabem que

$$P(X = 2) = 3P(X = 3),$$

és a dir,

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} = 3e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2} = \frac{\lambda}{2} \;\Leftrightarrow\; \lambda = 1$$

En una distribució de Poisson, el paràmetre de la distribució és el valor esperat. Per tant, el valor mitjà de defectes per fotografia és $E(X) = 1$.

(b) En aquest cas, ens demanen calcular

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= e^{-1}\frac{1^0}{0!} = e^{-1} \approx 0.3678794412 \\ P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-1} \approx 0.6321205588 \end{aligned}$$

(c) Sigui ara Y la variable aleatòria que compta el nombre de defectes quan considerem de forma conjunta tres fotos. La variable Y segueix una distribució de Poisson de paràmetre $\lambda_Y = 3\lambda$, és a dir, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(3)$. El valor mitja de defectes serà $\lambda_Y = 3$ i

$$P(Y = 3) = e^{-3}\frac{3^3}{3!} = e^{-3}\frac{9}{2} \approx 0.2240418077$$

(d) Sigui Z la variable aleatòria que compta, d'entre un conjunt de 4 fotografies, quantes no tenen cap defecte. La variable aleatòria Z segueix una distribució binomial de paràmetres $n = 4$ i $p = P(X = 0) = e^{-1}$, és a dir, $Z \hookrightarrow B(4, e^{-1})$. Aleshores,

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= \binom{4}{0}(1 - e^{-1})^4 + \binom{4}{1}(e^{-1})(1 - e^{-1})^3 \approx 0.5313379308 \end{aligned}$$

(e) Sigui W la variable aleatòria que compta el nombre de fotografies que hem d'agafar per arribar a tenir 4 sense cap defecte. Sigui V la variable aleatòria que compta el nombre de fotografies amb algun defecte que hem d'agafar fins que tenim 4 fotografies sense cap defecte. És evident que $W = V + 4$, i que V segueix una distribució binomial negativa de paràmetres $r = 4$ i $p = P(X = 0) = e^{-1}$, és a dir, $V \hookrightarrow \mathcal{BN}(4, e^{-1})$. Aleshores,

$$P(W = 4) = P(V + 4 = 4) = P(V = 0) = \binom{3}{0}(e^{-1})^4 = e^{-4} \approx 0.01831563889$$

Model	$P(X=k)$	$E(X)$	$VAR(X)$
Bernoulli $b(p)$	$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$	p	pq
Binomial $\mathcal{B}(n,p)$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	npq
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Geomètrica $\mathcal{G}(p)$	$P(X=k)=(1-p)^k p$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Binomial Negativa $\mathcal{BN}(r,p)$	$P(X=k)=\binom{k+r-1}{k}(1-p)^k p^r$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$