Estadística

Curs 2011-2012/2

Grup M3 - Professors: José Rodellar / Francesc Pozo

Primer Parcial. 30/03/2012

1. `[10 punts]` Si A i B són dos esdeveniments incompatibles, demostreu que

$$P(A \mid A \cup B) = \frac{1}{1 + \frac{P(B)}{P(A)}}$$

2. `[30 punts]` Esteu a punt de jugar dues partides d'escacs amb un oponent amb qui no heu jugat mai. El vostre oponent té la mateixa probabilitat de ser un principiant (B), un aficionat (I) o un mestre (M). En funció de qui us toca, la probabilitat de guanyar una partida d'escacs és del 90%, 50% o 30%, respectivament. Considereu l'esdeveniment $W_1 =$"guanyar la primera partida" i sigui W_2 l'esdeveniment "guanyar la segona partida".

(a) `[5 punts]` Quina és la probabilitat de guanyar la primera partida, és a dir, $P(W_1)$?

(b) `[10 punts]` Enhorabona: has guanyat la primera partida! Amb aquesta informació, quina és la probabilitat que hagis disputat la primera partida contra un mestre, és a dir, $P(M|W_1)$?

(c) `[10 punts]` Quina és la probabilitat de guanyar les dues partides, és a dir $P(W_1 \cap W_2)$? *Atenció! En aquest cas, no és cert que $P(W_1 \cap W_2) = P(W_1)P(W_2)$.*

(d) `[5 punts]` Si ja has guanyat la primera partida, quina és la probabilitat de guanyar també la segona, és a dir, $P(W_2|W_1)$?

3. `[30 punts]` El ramal d'una xarxa arborescent de distribució d'aigua potable de la Figura 1 consta de 6 nodes extrems (aixetes), per on s'obté cabal d'aigua. El ramal s'alimenta des del node 11. Cada aixeta està totalment oberta o totalment tancata. La probabilitat que cadascun d'aquests sis nodes estigui obert és p_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ i el seu cabal és, quan està obert, $q_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Aquests valors es poden trobar a la Taula 1:

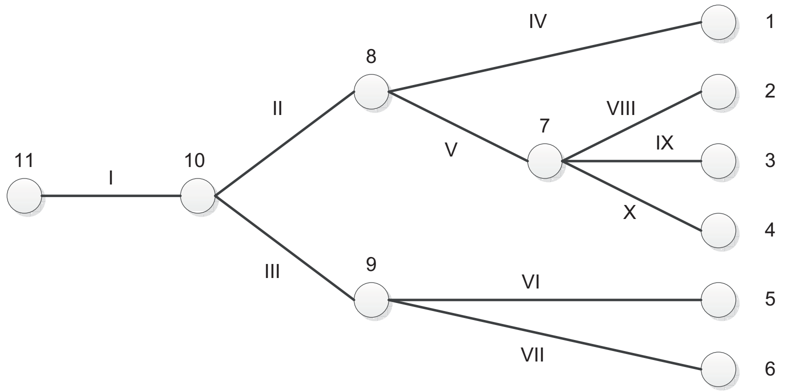

Figura 1: Ramal d'una xarxa arborescent de distribució d'aigua potable.

Aixeta	p_i	q_i (l/s)
1	0.501	10.0
2	0.001	1.0
3	0.750	25.3
4	0.336	5.3
5	0.485	3.5
6	0.990	85.6

Taula 1: Probabilitats d'estar oberts i cabals nominals dels nodes de la xarxa de la Figura 1.

(a) `[10 punts]` Sigui X_1 la variable aleatòria que mesura el cabal d'aigua que surt per l'aixeta 1. Sabent que el recorregut d'aquesta variable és $X(\Omega) = \{0, q_1\} = \{0, 10.0\}$, definiu la funció de probabilitat de la variable X_1. Calculeu $E(X_1)$ i $VAR(X_1)$.

(b) `[10 punts]` Considereu ara X_i la variable aleatòria que mesura el cabal d'aigua que surt per l'aixeta número i, $i = 2, 3, 4, 5, 6$. Definiu, en termes de p_i i q_i, la funció de densitat de probabilitat de X_i. Calculeu $E(X_i)$ i $VAR(X_i)$ i deixeu el resultat en funció de p_i i q_i.

(c) `[10 punts]` Definiu la variable aleatòria que compta el cabal circulant pel tub I (entre els nodes 11 i 10). Quin és el cabal esperat que circularà per aquest tub? I quina és la seva variància?

4. `[30 punts]` Responeu a les següents preguntes:

(a) `[6 punts]` Robinson Crusoe i Divendres, cada dia per decidir si mengen plàtans o pomes, tiren cadascú una moneda. Si surt **almenys** una creu, mengen pomes. En cas contrari, mengen plàtans. Quin és el nombre mitjà de dies que han d'esperar **abans** de poder menjar plàtans (sense incloure el dia que mengen plàtans)?

(b) `[6 punts]` Robinson Crusoe i Divendres, per decidir si mengen plàtans o pomes, tiren cadascú una moneda. Si surt **almenys** una creu, mengen pomes. En cas contrari, mengen plàtans. En una setmana, quin és el nombre mitjà de dies que mengen plàtans?

(c) `[6 punts]` Robinson Crusoe i Divendres, després de menjar, juguen a cartes amb una baralla de 52 cartes (13 cartes de cada pal). Divendres reparteix les cartes i en dóna 5 a Robinson Crusoe. Quina és la probabilitat que aquestes cinc cartes siguin del mateix pal?

(d) `[6 punts]` Robinson Crusoe i Divendres, després de menjar, juguen a cartes amb una baralla de 52 cartes (13 cartes de cada pal). Divendres reparteix les cartes i en dóna 5 a Robinson Crusoe. Quin és el nombre mitjà d'espases que tindrà?

(e) `[6 punts]` Robinson Crusoe i Divendres, després de menjar i de jugar a cartes, se'n van a pescar. Sempre dediquen exactament una hora de temps. Sigui X la variable aleatòria que compta el nombre de peixos que pesquen durant aquest temps. Aquesta variable segueix una distribució de Poisson. Si la probabilitat de que se'n vagin amb la cistella buida és de $\frac{1}{e^2}$, quin és el nombre mitjà de peixos que pescaran?

Model	$P(X=k)$	$E(X)$	$VAR(X)$
Bernoulli $b(p)$	$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$	p	pq
Binomial $\mathcal{B}(n,p)$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	npq
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Geomètrica $\mathcal{G}(p)$	$P(X=k)=(1-p)^k p$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Binomial Negativa $\mathcal{BN}(r,p)$	$P(X=k)=\binom{k+r-1}{k}(1-p)^{k-r}p^r$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
Hipergeomètrica $\mathcal{HG}(N,n,D)$	$P(X=k)=\frac{\binom{D}{k}\cdot\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$n\frac{D}{N}$	$n\frac{D}{N}\frac{N-D}{N}\frac{N-n}{N-1}$

Estadística

Curs 2011-2012/2

Grup M3 - Professors: José Rodellar / Francesc Pozo

Primer Parcial. 30/03/2012

1. `[10 punts]` Si A i B són dos esdeveniments incompatibles, demostreu que

$$P(A \mid A \cup B) = \frac{1}{1 + \frac{P(B)}{P(A)}}$$

Sabem que si A i B són incompatibles, aleshores $A \cap B = \emptyset$. Aleshores,

$$\begin{aligned} P(A \mid A \cup B) &= \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} \\ &= \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \\ &= \frac{P(A)}{P(A) + P(B)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{P(B)}{P(A)}} \end{aligned}$$

---

2. `[30 punts]` Esteu a punt de jugar dues partides d'escacs amb un oponent amb qui no heu jugat mai. El vostre oponent té la mateixa probabilitat de ser un principiant (B), un aficionat (I) o un mestre (M). En funció de qui us toca, la probabilitat de guanyar una partida d'escacs és del 90%, 50% o 30%, respectivament. Considereu l'esdeveniment W_1 ="guanyar la primera partida" i sigui W_2 l'esdeveniment "guanyar la segona partida".

(a) `[5 punts]` Quina és la probabilitat de guanyar la primera partida, és a dir, $P(W_1)$?

(b) `[10 punts]` Enhorabona: has guanyat la primera partida! Amb aquesta informació, quina és la probabilitat que hagis disputat la primera partida contra un mestre, és a dir, $P(M|W_1)$?

(c) `[10 punts]` Quina és la probabilitat de guanyar les dues partides, és a dir $P(W_1 \cap W_2)$? *Atenció! En aquest cas, no és cert que* $P(W_1 \cap W_2) = P(W_1)P(W_2)$.

(d) `[5 punts]` Si ja has guanyat la primera partida, quina és la probabilitat de guanyar també la segona, és a dir, $P(W_2|W_1)$?

(a) Per al càlcul de $P(W_1)$ fem servir la fórmula de la probabilitat total:

$$\begin{aligned} P(W_1) &= P(W_1|B)P(B) + P(W_1|I)P(I) + P(W_1|M)P(M) \\ &= 0.9 \cdot \frac{1}{3} + 0.5 \cdot \frac{1}{3} + 0.3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{17}{30} \approx 0.56667 \end{aligned}$$

(b) En aquest cas, aplicarem el teorema de Bayes:

$$P(M|W_1) = \frac{P(W_1|M)P(M)}{P(W_1)} = \frac{0.3 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{17}{30}}$$
$$= \frac{3}{17} \approx 0.17647$$

És a dir, si hem guanyat la primera partida, la probabilitat d'haver jugat contra un mestre és de poc més d'un 17%.

(c) En aquest cas, també apliquem la fórmula de la probabilitat total:

$$\begin{aligned}
P(W_1 \cap W_2) &= P(W_1 \cap W_2|B)P(B) + P(W_1 \cap W_2|I)P(I) + P(W_1 \cap W_2|M)P(M) \\
&= P(W_1|B)P(W_2|B)P(B) + P(W_1|I)P(W_2|I)P(I) + P(W_1|M)P(W_2|M)P(M) \\
&= P(W_1|B)^2P(B) + P(W_1|I)^2P(I) + P(W_1|M)^2P(M) \\
&= 0.9^2 \cdot \frac{1}{3} + 0.5^2 \cdot \frac{1}{3} + 0.3^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{23}{60} \approx 0.38333
\end{aligned}$$

En aquest apartat hem fet servir que, un cop escollit un oponent, les dues partides són independents. És a dir, $P(W_1 \cap W_2|X) = P(W_1|X)P(W_2|X)$. Això és el que s'anomena *independència condicional*.

(d) En aquest apartat apliquem la definició de probabilitat condicionada:

$$P(W_2|W_1) = \frac{P(W_2 \cap W_1)}{P(W_1)} = \frac{\frac{23}{60}}{\frac{17}{30}} = \frac{23}{34} \approx 0.67647$$

Fixeu-vos que la probabilitat de guanyar la segona partida sabent que ja hem guanyat la primera és més alta que la probabilitat de guanyar la primera. Això és així ja que, si hem guanyat la primera, és més probable que haguem jugat aquesta primera partida amb el principiant, fent que fa augmentar les probabilitats de guanyar també la segona partida.

---

3. `[30 punts]` El ramal d'una xarxa arborescent de distribució d'aigua potable de la Figura 1 consta de 6 nodes extrems (aixetes), per on s'obté cabal d'aigua. El ramal s'alimenta des del node 11. Cada aixeta està totalment oberta o totalment tancada. La probabilitat que cadascun d'aquests sis nodes estigui obert és p_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ i el seu cabal és, quan està obert, $q_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Aquests valors es poden trobar a la Taula 1:

(a) `[10 punts]` Sigui X_1 la variable aleatòria que mesura el cabal d'aigua que surt per l'aixeta 1. Sabent que el recorregut d'aquesta variable és $X(\Omega) = \{0, q_1\} = \{0, 10.0\}$, definiu la funció de probabilitat de la variable X_1. Calculeu $E(X_1)$ i $VAR(X_1)$.

(b) `[10 punts]` Considereu ara X_i la variable aleatòria que mesura el cabal d'aigua que surt per l'aixeta número i, $i = 2, 3, 4, 5, 6$. Definiu, en termes de p_i i q_i, la funció de densitat de probabilitat de X_i. Calculeu $E(X_i)$ i $VAR(X_i)$ i deixeu el resultat en funció de p_i i q_i.

(c) `[10 punts]` Definiu la variable aleatòria que compta el cabal circulant pel tub I (entre els nodes 11 i 10). Quin és el cabal esperat que circularà per aquest tub? I quina és la seva variància?

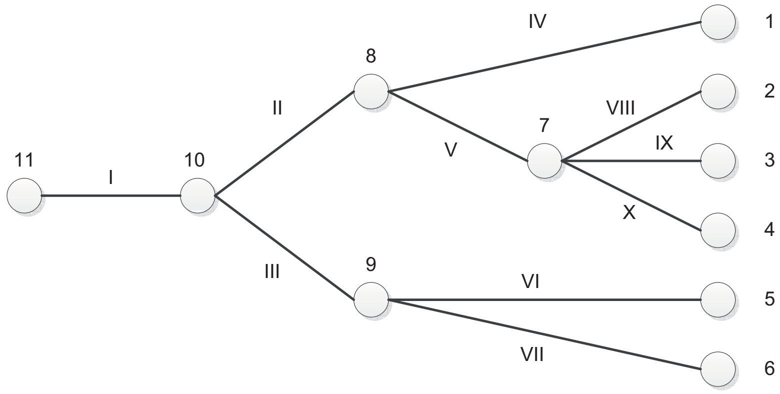

Figura 1: Ramal d'una xarxa arborescent de distribució d'aigua potable.

Aixeta	p_i	q_i (l/s)
1	0.501	10.0
2	0.001	1.0
3	0.750	25.3
4	0.336	5.3
5	0.485	3.5
6	0.990	85.6

Taula 1: Probabilitats d'estar oberts i cabals nominals dels nodes de la xarxa de la Figura 1.

(a) Definir la funció de probabilitat equival a calcular les probabilitats $P(X_1 = 0)$ i $P(X_1 = q_1)$. Aquestes dues probabilitats són:

$$f_{X_1}(0) = P(X_1 = 0) = 1 - p_1$$
$$f_{X_1}(q_1) = P(X_1 = q_1) = p_1$$

Aquesta probabilitat es pot expressar de forma compacta (i una mica artificial) com

$$f_{X_1}(k) = P(X_1 = k) = p_1^{\frac{k}{q_1}}(1 - p_1)^{1-\frac{k}{q_1}}, \quad k = 0, q_1$$

L'esperança d'aquesta variable és:

$$E(X_1) = 0 \cdot (1 - p_1) + q_1 p_1 = q_1 p_1$$

L'esperança de la variable al quadrat és (ens farà falta per calcular la variància):

$$E(X_1^2) = 0^2 \cdot (1 - p_1) + q_1^2 p_1 = q_1^2 p_1$$

Per al càlcul de la variància, farem servir el resultat de Steiner:

$$VAR(X_1) = E(X_1^2) - [E(X)]^2 = q_1^2 p_1 - [q_1 p_1]^2$$
$$= q_1^2 p_1 - q_1^2 p_1^2 = q_1^2 p_1 (1 - p_1)$$

Fixem-nos, finalment, que la variable $Y_1 = \frac{X_1}{q_1}$ segueix una distribució de Bernoulli de paràmetre p_1, és a dir, $Y_1 = \frac{X_1}{q_1} \hookrightarrow b(p_1)$, però X_1 *no* segueix una distribució de Bernoulli.

(b) Calcularem la funció de probabilitat, l'esperança i la variància de X_i, $i = 2, 3, 4, 5, 6$ de forma genèrica, tot reproduint els càlculs de l'apartat anterior. En efecte, definir la funció de probabilitat equival a calcular les probabilitats $P(X_i = 0)$ i $P(X_i = q_i)$. Aquestes dues probabilitats són:

$$\begin{aligned} f_{X_i}(0) &= P(X_i = 0) = 1 - p_i \\ f_{X_i}(q_i) &= P(X_i = q_i) = p_i \end{aligned}$$

Aquesta probabilitat es pot expressar de forma compacta (i una mica artificial) com

$$f_{X_i}(k) = P(X_i = k) = p_i^{\frac{k}{q_i}} (1 - p_i)^{1 - \frac{k}{q_i}}, \quad k = 0, q_i$$

L'esperança d'aquesta variable és:

$$E(X_i) = 0 \cdot (1 - p_i) + q_i p_i = q_i p_i$$

L'esperança de la variable al quadrat és (ens farà falta per calcular la variància):

$$E(X_i^2) = 0^2 \cdot (1 - p_i) + q_i^2 p_i = q_i^2 p_i$$

Per al càlcul de la variància, farem servir el resultat de Steiner:

$$\begin{aligned} VAR(X_i) &= E(X_i^2) - [E(X)]^2 = q_i^2 p_i - [q_i p_i]^2 \\ &= q_i^2 p_i - q_i^2 p_i^2 = q_i^2 p_i (1 - p_i) \end{aligned}$$

(c) El cabal circulant pel tub I és el mateix que la suma dels cabals que surten de les sis aixetes. Aleshores, podem definir la variable aleatòria X que compta el cabal circulant pel tub I com

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = \sum_{i=1}^{6} X_i$$

El cabal esperat que circularà per aquest tub és $E(X)$. Aplicant la propietat de la linealitat de l'esperança, tenim que

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{6} X_i\right) = \sum_{i=1}^{6} E(X_i) = \sum_{i=1}^{6} q_i p_i = 112.2083$$

La variància d'aquesta variable és $VAR(X)$. Donat que les variables X_i, $i = 1, \ldots, 6$ són independents, tenim

$$VAR(X) = VAR\left(\sum_{i=1}^{6} X_i\right) = \sum_{i=1}^{6} VAR(X_i) = \sum_{i=1}^{6} q_i^2 p_i (1 - p_i) = 226.89$$

---

4. `[30 punts]` Responeu a les següents preguntes:

(a) `[6 punts]` Robinson Crusoe i Divendres, cada dia per decidir si mengen plàtans o pomes, tiren cadascú una moneda. Si surt **almenys** una creu, mengen pomes. En cas contrari, mengen plàtans. Quin és el nombre mitjà de dies que han d'esperar **abans** de poder menjar plàtans (sense incloure el dia que mengen plàtans)?

L'espai mostral associat al llençament de dues monedes és $\{cc, c+, +c, ++\}$. Mengen pomes si surt almenys una creu, és a dir, l'esdeveniment associat és $\{c+, +c, ++\}$ que té probabilitat $\frac{3}{4}$. Per tant, mengen plàtans amb una probabilitat de $\frac{1}{4}$. Sigui X la variable aleatòria discreta que compta el nombre de dies que han d'esperar abans de poder menjar plàtans. Aleshores X segueix una distribució geomètrica de paràmetre $p = \frac{1}{4}$, és a dir, $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{4}\right)$. El nombre mitjà de dies que han d'esperar abans de poder menjar plàtans és l'esperança de X, que és

$$E(X) = \frac{1-p}{p} = \frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$$

(b) `[6 punts]` Robinson Crusoe i Divendres, per decidir si mengen plàtans o pomes, tiren cadascú una moneda. Si surt **almenys** una creu, mengen pomes. En cas contrari, mengen plàtans. En una setmana, quin és el nombre mitjà de dies que mengen plàtans?

Sigui X la variable aleatòria que compta el nombre de dies, en una setmana, que mengen plàtans. El recorregut d'aquesta variable és $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Aleshores, X segueix una distribució binomial de paràmetres $n = 7$ i $p = \frac{1}{4}$, és a dir, $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(7, \frac{1}{4}\right)$. El nombre mitja de dies que mengen plàtans és

$$E(X) = 7 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1.75$$

(c) `[6 punts]` Robinson Crusoe i Divendres, després de menjar, juguen a cartes amb una baralla de 52 cartes (13 cartes de cada pal). Divendres reparteix les cartes i en dóna 5 a Robinson Crusoe. Quina és la probabilitat que aquestes cinc cartes siguin del mateix pal?

Per a resoldre aquest problema, consideren primer un problema més senzill: "quina és la probabilitat que aquestes cinc cartes siguin espases?". Si definim la variable aleatòria X com el nombre d'espases d'entre les cinc cartes, sabent que tenim una baralla de 52 cartes d'on 13 són espases, aleshores X segueix una distribució hipergeomètrica de paràmetres $N = 52, n = 5, D = 13$, és a dir, $X \hookrightarrow \mathcal{HG}(52, 5, 13)$. La probabilitat que les cinc cartes siguin espases és

$$P(X = 5) = \frac{\binom{13}{5}\binom{52-13}{5-5}}{\binom{52}{5}} = \frac{33}{66640} \approx 0.00049520$$

Si la pregunta és ara "quina és la probabilitat que siguin del mateix pal?", hem de multiplicar aquesta probabilitat per 4, és a dir,

$$4 \cdot P(X = 5) = \frac{33}{16660} \approx 0.0019808$$

(d) `[6 punts]` Robinson Crusoe i Divendres, després de menjar, juguen a cartes amb una baralla de 52 cartes (13 cartes de cada pal). Divendres reparteix les cartes i en dóna 5 a Robinson Crusoe. Quin és el nombre mitjà d'espases que tindrà?

Si definim la variable aleatòria X com el nombre d'espases d'entre les cinc cartes, sabent que tenim una baralla de 52 cartes d'on 13 són espases, aleshores X segueix una distribució hipergeomètrica de paràmetres $N = 52, n = 5, D = 13$, és a dir, $X \hookrightarrow \mathcal{HG}(52, 5, 13)$. El nombre mitjà d'espases és:

$$E(X) = \frac{nD}{N} = \frac{5 \cdot 13}{52} = \frac{5}{4} = 1.25$$

(e) `[6 punts]` Robinson Crusoe i Divendres, després de menjar i de jugar a cartes, se'n van a pescar. Sempre dediquen exactament una hora de temps. Sigui X la variable aleatòria que compta el nombre de peixos que pesquen durant aquest temps. Aquesta variable segueix una distribució de Poisson. Si la probabilitat de que se'n vagin amb la cistella buida és de $\frac{1}{e^2}$, quin és el nombre mitjà de peixos que pescaran?

Sabem que $P(X = 0) = \frac{1}{e^2} = e^{-2} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!}$, és a dir, $\lambda = 2$. Per tant, el nombre mitjà de peixos que pescaran és

$$E(X) = \lambda = 2$$

Model	$P(X = k)$	$E(X)$	$VAR(X)$
Bernoulli $b(p)$	$P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k}$	p	pq
Binomial $\mathcal{B}(n, p)$	$P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	npq
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Geomètrica $\mathcal{G}(p)$	$P(X = k) = (1-p)^k p$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Binomial Negativa $\mathcal{BN}(r, p)$	$P(X = k) = \binom{k+r-1}{k}(1-p)^{k-r}p^r$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
Hipergeomètrica $\mathcal{HG}(N, n, D)$	$P(X = k) = \frac{\binom{D}{k}\cdot\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$n\frac{D}{N}$	$n\frac{D}{N}\frac{N-D}{N}\frac{N-n}{N-1}$