TEMA 3 ELEMENTOS DE PROBABILIDAD

Pablo Buenestado

Curso 2020-2021 Otoño

Departamento de Matemáticas (UPC)

Índice

Esquema

El desarrollo de la teoría de la probabilidad fue financiada por apostadores en el siglo XVII, quienes contrataron a algunos matemáticos famosos para que calculasen la probabilidad correcta de ciertos juegos de azar.

Con el tiempo, la gente se dio cuenta de que los procesos científicos también son azarosos y desde entonces se han empleado métodos de probabilidad para estudiar el entorno físico.

Actualmente, la probabilidad constituye una gran rama de las matemáticas. Existen muchos libros al respecto y numerosos investigadores han dedicado bastante de su tiempo con el propósito de ampliar su desarrollo.

En este tema se presenta una introducción de los conceptos de probabilidad más relevantes para el estudio de la estadística.

Esquema

Para realizar un estudio sistemático de probabilidad, se necesita cierta terminología.

Un experimento constituye un proceso con un resultado que no se puede predecir certeramente con anterioridad.

El hecho de lanzar una moneda al aire, arrojar un dado, medir el diámetro de un perno, pesar los contenidos de una caja de cereales, o medir la resistencia de una cuerda de pescar, son ejemplos de experimentos.

Con la finalidad de analizar un experimento en términos probabilísticos, se debe especificar sus posibles resultados.

Definición

Al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento se le llama espacio muestral.

Utilizamos la letra S para definir al espacio muestral.

El espacio muestral puede ser finito o infinito.

Ejemplos de espacios muestrales finitos:

Al lanzar al aire una moneda se puede utilizar el conjunto {"cara", "cruz"} como el espacio muestral.

Al lanzar un dado de seis caras se puede usar al conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Algunos experimentos tienen espacios muestrales con un número infinito de resultados:

Por ejemplo, imaginemos que un buril[1] con diámetro de 10 mm hace perforaciones en una lámina de metal. Debido a las variaciones en el ángulo de la perforación y a los pequeños movimientos en la lámina de metal, los diámetros de los agujeros varían entre 10 y 10.2 mm.

Por tanto, para el experimento de perforación sería razonable un espacio muestral que esté en el intervalo (10.0, 10.2), o en notación de conjuntos, $\{x|10.0 < x < 10.2\}$. Obviamente, este conjunto contiene un número infinito de resultados.

[1] Instrumento usado principalmente por los grabadores para grabar metales o piedra que consiste en una barra prismática fina y puntiaguda de acero.(Punzón)

En muchos experimentos se puede escoger entre diversos espacios muestrales.

Por ejemplo, supongamos un proceso que produce clavos de acero cuyas longitudes varían entre 5.20 y 5.25 cm. Una opción obvia para el espacio muestral de la longitud de un clavo sería el conjunto $\{x|5.20 < x < 5.25\}$.

Sin embargo, si el objetivo fuera simplemente determinar si el clavo es demasiado corto, demasiado largo o está dentro de ciertos límites específicos, una buena elección sería que el espacio muestral fuera {demasiado corto, demasiado largo, dentro de las especificaciones}.

Con frecuencia, al estudiar experimentos, se está interesado en un subconjunto particular de resultados.

Por ejemplo, se puede tener interés en la probabilidad de que un dado caiga en un número par. El espacio muestral para el experimento es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y el correspondiente a que caiga en un número par es el subconjunto $\{2, 4, 6\}$.

En el ejemplo del buril usado para perforar, se puede tener interés en la probabilidad de que un hueco tenga un diámetro menor a 10.1 mm. Esto último corresponde al subconjunto $\{x|10.0 < x < 10.1\}$.

Existe un nombre especial para el subconjunto de un espacio muestral:

Definición

Un subconjunto de un espacio muestral se denomina evento o suceso.

Observemos que para cualquier espacio muestral, el conjunto vacío $\emptyset$ es un evento, como lo es todo el espacio muestral.

Se dice que un evento ocurrió si el resultado del experimento es alguno de los resultados en el evento.

Por ejemplo, si un dado cae en el número 2, habrán ocurrido los eventos $\{2, 4, 6\}$ y $\{1, 2, 3\}$, junto con cualquier otro evento que contenga el resultado "2".

Ejemplo

Un ingeniero eléctrico tiene en su mano dos cajas de resistores[2], cada una con cuatro de éstos. Los resistores de la primera caja están etiquetados con 10 Ω (ohms), pero, de hecho, sus resistencias son de 9, 10, 11 y 12 Ω. Los resistores de la segunda caja tienen la etiqueta de 20 Ω, pero sus resistencias son de 18, 19, 20 y 21 Ω. El ingeniero elige un resistor de cada caja y determina la resistencia de cada uno.

Sea A el evento para el cual el primer resistor tiene una resistencia mayor a 10, sea B el evento en el que el segundo resistor tiene una resistencia menor a 19 y sea C el evento en el cual la suma de las resistencias es igual a 28.

Se pide determinar un espacio muestral para este experimento y especificar los subconjuntos que corresponden a los eventos A, B y C.

[2] Componente electrónico diseñado para introducir una resistencia eléctrica determinada entre dos puntos de un circuito eléctrico. (Resistencia)

Solución

Un buen espacio muestral es el conjunto de pares ordenados en el que el primer elemento representa la resistencia del primer resistor (primera caja) y el segundo elemento constituye la del segundo resistor (segunda caja).

Así, el espacio muestral S es:

$$S = \{(9,18),(9,19),(9,20),(9,21),(10,18),(10,19),(10,20),(10,21),$$

$$(11,18),(11,19),(11,20),(11,21),(12,18),(12,19),(12,20),(12,21)\}$$

Los eventos A, B y C están dados por:

$$A = \{(11,18),(11,19),(11,20),(11,21),(12,18),(12,19),(12,20),(12,21)\}$$

$$B = \{(9,18),(10,18),(11,18),(12,18)\}$$

$$C = \{(9,19),(10,18)\}$$

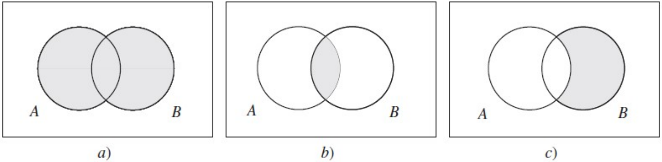
Combinación de eventos

Con frecuencia se construyen eventos mediante la combinación de eventos más sencillos. Debido a que aquéllos son subconjuntos de espacios muestrales, es usual emplear la notación de conjuntos para describir los eventos construidos de esta forma. A continuación se repasará la notación necesaria.

- La unión de dos eventos A y B, se denota por $A \cup B$, es el conjunto de resultados que pertenecen ya sea a A o B, o a ambos. Esto es, $A \cup B$ significa "A o B". Por tanto, el evento $A \cup B$ se presenta siempre que ocurre A o B (o ambos).
- La intersección de dos eventos A y B se denota como $A \cap B$; es decir, constituye el conjunto de resultados que pertenece tanto a A como a B. Por consecuencia, $A \cap B$ significa "A y B". Por consiguiente, el evento $A \cap B$ se presenta siempre que A y B ocurren.
- El complemento o complementario de un evento A se denota por A^c (o $\bar{A}$), es el conjunto de resultados que no pertenecen a A. Es decir, A^c significa "no A". Por consiguiente, el evento A^c se presenta siempre que no ocurra A.

Los eventos se pueden mostrar gráficamente con los diagramas de Venn. Dónde el espacio muestral es el recuadro, en el que se dibujan los sucesos A y B.

La figura muestra sombreados los eventos $a)$ $A \cup B$, $b)$ $A \cap B$ y $c)$ $B \cap A^c$.



Ejemplo (Continuación)

A partir de los eventos definidos en el ejemplo de los resistores, determinemos $B \cup C$

Solución

El evento $B \cup C$ contiene todos los resultados que pertenecen a B o a C, o a ambos. Por tanto,

$$B \cup C = \{(9, 18), (10, 18), (11, 18), (12, 18), (9, 19)\}$$

Observemos que el suceso $(10, 18)$ forma parte tanto de B como de C y en la unión $B \cup C$ lo especificamos una sola vez.

Ejemplo (Continuación)

A partir de los eventos definidos en el ejemplo de los resistores, determinemos $A \cap B^c$

Solución

El evento B^c contiene los resultados en el espacio muestral que no pertenecen a B.

$$B^c = \{(9,19),(9,20),(9,21),(10,19),(10,20),(10,21),$$

$$(11,19),(11,20),(11,21),(12,19),(12,20),(12,21)\}$$

De ahí, el evento $A \cap B^c$ contiene los resultados que pertenecen a A y no pertenecen a B. Por consiguiente,

$$A \cap B^c = \{(11,19),(11,20),(11,21),(12,19),(12,20),(12,21)\}$$

Eventos mutuamente excluyentes

Existen ciertos eventos que nunca se presentan simultáneamente.

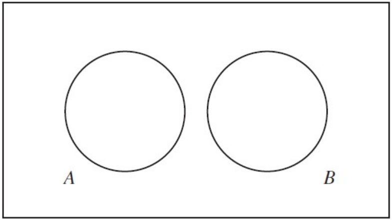
Por ejemplo, es imposible que una moneda que se lance al aire caiga a la vez en "cruz" y "cara", al igual que un clavo de acero sea al mismo tiempo demasiado largo y corto.

A eventos de este tipo se les llama mutuamente excluyentes o disjuntos.

Definición

Se dice que los eventos A y B son mutuamente excluyentes o disjuntos si no tienen resultados en común.

El diagrama de Venn de la figura muestra los eventos A y B mutuamente excluyentes.



Ejemplo (Continuación)

A partir de los eventos definidos en el ejemplo de los resistores, si se realiza el experimento, ¿es posible que los eventos A y B ocurran al mismo tiempo?

¿Qué pasa con B y C? ¿A y C?

¿Qué par de eventos es mutuamente excluyente?

Solución

Si el resultado es (11, 18) o (12, 18), entonces tanto el evento A como el B ocurren.

Si el resultado es (10, 18), entonces ocurren los eventos B y C.

Es imposible que ocurran al mismo tiempo A y C, ya que estos eventos son mutuamente excluyentes al no tener ningún resultado en común.

Probabilidades

Todo evento en un espacio muestral tiene una probabilidad de ocurrir.

Intuitivamente, la probabilidad es una medida cuantitativa de qué tan probable es que ocurra un evento.

Formalmente hablando, hay varias interpretaciones de la probabilidad; la primera que se adoptará es que la probabilidad de un evento representa la proporción de veces que se presentaría el evento a largo plazo, si el experimento se repitiera una y otra vez.

Con frecuencia se usa la letra P para representar la probabilidad. Por tanto, cuando se lanza una moneda al aire la notación "P("cara") $= 1/2$" significa que la probabilidad de que la moneda caiga en "cara" es igual a $1/2$.

Resumen

Dado un experimento y cualquier evento A:

- La expresión $P(A)$ denota la probabilidad de que ocurra el evento A.
- $P(A)$ constituye la proporción de veces que se presenta el evento A en el tiempo, si es que el experimento se realizara una y otra vez.

En muchas situaciones, la única forma de calcular la probabilidad de un evento es repetir el experimento muchas veces y determinar la proporción de veces que ocurre.

Por ejemplo, si se deseara calcular la probabilidad de que un tablero de circuitos impresos fabricado por cierto proceso esté defectuoso, usualmente se necesitaría producir cierta cantidad de tableros y probarlos para determinar la proporción de los defectuosos.

En algunos casos, las probabilidades se pueden determinar si se conoce la naturaleza física del experimento.

Por ejemplo, si se sabe que la forma de un dado es casi igual a la de un cubo perfecto y que su masa está distribuida aproximadamente en forma homogénea, se puede suponer que cada una de sus seis caras tiene la misma probabilidad de salir cuando se lanza el dado.

Una vez que se han encontrado las probabilidades de ciertos eventos mediante el conocimiento científico o la experiencia, se puede calcular matemáticamente las probabilidades de otros eventos.

Por ejemplo, si se ha calculado a través de la experimentación que la probabilidad de que un tablero de circuitos impresos esté defectuoso es de 0.10, se puede calcular que la probabilidad de que un tablero no esté defectuoso es de 0.90.

Como otro ejemplo, supongamos que los clavos de acero producidos por determinado proceso no cumplen con la longitud especificada, ya sea porque son demasiado cortos o demasiado largos. Al medir gran cantidad de clavos, se calculó que la probabilidad de que uno de ellos sea demasiado corto es de 0.02 y que la probabilidad de que otro sea demasiado largo es de 0.03. Entonces puede calcularse que la probabilidad de que un clavo no cumpla con la especificación es de 0.05.

En la práctica, los científicos e ingenieros calculan las probabilidades de ciertos eventos con base en el conocimiento científico y la experiencia, y posteriormente utilizan reglas matemáticas para calcular las estimaciones de las probabilidades de otros eventos.

Más adelante, en el presente tema, se explican algunas de estas reglas y se muestra cómo utilizarlas.

Axiomas de la probabilidad

El tema de la probabilidad se basa en tres reglas de sentido común, conocidas como axiomas.

Axiomas de la probabilidad

1. Sea S un espacio muestral. Entonces

$$P(S) = 1$$

2. Para cualquier evento A,

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

3. Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

   De forma más general, si $A_1, A_2, \ldots$ son eventos mutuamente excluyentes, entonces $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$

Veamos que los tres axiomas en realidad concuerdan con el sentido común.

El primero establece que el resultado de un experimento siempre está en el espacio muestral. Esto es obvio, puesto que, por definición, el espacio muestral contiene todos los resultados posibles del experimento.

El segundo dice que la frecuencia a largo plazo de cualquier evento siempre se encuentra entre 0 y 100%.

Un ejemplo que demuestra al tercer axioma, que ya se analizó anteriormente, es el del proceso que produce clavos de acero, en donde la probabilidad de que un clavo sea demasiado corto es de 0.02 y la de que un clavo es demasiado largo es de 0.03. El tercer axioma establece que la probabilidad de que el clavo sea demasiado corto o muy largo es $0.02 + 0.03 = 0.05$.

Presentamos dos reglas sencillas que son útiles para calcular probabilidades. Estas reglas son intuitivamente obvias y también pueden comprobarse a través de los axiomas.

Consecuencias de los Axiomas de Probabilidad

- Para cualquier evento A, se cumple que

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- Si $\emptyset$ denota el espacio vacío, entonces

$$P(\emptyset) = 0$$

La ecuación $P(A^c) = 1 - P(A)$ establece que la probabilidad de que un evento no ocurra es igual a 1 menos la probabilidad de que ocurra. Por ejemplo, si existe una probabilidad de 40% de que llueva, hay una probabilidad de 60% de que no llueva.

La ecuación $P(\emptyset) = 0$ establece que es imposible que un experimento no tenga ningún resultado.

Ejemplo

El objetivo de una prueba de tiro consiste de un blanco rodeado por dos anillos concéntricos.

Se dispara un proyectil hacia el objetivo.

La probabilidad de que pegue en el blanco es de 0.10, la de que atine en el anillo interior es de 0.25 y la de que acierte en el anillo exterior es de 0.45.

¿Cuál es la probabilidad de que el proyectil acierte en el objetivo?

¿Cuál es la probabilidad de que no pegue en este último?

Solución

Pegar en el blanco, acertar en el anillo interior y atinar en el anillo exterior son eventos mutuamente excluyentes, ya que es imposible que más de uno de éstos ocurra a la vez.

Por tanto, utilizando el axioma 3,

$$P(\text{pega en el objetivo}) = P(\text{blanco}) + P(\text{anillo interior}) + P(\text{anillo exterior})$$

$$P(\text{pega en el objetivo}) = 0.1 + 0.25 + 0.45 = 0.80$$

Ahora se puede calcular la probabilidad de que el proyectil no pegue en el objetivo utilizando la ecuación relativa al complementario:

$$P(\text{no pega en el objetivo}) = 1 - P(\text{pega en el objetivo}) = 1 - 0.80 = 0.20$$

Ejemplo

La tabla presenta las probabilidades del número de veces en que el sistema de cierta computadora se ”caerá” en el transcurso de una semana.

Número de casos	Probabilidad
0	0.60
1	0.30
2	0.05
3	0.04
4	0.01

Sea A el evento de que haya más de dos ”caídas” durante la semana, y B el evento de que el sistema se ”caerá” por lo menos una vez.

Determinemos el espacio muestral.

Después precisemos los subconjuntos del espacio muestral que corresponden a los eventos A y B.

Posteriormente determinemos $P(A)$ y $P(B)$.

Solución

El espacio muestral del experimento es el conjunto $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Los eventos son $A = \{3, 4\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Para encontrar $P(A)$, advertimos que A constituye el evento en que se presenten tres "caídas" o que haya cuatro "caídas". Los eventos "que se presenten tres caídas" y "que ocurran cuatro caídas" son mutuamente excluyentes. Por tanto, mediante el axioma tres, se concluye que

$$P(A) = P(\text{ocurran tres "caídas" o se presenten cuatro "caídas"})$$

$$P(A) = P(\text{ocurran tres "caídas"}) + P(\text{sucedan cuatro "caídas"})$$

$$P(A) = 0.04 + 0.01 = 0.05$$

Solución (Continuación)

Calculamos $P(B)$ en dos formas.

Primero, observemos que B^c es el evento de que no haya ninguna caída. Por tanto, utilizando la ecuación relativa al complementario

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - P(\text{no ocurran "caídas"}) = 1 - 0.60 = 0.40$$

En la segunda forma para calcular $P(B)$, observemos que B es el evento de que haya una "caída" o de que sucedan dos o que ocurran tres "caídas" o haya cuatro de éstas. Estos eventos son mutuamente excluyentes. Por consiguiente, utilizando el axioma tres, se concluye que

$$P(B) = P(\text{una "caída"}) + P(\text{dos "caídas"}) + P(\text{tres "caídas"}) + P(\text{cuatro "caídas"})$$

$$P(B) = 0.30 + 0.05 + 0.04 + 0.01 = 0.40$$

En el ejemplo de la computadora calculamos las probabilidades de los eventos $A = \{3, 4\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$ sumando las probabilidades de los resultados de cada uno de los eventos:

$$P(A) = P(3) + P(4)$$

$$P(B) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$$

En general, este método funciona. Dado que cualesquiera dos resultados en un espacio muestral son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que cualquier evento contenga un número finito de resultados se puede determinar mediante la suma de las probabilidades de los resultados que incluyen al evento.

Consecuencias de los Axiomas de Probabilidad

Si A es un evento y $A = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, entonces

$$P(A) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n)$$

Espacios muestrales con resultados igualmente probables

En algunos experimentos se puede construir un espacio muestral en el cual todos los resultados sean igualmente probables.

Un ejemplo sencillo es el lanzamiento de un dado, en el cual el espacio muestral es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y cada uno de estos resultados tiene una probabilidad de $1/6$.

Otro tipo de experimento que tiene resultados igualmente probables es la selección aleatoria de un elemento a partir de una población de elementos. Se puede suponer que los elementos en la población son los resultados en un espacio muestral y que cada elemento tiene la misma probabilidad de ser seleccionado.

Espacios muestrales con resultados igualmente probables

Una población a partir de la cual se muestrea un elemento en forma aleatoria constituye un espacio muestral con resultados igualmente probables.

Si un espacio muestral contiene N resultados igualmente probables, la probabilidad de cada resultado es $1/N$.

Esto es así porque la probabilidad de todo el espacio muestral debe ser 1 y esta probabilidad se divide equitativamente entre los N resultados.

Si A representa un evento que contiene k resultados, entonces se puede determinar $P(A)$ mediante la suma de las probabilidades de los k resultados, de tal forma que $P(A) = k/N$.

Resumen

Si S es un espacio muestral que contiene N resultados igualmente probables y si A es un evento que contiene k resultados, entonces

$$P(A) = k/N$$

Ejemplo

Un troquel de extrusión[3] se utiliza para producir varillas de aluminio.

Existen ciertas especificaciones para la longitud y diámetro de las varillas.

Para cada una de éstas, la longitud puede ser demasiado corta, demasiado larga o estar bien y el diámetro se puede clasificar en muy delgado, muy grueso o estar bien.

En una población de mil varillas, el número de ellas en cada clase es:

	Diámetro		
Longitud	Muy delgado	Está bien	Muy grueso
Demasiado corta	10	3	5
Está bien	38	900	4
Demasiado larga	2	25	13

Se toma una varilla aleatoriamente a partir de esta población. ¿Cuál es la probabilidad de que sea demasiado corta?

[3] Proceso utilizado para crear objetos con sección transversal definida y fija.

Solución

Se considera que cada una de las mil varillas representa un resultado en un espacio muestral.

Cada uno de los mil resultados tiene la misma probabilidad.

Se resolverá el problema contando el número de resultados que corresponde al evento.

El número de varillas que son demasiado cortas es $10 + 3 + 5 = 18$.

Dado que el número total de varillas es mil,

$$P(\text{demasiado corta}) = \frac{18}{1000}$$

Regla de la suma

Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Esta regla se puede generalizar para abarcar el caso en el que A y B no sean mutuamente excluyentes.

En el ejemplo siguiente se muestra este razonamiento.

Ejemplo

Con referencia al ejemplo de las varillas, si se selecciona aleatoriamente una varilla, ¿cuál es la probabilidad de que sea demasiado corta o demasiado gruesa?

Solución

Primero, resolveremos este problema al contar el número de resultados que corresponde al evento. En la siguiente tabla se circuló la cantidad de varillas que son demasiado gruesas y el número de varillas que son muy cortas aparecen en recuadros. Observemos que hay cinco varillas que son muy cortas y demasiado gruesas.

	Diámetro		
Longitud	Muy delgado	Está bien	Muy grueso
Demasiado corta	$\boxed{10}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$
Está bien	38	900	4
Demasiado larga	2	25	13

De los mil resultados, el número de varillas que son demasiado cortas o muy gruesas es $10 + 3 + 5 + 4 + 13 = 35$. Por consiguiente,

$$P(\text{demasiado corta o muy gruesa}) = \frac{35}{1000}$$

Ahora se resolverá el problema de tal forma que conduzca a un método más general.

En el espacio muestral hay $10 + 3 + 5 = 18$ varillas que son demasiado cortas y $5 + 4 + 13 = 22$ varillas muy gruesas.

Pero si se trata de encontrar el número de varillas que sean demasiado cortas o muy gruesas al sumar $18 + 22$, se obtiene un número muy grande (40 en vez de 35).

La razón es que hay cinco varillas que son demasiado cortas y muy gruesas y éstas se cuentan dos veces.

No obstante, se puede resolver el problema al sumar 18 y 22, pero entonces se le debe restar cinco para corregir el doble conteo.

Se replantea este razonamiento al utilizar probabilidades:

$$P(\text{demasiado corta}) = \frac{18}{1000}$$
$$P(\text{muy gruesa}) = \frac{35}{1000}$$
$$P(\text{demasiado corta y muy gruesa}) = \frac{5}{1000}$$

Construimos la probabilidad buscada de la siguiente manera:

$P(\text{demasiado corta o muy gruesa}) =$
$P(\text{demasiado corta}) + P(\text{muy gruesa}) - P(\text{demasiado corta y muy gruesa})$

En consecuencia,

$$P(\text{demasiado corta o muy gruesa}) = \frac{18}{1000} + \frac{22}{1000} - \frac{5}{1000} = \frac{35}{1000}$$

El método del ejemplo anterior es válido para cualesquiera dos eventos en un espacio muestral.

En general, para determinar la probabilidad de que ocurran cualesquiera de los dos eventos, se suman las probabilidades de los eventos y después se resta la probabilidad de que ambos ocurran.

Resumen

Sean A y B cualesquiera eventos, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Observemos que si A y B son mutuamente excluyentes, entonces $P(A \cap B) = 0$, por lo que, en este caso la expresión anterior se reduce al axioma 3.