## Contrast d'Hipòtesi per a $\mu$ en una població normal, $\sigma$ coneguda

A partir de les dades d'una mostra, es plantegem dues hipòtesis, la hipòtesi nul·la $H_0$ i l'alternativa $H_1$, sobre el valor del paràmetre desconegut. Utilitzant l'estadístic apropiat per a la mostra decidirem si acceptem o rebutgem la hipòtesi nul·la. D'entrada suposarem que $H_0$ és certa.

Suposem que volem fer un contrast d'hipòtesi pel paràmetre $\mu$, la població és normal i $\sigma$ coneguda.
Partim d'una mostra. Veiem quins passos cal fer:

1. Fixem un valor del paràmetre, $\mu_0$, i establim $\mathbf{H_0}$ i $\mathbf{H_1}$, observant el **tipus de contrast**:

   Cas bilateral $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ unilateral superior $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ unilateral inferior $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu < \mu_0$

2. Triem l'**estadístic de contrast** adequat, amb les dades de la mostra.

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

3. Fixem el **nivell de significació**: $\alpha$.

4. Busquem el **valor crític**: límit de la **regió de rebuig de** $H_0$. Ho fem segons el tipus de contrast:

   - cas bilateral:
     La regió de rebuig de $H_0$ és: $(-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (z_{\alpha/2}, +\infty) \Longrightarrow$ valor crític: $z_{\alpha/2}$
     
     L'obtenim de: $\Phi(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ (en R, $z_{\alpha/2} =$qnorm$(1 - \alpha/2)$)

   - cas unilateral superior:
     La regió de rebuig de $H_0$ és: $(z_\alpha, +\infty) \Longrightarrow$ valor crític: $z_\alpha$
     
     L'obtenim de: $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$ (en R, $z_\alpha =$qnorm$(1 - \alpha)$ )

   - cas unilateral inferior:
     La regió de rebuig de $H_0$ és: $(-\infty, -z_\alpha) \Longrightarrow$ valor crític: $-z_\alpha$
     
     L'obtenim de: $\Phi(-z_\alpha) = \alpha \Longleftrightarrow \Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$ (en R, $-z_\alpha =$-qnorm$(1 - \alpha)$ )

5. **Criteri de decisió basat en el valor crític**:
   Calculem l'estadístic observat amb les dades de la mostra i suposant $H_0$ certa.

$$z_{obs} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

   Si cau en la regió de rebuig de $H_0$, acceptem $H_1$. Altrament, mantindrem $H_0$!

   - Cas bilateral: $|z_{obs}| > z_{\alpha/2} \Longrightarrow$ acceptem $H_1$
   - Cas unilateral superior $(H_1 : \mu > \mu_0)$ $z_{obs} > z_\alpha \Longrightarrow$ acceptem $H_1$
   - Cas unilateral inferior $(H_1 : \mu < \mu_0)$ $z_{obs} < -z_\alpha \Longrightarrow$ acceptem $H_1$

6. **Criteri de decisió basat en el $p$-valor**:

- $p$-valor $< \alpha \implies$ acceptem $H_1$
- $p$-valor $\geq \alpha \implies$ mantenim $H_0$

Càlcul del $p$-valor (probabilitat d'obtenir els resultats de la mostra o d'altres més favorables a $H_1$, suposant la hipòtesi nul·la certa):

- Cas bilateral: $p$-valor$= P(|Z| > |z_{obs}|) \underset{\uparrow}{=} 2(1 - \Phi(|z_{obs}|))$

$$P(|Z| > |z_{obs}|) = 1 - P(|Z| \leq |z_{obs}|) = 1 - (2\Phi(|z_{obs}|) - 1) = 2(1 - \Phi(|z_{obs}|))$$

  (en R, $p$-valor$=2 * (1-\text{pnorm}(abs(z_{obs})))$)

- Unilateral superior ($H_1 : \mu > \mu_0$): $p$-valor$= P(Z > z_{obs}) = 1 - \Phi(z_{obs})$
  (en R, $p$-valor$=1-\text{pnorm}(z_{obs})$)

- Unilateral inferior ($H_1 : \mu < \mu_0$): $p$-valor$= P(Z < z_{obs}) = \Phi(z_{obs})$
  (en R, $p$-valor$=\text{pnorm}(z_{obs})$)