# TEMA 4 VARIABLES ALEATORIAS

Pablo Buenestado

Curso 2020-2021 Otoño

Departamento de Matemáticas (UPC)

# Índice

1 VARIABLES ALEATORIAS
- Ejercicios Resueltos

# Esquema

1 VARIABLES ALEATORIAS
- Ejercicios Resueltos

## EJERCICIO 1

Una cierta gasolinera tiene seis bombas. Sea $X$ el número de bombas que están en servicio a una hora concreta del día. Supongamos que la distribución de probabilidad de $X$ es como se da en la tabla siguiente; la primera fila de la tabla contiene los posibles valores de $X$ y la segunda da la probabilidad de dicho valor.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.25 | 0.20 | 0.15 | 0.10 |

Se pide:

1. La probabilidad de que como mucho dos bombas estén en servicio.
2. La probabilidad de que por lo menos 3 bombas estén en servicio.
3. La probabilidad de que entre 2 y 5 bombas inclusive estén en servicio.
4. La probabilidad de que el número de bombas en servicio esté estrictamente entre 2 y 5.
5. La media de bombas en servicio.

## EJERCICIO 1
### Solución

1. $P(X \leq 2) = P(X = \{0,1,2\}) = p(0) + p(1) + p(2) = 0.05 + 0.10 + 0.15 = 0.30$
2. $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.30 = 0.70$
3. $P(2 \leq X \leq 5) = P(X = \{2,3,4,5\}) = p(2) + p(3) + p(4) + p(5) = 0.15 + 0.25 + 0.20 + 0.15 = 0.75$
4. $P(2 < X < 5) = P(X = \{3,4\}) = p(3) + p(4) = 0.25 + 0.20 = 0.45$
5. $\mu = \sum x \cdot p(x) = 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3) + 4 \cdot p(4) + 5 \cdot p(5) + 6 \cdot p(6) = 0 \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.10 + 2 \cdot 0.15 + 3 \cdot 0.25 + 4 \cdot 0.20 + 5 \cdot 0.15 + 6 \cdot 0.10 = 3.3$

## EJERCICIO 2

Una compañía de seguros ofrece a sus asegurados varias opciones diferentes de pago de primas. Para un asegurado seleccionado al azar, sea $X =$ el número de meses entre pagos sucesivos. La función de distribución acumulativa es la siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.30 & 1 \leq x < 3 \\ 0.40 & 3 \leq x < 4 \\ 0.45 & 4 \leq x < 6 \\ 0.60 & 6 \leq x < 12 \\ 1 & 12 \leq x \end{cases}$$

Se pide:

1. La función de masa de probabilidad de $X$.
2. $P(3 \leq X \leq 6)$, $P(3 < X \leq 6)$, $P(3 \leq X < 6)$ y $P(3 < X < 6)$.
3. El valor esperado de $X$.
4. La varianza de $X$ y la desviación estándar de $X$.

# EJERCICIO 2
## Solución

1. Para encontrar la función masa de probabilidad de $X$ observamos los valores en los que $F(x)$ varía. En consecuencia $X = \{1, 3, 4, 6, 12\}$. El salto de $F(x)$ en cada uno de los valores de $X$ equivale a la probabilidad de ocurrencia de los mismos. Así, podemos componer la tabla de probabilidad siguiente:

| $X$ | $p(x)$ | $F(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.30 | 0.30 |
| 3 | 0.10 | 0.40 |
| 4 | 0.05 | 0.45 |
| 6 | 0.15 | 0.60 |
| 12 | 0.40 | 1 |

2. $P(3 \leq X \leq 6) = F(6) - F(1) = 0.60 - 0.30 = 0.30$
$P(3 < X \leq 6) = F(6) - F(3) = 0.60 - 0.40 = 0.20$
$P(3 \leq X < 6) = F(4) - F(1) = 0.45 - 0.30 = 0.15$
$P(3 < X < 6) = F(4) - F(3) = 0.45 - 0.40 = 0.05$

## EJERCICIO 2
## Solución (Continuación)

3. $\mu_X = \sum x \cdot p(x)$
   $\mu_X = \sum x \cdot p(x) = 1 \cdot p(1) + 3 \cdot p(3) + 4 \cdot p(4) + 6 \cdot p(6) + 12 \cdot p(12)$
   $\mu_X = 1 \cdot 0.30 + 3 \cdot 0.10 + 4 \cdot 0.05 + 6 \cdot 0.15 + 12 \cdot 0.40 = 6.5$

4. $\sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

   $$E(X^2) = \sum x^2 \cdot p(x) = 1^2 \cdot p(1) + 3^2 \cdot p(3) + 4^2 \cdot p(4) + 6^2 \cdot p(6) + 12^2 \cdot p(12)$$

   $$E(X^2) = 1 \cdot 0.30 + 9 \cdot 0.10 + 16 \cdot 0.05 + 36 \cdot 0.15 + 144 \cdot 0.40 = 65$$

   $\sigma_X^2 = 65 - 6.5^2 = 65 - 42.25 = 22.75$
   Y la desviación estándar es: $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{22.75} = 4.7696960$

## EJERCICIO 3

Una tienda de computadoras adquirió tres ordenadores de un tipo a 500 euros cada uno. Los venderá a 1000 euros cada uno. El fabricante se comprometió a readquirir cualquier ordenador que no se haya vendido después de un periodo especificado a 200 euros cada uno. Sea $X$ el número de ordenadores vendidos y suponiendo que $p(0) = 0.1$, $p(1) = 0.2$, $p(2) = 0.3$ y $p(3) = 0.4$.
Se pide:

1. La media de ordenadores vendidos.
2. El beneficio esperado.
3. La desviación estándar del beneficio.

## Solución

1. El valor esperado de ordenadores vendidos es:

$$\mu_X = \sum x \cdot p(x) = 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3)$$

$$\mu_X = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.4 = 2$$

# EJERCICIO 3
## Solución (Continuación)

2. Sea $Y$ la variable que define el beneficio (ingreso - coste), entonces $Y = (1000 \cdot X + 200 \cdot (3 - X)) - 1500 = 800 \cdot X - 900$. Que nos lleva a la distribución de probabilidad siguiente:

| $X$ | $p(x)$ | $Y = 800 \cdot X - 900$ | $p(y)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | -900 | 0.1 |
| 1 | 0.2 | -100 | 0.2 |
| 2 | 0.3 | 700 | 0.3 |
| 3 | 0.4 | 1500 | 0.4 |

El beneficio esperado es:

$$\mu_Y = \sum y \cdot p(y) = -900 \cdot p(-900) - 100 \cdot p(-100) + 700 \cdot p(700) + 1500 \cdot p(1500)$$

$$\mu_Y = -900 \cdot 0.1 - 100 \cdot 0.2 + 700 \cdot 0.3 + 1500 \cdot 0.4 = 700$$

Comprobamos que se cumple la propiedad:
$E(Y) = E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b = 800 \cdot 2 - 900 = 700$

## EJERCICIO 3
## Solución (Continuación)

3. La desviación estándar del beneficio se calcula a partir de $\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2}$ con

$$\sigma_Y^2 = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

$E(Y^2) = \sum y^2 \cdot p(y) =$
$(-900)^2 \cdot p(-900) + (-100)^2 \cdot p(-100) + (700)^2 \cdot p(700) + (1500)^2 \cdot p(1500)$

$E(Y^2) = 900^2 \cdot 0.1 + 100^2 \cdot 0.2 + 700^2 \cdot 0.3 + 1500^2 \cdot 0.4 = 1130000$

$\sigma_Y^2 = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 1130000 - (700)^2 = 1130000 - 490000 = 640000$

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{640000} = 800$$

# EJERCICIO 3
## Solución (Continuación)

La desviación estándar del beneficio también podemos encontrarla a partir de la relación existente entre las varianzas de $X$ e $Y$:

$$Var(Y) = Var(800 \cdot X - 900) = 800^2 \cdot Var(X)$$

$$\sigma_Y^2 = \sigma_{800 \cdot X - 900}^2 = 800^2 \cdot \sigma_X^2$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$E(X^2) = \sum x^2 \cdot p(x) = 0^2 \cdot p(0) + 1^2 \cdot p(1) + 2^2 \cdot p(2) + 3^2 \cdot p(3)$
$E(X^2) = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.3 + 9 \cdot 0.4 = 5$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = 5 - 2^2 = 5 - 4 = 1$$

$$\sigma_Y^2 = 800^2 \cdot 1 = 640000$$

$$\sigma_Y = \sqrt{640000} = 800$$

## EJERCICIO 4

Un profesor universitario nunca termina su disertación antes del final de la hora y siempre termina dentro de los 2 minutos posteriores a la hora. Sea $X$ = el tiempo que transcurre entre el final de la hora y el final de la disertación y suponiendo que la función de densidad de probabilidad de $X$ es

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot x^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$$

Se pide:

1. El valor de $k$.
2. La función de distribución.
3. ¿Cuál es la probabilidad de que la disertación continúe después de la hora durante entre 60 y 90 segundos?
4. La esperanza de $X$.
5. La varianza de $X$.

# EJERCICIO 4
## Solución

1. Para encontrar el valor de $k$ nos aseguramos que el área bajo la curva de $f(x)$ valga 1, es decir que se cumpla que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = 1$$

$$1 = \int_0^2 k \cdot x^2 \cdot dx = k \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = k \cdot \left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = k \cdot \frac{8}{3}$$

Aislando $k$ encontramos su valor: $k = \dfrac{3}{8}$

2. Si reescribimos la función de densidad encontramos 3 tramos:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ k \cdot x^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

# EJERCICIO 4
## Solución (Continuación)

2. Como la función de densidad es cero en $x < 0$ la función de distribución también será 0.

   $x < 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0$$

   $0 \leq x \leq 2$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \cdot dx = \int_{0}^{x} k \cdot x^2 \cdot dx = k \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^x = k \cdot \left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{8}$$

   $x > 2$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \cdot dx = \int_{0}^{2} k \cdot x^2 \cdot dx = k \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = k \cdot \left(\frac{2^3}{3}\right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{3} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x^3}{8} & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

## EJERCICIO 4
## Solución (Continuación)

3. La probabilidad demandada es $P(1 < X < 1.5)$

$$P(1 < X < 1.5) = F(1.5) - F(1) = \frac{1.5^3}{8} - \frac{1^3}{8} = \frac{3.375 - 1}{8} = \frac{2.375}{8}$$

$$P(1 < X < 1.5) = 0.296875$$

4. La esperanza de $X$ la encontramos a partir de la integral

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^2 x \cdot k \cdot x^2 \cdot dx = \int_0^2 k \cdot x^3 \cdot dx = k \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2$$

$$\mu_X = k \cdot \left(\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{16}{4} = \frac{3}{2} = 1.5$$

## EJERCICIO 4
## Solución (Continuación)

5. La varianza de $X$ la encontramos a partir de la expresión $\sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^2 x^2 \cdot k \cdot x^2 \cdot dx = \int_0^2 k \cdot x^4 \cdot dx = k \cdot \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$$E(X^2) = k \cdot \left(\frac{2^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{32}{5} = \frac{12}{5} = 2.4$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = 2.4 - 1.5^2 = 2.4 - 2.25 = 0.15$$

## EJERCICIO 5

La función de distribución acumulativa de $X$ (= error implicado al realizar una medición) es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{32} \cdot \left(4 \cdot x - \dfrac{x^3}{3}\right) & -2 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

Se pide:

1. $P(-1 < X < 1)$
2. $P(0.5 < X)$
3. La función de densidad.
4. La media de $X$.
5. La desviación estándar de $X$.

## EJERCICIO 5
### Solución

1. $P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1)$

$$P(-1 < X < 1) = \frac{1}{2}+\frac{3}{32}\cdot\left(4\cdot 1 - \frac{1^3}{3}\right) - \left[\frac{1}{2}+\frac{3}{32}\cdot\left(4\cdot(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right)\right]$$

$$P(-1 < X < 1) = \frac{1}{2}+\frac{3}{32}\cdot\left(4 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} - \frac{3}{32}\cdot\left(-4 + \frac{1}{3}\right)$$

$$P(-1 < X < 1) = \frac{3}{32}\left(4 - \frac{1}{3} + 4 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{32}\left(8 - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{32}\left(\frac{24-2}{3}\right)$$

$$P(-1 < X < 1) = \frac{22}{32} = \frac{11}{16} = 0.6875$$

2. $P(0.5 < X) = 1 - P(X \leq 0.5) = 1 - F(0.5)$

$$P(0.5 < X) = 1 - \left[\frac{1}{2}+\frac{3}{32}\cdot\left(4\cdot 0.5 - \frac{0.5^3}{3}\right)\right] = 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{32}\cdot\left(2 - \frac{0.125}{3}\right)$$

$$P(0.5 < X) = \frac{1}{2} - \frac{3}{32}\cdot\left(\frac{2-0.125}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1.875}{32} = 0.44140625$$

# EJERCICIO 5
## Solución (Continuación)

3. Para calcular la función de densidad a partir de la función de distribución la derivamos respecto a la variable aleatoria:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Para $x < -2$ y $x \geq 2$ como $F(x)$ es constante su derivada es 0, en consecuencia la función de densidad es 0.

En cambio, en el intervalo $-2 \leq x < 2$ derivamos:

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2} + \frac{3}{32} \cdot \left(4 \cdot x - \frac{x^3}{3}\right)\right] = \frac{3}{32} \cdot \left(4 - \frac{3 \cdot x^2}{3}\right) = \frac{3}{32} \cdot (4 - x^2)$$

Así:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \dfrac{3}{32} \cdot (4 - x^2) & -2 \leq x < 2 \\ 0 & 2 \leq x \end{cases}$$

# EJERCICIO 5
## Solución (Continuación)

4. La media de $X$ es:

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_{-2}^{2} x \cdot \frac{3}{32} \cdot (4 - x^2) \cdot dx = \frac{3}{32} \cdot \int_{-2}^{2} (4 \cdot x - x^3) \cdot dx$$

$$\mu_X = \frac{3}{32} \cdot \left[ \frac{4 \cdot x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{-2}^{2} = \frac{3}{32} \left[ 2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4} - \left( 2 \cdot (-2)^2 - \frac{(-2)^4}{4} \right) \right]$$

$$\mu_X = \frac{3}{32} \cdot \left( 8 - \frac{16}{4} - 8 + \frac{16}{4} \right) = \frac{3}{32} \cdot 0 = 0$$

# EJERCICIO 5
## Solución (Continuación)

5. La desviación estándar la encontramos a partir de la varianza:

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_{-2}^{2} x^2 \cdot \frac{3}{32} \cdot (4 - x^2) \cdot dx = \frac{3}{32} \cdot \int_{-2}^{2} (4 \cdot x^2 - x^4) \cdot dx$$

$$E(X^2) = \frac{3}{32} \cdot \left[ \frac{4 \cdot x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^{2} = \frac{3}{32} \left[ \frac{4 \cdot 2^3}{3} - \frac{2^5}{5} - \left( \frac{4 \cdot (-2)^3}{3} - \frac{(-2)^5}{5} \right) \right]$$

$$E(X^2) = \frac{3}{32} \cdot \left( \frac{32}{3} - \frac{32}{5} - \frac{-32}{3} + \frac{-32}{5} \right) = 3 \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$$

$$E(X^2) = 3 \cdot \frac{5 - 3 + 5 - 3}{15} = \frac{4}{5} = 0.8$$

## EJERCICIO 5
## Solución (Continuación)

5.

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = 0.8 - 0^2 = 0.8$$

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{0.8} = 0.8944272$$