Estadística
Curs 2014-2015/2
Grup M3 - Professors: José Rodellar / Francesc Pozo

[Feu els Problemes en Fulls Separats]

Primer Parcial. 8/04/2015

1. `[20 punts]` Demostreu la següent desigualtat

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

per a tot $n \geq 2$, suposant que $A_i,\ i = 1, \ldots, n$ són esdeveniments. Per fer la demostració, que es fa per inducció, seguiu els següents passos:

(a) `[10 punts]` Proveu la fórmula per a $n = 2$ (cas base), és a dir, demostreu que la probabilitat de la unió de dos conjunts és menor o igual a la suma de les probabilitats dels dos esdeveniments:

$$P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2).$$

(b) `[10 punts]` Suposeu que la fórmula és certa quan considerem $k = n - 1$ esdeveniments (hipòtesi d'inducció), és a dir, suposem cert que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i)$$

Per a demostrar el cas general,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

definiu $B = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$, tingueu en compte que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n$ i apliqueu la hipòtesi d'inducció i el resultat de l'apartat (a).

Solució.

(a) Una de les propietats de la probabilitat és que, si A_1 i A_2 són dos esdeveniments, aleshores

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

És evident, però, que $P(A \cap B) \geq 0$, el que implica que

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1) + P(A_2),$$

tal i com volíem veure.

(b) Per a la resolució d'aquest apartat seguirem les indicacions de l'enunciat del problema.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n\right) = P\left(B \cup A_n\right)$$

Ara bé, B és un esdeveniment, i per tant, per l'apartat (a), tenim que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(B \cup A_n\right) \leq P(B) + P(A_n).$$

Finalment, per la hipòtesi d'inducció, tenim que

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i),$$

amb el que aconseguim, finalment,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq P(B) + P(A_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

és a dir,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

---

2. `[30 punts]` Una capsa conté dues monedes: una moneda equilibrada i una moneda trucada amb dues cares. Escollim una moneda i la llencem dues vegades. Definim els següents esdeveniments:

- A="el resultat de la primera tirada és cara".
- B="el resultat de la segona tirada és cara".
- C="hem escollit la moneda equilibrada".

(a) `[6 punts]` Quin és l'espai mostral associat a l'experiència aleatòria de llençar la moneda dues vegades? Es tracta d'un espai mostral equiprobable (no feu càlculs)? Justifiqueu la resposta.

(b) `[6 punts]` Sabent que hem escollit la moneda equilibrada, quina és la probabilitat que la primera tirada sigui cara, $P(A|C)$?

(c) `[6 punts]` Quina és la probabilitat que la primera tirada sigui cara, $P(A)$?

(d) `[6 punts]` Si el resultat de la primera tirada ha sigut cara, quina és la probabilitat que haguem escollit la moneda trucada, $P(\bar{C}|A)$?

(e) `[6 punts]` Calculeu $P(B)$. Calculeu $P(A \cap B)$. Calculeu també $P(B|A)$. Són els esdeveniments A i B independents? Justifiqueu la resposta.

Solució.

(a) L'espai mostral associat a aquesta experiència aleatòria és

$$\Omega = \{cc, c+, +c, ++\}.$$

Ara bé, aquest espai mostral no és equiprobable, perquè serà més probable l'esdeveniment $\{cc\}$ que l'esdeveniment $\{++\}$, ja que una de les monedes només té cares.

(b) Si sabem que hem escollit la moneda equilibrada, la probabilitat que el resultat de la primera tirada sigui cara és $\frac{1}{2}$, és a dir,

$$P(A|C) = \frac{1}{2}.$$

(c) Per al càlcul de $P(A)$ farem servir la fórmula de la probabilitat total. En efecte,

$$P(A) = P(A|C)P(C) + P(A|\bar{C})P(\bar{C}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 75\%.$$

(d) Si el resultat de la primera tirada ha sigut cara, la probabilitat que haguem escollit la moneda trucada, $P(\bar{C}|A)$, es calcula aplicant el teorema de Bayes. En efecte,

$$P(\bar{C}|A) = \frac{P(A|\bar{C})P(\bar{C})}{P(A)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \approx 66.67\%$$

(e) En aquest cas ens demanen la probabilitat de diversos esdeveniments. L'esdeveniment B té la mateixa probabilitat que l'esdeveniment A, ja que són preguntes *simètriques*. No obstant, calcularem $P(B)$ fent servir la fórmula de la probabilitat total:

$$P(B) = P(B|C)P(C) + P(B|\bar{C})P(\bar{C}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 75\%.$$

Per al càlcul de $P(A \cap B)$, també farem servir la fórmula de la probabilitat total, tenint en compte que $A \cap B = \{cc\}$. Aleshores,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) = P(\{cc\}) &= P(\{cc\}|C)P(C) + P(\{cc\}|\bar{C})P(\bar{C}) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \approx 62.5\%. \end{aligned}$$

Per al càlcul de $P(B|A)$ aplicarem la definició de probabilitat condicionada:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{5/8}{3/4} = \frac{5}{6}.$$

Podem observar que $P(B|A) = \frac{5}{6} \neq \frac{3}{4} = P(B)$. Per tant, els esdeveniments A i B no són independents.

3. `[20 punts]` Tenim una bossa màgica que conté infinites boles blanques i negres. La probabilitat de treure una bola blanca és 0.3, i cada extracció és independent de les anteriors. Sigui X la variable aleatòria discreta que compta el nombre de boles blanques quan n'agafem quatre de la bossa.

(a) `[5 punts]` Calculeu (o construïu) la funció de probabilitat.

(b) `[5 punts]` Calculeu (o construïu) la funció de distribució de probabilitat (acumulada).

(c) `[5 punts]` Calculeu les probabilitats $P(X \leq 1)$, $P(X \geq 2)$ i $P(1 < X \leq 3)$.

(d) `[5 punts]` Calculeu el valor esperat i la variància de la variable X^2.

Solució.

(a) Es tracta d'un conjunt de 4 boles que poden ser blanques o negres. La probabilitat que una bola sigui blanca és 0.3. La variable X que compta el nombre de boles blanques segueix una distribució binomial $B(4, 0.3)$. Per tant la funció de probabilitat ve donada per l'expressió

$$f_X(k) = P(X = k) = \binom{4}{k} 0.3^k \, 0.7^{4-k}$$

Calculant aquesta funció per a tots els valors possibles de k, tenim

$$\begin{aligned} f_X(0) &= 0.2401 \\ f_X(1) &= 0.4116 \\ f_X(2) &= 0.2646 \\ f_X(3) &= 0.0756 \\ f_X(4) &= 0.0081 \end{aligned}$$

(b) La funció de distribució de probabilitat (acumulada) $F(x)$ és una funció a troços que es calcula segons l'expressió

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \in X(\Omega),\ k \leq x} f_X(k)$$

Aplicant aquesta expressió construim la funció $F_X(x)$ en la forma

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.2401, & 0 \leq x < 1 \\ 0.6517, & 1 \leq x < 2 \\ 0.9163, & 2 \leq x < 3 \\ 0.9919, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & 4 \leq x \end{cases}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= F(1) = f(0) + f(1) \ = \ 0.6517 \\ P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 0.3483 \\ P(1 < X \leq 3) &= F(3) - F(1) = f(2) + f(3) \ = \ 0.2646 + 0.0756 \ = \ 0.3402 \end{aligned}$$

(d) Aplicant la definició, calculem

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{4} k^2 f(k) = f(1) + 4f(2) + 9f(3) + 16f(4) = 2.28$$

Calculem també

$$E(X^4) = f(1) + 16f(2) + 81f(3) + 256f(4) = 12.84$$

La variància de la variable X^2 la calcularem fent servir el resultat de Steiner. En efecte,

$$VAR(X^2) = E(X^4) - [E(X^2)]^2 \; = \; 7.64$$

---

4. `[30 punts]` Una empresa té coneixement que el nombre de treballadors que arriba tard a la feina per dia s'ajusta a un model de Poisson. Sabem que el percentatge de dies on una única persona arriba tard és tres vegades el percentatge de dies on *tothom* arriba puntual.

(a) `[6 punts]` Trobeu el nombre mitjà de persones que arriba tard a la feina per dia.

(b) `[6 punts]` Calculeu la probabilitat que en un dia alguna persona arribi tard.

(c) `[6 punts]` Considerem un període de 2 dies de forma conjunta. Quin és el valor mitjà de treballadors que arribarà tard en aquest període? Calculeu la probabilitat que en aquest període 4 treballadors arribin tard, sense importar en quins dies en concret.

(d) `[6 punts]` Trobeu la probabilitat que dels 4 treballadors que arribin tard en el període de dos dies, 3 d'ells coincideixin en arribar tard en un qualsevol dels dos dies.

(e) `[6 punts]` L'empresa declara "dia puntual" un dia quan, com a molt, un treballador arriba tard. Si considerem un període de 5 dies, determineu la probabilitat que hi hagi, com a minim, un "dia puntual".

(a) Sigui X la variable que compta el nombre de treballadors que arriban tard a la feina per dia. Per l'enunciat del problema, aquesta variable segueix una distribució de Poisson de paràmetre λ desconegut. Però ara sabem que

$$P(X = 1) = 3P(X = 0),$$

és a dir,

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} = 3e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} \Leftrightarrow \; \lambda = 3$$

En una distribució de Poisson, el paràmetre de la distribució és el valor esperat. Per tant, el valor mitjà de persones que arriban tard per dia és $E(X) = 3$.

(b) En aquest cas, ens demanen calcular la probabilitat $P(X \geq 1)$:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-3} = 1 - 0.04978 \approx 0.9502$$

(c) Sigui ara Y la variable aleatòria que compta el nombre de treballadors que arriban tard quan considerem de forma conjunta 2 dies. La variable Y segueix una distribució de Poisson de paràmetre $\lambda_Y = 2\lambda$, és a dir, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(6)$. El valor mitja de persones serà $\lambda_Y = 6$ i

$$P(Y=4) = e^{-6}\frac{6^4}{4!} = 54e^{-6} \approx 0.1339$$

(d) Ara tenim un escenari en que 4 treballadors arriben tard en el conjunt de 2 dies. El fet que 3 treballadors arribin tard el primer dia i que un treballador arribi tard el segon dia s'ha de veure com 2 succesos independents. Per tant, la probabilitat que coincideixin els dos és el producte

$$P(X=3)\,P(X=1) = e^{-3}\frac{3^3}{3!}\,e^{-3}\frac{3^1}{1!} = \frac{27}{2}e^{-6} \approx 0.03346$$

D'igual forma, s'ha de veure el fet que un treballador arribi tard el primer dia i que 3 treballadors arribin tard el segon dia, amb probabilitat $P(X=1)P(X=3) \approx 0.03346$.

L'esdeveniment que "3 treballadors coincideixin en arribar tard en qualsevol dels dos dies" es la unió del dos esdeveniments anteriors. Per tant aquesta probabilitat es la suma

$$P(X=3)\,P(X=1) + P(X=1)\,P(X=3) \approx 0.06693$$

(e) Sigui Z la variable aleatòria que compta, d'entre un conjunt de 5 dies, els dies considerats "puntuals". La probabilidad que un dia sigui puntual es calcula amb el model de Poisson ($\lambda = 3$) en la forma

$$p = P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = e^{-3} + 3e^{-3} = 4e^{-3} \approx 0.1991.$$

La variable aleatòria Z segueix una distribució binomial de paràmetres $n = 5$ i $p = 0.1991$, és a dir, $Z \hookrightarrow B(5, 0.1991)$. Aleshores, la probabilitat que hi hagi, com a mínim, un dia puntual és

$$\begin{aligned} P(Z \ge 1) &= 1 - P(Z=0) \\ &= 1 - \binom{5}{0}(1-0.1991)^5 \approx 0.67047. \end{aligned}$$

Model	$P(X=k)$	$E(X)$	$VAR(X)$
Bernoulli $b(p)$	$P(X=k) = p^k(1-p)^{1-k}$	p	pq
Binomial $\mathcal{B}(n,p)$	$P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	npq
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Geomètrica $\mathcal{G}(p)$	$P(X=k) = (1-p)^k p$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Binomial Negativa $\mathcal{BN}(r,p)$	$P(X=k) = \binom{k+r-1}{k}(1-p)^k p^r$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$