Estadística
Tema 5
Modelos Probabilísticos en la Ingeniería

Variables Aleatorias Discretas

5.1 Modelos de Variables Aleatorias Discretas

5.1 Modelos de Variables Aleatorias Discretas

En la ingeniería, la ciencia y la naturaleza en general existen fenómenos que se asocian directamente con unos determinados Modelos de variables aleatorias discretas.

Ahora profundizaremos en algunos de los modelos más utilizados en ingeniería.

Su estudio nos permite calcular parámetros y probabilidades rápidamente si encontramos la relación adecuada entre el experimento o fenómeno y el modelo.

Variables Aleatorias Discretas

5.1.1 Modelos de Variables Aleatorias Discretas

Uniforme discreta

5.1.1 Modelos de Variables Aleatorias Discretas
Uniforme discreta

La distribución uniforme discreta se encarga de las distribuciones de probabilidad cuyos posibles *n* valores tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Lo podemos expresar de la siguiente forma:

$$p(x_i) = k = cte \quad \forall x_i \in X;$$

$$X = \left\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \right\}$$

Se puede definir como discreta en general aquella variable aleatoria si solo puede tomar un número finito *n* de valores distintos $x_1,\ldots,x_n$.

5.1.1 Modelos de Variables Aleatorias Discretas
Uniforme discreta

Cuánto vale la probabilidad de un suceso simple?

La función de probabilidad con valores posibles $x_1,\ldots,x_n$, siendo n el número total de valores posibles debe cumplir que:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

En consecuencia:

$$\sum_{i=1}^{n} k = 1 \Rightarrow kn = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{n} \Rightarrow p(x_i) = \frac{1}{n}$$

5.1.1 Modelos de Variables Aleatorias Discretas
Uniforme discreta

Medidas características:

$$X = \left\{a, a+1, a+2, \ldots, b\right\}$$

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{\left(b-a+1\right)^2 - 1}{12}$$

Tema 4
Variables Aleatorias Discretas

5.1.2 Modelos de Variables Aleatorias Discretas

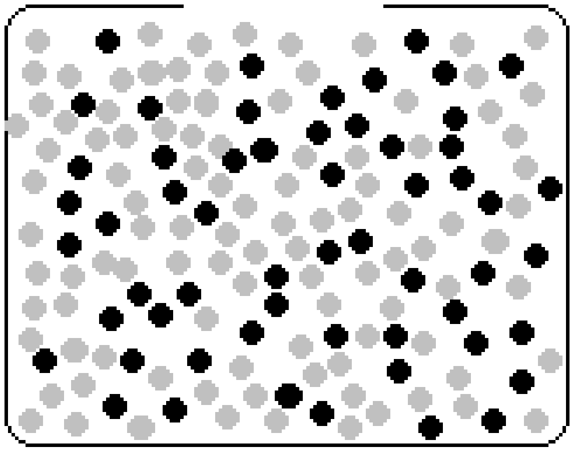
Binomial

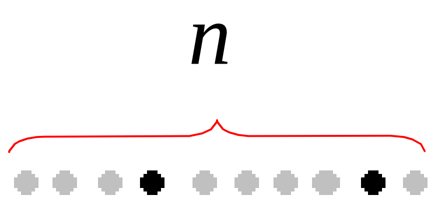
Proceso de Bernoulli

El resultado de un experimento admite dos categorías: "*Aceptable*" y "*Defectuoso*".

- Se repite el experimento n veces.
- La probabilidad de "*defectuoso*" es la misma p en todos los experimentos.
- Los experimentos son independientes.

Distribución Binomial (n,p)





Proporción defectuosas = p

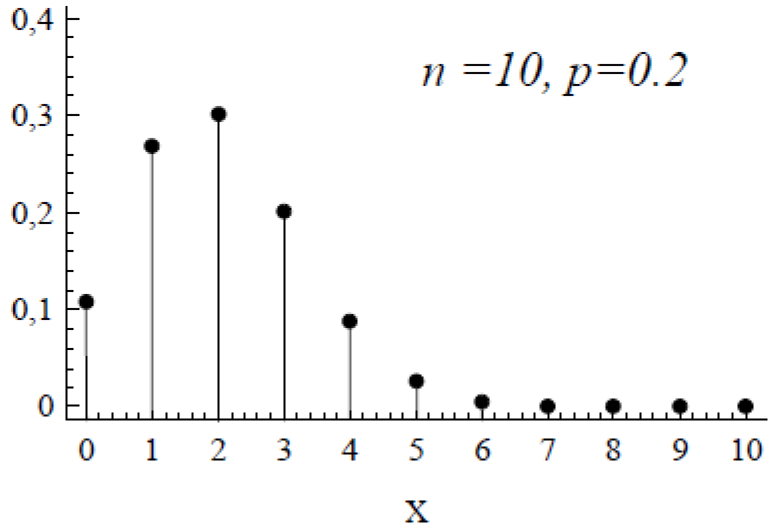
X = " Nº de defectuosas al extraer n piezas"

Distribución de probabilidad binomial *(n,p)*

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\ldots,n$$

(1) $P(X=k)\geq 0,\ \forall\ k.$

(2) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=1.$



5.1.2 Modelos de Variables Aleatorias Discretas
Binomial

- Definición de distribución binomial:

  La distribución binomial $p(x;n,p)$ nos dice la probabilidad de que hayan x éxitos en n ensayos, con una probabilidad p de éxito para cada ensayo.

$$p(x;n,p)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-x)!\,x!}\,p^{x}(1-p)^{n-x} & x=0,1,2,\ldots,n,\\ 0 \text{ para cualquier otro valor}. & 0<p<1, \text{ para } n \text{ entero}\end{cases}$$

$$\mu = np$$

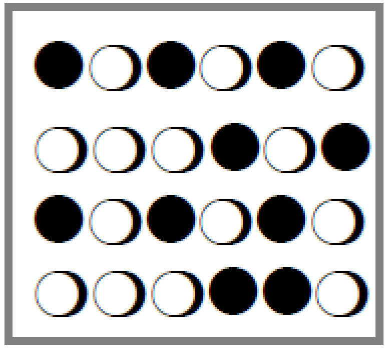
$$\sigma^{2} = np(1-p)$$

Tema 4
Variables Aleatorias Discretas

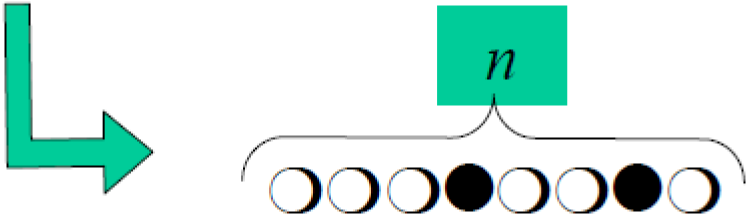
5.1.3 Modelos de Variables Aleatorias Discretas

Hipergeométrica

Dist. Hipergeométrica (N,M,n)



Se extraen al azar y sin reposición $\underline{n}$ piezas de un lote de $\underline{N}$ en total de las que $\underline{K}$ son defectuosas (N pequeño).



$$\boxed{V = \text{“Número de piezas defectuosas al extraer } \underline{n}\text{”}}$$

$$P(V=k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0,1,2,\dots,n \quad y \quad n-(N-K) \le k \le K$$

5.1.3 Modelos de Variables Aleatorias Discretas
Hipergeométrica

Sea N el número total de objetos en una población finita, de manera tal que k de éstos es de un tipo y N-k de otro.

Si se selecciona una muestra aleatoria de la población constituida por n objetos, la probabilidad de que x sean de un tipo exactamente y n-x sean del otro viene dada por la función de probabilidad hipergeométrica:

$$p(x; N, n, k) = \begin{cases} \dfrac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} & x = 0,1,2,\dots,n; \quad x \le k, \quad n-x \le N-k; \;\; N, n, k, \;\; \text{enteros positivos} \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

$$\mu = \frac{nk}{N}$$

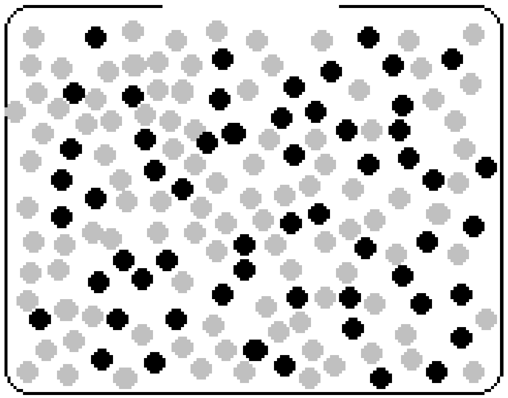
$$\sigma^2 = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

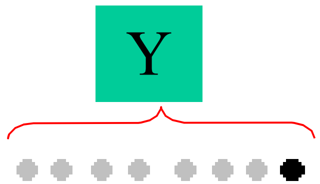
Tema 4
Variables Aleatorias Discretas

5.1.4 Modelos de Variables Aleatorias Discretas

Binomial negativa

Distribución Geométrica (p)





Proporción defectuosas = p

Y = "Piezas extraídas hasta que aparezca una defectuosa"

Distribución de probabilidad geométrica *(p)*

● 1 $\longrightarrow$ p

❍● 2 $\longrightarrow$ $(1\text{-}p)p$

❍❍● 3 $\longrightarrow$ $(1\text{-}p)^2p$

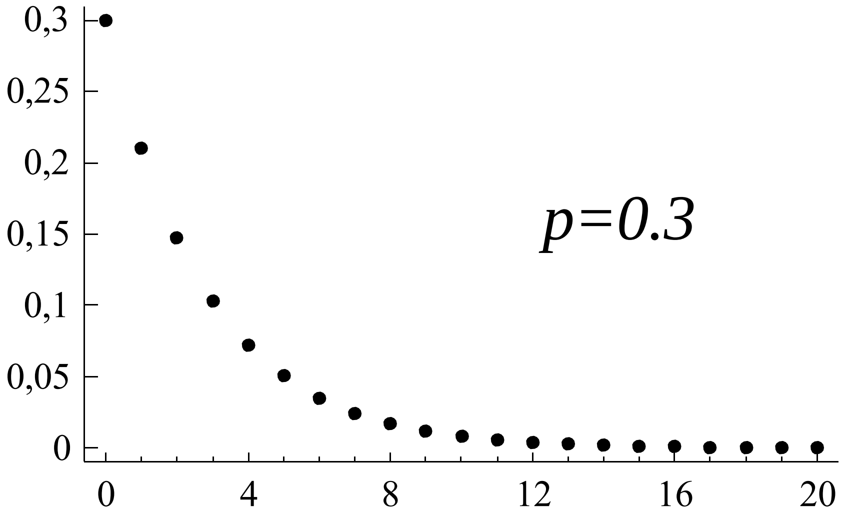
↓ ↓

❍❍❍...● k $\longrightarrow$ $(1\text{-}p)^{k\text{-}1}p$

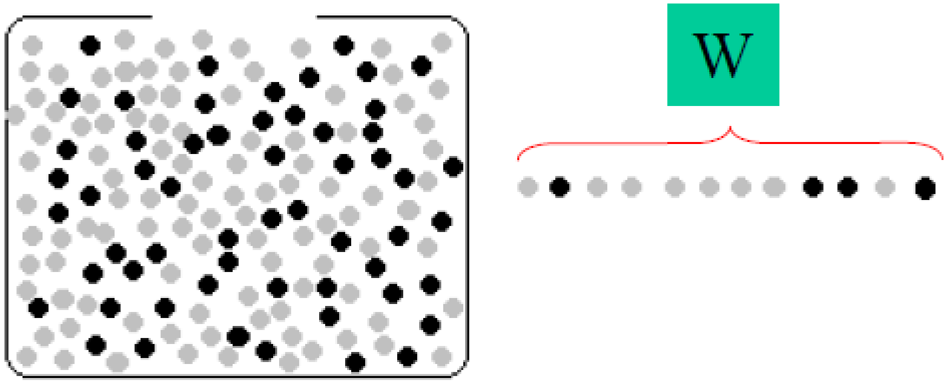
$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

Propiedades de la v.a. geométrica

$$E[Y] = \frac{1}{p}, \qquad Var[Y] = \frac{1-p}{p^2}$$



Dist. Binomial Negativa (r,p)



Ejemplo $r = 4$

Proporción defectuosas = p

W = "Piezas extraídas hasta que aparezcan r defectuosas"

$$P(W = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, r+2, \ldots$$

Distribución binomial negativa
(de Pascal o de Pólya)

Consideremos el siguiente experimento:
Partimos de un experimento de Bernoulli donde la probabilidad de que ocurra un suceso es ***p* (éxito)** y la probabilidad de que no ocurra ***q = 1- p (fracaso)***. Repetimos nuestro experimento **hasta conseguir el r-ésimo éxito**. Definimos la variable aleatoria *X*, como el número de fracasos *x* hasta que se obtiene el r-ésimo éxito. Entonces:

El último tiene que ser un éxito.

$$BN(r,p) = P(X = x) = \binom{x+r-1}{x} p^r (1-p)^x,$$

$$x = 0,1,2, \ldots$$

Se denomina binomial negativa porque los coeficiente provienen de la serie binomial negativa: $p^{-x} = (1\text{-}q)^{-x}$

Variables Aleatorias Discretas

5.1.5 Modelos de Variables Aleatorias Discretas

Poisson

5.1.5 Modelos de Variables Aleatorias Discretas
Poisson

- Es una distribución discreta de probabilidad en que la variable aleatoria representa el número de eventos independientes que ocurren a velocidad constante en el tiempo o en el espacio.
- Ejemplos:
  - el número de personas que llegan a una tienda de autoservicio en un tiempo determinado, o
  - el número de defectos en piezas similares de un mismo material.

Distribución de Poisson

Ejemplo: Fabricación continua de conductor de cobre.

$\lambda \equiv$ Número medio de defectos cada 100 m

$X \equiv$ Número de defectos en un tramo de 100 m

Límite de la dist. binomial

$$P_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad p = \frac{\lambda}{n}$$

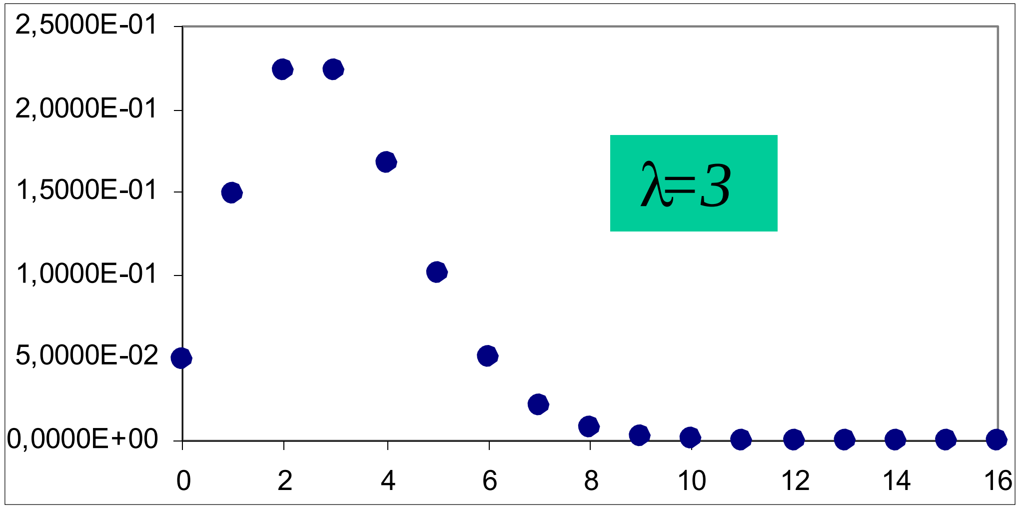
$$P_X(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-x)!x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x}}_{\to 1} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}}_{\to 1}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0,1,2,\ldots$$

Distribución de Poisson

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \qquad x = 0,1,2,..$$



Media y Varianza

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0,1,2,\ldots$$

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \times \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \sum_{x=1}^{\infty} x \times \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda \qquad e^{\lambda}$$

$$\boxed{E[X] = \lambda \qquad\qquad Var[X] = \lambda}$$

5.1.5 Modelos de Variables Aleatorias Discretas
Poisson

- Sea X una variable aleatoria que representa el número de eventos aleatorios independientes que ocurren a una rapidez constante sobre el tiempo o el espacio. Se dice que X tiene una distribución de Poisson con función de probabilidad.

$$p(x;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} & x = 0,1,2,\ldots,n; \quad \lambda > 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor .} \end{cases}$$

$$\mu = \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda$$

donde λ es el parámetro de distribución de Poisson, que nos da el promedio de ocurrencias del evento aleatorio por unidad de tiempo o espacio

Tema 5
Variables Aleatorias Continuas

5.2 Modelos de Variables Aleatorias Continuas

5.2 Modelos de Variables Aleatorias Continuas

En la ingeniería, la ciencia y la naturaleza, en general, existen fenómenos que se asocian directamente con unos determinados Modelos de variables aleatorias continuas.

Ahora profundizaremos en algunos de los modelos más utilizados en ingeniería.

Su estudio nos permite calcular parámetros y probabilidades rápidamente si encontramos la relación adecuada entre el experimento (o fenómeno) y el modelo.

Tema 5
Variables Aleatorias Continuas

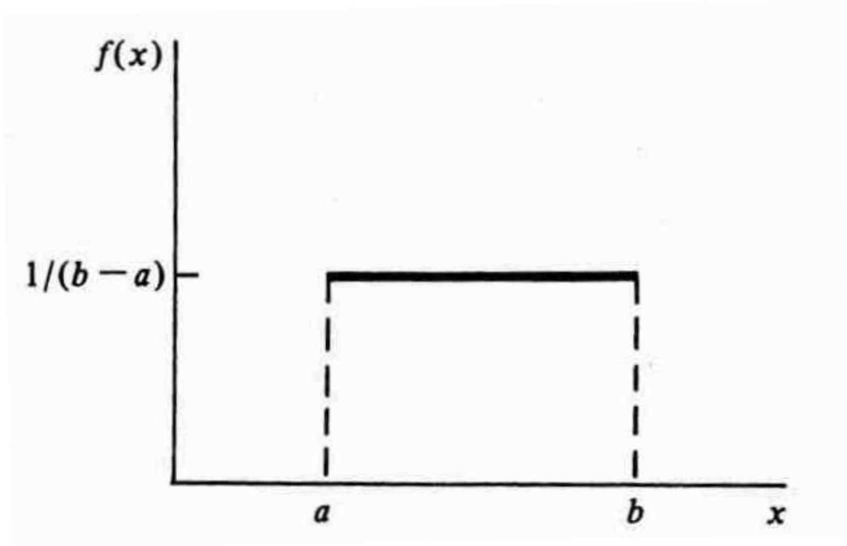
5.2.1 Modelos de Variables Aleatorias Continuas

Uniforme continua

5.2.1 Algunas variables aleatorias continuas
Uniforme continua

Definición: X es una variable aleatoria distribuida uniformemente sobre el intervalo (a,b) si su función de densidad de probabilidad es:

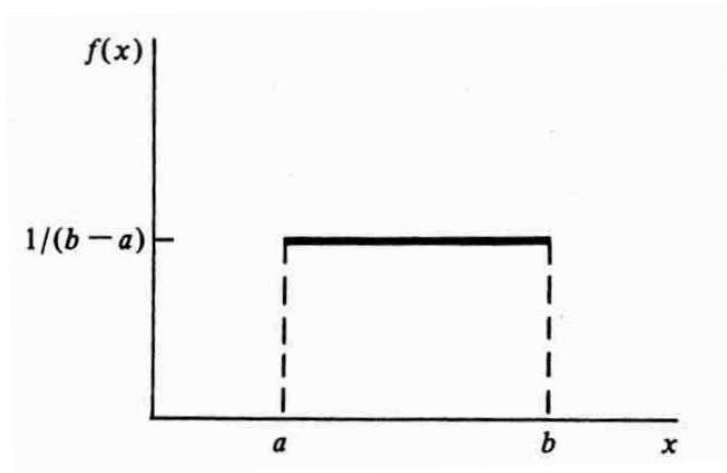
$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)} & \text{a} \le x \le b\\[2ex] 0 & \text{para cualquier otro valor.}\end{cases}$$



5.2.1 Algunas variables aleatorias continuas
Uniforme continua

De una manera más sencilla se puede decir que la probabilidad de que la variable tome un valor en cada subintervalo de igual longitud, es la misma.

Gráficamente la función de densidad de probabilidad de una distribución es constante en el intervalo (*a*,*b*), por eso también se conoce como distribución "rectangular":

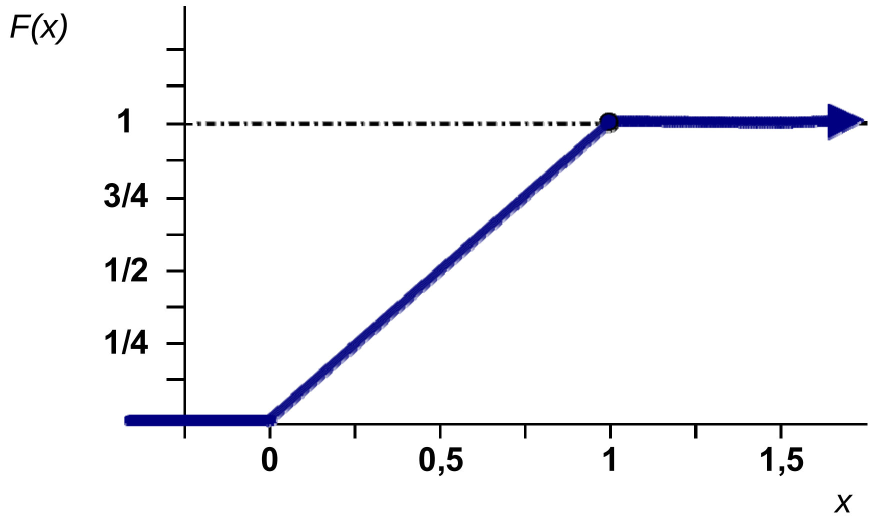


5.2.1 Algunas variables aleatorias continuas
Uniforme continua

La función acumulativa $F(\mathrm{x})$ es:

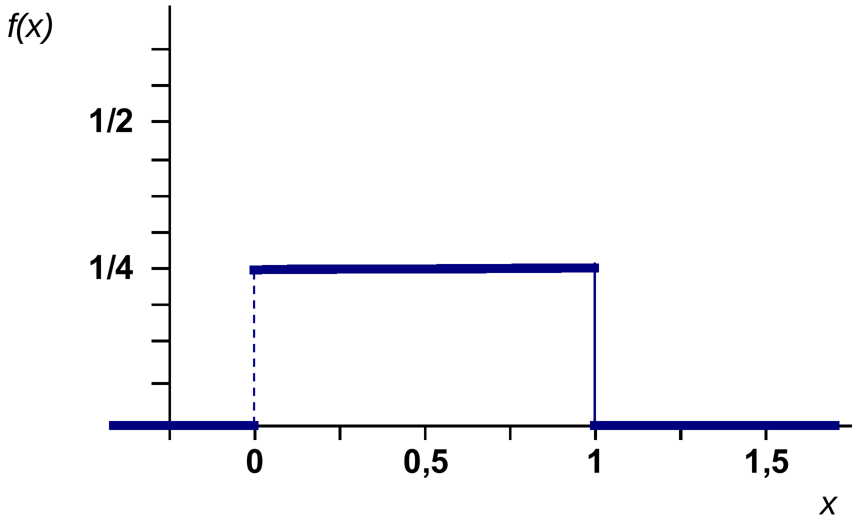
$$P(X \le x) = F(x; a, b) = (b-a)^{-1} \int_a^x dt = \begin{cases} 0 & x < a \\ (x-a)/(b-a) & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Y su gráfica?



Función de distribución

$$F_X(x) = x, \;\; x \in [0,1)$$



Función de densidad

$$f_X(x) = 1, \;\; x \in [0,1]$$

5.2.1 Algunas variables aleatorias continuas
Uniforme continua

Para cualquier subintervalo (*a1*,*b1*) interior a (*a*,*b*):

$$P(a1 \le X \le b1) = F(b1;a,b) - F(a1;a,b) = \frac{(b1-a1)}{b-a}$$

Medidas características:

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Tema 5
Variables Aleatorias Continuas

5.2.2 Modelos de Variables Aleatorias Continuas

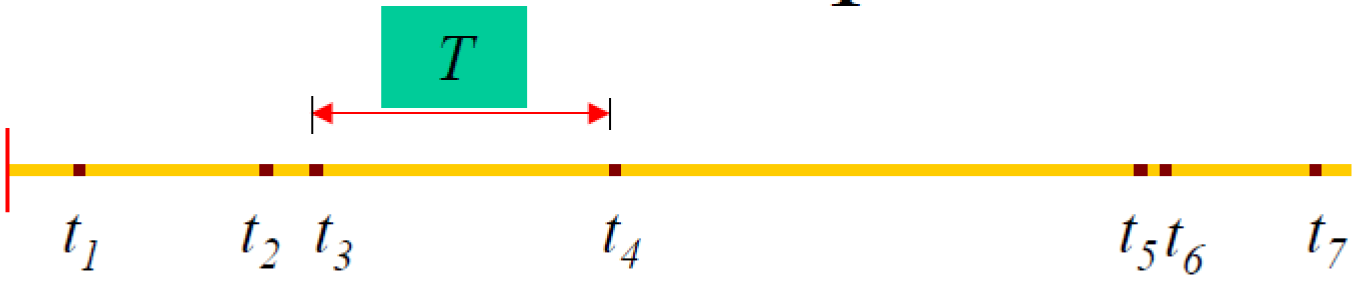
Exponencial

5.2.2 Modelos de Variables aleatorias continuas
Exponencial

Es un caso especial de los modelos de Weibull y Gama. Ya que es un caso especial de distribución gama (Erlang), la variable aleatoria exponencial es el tiempo que transcurre hasta que se da el primer evento de Poisson.

Es decir, la distribución exponencial puede modelar el lapso entre dos eventos consecutivos de Poisson que ocurren de manera independiente y a una frecuencia constante.

Distribución Exponencial

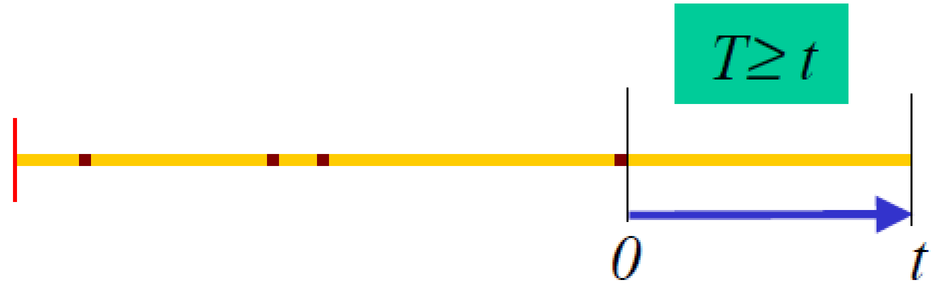


Ejemplo: Fabricación continua de conductor de cobre.

$\lambda \equiv$ Número medio de defectos cada 100 m

$T \equiv$ "Distancia entre dos defectos"

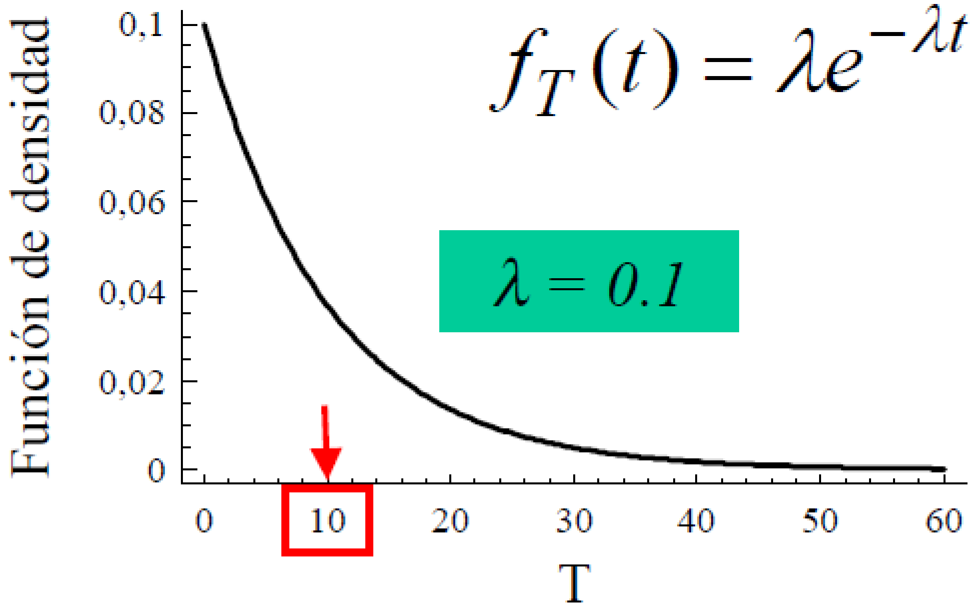
Distribución Exponencial



$$P(T \geq t) = P\{0 \text{ defectos en el intervalo } [0,\text{t})\}$$
$$= e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$
$$F_T(t) = P(T \leq t)$$
$$= 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Propiedades (Exponencial)



$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

$\lambda = 0.1$

$$E[T] = \int_{-\infty}^{\infty} t f_T(t) dt = \int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var[T] = E[T^2] - E[T]^2 = \int_0^{\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

5.2.2 Modelos de Variables aleatorias continuas
Exponencial

Definición: Sea X una variable aleatoria, tiene una distribución exponencial si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x;\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\exp(-x/\alpha), & x > 0, \quad \alpha > 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Se caracteriza por un parámetro α que representa el lapso promedio de tiempo entre dos eventos independiente de Poisson. Tal que:

$$\lambda = \frac{1}{\alpha}$$

$$\mu = \alpha$$

$$\sigma^2 = \alpha^2$$

5.2.2 Modelos de Variables aleatorias continuas
Exponencial

La función de distribución acumulativa $F(x)$ se obtiene directamente de los modelos de Weibull o de Erlang y está determinada por:

$$P(X \leq x) = F(x; \alpha) = 1 - \exp(-x/\alpha)$$

Posibilita la **propiedad de falta de memoria**.

Tema 5
Variables Aleatorias Continuas

5.2.3 Modelos de Variables Aleatorias Continuas

Distribución normal

5.2.3 Modelos de variables aleatorias continuas
Normal

La distribución normal o Gaussiana es la más usada y más importante, puesto que muchos estudios estadísticos tienden a esta distribución, que en apariencia es una curva simétrica en forma de campana que se extiende infinitamente a ambos lados, positivo y negativo de los reales.

5.2.3 Modelos de variables aleatorias continuas
Normal

Definición:

Sea X una variable aleatoria, se encuentra normalmente distribuida si su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma > 0 \end{array}$$

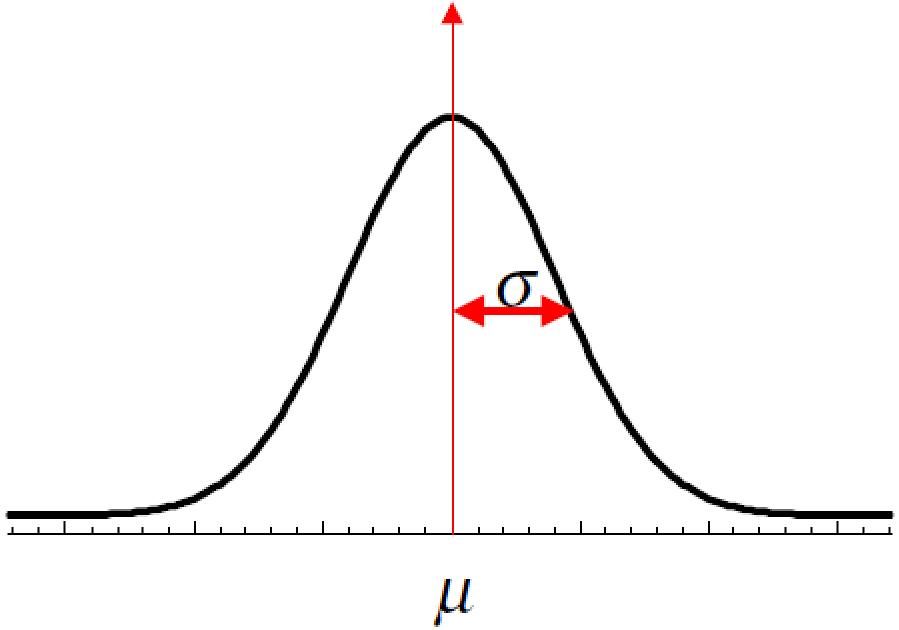
Los parámetros de la distribución normal son μ y σ, y determinan de manera completa la función de densidad de probabilidad. Estos parámetros son la media y la desviación estándar de *X*.

5.2.3 Modelos de variables aleatorias continuas
Normal

Para cualquier par de valores μ y σ, es simétrica y tiene forma de campana.

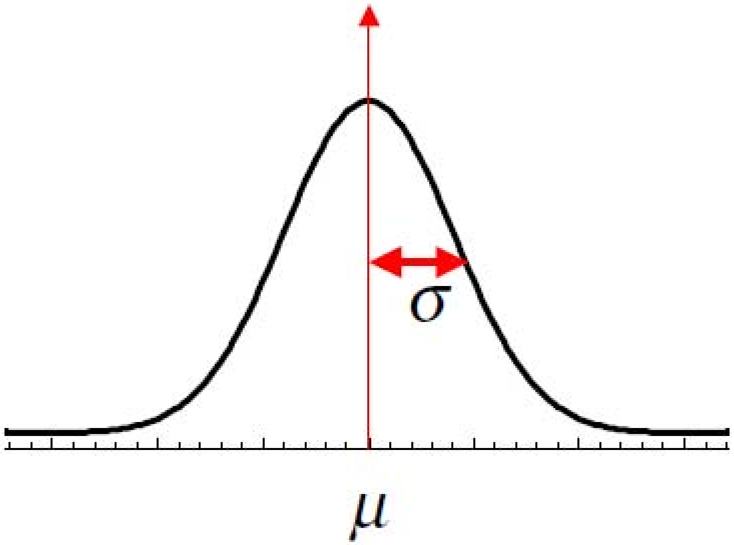
Si se obtienen las dos primeras derivadas de $f(x,\mu,\sigma)$ con respecto a x y se igualan a cero, se tiene que el valor máximo de $f(x,\mu,\sigma)$ ocurre cuando $x=\mu$, mientras que los valores $x=\mu\pm\sigma$ son las abcisas de los puntos de inflexión de la curva.

Distribución Normal
Campana de Gauss



$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad x \in \Re$$

Medidas Características



$$X \rightarrow N(\mu, \sigma)$$

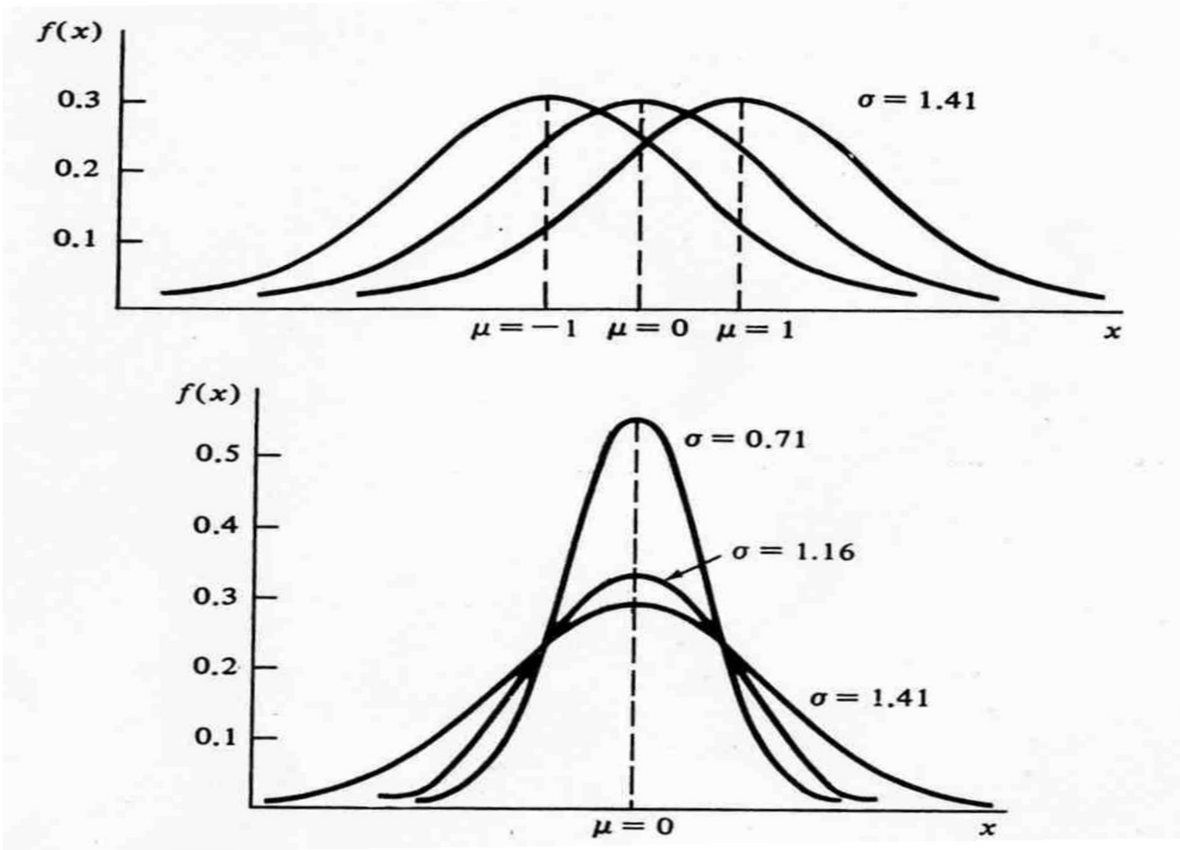
$$E[X] = \mu \qquad Var[X] = \sigma^2$$

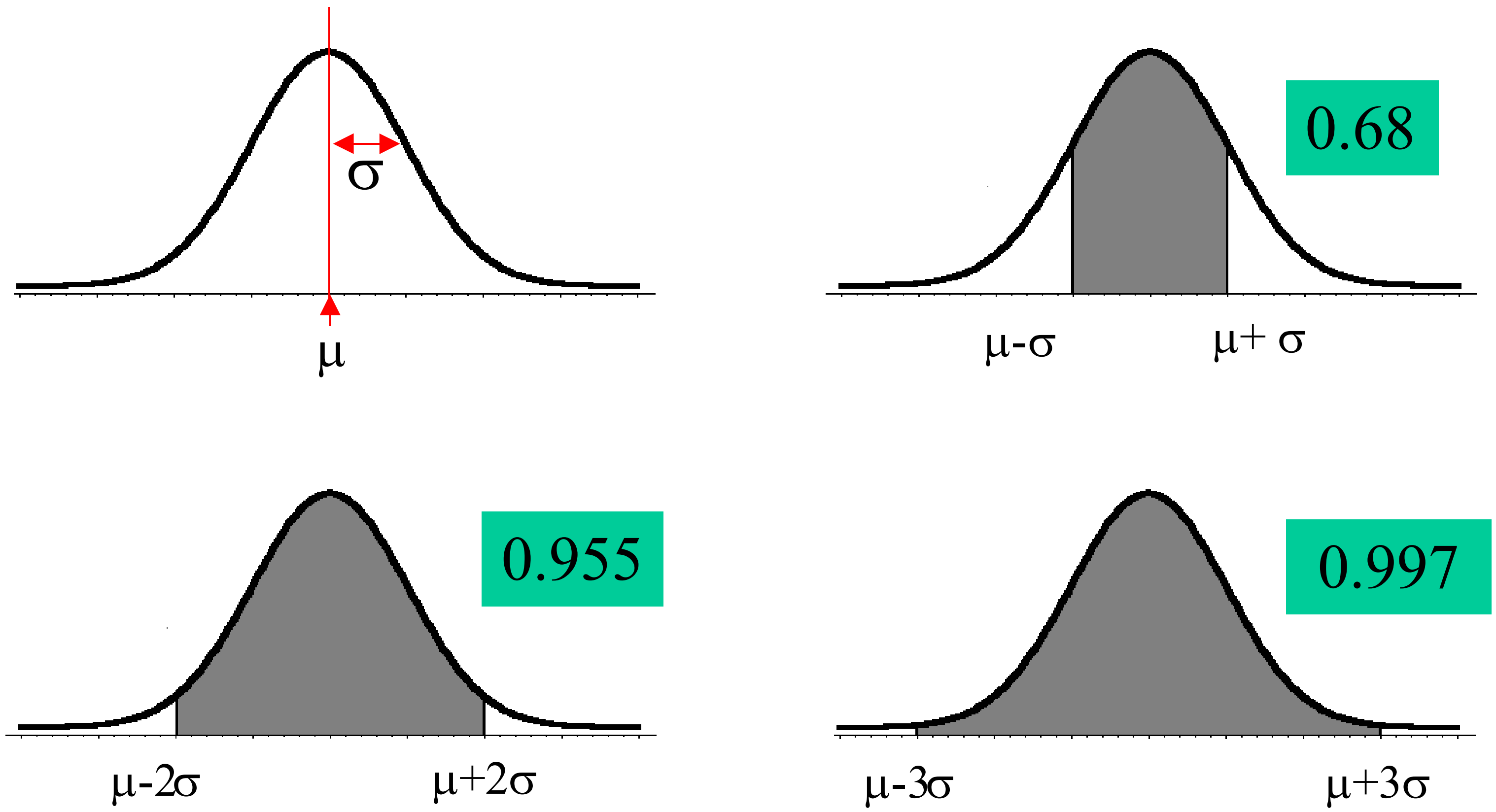
$$E[(X-\mu)^3] = 0 \qquad E[(X-\mu)^4] = 3\sigma^4$$

$$\text{Asimetría} = 0 \qquad \text{Curtosis} = 3.$$

5.2.3 Modelos de variables aleatorias continuas
Normal

En la siguiente figura se proporcionan varias gráficas para distintos valores de μ a σ fijo y viceversa.




σ
μ
0.68
μ-σ
μ+ σ
0.955
μ-2σ
μ+2σ
0.997
μ-3σ
μ+3σ

5.2.3 Modelos de variables aleatorias continuas
Normal

La probabilidad de que una variable aleatoria normalmente distribuida X sea menor o igual que un valor específico x, está dada por la función de distribución acumulativa:

$$P(X \leq x) = F(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} \exp\left[-(t-\mu)^2/2\sigma^2\right]dt$$

esta integral no puede evaluarse

5.2.3 Modelos de variables aleatorias continuas
Normal

La integral anterior no puede evaluarse de forma cerrada; sin embargo, se puede tabular $F(x;\mu,\sigma)$ mediante el empleo de la transformación: sea Z una variable aleatoria definida por:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

donde μ y σ son la media y la desviación estándar, así pues Z es una variable aleatoria estandarizada con media 0 y desviación estándar 1.

5.2.3 Modelos de variables aleatorias continuas
Normal

De esta manera la probabilidad queda:

$$P(X \le x) = P\left(Z \le (x-\mu)/\sigma\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} \exp(-z^2/2)(\sigma dz)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} \exp(-z^2/2)dz$$

que es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria normal estandarizada Z.

Esto es , si X se encuentra normalmente distribuida con media μ y desviación estándar σ, entonces $Z=(X-\mu)/\sigma$ también se encuentra normalmente distribuida con media cero y desviación estándar uno

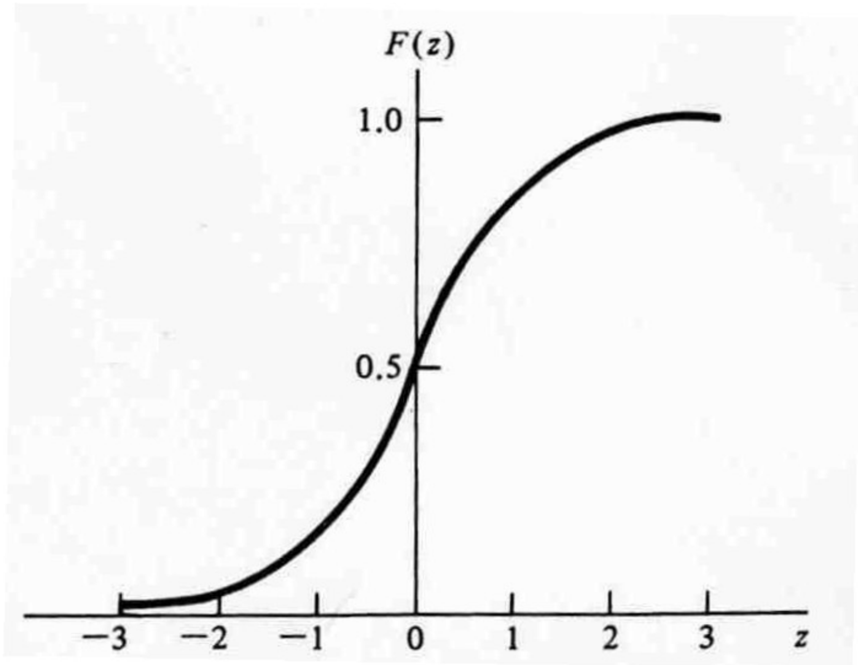
5.2.3 Modelos de variables aleatorias continuas
Normal

Por lo que, para

$$z = (x - \mu) / \sigma, \quad P(X \leq x) = P(Z \leq z)$$

$$F_X(x; \mu, \sigma) = F_Z(z; 0, 1)$$

donde $F_Z(z;0,1)$ es la función de distribución acumulativa de la función de probabilidad normal estandarizada



5.2.3 Modelos de variables aleatorias continuas
Normal

La función $F_Z(z;0,1)$ se encuentra tabulada para cualquier valor específico de z, y puede afirmarse que,

$$P(Z \leq z) = F_Z(z;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(z} \exp(-t^2/2)dt$$

Para la resolución de problemas se empleará ,

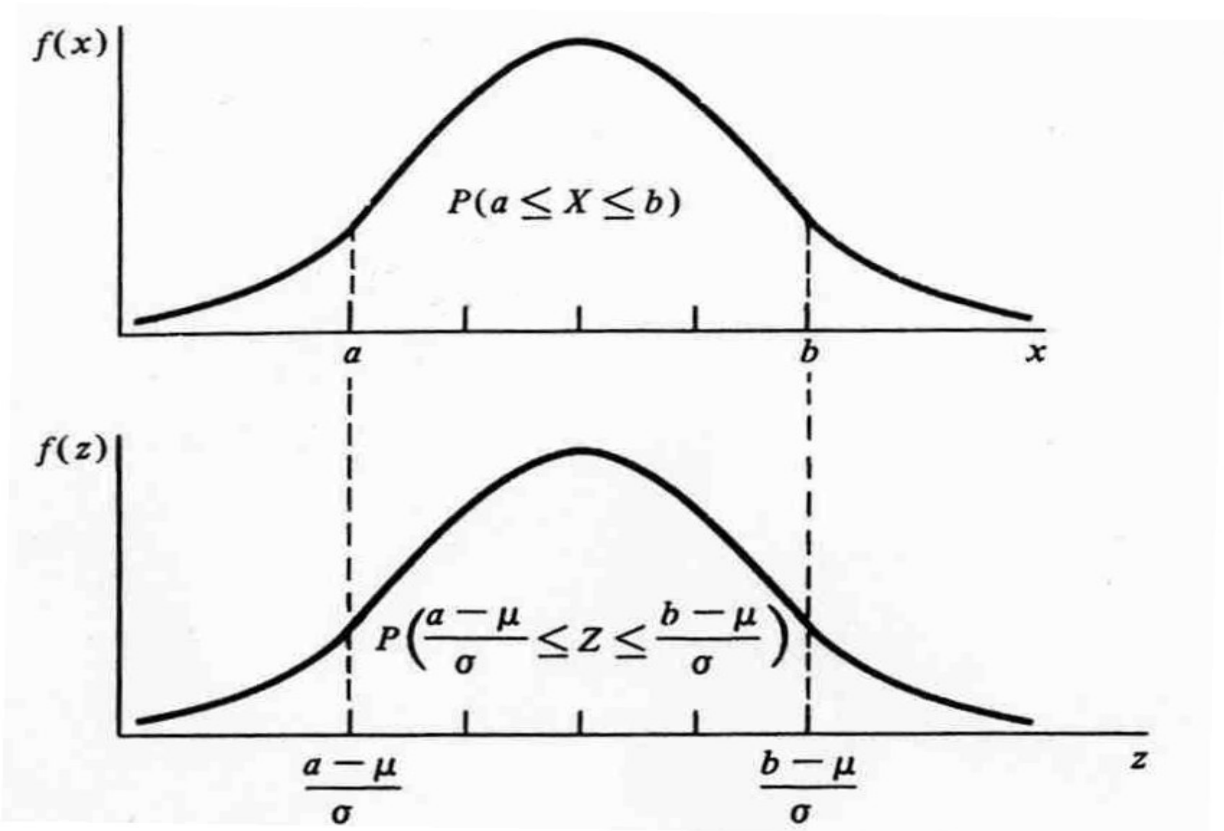
$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} \exp(-z^2/2)dz =$$

$$= F_Z\left(\frac{b-\mu}{\sigma};0,1\right) - F_Z\left(\frac{a-\mu}{\sigma};0,1\right)$$

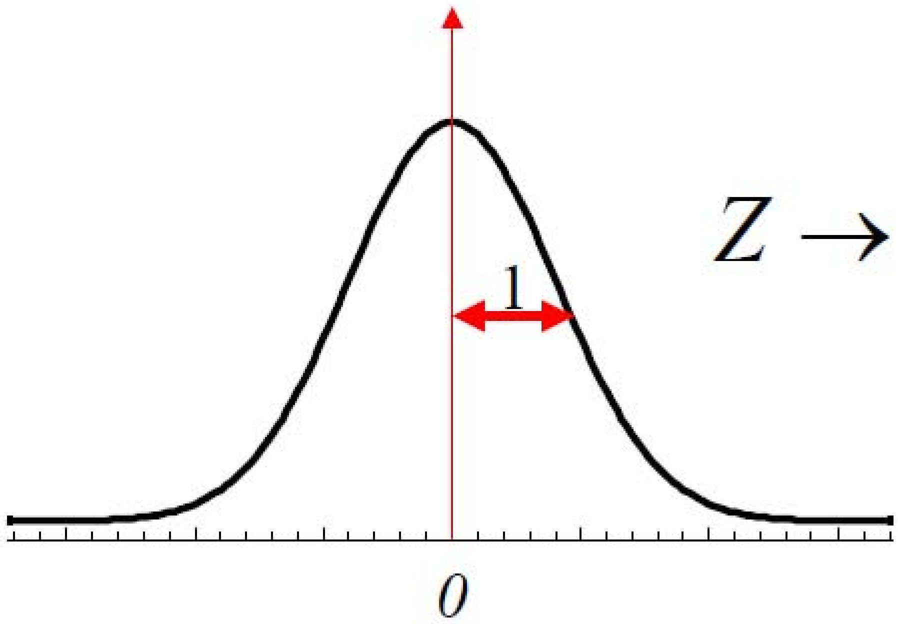
que es la probabilidad de que X se encuentre entre *a* y *b*.

5.2.3 Modelos de variables aleatorias continuas
Normal

Gráfica de correspondencia entre las probabilidades de X y de Z



Normal Estándar



$$Z \to N(0,1)$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad z \in \Re$$

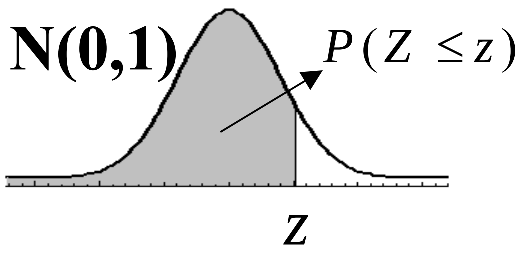
$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

↓

TABLAS

TABLA

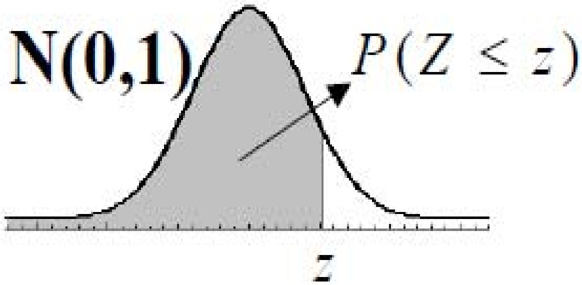
Normal Estandar



Ejemplo.

$P(Z \leq 1.96) = 0.9750$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0,1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0,2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0,3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0,4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0,5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0,6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0,7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0,8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0,9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1,0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1,1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1,2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1,3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1,4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1,5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1,6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1,7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1,8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1,9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2,0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2,1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2,2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2,3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2,4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2,5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2,6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2,7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2,8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2,9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3,0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3,1	.9990323	.9990645	.9990957	.9991259	.9991552	.9991836	.9992111	.9992377	.9992636	.9992886
3,2	.9993128	.9993363	.9993590	.9993810	.9994023	.9994229	.9994429	.9994622	.9994809	.9994990
3,3	.9995165	.9995335	.9995499	.9995657	.9995811	.9995959	.9996102	.9996241	.9996375	.9996505
3,4	.9996630	.9996751	.9996868	.9996982	.9997091	.9997197	.9997299	.9997397	.9997492	.9997584
3,5	.9997673	.9997759	.9997842	.9997922	.9997999	.9998073	.9998145	.9998215	.9998282	.9998346
3,6	.9998409	.9998469	.9998527	.9998583	.9998636	.9998688	.9998739	.9998787	.9998834	.9998878
3,7	.9998922	.9998963	.9999004	.9999042	.9999080	.9999116	.9999150	.9999184	.9999216	.9999247
3,8	.9999276	.9999305	.9999333	.9999359	.9999385	.9999409	.9999433	.9999456	.9999478	.9999499
3,9	.9999519	.9999538	.9999557	.9999575	.9999592	.9999609	.9999625	.9999640	.9999655	.9999669
4,0	.9999683	.9999696	.9999709	.9999721	.9999733	.9999744	.9999755	.9999765	.9999775	.9999784

Estandarización

$$X \rightarrow N(\mu,\sigma) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightarrow N(0,1)$$

$$P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$