Решавање неких логичких игара користећи СМТ решаваче

Семинарски рад у оквиру курса
Аутоматско резоновање
Математички факултет

Немања Мићовић, Лазар Ранковић
nmicovic@outlook.com, lazar.rankovic@outlook.com

Абстракт

dodati abstrakt dodati abstrakt dodati abstrakt dodati abstrakt dodati abstrakt dodati abstrakt dodati abstrakt dodati abstrakt dodati abstrakt dodati abstrakt

Садржај

1 Логичке игре

Логичке игре за собом имају дубоку традицију и историју, а упркос страховито брзом развоју технологије у последњих неколико година, и даље поседују велику популарност. Разлог за њихову популарност јесте често једноставност правила и неочекивана комплекност која уме да заинтригира људе. У многим часописима се редовно штампају игре као што је судоку (приказан на слици 1).

Логичке игре односно загонетке су погодне за математички опис користећи логику и представљају чест пример примене САТ и СМТ решавача за генерисање инстанци проблема, решавање и валидацију да ли је решење јединствено.

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Слика 1: Судоку

2 СМТ решавачи

3 Решавање логичких игара користећи СМТ решаваче

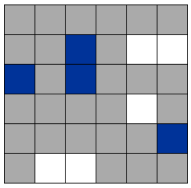
3.1 Логичка игра Три суседне

Логичка игра *Три судедне* се састоји из матрице поља димензије $n \times n$. На почетку игре, поља су обојена у плаво, бело и сиво. Поља која су обојена у сиво, играч може да промени у плава или бела, док оригинална плава и бела поља не може да мења. Ово ћемо звати *почетно стање игре.*

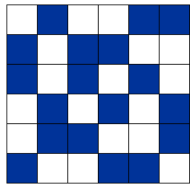
Циљ игре је да играч сва сива поља обоји у плаво или бело при чему морају да важе следећа ограничења:

- Не постоје три суседна поља у истој врсти која су обојена истом бојом (услов 1)
- Не постоје три суседна поља у истој колони која су обојена истом бојом (услов 2)
- У свим врстама мора бити једнак број плавих и белих поља (услов 3)
- У свим колонама мора бити једнак број плавих и белих поља (услов 4)

Стање у којем се налази табла (матрица) игре када је игра решена назваћемо *задовољено стање игре.*



Слика 2: Почетно стање игре



Слика 3: Задовољено стање игре

На слици 2 је приказано почетно стање игре, а на слици 3 решена инстанца игре игре *Три суседне*.

3.1.1 Ограниињења

Како би СМТ решавачем генерисали решења биће нам потребно кодирање претходно наведених услова. Таблу игре ћемо кодирати користећи $n \times n$ променљивих које ћемо означавати са $x_{i,j}$.

$$x_{i,j} = \left\{ \begin{array}{ll} -1, & \text{за бела поља} \\ 0, & \text{за сива поља} \\ 1, & \text{за плава поља} \end{array} \right\}$$

При чему важи:

$$I = \{0, 1, ..., n-1\}$$
$$J = \{0, 1, ..., n-1\}$$
$$T = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$
$$i \in I, j \in J$$

Услов 1 Кодирање услова 1 изводимо захтевом да збир три суседна поља у врсти мора припадати скупу T. Како имамо n врсти, при чему по свакој врсти имамо $n-2$ ограничења, добијамо $n(n-2)$ ограничења.

$$x_{i,j} + x_{i,j+1} + x_{i,j+2} \in T$$
$$i \in \{0, 1, ..., n-1\}$$
$$j \in \{0, 1, ..., n-3\}$$

Услов 2 Услов 2 је симетричан услову 1 тако да се добија још $n(n-2)$ додатних ограничења облика:

$$x_{i,j} + x_{i+1,j} + x_{i+2,j} \in T$$
$$i \in \{0, 1, ..., n-3\}$$
$$j \in \{0, 1, ..., n-1\}$$

Услов 3 Намећемо ограничење да збир у свакој врсти мора бити 0. Како променљиве $x_{i,j}$ имају вредност 1 или -1, ограничење имплицира једнак број плавих и белих поља у врсти. Ако је број врсти n тиме добијамо још n ограничења облика:

$$x_{0,0} + x_{0,1} + ... + x_{0,n-1} = 0$$
$$x_{1,0} + x_{1,1} + ... + x_{1,n-1} = 0$$
$$...$$
$$x_{n-1,0} + x_{n-1,1} + ... + x_{n-1,n-1} = 0$$

Услов 4 Услов 4 је симетричан услову 3 те добијамо додатних n ограничења облика:

$$x_{0,0} + x_{0,1} + ... + x_{0,n-1} = 0$$

$$x_{0,1} + x_{1,1} + ... + x_{n-1,1} = 0$$

$$...$$

$$x_{0,n-1} + x_{1,n-1} + ... + x_{n-1,n-1} = 0$$

Услови домена Решавачу је потребно наметнути дозвољене вредности за сваку од промењљивих. Како решавање логичке игре започињемо од унапред задатог стања (нека поља су већ обојена и не могу се мењати), имамо две врсте ограничења.

Оригинално задата плава и бела поља, решавачу намећемо вредности промењљивих 1 или -1. Ако је на пример поље (0, 3) обојено у плаво, а поље (3, 2) у бело мора важити:

$$x_{0,3} = 1$$

$$x_{3,2} = -1$$

За свако сиво обојено поље $x_{i,j}$, намећемо ограничења да вредности могу бити или -1 или 1.

$$x_{i,j} \neq 0 \wedge -1 \geq x_{i,j} \leq 1$$

Како имамо $n \times n$ промењљивих, добијамо још $n \times n$ услова.

3.1.2 Питање јединствености решења

Како би се показала и доказала јединственост решења, може се користити решавач да се добију вредности промењљивих, а да се након тога додају ограничења да промењљиве не могу узети вредности које представљају решења. Овде треба бити опрезан и приметити да само оригинална сива поља треба ограничити, а плава и бела (из почетног стања игре) не.

3.2 Yices program

Написан је c++ програм који за дато почетно стање игре генерише претходно наведена ограничења у синтакси погодној за yices смт решавач. Следи генерисани код за једну од инстанци игре.

```
(set-logic QF_LIA)
(declare-fun x0_0 () Int)
(declare-fun x0_1 () Int)
(declare-fun x0_2 () Int)
(declare-fun x0_3 () Int)
(declare-fun x0_4 () Int)
(declare-fun x0_5 () Int)
(declare-fun x1_0 () Int)
(declare-fun x1_1 () Int)
(declare-fun x1_2 () Int)
(declare-fun x1_3 () Int)
(declare-fun x1_4 () Int)
(declare-fun x1_5 () Int)
```

```
(declare-fun x2_0 () Int)
(declare-fun x2_1 () Int)
(declare-fun x2_2 () Int)
(declare-fun x2_3 () Int)
(declare-fun x2_4 () Int)
(declare-fun x2_5 () Int)
(declare-fun x3_0 () Int)
(declare-fun x3_1 () Int)
(declare-fun x3_2 () Int)
(declare-fun x3_3 () Int)
(declare-fun x3_4 () Int)
(declare-fun x3_5 () Int)
(declare-fun x4_0 () Int)
(declare-fun x4_1 () Int)
(declare-fun x4_2 () Int)
(declare-fun x4_3 () Int)
(declare-fun x4_4 () Int)
(declare-fun x4_5 () Int)
(declare-fun x5_0 () Int)
(declare-fun x5_1 () Int)
(declare-fun x5_2 () Int)
(declare-fun x5_3 () Int)
(declare-fun x5_4 () Int)
(declare-fun x5_5 () Int)
(assert
    (and
        ;; Ограничења домена
        (and (<= (- 1) x0_0)(>= 1 x0_0)(distinct 0 x0_0))
        (and (<= (- 1) x0_1)(>= 1 x0_1)(distinct 0 x0_1))
        (= x0_2 1)
        (and (<= (- 1) x0_3)(>= 1 x0_3)(distinct 0 x0_3))
        (and (<= (- 1) x0_4)(>= 1 x0_4)(distinct 0 x0_4))
        (and (<= (- 1) x0_5)(>= 1 x0_5)(distinct 0 x0_5))
        (and (<= (- 1) x1_0)(>= 1 x1_0)(distinct 0 x1_0))
        (= x1_1 1)
        (and (<= (- 1) x1_2)(>= 1 x1_2)(distinct 0 x1_2))
        (and (<= (- 1) x1_3)(>= 1 x1_3)(distinct 0 x1_3))
        (= x1_4 (- 1))
        (and (<= (- 1) x1_5)(>= 1 x1_5)(distinct 0 x1_5))
        (and (<= (- 1) x2_0)(>= 1 x2_0)(distinct 0 x2_0))
        (= x2_1 (- 1))
        (and (<= (- 1) x2_2)(>= 1 x2_2)(distinct 0 x2_2))
        (and (<= (- 1) x2_3)(>= 1 x2_3)(distinct 0 x2_3))
        (and (<= (- 1) x2_4)(>= 1 x2_4)(distinct 0 x2_4))
        (and (<= (- 1) x2_5)(>= 1 x2_5)(distinct 0 x2_5))
        (= x3_0 (- 1))
        (and (<= (- 1) x3_1)(>= 1 x3_1)(distinct 0 x3_1))
        (= x3_2 1)
        (and (<= (- 1) x3_3)(>= 1 x3_3)(distinct 0 x3_3))
        (= x3_4 (- 1))
        (and (<= (- 1) x3_5)(>= 1 x3_5)(distinct 0 x3_5))
        (and (<= (- 1) x4_0)(>= 1 x4_0)(distinct 0 x4_0))
        (and (<= (- 1) x4_1)(>= 1 x4_1)(distinct 0 x4_1))
        (and (<= (- 1) x4_2)(>= 1 x4_2)(distinct 0 x4_2))
```

```
(and (<= (- 1) x4_3)(>= 1 x4_3)(distinct 0 x4_3))
(and (<= (- 1) x4_4)(>= 1 x4_4)(distinct 0 x4_4))
(= x4_5 (- 1))
(and (<= (- 1) x5_0)(>= 1 x5_0)(distinct 0 x5_0))
(= x5_1 1)
(= x5_2 1)
(and (<= (- 1) x5_3)(>= 1 x5_3)(distinct 0 x5_3))
(= x5_4 1)
(and (<= (- 1) x5_5)(>= 1 x5_5)(distinct 0 x5_5))

;; У истој врсти три суседна поља не смеју бити сте боје
(and (> (+ x0_0 x0_1 x0_2) (- 3))(< (+ x0_0 x0_1 x0_2) 3))
(and (> (+ x0_0 x0_1 x0_2) (- 3))(< (+ x0_0 x0_1 x0_2) 3))
(and (> (+ x0_1 x0_2 x0_3) (- 3))(< (+ x0_1 x0_2 x0_3) 3))
(and (> (+ x0_1 x0_2 x0_3) (- 3))(< (+ x0_1 x0_2 x0_3) 3))
(and (> (+ x0_2 x0_3 x0_4) (- 3))(< (+ x0_2 x0_3 x0_4) 3))
(and (> (+ x0_2 x0_3 x0_4) (- 3))(< (+ x0_2 x0_3 x0_4) 3))
(and (> (+ x0_3 x0_4 x0_5) (- 3))(< (+ x0_3 x0_4 x0_5) 3))
(and (> (+ x0_3 x0_4 x0_5) (- 3))(< (+ x0_3 x0_4 x0_5) 3))
(and (> (+ x1_0 x1_1 x1_2) (- 3))(< (+ x1_0 x1_1 x1_2) 3))
(and (> (+ x1_0 x1_1 x1_2) (- 3))(< (+ x1_0 x1_1 x1_2) 3))
(and (> (+ x1_1 x1_2 x1_3) (- 3))(< (+ x1_1 x1_2 x1_3) 3))
(and (> (+ x1_1 x1_2 x1_3) (- 3))(< (+ x1_1 x1_2 x1_3) 3))
(and (> (+ x1_2 x1_3 x1_4) (- 3))(< (+ x1_2 x1_3 x1_4) 3))
(and (> (+ x1_2 x1_3 x1_4) (- 3))(< (+ x1_2 x1_3 x1_4) 3))
(and (> (+ x1_3 x1_4 x1_5) (- 3))(< (+ x1_3 x1_4 x1_5) 3))
(and (> (+ x1_3 x1_4 x1_5) (- 3))(< (+ x1_3 x1_4 x1_5) 3))
(and (> (+ x2_0 x2_1 x2_2) (- 3))(< (+ x2_0 x2_1 x2_2) 3))
(and (> (+ x2_0 x2_1 x2_2) (- 3))(< (+ x2_0 x2_1 x2_2) 3))
(and (> (+ x2_1 x2_2 x2_3) (- 3))(< (+ x2_1 x2_2 x2_3) 3))
(and (> (+ x2_1 x2_2 x2_3) (- 3))(< (+ x2_1 x2_2 x2_3) 3))
(and (> (+ x2_2 x2_3 x2_4) (- 3))(< (+ x2_2 x2_3 x2_4) 3))
(and (> (+ x2_2 x2_3 x2_4) (- 3))(< (+ x2_2 x2_3 x2_4) 3))
(and (> (+ x2_3 x2_4 x2_5) (- 3))(< (+ x2_3 x2_4 x2_5) 3))
(and (> (+ x2_3 x2_4 x2_5) (- 3))(< (+ x2_3 x2_4 x2_5) 3))
(and (> (+ x3_0 x3_1 x3_2) (- 3))(< (+ x3_0 x3_1 x3_2) 3))
(and (> (+ x3_0 x3_1 x3_2) (- 3))(< (+ x3_0 x3_1 x3_2) 3))
(and (> (+ x3_1 x3_2 x3_3) (- 3))(< (+ x3_1 x3_2 x3_3) 3))
(and (> (+ x3_1 x3_2 x3_3) (- 3))(< (+ x3_1 x3_2 x3_3) 3))
(and (> (+ x3_2 x3_3 x3_4) (- 3))(< (+ x3_2 x3_3 x3_4) 3))
(and (> (+ x3_2 x3_3 x3_4) (- 3))(< (+ x3_2 x3_3 x3_4) 3))
(and (> (+ x3_3 x3_4 x3_5) (- 3))(< (+ x3_3 x3_4 x3_5) 3))
(and (> (+ x3_3 x3_4 x3_5) (- 3))(< (+ x3_3 x3_4 x3_5) 3))
(and (> (+ x4_0 x4_1 x4_2) (- 3))(< (+ x4_0 x4_1 x4_2) 3))
(and (> (+ x4_0 x4_1 x4_2) (- 3))(< (+ x4_0 x4_1 x4_2) 3))
(and (> (+ x4_1 x4_2 x4_3) (- 3))(< (+ x4_1 x4_2 x4_3) 3))
(and (> (+ x4_1 x4_2 x4_3) (- 3))(< (+ x4_1 x4_2 x4_3) 3))
(and (> (+ x4_2 x4_3 x4_4) (- 3))(< (+ x4_2 x4_3 x4_4) 3))
(and (> (+ x4_2 x4_3 x4_4) (- 3))(< (+ x4_2 x4_3 x4_4) 3))
(and (> (+ x4_3 x4_4 x4_5) (- 3))(< (+ x4_3 x4_4 x4_5) 3))
(and (> (+ x4_3 x4_4 x4_5) (- 3))(< (+ x4_3 x4_4 x4_5) 3))
(and (> (+ x5_0 x5_1 x5_2) (- 3))(< (+ x5_0 x5_1 x5_2) 3))
(and (> (+ x5_0 x5_1 x5_2) (- 3))(< (+ x5_0 x5_1 x5_2) 3))
(and (> (+ x5_1 x5_2 x5_3) (- 3))(< (+ x5_1 x5_2 x5_3) 3))
```

```
        (and (> (+ x5_1 x5_2 x5_3) (- 3))(< (+ x5_1 x5_2 x5_3) 3))
        (and (> (+ x5_2 x5_3 x5_4) (- 3))(< (+ x5_2 x5_3 x5_4) 3))
        (and (> (+ x5_2 x5_3 x5_4) (- 3))(< (+ x5_2 x5_3 x5_4) 3))
        (and (> (+ x5_3 x5_4 x5_5) (- 3))(< (+ x5_3 x5_4 x5_5) 3))
        (and (> (+ x5_3 x5_4 x5_5) (- 3))(< (+ x5_3 x5_4 x5_5) 3))

        ;; У истој колони три суседна поља не смеју бити сте боје
        (and (> (+ x0_0 x1_0 x2_0) (- 3))(< (+ x0_0 x1_0 x2_0) 3))
        (and (> (+ x1_0 x2_0 x3_0) (- 3))(< (+ x1_0 x2_0 x3_0) 3))
        (and (> (+ x2_0 x3_0 x4_0) (- 3))(< (+ x2_0 x3_0 x4_0) 3))
        (and (> (+ x3_0 x4_0 x5_0) (- 3))(< (+ x3_0 x4_0 x5_0) 3))
        (and (> (+ x0_1 x1_1 x2_1) (- 3))(< (+ x0_1 x1_1 x2_1) 3))
        (and (> (+ x1_1 x2_1 x3_1) (- 3))(< (+ x1_1 x2_1 x3_1) 3))
        (and (> (+ x2_1 x3_1 x4_1) (- 3))(< (+ x2_1 x3_1 x4_1) 3))
        (and (> (+ x3_1 x4_1 x5_1) (- 3))(< (+ x3_1 x4_1 x5_1) 3))
        (and (> (+ x0_2 x1_2 x2_2) (- 3))(< (+ x0_2 x1_2 x2_2) 3))
        (and (> (+ x1_2 x2_2 x3_2) (- 3))(< (+ x1_2 x2_2 x3_2) 3))
        (and (> (+ x2_2 x3_2 x4_2) (- 3))(< (+ x2_2 x3_2 x4_2) 3))
        (and (> (+ x3_2 x4_2 x5_2) (- 3))(< (+ x3_2 x4_2 x5_2) 3))
        (and (> (+ x0_3 x1_3 x2_3) (- 3))(< (+ x0_3 x1_3 x2_3) 3))
        (and (> (+ x1_3 x2_3 x3_3) (- 3))(< (+ x1_3 x2_3 x3_3) 3))
        (and (> (+ x2_3 x3_3 x4_3) (- 3))(< (+ x2_3 x3_3 x4_3) 3))
        (and (> (+ x3_3 x4_3 x5_3) (- 3))(< (+ x3_3 x4_3 x5_3) 3))
        (and (> (+ x0_4 x1_4 x2_4) (- 3))(< (+ x0_4 x1_4 x2_4) 3))
        (and (> (+ x1_4 x2_4 x3_4) (- 3))(< (+ x1_4 x2_4 x3_4) 3))
        (and (> (+ x2_4 x3_4 x4_4) (- 3))(< (+ x2_4 x3_4 x4_4) 3))
        (and (> (+ x3_4 x4_4 x5_4) (- 3))(< (+ x3_4 x4_4 x5_4) 3))
        (and (> (+ x0_5 x1_5 x2_5) (- 3))(< (+ x0_5 x1_5 x2_5) 3))
        (and (> (+ x1_5 x2_5 x3_5) (- 3))(< (+ x1_5 x2_5 x3_5) 3))
        (and (> (+ x2_5 x3_5 x4_5) (- 3))(< (+ x2_5 x3_5 x4_5) 3))
        (and (> (+ x3_5 x4_5 x5_5) (- 3))(< (+ x3_5 x4_5 x5_5) 3))

        ;; За сваку врсту мора постојати једнак број плавих и белих поља.
        (= 0 (+ x0_0 x0_1 x0_2 x0_3 x0_4 x0_5))
        (= 0 (+ x1_0 x1_1 x1_2 x1_3 x1_4 x1_5))
        (= 0 (+ x2_0 x2_1 x2_2 x2_3 x2_4 x2_5))
        (= 0 (+ x3_0 x3_1 x3_2 x3_3 x3_4 x3_5))
        (= 0 (+ x4_0 x4_1 x4_2 x4_3 x4_4 x4_5))
        (= 0 (+ x5_0 x5_1 x5_2 x5_3 x5_4 x5_5))

        ;; За сваку колону мора постојати једнак број плавих и белих поља.
        (= 0 (+ x0_0 x1_0 x2_0 x3_0 x4_0 x5_0))
        (= 0 (+ x0_1 x1_1 x2_1 x3_1 x4_1 x5_1))
        (= 0 (+ x0_2 x1_2 x2_2 x3_2 x4_2 x5_2))
        (= 0 (+ x0_3 x1_3 x2_3 x3_3 x4_3 x5_3))
        (= 0 (+ x0_4 x1_4 x2_4 x3_4 x4_4 x5_4))
        (= 0 (+ x0_5 x1_5 x2_5 x3_5 x4_5 x5_5))
))
(check-sat)
(get-value (
        x0_0 x0_1 x0_2 x0_3 x0_4 x0_5
        x1_0 x1_1 x1_2 x1_3 x1_4 x1_5
        x2_0 x2_1 x2_2 x2_3 x2_4 x2_5
        x3_0 x3_1 x3_2 x3_3 x3_4 x3_5
```

```
        x4_0 x4_1 x4_2 x4_3 x4_4 x4_5
        x5_0 x5_1 x5_2 x5_3 x5_4 x5_5
    )
)
(exit)
```

Покретање речавање даје да је проблем задовољив и даје нам вредности промењљивих $x_{i,j}$ које представљају распоред поља.

```
sat
((x0_0 1)
 (x0_1 (- 1))
 (x0_2 1)
 (x0_3 (- 1))
 (x0_4 (- 1))
 (x0_5 1)
 (x1_0 (- 1))
 (x1_1 1)
 (x1_2 (- 1))
 (x1_3 1)
 (x1_4 (- 1))
 (x1_5 1)
 (x2_0 1)
 (x2_1 (- 1))
 (x2_2 (- 1))
 (x2_3 1)
 (x2_4 1)
 (x2_5 (- 1))
 (x3_0 (- 1))
 (x3_1 1)
 (x3_2 1)
 (x3_3 (- 1))
 (x3_4 (- 1))
 (x3_5 1)
 (x4_0 1)
 (x4_1 (- 1))
 (x4_2 (- 1))
 (x4_3 1)
 (x4_4 1)
 (x4_5 (- 1))
 (x5_0 (- 1))
 (x5_1 1)
 (x5_2 1)
 (x5_3 (- 1))
 (x5_4 1)
 (x5_5 (- 1)))
```

4 Закључак

Радови приказани у делу **??** показали су да област машинског учења може пронаћи примену у области статичке верификације софтвера. Добијени резултати су били барем упоредиви са другим приступима, а у неким случајевима и доста бољи. Неки од проблема који се јављају при употреби алгоритама машинског учења јесу неинтерпретабилност добијеног модела и неегзактна предвиђања које модел врши. Проблем интерпретабилности је превазиђен стаблима одлучивања [?, ?] која су позната да дају интерпретабилне моделе, док је проблем неегзактног предвиђања ублажен у раду [?] где се као резултат даје листа програмских својстава које човек анализира. Уколико је неко својство погрешно класификовано, неће проузроковати велику грешку.

Литература