Estadística

Tema 3 Probabilidad

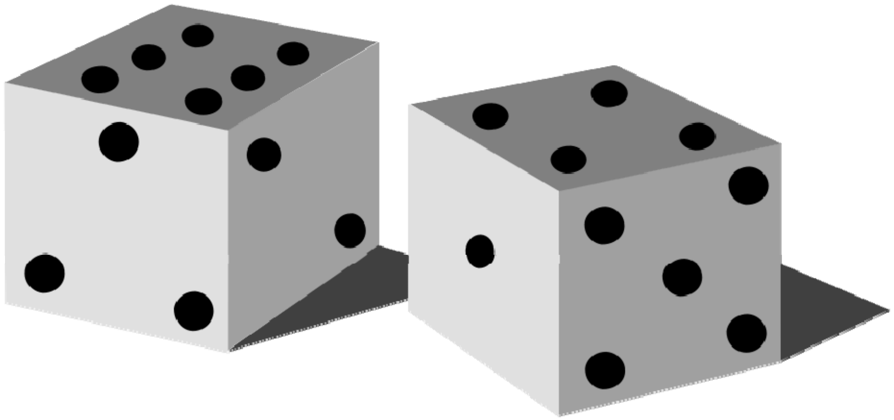
3.1 Introducción

Probabilidad

- Es un **mecanismo** por medio del cual pueden **estudiarse experimentos aleatorios**.

- Tiene un papel **crucial** en la aplicación de la **inferencia estadística**.

Experimento Aleatorio



El término "**experimento aleatorio**" se utiliza en la teoría de la probabilidad para referirse a un proceso cuyo resultado no es conocido de antemano con certeza.

"Suma de valores en el lanzamiento de 2 dados."

3.1 Introducción

La definición formal de probabilidad se basa en los conceptos elementales de la ***teoría de conjuntos*** (o *eventos*) y permite incorporar las distintas interpretaciones de la probabilidad.

La colección de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio es importante en la definición de probabilidad → **Espacio muestral**

3.1 Introducción

Espacio muestral

Se define el ***espacio muestral*** como el conjunto de todos los posibles resultados de un ***experimento aleatorio***.

Experimento aleatorio es aquel en el que en igualdad de condiciones, el resultado del experimento puede variar. El caso en el que el resultado es siempre el mismo se denomina ***experimento determinista***.

El conjunto de todos los posibles resultados puede ser finito, infinito numerable o infinito no numerable.

3.1 Introducción

Algunos conceptos entorno al espacio muestral:

Un espacio muestral es ***discreto*** si su resultado puede ponerse en una correspondencia uno a uno con el conjunto de los enteros positivos.

Un espacio muestral es ***continuo*** si sus resultados consisten de un intervalo de números reales.

3.1 Introducción

- **Y con respecto a sus resultados:**

Un ***evento*** *o* ***suceso*** del espacio muestral es un grupo de resultados contenidos en éste, cuyos miembros tienen una característica común.

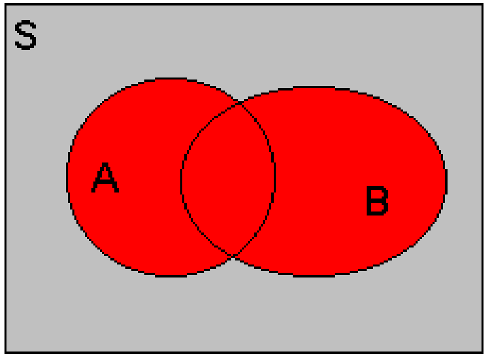
El evento que no contiene a ningún resultado del espacio muestral recibe el nombre de ***evento nulo*** o ***vacío***. Y el que los contiene a todos, el espacio muestral, se denomina ***suceso seguro***.

Operaciones con sucesos

Sean A y B dos sucesos de S

- Unión

$$A \cup B = \{x \in S : (x \in A) \textbf{ o } (x \in B)\}$$



$A \cup B$

Operaciones con sucesos

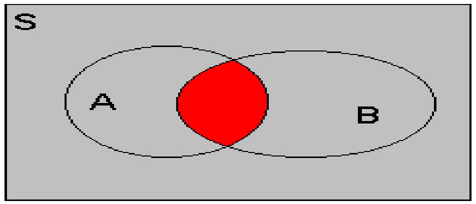
Sean A y B dos sucesos de S

- Unión

$$A \cup B = \{x \in S : (x \in A) \textbf{ o } (x \in B)\}$$

- Intersección

$$A \cap B = \{x \in S : (x \in A) \textbf{ y } (x \in B)\}$$



$A \cap B$

Operaciones con sucesos

Sean A y B dos sucesos de S

- Unión

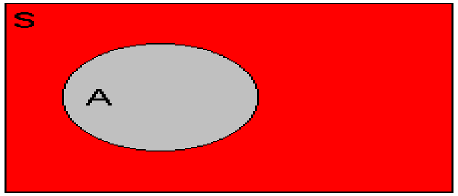
$$A \cup B = \{x \in S : (x \in A) \ \mathbf{o} \ (x \in B)\}$$

- Intersección

$$A \cap B = \{x \in S : (x \in A) \ \mathbf{y} \ (x \in B)\}$$

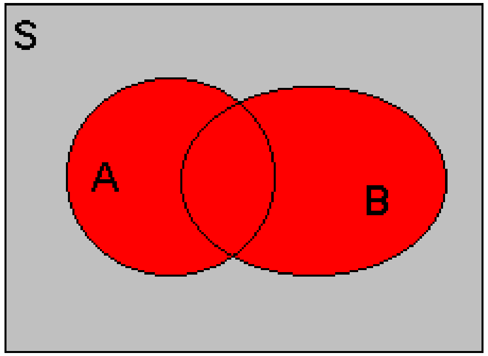
- Complementario

$$\overline{A} = \{x \in S : x \notin A\}$$

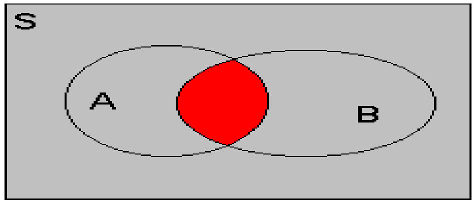


$\overline{A}$

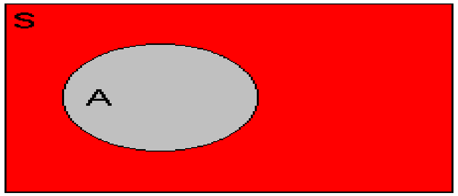
Diagramas de Venn



$A \cup B$



$A \cap B$



$\overline{A}$

Propiedades

Dados tres sucesos A,B y C de un espacio muestral S

$$\text{Conmutativa}: \begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$$

$$\text{Asociativa}: \begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$$

$$\text{Distributiva}: \begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

$$\text{Leyes de Morgan}: \begin{cases} \overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$$

3.1 Introducción

Probabilidad

Tres interpretaciones de la probabilidad:

- Clásica (Laplace, 1812): Equiprobabilidad
- Frecuencialista (von Mises, 1971). de frecuencia relativa
- Subjetiva.

3.1 Introducción
Definición clásica de probabilidad

Cuando en un determinado experimento aleatorio, los sucesos son igualmente probables (cada suceso elemental S_1, S_2,..., S_n, tiene la misma probabilidad de ocurrencia), entonces, si un suceso A puede expresarse como la unión de m sucesos elementales:

$$A = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m$$

$$P(A) = P(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m) = P(S_1) + P(S_2) + \ldots P(S_m) =$$

$$P(A) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{m}{n} = \frac{n^{o}\, casos\ favorables}{n^{o}\, casos\ posibles\,(totales)}$$

En este caso el cálculo de la probabilidad se denomina **Regla de Laplace**

3.1 Introducción

Definición de probabilidad como frecuencia relativa

En muchas situaciones, los posibles resultados de un experimento no son igualmente probables.

La interpretación de una ***frecuencia relativa*** se basa en la idea de que un experimento se efectúa y se repite muchas veces. Conforme aumenta la repetición del experimento, la frecuencia relativa de los resultados favorables se aproxima al verdadero valor de la probabilidad para ese atributo.

3.1 Introducción

Interpretación subjetiva de la probabilidad

La repetición de un experimento bajo las mismas condiciones es la base para las interpretaciones clásica y de frecuencia relativa de la probabilidad.

Muchos fenómenos no se prestan para repetición, pero a pesar de esto requieren de una noción de probabilidad. En éstos la interpretación de la probabilidad no puede tener su fundamento en la frecuencia de ocurrencia.

Esta interpretación de la probabilidad se conoce como *subjetiva o personal*.

Estadística

Tema 3 Probabilidad

3.2 Axiomas de la Probabilidad

3.2 Desarrollo axiomático de la probabilidad

La probabilidad es un número real que mide la posibilidad de que ocurra un resultado del espacio muestral, cuando el experimento se lleve a cabo.

Así, la probabilidad de un evento también es un número real que mide la posibilidad colectiva, de ocurrencia, de los resultados del evento cuando se lleve a efecto el experimento.

3.2 Axiomas de la Probabilidad

La probabilidad se define formalmente en base a ***axiomas*** (Kolmogorov, 1933):

Dado un espacio muestral S, una función de probabilidad asigna valores P(A) a cada suceso $A \subset S$ y satisface :

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Para una secuencia de sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que cumplen $A_i \cap A_j = \varnothing$ cuando $i \neq j$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Problema fundamental

- Dado un espacio muestral discreto con resultados $A_1, A_2, ..., A_n$, el experimento aleatorio queda caracterizado si asignamos un valor $P(A_i)$ no negativo a cada resultado A_i que verifique

$$P(A_1)+P(A_2)+ \ldots +P(A_n)=1.$$

- **Ejemplo**. Se lanza una moneda dos veces .

{XX,XC,CX,CC}

Se asigna probabilidad 1/4 a cada uno de los cuatro resultados.

¿ Es una asignación correcta?

Propiedades elementales

1. $P(\varnothing) = 0.$
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A).$
3. Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B).$
4. Para dos sucesos cualesquiera $A, B \subset S,$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

5. Para n sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset S,$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} P(A_i \cap A_j) +$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} \sum_{k>j}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

Estadística
Tema 3 Probabilidad

3.3 Probabilidad conjunta, marginal y condicionada

Probabilidad conjunta:

- Es la probabilidad de que dos sucesos o más se den simultáneamente.

$$P(A_i \cap B_j) = \frac{n_{ij}}{n}$$

3.3 Probabilidades conjunta, marginal y condicional

Probabilidad marginal: probabilidad que para determinarla se ignoran una o más características del espacio muestral. La probabilidad marginal de un evento $\boldsymbol{A_i}$ es igual a la suma de las probabilidades conjuntas de $\boldsymbol{A_i}$ y $\boldsymbol{B_j}$, donde la suma se efectúa sobre todos los eventos $\boldsymbol{B_j}$.

$$P(A_i) = \sum_{j=1}^{n} P(A_i \cap B_j)$$

De manera similar, la probabilidad marginal de $\boldsymbol{B_j}$ está dada por

$$P(B_j) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B_j)$$

Probabilidad Condicionada

Definición. Sea B un suceso con probabilidad distinta de cero, se define probabilidad del suceso A dado B a:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Utilidad de la probabilidad condicionada

- Actualizar probabilidad del suceso A en función de la información disponible I

$$P(A|I) = P(A \cap I)/P(I)$$

- Cálculo de la intersección de sucesos

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

- Cálculo de probabilidad de un suceso

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) \\ &= P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B}) \end{aligned}$$

3.3 Probabilidades conjunta, marginal y condicional

La probabilidad de realización del suceso ***B*** cuando el suceso ***A*** se presenta, se llama *probabilidad condicional* de ***B*** con respecto a ***A*** y viene dada por:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)};\quad P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$$

Si se tratase de la realización del suceso ***A*** cuando el suceso ***B*** se presenta, se llama probabilidad condicional de ***A*** con respecto a ***B*** y viene dada por:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)};\quad P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)$$

Propiedades de la probabilidad condicional:

1) $0 \leq P(B/A) \leq 1$

2) $P(S/A) = 1$

3) $P(B_1 \cup B_2)/A) = P(B_1/A) + P(B_2/A) \quad si \ B_1 \cap B_2 = \varnothing$

4) $P(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n/A) = P(B_1/A) + P(B_2/A) + \ldots + P(B_n/A) \quad si \ B_i \cap B_j = \varnothing$

3.3 Probabilidades conjunta, marginal y condicional

Probabilidad conjunta

De la definición de probabilidad condicionada se tiene la llamada ***regla multiplicativa***

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B);$$

La *probabilidad conjunta* o *compuesta* es igual a la *probabilidad condicionada* por la *probabilidad del condicionante*.

$$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

Estadística

Tema 3 Probabilidad

3.4 Independencia de sucesos

3.5 Teorema de Probabilidad total

3.6 Teorema de Bayes

3.4 Eventos estadísticamente independientes

Al considerar la probabilidad condicional de algún evento ***A***, dada la ocurrencia de otro evento ***B***, siempre se implica que las probabilidades de ***A*** y ***B*** son de alguna manera **dependientes** entre sí.

Dos sucesos ***A*** y ***B*** son **independientes** si:

$$P(A/B) = P(A)$$

por lo tanto la realización de ***B*** no afecta a la probabilidad de realización de ***A***.

Independencia

Si el conocimiento de la ocurrencia de un suceso B cambia la probabilidad de que ocurra otro A, se dice que A y B son **dependientes**, en ese caso $P(A|B) \neq P(A)$.

Cuando el suceso A es independiente de B, la ocurrencia de B no cambia la probabilidad de A, es decir $P(A|B) = P(A)$.

Como $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$,

$$\boxed{A \text{ y } B \textbf{ son independientes} \Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\,\mathrm{P}(\mathrm{B})}$$

Independencia (3 o más sucesos)

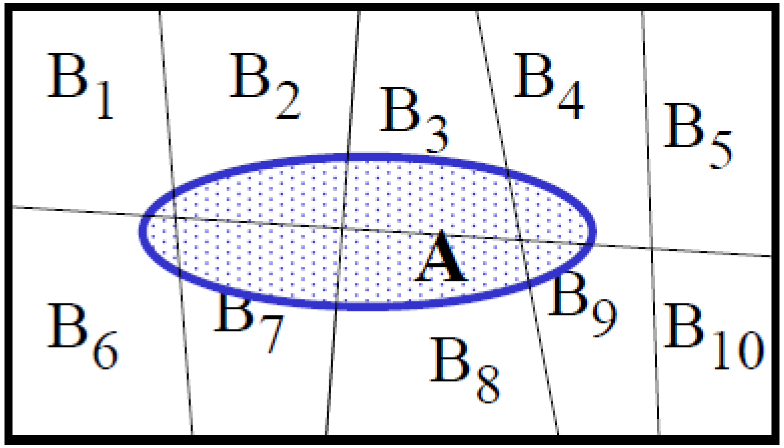
- Tres sucesos A, B y C son independientes si

$$\begin{cases} \bullet P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B)\, P(C) \\ \bullet P(A \cap B) = P(A)\, P(B) \\ \bullet P(A \cap C) = P(A)\, P(C) \\ \bullet P(B \cap C) = P(B)\, P(C) \end{cases}$$

- Los sucesos A_1 , A_2 , ..., A_n son independientes si cualquier subconjunto A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{ik}, cumple

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap .. \cap A_{ik}) = P(A_{i1}) P(A_{i2}) ... P(A_{ik})$$

Probabilidad Total



Partición.

$$B_1, B_2, \ldots, B_n : \quad B_j \subset S$$

$$B_i \cap B_j = \varnothing, \quad \forall i \neq j$$

$$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap S) \\ &= P[A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n)] \\ &= P[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)] \\ &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n) \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \cdots P(A \mid B_n)P(B_n)}$$

Teorema de Bayes

- Sea $B_1, B_2, \ldots, B_n$ una partición del espacio S tal que $P(B_j) > 0$, para $j = 1,2,\ldots,n$ y sea A cualquier suceso con $P(A) \neq 0$, entonces para cualquier B_i:

$$\boxed{P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}.}$$

Estadística
Tema 3 Probabilidad

Apéndice
Conteo

Apéndice
Conteo
Permutaciones y combinaciones.

Para calcular las probabilidades de varios eventos es necesario contar el número de resultados posibles de un experimento, o contar el número de resultados que son favorables a un evento dado.

El proceso de conteo puede simplificarse mediante el empleo de dos técnicas: *permutaciones, variaciones y combinaciones*.

Apéndice
Conteo
Permutaciones y combinaciones.

Una ***permutación*** es un arreglo en un orden particular, de los objetos que forman un conjunto. Si todos son distintos, se habla de ***permutaciones ordinarias***.

El producto de un entero positivo por todos los que le preceden se denota por *n!* y se lee *"n factorial"*.

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1)$$

$$n! = n(n-1)!$$

$$(n-1)! = n!/n$$

Apéndice
Conteo (3.46)

Permutaciones

Cuando tenemos un grupo de elementos a ordenar donde existen algunos de ellos repetidos (que no se pueden distinguir). Tal que hay n_1 del tipo 1, n_2 del tipo 2 y n_3 del tipo 3, entonces utilizamos las ***permutaciones con repetición*** para contar el total de casos posibles:

$$PR_n^{n_1, n_2, n_3} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!}$$

Apéndice
Conteo (3.47)

Variaciones

Si de n objetos sólo se quisiera ordenar s de ellos en una línea (importando el orden de selección), se dice que se están formando **variaciones** de n objetos tomando de s en s.

$$V_n^s = n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1) = \frac{n!}{(n-s)!}$$

Si todas las opciones se pueden escoger reiteradamente, se habla de ***variaciones con repetición***, cuyo número total viene dado por:

$$VR_n^s = n^s$$

Apéndice
Conteo

Permutaciones de n objetos, si únicamente $r \leq n$. El número de permutaciones de n objetos si se toma r a la vez es:

$$V_n^r = P(n,r)^* = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r-1) =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Si $r = n$ se reduce al resultado $P_n = P(n,n) = n!$

o el número de permutaciones de n objetos, tomando n a la vez, es $n!$.

Apéndice
Conteo (3.46)

Combinaciones

El número total de **combinaciones** de s objetos tomados de n (también llamadas las combinaciones de n cosas tomadas de s en s), donde no importa el orden, viene dada por:

$$C_n^s = \frac{V_n^s}{s!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)}{s!} = \frac{n!}{s!(n-s)!} = \binom{n}{s}$$

Apéndice
Conteo

Si todas las opciones se pueden escoger reiteradamente, se habla de ***combinaciones con repetición,*** cuyo número total viene dado por:

$$CR_n^s = C_{n+s-1}^s = \binom{n+s-1}{s}$$

Apéndice
Conteo

Una *combinación* de los objetos de un conjunto es una selección de éstos sin importar el orden.

La diferencia entre una *permutación* y una *combinación* es que en la primera el interés se centra en contar todas las posibles selecciones y todos los arreglos de éstas, mientras que en la segunda el interés sólo recae en contar el número de selecciones diferentes.

Combinatoria: Número posible de reordenaciones de n objetos tomados de r en r

	SIN REEMPLAZAM IENTO	CON REEMPLAZAM IENTO
IMPORTA ELORDEN	$\dfrac{n!}{(n-r)!}$	n^r
NO IMPORTA EL ORDEN	$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n+r-1 \\ r \end{pmatrix}$