Estadística
T4.2. Modelos probabilísticos discretos

Sergi Peire
Escola d'Enginyeria de Barcelona Est
Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya

Setembre-Desembre 2021

Motivación

Muchas variables aleatorias tienen propiedades similares en diferentes escenarios (experimentos) probabilísticos, y así pueden describirse con la misma función (distribución) de probabilidad.

Ejemplos:

- Tirar una moneda y que el éxito sea cara (p=0.5).
- Tirar un dado y que el éxito sea 6 (p=1/6)
- Tirar un dado y que el éxito sea un número par (p=0.5)

Tenemos por tanto un **modelo probabilístico** caracterizado por una distribución concreta.

Objetivo

Veremos varias distribuciones de probabilidad (**modelos de distribución discretos**) que son muy típicas:

1) Distribución **uniforme**
2) Distribución de **Bernoulli**
3) Distribución **binomial**
4) Distribución **geométrica**
5) Distribución **binomial negativa**
6) Distribución **hipergeométrica**
7) Distribución de **Poisson**

Distribución uniforme

Sea una variable aleatoria X que toma los valores

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

todos con la misma probabilidad.

Decimos que sigue una **distribución uniforme discreta** de parámetro ***n***, donde *n*=1,2, …..

La **función de probabilidad** es

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}_i) = P(X = x_i) = \frac{1}{n}; \quad i = 1, \ldots n$$

Distribución uniforme

Características: E(X) y Var(X)

$$\mathrm{E(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \Big| \qquad \mathrm{Var(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2$$

Ejemplo: Experimento lanzar un dado perfecto de seis caras

$$\mathrm{f(x}_i) = \frac{1}{6}; \quad x_i = 1, \ldots, 6$$

Distribución de Bernoulli

Experimento de Bernoulli: consiste en observar si se cumple o no un determinado suceso. El espacio muestral tiene dos resultados posibles:

E (éxito) ---- F (fracaso)

Hipótesis:

1) Las sucesivas repeticiones del experimento son independientes.
2) La probabilidad **(p)** de que ocurra un éxito es constante a lo largo de las sucesivas repeticiones

Distribución de Bernoulli

La **variable aleatoria** más natural es aquella que toma dos valores posibles: {0, 1}.

$$
\begin{aligned}
X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\
E &\longrightarrow 1 \\
F &\longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

con probabilidades

$$\mathrm{f(1) = p}$$

$$\mathrm{f(0) = (1\text{-}p)}$$

La **función de probabilidad** puede escribirse así:

$$
\begin{aligned}
f : X(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
f(k) &= P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k} \\
k &= 0, 1
\end{aligned}
$$

Distribución de Bernoulli

Características

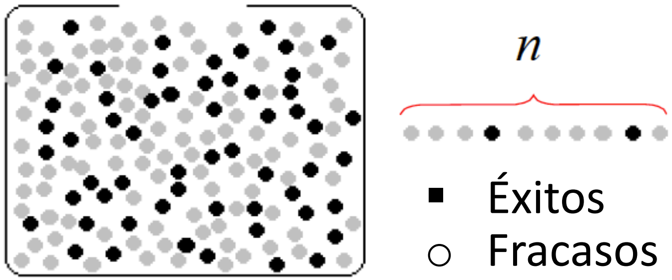
$$E(X) = p; \qquad Var(X) = p(1-p)$$

Ejemplos:

- Tirar una moneda y que el éxito sea cara (p=0.5).
- Tirar un dado y que el éxito sea 6 (p=1/6)
- Tirar un dado y que el éxito sea un número par (p=0.5)

Distribución binomial

Experimento: consiste en repetir el experimento de Bernoulli un número prefijado **(n)** de veces (ensayos).



Hipótesis:

1) Las sucesivas repeticiones son independientes.
2) La probabilidad **(p)** de que ocurra un éxito es constante a lo largo de las sucesivas repeticiones

Se define la **variable aleatoria X** que cuenta el **número de éxitos** obtenidos en los n ensayos.

Recorrido: $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

Distribución binomial – variable aleatoria y probabilidad

Consideremos, como ejemplo, el experimento con **n=3**

Podemos hacer una **tabla** con los resultados posibles, sus probabilidades y el valor de la variable.

Resultados	Probabilidad	Valor k de la variable
EEE	p^3	3
EEF	$p^2(1-p)$	2
EFE	$p^2(1-p)$	2
EFF	$p(1-p)^2$	1
FEE	$p^2(1-p)$	2
FEF	$p(1-p)^2$	1
FFE	$p(1-p)^2$	1
FFF	$(1-p)^3$	0

Las probabilidades de cada repetición se multiplican por ser independientes

Distribución binomial – variable aleatoria y probabilidad

A partir de la tabla anterior, podemos construir la **función de probabilidad**:

$f(3) = P(X=3)$ = (núm de resultados con k=3) · $p^3 = p^3$

$f(2) = P(X=2)$ = (núm de resultados con k=2) · $p^2(1-p) = 3p^2(1-p)$

$f(1) = P(X=1)$ = (núm de resultados con k=1) · $p(1-p)^2 = 3p(1-p)^2$

$f(0) = P(X=0)$ = (núm de resultados con k=0) · $(1-p)^3 = (1-p)^3$

Distribución binomial – variable aleatoria y probabilidad

En general, considerando **n ensayos** y **k éxitos**, los resultados del experimento binomial tienen la siguiente estructura:

$$\text{EFEEF} \cdots\cdots \text{EFF} \quad \begin{cases} k & \text{éxitos} \\ n-k & \text{fracasos} \end{cases}$$

El número de resultados posibles, al no importar el orden en que aparecen los éxitos, es el de las **combinaciones de n sobre k,** y la función de probabilidad es por tanto

$$f(k) = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Combinaciones - repaso

Sea el conjunto con *m* elementos diferentes

$$\{a_1, a_2, \cdots a_m\}$$

Sea $n \leq m$

Llamamos ***combinaciones de m elementos elegidos de n en n*** a los distintos grupos que pueden formarse teniendo en cuenta que

a) no pueden repetirse elementos
b) no importa el orden
c) en cada grupo no están todos los elementos excepto si n=m

Combinaciones - repaso

Se llama *número combinatorio de orden n* al número de combinaciones $\mathbf{C_{m,n}}$.

Se representa en la forma $\binom{m}{n}$ "m sobre n"

Así, el número de combinaciones se expresa en la forma

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m\,!}{(m-n)\,!\cdot n\,!}$$

Combinaciones - repaso

$$\binom{m}{0} = 1; \qquad \binom{m}{1} = m; \qquad \binom{m}{m} = 1$$

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n} \qquad \text{(números complementarios)}$$

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

Triángulo de Pascal

$n=1$	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$	1 1
$n=2$	$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$	1 2 1
$n=3$	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$	1 3 3 1
$n=4$	$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$	1 4 6 4 1
$n=5$	$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$	1 5 10 10 5 1

Distribución binomial - resumen

La variable que cuenta el número de éxitos en *n* ensayos independientes de Bernoulli con probabilidad *p* sigue una **distribución binomial de parámetros *(n, p)***

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)}$$

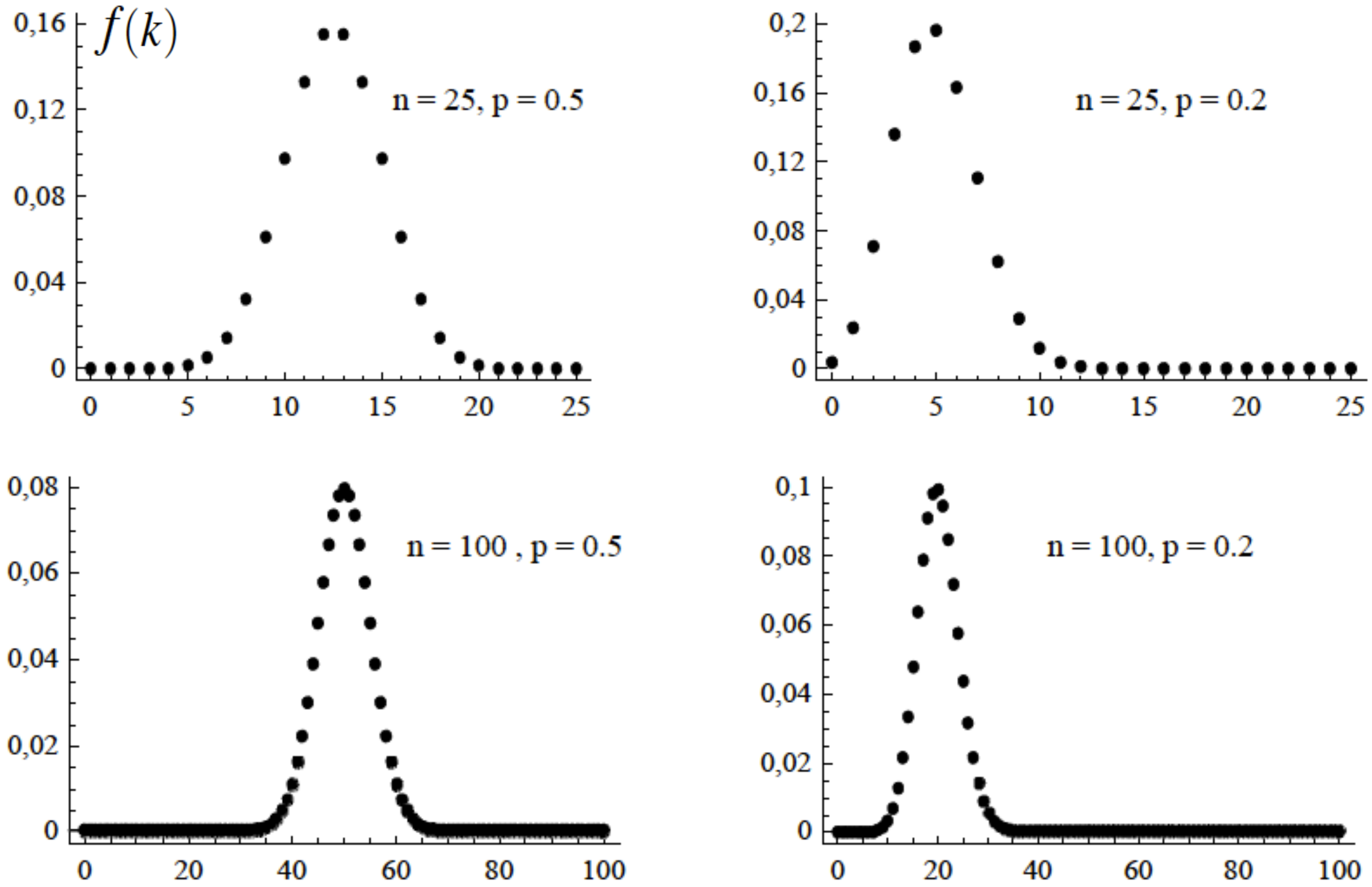
Su **función de probabilidad** es

$$\boxed{\begin{array}{l} f(k) = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \\ \quad k = 0, 1, \ldots, n \end{array}}$$

Sus **características** son

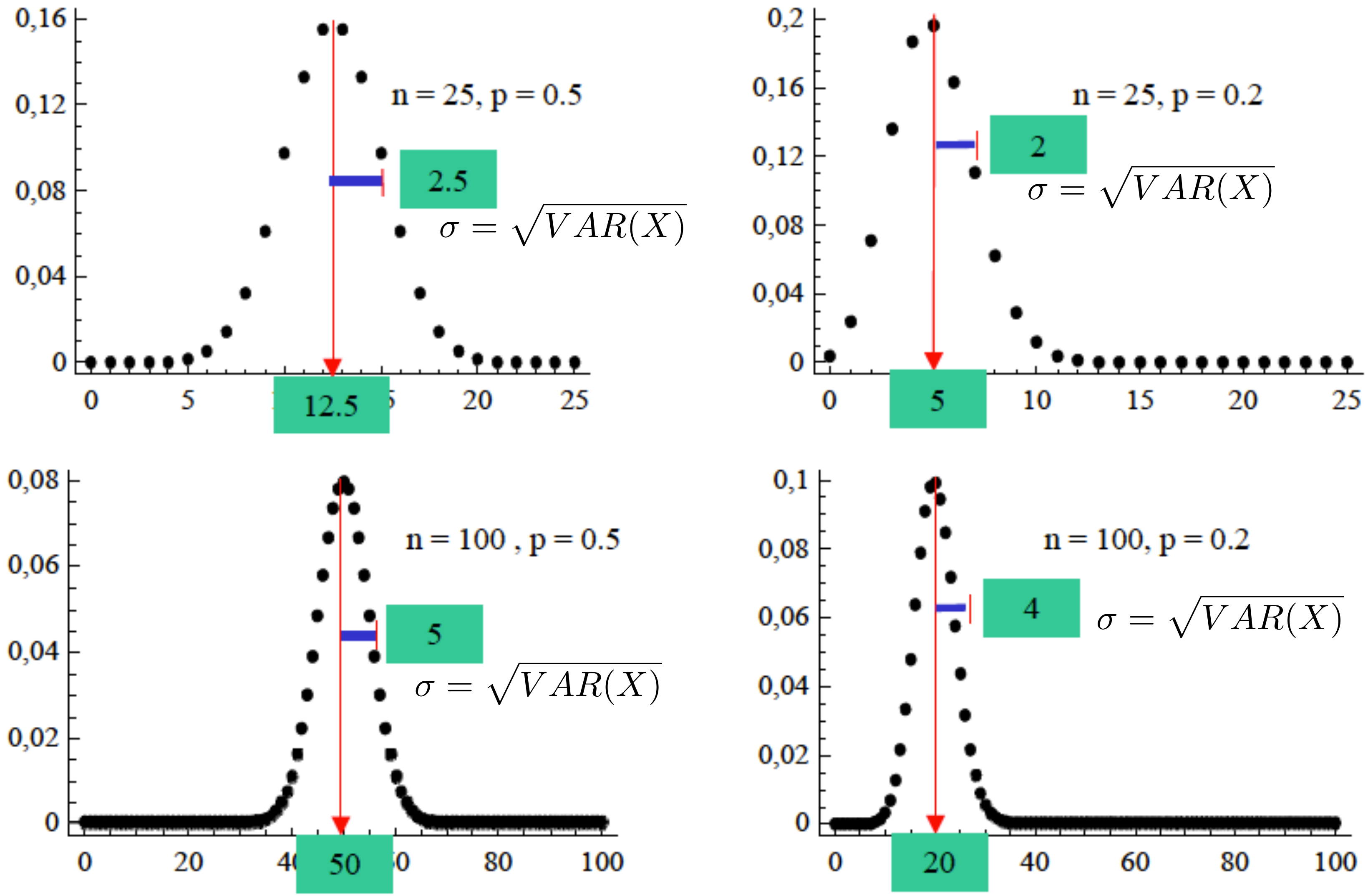
$$\boxed{E(X) = np \qquad VAR(X) = np(1-p)}$$

Distribución binomial - gráficas



Distribución binomial - gráficas

$$E(X) = np \qquad VAR(X) = np(1-p)$$



Problemas a resolver

P1 **Problema 4.1** *La probabilitat que un nounat sigui nen és de* 0.515. *En una maternitat, un matí han nascut* 10 *infants. Trobeu la probabilitat que exactament hi hagin nascut* 3 *nens.*

Problemas a resolver

P1 **Problema 4.1** *La probabilitat que un nounat sigui nen és de* 0.515. *En una maternitat, un matí han nascut* 10 *infants. Trobeu la probabilitat que exactament hi hagin nascut* 3 *nens.*

Sol:

$$X \rightarrow \mathrm{B}(n,p) \quad \text{on} \quad n = 10 \quad i \quad p = 0.515$$

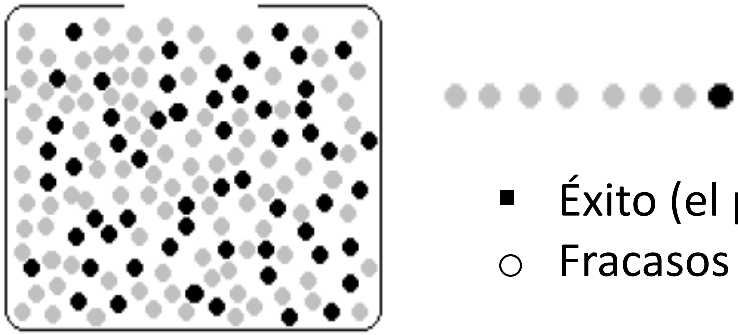
$$P(X = 3) = \binom{10}{3} * 0.515^3 * (1 - 0.515)^7 = 0.103465$$

En R

```
> dbinom(3,10,0.515)
[1] 0.1034654
```

Distribución geométrica

Experimento: consiste en realizar sucesivas repeticiones independientes del experimento de Bernoulli hasta obtener el primer éxito.



- ▪ Éxito (el primero)
- ○ Fracasos

Se define la **variable aleatoria X** que cuenta el **número de fracasos**.

Recorrido infinito $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Distribución geométrica

Ejemplos de resultados y la correspondiente probabilidad:

E $\longrightarrow$ $X=0$ $\longrightarrow$ $P(X=0)=p$

FE $\longrightarrow$ $X=1$ $\longrightarrow$ $P(X=1)=(1-p)p$

FFE $\longrightarrow$ $X=2$ $\longrightarrow$ $P(X=2)=(1-p)^2p$

La **función de probabilidad** es por tanto

$$\boxed{f(k) = P(X=k) = (1-p)^k\, p}$$

Distribución geométrica - resumen

La variable que cuenta el número de fracasos antes de obtener el primer éxito a lo largo de sucesivas repeticiones independientes del experimento de Bernoulli sigue una **distribución geométrica de parámetro *p*.**

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$$

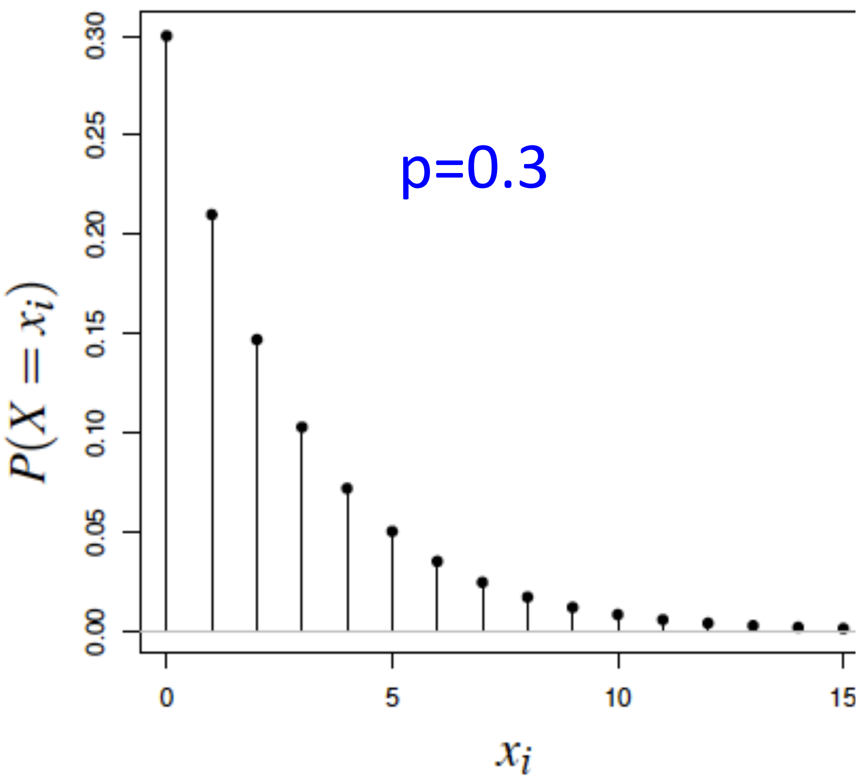
Su **función de probabilidad** es

$$\boxed{\begin{array}{l} f(k) = P(X = k) = (1-p)^k \cdot p, \\ \qquad k = 0, 1, \ldots \end{array}}$$

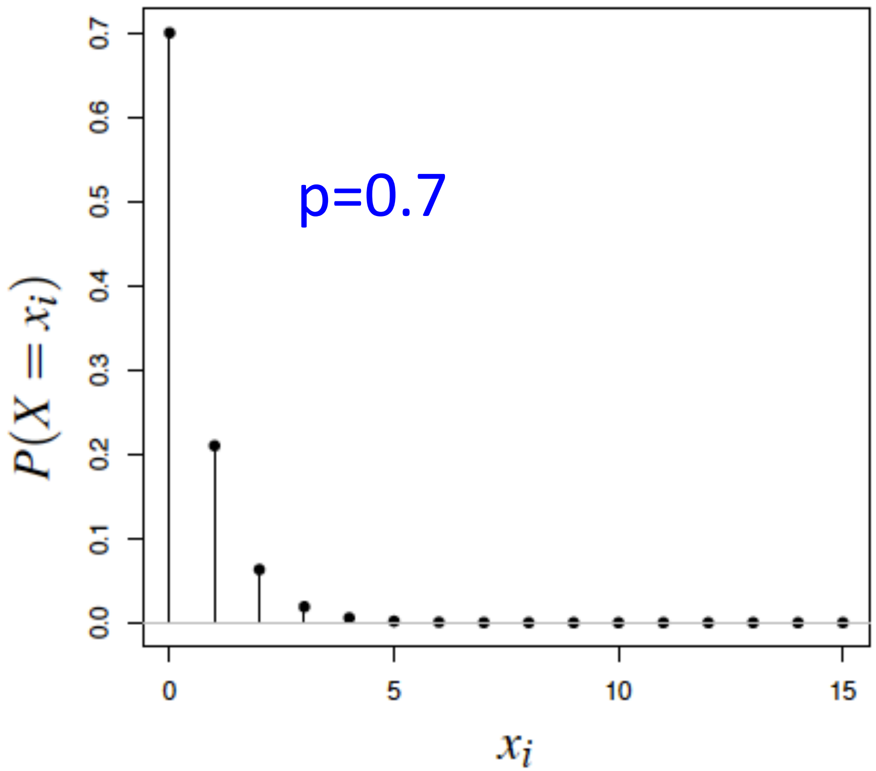
Sus **características** son

$$\boxed{E(X) = \frac{1-p}{p}, \qquad VAR(X) = \frac{1-p}{p^2}}$$

Distribución geométrica - gráficas



E(X)=3.3333
Var(X)=7.7777



E(X)=0.1428
Var(X)=0.6122

Distribución geométrica modificada

La variable *Y* que cuenta el número de repeticiones independientes del experimento de Bernoulli hasta obtener el primer éxito sigue una **distribución geométrica modificada de parámetro *p*.**

$$Y \hookrightarrow \mathscr{G}^{\star}(p)$$

Su **función de probabilidad** es

$$f(k) = P(Y = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1,2,\ldots$$

Sus **características** son

$$E(Y) = \frac{1}{p}, \qquad VAR(Y) = \frac{1-p}{p^2}$$

Problemas a resolver

P3 **Problema 4.3** *Trobeu el nombre mitjà de vegades que cal llançar una moneda a l'aire per obtenir la primera cara.*

Problemas a resolver

P3 **Problema 4.3** *Trobeu el nombre mitjà de vegades que cal llançar una moneda a l'aire per obtenir la primera cara.*

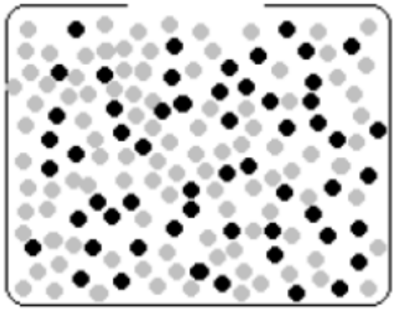
Sol:

$$X \rightarrow G^*(0.5)$$

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.5} = 2$$

Distribución binomial negativa

Experimento: consiste en realizar ensayos sucesivos independientes del experimento de Bernoulli hasta que se observe un número prefijado **(r)** de éxitos.



Ejemplo: 4 éxitos

Se define la **variable aleatoria X** que cuenta el **número de fracasos** obtenidos antes del r-simo éxito.

Recorrido: $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots\}$

En este caso, el **número de éxitos es fijo (r)** y el número total (n) de ensayos es aleatorio, a diferencia del caso binomial, donde n es fijo y se cuenta el número de éxitos.

Distribución binomial negativa – variable aleatoria y probabilidad

En general, considerando **r éxitos** y **k fallos**, los resultados del experimento tendrán la siguiente estructura:

$$\underbrace{\text{EFEEF}\cdots\cdots\text{EF}}_{\substack{r-1 \text{ éxitos} \\ k \text{ fallos}}}\ \underbrace{\mathbf{E}}_{\substack{\text{último} \\ \text{éxito}}} \qquad \text{con probabilidad } p^r \cdot (1-p)^k$$

El número de resultados posibles es el de las **combinaciones de k+r-1 sobre k,** y la función de probabilidad es por tanto

$$f(k) = P(X=k) = \binom{k+r-1}{k} (1-p)^k \cdot p^r$$

Distribución binomial negativa - resumen

La variable que cuenta el número de fracasos antes de obtener el r-simo éxito a lo largo de sucesivas repeticiones independientes del experimento de Bernoulli sigue una **distribución binomial negativa de parámetros *(r, p)*.**

$$X \hookrightarrow \mathcal{BN}(r,p)$$

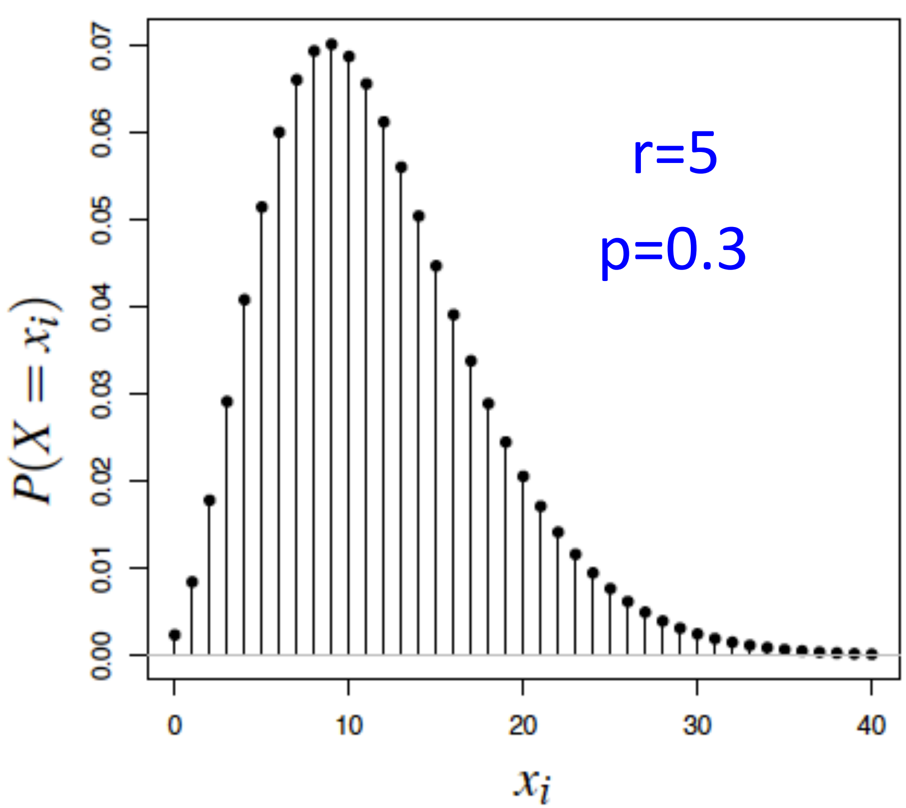
Su **función de probabilidad** es

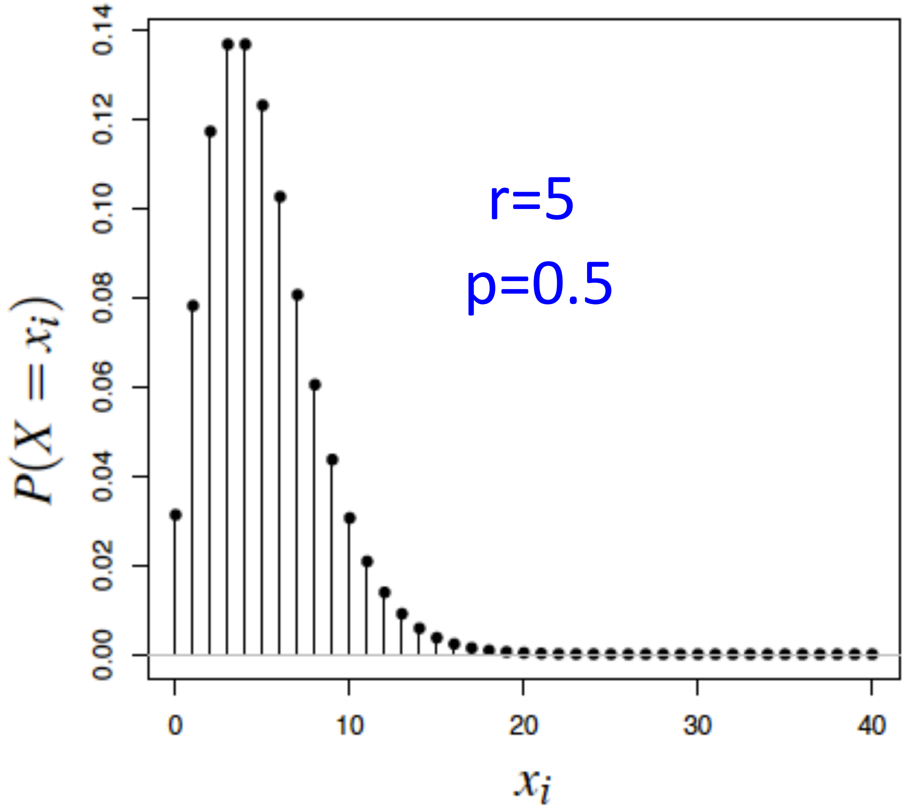
$$f(k) = P(X = k) = \binom{k+r-1}{k}(1-p)^k p^r, \quad k = 0, 1 \ldots$$

Sus **características** son

$$E(X) = \frac{r(1-p)}{p} \qquad VAR(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Distribución binomial negativa - gráficas





Distribución binomial negativa modificada- resumen

La variable que cuenta el número de veces que se repite el experimento hasta obtener el r-simo éxito a lo largo de sucesivas repeticiones independientes del experimento de Bernoulli sigue una **distribución binomial negativa modificada de parámetros *(r, p)*.**

X→BN*(r,p)

Su **función de probabilidad** es $f(k) = P(X = k) = \binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r} p^r$

Sus **características** son $E(X) = \frac{r}{p}$ $VAR(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

Problemas a resolver

P3

Problema 4.12 El Servei Català de Trànsit té en funcionament un sistema de punts de penalització per a cada infracció que pot conduir a la pèrdua del carnet. Suposem que s'estima que un conductor és denunciat de mitjana una de cada deu vegades que comet una infracció. Suposem que la quarta denúncia comporta la pèrdua del carnet. Determineu:

a) La funció de probabilitat del nombre d'infraccions comeses fins a la retirada del carnet.
b) El nombre esperat d'infraccions necessàries per a la pèrdua del carnet.
c) La variància del nombre d'infraccions.

Problemas a resolver

P3

Problema 4.12 El Servei Català de Trànsit té en funcionament un sistema de punts de penalització per a cada infracció que pot conduir a la pèrdua del carnet. Suposem que s'estima que un conductor és denunciat de mitjana una de cada deu vegades que comet una infracció. Suposem que la quarta denúncia comporta la pèrdua del carnet. Determineu:

a) La funció de probabilitat del nombre d'infraccions comeses fins a la retirada del carnet.
b) El nombre esperat d'infraccions necessàries per a la pèrdua del carnet.
c) La variància del nombre d'infraccions.

a)

$$X \rightarrow \mathrm{BN}^*(4,\ 0.1)$$

$$P(X=k)=\binom{k-1}{3}(1-0.1)^{k-4}0.1^4 \quad k=4,5,\ldots$$

Problemas a resolver

P3

Problema 4.12 El Servei Català de Trànsit té en funcionament un sistema de punts de penalització per a cada infracció que pot conduir a la pèrdua del carnet. Suposem que s'estima que un conductor és denunciat de mitjana una de cada deu vegades que comet una infracció. Suposem que la quarta denúncia comporta la pèrdua del carnet. Determineu:

a) La funció de probabilitat del nombre d'infraccions comeses fins a la retirada del carnet.
b) El nombre esperat d'infraccions necessàries per a la pèrdua del carnet.
c) La variància del nombre d'infraccions.

b)

$$X \to \mathrm{BN}^*(4,\ 0.1)$$

$$E(X) = \frac{r}{p} = \frac{4}{0.1} = 40$$

Problemas a resolver

P3

Problema 4.12 El Servei Català de Trànsit té en funcionament un sistema de punts de penalització per a cada infracció que pot conduir a la pèrdua del carnet. Suposem que s'estima que un conductor és denunciat de mitjana una de cada deu vegades que comet una infracció. Suposem que la quarta denúncia comporta la pèrdua del carnet. Determineu:

a) La funció de probabilitat del nombre d'infraccions comeses fins a la retirada del carnet.
b) El nombre esperat d'infraccions necessàries per a la pèrdua del carnet.
c) La variància del nombre d'infraccions.

c)

$$X \rightarrow \mathrm{BN}^*(4,\ 0.1)$$

$$VAR(X) = \frac{r}{p^2} = \frac{4 \cdot 0.9}{0.1^2} = 360$$

Distribución hipergeométrica

EXPERIMENTO

1) Población con **N elementos**, cada uno perteneciente a una de entre **dos categorías: E y F**

2) Se tiene un **número D de elementos de la categoría E** y un número N-D de la categoría F

3) Se extrae una **muestra aleatoria con n individuos sin remplazo**

4) Se define la **variable aleatoria X**, tal que X=k cuenta el **número de individuos del grupo E en la muestra**

EJEMPLO

1) Baraja con N=48 cartas
   Éxito = cartas de Copas
   Fracaso= resto de cartas

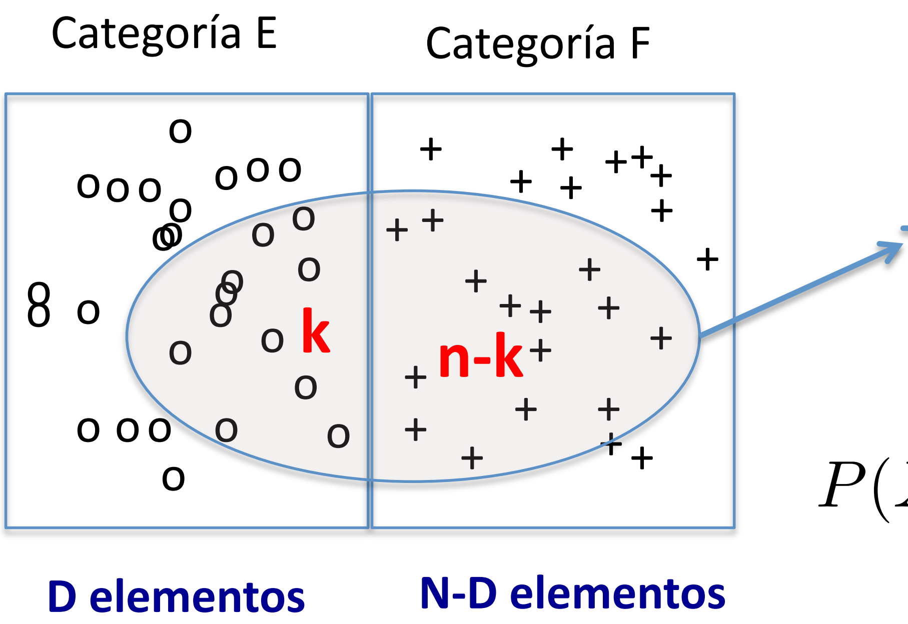
2) D=12; N-D = 36 fracasos

3) Ejemplo: sacamos n=8 cartas

4) Por ejemplo:
   k=2 cartas de copas en la muestra

Objetivo: encontrar la función de probabilidad asociada a la variable X

Distribución hipergeométrica



Muestra con n elementos

Contiene **k** elementos del grupo E

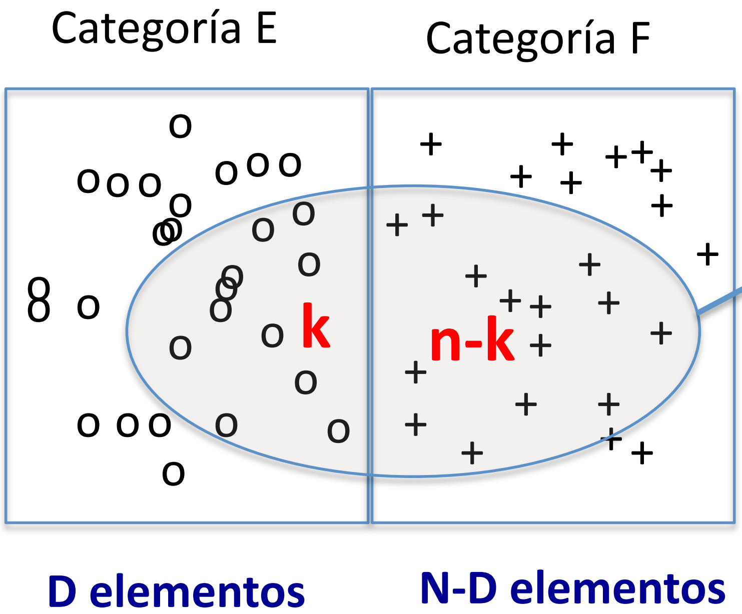
Contiene **n-k** elementos del grupo F

$$P(X = k) = \frac{\text{Num de casos favorables}}{\text{Num de casos posibles}}$$

Casos posibles: Cuántos grupos con n elementos se pueden extraer de la población que contiene N elementos ?

$$\binom{N}{n}$$

Distribución hipergeométrica



Muestra con n elementos

Contiene **k** elementos del grupo E

Contiene **n-k** elementos del grupo F

$$P(X = k) = \frac{\text{Num de casos favorables}}{\text{Num de casos posibles}}$$

Casos favorables: Cuántos grupos con **n** elementos se pueden extraer en los que haya un número **k** de elementos de la categoría E ?

$$\binom{D}{k} \cdot \binom{N-D}{n-k}$$

Número de grupos posibles con **k** elementos del grupo E dentro de la muestra

Número de grupos posibles con **n-k** elementos del grupo F dentro de la muestra

Distribución hipergeométrica

La variable que cuenta el **número k** de elementos de la **categoría E** en una **muestra de tamaño n**, extraída de forma aleatoria **sin remplazo** de una población de N elementos de los cuales **D son de la categoría E**, sigue una **distribución hipergeométrica de parámetros N,D, n.**

Su **función de probabilidad** es

$$f(k) = P(X = k) = \frac{\binom{D}{k} \cdot \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

El **rango de la variable** es

$$\max\{0, n - N + D\} \leq k \leq \min\{n, D\}$$

Distribución hipergeométrica

Sus **características** son

$$E(X) = n\frac{D}{N}; \quad Var(X) = \frac{nD(N-D)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

Ejemplo de la baraja

$$f(k) = P(X=k) = \frac{\binom{12}{k}\cdot\binom{36}{8-k}}{\binom{48}{8}}$$

$$0 \leq k \leq 8$$

k = número de cartas de copas en una muestra de 8 cartas

Si agafo una mostra de 40 cartes de la baralla (n=40); segur que com a mínim 4 seran copes, per tant segur que k>3 n-N+D=40-48+12=4

Problemas a resolver

P20

Se capturaron, etiquetaron y se liberaron 5 individuos de una población de animales en una región para que se mezclaran con la población. Pasado un tiempo adecuado después de haber producido la mezcla, se selecciona una muestra aleatoria de 10 individuos, sabiendo que la población total de animales es 25.

Calcular:

1) La probabilidad de que en la muestra se encuentren dos animales etiquetados.
2) La probabilidad de que el número de animales etiquetados no sea superior a dos.
3) El valor medio de animales etiquetados que cabe esperar en la muestra.

Problemas a resolver

P20 Se capturaron, etiquetaron y se liberaron 5 individuos de una población de animales en una región para que se mezclaran con la población. Pasado un tiempo adecuado después de haber producido la mezcla, se selecciona una muestra aleatoria de 10 individuos, sabiendo que la población total de animales es 25.
Calcular:

1) La probabilidad de que en la muestra se encuentren dos animales etiquetados.
2) La probabilidad de que el número de animales etiquetados no sea superior a dos.
3) El valor medio de animales etiquetados que cabe esperar en la muestra.

Sol: 1) X *compte el nombre d'animals etiquetats d'una mostra de 10 individuus escollits a l'atzar en una població de 25 on 5 estan etiquetats.*

$$X = HG(25,5,10)$$

X→HG(N,D,n)

$$f(k) = P(X = k) = \frac{\binom{D}{k} \cdot \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{20}{8}}{\binom{25}{10}} = 0.3853755$$

En R:

```
> dhyper(2,5,20,10)
[1] 0.3853755
```

Problemas a resolver

P20 Se capturaron, etiquetaron y se liberaron 5 individuos de una población de animales en una región para que se mezclaran con la población. Pasado un tiempo adecuado después de haber producido la mezcla, se selecciona una muestra aleatoria de 10 individuos, sabiendo que la población total de animales es 25.

Calcular:

1) La probabilidad de que en la muestra se encuentren dos animales etiquetados.
2) La probabilidad de que el número de animales etiquetados no sea superior a dos.
3) El valor medio de animales etiquetados que cabe esperar en la muestra.

Sol: 2) X *compte el nombre d'animals etiquetats d'una mostra de* 10 *individuus escollits a l'atzar en una població de* 25, *on hi ha* 5 *d'etiquetats.*

$$X = HG(25,5,10)$$

$$P(X \leq 2) = \frac{\binom{5}{0}\binom{20}{10}}{\binom{25}{10}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{20}{9}}{\binom{25}{10}} + \frac{\binom{5}{2}\binom{20}{8}}{\binom{25}{10}} = 0.6988142$$

En R:
> phyper(2,5,20,10)
[1] 0.6988142

Problemas a resolver

P20 Se capturaron, etiquetaron y se liberaron 5 individuos de una población de animales en una región para que se mezclaran con la población. Pasado un tiempo adecuado después de haber producido la mezcla, se selecciona una muestra aleatoria de 10 individuos, sabiendo que la población total de animales es 25.

Calcular:

1) La probabilidad de que en la muestra se encuentren dos animales etiquetados.
2) La probabilidad de que el número de animales etiquetados no sea superior a dos.
3) El valor medio de animales etiquetados que cabe esperar en la muestra.

Sol: 3)

X *compte el nombre d'animals etiquetats d'una mostra de* 10 *individuus escollits a l'atzar en una població de* 25, *on hi ha* 5 *d'etiquetats.*

$$X = HG(25,5,10)$$

$$E[X] = \frac{10 \cdot 5}{25} = 2$$

$$E(X) = n\frac{D}{N}; \quad Var(X) = \frac{nD(N-D)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

Distribución de Poisson

Experimento: consiste en observar la aparición de un suceso puntual (A) en un intervalo de tiempo o de espacio.

Ejemplos:

- El número de personas que pasan por un lugar en una hora
- El número de micro-fisuras que hay en un mm^2 de un material

Hipótesis:

1) Los sucesos ocurren de forma aleatoria e independiente.
2) La probabilidad de que ocurran dos sucesos al mismo tiempo se considera nula.
3) Comportamiento uniforme: a largo plazo, el número medio de veces que ocurre el suceso tiene un valor constante (λ)

Distribución de Poisson

Se define la **variable aleatoria X** que cuenta el **número de observaciones** del suceso al realizar el experimento.

Recorrido infinito $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots\}$

La **función de probabilidad** se llama distribución de Poisson con parámetro λ y se simboliza $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

$$f(k) = P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1 \ldots$$

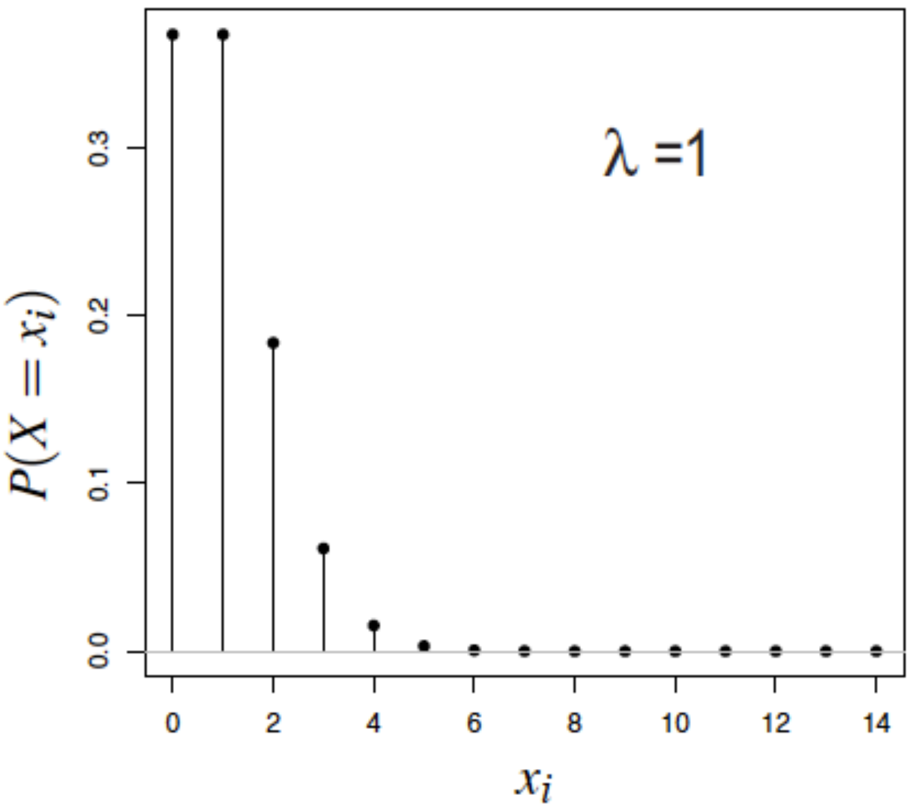
Sus **características** son

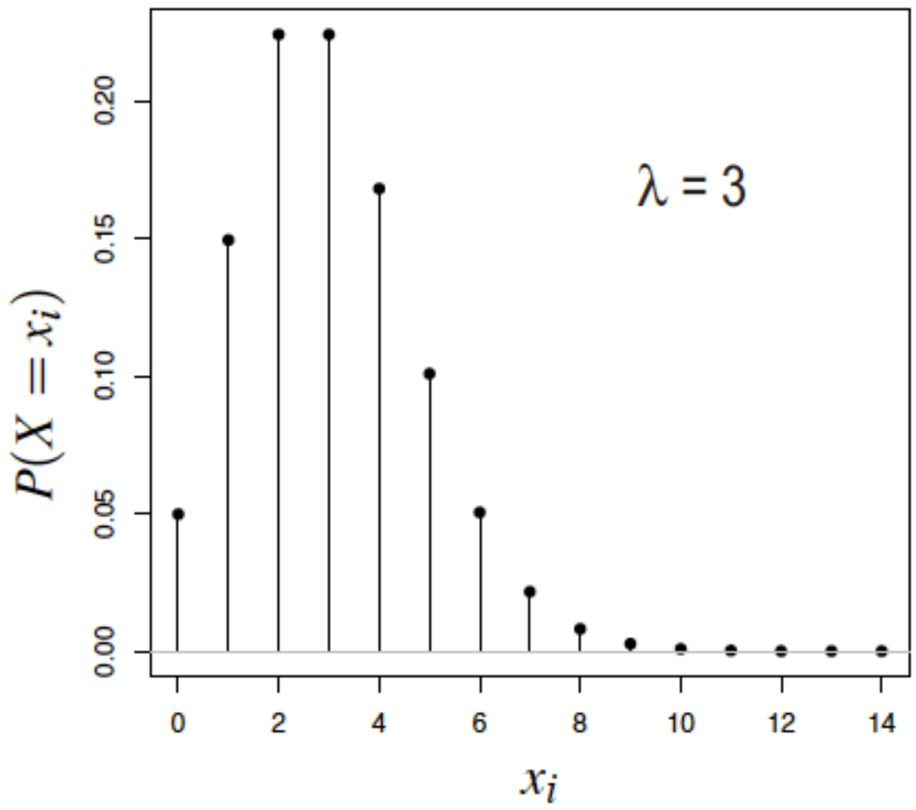
$$E(X) = \lambda \qquad VAR(X) = \lambda$$

Propiedad importante:

Si $X_i \rightarrow P(\lambda)$ y X_i son independientes, entonces $X_1 + \ldots + X_n \rightarrow P(n \cdot \lambda)$

Distribución de Poisson - gráficas





Relación entre las distribuciones binomial y Poisson

Se puede demostrar que la distribución binomial ***B(n,p)*** tiende a la distribución de Poisson ***P(λ)*** cuando ***n*** tiende a infinito y ***p*** tiende a 0, suponiendo que ***n·p*** es constante y ***n·p=λ*** :

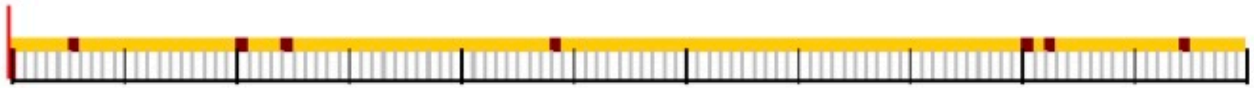
$$\boxed{\begin{gathered}\lim_{n\to\infty} \mathscr{B}(n,p) = \mathscr{P}(\lambda) \\ np = \lambda\end{gathered}}$$

Esto permite aproximar la distribución Binomial por la de Poisson cuando n es suficientemente grande.

En la práctica se aconseja hacerlo cuando

$$n \geq 50 \qquad np \leq 5$$

Límite de la dist. binomial



$$P_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad p = \frac{\lambda}{n}$$

$$P_X(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-x)!x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x}}_{\to 1} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}}_{\to 1}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0,1,2,\ldots$$

Problemas a resolver

P2

Problema 4.2 *El nombre de trucades que es reben en una empresa es distribueixen segons una distribució de Poisson amb una mitjana de* 2 *trucades per minut. Trobeu la probabilitat que, en un període de* 10 *minuts, es rebin* 12 *trucades.*

Problemas a resolver

P5

Problema 4.16 *El nombre d'accidents de treball X que es produeixen en una fàbrica per setmana segueix una distribució de Poisson. Si sabem que el percentatge de setmanes en què es produeix un accident és la meitat del corresponent a les setmanes en què no se'n produeix cap, calculeu:*

(a) *El nombre esperat d'accidents setmanals.*
(b) *La probabilitat que en una setmana hi hagi dos accidents i a la següent, dos més.*
(c) *La probabilitat que en quatre setmanes hi hagi, com a molt, 8 accidents.*
(d) *La Direcció General de Treball decideix declarar* setmanes laborals blanques *aquelles en què, com a molt, es produeix un accident. Si es considera un període de 5 setmanes, determineu la probabilitat que hi hagi, com a mínim, dues* setmanes blanques.

Indicació: Si $X_i \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ *i són independents, aleshores*

$$Y = X_1 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathscr{P}(n\lambda)$$

Problemas a resolver

P6

Problema 4.26 *Una màquina normalment produeix un 5% de peces defectuoses. La producció d'un dia s'inspecciona al 100% sempre que en la inspecció de 12 peces, agafades a l'atzar de la producció, es trobin tres peces o més de defectuoses. Quina és la probabilitat que la producció d'un dia s'inspeccioni al 100%?*

Problemas a resolver

P7

Problema 4.27 *Els accidents de treball que es produeixen en una fàbrica segueixen un procés de Poisson tal que, en una setmana, la probabilitat que ocorrin 5 accidents és $\frac{16}{15}$ de la que n'ocorrin 2. Calculeu:*

(a) El paràmetre de la distribució de Poisson.
(b) El mínim nombre natural k tal que $P(X \leq k) \geq 0.4$.
(c) La probabilitat que no hi hagi cap accident en quatre setmanes.

Problemas a resolver

P8 Por un tramo de autopista pasan de media 6 coches por minuto. Un perro empieza a cruzar la carretera inmediatamente después de que pase un coche y tarda 10 segundos en hacerlo. Calcular la probabilidad de que pase **algún** coche durante este tiempo.

Problemas a resolver

P9 Se quiere reclutar 5 parejas que esperan su primer hijo para una prueba. Se llama al azar a parejas y puede que contesten SÍ o NO a participar. La probabilidad de aceptar es $p=0.2$.

1) Calcular la probabilidad de que haya que llamar a 15 parejas antes de llegar a tener 5 que acepten participar.
2) Calcular la probabilidad de que como mucho se observen 10 negativas.
3) Cuál la probabilidad de que por lo menos haya que observar 3 negativas antes de alcanzar 5 aceptaciones.
4) Cuál es el número medio esperado de negativas antes de obtener las 5 parejas.

Problemas a resolver

P10 **1.** `[2.5 puntos]` En un laboratorio de energía nuclear se van a realizar diferentes experimentos con particulas radiactivas. Ayuda a los experimentadores resolviendo las siguientes cuestiones:

(a) `[1 punto]` Se considera un experimento con un contador de partículas radiactivas, por el que las partículas pasan de manera independiente. Sea λ el número medio de partículas que pasan por minuto. Sea X la variable aleatoria "número de partículas que pasan por minuto", y sea Y la variable aleatoria "número de partículas que pasan por medio minuto". Si la probabilidad de que el contador mida al menos una partícula radiactiva en un minuto es de 0.996, calcula la probabilidad de que el contador mida menos de 2 partículas radiactivas en medio minuto.

(b) `[0.25 puntos]` Determina el valor del primer cuatil de la variable aleatoria Y.

(c) `[1 punto]` En un recinto del laboratorio, en el que podemos considerar que disponemos de una infinidad de partículas, hay partículas radiactivas y no radiactivas. Se sabe que hay un 20 % de partículas radiactivas. Seleccionamos al azar 5 partículas con un microcaptador. Calcula la probabiliad de que la mayoría de las particulas seleccionadas no sean radiactivas.

(d) `[0.25 puntos]` Calcula y explica el valor esperado de la variable aleatoria del apartado (c).

Problemas a resolver

P11

2. `[2.5 puntos]` Sabemos que un 2% de las copias de un libro son defectuosas. De 50 copias de este libro:

(a) ¿cuál es la probabilidad de que como mínimo 3 de ellas no sean defectuosas?

(b) Calcula la probabilidad de que 3 libros sean defectuosos. ¿Cómo se calcularía usando una distribución de Poisson?

Problemas a resolver

P12

4. `[2 puntos]` En una población, la probabilidad de que en un parto nazca un niño es $p = 0.51$. Consideramos una familia de 4 hijos.

(a) Determina la probabilidad de que tenga exactamente un niño o exactamente una niña. [0.6 puntos]

(b) Calcula la probabilidad de que la familia tenga al menos dos chicos. [0.6 puntos]

(c) Consideremos otra familia. Calcula el número exacto de hijos que debe tener para que la probabilidad de tener al menos una chica sea mayor de 0.75. [0.8 puntos]

Problemas a resolver

P14

5. [2 punts] El número de personas que cogen la baja laboral en una empresa por día sigue una distribución de Poisson. El porcentaje de días en que se produce una única baja es la mitad del porcentaje de días en el que no se produce ninguna baja.

(a) Calcula el número medio de bajas por día. [0.6 puntos]

(b) Calcula la probabilidad de que en un día haya 2 bajas y el día siguiente haya 2 bajas más. [0.7 puntos]

(c) Calcula la probabilidad de que en el periodo de 3 días haya, como máximo, 2 bajas. [0.7 puntos]

Problemas a resolver

P15

7. `[2 puntos]` En un Hospital se está experimentando con dos tratamientos. El 40% de los pacientes recibe el tratamiento A y el 60% restante el tratamiento B. De los que reciben el tratamiento A, el resultado es positivo en un 80% de los casos, lo que quiere decir que se curan. De los que reciben el tratamiento B, un 70% de los casos se curan (resultado positivo).

(a) `[1 punto]` Calcula la probabilidad de que un paciente haya recibido el tratamiento A, sabiendo que se ha curado.

(b) `[1 punto]` En esta pregunta consideramos 5 pacientes concretos. Calcula la probabilidad de que al menos 3 de estos pacientes se curen (independientemente del tratamiento que hayan recibido).

Problemas a resolver

P16

8. [1.5 punts] *La probabilitat de rebre de manera errònia un bit enviat per un canal de transmissió digital és de 0.1. Indiqueu la variable aleatòria i el model de distribució que feu servir a cada apartat.*

(a) [0.75 punts] *Calculeu la probabilitat que hagi 15 bits correctament rebuts abans del primer erroni.*

(b) [0.75 punts] *Si hem rebut 50 bits, quina és la probabilitat que hi hagi com a molt 3 rebuts de forma errònia?*

Problemas a resolver

P23

6. En cierta intersección vial ocurren (en promedio) 3 accidentes por mes. Asumiendo que todos los meses tienen 30 días y que existen 360 días en el año, Calcule:

(a) La probabilidad de que en esa intersección pasen 3 meses hasta encontrar un mes con un máximo de 1 accidente.

(b) El número de días al año en que se espera que no haya accidentes en la intersección.

Problemas a resolver

P17

4. [30 punts] Tenim una col·lecció prou gran de fotografies digitals d'igual mida i resolució que poden tenir un numero aleatori discret de "defectes" (píxels defectuosos) identificables per l'ull humà. L'experiència justifica que aquests defectes s'ajusten a un model de Poisson.

(a) [6 punts] El percentatge de fotos que tenen 2 defectes es 3 vegades el percentatge de les que tenen 3 defectes. Trobeu el valor mitjà de defectes per fotografia.

(b) [6 punts] Calculeu la probabilitat de que, en agafar una fotografia, aquesta no tingui cap defecte i la probabilitat de que tingui algun defecte.

(c) [6 punts] Si agafem un grup de 3 fotografies de manera conjunta, quin es el valor mitjà de defectes del grup. Quina es la probabilitat de que en un grup de 3 fotografies es trobin 3 defectes.

(d) [6 punts] Escollim a l'atzar 4 fotografies i estem interessats en comptar el nombre de les que no presenten cap defecte. A quin model de probabilitat s'ajusta la variable aleatòria que les compta? Calculeu la probabilitat de que aquest nombre no sigui superior a 1.

(e) [6 punts] Escollint a l'atzar una sèrie de fotografies, definim una variable aleatòria que compta el nombre de fotografies que hem d'agafar per arribar a tenir 4 sense cap defecte. Quin és el model que segueix aquesta variable? Calculeu la probabilitat de que aquest nombre sigui 4.

Problemas a resolver

P18

10. Un satélite está formado por cuatro componentes. El satélite funciona perfectamente si al menos dos de los cuatro componentes funcionan correctamente. Cada componente funciona de forma independiente y la probabilidad que cada componente funcione correctamente es de 0.6. Sea X la variable aleatoria discreta que cuenta el número de componentes del satélite que funcionan correctamente.

(a) ¿Cuál es la probabilidad que el satélite funcione perfectamente?

(b) Calcula (en función de k), el resultado de:

$$\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)}$$

para $k = 0, 1, 2, 3$.
ATENCIÓN: No se trata de una probabilidad condicionada.

Sol: a) 0.8208 b) 3/2·(4-k)/(k+1)

Problemas a resolver

P19

13. Un sistema con 5 componentes requiere para su funcionamiento que al menos 4 estén disponibles. Se sabe que la probabilidad de funcionamiento de un componente es 0.95 y que los fallos se producen de forma independiente. Se pide:

(a) Declara la variable aleatoria X que cuenta el número de componentes que funcionan correctamente en el sistema. Calcula la probabiliad para que un sistema funcione.

(b) En una empresa que emplea un gran número de estos sistemas, un ingeniero de control supervisa continuamente los sistemas, seleccionándolos de forma aleatoria y analizando su estado de funcionamiento. Declara la variable aleatoria Y que cuenta el número de sistemas analizados hasta que el ingeniero encuentra 2 sistemas que no funcionen. Calcula $P(Y \geq 4)$.

(c) Calcula el valor esperado de los apartados anteriores. Comenta estos valores.

Sol: a) 0.9774075 b) 0.9984918 c) 4.75 i 88.524953

Problemas a resolver

P20

15. El 30% de los habitantes de Barcelona durante la primavera padecen de alergia. Durante una noche de primavera en una de las salas de urgencias del Hospital Clínico se registró la asistencia de 20 enfermos de diversas dolencias. Suponiendo aleatoriedad, se pide:

(a) Calcula la probabilidad de que al menos 3 de ellos fueran asistidos por alergia.

(b) Si finalmente de entre los 20 enfermos se sabe que el 25% sufrían de alergia. Calcula la probabilidad de que al reunir aleatoriamente a 7 del total de enfermos (o sea de los 20) en una sala de reposo adjunta la mayoría fueran enfermos por alergia.

Sol: a) 0.96452 b) 0.03069

Problemas a resolver

P21

17. Responde a las siguientes cuestiones:

(a) El número de averías en una línea de tren por mes sigue un modelo probabilístico de Poisson. Se ha comprobado experimentalmente que, en el periodo de un mes, es igual de probable que se produzca alguna avería o ninguna. Con esta información, determina la probabilidad de que haya más de una avería a lo largo de tres meses.

(b) La empresa pone "sello plus"a un trimestre sin averías. A partir del primero de Enero, se quiere predecir el número de trimestres con averías que han de pasar hasta que se observe el primer trimestre plus. Expresa la función de probabilidad de la variable que predice dicho número y calcula su valor medio. Calcula la probabilidad de que tengan que pasar dos trimestres con averías antes de observar el primer trimestre "plus".

Sol: a) 0.615 b) 0.0957

Problemas a resolver

P19

12. En un día festivo, la probabilidad de ser atendido cuando una persona llama para reservar mesa en alguno de los restaurantes de una determinada cadena es del 40%. Si llaman 10 personas, ¿cuál es la probabilidad de que como mínimo 2 no sean atendidas? Indica la variable aleatoria y el modelo de distribución.

Sol: 0.99832