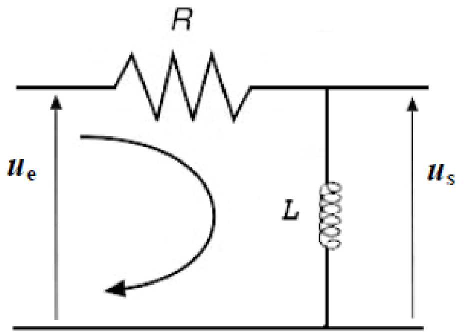
# Ejercicios Regulación Resueltos

**Ejercicio 1:** Dado el siguiente circuito eléctrico y las ecuaciones que rigen su comportamiento. Encuentra la función de transferencia $\mathrm{G(s)} = \dfrac{\mathrm{U_s(s)}}{\mathrm{U_e(s)}}$ , donde $U_s(s) = \mathcal{L}\{u_s(t)\}$ y $U_e(s) = \mathcal{L}\{u_e(t)\}$ .

Equaciones: $i(t) = \dfrac{u_e(t) - u_s(t)}{R}$ , $L\dfrac{di(t)}{dt} = u_s(t)$




**Solución:**

Transformamos las dos ecuaciones al dominio s (considerando condiciones iniciales nulas)

$$i(t) = \frac{u_e(t) - u_s(t)}{R} \xrightarrow{\mathcal{L}} I(s) = \frac{U_e(s) - U_s(s)}{R}$$

$$L\frac{di(t)}{dt} = u_s(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} LI(s)s = U_s(s)$$

Operando con las dos ecuaciones transformadas llegamos a

$$G(s) = \frac{U_s(s)}{U_e(s)} = \frac{\frac{L}{R}s}{\frac{L}{R}s + 1}$$

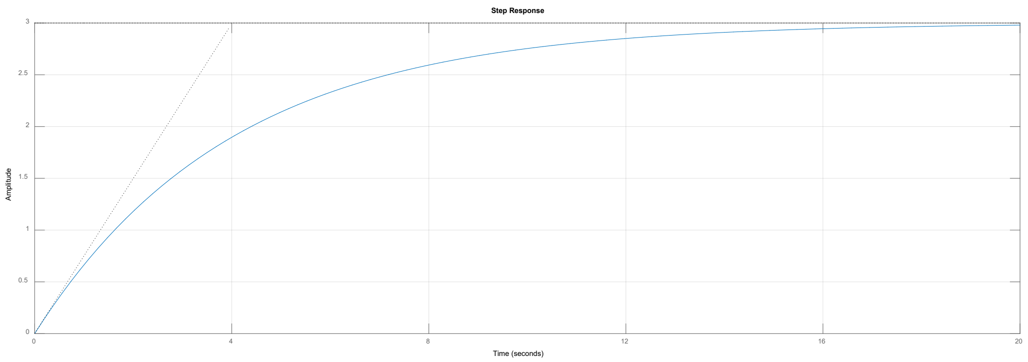
**Ejercicio 2:** Dibuja la respuesta al escalón unitario del sistema cuya función de transferencia es

$$\mathrm{G(s)} = \frac{15}{20\mathrm{s} + 5}$$

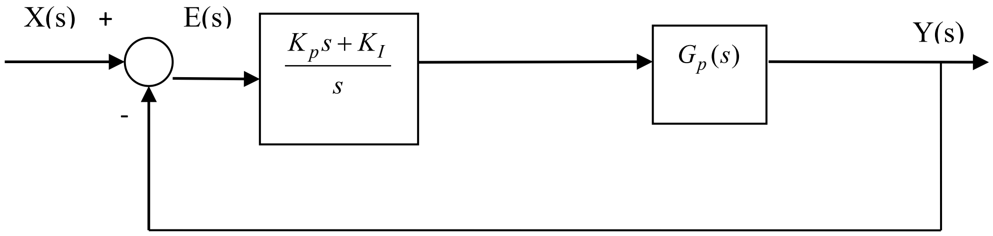
**Solución:**

Si pasamos la función de transferencia a forma canónica obtenemos

$\mathrm{G(s)} = \dfrac{3}{4\mathrm{s} + 1}$ esto és $k_0 = 3$ y $\tau = 4$




**Ejercicio 3:** Dado el sistema de la figura




exit

con $G_p(S) = \dfrac{-10}{s^2 + s + 1}$

a) La planta $G_p(S)$ (sola y en lazo abierto) és un sistema estable? Razona la respuesta.

b) Estudia las condiciones que deben de cumplir $K_p$ y $K_i$ para que el sistema en lazo cerrado sea estable.

c) Diseña un controlador PI para que el error en estado estacionario ($e_{ss}$) a la rampa unitaria $x(t) = tu(t)$ sea 0.2.

d) Para el controlador diseñado en el apartado anterior[1], cual serían los errores en estado estacionario al escalón unitario $x(t) = u(t)$ y a la aceleración unitaria $x(t) = 1/2t^2u(t)$.

**Solución:**

a) Las raices del denominador de la función de transferencia son $s^2 + s + 1 = 0$

[1] Para los apartados c) y d) si no conseguiste hacer un diseño del controlador PI en el apartado b) considera una función genérica del controlador PI $G_c(s) = \dfrac{K_p s + K_I}{s}$

$s_{1,2} = -0.5 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} j$ como la parte real de los dos polos (-0.5) es negativa podemos afirmar que el sistema es estable.

Otro método alternativo es utilizar Routh

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | |
| 0 | 1 | |

Como todos los elementos de la primera columna son >0 => que el sistema es estable

b)

hallamos la función de transferencia total del sistema retroalimentado

$$G_t(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + H(s)G_c(s)G_p(s)} = \frac{\frac{(K_p s + K_i)}{s} \frac{-10}{s^2+s+1}}{1 + \frac{(K_p s + K_i)}{s} \frac{-10}{s^2+s+1}}$$

Operando $G_t(S) = \frac{-10(K_p s + K_i)}{s^3 + s^2 + (1 - 10K_p)s - 10K_i}$

Aplicando Routh al denominador:

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 1 | 1-10 $K_p$ |
| 2 | 1 | -10$K_i$ |
| 1 | 1-10 $K_p$+10$K_i$ | |
| 0 | -10$K_i$ | |

Para que el sistema sea estable -10$K_i$>0 => ***$K_i$<0*** y por otro lado 1-10 $K_p$+10$K_i$>0 => ***$K_p$<0.1+$K_i$***

c) Calculamos la Ganancia de lazo

$$H(s)G_c(s)G_p(s) = \frac{(K_p s + K_i)}{s} \frac{-10}{s^2+s+1}$$ y operamos para pasar a forma canónica

$$H(s)G_c(s)G_p(s) = \frac{-10K_i}{s} \frac{\left(\frac{K_p}{K_i}s + 1\right)}{s^2+s+1}$$ por lo tanto $\begin{cases} k_L = \text{-10K}_i \\ r = 1 \end{cases}$

Si miramos en la tabla obtenemos que el error en estado estacionario ($e_{ss}$) a la rampa unitaria $x(t) = tu(t)$ es $e_{ss} = \frac{1}{k_L}$.

| | Entrada graó $x(t)=u(t)$ | Entrada rampa $x(t)=tu(t)$ | Entrada paràbola $x(t)=\frac{1}{2}t^2u(t)$ |
|---|---|---|---|
| Sistema tipus 0 ($r$=0) | $\frac{1}{1+k_L}$ | $\infty$ | $\infty$ |
| Sistema tipus 1 ($r$=1) | 0 | $\boxed{\frac{1}{k_L}}$ | $\infty$ |
| Sistema tipus 2 ($r$=2) | 0 | 0 | $\frac{1}{k_L}$ |

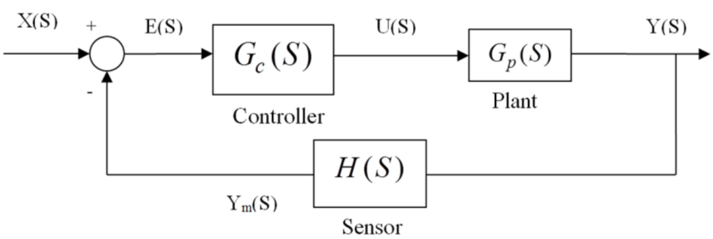
Por lo tanto $e_{ss}=\frac{1}{k_L}=\frac{-1}{10K_i}=0.2\Rightarrow K_i=-0.5$ que cumple condición de estabilidad si ***$K_p$<0.1+$K_i$*** . Así que escogemos una $K_p$ que garantize estabilidad. Por ejemplo $K_p$=-0.5

d) Si nos fijamos en la tabla para los sistemas Tipo 1 (r=1)

| | Entrada graó $x(t)=u(t)$ | Entrada rampa $x(t)=tu(t)$ | Entrada paràbola $x(t)=\frac{1}{2}t^2u(t)$ |
|---|---|---|---|
| Sistema tipus 0 ($r$=0) | $\frac{1}{1+k_L}$ | $\infty$ | $\infty$ |
| Sistema tipus 1 ($r$=1) | 0 | $\frac{1}{k_L}$ | $\infty$ |
| Sistema tipus 2 ($r$=2) | 0 | 0 | $\frac{1}{k_L}$ |

Vemos que el error en estado estacionario al escalón unitario $x(t)=u(t)$ es 0 y errror en estado estacionario a la aceleración unitaria $x(t)=1/2t^2u(t)$ es $\infty$.

**<u>Ejercicio 4:</u>** Considera el Sistema en lazo cerrado de la figura




Con $G_p(s)=\frac{3}{s(s+1)}$ y sensor de ganancia unitaria $H(s)=\frac{1}{s+2}$ .

a) Calcula la ganancia calcula la ganancia $K_p$ de un controlador proporcional $G_c(s)=K_p$ para obtener un error en estado estacionario a la rampa $x(t)=tu(t)$ igual a 0.05

b) Considerando ahora un controlador PD, $G_c(s)=K_ds+K_p$, calcula $K_d$ y $K_p$ para que los polos de la función de transferencia total (en lazo cerrado) sean un polo triple real negativo

**Solución:**

a) Calculamos la Ganancia de lazo

$$H(s)G_c(s)G_p(s) = K_p \frac{3}{s(s+1)(s+2)}$$ y operamos para pasar a forma canónica

$$H(s)G_c(s)G_p(s) = \frac{1.5K_p}{s}\frac{1}{\frac{1}{2}s^2+\frac{3}{2}s+1}$$ por lo tanto $\begin{cases} k_L = 1.5K_p \\ r = 1 \end{cases}$

| | Entrada graó $x(t)=u(t)$ | Entrada rampa $x(t)=tu(t)$ | Entrada paràbola $x(t)=\frac{1}{2}t^2u(t)$ |
|---|---|---|---|
| Sistema tipus 0 ($r$=0) | $\frac{1}{1+k_L}$ | $\infty$ | $\infty$ |
| Sistema tipus 1 ($r$=1) | 0 | $\boxed{\frac{1}{k_L}}$ | $\infty$ |
| Sistema tipus 2 ($r$=2) | 0 | 0 | $\frac{1}{k_L}$ |

Si miramos en la tabla obtenemos que el error en estado estacionario ($e_{ss}$) a la rampa unitaria $x(t)=tu(t)$ es $e_{ss} = \frac{1}{k_L}$.

Por lo tanto $e_{ss} = \frac{1}{k_L} = \frac{1}{1.5K_p} = 0.05 \Rightarrow K_p = 13.33$ Pero tenemos que ver si el sistema es estable.

Si calculamos la función de transferencia total $G_t(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1+H(s)G_c(s)G_p(s)} = \frac{K_p\frac{3}{s(s+1)}}{1+K_p\frac{3}{s(s+1)(s+2)}}$

Operando llegamos a $G_t(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1+H(s)G_c(s)G_p(s)} = \frac{3K_p(s+2)}{s^3+3s^2+2s+3K_p}$

Si aplicamos Routh al denominador de la función de transferencia

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | $3K_p$ |
| 1 | 6-3 $K_p$ | |
| 0 | $3K_p$ | |

Obtenemos que para garantizar la estabilidad $0<K_p<2$

Como $K_p = 13.33$ está fuera del rango de estabilidad, **no es posible diseñar ningún controlador P** que permita un error en estado estacionario a la ramp unitaria $e_{ss} = 0.05 = 13.33$

b) Si calculamos la función de transferencia total teniendo en cuenta el controlador PD: $G_c(s) = K_d s + K_p$

obtenemos $G_t(s) = \dfrac{(K_d s + K_p)\dfrac{3}{s(s+1)}}{1 + (K_d s + K_p)\dfrac{3}{s(s+1)(s+2)}}$ Operando llegamos a $G_t(s) = \dfrac{3(K_d s + K_p)(s+2)}{s^3 + 3s^2 + (2+3K_d)s + 3K_p}$

Nos piden que los polos de la función de transferencia total (en lazo cerrado) sean un polo triple real negativo. Por lo tanto el denominador sería:

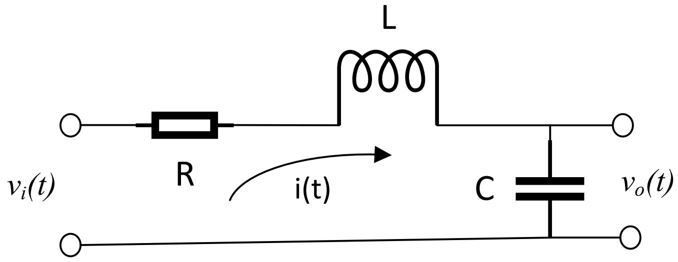
$d(s) = (s+a)^3$ con a>0. Operando, obtenemos $d(s) = s^3 + 3as^2 + 3a^2 s + a^3$. Si igualamos este polinomio al denominador de la función de transferencia obtenida $G_t(s)$ obtenemos:

$s^3 + 3as^2 + 3a^2 s + a^3 = s^3 + 3s^2 + (2+3K_d)s + 3K_p$ por lo tanto se tienen que cumplir la siguientes igualdades:

$3a = 3$, $3a^2 = 2 + 3K_d$ y $a^3 = 3K_p$

De estas igualdades obtenemos $a = 1$, $K_d = \frac{1}{3}$ y $K_p = \frac{1}{3}$. Por lo tanto el controlador PD que cumple las especificaciones es $\boxed{G_c(s) = \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}}$

## **Ejercicio 5:** Consideraremos el Siguiente circuito eléctrico RLC




Las ecuaciones eléctricas que describen el funcionamiento del sistema eléctrico son:

$$v_i(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

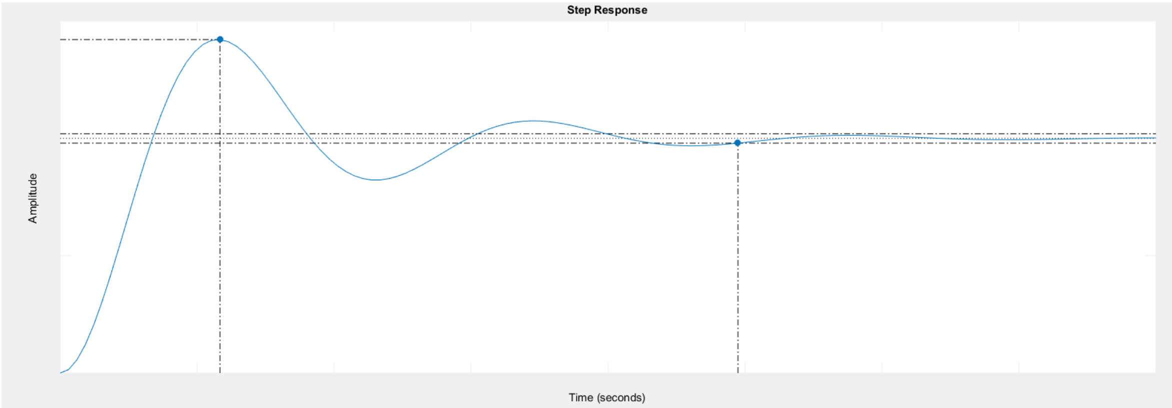
$$v_0(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

donde $v_i(t)$ y $v_o(t)$ son, respectivamente, la tensiones de entrada y salida del circuito y $i(t)$ la corriente de la malla. R, L y C son los valores constantes de la resitencia, inductancia y capacitancia de los componentes del circuito.

a) Encuentra la función de transferencia $G(s) = \dfrac{V_o(s)}{V_i(s)}$, donde $V_o(s) = \mathcal{L}\{v_o(t)\}$ y $V_i(s) = \mathcal{L}\{v_i(t)\}$ .

b) Expresa en forma canónica la función de transferencia hallada en el apartado anterior y determina para que valores de R, L y C el sistema es estable.

c) Suponiendo los valores R=150Ω, L=0.2H y C=0.0000025F calcular para la respuesta al escalón unitario, cual es el valor en estado estacionario, el sobreimpulso, tiempo de pico y tiempo de establecimiento ±2% y representar estos valores en la siguiente figura.




**Solución:**

a)

$$G(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad \text{operando} \quad G(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$G(S) = \frac{k_0\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$k_0 = 1$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$2\xi\omega_n = \frac{R}{L} \Rightarrow 2\xi\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{L} \Rightarrow \xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

b) Aplicado Routh

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & \frac{1}{LC} \\ 1 & \frac{R}{L} & \\ \hline 0 & \frac{1}{LC} & \end{array}$$

Condiciones de estabilidad R/L>0 y 1/(LC)>0

Para un circuito real, con R,L y C >0 el sistema es estable siempre

c)

$$k_0 = 1$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1414.21$$

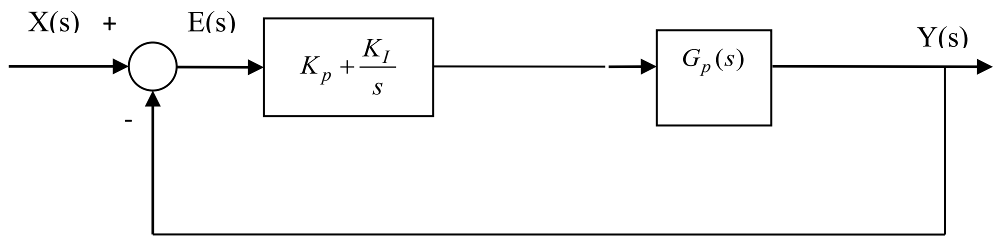
$$\xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = 0.265$$

$$t_P = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 2.33 \bullet 10^{-3}$$

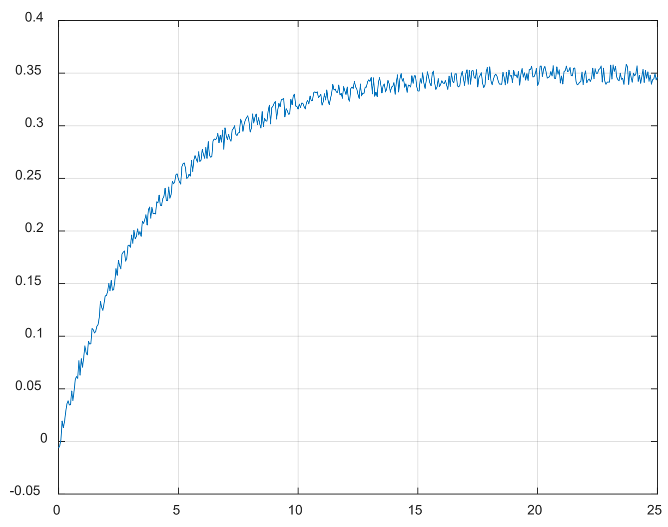
$$M_P = k_0 e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.42$$

$$t_s(2\%) = \frac{\ln\left(\frac{100}{2\sqrt{1-\xi^2}}\right)}{\xi\omega_n} = 0.01$$

**Ejercicio 6:** Dado el sistema de la figura




Con una planta $G_p(s)$ que presenta la siguiente respuesta a un escalón Unitario



a) Encuentra la función de transferencia de la planta $\mathrm{G_p(s)}$

b) Para que valores de $K_p$ y de $K_i$ el sistema es estable?

c) Encuentra los valores de $K_p$ y de $K_i$ para que el sistema en lazo cerrado tenga dos polos $p_{1,2} = -0.2 \pm 0.4j$

**Solución:**

a) $\mathrm{G_p(s)} = \dfrac{0.35}{4s+1}$

b) $G_t(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{G_c(s)G_p(s)}{1+H(s)G_c(s)G_p(s)} = \dfrac{\dfrac{(K_p s+K_i)}{s}\dfrac{0.35}{4s+1}}{1+\dfrac{(K_p s+K_i)}{s}\dfrac{0.35}{4s+1}} = \dfrac{0.35(K_p s+K_i)}{4s^2+(1+0.35K_p)s+0.35K_i}$

| | | |
|---|---|---|
| 2 | $4$ | $0.35K_i$ |
| 1 | $(1+0.35K_p)$ | |
| 0 | $0.35K_i$ | |

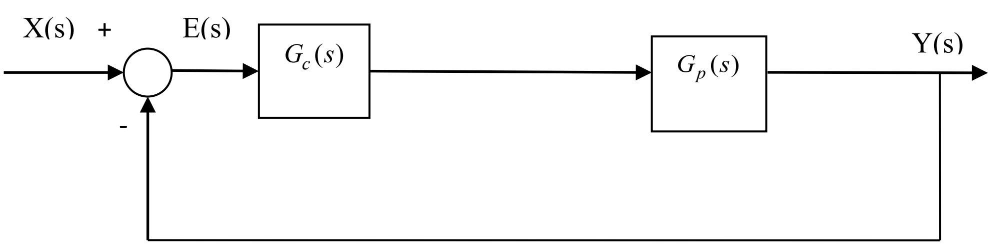
$(1+0.35K_p) > 0 \Rightarrow K_p > -2.86$

$0.35K_i > 0 \Rightarrow K_i > 0$

**c)** $D(S) = 4s^2+(1+0.35K_p)s+0.35K_i = \left(s+0.2-0.4j\right)\left(s+0.2+0.4j\right) = s^2+0.4s+0.2$

$$D(S) = 4s^2+(1+0.35K_p)s+0.35K_i = \left(s+0.2-0.4j\right)\left(s+0.2+0.4j\right) = C\left(s^2+0.4s+0.2\right)$$
$$C = 4$$
$$(1+0.35K_p) = 4\times 0.4 = 1.6 \Rightarrow K_p = 1.71$$
$$0.35K_i = 4\times 0.2 = 0.8 \Rightarrow K_i = 2.28$$

**Ejercicio 7:** Dado el sistema de la figura




con $G_p(S) = \dfrac{2}{s(s+5)}$

a) Diseña un controlador P, PI o PID para que el error en estado estacionario ($e_{ss}$) a la aceleración unitaria $x(t)=\frac{1}{2}t^2u(t)$ sea 0.2.

b) Para el controlador diseñado en el apartado anterior, cual serían los errores en estado estacionario al escalón unitario $x(t)=u(t)$ y a la rampa unitaria $x(t)=tu(t)$.

**Solución:**

**a)**

Primero estudiaremos el error en estado estacionario, si nos fijamos en la columna de la tabla que se refiere al error en estado estacionario a la rampa

| | Entrada graó $x(t)=u(t)$ | Entrada rampa $x(t)=tu(t)$ | Entrada paràbola $x(t)=\frac{1}{2}t^2u(t)$ |
|---|---|---|---|
| Sistema tipus 0 ($r$=0) | $\frac{1}{1+k_L}$ | $\infty$ | $\infty$ |
| Sistema tipus 1 ($r$=1) | 0 | $\frac{1}{k_L}$ | $\infty$ |
| Sistema tipus 2 ($r$=2) | 0 | 0 | $\frac{1}{k_L}$ |

Vemos que el sistema tiene que ser del tipo 2 o superior.

Si calculamos la ganancia de lazo $G_c(S)G_p(S)H(S)$ para los tres controladores P: $G_c(S)=K_p$ PI: $G_c(S)=\frac{K_pS+K_I}{S}$ y PID: $G_c(S)=\frac{K_dS^2+K_pS+K_I}{S}$

Controlador P

$G_c(S)G_p(S)H(S)=K_p\frac{2}{s(s+5)}=\frac{2/5K_p}{s}\frac{1}{\frac{s}{5}+1}$ por lo tanto $\begin{cases}k_L=0.4K_p\\ r=1\end{cases}$ como el tipo es uno no podremos nunca tener un error finito a la rampa.

Controlador PI

$G_c(S)G_p(S)H(S)=\frac{K_ps+K_I}{s}\frac{2}{s(s+5)}=\frac{2/5K_I}{s^2}\frac{\frac{K_p}{K_I}s+1}{\frac{s}{5}+1}$ por lo tanto $\begin{cases}k_L=0.4K_I\\ r=2\end{cases}$ como el tipo es dos tendremos error en estado estacionario a la entrada rampa igual a $\frac{1}{k_L}$, siempre y cuando el sistema sea estable.

O sea $\frac{1}{k_L}=0.2\Rightarrow\frac{1}{0.4K_I}=0.2\Rightarrow K_I=12.5$

Para estudiar la estabilidad del sistema miramos los polos del sistema $1+G_c(S)G_p(S)H(S)=0 \Rightarrow 1+\frac{K_p s+K_I}{s}\frac{2}{s(s+5)}=0$ Operando tenemos $s^3+5s^2+2K_p s+2K_I=0$, aplicando Routh (aunque sea un segundo orden podemos aplicar Routh) tenemos:

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 1 | $2K_p$ |
| 2 | 5 | $2K_I$ |
| 1 | $\frac{10K_p-2K_i}{5}$ | |
| 0 | $2K_I$ | |

Para que el sistema sea estable $\frac{10K_p-2K_i}{5}>0 \Rightarrow K_p>0.2K_i$ => y ***$K_i$>0***

En el diseño que estamos realizando tenemos que se tenía que cumplir $K_I=12.5$ por lo tanto se tiene que cumplir $K_p>0.2K_i \Rightarrow K_p>0.2\times 12.5=2.5$ por ejemplo $K_p=5$

Controlador PID

Como podemos conseguir las especificaciones del diseño con un PI, no hace falta estudiar el controlador PID

b) como el sistema diseñado es tipo 2, los errores en estado estacionario al escalón unitario $x(t)=u(t)$ y a la rampa unitaria $x(t)=tu(t)$ son cero.