TEMA 4 VARIABLES ALEATORIAS

Pablo Buenestado

Curso 2020-2021 Otoño

Departamento de Matemáticas (UPC)

Índice

Esquema

1. VARIABLES ALEATORIAS
   - Funciones lineales de variables aleatorias
     - Sumando una constante
     - Multiplicando por una constante

En la práctica con frecuencia se construyen nuevas variables aleatorias realizando operaciones aritméticas con otras variables aleatorias.

Por ejemplo, se podría sumar una constante a una variable aleatoria, multiplicar una variable aleatoria por una constante o sumar dos o más variables aleatorias.

En esta sección se describe cómo calcular medias y varianzas de variables aleatorias construidas de esta manera y se presentan algunos ejemplos prácticos.

Sumando una constante

Cuando se suma una constante a una variable aleatoria, la media se aumenta por el valor de la constante, pero la varianza y la desviación estándar son iguales.

Por ejemplo, supongamos que las varillas de acero producidas por cierta máquina tienen un longitud media de 5.0 pulgadas y una varianza de 0.003 pulg^2.

Cada varilla se fija a una base que tiene exactamente 1.0 pulg de longitud.

La media de la longitud del montaje será de $5.0 + 1.0 = 6.0$ pulg.

Debido a que cada longitud se ha aumentado en la misma cantidad, la dispersión en las longitudes no cambia, por lo que la varianza es la misma.

Para poner esto en términos estadísticos, sea X la longitud de una varilla elegida aleatoriamente y sea $Y = X + 1$ la longitud del montaje.

Entonces $\mu_Y = \mu_{X+1} = \mu_X + 1$ y $\sigma_Y^2 = \sigma_{X+1}^2 = \sigma_X^2$.

En general, cuando se suma una constante a una variable aleatoria, la media se desplaza en esa constante y la varianza no cambia.

Resumen

Si X es una variable aleatoria y b es una constante, entonces

$$\mu_{X+b} = \mu_X + b$$

$$\sigma^2_{X+b} = \sigma^2_X$$

Multiplicando por una constante

Con frecuencia se tiene que multiplicar una variable aleatoria por una constante.

Esto último se podría hacer, por ejemplo, al convertir a un sistema más conveniente de unidades.

Se continúa con el ejemplo de la producción de varillas de acero para mostrar cómo se afecta la media, la varianza y la desviación estándar de una variable aleatoria por la multiplicación de una constante.

Si medimos las longitudes de las varillas descritas anteriormente en centímetros en vez de pulgadas, la media de longitud será

$$(2.54 \text{ cm/pulg})(5.0 \text{ pulg}) = 12.7 \text{ cm}$$

En términos estadísticos, sea la variable aleatoria X la longitud en pulgadas de una varilla elegida aleatoriamente y sea $Y = 2.54 \cdot X$ la longitud en centímetros.

Entonces $\mu_Y = 2.54 \cdot \mu_X$.

En general, cuando una variable aleatoria se multiplica por una constante, su media se multiplica por la misma constante.

Resumen

Si X es una variable aleatoria y a es una constante, entonces

$$\mu_{a \cdot X} = a \cdot \mu_X$$

Cuando la longitud X de una varilla se mide en pulgadas, la varianza σ_X^2 debe tener unidades de pulg^2.

Si $Y = 2.54 \cdot X$ es la longitud en centímetros, entonces σ_X^2 debe tener unidades de cm^2.

Por tanto, se obtiene σ_Y^2 al multiplicar σ_X^2 por 2.54^2, que es el factor de conversión de pulg^2 a cm^2.

En general, cuando una variable aleatoria se multiplica por una constante, su varianza se multiplica por el cuadrado de la constante.

Resumen

Si X es una variable aleatoria y a es una constante, entonces

$$\sigma_{a\cdot X}^2 = a^2 \cdot \sigma_X^2$$

$$\sigma_{a\cdot X} = |a| \cdot \sigma_X$$

Ejemplo

La molaridad de un soluto en una solución se define como el número de moles de soluto por litro de solución (1 mol $= 6.02 \cdot 10^{23}$ moléculas).

Si la molaridad de una solución existente de ácido sulfúrico concentrado (H_2SO_4) es X y si una parte de la solución se mezcla con N partes de agua, la molaridad Y de la solución diluida está dada por $Y = X/(N+1)$.

Supongamos que la solución existente se fabricó con un proceso que produce una molaridad con una media de 18 y con una desviación estándar de 0.1.

Si a 100 ml de la solución existente se le agregan 300 ml de agua, determinemos la media y la desviación estándar de la molaridad de la solución diluida.

Solución

La molaridad de la solución diluida es $Y = 0.25 \cdot X$.

La media y la desviación estándar de X son $\mu_X = 18$ y $\sigma_X = 0.1$, respectivamente.

Por tanto,

$$\mu_Y = \mu_{0.25 \cdot X} = 0.25 \cdot \mu_X = 0.25 \cdot 18 = 4.5$$

$$\sigma_Y = \sigma_{0.25 \cdot X} = 0.25 \cdot \sigma_X = 0.25 \cdot 0.1 = 0.025$$

Si una variable aleatoria se multiplica por una constante y después se suma a otra constante, el efecto sobre la media y la varianza se puede determinar al combinar las expresiones anteriores, tal como presentamos en el resumen siguiente.

Resumen

Si X es una variable aleatoria y a y b son constantes, entonces

$$\mu_{a\cdot X+b} = a\cdot\mu_X + b$$

$$\sigma^2_{a\cdot X+b} = a^2\cdot\sigma^2_X$$

$$\sigma_{a\cdot X+b} = |a|\cdot\sigma_X$$