Estadística
Curs 2015-2016/2
Grup M2 - Professor: Francesc Pozo

[Feu els Problemes en Fulls Separats]

Primer Parcial. 13/04/2016

1. [20 punts]

(a) Donats A i B dos esdeveniments independents, demostreu que els esdeveniments $\bar{A}$ i B també ho són.

Solució: La hipòtesi de partida és que A i B són independents, és a dir,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Volem veure que $\bar{A}$ i B també seran independents. Considerem la següent expressió per a B:

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}).$$

Aleshores,

$$P(B) = P((B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(B) \cdot P(A) + P(B \cap \bar{A})$$

Considerant la primera i la darrera expressió de la igualtat anterior, tenim que

$$\begin{aligned} P(B) = P(B) \cdot P(A) + P(B \cap \bar{A}) \;\; &\Leftrightarrow \;\; P(\bar{A} \cap B) = (1 - P(A))P(B) \\ &\Leftrightarrow \;\; P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P(B), \end{aligned}$$

que demostra el que volíem veure.

(b) Donats A i B dos esdeveniments independents tal que $P(A) = 0.5$ i $P(B|A) = 0.2$, calculeu $P(A \cup B)$.

Solució: Si A i B són independents tenim que $P(B|A) = P(B) = 0.2$. Aleshores,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= 0.5 + 0.2 - 0.5 \cdot 0.2 = 0.6 \end{aligned}$$

2. [20 punts] Tenim una pinya plantada a casa, que ja està una mica malalta. Marxem de vacances a les Illes Açores i li demanem al nostre veí que ens la regui mentres no hi som. La planta de la pinya morirà, si no es rega, amb un 80% de probabilitat. Si es rega, morirà amb una probabilitat del 15%. El nostre veí regarà la planta amb una probabilitat del 90%.

(a) Quina és la probabilitat que la planta de la pinya estigui viva quan tornem de vacances?

Solució: Definim els següents esdeveniments: $\mathcal{A}$ =“la pinya està viva quan tornem de vacances” i $\mathcal{W}$ =“el veí rega la planta de la pinya”. Ens demanen la probabilitat $P(\mathcal{A})$ que és, aplicant la fórmula de la probabilitat total, igual a

$$\begin{aligned} P(\mathcal{A}) &= P(\mathcal{A}|\mathcal{W})P(\mathcal{W}) + P(\mathcal{A}|\bar{\mathcal{W}})P(\bar{\mathcal{W}}) \\ &= 0.85 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.785 = 78.5\% \end{aligned}$$

(b) Si quan tornem de vacances la planta de la pinya està morta, quina és la probabilitat que el nostre veí s'hagi oblidat de regar-la?

Solució: Hem de calcular la probabilitat $P(\bar{\mathcal{W}}|\bar{\mathcal{A}})$, i ho farem aplicant el teorema de Bayes

$$\begin{aligned} P(\bar{\mathcal{W}}|\bar{\mathcal{A}}) &= \frac{P(\bar{\mathcal{A}}|\bar{\mathcal{W}})P(\bar{\mathcal{W}})}{P(\bar{\mathcal{A}})} \\ &= \frac{0.8 \cdot 0.1}{1 - 0.785} = 0.3720930233 \approx 37.21\% \end{aligned}$$

3. `[20 punts]` La durada en hores, H, d'un determinat tipus de bombeta és una variable aleatòria contínua que té la següent funció de densitat:

$$f_H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 100 \\ 100/x^2, & x > 100 \end{cases}$$

(a) Quina és la probabilitat que una d'aquestes bombetes, escollida a l'atzar, tingui una vida útil inferior a 150 hores de funcionament?

Solució: Hem de calcular la probabilitat $P(100 < H < 150)$, és a dir,

$$P(100 < H < 150) = \int_{100}^{150} f_H(x)dx = \int_{100}^{150} \frac{100}{x^2}dx = \left[\frac{-100}{x}\right]_{100}^{150} = \frac{-100}{150} + \frac{100}{100} = \frac{1}{3}$$

(b) Calculeu $E(H)$.

Solució: Aplicant la fórmula de l'esperança, tenim que

$$\begin{aligned} E(H) &= \int_{100}^{+\infty} x f_H(x)dx = \int_{100}^{+\infty} x\frac{100}{x^2}dx = \int_{100}^{+\infty} \frac{100}{x}dx \\ &= \lim_{b\to+\infty} [100\ln(x)]_{100}^{b} = \lim_{b\to+\infty} (100\ln(b) - 100\ln(100)) = +\infty \end{aligned}$$

És a dir, la integral impròpia és divergent i, per tant, la esperança no existeix.

(c) Considerem ara un conjunt de 5 d'aquestes bombetes. Quina és la probabilitat que exactament 2 d'aquestes 5 bombetes deixin de funcionar en les primeres 150 hores de funcionament?

Solució: Sigui X la variable aleatòria que compta el nombre de bombetes, d'entre les cinc, que deixa de funcionar en les primeres 150 hores de funcionament. La variable X així definida segueix una distribució binomial de paràmetres $n = 5$ i $p = 1/3$ (calculat a l'apartat (a)), és a dir,

$$X \hookrightarrow B(5, 1/3).$$

Aleshores,

$$P(X = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243} = 0.3292181070 \approx 32.92\%$$

(d) Si considerem ara un conjunt de 9 d'aquestes bombetes, quin és el valor esperat de bombetes que deixaran de funcionar durant les primeres 150 hores d'operació?

Solució: Sigui Y la variable aleatòria que compta el nombre de bombetes, d'entre les nou, que deixa de funcionar en les primeres 150 hores de funcionament. La variable Y així definida segueix una distribució binomial de paràmetres $n = 9$ i $p = 1/3$, és a dir,

$$Y \hookrightarrow B(9, 1/3).$$

El valor esperat de bombetes que deixaran de funcionar és

$$E(Y) = np = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3.$$

4. `[20 punts]` L'alçada d'una dona adulta als Estats Units es distribueix normalment amb una mitjana $\mu = 164$ cm i una desviació tipus de $\sigma = 6$ cm.

(a) Quina és la probabilitat que una dona adulta escollida a l'atzar tingui una alçada superior o igual a 157.88 cm?

Solució: Sigui X la variable aleatòria contínua que mesura l'alçada d'una dona adulta als Estats Units. Aquesta variable segueix aquesta distribució:

$$X \hookrightarrow N(164, 6).$$

Hem de calcular $P(X > 157.88)$ i ho farem tipificant, és a dir,

$$P(X > 157.88) = P\left(\frac{X - 164}{6} > \frac{157.88 - 164}{6}\right) = P(Z > -1.02),$$

on ara $Z \hookrightarrow N(0,1)$. Aleshores,

$$P(Z > -1.02) = P(Z < 1.02) = 0.84613$$

Si aquest últim valor el calculem amb R fent servir la comanda `pnorm(1.02)` obtenim el resultat 0.8461358.

(b) Quina és la probabilitat que una dona adulta escollida a l'atzar tingui una alçada superior o igual a 170.96 cm?

SOLUCIÓ: Hem de calcular $P(X > 170.96)$ i ho farem tipificant, és a dir,

$$P(X > 170.96) = P\left(\frac{X - 164}{6} > \frac{170.96 - 164}{6}\right) = P(Z > 1.16),$$

on ara $Z \hookrightarrow N(0,1)$. Aleshores,

$$P(Z > 1.16) = 1 - P(Z \leq 1.16) = 1 - 0.87697 = 0.12303$$

Si aquest últim valor el calculem amb R fent servir la comanda `1-pnorm(1.16)` obtenim el resultat 0.1230244.

(c) Considerem ara que l'alçada d'una dona adulta a Mèxic es distribueix normalment amb una mitjana $\mu = 156$ cm i una desviació tipus de $\sigma = 4$ cm. Qui seria relativament més alta, una dona americana de 180 cm o una dona mexicana de 168 cm? Justifiqueu la vostra resposta.

SOLUCIÓ: La noia que serà relativament més alta serà aquella que tingui el major valor tipificat. En efecte, si $x_A = 180$ i $x_M = 168$, tenim que

$$\begin{aligned} z_A &= \frac{x_A - 164}{6} = \frac{180 - 164}{6} = \frac{8}{3} \approx 2.67 \\ z_M &= \frac{x_M - 156}{4} = \frac{168 - 156}{4} = 3 \end{aligned}$$

Donat que $z_M > z_A$, la dona mexicana és, relativament, més alta.

5. `[20 punts]` El nombre de vegades que una persona es refreda en un any és una variable aleatòria discreta que es distribueix com una Poisson de paràmetre $\lambda = 3$. Ha sortit un nou fàrmac al mercat que millora la resistència al refredat per al 75% de la població, ja que la distribució de Poisson passa a tenir paràmetre $\lambda = 2$. Per a la resta de la població, el medicament no té cap efecte. Sabem també que la probabilitat que una persona escollida a l'atzar prengui el medicament és $1/3$.

(a) Si una persona no pren el medicament, quina és la probabilitat que no es refredi cap vegada en un any?

SOLUCIÓ: Sigui X la variable aleatòria discreta que mesura els refredats d'una persona i sigui $\mathcal{M}$ l'esdeveniment "una persona pren el medicament" i $\mathcal{F}$ l'esdeveniment "el medicament és efectiu". Aleshores, si una persona no pren el medicament, la probabilitat que no es refredi cap vegada en un any és

$$P(X = 0|\bar{\mathcal{M}}) = P(X_3 = 0) = e^{-3}\frac{3^0}{0!} = e^{-3} \approx 0.04978706837 \approx 4.98\%,$$

on $X_3 \hookrightarrow \mathcal{P}(3)$.

(b) Si una persona pren el medicament, quina és la probabilitat que no es refredi cap vegada en un any?

SOLUCIÓ: Si una persona pren el medicament, la probabilitat que no es refredi cap vegada en un any és

$$\begin{aligned} P(X = 0|\mathcal{M}) &= P(X = 0|\mathcal{F})P(\mathcal{F}) + P(X = 0|\bar{\mathcal{F}})P(\bar{\mathcal{F}}) \\ &= P(X_2 = 0)P(\mathcal{F}) + P(X_3 = 0)P(\bar{\mathcal{F}}) \\ &= e^{-2}\frac{2^0}{0!} \cdot 0.75 + e^{-3}\frac{3^0}{0!} \cdot 0.25 = \frac{3}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}e^{-3} \approx 0.1139482295 \approx 11.39\%, \end{aligned}$$

on $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$

(c) Quina és la probabilitat que una persona, escollida a l'atzar, no es refredi cap vegada en un any?

SOLUCIÓ: Aplicarem la fórmula de la probabilitat total. En efecte,

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(X=0|\mathcal{M})P(\mathcal{M}) + P(X=0|\bar{\mathcal{M}})P(\bar{\mathcal{M}}) \\ &= \left(\frac{3}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}e^{-3}\right)\cdot\frac{1}{3} + e^{-3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{4}e^{-2} + \frac{3}{4}e^{-3} \approx 0.07117412208 \approx 7.12\% \end{aligned}$$