COLLÈGE DE LA SAGESSE
SECTION SAINT JEAN
BRASILIA BAABDA

aefe

Georgio

Classe de SG
Décembre 2023
Durée : 4 heures

Examen de Mathématiques (20 points)

Exercice 1 : (5 pts) Des questions indépendantes

1) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{6x\sin(x)-3\pi}{6x-3\pi}$. b) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{x-\pi}{E(\sin(x)+2)-1}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(2x)}{1-\cos(4x)}$.

2) Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x) = (1+\cos(x))\sin(2x)$

Déterminer la primitive de h qui s'annule en π.

3) Déterminer une primitive de la fonction g définie sur IR par :

$$g(x) = \frac{\sin(2x)}{7-\cos^2(x)}$$

4) On considère le nombre complexe

$$z = 1 - tan^2(\alpha) + 2i\tan(\alpha) \qquad \text{où } \alpha \in \left]-\frac{\pi}{4};0\right[$$

- Choisir, en justifiant, la (ou les) bonne(s) réponse(s) :

a) $Re(z) < 0$.

b) $|z| = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$

c) $Im(z) = \tan(2\alpha) \times \frac{cos(2\alpha)}{\cos^2(\alpha)}$

5)

a) Déterminer les racines cubiques de l'unité.

b) Vérifier que $z_0 = 1+i$ est une racine cubique de $-2+2i$.

c)

i) Montrer que :

z est une racine cubique de $-2+2i$ équivaut à $\left(\frac{z}{1+i}\right)^3 = 1$.

ii) En déduire la forme algébrique des deux autres racines cubiques z_1 et z_2 de $-2+2i$.

Exercice 2 : (2 pts)

Soient f et g les fonctions définies sur IR par

$$f(x) = \cos x \cos(3x) \quad et \quad g(x) = \sin x \sin(3x).$$

1) Calculer

$\cos(x-3x)$ $\cos(-2x)$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) + g(x)\, dx \quad et \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) - g(x)\, dx$$

2) En déduire les valeurs exactes de : 4

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx \quad et \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)\, dx$$

Exercice 3 : (4 pts)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$.

1)

a) Montrer que l'on peut écrire : $u_{n+1} = 2 - \frac{5}{u_n+4}$

b) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leq u_n < 1.$$

c) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$$

Démontrer que la fonction f est croissante.

d) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

e) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ que l'on déterminera.

2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et déterminer son premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Retrouver alors la limite de (u_n).

Exercice 4 : (4 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$f(x) = 2\,e^{-x} + x - 2\,.$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath}\,\vec{\jmath})$.

On prendra $1\,u.a = 16cm^2$.

1)

a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (d) d'équation $y = x - 2$ au voisinage de $+\infty$.

c) Etudier la position relative de (C_f) et (d).

2)

a) Déterminer $f'(x)$.

b) On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans IR dont l'une est nulle.

d) On notera α l'autre solution. Vérifier que $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$.

e) Représenter graphiquement (C_f) *et* (d) dans un repère orthonormé.

3) Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

Montrer que $\mathcal{A} = (16\alpha - 8\alpha^2)cm^2$.

Exercice 5 : (5 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{5}x$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Partie A

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{5}x$ est asymptote à (C_f) à $+\infty$.
3. Etudier la position relative de (C_f) et de (D).
4. On admet que pour tout réel x, $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{4}{5}x$.

   Calculer alors la limite de f à $-\infty$.
5. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \frac{e^x - 4}{5(e^x + 1)}$.
6. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n l'aire en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe (C_f), la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{5}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1) Montrer que, pour tout entier non nul, $d_n = \int_0^n \ln(1 + e^{-x})\, dx$.
2) On admet que, pour tout réel x, $\ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, $d_n \leq 1$.
   b) Montrer que la suite (d_n) est croissante.
   c) En déduire que la suite (d_n) converge.

Partie C

On note (T) la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.

Soient M et N deux points de (C_f) d'abscisses non nulles et opposées.

Montrer que (MN) est parallèle à (T).