*** Exercici 1:**

(a) $\mathrm{m}\frac{d^2x_0}{dt^2} = k(x_i - x_0) + b\frac{d}{dt}(x_i - x_0)$

(b) $\mathrm{G(s)} = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{bs+k}{ms^2+bs+k}$

*** Exercici 2:**

(b) $\begin{cases} A\frac{dh_1}{dt} = F_A - \beta_1 h_1 \\ A\frac{dh_2}{dt} = \beta_1 h_1 - \beta_2 h_2 \end{cases}$

(c) $\mathrm{G(s)} = \frac{H_2(s)}{F_A(s)} = \frac{\beta_1}{(As+\beta_1)\cdot(As+\beta_2)}$

*** Exercici 3:**

(a) $\omega = 7\ rad/s$

(b) $y(\infty) - y(0) = 24$; $\big(y(\infty) - y(0)\big) \cdot M_p = 24e^{-\frac{3\pi}{7}} = 6.24.$

(c) El sistema és estable perquè la part real dels seus pols és negativa.

*** Exercici 4:**

	(a)	(b)	(c)
TF	$\mathrm{G(s)} \cong \frac{1}{2s^2+2s+1}$	$\mathrm{G(s)} \cong \frac{25}{s^2+6s+25}$	$\mathrm{G(s)} \cong \frac{25}{s^2+4s+25}$
ξ	0.7071	0.6	0.4
ω_n (rad/s)	0.7071	5	5
ω (rad/s)	0.5	4	4.583
T (s)	12.566	1.571	1.371
$t_s(2\%)(s)$	8.517	1.378	2
t_r (s)	4.712	0.554	0.4326
t_p (s)	6.283	0.785	0.685
M_p (%)	4.32	9.5	25.38

*** Exercici 5:**

Com que el sistema és lineal, multiplicant l'amplitud d'entrada per un valor constant de 2 fa que l'amplitud de sortida augmenti pel mateix factor, per tant el nou sobre-impuls absolut serà 3. Les característiques restants no variaran, ja que no depenen de l'amplitud del senyal d'entrada.

A partir del sobre-impuls relatiu M_p obtenim $\xi = 0.2154$, i llavors a partir de la freqüència d'oscil·lació es té $\omega_n = 2.048$. Com que el guany canònic és $K = 2$, la funció de transferència és $\mathrm{G(s)} \cong \frac{8.39}{s^2+0.882s+4.194}$. A partir d'aquí podem calcular el temps d'establiment i comprovar que el valor observat és correcte.

*** Exercici 6:**

(a) $\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3}$ (b) $\frac{C}{R} = \frac{(1+G_1)G_2}{1+G_2(H_1-H_2)}$

*** Exercici 7:**

(a) $\frac{C(s)}{R(s)} = \left(1+\frac{G_f}{G_c}\right)\frac{G_cG_1G_p}{1+G_cG_1G_pH}$ (b) $\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1+G_cG_1G_pH}$ (c) $\frac{E(s)}{R(s)} = \left(1+\frac{G_f}{G_c}\right)\frac{1}{1+G_cG_1G_pH}$

(d) $\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{G_pH}{1+G_cG_1G_pH}$ (e) $\frac{U(s)}{R(s)} = \left(1+\frac{G_f}{G_c}\right)\frac{G_c}{1+G_cG_1G_pH}$ (f) $\frac{U(s)}{D(s)} = -\frac{G_cG_pH}{1+G_cG_1G_pH}$

*** Exercici 8:**

(a) $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H_1}$ (b) $\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_2}{1+G_1G_2H_1}$ (c) $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_cG_1G_2G_3}{1+G_1G_2H_1+G_cG_1G_2G_3H_2}$

(d) $\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G_2G_3}{1+G_1G_2H_1+G_cG_1G_2G_3H_2}$ (e) $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1+G_1G_2H_1}{1+G_1G_2H_1+G_cG_1G_2G_3H_2}$ (f) $\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{G_2G_3H_2}{1+G_1G_2H_1+G_cG_1G_2G_3H_2}$

*** Exercici 9: (a)** Estable: pols amb part real negativa. **(b)** Inestable: dos pols amb part real nul.la (alternativament podeu considerar aquest contra-exemple: un graó d'entrada, que està fitat, dóna lloc a una paràbola de sortida, que no està fitada. **(c)** Inestable: pel criteri de Routh hi ha canvis de signe en la primera columna. **(d)** Inestable: mateix raonament que en l'apartat (b).

*** Exercici 10**: Aplicant el criteri d'estabilitat de Routh, obtenim $0 < K_i < 3.6$.

*** Exercici 11:** Perquè el sistema sigui estable, els paràmetres del controlador PI han de satisfer

$$K_i < 2\xi\omega_n\left(K_p + \frac{1}{K}\right).$$

*** Exercici 12: (a)** $e_{ss} = 0$; **(b)** $e_{ss} = 0$; (c) Com que en aquest cas tenim realimentació positiva, el sistema resultant és inestable perquè la part real del seus pols és *+25/16*, per tant $e_{ss} \to \infty$.

*** Exercici 13: (a)** $e_{ss} = 0$; **(b)** $e_{ss} = 1/5$; **(c)** $e_{ss} \to \infty$.

*** Exercici 14:** Un controlador integral satisfà el requeriment d'error estacionari nul, però no fa el sistema estable. Per contra, un controlador proporcional porta a un error estacionari $e_{ss} > 0$. Per tant, hem de considerar un controlador PI $G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$. Usant el criteri d'estabilitat de Routh, qualsevol controlador que els seus paràmetres satisfacin $K_i > 0$ y $K_p > 2$ complirà els requeriments desitjats.

*** Exercici 15:** El controlador més simple és un de proporcional. Però el requeriment d'estabilitat obtingut amb el criteri de Routh ($0 < K_p < 4$) entra en conflicte amb el requeriment d'un error estacionari $e_{ss} < 0.2$ ($K_p > 5$). Tant un controlador PI com un PD serien adequats. No obstant, un controlador PD sempre incrementa el soroll de mesura, així que és preferible utilitzar un PI sempre que sigui possible. A partir del criteri d'estabilitat de Routh, els seus paràmetres han de satisfer $0 < K_p < 4$ i $0 < K_i < \frac{3}{4}K_p(4-K_p)$. Per exemple, el parell $K_p = 2$ y $K_i = 0.2$ complirien les especificacions. El controlador PI té el benefici afegit d'incrementar el tipus del sistema, així que l'error estacionari a una entrada en rampa serà idènticament zero.

*** Exercici 16: (a)** El polinomi característic desitjat és $D_d(s) = s^3 + 12s^2 + (21 + a^2)s + 10(1 + a^2)$. La transmitància de llaç $G_p(s)H(s) = \frac{10(s+20)}{s(s+1)}$ és de tipus 1. Per obtenir un error estacionari nul a una rampa d'entrada, necessitem un sistema de tipus 2, de manera que el controlador ha de proveir al menys un integrador extra. Les dues condicions numèriques sobre els pols requereixen dos paràmetres o graus de llibertat, per tant necessitem un controlador PI : $G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$. El polinomi característic del sistema en llaç tancat amb controlador és $D(s) = s^3 + \left(1 + 10K_p\right)s^2 + \left(200K_p + 10K_i\right)s + 200K_i$. Identificant coeficients, obtenim la solució final $K_p = 1.1$, $K_i = 20$ i $a = \sqrt{399} \cong 19.97$. **(b)** el guany canònic de la transmitància de llaç $G_c(s)G_p(s)H(s)$ és $k_L = 4000$, així que l'error estacionari és $e_{ss} = \frac{2}{k_L} = 5 \cdot 10^{-4}$.

*** Exercici 17: (a)** Com que tenim un sistema de tipus 1, l'error estacionari per una entrada en rampa és fitat, i si la rampa és unitària pren per valor $e_{ss} = \frac{1}{k_L} = \frac{1}{3K_p} = 0.05$, la qual cosa porta a $K_p = 13.33$. No obstant, hem d'anar alerta amb l'estabilitat. Si calculem l'equació característica del sistema en llaç tancat amb un controlador proporcional genèric K_p i apliquem el criteri d'estabilitat de Routh, obtenim un rang de valors acceptables $0 < K_p < 2$. Així doncs, no hi ha cap controlador proporcional que satisfaci el requeriment de precisió desitjada. **(b)** El polinomi característic desitjat és del tipus $D_d(s) = (s + p)^3 = s^3 + 3ps^2 + 3p^2s + p^3$, on $s = -p$ és l'arrel triple. Amb controladors que tinguin un integrador (I, PI, PID) el polinomi característic $D(s) = 1 + G_c(s)G_p(s)H(s)$ seria de grau 4, i no 3 com volem. Usar un controlador D portaria a una equació característica de segon grau. Un controlador proporcional no proporciona una solució única per a p. Finalment, un controlador PD $G_c(s) = K_p + K_d s$ proporciona el polinomi característic $D(s) = s^3 + 3s^2 + (2 + 3K_d)s + 3K_p$, que identificant amb $D_d(s)$ dona lloc a $p = 1$, $K_p = \frac{1}{3}$ i $K_d = \frac{1}{3}$.

*** Exercici 18: (a)** El procés a controlar complet està modelitzat per la funció de transferència $G_p(s) = \frac{0.08}{(s+1)^2}$. Per complir les especificacions desitjades, no necessitem un tipus del sistema major, així que un controlador proporcional $G_c(s) = K_p$ hauria de ser suficient. La funció de transferència en llaç tancat pot simplificar-se a $T(s) = \frac{0.08K_p}{s^2+2s+1+0.08K_p}$. Per obtenir el sobre-impuls desitjat, el coeficient d'esmorteïment ha de ser $\xi = 0.69$. Identificant amb la transmitància general d'un sistema de segon ordre, obtenim $K_p = \frac{1}{0.08}\left(\frac{1}{\xi^2} - 1\right) = 13.755$. Utilitzant aquest controlador, el guany de llaç és $k_L = 0.08K_p$, així que l'error estacionari per un graó unitari d'entrada és $e_{ss} = \frac{1}{1+k_L} = 0.476$ unitats de dosificació. (b) Per eliminar l'error estacionari a l'entrada graó hem d'incrementar el tipus del sistema. El controlador més senzill que verifica aquest requeriment és un controlador I $G_c(s) = \frac{K_i}{s}$. El polinomi característic desitjat és $D_d(s) = \left(s + \frac{4}{3}\right)\left(s + \frac{1}{3}\right)^2 = s^3 + 2s^2 + s + \frac{4}{27}$, que identificant amb $D(s) = s^3 + 2s^2 + s + 0.08K_i$ porta a $K_i = 1.85$. El sistema resultant no té sobre-impuls, ja que tots els pols de llaç tancat són reals i la funció de transferència resultant no té cap zero. Si haguéssiu assajat un controlador PID, hauríeu arribat al mateix resultat, perquè $D(s) = s^3 + (2 + 0.08K_d)s^2 + (1 + 0.08K_p)s + 0.08K_i$ porta a $K_p = K_d = 0$ després d'identificar amb $D_d(s)$.