TEMA 3 ELEMENTOS DE PROBABILIDAD

Pablo Buenestado

Curso 2020-2021 Otoño

Departamento de Matemáticas (UPC)

Índice

Esquema

Cuando se calculan probabilidades, algunas veces se necesita determinar el número de resultados en un espacio muestral.

En esta sección se describirán diversos métodos con ese propósito.

La regla básica, que se conoce como principio fundamental de conteo, se presenta por medio del siguiente ejemplo.

Ejemplo

Cierto tipo de automóvil se encuentra disponible en tres colores: rojo, azul o verde, y puede tener un motor grande o pequeño. ¿De cuántas maneras puede un comprador elegir un automóvil?

Solución

Hay tres opciones de color y dos opciones de motor. Una lista completa de las opciones se muestra en la siguiente tabla de 3 columnas y 2 filas, es decir una tabla de **3x2**. El número total de opciones es $3 \cdot 2 = 6$.

	Rojo	Azul	Verde
Grande	Rojo, Grande	Azul, Grande	Verde, Grande
Pequeño	Rojo, Pequeño	Azul, Pequeño	Verde, Pequeño

Al generalizar el ejemplo, si hay n_1 elecciones de color y n_2 elecciones de motor, una lista completa de elecciones se puede escribir como una tabla $n_1 \mathbf{x} n_2$, por lo que el número total de elecciones es $n_1 \cdot n_2$.

Resumen

Si una operación se puede realizar en n_1 maneras y si para cada una de esas maneras se puede realizar una segunda operación en n_2 maneras, entonces el número total de maneras en que se realizan las dos operaciones es $n_1 \cdot n_2$.

Este razonamiento del principio fundamental del conteo de estados se puede ampliar para cualquier número de operaciones.

El principio fundamental del conteo

Supongamos que se pueden realizar k operaciones. Si hay n_1 maneras de realizar la primera operación y si para cada una de esas maneras hay n_2 maneras de realizar la segunda operación y si para cada una de esas elecciones de esas maneras de realizar las dos primeras operaciones hay n_3 maneras de realizar la tercera operación y así sucesivamente, entonces el número total de maneras de realizar la secuencia de las k operaciones es $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

Ejemplo

Cuando se hace un pedido de cierto tipo de computadora, hay tres elecciones de disco duro, cuatro de la cantidad de memoria, dos de la tarjeta de video y tres de monitor. ¿En cuántas maneras se puede solicitar una computadora?

Solución

El número total es $3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 72$.

Permutaciones

Una permutación constituye un ordenamiento de un conjunto de elementos.

Por ejemplo, hay seis permutaciones de las letras A, B, C:

ABC
ACB
BAC
BCA
CAB
CBA

Con solamente tres elementos, es fácil determinar el número de permutaciones, sólo con hacer una lista de todas ellas.

Pero con un gran número de elementos esto último no sería factible.

El principio fundamental del conteo se puede usar para determinar el número de permutaciones de cualquier conjunto de elementos.

Por ejemplo, se puede determinar el número de permutaciones de un conjunto de tres elementos de la siguiente manera:

- Hay tres elecciones para colocar el primer elemento.
- Después de que se hace la elección, hay dos elecciones restantes para el elemento del segundo lugar.
- Entonces queda una elección para el elemento del último lugar.
- Por tanto, el número total de maneras de ordenar tres objetos es

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Este razonamiento se puede generalizar.

El número de permutaciones de un conjunto de n elementos es

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Éste es el producto de los enteros del 1 al n.

Este producto se puede escribir con el símbolo $n!$, que se lee "n factorial".

Definición

Para cualquier entero positivo n,

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

También se define $0! \equiv 1$.

Permutaciones

El número de permutaciones de n objetos es $n!$

Ejemplo

Cinco personas están en la hilera de un cine. ¿En cuántas maneras diferentes se pueden ordenar?

Solución

El número de permutaciones de un conjunto de cinco personas es

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

.

A veces se está interesado en contar el número de permutaciones de los subconjuntos de cierto tamaño elegidos de un conjunto más grande. A estas permutaciones alguna bibliografía las denomina variaciones. Lo vemos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo

Cinco salvavidas están disponibles para la guardia de un sábado por la tarde. Hay tres estaciones salvavidas. ¿De cuántas maneras se pueden elegir y organizar los salvavidas entre las estaciones?

Solución

Se usa el principio fundamental del conteo.

Hay cinco maneras de elegir a un salvavidas para que ocupe la primera estación, luego cuatro de elegir a un salvavidas para que ocupe la segunda estación y por último tres para elegir un salvavidas que ocupe la tercera estación.

El número total de permutaciones de los tres salvavidas elegidos entre los cinco es

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

El razonamiento usado para resolver el ejemplo anterior se puede generalizar.

El número de permutaciones de k objetos elegidos de un grupo de n objetos es

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$$

Esta expresión se puede simplificar utilizando la notación factorial:

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 2 \cdot 1}$$

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Variaciones

El número de permutaciones de k objetos elegidos de un grupo de n elementos es

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Combinaciones

En algunos casos, cuando se elige un conjunto de elementos de un conjunto más grande, no se tiene en cuenta el orden de los elementos elegidos; sólo se consideran los elementos que se eligen.

Por ejemplo, puede que no importe qué salvavidas ocupe cada estación; puede que sólo sea importante la elección de tres salvavidas.

A cada grupo distinto de elementos que se puede seleccionar, sin importar el orden, se le llama combinación.

A continuación se mostrará cómo determinar el número de combinaciones de k elementos elegidos de un conjunto de n objetos.

Se mostrará el razonamiento con el resultado del ejemplo anterior.

En ese ejemplo se mostró que hay 60 permutaciones de tres elementos elegidos entre cinco.

Al denotar a los elementos por A, B, C, D, E, a continuación se presenta una lista de las 60 permutaciones.

$$ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE$$

$$ACB, ADB, AEB, ADC, AEC, AED, BDC, BEC, BED, CED$$

$$BAC, BAD, BAE, CAD, CAE, DAE, CBD, CBE, DBE, DCE$$

$$BCA, BDA, BEA, CDA, CEA, DEA, CDB, CEB, DEB, DEC$$

$$CAB, DAB, EAB, DAC, EAC, EAD, DBC, EBC, EBD, ECD$$

$$CBA, DBA, EBA, DCA, ECA, EDA, DCB, ECB, EDB, EDC$$

Las 60 permutaciones anteriores están ordenadas en diez columnas de seis permutaciones cada una.

Dentro de cada columna, los tres elementos son los mismos y la columna contiene las seis permutaciones diferentes de esos tres elementos.

Por tanto, cada columna representa una combinación distinta de tres elementos elegidos entre cinco y hay diez combinaciones de ese tipo.

En consecuencia, la lista muestra que el número de combinaciones de tres elementos elegidos entre cinco se puede encontrar al dividir el número de permutaciones de los tres elementos elegidos, o sea $5!/(5-3)!$, por el número de permutaciones de los tres elementos, que es $3!$.

En resumen, el número de combinaciones de los tres elementos elegidos es $\frac{5!}{3!(5-3)!}$.

Con frecuencia el número de combinaciones de k elementos elegidos de n se denota por el símbolo $\binom{n}{k}$.

El razonamiento utilizado para deducir el número de combinaciones de los tres elementos elegidos se puede generalizar para deducir una expresión para $\binom{n}{k}$.

Combinaciones

El número de combinaciones de k elementos elegidos de un grupo de n elementos es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Elegir una combinación de k elementos de un conjunto de n divide a los n elementos en dos subconjuntos: k que fueron elegidos y $n-k$ que no fueron elegidos.

Ejemplo

A cierto evento asisten 30 personas y se elegirá aleatoriamente a cinco para recibir premios. Estos últimos son iguales, así que el orden en que se elige a las personas no es importante. ¿Cuántos grupos diferentes de cinco personas se puede elegir?

Solución

En virtud de que el orden de las cinco personas elegidas no es importante, se tiene que calcular el número de combinaciones de cinco elegidas entre 30. Esto es

$$\binom{30}{5} = \frac{30!}{5!25!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 142506$$