MNF130 Oppsummeringsforelesning

Håvard Utne Terland

Universitetet i Bergen

Havard.Terland@student.uib.no

1. Juni, 2018

Plan

Se på oppgaver fra de to forrige eksamenene.

- Formell logikk
- Mengder og funksjoner
- Primtallsfinning, gcd, lcm
- Induksjonsoppgaver fra eksamener
- Litt telling (kombinatorikk)
- Relasjoner

Symbolsk logikk - 1

- Proposisjoner: $P, Q, R, S, T, \ldots$ representerer setninger som nødvendigvis er sann eller ikke sann (usann).
- Vi har symboler $\vee, \wedge, \neg$ og $\rightarrow$ som vi kan bruke.
- Sannhetstabeller: Vi kan manuelt sjekke om en setning er sann, gitt at vi vet om atomene er sann eller ikke.

Symbolsk logikk - Noen viktige begrep

- $P \equiv Q$ - P **ekvivalent** med Q - betyr at P er sann nøyaktig når Q er sann og usann nøyaktig når Q er usann. Kan sjekkes i sannhetstabeller, eller med andre regler.
- *Ekstremt* viktig: $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$
- $\wedge, \vee$ er **kommutativ** og **assosiativ**. For eks får vi

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

$$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$$

.

- Noe er en **tautologi** hvis det i alle rader i sannhetstabellen er T. **Kontradiksjon** hvis alle rader er F.

Table: $\rightarrow$ er IKKE assosiativ!

P	$P \rightarrow P$	$(P \rightarrow P) \rightarrow P$	$P \rightarrow (P \rightarrow P)$
T	T	T	T
F	T	F	T

Table: $\rightarrow$ er IKKE kommutativ!

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

Se på V16, 3b): Vis at $[(p \to q) \land p] \to q$ er en tautologi (benytt ekvivalente utrykk).

Predikater

En proposisjon er *konstant*. Ett predikat er en variabel setning; sannhetsverdi avhenger av input P er predikatet, $P(x)$ er enten sann eller usann, avhengig av x.

Kvantorer: $\forall, \exists$ osv.

- Vi jobber alltid i ett univers. For eksempel $\mathbb{N}$, eller kanskje noe så enkelt som $\{1, 2, 3\}$.
- $\forall x(2x \geq x)$ er sann i universene $\mathbb{N}$ og $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, men ikke om universet er $\mathbb{Z}$
- Rekkefølge på kvantorene er *helt essensiell*. For eks, la universet være $\mathbb{R}$: se på disse to:

$$\forall n \exists m(n + m = 0), \exists m \forall n(n + m = 0)$$

- La her universet være $\mathbb{Z}$. Under er noen opppgaver fra **Eksamen V16**
- $\forall n \exists m(n^2 < m)$
- $\forall n \exists m(n + m = 0)$
- $\forall n \forall \exists k(2k = m + n)$
- $\forall a > 0 \forall b > 0(ab = gcd(a, b) * lcm(a, b))$

Del 2

Hva er mengder?

Ikke annet enn en samling av objekter. Grunnleggende mengder:

- $\emptyset$ - den tomme mengden. $|\emptyset| = 0$.
- $\{\emptyset\}$ - mengden som inneholder $\emptyset$ (altså $\emptyset \in \{\emptyset\}$).
- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{N}$ - heltall, rasjonelle tall, reelle tall, naturlige tall.
- *Den viktigste ideen*; bygg nye mengder fra gamle: $\{x | x \in \mathbb{Q} \wedge x > 1\}$
- $A \cup B$ er mengden av ting som ligger i A og/eller i B. Altså, $x \in A \cup B \equiv x \in A \vee x \in B$.

Se på oppgave 2 fra V16

Funksjoner: Injeksjoner, surjeksjoner og bijeksjoner

En funksjon $f : A \to B$ er en "maskin" som tar inn ting i A og spytter ut ting i B.

1. Injektiv: Hvis $(f(x) = f(y))$ så er $x = y$.
2. Surjektiv: Hvis $b \in B$ så finnes det en $a \in A$ hvor $f(a) = b$.
3. Bijektiv: Begge de to over

SETT INN BILDE

Del 3

Deling - tilbake til barneskolen!

Hvordan regne ut $8/3$? Barneskole: $8/3 = 2$ med rest 2. Ungdomskole: $8/3 = 2,666.. = 2,67$. Eksempel: $95/9 = 10 \cdot 9 + 5$.

Hvis resten er 0 "det går opp"; $x/d = qd + 0$, da sier vi at d deler x, og vi skriver det $d|x$.

Primtallfinning - Naiv algoritme

gcd og lcm

- $\frac{5}{8} + \frac{3}{12}$
- $\text{lcm}(8, 12) = 24$
- gcd og lcm - største felles faktor og minste felles multiplum.

Euklids algoritme

Del 4

Induksjon på naturlige tall

Generelt prinsipp for å bevise påstander, ved å utnytte et konsept om størrelse: Begynn med de minste elementene, og jobb oppover.

Noen eksempler av induksjon på naturlige tall:

- $\forall n(n \geq 1 \rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2)$
- $\forall n(n > 4 \rightarrow 2^n < n^2)$
- $\forall n 2^n | (2n)!$

Induksjon på helt andre ting (strukturell induksjon)

Bevis for at euklids algoritme fungerer for alle naturlige tall > 0. Input er et par av tall, (x, y). Vi kan ikke bare gjøre induksjon på x, eller y.

$$P = \{(a, b) \in \mathbb{N} | a > 0 \land b > 0\}$$

Ide: Gjør induksjon på *summen* av de to tallene!

1. Basis: Når summen er 2 (1,1) - da gir den rett svar.
2. Induksjonshypotese: Anta at algoritmen gir rett svar når summen er mindre enn eller lik $k \geq 2$.
3. Induksjons-steg: Når summen er lik $k + 1$ har vi input $(a, b), a + b = k + 1$. Tre muligheter:

$$a > b$$
$$b > a$$
$$a = b$$

Telling i grafer

Induktiv definisjon av grafer:

- Basis: Den tomme grafen $\emptyset$ er en graf.
- Induksjonssteg 1: Vi kan legge inn en node i grafen.
- Induksjonssteg 2: Vi kan, mellom to punkter som ikke allerede har en linje, trekke en linje.

Graden til en node/punkt er antall kanter som er tegnet mellom den og andre punkter/node.
Vis: *Summen av alle nodene sine grader er et partall'*

Takk for meg!