TEMA 3: Trabajo de Probabilidad

Problema 1

Una compañía petrolífera ha clasificado las formaciones geológicas de los terrenos en tres tipos I, II y III, y pretende perforar un nuevo pozo en un lugar en que se asignan probabilidades de 0.35, 0.4 y 0.25 a cada uno de los tres tipos de formaciones respectivamente. Experiencias anteriores indican que se encuentra petróleo en un 40 % de formaciones de tipo I, un 20 % de formaciones de tipo II y un 30 % de formaciones de tipo III. Determinad

a) La probabilidad de hallar petróleo en el lugar donde se realiza la perforación.

b) Si la compañía no descubre petróleo, determinad la probabilidad de que en ese lugar exista una formación geológica del tipo II.

Solución:

Sea A="formación geológica del tipo I", B="formación geológica del tipo II", C="formación geológica del tipo III" y P="hay petróleo". Entonces

$$p(A) = 0.35, \quad p(B) = 0.4, \quad p(C) = 0.25, \quad p(P/A) = 0.4, \quad p(P/B) = 0.2, \quad p(P/C) = 0.3.$$

a) La probabilidad de hallar petróleo en el lugar donde se realiza la perforación.

$$p(P) = p(P \cap A) + p(P \cap B) + p(P \cap C) = p(P/A)p(A) + p(P/B)p(B) + p(P/C)p(C) =$$

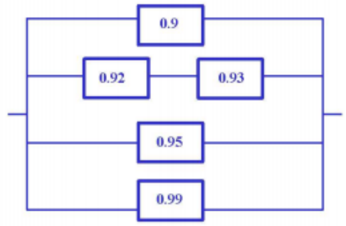
$$= 0.4 \cdot 0.35 + 0.2 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.25 = 0.295.$$

b) Si la compañía no descubre petróleo, determinad la probabilidad de que en ese lugar exista una formación geológica del tipo II.

$$p(B/\overline{P}) = \frac{p(B \cap \overline{P})}{p(\overline{P})} = \frac{p(B) - p(B \cap P)}{1 - p(P)} = \frac{0.4 - 0.2 \cdot 0.4}{1 - 0.295} = 0.45390070921986.$$

Problema 2

El siguiente circuito trabaja solo si existe una trayectoria de dispositivos en funcionamiento, de izquierda a derecha. La probabilidad de que cada dispositivo funcione aparece en la figura. Supongamos que los dispositivos fallan de manera independiente. ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito trabaje?



Solución: Llamando A al suceso "el dispositivo de arriba funciona"...., $p(A) = 0.9$, $p(B_1) = 0.92$, $p(B_2) = 0.93$, $p(C) = 0.95$ y $p(D) = 0.99$, observamos que los distintos dispositivos son independientes, así que

$$p(\text{el circuito funciona}) = p(A \cup (B_1 \cap B_2) \cup C \cup D).$$

Llamamos $B = B_1 \cap B_2$ y empezamos a calcular estas uniones paso a paso, aplicando la fórmula

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A)p(B).$$

Teniendo en cuenta que $p(B) = p(B_1 \cap B_2) = p(B_1)p(B_2) = 0.92 \cdot 0.93 = 0.8556$, podemos calcular

$$\begin{aligned}
p(A \cup B) &= 0.9 + 0.8556 - 0.9 \cdot 0.8556 = 0.98556, \\
p(A \cup B \cup C) &= p(A \cup B) + p(C) - p(A \cup B)p(C) = 0.98556 + 0.95 - 0.98556 \cdot 0.95 \\
&= 0.999278, \\
p(A \cup B \cup C \cup C) &= p(A \cup B \cup C) + p(D) - p(A \cup B \cup C)p(D) = 0.999278 + 0.99 - 0.999278 \cdot 0.99 \\
&= 0.99999278.
\end{aligned}$$

Problema 3

Una aerolínea particular opera vuelos a las 10 a.m. de Barcelona a Madrid, Paris y Londres. Sea A el evento de que el vuelo a Madrid está lleno y de forma análoga B y C que los vuelos a Paris y Londres están llenos. Supongamos que $p(A) = 0.6$, $p(B) = 0.5$, $p(C) = 0.4$ y los tres eventos son independientes.

a) ¿ Cuál es la probabilidad de que los tres vuelos estén llenos? ¿ Cuál es la probabilidad de por lo menos un vuelo esté lleno?

b) ¿ Cuál es la probabilidad de que solo el vuelo a Madrid esté lleno? ¿ Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de los tres vuelos esté lleno?

Solución:

a) Como los tres eventos son independientes, se cumple que $p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) = 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.4 = 0.12$. Si los sucesos A, B y C son independientes, por el problema 3 sabemos que sus complementarios también lo son. La probabilidad de almenos uno es

$$p(\text{al menos uno}) = 1 - p(\text{ninguno}) = 1 - p(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 1 - p(\overline{A})p(\overline{B})p(\overline{C})$$

$$= 1 - (1 - p(A))(1 - p(B))(1 - p(C)) = 1 - 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.6 = 1 - 0.12 = 0.88.$$

b)

$$p(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}) = p(A)p(\overline{B})p(\overline{C}) = p(A)(1-p(B))(1-p(C)) = 0.6\cdot 0.5\cdot 0.6 = 0.18.$$

¿ Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de los tres vuelos esté lleno?

$$p(\text{exactamente uno esté lleno}) = p(\text{solo A}) + p(\text{solo B}) + p(\text{solo C}) =$$

$$= p(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}) + p(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}) + p(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C) = p(A)p(\overline{B})p(\overline{C}) + p(\overline{A})p(B)p(\overline{C}) + p(\overline{A})p(\overline{B})p(C) =$$

$$= p(A)(1-p(B))(1-p(C)) + (1-p(A))p(B)(1-p(C)) + (1-p(A))(1-p(B))p(C)$$

$$= 0.6\cdot 0.5\cdot 0.6 + 0.4\cdot 0.5\cdot 0.6 + 0.4\cdot 0.5\cdot 0.4 = 0.38.$$

Problema 4

Un satélite está programado para ser lanzado desde Cabo Cañaveral (Florida) y otro satélite para ser lanzado desde el Puerto espacial de Kourou (Guayana francesa). Sea A el evento en el que el lanzamiento del primer satélite se hace a la hora programada, y B el evento el lanzamiento del segundo satélite se hace también a la hora programada. Si A y B son eventos independientes con $p(A) < p(B)$, $p(A\cup B) = 0.626$ y $p(A\cap B) = 0.144$, determinad los valores de $P(A)$ y $p(B)$.

Solución: Los eventos A y B son independientes si y solo si $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$. Llamaremos $x = p(A)$ e $y = p(B)$, entonces se verifica que

$$\begin{aligned} p(A\cap B) = 0.144 &= p(A)\cdot p(B) = x\cdot y \\ p(A\cup B) = 0.626 &= p(A) + p(B) - p(A\cap B) = x + y - x\cdot y \end{aligned}$$

Despejando $x = 0.144/y$ de la primera ecuación y substituyendo en la segunda

$$0.626 = \frac{0.144}{y} + y - 0.144 \Rightarrow 0.626y = 0.144 + y^2 - 0.144y \Rightarrow y^2 - 0.77y + 0.144 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos dos soluciones positivas $y = 0.32$ y $y = 0.45$. Para el primer caso, si $y = 0.32 \Rightarrow x = 0.144/0.32 = 0.45$, y para el segundo caso, si $y = 0.45 \Rightarrow x = 0.144/0.45 = 0.32$. Como en el enunciado dice que $p(A) < p(B)$ concluimos que $x = p(A) = 0.32$ y $y = p(B) = 0.45$.

Problema 5

Una fábrica utiliza tres líneas de producción para fabricar latas de cierto tipo. La tabla adjunta muestra los porcentajes de latas que no cumplen con las especificaciones, categorizadas por tipo de incumplimiento de las especificaciones, para cada una de las tres líneas durante un periodo particular:

	Línea 1	Línea 2	Línea 3
Manchas	15	12	20
Grietas	50	44	40
Problemas con la argolla de apertura	21	28	24
Defecto superficial	10	8	15
Otros	4	8	1

Durante este período la línea 1 produjo 500 latas fuera de especificación, la 2 produjo 400 latas como esas y la 3 fue responsable de 600 latas fuera de especificación. Supongamos que se selecciona una de esas 1500 latas al azar.

a) ¿ Cuál es la probabilidad de que la lata la produjo la línea 1? ¿ Cuál es la probabilidad de que la razón del incumplimiento de la especificación es una grieta?

b) Si la lata seleccionada viene de la línea 1, ¿Cuál es la probabilidad de que tuviera una mancha?

c) Si la lata seleccionada tenía un defecto superficial ¿ Cuál es la probabilidad de que proviniera de la línea 1?

Solución:

Sea A el evento "lata producida por la línea 1", B el evento "lata producida por la línea 2" y C el evento "lata producida por la línea 3", entonces sabemos que $p(A) = 500/1500 = 1/3$, $p(B) = 400/1500 = 4/15$ y $p(C) = 600/1500 = 2/5$. Por otra parte sea M el evento "la lata tiene manchas", G el evento "la lata tiene grietas", A el evento "la lata tiene problemas con la argolla de apertura" y D el evento "la lata tiene un defecto superficial". Entonces

a) ¿ Cuál es la probabilidad de que la lata la produjo la línea 1? $p(A) = 500/1500 = 1/3$ ¿ Cuál es la probabilidad de que la razón del incumplimiento de la especificación es una grieta?

$$p(G) = p(G/A)p(A) + p(G/B)p(B) + p(G/C)p(C) = \frac{50}{100}\frac{1}{3} + \frac{44}{100}\frac{4}{15} + \frac{40}{100}\frac{2}{5} = 0.444.$$

b) Si la lata seleccionada viene de la línea 1, ¿Cuál es la probabilidad de que tuviera una mancha?

$$p(M/A) = \frac{15}{100} = 0.15.$$

c) Si la lata seleccionada tenía un defecto superficial ¿ Cuál es la probabilidad de que proviniera de la línea 1?

$$p(A/D) = \frac{p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{p(D/A)p(A)}{p(D/A)p(A) + p(D/B)p(B) + p(D/C)p(C)} =$$

$$= \frac{\frac{10}{100}\frac{1}{3}}{\frac{10}{100}\frac{1}{3} + \frac{8}{100}\frac{4}{15} + \frac{15}{100}\frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{30} + \frac{8}{375} + \frac{3}{50}} = 0.29069767441862.$$