Решавање неких логичких игара користећи SMT решаваче

Семинарски рад у оквиру курса
Аутоматско резоновање
Математички факултет

Немања Мићовић, Лазар Ранковић
nmicovic@outlook.com, lazar.rankovic@outlook.com

Абстракт

Логичке игре дуги низ година поседују велику дозу занимљивости и представљају чест хоби. Како комплексност логичких игара може бити висока, јавља се проблем прављења логичких игара и генерисање њиховог почетног стања за које смо сигурни да постоји решење и да је јединствено. Рад разматра примену SMT решавача за верификацију решења логичких игара и доказивање јединствености решења. Показује се да су се SMT решавачи показали као одличан алат за решавање поменутих проблема јер природно описују ограничења која постоје у логичким играма.

Садржај

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Слика 1: Игра Судоку

Слика 2: Игра 2048

1 Увод

Део 2 говори о логичким играма и илуструје неке од популарнијих.

У делу 3 даје се кратак историјски преглед релевантних историјских догађаја, уводи се концепт SAT и SMT решавача. Део 4 приказује пример решавања једне од познатих логичких игара користећи SMT решавач.

2 Логичке игре

Логичке игре за собом имају дубоку традицију и историју, а упркос страховито брзом развоју технологије у последњих неколико година, и даље поседују велику популарност. Разлог за њихову популарност јесте често једноставност правила, вежбање људског ума и неочекивана комплекност решавања која уме да заинтригира људе. У многим часописима се редовно штампају игре као што је судоку (приказан на слици 1).

Пре неколико година појавила се игра 2048 (слика 2 у којој корисник може да помера поља хоризонтално или вертикално. При померању, сва поља се померају и транслирају се док не ударе у зид или друго поље. Када се поља са истим бројевима сударе, они постају једно поље које представља њихов збир. Играч је победио када у игри успе да конструише поље чија је вредност 2048. Игра је преузета преко 20 милиона пута са *Google Play* и *iTunes* продавница за мобилне уређаје.

Логичке игре односно загонетке су погодне за математички опис користећи логику и представљају чест пример примене SAT и SMT решавача за генерисање инстанци проблема, решавање и валидацију да ли је решење јединствено.

3 SMT решавачи

3.1 Кратак преглед релеватних историјских догађаја

Готфрид Вилхелм Лајбниц[1] је међу првима изнео идеју о механизацији процеса људског резоновања.

Године 1928. Давид Хилберт[2] је поставио проблем одлучивања - *Entscheidungsproblem*. Проблем тражи алгоритам који узима као улаз

[1] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)
[2] David Hilbert (1862-1943)

формулу логике првог реда и одговара ДА или НЕ да ли је формула универзално тачна или не.

Алонзо Черч[3] и Алан Тјуринг[4] у засебним радовима 1936. године показују да опште решење за Хилбертов проблем одлучивања не постоји. Черч доказ изводи свођењем на ламбда рачун, а Алан Тјуринг редукцијом на халтинг проблем.

Но показује се да уколико се извши рестрикција на одређену теорију, ипак можемо добити многе одлучиве фрагменте теорије логике првог реда и често је управо ту примена SMT решавача.

Крајем 20. и почетком 21. века велика популарност проблема задовољивости исказних формула (проблем SAT) доводи до развоја ефикаснијих и драстично бржих алгоритама решавања [9, 10, 4]. Иако је проблем NP комплетан, SAT решавачи могу решавати и формуле које имају чак и десетине хиљада променљивих. Наравно, постоје формуле које ће изазвати експоненцијално понашање алгоритма који имплементира решавач.

Популарност проблема SAT и постојање ефикасних алгоритама за његово решавање природно води у идеју да се конструишу решавачи који ће бити у бити у стању да решавају формуле логике првог реда. Како логика првог реда није одлучива поставља се питање да ли се може редуковати скуп дозвољених симбола, ограничити домен тако да се добије одлучива теорија? Показује се да је одговор да, део 3.3.1 илуструје неке од теорија. Настаје нова врста решавача који се називају SMT (eng. Satisfiability Modulo Theories) и нова област SMT.

3.2 SMT решавач

SMT решавачи су засновани на SAT решавачима и поседују виши степен апстракције чиме задржавају и семантику која се налази у формули. То омогућава и примену специјализованих алгоритама који могу узети додатну семантику у обзир.

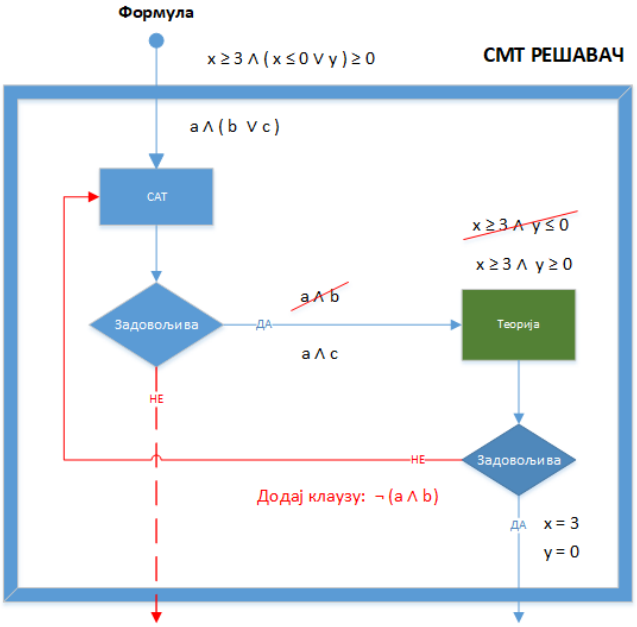
SMT решавачи имају модуларну архитектуру (слика 3) која се најчешће састоји из два централна дела, CDCL (eng. Conflict Driven Clause Learning) заснован SAT решавач [9, 10, 4] и SMT језгро које имплементира неки од решавача за конкретну теорију (део 3.3.1) који се најчешће назива T решавач. При промени теорије над којом се резонује, модуларни приступ омогућава да се задржи део система који се бави решавање проблема SAT.

3.3 Примене SMT решавача

SMT решавачи имају широку примену у области верификације софтвера и хардвера [1, 5, 6, 7], но корисни су и у другим ситуацијама у којима је формула логике првог реда редукована на неку теорију адекватна за опис проблема.

Једна од примена SMT решавача јесу и логичке игре где се SMT решавач може користити за генерисање инстанци игре, генерисање решења игре, провере да ли је решење тачно као и доказ да је решење игре јединствено. У делу 4 биће приказана примена SMT решавача над једном логичком игром.

[3] Alonzo Church (1903-1995)
[4] Alan Turing (1912-1954)



Слика 3: Архитектура SMT решавача

3.3.1 Неке од коришћених теорија

Постоји више развијених теорија насталих за разне домене примена SMT решавача. Неке од њих су:

- EUF теорија
- реална аритметика
- целобројна аритметика
- теорија низова
- теорија битвектора

EUF теорија EUF (eng. Equality with Uninterpreted Functions) теорија је теорија која садржи један предикатски симбол, симбол једнакости $=$ и произвољан број сорти и функцијских симбола који се могу поптупно слободно интерпретирати. SMT проблем за ову теорију је неодличив, но базни фрагмент теорије је одлучив. Задовољивост коњункције базних литерала је одлучив у полиномијалном времену користећи Нелсон-Орен процедуру [8].

Реална аритметика Теорија која описује реалну аритметику поседује сорту *Real* и симболе 0, 1, $+$, $\cdot$, -, $/$, $\leq$. Модел теорије је структура реалних бројева $\mathbb{R}$. Теорија је одлучива, а проблем испитивања задовољивости коњункције линеарних базних литерала је одлучив у полиномијалном времену. Користе се Фуријe-Моцкинова процедура [8] и Симплекс процедура [2].

Целобројна аритметика Теорија описује целобројну аритметику, поседује сорту *Int* и симболе 0, 1, $+$, $\cdot$, -, $\leq$. Модел теорије је структура целих бројева $\mathbb{Z}$. У општем случају теорија је неодлучива, но њен

линеарни фрагмент (Презбургерова аритметика [8]) је одлучив. Проблем испитивања задовољивости коњункције линеарних базних литерала је одлучив и NP комплетан.

Теорија низова Теорија низова се користи за апстракцију концепта низа. Поседује сорте *Array*, *Index* и *Value* који представљају, редом, низ, индекс низа и вредност коју елементи низа могу узимати. Симболи *select* и *store* апстрахују индексирање низа и додељивање вредности елементу низа. Приметимо да се неће мењази вредности низа при операцији *store* већ ће операција враћати нови низ који настане када се у оригиналном низу промени вредност. Теорија је неодлучива у општем случају, но базни фрагмент теорије је одлучив. Проблем испитивања задовољивости коњункције базних литерала је NP комплетан.

Теорија битвектора Теорија битвектора се користи за опис бинарних бројева и има значајну примену у области верификације хардвера. Теорија је одлучива, а проблем испитивања задовољивости коњункције базних литерала је NP комплетан.

4 Решавање логичких игара користећи SMT решаваче

У овом делу ће бити изложен пример решавања логичке игре коришћењем YICES SMT решавача [3].

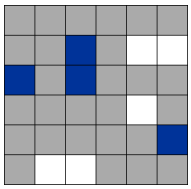
4.1 Логичка игра Три суседне

Логичка игра *Три судедне* се састоји из матрице поља димензије $n \times n$. На почетку игре, поља су обојена у плаво, бело и сиво. Ово ћемо називати *почетно стање игре*. Поља која су обојена у сиво, играч може да промени у плава или бела произвољан број пута, док оригинална плава и бела поља не може да мења. Циљ игре је да играч сва сива поља означи као плава или бела при чему морају да важе следећа ограничења:

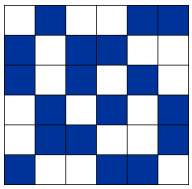
- Не постоје три суседна поља у истој врсти која су обојена истом бојом (услов 1)
- Не постоје три суседна поља у истој колони која су обојена истом бојом (услов 2)
- У свим врстама мора бити једнак број плавих и белих поља (услов 3)
- У свим колонама мора бити једнак број плавих и белих поља (услов 4)

Стање у којем се налази табла (матрица) игре када је игра решена називаћемо *задовољено стање игре*.

На слици 4 је приказано почетно стање игре, а на слици 5 решена инстанца игре игре *Три суседне*.



Слика 4: Почетно стање игре



Слика 5: Задовољено стање игре

4.1.1 Ограничења

Како би SMT решавачем генерисали решења биће нам потребно кодирање претходно наведених услова. Таблу игре ћемо кодирати користећи $n \times n$ променљивих које ћемо означавати са $x_{i,j}$.

$$x_{i,j} = \left\{ \begin{array}{rl} -1, & \text{за бела поља} \\ 0, & \text{за сива поља} \\ 1, & \text{за плава поља} \end{array} \right\}$$

При чему важи:

$$I = \{0, 1, ..., n-1\}$$
$$J = \{0, 1, ..., n-1\}$$
$$T = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$
$$i \in I, j \in J$$

Са i ћемо означавати индекс врсте, при чему $i = 0$ означава прву врсту, а $i = n - 1$ означава последњу врсту. Аналогно за j, $j = 0$ означава прву колону, а $j = n - 1$ последњу колону.

Услов 1 Кодирање услова 1 изводимо захтевом да збир три суседна поља у врсти мора припадати скупу T. Како имамо n врсти, при чему по свакој врсти имамо $n-2$ ограничења, добијамо $n(n-2)$ ограничења.

$$x_{i,j} + x_{i,j+1} + x_{i,j+2} \in T$$
$$i \in \{0, 1, ..., n-1\}$$
$$j \in \{0, 1, ..., n-3\}$$

Услов 2 Услов 2 је симетричан услову 1 тако да се добија још $n(n-2)$ додатних ограничења облика:

$$x_{i,j} + x_{i+1,j} + x_{i+2,j} \in T$$
$$i \in \{0, 1, ..., n-3\}$$
$$j \in \{0, 1, ..., n-1\}$$

Услов 3 Намећемо ограничење да збир у свакој врсти мора бити 0. Како променљиве $x_{i,j}$ имају вредност 1 или -1, ограничење имплицира једнак број плавих и белих поља у врсти. Ако је број врсти n тиме добијамо још n ограничења облика:

$$x_{0,0} + x_{0,1} + ... + x_{0,n-1} = 0$$
$$x_{1,0} + x_{1,1} + ... + x_{1,n-1} = 0$$
$$...$$
$$x_{n-1,0} + x_{n-1,1} + ... + x_{n-1,n-1} = 0$$

Услов 4 Услов 4 је симетричан услову 3 те добијамо додатних n ограничења облика:

$$x_{0,0} + x_{0,1} + ... + x_{0,n-1} = 0$$

$$x_{0,1} + x_{1,1} + ... + x_{n-1,1} = 0$$

$$...$$

$$x_{0,n-1} + x_{1,n-1} + ... + x_{n-1,n-1} = 0$$

Услови домена Решавачу је потребно наметнути дозвољене вредности за сваку од променљивих. Како решавање логичке игре започињемо од унапред задатог стања (нека поља су већ обојена и не могу се мењати), имамо две врсте ограничења.

Оригинално задата плава и бела поља, решавачу намећемо вредности променљивих 1 или -1. Ако је на пример поље (0, 3) обојено у плаво, а поље (3, 2) у бело мора важити:

$$x_{0,3} = 1$$

$$x_{3,2} = -1$$

За свако сиво обојено поље $x_{i,j}$, намећемо ограничења да вредности могу бити или -1 или 1.

$$x_{i,j} \neq 0 \wedge -1 \geq x_{i,j} \leq 1$$

Како имамо $n \times n$ променљивих, добијамо још $n \times n$ услова.

Сложеност проблема За игру димензије n из претходно изложеног добијамо укупно $3n^2 - 2n$ услова. Дакле број услова квадратно зависи од димензије n и асимптотски се понаша као $O(n^2)$.

4.1.2 Питање јединствености решења

Како би се показала и доказала јединственост решења, може се користити решавач да се добију вредности променљивих, а да се након тога додају ограничења да променљиве не могу узети вредности које представљају решења. Овде треба бити опрезан и приметити да само оригинална сива поља треба ограничити, а плава и бела (из почетног стања игре) не.

4.2 Yices program

Написан је c++ програм који за дато почетно стање игре генерише претходно наведена ограничења у синтакси погодној за yices SMT решавач. Следи генерисани код за једну од инстанци игре.

```
(set-logic QF_LIA)
(declare-fun x0_0 () Int)
(declare-fun x0_1 () Int)
(declare-fun x0_2 () Int)
(declare-fun x0_3 () Int)
(declare-fun x0_4 () Int)
(declare-fun x0_5 () Int)
(declare-fun x1_0 () Int)
(declare-fun x1_1 () Int)
```

```
(declare-fun x1_2 () Int)
(declare-fun x1_3 () Int)
(declare-fun x1_4 () Int)
(declare-fun x1_5 () Int)
(declare-fun x2_0 () Int)
(declare-fun x2_1 () Int)
(declare-fun x2_2 () Int)
(declare-fun x2_3 () Int)
(declare-fun x2_4 () Int)
(declare-fun x2_5 () Int)
(declare-fun x3_0 () Int)
(declare-fun x3_1 () Int)
(declare-fun x3_2 () Int)
(declare-fun x3_3 () Int)
(declare-fun x3_4 () Int)
(declare-fun x3_5 () Int)
(declare-fun x4_0 () Int)
(declare-fun x4_1 () Int)
(declare-fun x4_2 () Int)
(declare-fun x4_3 () Int)
(declare-fun x4_4 () Int)
(declare-fun x4_5 () Int)
(declare-fun x5_0 () Int)
(declare-fun x5_1 () Int)
(declare-fun x5_2 () Int)
(declare-fun x5_3 () Int)
(declare-fun x5_4 () Int)
(declare-fun x5_5 () Int)
(assert
    (and
        ;; Ограничења домена
        (and (<= (- 1) x0_0)(>= 1 x0_0)(distinct 0 x0_0))
        (and (<= (- 1) x0_1)(>= 1 x0_1)(distinct 0 x0_1))
        (= x0_2 1)
        (and (<= (- 1) x0_3)(>= 1 x0_3)(distinct 0 x0_3))
        (and (<= (- 1) x0_4)(>= 1 x0_4)(distinct 0 x0_4))
        (and (<= (- 1) x0_5)(>= 1 x0_5)(distinct 0 x0_5))
        (and (<= (- 1) x1_0)(>= 1 x1_0)(distinct 0 x1_0))
        (= x1_1 1)
        (and (<= (- 1) x1_2)(>= 1 x1_2)(distinct 0 x1_2))
        (and (<= (- 1) x1_3)(>= 1 x1_3)(distinct 0 x1_3))
        (= x1_4 (- 1))
        (and (<= (- 1) x1_5)(>= 1 x1_5)(distinct 0 x1_5))
        (and (<= (- 1) x2_0)(>= 1 x2_0)(distinct 0 x2_0))
        (= x2_1 (- 1))
        (and (<= (- 1) x2_2)(>= 1 x2_2)(distinct 0 x2_2))
        (and (<= (- 1) x2_3)(>= 1 x2_3)(distinct 0 x2_3))
        (and (<= (- 1) x2_4)(>= 1 x2_4)(distinct 0 x2_4))
        (and (<= (- 1) x2_5)(>= 1 x2_5)(distinct 0 x2_5))
        (= x3_0 (- 1))
        (and (<= (- 1) x3_1)(>= 1 x3_1)(distinct 0 x3_1))
        (= x3_2 1)
        (and (<= (- 1) x3_3)(>= 1 x3_3)(distinct 0 x3_3))
        (= x3_4 (- 1))
```

```
(and (<= (- 1) x3_5)(>= 1 x3_5)(distinct 0 x3_5))
(and (<= (- 1) x4_0)(>= 1 x4_0)(distinct 0 x4_0))
(and (<= (- 1) x4_1)(>= 1 x4_1)(distinct 0 x4_1))
(and (<= (- 1) x4_2)(>= 1 x4_2)(distinct 0 x4_2))
(and (<= (- 1) x4_3)(>= 1 x4_3)(distinct 0 x4_3))
(and (<= (- 1) x4_4)(>= 1 x4_4)(distinct 0 x4_4))
(= x4_5 (- 1))
(and (<= (- 1) x5_0)(>= 1 x5_0)(distinct 0 x5_0))
(= x5_1 1)
(= x5_2 1)
(and (<= (- 1) x5_3)(>= 1 x5_3)(distinct 0 x5_3))
(= x5_4 1)
(and (<= (- 1) x5_5)(>= 1 x5_5)(distinct 0 x5_5))

;; У истој врсти три суседна поља не смеју бити сте боје
(and (> (+ x0_0 x0_1 x0_2) (- 3))(< (+ x0_0 x0_1 x0_2) 3))
(and (> (+ x0_0 x0_1 x0_2) (- 3))(< (+ x0_0 x0_1 x0_2) 3))
(and (> (+ x0_1 x0_2 x0_3) (- 3))(< (+ x0_1 x0_2 x0_3) 3))
(and (> (+ x0_1 x0_2 x0_3) (- 3))(< (+ x0_1 x0_2 x0_3) 3))
(and (> (+ x0_2 x0_3 x0_4) (- 3))(< (+ x0_2 x0_3 x0_4) 3))
(and (> (+ x0_2 x0_3 x0_4) (- 3))(< (+ x0_2 x0_3 x0_4) 3))
(and (> (+ x0_3 x0_4 x0_5) (- 3))(< (+ x0_3 x0_4 x0_5) 3))
(and (> (+ x0_3 x0_4 x0_5) (- 3))(< (+ x0_3 x0_4 x0_5) 3))
(and (> (+ x1_0 x1_1 x1_2) (- 3))(< (+ x1_0 x1_1 x1_2) 3))
(and (> (+ x1_0 x1_1 x1_2) (- 3))(< (+ x1_0 x1_1 x1_2) 3))
(and (> (+ x1_1 x1_2 x1_3) (- 3))(< (+ x1_1 x1_2 x1_3) 3))
(and (> (+ x1_1 x1_2 x1_3) (- 3))(< (+ x1_1 x1_2 x1_3) 3))
(and (> (+ x1_2 x1_3 x1_4) (- 3))(< (+ x1_2 x1_3 x1_4) 3))
(and (> (+ x1_2 x1_3 x1_4) (- 3))(< (+ x1_2 x1_3 x1_4) 3))
(and (> (+ x1_3 x1_4 x1_5) (- 3))(< (+ x1_3 x1_4 x1_5) 3))
(and (> (+ x1_3 x1_4 x1_5) (- 3))(< (+ x1_3 x1_4 x1_5) 3))
(and (> (+ x2_0 x2_1 x2_2) (- 3))(< (+ x2_0 x2_1 x2_2) 3))
(and (> (+ x2_0 x2_1 x2_2) (- 3))(< (+ x2_0 x2_1 x2_2) 3))
(and (> (+ x2_1 x2_2 x2_3) (- 3))(< (+ x2_1 x2_2 x2_3) 3))
(and (> (+ x2_1 x2_2 x2_3) (- 3))(< (+ x2_1 x2_2 x2_3) 3))
(and (> (+ x2_2 x2_3 x2_4) (- 3))(< (+ x2_2 x2_3 x2_4) 3))
(and (> (+ x2_2 x2_3 x2_4) (- 3))(< (+ x2_2 x2_3 x2_4) 3))
(and (> (+ x2_3 x2_4 x2_5) (- 3))(< (+ x2_3 x2_4 x2_5) 3))
(and (> (+ x2_3 x2_4 x2_5) (- 3))(< (+ x2_3 x2_4 x2_5) 3))
(and (> (+ x3_0 x3_1 x3_2) (- 3))(< (+ x3_0 x3_1 x3_2) 3))
(and (> (+ x3_0 x3_1 x3_2) (- 3))(< (+ x3_0 x3_1 x3_2) 3))
(and (> (+ x3_1 x3_2 x3_3) (- 3))(< (+ x3_1 x3_2 x3_3) 3))
(and (> (+ x3_1 x3_2 x3_3) (- 3))(< (+ x3_1 x3_2 x3_3) 3))
(and (> (+ x3_2 x3_3 x3_4) (- 3))(< (+ x3_2 x3_3 x3_4) 3))
(and (> (+ x3_2 x3_3 x3_4) (- 3))(< (+ x3_2 x3_3 x3_4) 3))
(and (> (+ x3_3 x3_4 x3_5) (- 3))(< (+ x3_3 x3_4 x3_5) 3))
(and (> (+ x3_3 x3_4 x3_5) (- 3))(< (+ x3_3 x3_4 x3_5) 3))
(and (> (+ x4_0 x4_1 x4_2) (- 3))(< (+ x4_0 x4_1 x4_2) 3))
(and (> (+ x4_0 x4_1 x4_2) (- 3))(< (+ x4_0 x4_1 x4_2) 3))
(and (> (+ x4_1 x4_2 x4_3) (- 3))(< (+ x4_1 x4_2 x4_3) 3))
(and (> (+ x4_1 x4_2 x4_3) (- 3))(< (+ x4_1 x4_2 x4_3) 3))
(and (> (+ x4_2 x4_3 x4_4) (- 3))(< (+ x4_2 x4_3 x4_4) 3))
(and (> (+ x4_2 x4_3 x4_4) (- 3))(< (+ x4_2 x4_3 x4_4) 3))
(and (> (+ x4_3 x4_4 x4_5) (- 3))(< (+ x4_3 x4_4 x4_5) 3))
```

```
        (and (> (+ x4_3 x4_4 x4_5) (- 3))(< (+ x4_3 x4_4 x4_5) 3))
        (and (> (+ x5_0 x5_1 x5_2) (- 3))(< (+ x5_0 x5_1 x5_2) 3))
        (and (> (+ x5_0 x5_1 x5_2) (- 3))(< (+ x5_0 x5_1 x5_2) 3))
        (and (> (+ x5_1 x5_2 x5_3) (- 3))(< (+ x5_1 x5_2 x5_3) 3))
        (and (> (+ x5_1 x5_2 x5_3) (- 3))(< (+ x5_1 x5_2 x5_3) 3))
        (and (> (+ x5_2 x5_3 x5_4) (- 3))(< (+ x5_2 x5_3 x5_4) 3))
        (and (> (+ x5_2 x5_3 x5_4) (- 3))(< (+ x5_2 x5_3 x5_4) 3))
        (and (> (+ x5_3 x5_4 x5_5) (- 3))(< (+ x5_3 x5_4 x5_5) 3))
        (and (> (+ x5_3 x5_4 x5_5) (- 3))(< (+ x5_3 x5_4 x5_5) 3))

        ;; У истој колони три суседна поља не смеју бити сте боје
        (and (> (+ x0_0 x1_0 x2_0) (- 3))(< (+ x0_0 x1_0 x2_0) 3))
        (and (> (+ x1_0 x2_0 x3_0) (- 3))(< (+ x1_0 x2_0 x3_0) 3))
        (and (> (+ x2_0 x3_0 x4_0) (- 3))(< (+ x2_0 x3_0 x4_0) 3))
        (and (> (+ x3_0 x4_0 x5_0) (- 3))(< (+ x3_0 x4_0 x5_0) 3))
        (and (> (+ x0_1 x1_1 x2_1) (- 3))(< (+ x0_1 x1_1 x2_1) 3))
        (and (> (+ x1_1 x2_1 x3_1) (- 3))(< (+ x1_1 x2_1 x3_1) 3))
        (and (> (+ x2_1 x3_1 x4_1) (- 3))(< (+ x2_1 x3_1 x4_1) 3))
        (and (> (+ x3_1 x4_1 x5_1) (- 3))(< (+ x3_1 x4_1 x5_1) 3))
        (and (> (+ x0_2 x1_2 x2_2) (- 3))(< (+ x0_2 x1_2 x2_2) 3))
        (and (> (+ x1_2 x2_2 x3_2) (- 3))(< (+ x1_2 x2_2 x3_2) 3))
        (and (> (+ x2_2 x3_2 x4_2) (- 3))(< (+ x2_2 x3_2 x4_2) 3))
        (and (> (+ x3_2 x4_2 x5_2) (- 3))(< (+ x3_2 x4_2 x5_2) 3))
        (and (> (+ x0_3 x1_3 x2_3) (- 3))(< (+ x0_3 x1_3 x2_3) 3))
        (and (> (+ x1_3 x2_3 x3_3) (- 3))(< (+ x1_3 x2_3 x3_3) 3))
        (and (> (+ x2_3 x3_3 x4_3) (- 3))(< (+ x2_3 x3_3 x4_3) 3))
        (and (> (+ x3_3 x4_3 x5_3) (- 3))(< (+ x3_3 x4_3 x5_3) 3))
        (and (> (+ x0_4 x1_4 x2_4) (- 3))(< (+ x0_4 x1_4 x2_4) 3))
        (and (> (+ x1_4 x2_4 x3_4) (- 3))(< (+ x1_4 x2_4 x3_4) 3))
        (and (> (+ x2_4 x3_4 x4_4) (- 3))(< (+ x2_4 x3_4 x4_4) 3))
        (and (> (+ x3_4 x4_4 x5_4) (- 3))(< (+ x3_4 x4_4 x5_4) 3))
        (and (> (+ x0_5 x1_5 x2_5) (- 3))(< (+ x0_5 x1_5 x2_5) 3))
        (and (> (+ x1_5 x2_5 x3_5) (- 3))(< (+ x1_5 x2_5 x3_5) 3))
        (and (> (+ x2_5 x3_5 x4_5) (- 3))(< (+ x2_5 x3_5 x4_5) 3))
        (and (> (+ x3_5 x4_5 x5_5) (- 3))(< (+ x3_5 x4_5 x5_5) 3))

        ;; За сваку врсту мора постојати једнак број плавих и белих поља.
        (= 0 (+ x0_0 x0_1 x0_2 x0_3 x0_4 x0_5))
        (= 0 (+ x1_0 x1_1 x1_2 x1_3 x1_4 x1_5))
        (= 0 (+ x2_0 x2_1 x2_2 x2_3 x2_4 x2_5))
        (= 0 (+ x3_0 x3_1 x3_2 x3_3 x3_4 x3_5))
        (= 0 (+ x4_0 x4_1 x4_2 x4_3 x4_4 x4_5))
        (= 0 (+ x5_0 x5_1 x5_2 x5_3 x5_4 x5_5))

        ;; За сваку колону мора постојати једнак број плавих и белих поља.
        (= 0 (+ x0_0 x1_0 x2_0 x3_0 x4_0 x5_0))
        (= 0 (+ x0_1 x1_1 x2_1 x3_1 x4_1 x5_1))
        (= 0 (+ x0_2 x1_2 x2_2 x3_2 x4_2 x5_2))
        (= 0 (+ x0_3 x1_3 x2_3 x3_3 x4_3 x5_3))
        (= 0 (+ x0_4 x1_4 x2_4 x3_4 x4_4 x5_4))
        (= 0 (+ x0_5 x1_5 x2_5 x3_5 x4_5 x5_5))
))
(check-sat)
(get-value (
```

```
        x0_0 x0_1 x0_2 x0_3 x0_4 x0_5
        x1_0 x1_1 x1_2 x1_3 x1_4 x1_5
        x2_0 x2_1 x2_2 x2_3 x2_4 x2_5
        x3_0 x3_1 x3_2 x3_3 x3_4 x3_5
        x4_0 x4_1 x4_2 x4_3 x4_4 x4_5
        x5_0 x5_1 x5_2 x5_3 x5_4 x5_5
    )
)
(exit)
```

Покретање решавача даје да је проблем задовољив и даје нам вредности променљивих $x_{i,j}$ које представљају распоред поља.

```
sat
((x0_0 1)
 (x0_1 (- 1))
 (x0_2 1)
 (x0_3 (- 1))
 (x0_4 (- 1))
 (x0_5 1)
 (x1_0 (- 1))
 (x1_1 1)
 (x1_2 (- 1))
 (x1_3 1)
 (x1_4 (- 1))
 (x1_5 1)
 (x2_0 1)
 (x2_1 (- 1))
 (x2_2 (- 1))
 (x2_3 1)
 (x2_4 1)
 (x2_5 (- 1))
 (x3_0 (- 1))
 (x3_1 1)
 (x3_2 1)
 (x3_3 (- 1))
 (x3_4 (- 1))
 (x3_5 1)
 (x4_0 1)
 (x4_1 (- 1))
 (x4_2 (- 1))
 (x4_3 1)
 (x4_4 1)
 (x4_5 (- 1))
 (x5_0 (- 1))
 (x5_1 1)
 (x5_2 1)
 (x5_3 (- 1))
 (x5_4 1)
 (x5_5 (- 1)))
```

5 Закључак

У делу 4 приказан је пример решавања логичке игре користећи SMT решавач. Блискост логичких игара области математичке логике природно доводи до елегантног кодирања ограничења логичке игре. Такође, ефикасност при решавању и могућност добијања решења без потребе за развојем комплексног алгоритма чине да SMT решавачи (и SAT решавачи) буду алат број један при раду са логичким играма.

Литература

[1] Leonardo Alt, Sepideh Asadi, Hana Chockler, Karine Even Mendoza, Grigory Fedyukovich, Antti E. J. Hyvärinen, and Natasha Sharygina. Hifrog: Smt-based function summarization for software verification. In *23rd International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS)*, Uppsala, 2017. Springer, Springer.

[2] George B. Dantzig and Mukund N. Thapa. *Linear Programming 1: Introduction*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1997.

[3] Bruno Dutertre. Yices 2.2. In Armin Biere and Roderick Bloem, editors, *Computer-Aided Verification (CAV'2014)*, volume 8559 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 737–744. Springer, July 2014.

[4] Matthew W. Moskewicz, Conor F. Madigan, Ying Zhao, Lintao Zhang, and Sharad Malik. Chaff: Engineering an efficient sat solver. In *Proceedings of the 38th Annual Design Automation Conference*, DAC '01, pages 530–535, New York, NY, USA, 2001. ACM.

[5] Rajdeep Mukherjee, Daniel Kroening, and Tom Melham. Hardware verification using software analyzers. In *2015 IEEE Computer Society Annual Symposium on VLSI, ISVLSI 2015, Montpellier, France, July 8-10, 2015*, pages 7–12. IEEE Computer Society, 2015.

[6] Rajdeep Mukherjee, Mitra Purandare, Raphael Polig, and Daniel Kroening. Formal techniques for effective co-verification of hardware/software co-designs. In *Proceedings of the 54th Annual Design Automation Conference, DAC 2017, Austin, TX, USA, June 18-22, 2017*, pages 35:1–35:6, 2017.

[7] Rajdeep Mukherjee, Peter Schrammel, Leopold Haller, Daniel Kroening, and Tom Melham. Lifting CDCL to template-based abstract domains for program verification. *CoRR*, abs/1707.02011, 2017.

[8] Alan Robinson and Andrei Voronkov, editors. *Handbook of Automated Reasoning*. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, 2001.

[9] João P. Marques Silva and Karem A. Sakallah. Grasp—a new search algorithm for satisfiability. In *Proceedings of the 1996 IEEE/ACM International Conference on Computer-aided Design*, ICCAD '96, pages 220–227, Washington, DC, USA, 1996. IEEE Computer Society.

[10] João P. Marques Silva and Karem A. Sakallah. GRASP: A search algorithm for propositional satisfiability. *IEEE Trans. Computers*, 48(5):506–521, 1999.