BOKMÅL

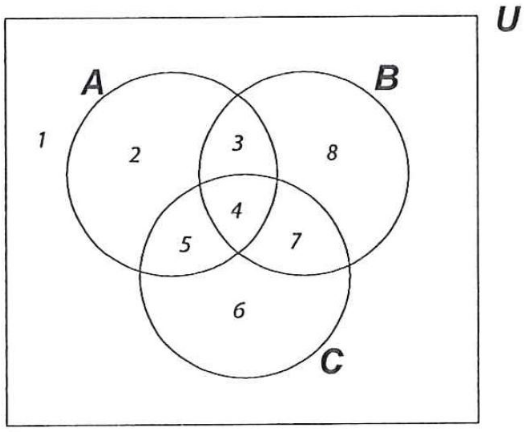
Kandidatnummer: ....

Det matematisk–naturvitenskaplige fakultet
Universitetet i Bergen
Eksamen i MNF130 DISKRETE STRUKTURER
25.mai 2016 9-12.

Skriv kandidatnummeret på hvert ark og besvar alle oppgavene på den angitte plassen. Ingen hjelpemidler er tillatt. Alle oppgavene er vektet likt med en oppgave på hver side. Oppgavesettet har 10 sider.

Oppgave 1. La diskursuniverset være alle heltall $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$. I tabellen under gi sannhetsverdien til hvert uttrykk ved å skrive True eller False. Her får du -1 poeng for feil svar, 0 poeng for blankt svar og 1 poeng for riktig svar.

Logisk uttrykk	Sannhetsverdi
$\forall n \exists m \ (n^2 < m)$	
$\forall n \exists m \ (n + m = 0)$	
$\forall n \forall m \exists k \ (2k = m + n)$	
$\exists n \exists m \ (n + m = 4 \wedge n - m = 2)$	
$\forall c > 0 \forall a \exists b \ (a \equiv b (\mod c))$	
$\forall a > 0 \forall b > 0 \ (ab = \text{gcd(a,b)} * \text{lcm}(a, b))$	



Oppgave 2 a) Figuren over viser et Venndiagram for tre mengder A, B og C. Tallene fra 1 til 8 i figuren angir de forskjellige områdene som tilsammen deler diskursuniverset U. I tabellen under skal det for hvert mengdeteoretisk uttrykk angis hvilke delområder i Venndiagrammet som tilsammen tilsvarer det mengdeteoretiske uttrykket. Dersom uttrykket ikke inneholder noe område benyttes det mengdeteoretiske uttrykket for den tomme mengde. For første mengdeteoretisk uttrykk er svaret gitt, dvs unionen av A og B, $A \cup B$, tilsvarer 2+3+4+5+7+8

Mengdeteoretisk uttrykk	Tilsvarende område
$A \cup B$	2+3+4+5+7+8
$(A - B) - C$	
$\{x : (x \in A \cup B) \vee (x \in C)\}$	
$\{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$	

b) Vis ved bruk av mengdeteoretiske uttrykk at for alle mengder A, B og C (delmengder av et diskursunivers U) gjelder

$$(A - B) - C \subseteq A - C$$

Kandidatnummer: ....

Oppgave 3 a) Fyll ut sannhetsverditabellen for de forskjellige logiske uttrykkene. (T=True og F=False)

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
T	T	T					
T	T	F					
T	F	T					
T	F	F					
F	T	T					
F	T	F					
F	F	T					
F	F	F					

Benytt sannhetsverditabellen til å vise eller gi et moteksempel at $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ er en tautologi.

b) Vis at proposisjonen $[(p \to q) \wedge p] \to q$ er en tautologi. For å vise dette skal logiske ekvivalente uttrykk benyttes. Skriv hvilke logiske ekvivalenter som benyttes.

Oppgave 4. Gitt en grammatikk $G = (V, T, S, P)$ med vokabular $V = \{S, A, B, 0, 1\}$, sluttsymboler $T = \{0, 1\}$, startsymbol S og produksjoner/regler P.

a) La $P = \{S \rightarrow AB, A \rightarrow 00A1, A \rightarrow \lambda, B \rightarrow 0B, B \rightarrow 0\}$. Gi en beskrivelse av strengene $L(G)$ som grammatikken genererer.

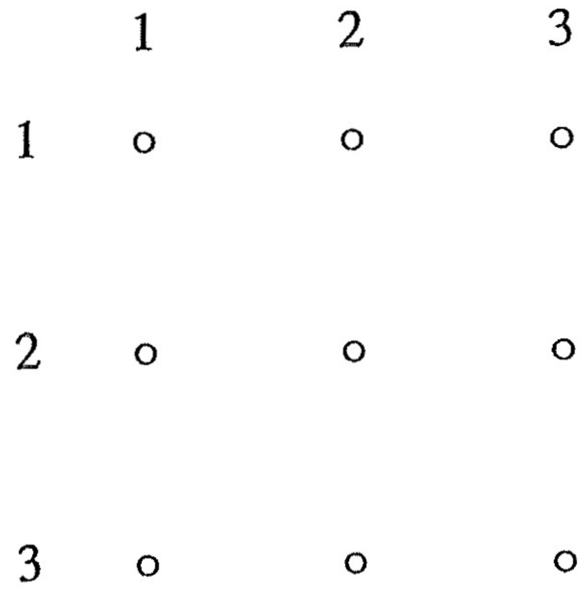
b) Finn et sett av produksjoner P som genererer $L(G) = \{10^n 1^n : n = 0, 1, 2 \ldots\}$.

Kandidatnummer: ....

Oppgave 5. La R være en binær relasjon over $S \times S$ hvor $S = \{1, 2, 3\}$ der

$$((a, b), (c, d)) \in R \text{ hvis og bare hvis } b - a < d - c$$

a) La G_R være den rettede grafen for relasjonen R. I figuren er nodene i G_R avmerket, der noden i rad r og kolonne k er paret (r, k). Tegn inn alle kantene i G_R.



b) Bruk figuren til å avgjøre om relasjonen R er refleksiv, symmetrisk, antisymmetrisk og transitiv. (Gi kort begrunnelse av svaret)

Oppgave 6. La S være en mengde av endelige binære strenger. Dersom $a, b \in S$ lar vi $a \preceq b$ bety at a forekommer som en delstreng av b. Dersom 10010 og 010 er i S så er $010 \preceq 10010$ siden 010 er en delstreng i 10010.

a) Vis at $(S, \preceq)$ er en partiell ordning (poset).

b) La $S = \{01, 010, 001, 10010, 010010\}$. Tegn Hassediagrammet til $(S, \preceq)$ og finn alle minimale, maksimale, minste og største element til $(S, \preceq)$.

Kandidatnummer: ....

Oppgave 7. Backus-Naur formen for en grammatikk er gitt ved

```
<E> ::= (<E>) | <E> + <E> | <E> * <E> | W
<W> ::= x | y | 2
```

a) Finn grammatikken $G = (V, T, E, P)$ hvor V er vokabularet, T er sluttsymbolene, E er start symbolet og P er produksjonene.

$T =$	
$V =$	
$P =$	

b) For hver streng w avgjør om strengen kan utledes fra startsymbolet E, $E \stackrel{*}{\Rightarrow} w$. Bruk T eller True for sann og F eller False for usann. Her får du -1 poeng for feil svar, 0 poeng for blankt svar og 1 poeng for riktig svar.

w	$w \in L(G)$
$(x + y) * x$	
$2x$	
$x * y$	
$x + 3$	

Oppgave 8. For hvert utsagn i tabellen, skriv Sant (True) hvis utsagnet er sant og Usant (False) hvis utsagnet er usant. Her får du -1 poeng for feil svar, 0 poeng for blankt svar og 1 poeng for riktig svar.

	Utsagn	Sannhetsverdi
1	Det finnes surjektiv funksjon $f : A \to B$ når $\|A\| < \|B\|$.	
2	Vi slår to terninger. Sannsynligheten for at terningene viser summen 5 er lik sannsynligheten at summen viser 9	
3	Det er 56 måter å velge 3 bøker ut av 8	
4	I en urettet graf med m kanter er summen av gradtallene til nodene alltid lik $2m$	
5	I en rettet graf med m kanter er summen av inngrader lik m.	
6	La $f : A \to B$ hvor $\|f(A)\| = \|B\|$. Da er f injektiv	
7	$137 \equiv 29 (\mod 27)$	
8	$\gcd(120, 500) = 10$	
9	$\operatorname{lcm}(12, 30) = 60$	
10	$\forall x \in \mathbb{R}\ \lceil x \rceil < x + 1$	

Kandidatnummer: ....

Oppgave 9. Du skal gi to bevis for at

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \text{ for } n \geq 1.$$

a) Et kombinatorisk bevis:

b) Et bevis der du først skriver ned binominal-teoremet og deretter bruker dette.

Oppgave 10. Fibonacci tallene $f_0, f_1, f_2, \ldots$ er gitt ved $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, og

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ for } n \geq 2.$$

I oppgaven skal det vises at $f_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ for $n \geq 6$.

a) Fyll ut tabellen

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
f_n	0	1							
$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$	0.67	1	1.5	2.25	3.375	5.06	7.59	11.39	17.09

b) Hva er basissteget?

c) Hva er induksjonshypotesen?

d) Vis induksjonssteget.