Hvordan overleve eksamen i MNF130

Håvard Utne Terland

Universitetet i Bergen

Havard.Terland@student.uib.no

1. Juni, 2018

Plan

Se på oppgaver fra de to forrige eksamenene.

- Formell logikk
- Mengder og funksjoner
- Induksjonsoppgaver
- Litt telling (kombinatorikk)
- Relasjoner

Hva jeg *ikke* snakker om: Modulær aritmetikk og primtall, divisjonsalgoritmen, euklids algoritme, grafteori og gramatikker/backus-naur. Oppfordring: Euklids algoritme og Eratosthenes' sil er veldig verdt å lære.

Symbolsk logikk - 1

- Proposisjoner: $P, Q, R, S, T, \ldots$ representerer setninger som nødvendigvis er sann eller ikke sann (usann).
- Vi har symboler $\vee, \wedge, \neg$ og $\rightarrow$ som vi kan bruke.
- Sannhetstabeller: Vi kan manuelt sjekke om en setning er sann, gitt at vi vet om atomene er sann eller ikke.

Symbolsk logikk - Noen viktige begrep

- $P \equiv Q$ - P **ekvivalent** med Q - betyr at P er sann nøyaktig når Q er sann og usann nøyaktig når Q er usann. Kan sjekkes i sannhetstabeller, eller med andre regler.
- *Ekstremt* viktig: $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$
- $\wedge, \vee$ er **kommutativ** og **assosiativ**. For eks får vi

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

$$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$$

.

- Noe er en **tautologi** hvis det i alle rader i sannhetstabellen er T. **Kontradiksjon** hvis alle rader er F.

Table: $\rightarrow$ er IKKE assosiativ!

P	$P \rightarrow P$	$(P \rightarrow P) \rightarrow P$	$P \rightarrow (P \rightarrow P)$
T	T	T	T
F	T	F	T

Table: $\rightarrow$ er IKKE kommutativ!

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

Se på V16, 3b): Vis at $[(p \rightarrow q) \land p] \rightarrow q$ er en tautologi (benytt ekvivalente utrykk).

Predikater

En proposisjon er *konstant*. Ett predikat er en variabel setning; sannhetsverdi avhenger av input P er predikatet, $P(x)$ er enten sann eller usann, avhengig av x.

Kvantorer: $\forall, \exists$ osv.

- Vi jobber alltid i ett univers. For eksempel $\mathbb{N}$, eller kanskje noe så enkelt som $\{1, 2, 3\}$.
- $\forall x(2x \geq x)$ er sann i universene $\mathbb{N}$ og $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, men ikke om universet er $\mathbb{Z}$
- Rekkefølge på kvantorene er *helt essensiell*. For eks, la universet være $\mathbb{R}$: se på disse to:

$$\forall n \exists m(n + m = 0), \exists m \forall n(n + m = 0)$$

- La her universet være $\mathbb{Z}$. Under er noen opppgaver fra **Eksamen V16**
- $\forall n \exists m(n^2 < m)$
- $\forall n \exists m(n + m = 0)$
- $\forall n \forall \exists k(2k = m + n)$
- $\forall a > 0 \forall b > 0(ab = gcd(a, b) * lcm(a, b))$

Hva er mengder?

Ikke annet enn en samling av objekter. Grunnleggende mengder:

- $\emptyset$ - den tomme mengden. $|\emptyset| = 0$.
- $\{\emptyset\}$ - mengden som inneholder $\emptyset$ (altså $\emptyset \in \{\emptyset\}$).
- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{N}$ - heltall, rasjonelle tall, reelle tall, naturlige tall.
- *Den viktigste ideen*; bygg nye mengder fra gamle: $\{x | x \in \mathbb{Q} \wedge x > 1\}$
- $A \cup B$ er mengden av ting som ligger i A og/eller i B. Altså, $x \in A \cup B \equiv x \in A \vee x \in B$.

Se på oppgave 2 fra V16

Funksjoner: Injeksjoner, surjeksjoner og bijeksjoner

En funksjon $f : A \to B$ er en "maskin" som tar inn ting i A og spytter ut ting i B.

1. Injektiv: Hvis $(f(x) = f(y))$ så er $x = y$.
2. Surjektiv: Hvis $b \in B$ så finnes det en $a \in A$ hvor $f(a) = b$.
3. Bijektiv: Begge de to over

Se på oppgave 1 fra Eksamen V17.

Induksjon på naturlige tall

Generelt prinsipp for å bevise påstander, ved å utnytte et konsept om størrelse: Begynn med de minste elementene, og jobb oppover.

Noen eksempler av induksjon på naturlige tall:

- $\forall n(n \geq 1 \rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2)$
- *V17 Oppgave 2* La $f_0 = 0, f_1 = 1$ og $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ når $n \geq 2$. Vis at $f_n \geq (3/2)^{n-1}$ når $n \geq 6$.

Litt telling

V17 Oppgave 5

- Hvor mange bitstrenger med 8 bit har 000 som de tre første bit?
- Hvor mange bitstrenger med 8 bit har nøyaktig 4 bit som er 1?
- La A og B være mengder, hvor $|A| = 4 = |B| = 10$. Hvor mange funksjoner $f : A \to B$ finnes det?
- La A og B være mengder, hvor $|A| = 4 = |B| = 10$. Hvor mange injektive funksjoner $f : A \to B$ finnes det?
- La A og B være mengder, hvor $|A| = 4 = |B| = 10$. Hvor mange surjektive funksjoner $f : A \to B$ finnes det?

Relasjoner

Vi ser på oppgave 7.1 fra eksamen V17

En **relasjon** R over en mengde A er rett og slett bare en delmengde av $A \times A$. Altså

$$R \subseteq A \times A$$

relasjonen kan være $\emptyset$, for eksempel. Den kan ha andre egenskaper:

- Refleksiv
- Symmetrisk
- Transitiv
- Hvis alle over: Ekvivalenserelasjon

Lykke til!

Lykke til på eksamen - og husk - dette faget er ikke bare et hvilket som helst fag men en smakebit av det matematiske grunnlaget for alt som skjer inni en datamaskin.