МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.Ломоносова
механико-математический факультет

Практикум на ЭВМ
Решение задачи оптимального управления

Отчет
студента 4-го курса 422-ой группы
кафедры теоретической механики и мехатроники
Елфимова Никиты Сергеевича

Преподаватель
ассистент кафедры вычислительной математики
Самохин Александр Сергеевич

Москва, 2021 г.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления:

$$\int\limits_0^T \left(\ddot{x}^2 - \dot{x}^2 - x^2\right)\, dt \to extr,$$
$$x(0) = x(T) = 0,\ \dot{x}(0) = 0,\ |\ddot{x}| \le 1, \quad T = \{0.1; 1.0; 10.0; 20.0\}, \tag{1.1}$$

в которой отрезок времени фиксирован и выбирается из конечного множества.

Для данной задачи необходимо:

- формализовать задачу как задачу оптимального управления;
- свести задачу к краевой задачи с помощью принципа максимума Понтрягина;
- численно и аналитически решить полученную краевую задачу и сравнить результаты этих решений;

2. Формализация задачи

Для формализации задачи (1.1) положим $\dot{x} = y, \dot{y} = u$. Тогда

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \\ u \in [-1, 1], \\ x(0) = 0, \\ x(T) = 0, \\ y(0) = 0, \\ T = const \in \{0.1; 1.0; 10.0; 20.0\}, \\ B_0 = \int\limits_0^T \left(u^2 - y^2 - x^2\right)\, dt \to extr, \end{cases} \tag{2.1}$$

3. Принцип максимума

Функции Лагранжа и Понтрягина имеют вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \int\limits_0^1 L dt + l, \\
L &= \lambda_0(u^2 - y^2 - x^2) + p_x(\dot{x} - y) + p_y(\dot{y} - u), \\
l &= \lambda_1 x(0) + \lambda_2 x(T) + \lambda_3 y(0), \\
H &= p_x y + p_y u - \lambda_0(u^2 - y^2 - x^2).
\end{aligned}$$

Применим к задаче (2.1) принцип максимума Понтрягина. Необходимые условия оптимальности:

1. **Уравнения Эйлера-Лагранжа:**

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -2\lambda_0 x, \\ \dot{p}_y = -\dfrac{\partial H}{\partial y} = -p_x - 2\lambda_0 y. \end{cases}$$

2. **Условие оптимальности по управлению:** так как $\lambda_0 > 0$ (см. ниже), то

$$u = \arg\max_{u\in[-1,1]} H(u) = \arg\max_{u\in[-1,1]} \left(p_y u - \lambda_0(u^2 - y^2 - x^2)\right) = \begin{cases} \frac{p_y}{2\lambda_0}, \text{ if } \frac{p_y}{2\lambda_0} \in [-1,1], \\ 1, \text{ if } \frac{p_y}{2\lambda_0} > 1, \\ -1, \text{ if } \frac{p_y}{2\lambda_0} < -1. \end{cases}$$

3. **Условие трансверсальности:** $p_x(t_k) = (-1)^k \dfrac{\partial l}{\partial x(t_k)},\ p_y(t_k) = (-1)^k \dfrac{\partial l}{\partial y(t_k)}$.

   При $k \in \{0,1\},\ t_0 = 0,\ t_1 = T$ имеем:

$$p_x(0) = \lambda_1, \quad p_x(1) = \lambda_2, \tag{3.1}$$
$$p_y(0) = \lambda_3, \quad p_y(1) = 0. \tag{3.2}$$

4. **Условия стационарности:** отсутствуют, так как в задаче (2.1) t_k — известные константы.

5. **Условия дополняющей нежесткости:** отсутствуют, так как в задаче (2.1) нет условий вида "меньше или равно".

6. **Условие неотрицательности:** $\lambda_0 \geq 0$.

7. **Условие нормировки:** множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного множителя.

8. **НЕРОН:** множители Лагранжа НЕ Равны Одновременно Нулю.

4. Анормальный случай

Докажем, что анормальный случай ($\lambda_0 = 0$) невозможен в предположениях 1-8 предыдущего раздела.

В самом деле, пусть $\lambda_0 = 0$. Тогда согласно условию 2: $u = \arg\max\limits_{u\in[-1,1]} H(u) = \arg\max\limits_{u\in[-1,1]} (p_x y + p_y u) = 1$. Тогда задача примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 1, \\ \dot{p}_x = 0, \\ \dot{p}_y = -p_x - y, \\ x(0) = 0, \\ x(T) = 0, \\ y(0) = 0, \\ p_y(T) = 0. \end{cases}$$

Тогда $y(t) = t + A$, $A = const$ и $x(t) = \frac{t^2}{2} + At + B$. Воспользуемся начальными условиями: $y(0) = A = 0,\ x(0) = B = 0$. Тогда $x(t) = \frac{t^2}{2}$, но при $t = T:\ x(T) = \frac{T^2}{2} = 0$. Получили противоречие.

5. Краевая задача

Так как функция Лагранжа является однородной по множителям Лагранжа, то можно выбрать условие нормировки $\lambda_0 = \dfrac{1}{2}$. Тогда из условия 2 раздела 3 определяется управление:

$$u = p_y = \begin{cases} p_y, \text{ if } p_y \in [-1, 1], \\ 1, \text{ if } p_y > 1, \\ -1, \text{ if } p_y < -1. \end{cases}.$$

Тогда задача оптимального управления (2.1) сводится к краевой задаче

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \begin{cases} p_y, \text{ if } p_y \in [-1,1], \\ 1, \text{ if } p_y > 1, \\ -1, \text{ if } p_y < -1, \end{cases}, \\ \dot{p_x} = -x, \\ \dot{p_y} = -p_x - y, \\ x(0) = 0, \\ x(T) = 0, \\ y(0) = 0, \\ p_x(0) = \lambda_1, \\ p_x(T) = -\lambda_2, \\ p_y(0) = \lambda_3, \\ p_y(T) = 0, \end{cases} \qquad t \in [0,T] \tag{5.1}$$

$T = const \in \{0.1; 1; 10; 20\}$.

6. Выбор вычислительной схемы

Для решения краевой задачи (5.1) используем метод стрельбы.
Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и $\alpha = \alpha^0$ – заданный вектор.
С помощью метода Рунге-Кутты 8-го порядка, основанном на формулах Дормана-Принса 8(7) DOPRI8, с автоматическим выбором шага (см. раздел 7) найдем решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \begin{cases} p_y, \text{ if } p_y \in [-1,1], \\ 1, \text{ if } p_y > 1, \\ -1, \text{ if } p_y < -1, \end{cases}, \\ \dot{p_x} = -x, \\ \dot{p_y} = -p_x - y, \\ x(0) = 0, \\ y(0) = 0, \\ p_x(0) = \alpha_1, \\ p_y(0) = \alpha_2, \end{cases} \qquad t \in [0,T]. \tag{6.1}$$

Положим $X = X(\alpha) = \begin{pmatrix} x(T) \\ p_y(T) \end{pmatrix}$ – вектор-функция невязок. Пусть $\varepsilon = 10^{-8}$. Если $\|X(\alpha)\| < \varepsilon$, то решение задачи Коши (6.1) $(x(t), y(t), p_x(t), p_y(t))$ является приближенным решением краевой задачи (5.1). Если же $\|X(\alpha)\| \geq \varepsilon$, то сначала находим α^1, решая систему линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами:

$$X'(\alpha) \cdot (\alpha^1 - \alpha) = X(\alpha), \quad X'(\alpha) = \left(\frac{\partial X_i}{\partial \alpha_j}(\alpha) \right)_{i,j}, \tag{6.2}$$

затем повторяем процедуру, описанную выше, при $\alpha := \alpha^1$.

Замечание 6.1. *Описанный итерационный процесс называют методом Ньютона[2, стр. 129-133].*

Замечание 6.2. *Для решения системы* (6.2) *использовался метод Крамера.*

7. Тест решения задачи Коши – гармонический осциллятор

7.1. Метод Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad x \in [x_0, X]. \tag{7.1}$$

Обозначим через $\widetilde{y}(x)$ аналитическое решение данной задачи.

Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $a_{21}, a_{31}, a_{32}, \ldots, a_{s1}, \ldots, a_{s,s-1}, b_1, \ldots, b_s, c_2, \ldots, c_s$ – вещественные коэффициенты. Для вычисления $y_1 = y(x_1)$ используем методом Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага:

$$\begin{aligned}
&k_1 = f(x_0, y_0), \\
&k_2 = f(x_0 + c_2 h, y_0 + h a_{21} k_1), \\
&\ldots \\
&k_s = f(x_0 + c_s h, y_0 + h(a_{s1} k_1 + \ldots + a_{s,s-1} k_s)), \\
&y_1 = y_0 + h(b_1 k_1 + \ldots + b_s k_s), \\
&\widehat{y} = y_0 + h(\widehat{b}_1 k_1 + \ldots + \widehat{b}_s k_s), \quad err_k = dist(y_k, \widehat{y}_k).
\end{aligned}$$

В случае $s = 7$ числовые значения коэффициентов $a_{21}, a_{31}, a_{32}, \ldots, a_{71}, \ldots, a_{76}, b_1, \ldots, b_7$, $c_2, \ldots, c_7, \widehat{b}_1, \ldots, \widehat{b}_7$ приведены в [1, Глава II, Таблица 4.6]. Выбираем новую длину шага по формуле

$$h_{new} = h \cdot \min(facmax, \max(facmin, fac \cdot (tol/err_k)^{\frac{1}{6}})),$$

где $facmax = 1.5, facmin = 0.7, fac = 0.9$. Тогда, если $err_k \leq tol$, то шаг считается принятым. Иначе шаг отбрасывается, и вычисления повторяются с новой длиной шага h_{new}.

7.2. Гармонический осциллятор

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad t \in [0, T]. \tag{7.2}$$

Аналитическое решение задачи (7.2) записывается в виде периодических функций

$$\begin{cases} \widetilde{x}(t) = \sin(t) \\ \widetilde{y}(t) = \cos(t) \end{cases}.$$

Определим числа Рунге

$$R_x = \frac{x_{10^{-8}} - x_{10^{-10}}}{x_{10^{-10}} - x_{10^{-12}}}, \quad R_y = \frac{y_{10^{-8}} - y_{10^{-10}}}{y_{10^{-10}} - y_{10^{-12}}}, \text{где}$$

$x_{10^{-k}} = x(T), y_{10^{-k}} = y(T)$ при $tol = 10^{-k}$. Определим глобальную погрешность

$$\delta_{k+1} = err_k + \delta_k e^{L_k}, \quad \delta_0 = 0,$$

где $L_k = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} l(s)ds$ при $l(s)$ – спектральный радиус матрицы $\frac{J + J^T}{2}$, J – матрица Якоби функции f в момент $t = s$. Для гармонического осциллятора имеем $\frac{J + J^T}{2} = 0$, тогда

$$\delta_{k+1} = err_k + \delta_k.$$

Пусть $\Delta x(\cdot) = \max |x(t_k) - \widetilde{x}(t_k)|$ и $\Delta y(\cdot) = \max |y(t_k) - \widetilde{y}(t_k)|$, где k – номер принятого шаг.

Далее приводятся результаты вычислений, когда начальная длина шага h равна 10^{-3}.

T	tol	$steps$	$\lvert x(T)-\widetilde{x}(T)\rvert$	$\lvert y(T)-\widetilde{y}(T)\rvert$	$\Delta x(\cdot)$	$\Delta y(\cdot)$	$\delta_K(T)$	R_x	R_y
π	10^{-8}	14	$4.1\cdot10^{-7}$	$8.7\cdot10^{-7}$	$6.4\cdot10^{-7}$	$8.7\cdot10^{-7}$	$3.6\cdot10^{-8}$	197.1	75.7
	10^{-10}	30	$2.1\cdot10^{-9}$	$1.1\cdot10^{-8}$	$7.2\cdot10^{-9}$	$1.1\cdot10^{-8}$	$1.1\cdot10^{-9}$		
	10^{-12}	74	$8.8\cdot10^{-12}$	$1.2\cdot10^{-10}$	$7.1\cdot10^{-11}$	$1.2\cdot10^{-10}$	$2.9\cdot10^{-11}$		
10π	10^{-8}	120	$5.2\cdot10^{-6}$	$1.0\cdot10^{-5}$	$1.1\cdot10^{-5}$	$1.0\cdot10^{-5}$	$4.5\cdot10^{-7}$	241.8	91.3
	10^{-10}	296	$2.1\cdot10^{-8}$	$1.1\cdot10^{-7}$	$1.1\cdot10^{-7}$	$1.1\cdot10^{-7}$	$1.1\cdot10^{-8}$		
	10^{-12}	742	$8.7\cdot10^{-11}$	$1.1\cdot10^{-9}$	$1.1\cdot10^{-9}$	$1.1\cdot10^{-9}$	$2.8\cdot10^{-10}$		
$10^2\pi$	10^{-8}	1177	$5.3\cdot10^{-5}$	$1.0\cdot10^{-4}$	$1.2\cdot10^{-4}$	$1.2\cdot10^{-4}$	$4.5\cdot10^{-6}$	245.9	92.7
	10^{-10}	2953	$2.1\cdot10^{-7}$	$1.1\cdot10^{-6}$	$1.1\cdot10^{-6}$	$1.1\cdot10^{-6}$	$1.1\cdot10^{-7}$		
	10^{-12}	7417	$8.7\cdot10^{-10}$	$1.1\cdot10^{-8}$	$1.1\cdot10^{-8}$	$1.1\cdot10^{-8}$	$2.8\cdot10^{-9}$		
$10^3\pi$	10^{-8}	11756	$5.3\cdot10^{-4}$	$1.0\cdot10^{-3}$	$1.2\cdot10^{-3}$	$1.2\cdot10^{-3}$	$4.5\cdot10^{-5}$	246.2	92.9
	10^{-10}	29526	$2.1\cdot10^{-6}$	$1.1\cdot10^{-5}$	$1.2\cdot10^{-5}$	$1.1\cdot10^{-5}$	$1.1\cdot10^{-6}$		
	10^{-12}	74172	$8.7\cdot10^{-9}$	$1.1\cdot10^{-7}$	$1.1\cdot10^{-7}$	$1.1\cdot10^{-7}$	$2.8\cdot10^{-8}$		
$10^4\pi$	10^{-8}	117422	$5.3\cdot10^{-3}$	$1.0\cdot10^{-2}$	$1.2\cdot10^{-2}$	$1.2\cdot10^{-2}$	$4.5\cdot10^{-4}$	245.2	92.9
	10^{-10}	295247	$2.1\cdot10^{-5}$	$1.1\cdot10^{-4}$	$1.2\cdot10^{-4}$	$1.2\cdot10^{-4}$	$1.1\cdot10^{-5}$		
	10^{-12}	741717	$8.7\cdot10^{-8}$	$1.1\cdot10^{-6}$	$1.1\cdot10^{-6}$	$1.1\cdot10^{-6}$	$2.8\cdot10^{-7}$		
$10^5\pi$	10^{-8}	1162213	$5.1\cdot10^{-2}$	$1.1\cdot10^{-1}$	$1.2\cdot10^{-1}$	$1.2\cdot10^{-1}$	$4.5\cdot10^{-3}$	234.8	93.9
	10^{-10}	2952151	$2.1\cdot10^{-4}$	$1.1\cdot10^{-3}$	$1.2\cdot10^{-3}$	$1.2\cdot10^{-3}$	$1.1\cdot10^{-4}$		
	10^{-12}	7417157	$8.3\cdot10^{-7}$	$1.1\cdot10^{-5}$	$1.1\cdot10^{-5}$	$1.1\cdot10^{-5}$	$2.8\cdot10^{-6}$		
$10^6\pi$	10^{-8}	9464585	$1.8\cdot10^{-4}$	$9.9\cdot10^{-1}$	$1.0\cdot10^{0}$	$1.0\cdot10^{0}$	$3.6\cdot10^{-2}$	1.1	84.4
	10^{-10}	29490014	$2.1\cdot10^{-3}$	$1.1\cdot10^{-2}$	$1.2\cdot10^{-2}$	$1.2\cdot10^{-2}$	$1.1\cdot10^{-3}$		
	10^{-12}	74170768	$6.1\cdot10^{-6}$	$1.1\cdot10^{-4}$	$1.1\cdot10^{-4}$	$1.1\cdot10^{-4}$	$2.8\cdot10^{-5}$		

8. Численное решение

Для вычисления интеграла B_0 рассмотрим функцию

$$S(t)=\int\limits_0^T\left(u^2-y^2-x^2\right)\,ds=\int\limits_0^T\left(p_y(s)^2-y(s)^2-x(s)^2\right)\,ds.$$

Тогда, решая краевую задачу

$$
\begin{cases}
\dot{x} = y, \\
\dot{y} = \begin{cases} p_y, \text{ if } p_y \in [-1, 1], \\ 1, \text{ if } p_y > 1, \\ -1, \text{ if } p_y < -1, \end{cases} , \\
\dot{p_x} = -x, \\
\dot{p_y} = -p_x - y, \\
\dot{S} = \dot{y}^2 - y^2 - x^2, \qquad x(0) = 0, \qquad t \in [0, T] \\
x(T) = 0, \\
y(0) = 0, \\
p_x(0) = \lambda_1, \\
p_x(T) = -\lambda_2, \\
p_y(0) = \lambda_3, \\
p_y(T) = 0,
\end{cases} \tag{8.1}
$$

найдем $S(T) = B_0$.

Ниже изображена таблица с параметрами пристрелки и соответствующими значениями функционала.

T	$p_x(0)$	$p_y(0)$	B_0
0.1	$-2.181405 \cdot 10^{-21}$	$-1.056303 \cdot 10^{-22}$	$3.981775 \cdot 10^{-46}$
1	$1.778736 \cdot 10^{-21}$	$1.480440 \cdot 10^{-21}$	$3.607620 \cdot 10^{-43}$
10	-29.63427	-88.01882	-358.3097
20	-233.4462	-1335.591	-10794.13

Изображу графики компонентов векторных полей от времени:

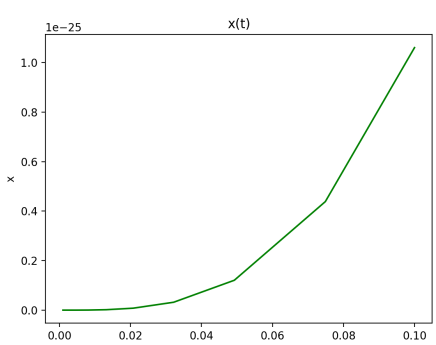

Рис. 1: $T = 0.1,\ x(t)$

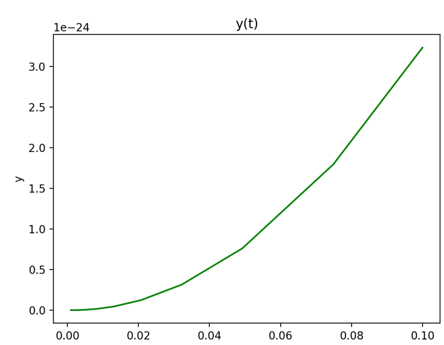

Рис. 2: $T = 0.1,\ y(t)$

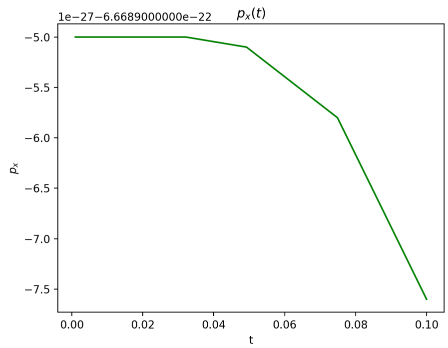

Рис. 3: $T = 0.1,\ p_x(t)$

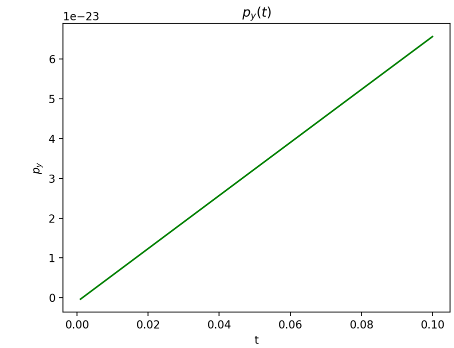

Рис. 4: $T = 0.1,\ p_y(t)$

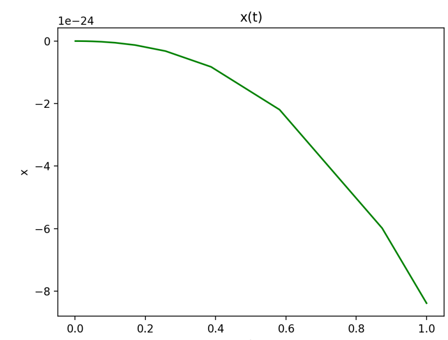

Рис. 5: $T = 1,\ x(t)$

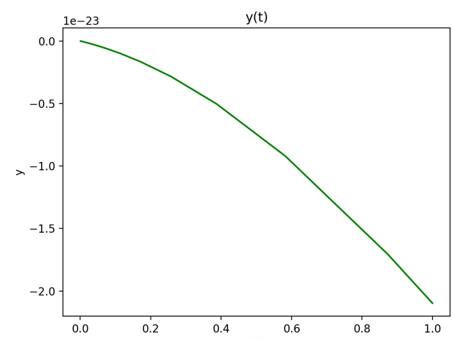

Рис. 6: $T = 1,\ y(t)$

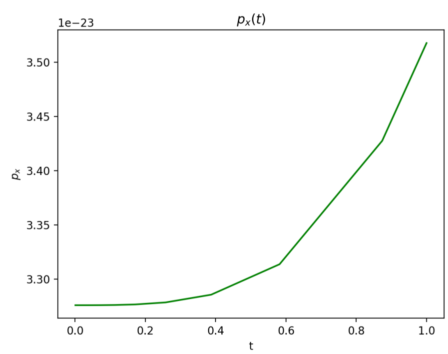

Рис. 7: $T = 1,\ p_x(t)$

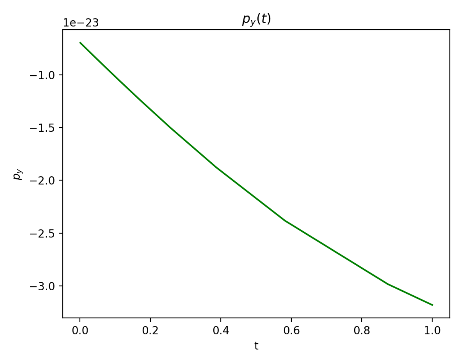

Рис. 8: $T = 1,\ p_y(t)$

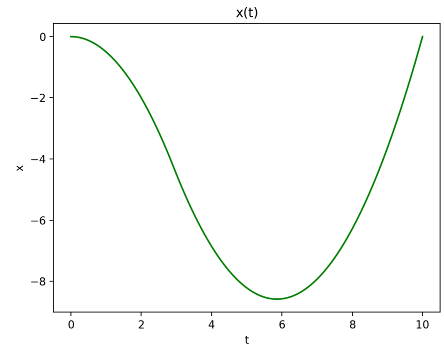

Рис. 9: $T = 10,\ x(t)$

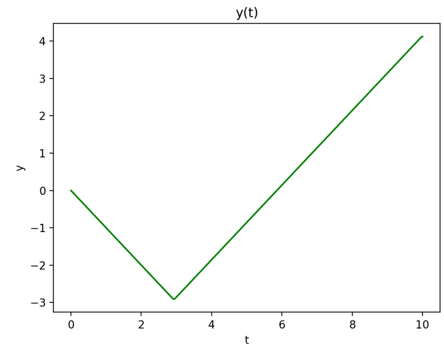

Рис. 10: $T = 10,\ y(t)$

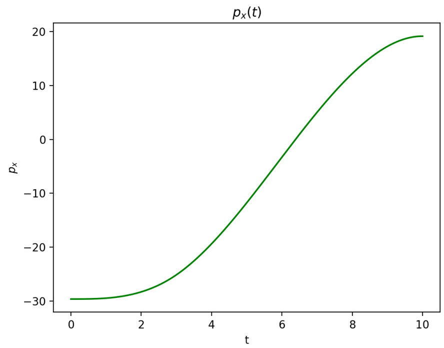

Рис. 11: $T = 10,\ p_x(t)$

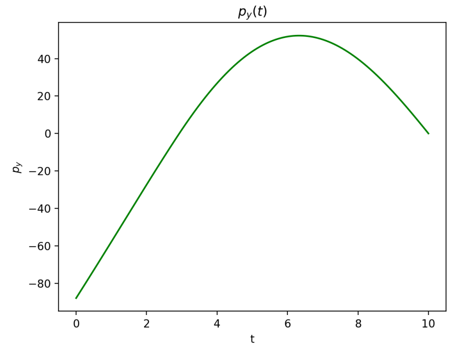

Рис. 12: $T = 10,\ p_y(t)$

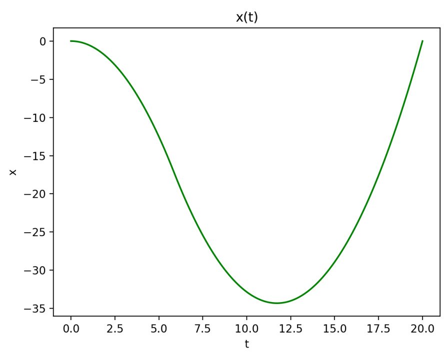

Рис. 13: $T = 20,\ x(t)$

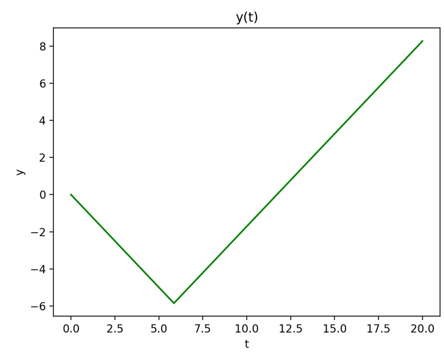

Рис. 14: $T = 20,\ y(t)$

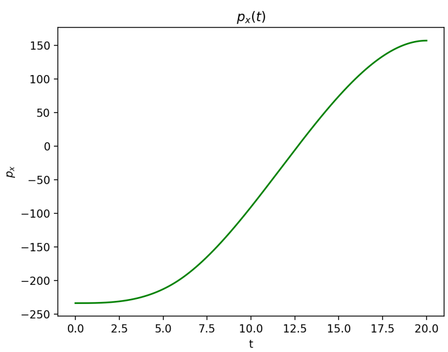

Рис. 15: $T = 20,\ p_x(t)$

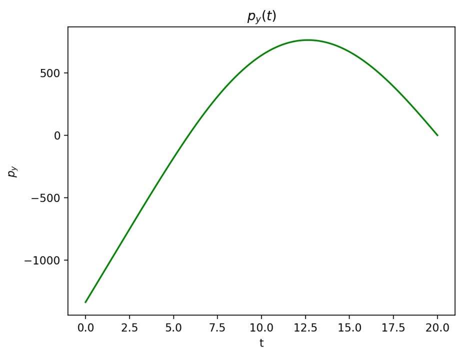

Рис. 16: $T = 20,\ p_y(t)$

9. Аналитическое решение

Рассмотрим два случая, когда $|p_y| \leq 1$ и $|p_y| > 1$.

Пусть $|p_y| \leq 1$. Система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \pm 1, \\ \dot{p_x} = -x, \\ \dot{p_y} = -p_x - y. \end{cases} \tag{9.1}$$

Решая данную систему дифференциальных уравнений, получим:

$$\begin{cases} x(t) = \pm \dfrac{t^2}{2} + At + B, \\ y(t) = \pm t + A, \\ p_x(t) = - \mp \dfrac{t^3}{6} - \dfrac{A}{2}t^2 - Bt - C, \\ p_y(t) = \pm \dfrac{t^4}{24} + \dfrac{A}{6}t^3 + (B \mp 1)\dfrac{t^2}{2} + (C - A)t + D, \end{cases} \tag{9.2}$$

где A, B, C, D - константы, определяемые начальными условиями.

Пусть теперь $|p_y| \leq 1$. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = p_y, \\ \dot{p_x} = -x, \\ \dot{p_y} = -p_x - y. \end{cases} \tag{9.3}$$

Соответственно ее решение будет иметь вид:

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{at} + Be^{-at} + C\cos bt + D\sin bt, \\ y(t) = Aae^{at} - Bae^{-at} - Cb\sin bt + Db\cos bt, \\ p_x(t) = -Aa(a^2+1)e^{at} + Ba(a^2+1)e^{-at} + Cb(1-b^2)\sin bt + Db(b^2-1)\cos bt, \\ p_y(t) = Aa^2e^{at} + Ba^2e^{-at} - Cb^2\cos bt - Db^2\sin bt, \end{cases} \tag{9.4}$$

где $a = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, $b = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ - корни характеристического уравнения линейной системы, A, B, C, D - константы, определяемые начальными условиями.

10. Сравнение аналитического и численного решений

Пользуясь найденным вектором пристрелки, графически изобразим численное и аналитическое решение:

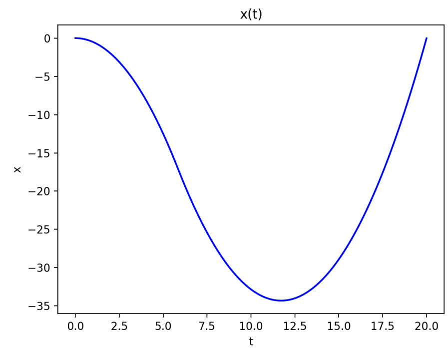

Рис. 17: $T = 0.1,\ x(t)$

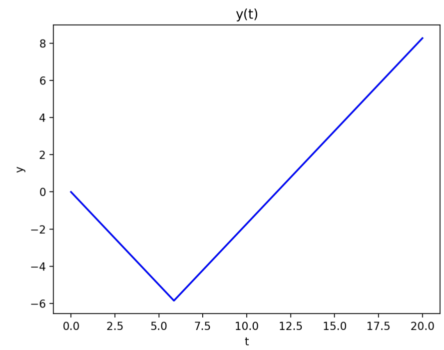

Рис. 18: $T = 0.1,\ y(t)$

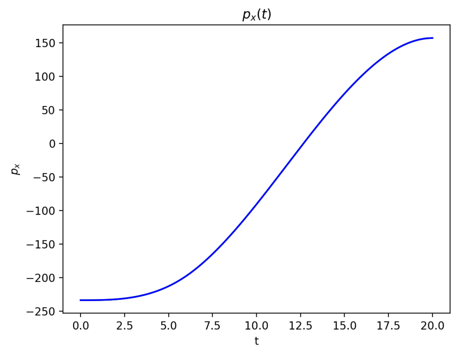

Рис. 19: $T = 0.1,\ p_x(t)$

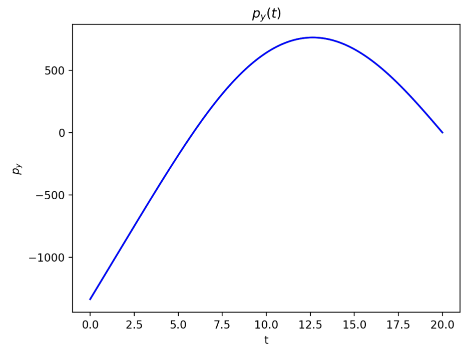

Рис. 20: $T = 0.1,\ p_y(t)$

Из рисунков следует, что найденное решение верное.

Список литературы

1. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990.

2. К. Г. Григорьев., И. С. Григорьев., М. П. Заплетин. Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. Дополнение I. М., Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2007.

3. И. С. Григорьев. Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. – М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2005.

4. Александров В. В., Бахвалов Н. С., Григорьев К. Г. и др. Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. М.: Изд-во Московского гос. ун-та, 1988.