Année scolaire : 2016 – 2017 **Date: 05 / 09 /2016**

Nom: **Classe: 3ème année secondaire – S.G.**

PRINCIPE DU RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Pour montrer qu'une propriété P(n), dépendant d'un entier naturel n, est vraie à partir de l'entier n_0 :

1) On vérifie qu'elle est vraie pour le rang initial n_0 .

C'est-à-dire $P(n_0)$ **est vraie**.

INITIALISATION

2) On suppose que la propriété est vraie pour un entier $n > n_0$, c-à-d P(n) **est vraie**.

3) On démontre qu'elle est alors vraie pour l'entier n + 1, c'est-à-dire P(n + 1) **est vraie**.

HÉRÉDITÉ

4) On conclut alors que la propriété P(n) est vraie pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$.

CONCLUSION

Ce raisonnement est appelé raisonnement par récurrence.

Exercices d'entrainement

1) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   b) En déduire une relation entre la somme des cubes et la somme des entiers de 1 à n.

4) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

5) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :
   $(1 \times 1\,!) + (2 \times 2\,!) + (3 \times 3\,!) + \ldots + (n \times n\,!) = (n+1)\,! - 1$. (On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$).

6) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $n\,! \geq 2^{n-1}$.

7) Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $5^n \geq 4^n + 3n$.

8) Démontrer que pour tout entier $n \geq 4$, on a $2^n \geq n^2$.

9) Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $3n^2 \geq (n + 1)^{2}$.

10) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $3^n \geq 2^n + 5n^2$.

11) Démontrer que pour tout entier n, $4^n + 5$ est un multiple de 3.

12) Démontrer que pour tout entier n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

Suites numériques (Rappel)

I- PRINCIPE DU RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Pour montrer qu'une propriété P(n), dépendant d'un entier naturel n, est vraie à partir de l'entier n_0 :

1) On vérifie qu'elle est vraie pour le rang initial n_0 . C'est-à-dire $P(n_0)$ **est vraie**.

2) On suppose que la propriété est vraie pour un entier $n > n_0$, c-à-d P(n) **est vraie**.

3) On démontre qu'elle est alors vraie pour l'entier $n + 1$, c'est-à-dire $P(n + 1)$ **est vraie**.

On conclut alors que la propriété P(n) est vraie pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant n_0$.

Ce raisonnement est appelé raisonnement par récurrence.

II- SUITES NUMERIQUES

1) Définition

Une suite numérique est une application f d'une partie I de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

$$f: I \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto f(n).$$

On dit que I est l'ensemble des indices de la suite. L'image de n par f , qui est f(n), est notée u_n et s'appelle **le terme général** de la suite.

Une suite de terme général u_n est notée (u_n).

Les réels u_0 , u_1 , u_2 , ... , sont les **termes successifs de la suite.**

Parfois la suite n'est définit qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ alors le terme correspondant de la suite, u_{n_0} , est son **premier terme.**

2) Détermination

Déterminer une suite, c'est se donner les moyens de calculer ses termes.

Une suite numérique peut être déterminée par :

a) ***<u>Suite explicite</u>*** : la donnée d'une formule explicite, $u_n = f(n)$, où f est une numérique, c'est-à-dire la donnée de son terme général.

b) ***<u>Suite récurrente</u>***: la donnée de son premier terme et d'une relation de la forme $u_{n+1} = g(u_n)$, g étant une fonction numérique. La suite, dans ce appelée **suite récurrente** ou suite définie par récurrence.

Exercices d'entrainement

I- Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2) Démontrer par récurrence que $u_n = 3 - 2^n$.

II- Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer, par récurrence, que $u_n = 2^{n-1} + 1$.

III- La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = - u_n + 4$.

1) Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.
2) Démontrer cette conjecture par récurrence.

IV- La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1) Détermine u_1, u_2, u_3, $u4$, u_5.
2) Étudier les premiers termes de la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$.
3) Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n.
4) Démontrer cette conjecture par récurrence.
5) Exprimer alors u_n en fonction de n.

V- La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5u_n - 8$. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est constante.

VI- Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$.

1) Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4.
2) Conjecturer l'expression de S_n en fonction de n.
3) Démontrer cette conjecture par récurrence.
4) Observer la somme S_n et donner une autre démonstration de la conjecture. (On peut utiliser le fait que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$).

VII- La suite (u_n) est définie par $u_0 \in]0 ; 1[$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$. (on pourra utiliser la fonction f définie sur $]0 ; 1[$ par $f(x) = x(2 - x)$).

3) Sens de variation

Soit une suite numérique (u_n) définie sur une partie I de $\mathbb{N}$.

- (u_n) est dite croissante (strictement croissante) si, pour tout entier naturel n de I, $u_{n+1} \geqslant u_n$ $(u_{n+1} > u_n)$.
- (u_n) est dite décroissante (strictement décroissante) si, pour tout entier naturel n de I , $u_{n+1} \leqslant u_n$ $(u_{n+1} > u_n)$.
- Une suite croissante (ou décroissante) est dite monotone.

Remarques **••**

1- ***Sens de variations d'une suite explicite*** : Voici trois méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite numérique définie explicitement .

a) ***On détermine le signe de*** $\mathbf{u_{n+1} - u_n}$.

- Si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors (u_n) est croissante.
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors (u_n) est décroissante

b) ***Si les termes de la suite*** $\mathbf{(u_n)}$ ***sont strictement positifs, on compare*** $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ **à 1.**

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors (u_n) est croissante.
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors (u_n) est décroissante.

c) ***Si le terme général de la suite*** $\mathbf{(u_n)}$ ***s'écrit*** $\mathbf{u_n = f(n)}$ ***, où*** **f** ***est une fonction numérique, le sens de variation de*** $\mathbf{(u_n)}$ ***est celui de*** **f**. On étudie alors le signe de f ' dérivée de f.

2- ***Sens de variations d'une suite récurrente*** : Pour étudier le sens de variation d'une suite récurrente, il est avantageux d'utiliser le raisonnement par récurrence. Par exemple on détermine le signe de $u_1 - u_0$, on conclue le sens de variation de $\mathbf{(u_n)}$ et en le démontre par récurrence.

Exercices d'entrainement

III- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{2n-3}{n+2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que (u_n) est strictement croissante.

IV- Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Démontrer que les termes de cette suite sont strictement positifs.
2) Démontrer que (u_n) est strictement croissante.
3) Démontrer, par récurrence, que $u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III- SUITE ARITHMETIQUE – SUITE GEOMETRIQUE

		Suite arithmétique	Suite géométrique
Forme récurrente		1er terme donné et $U_{n+1} = U_n + r$ **où** r est la **raison**	1er terme donné et $U_{n+1} = qU_n$ **où** q est la **raison**
Pour démontrer qu'une suite est :		arithmétique , on démontrer que $U_{n+1} - U_n$ = constante **r = raison**	géométrique , on démontrer que $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ = constante **q = raison**
Forme explicite	***Si le 1er terme est*** U_0	$U_n = U_0 + nr$	$U_n = U_0\, q^n$
	Si le 1er terme est U_1	$U_n = U_1 + (n-1)r$	$U_n = U_1\, q^{n-1}$
	Si le 1er terme est U_p	$U_n = U_p + (n-p)r$	$U_n = U_p\, q^{n-p}$
Somme des n premiers termes		$\underbrace{U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}}_{\text{n termes}} = \dfrac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})$ $\underbrace{U_1 + U_2 + \dots + U_n}_{\text{n termes}} = \dfrac{n}{2}(U_1 + U_n)$ $\underbrace{U_0 + U_1 + \dots + U_n}_{\text{n+1 termes}} = \dfrac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$	$\underbrace{U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}}_{\text{n termes}} = U_0\dfrac{1-q^n}{1-q}$ $\underbrace{U_1 + U_2 + \dots + U_n}_{\text{n termes}} = U_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$ $\underbrace{U_0 + U_1 + \dots + U_n}_{\text{n+1 termes}} = U_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exercices d'entrainement

V- Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1-u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Démontrer, par récurrence, que $u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Supposons que $v_n = 1 + \dfrac{1}{u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

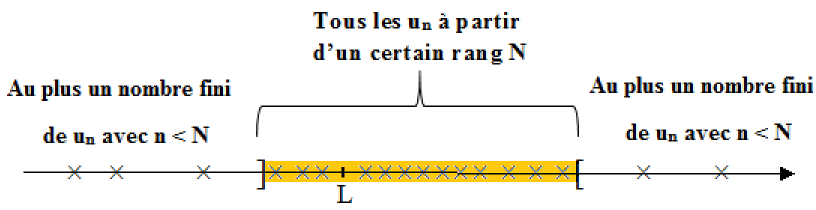
VI- Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - 3 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Démontrer que la suite (u_n) est ni arithmétique ni géométrique.
2) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 2u_n + 8$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c) Calculer la somme $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ en fonction de n. En déduire la somme $t_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ en fonction de n.

Suites numériques

I- LIMITE D'UNE SUITE

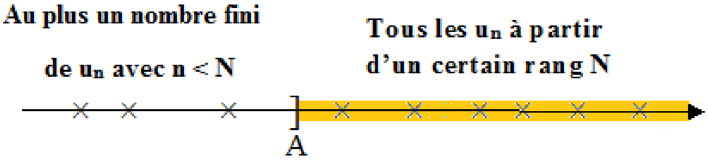
Définition 1 (limite finie) : Dire qu'une suite (u_n) a pour **limite un nombre réel *L*** signifie que tout intervalle ouvert contenant *L* contient tous les termes de la suite **à partir un certain indice (ou rang)**. On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.



► Cette définition traduit l'accumulation des termes de (u_n) autour de *L*.
► On dit que la suite (u_n) est **convergente de limite *L*** ou qu'elle **converge vers *L***.
► ***Remarque*** : Lorsqu'elle existe, la limite *L* est **unique**.
► Les suites de **référence** définies pour tout entier naturel non nuls n par : $u_n = \frac{1}{n}$; $v_n = \frac{1}{n^2}$; $w_n = \frac{1}{n^3}$ et $t_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ sont convergentes vers 0.

Définition 2 (limite infinie)

Dire qu'une suite (u_n) a pour **limite + ∞** signifie que tout intervalle ouvert de la forme]A ; + ∞[contient tous les termes de la suite (u_n) **à partir un certain indice (ou rang)**. On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.



► Cette définition traduit l'idée que les termes u_n arrivent à dépasser tout nombre A, aussi grand soit-il.
► ***Limite* – ∞ :** De même, l'écriture $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme]– ∞ ; A[contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain indice.
► Les suites de **référence** définies pour tout entier naturel n par : $u_n = n$; $v_n = n^2$; $w_n = n^3$ et $t_n = \sqrt{n}$ ont pour limite + ∞.
► **Conclusion :** Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$. Si la limite *L* est **finie**, on dit alors que (u_n) **converge** vers *L*. On dit aussi que (u_n) est **convergente** (vers L). Une suite (u_n) est **non convergente** si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $-\infty$ soit que cette limite n'existe pas.

II- Etude de la convergence d'une suite

1- Suite définie par une formule explicite

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme [a ; + ∞[. On dit que **la suite de terme général** $u_n = f(n)$ **a une limite** *L* (réel ou + ∞ ou – ∞) si, et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$. On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

Exemple 1:

a) La suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$ est convergente vers $L = 2$, car :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2$.

b) La suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 2^n$ a pour limite $L = +\infty$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$ car $2 > 1$. Donc (u_n) est une suite non convergente.

c) La suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (-1)^n$ est non convergente car sa limite n'existe pas.

2- Suite majorée – suite minorée

- Une suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$, est dite **majorée** s'il existe un réel k tel que: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq k$. k s'appelle **majorant** de la suite.
- Une suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$, est dite **minorée** s'il existe un réel m tel que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$. m s'appelle **minorant** de la suite.
- Une suite est dite **bornée** lorsqu'elle est, à la fois, majorée et minorée.

Exemple 2 :

- La suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ est majorée par 1, en effet :

  $u_n - 1 = \dfrac{1}{n+1} - 1 = \dfrac{-n}{n+1} < 0$ donc $u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  Cette suite est aussi minorée par 0 car , pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$.

  La suite (u_n) est donc bornée, $0 < u_n < 1$.
- La suite récurrente , définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < u_n < 2$.

  En effet : Par récurrence on a :
  - $u_0 = 1$, donc $0 < u_0 < 2$ est vraie.
  - Supposons que $0 < u_n < 2$.
  - Démontrons que $0 < u_{n+1} < 2$.

    En effet : on a $0 < u_n < 2$, donc $2 < 2 + u_n < 4$ alors $0 < \sqrt{2} < \sqrt{2+u_n} < 2$ donc $0 < u_{n+1} < 2$ et ce qu'il fallait démontrer.

    <u>Autre méthode</u> : La fonction g définie sur $]0 ; 2[$ par $g(u_n) = u_{n+1}$ qui est $x \mapsto \sqrt{2+x}$ est strictement croissante et comme $0 < u_n < 2$ alors $g(0) < g(u_n) < g(2)$ donc $0 < \sqrt{2} < u_{n+1} < 2$ et c.q.f.d.

  <u>Conclusion</u> : La suite (u_n) est bornée car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n < 2$.

  <u>Remarque</u> ••

  Une suite (u_n) est dite **périodique** à partir d'un entier n_0 de $\mathbb{N}$ s'il existe un entier naturel non nul p tel que $u_{n+p} = u_n$, pour tout $n > n_0$.

  La plus petite valeur prise par p s'appelle la **période** de (u_n).

  Exemple 3 : La suite (u_n) définie par $u_n = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3} + n\dfrac{\pi}{3}\right)$ est périodique de période 6, en effet : $u_{n+6} = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3} + (n+6)\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{n\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3} + n\dfrac{\pi}{3}\right) = u_n$.

3- Théorème des suites monotones

- Toute suite croissante et majorée par un réel a est convergente vers une limite l telle que $l \leq a$.
- Toute suite décroissante et minorée par un réel b est convergente vers une limite l telle que $l \geq b$.

Exemple 4 : Soit la suite récurrente, définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

- La suite (u_n) est **croissante** : **Démontrons par récurrence que** $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  En effet : $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{3}$ donc $u_1 \geq u_0$.
  Supposons que $u_{n+1} \geq u_n$.
  Démontrons que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$?
  En effet : On a $u_{n+1} \geq u_n$ donc $2 + u_{n+1} \geq 2 + u_n$ donc $\sqrt{2+u_{n+1}} \geq \sqrt{2+u_n}$ donc $u_{n+2} \geq u_{n+1}$
  et c.q.f.d. Alors la suite (U_n) est strictement croissante.
  Autre méthode : La fonction g définie sur]0 ; 2[par $g(u_n) = u_{n+1}$ qui est $x \mapsto \sqrt{2+x}$ est strictement croissante et comme $u_{n+1} \geq u_n$ alors $g(u_{n+1}) \geq g(u_n)$ donc $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.
- La suite (u_n) est majorée par 2 : on a déjà démontrer dans l'exemple 2) b) que $u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  D'après le **théorème des suites monotones** (u_n) est convergente.

Remarque : Ce théorème est très efficace pour étudier une suite récurrente. Cependant, elle ne permet pas de déterminer sa limite dans le cas de la convergence. La propriété suivante complète une telle étude**.**
Propriété : Soit une suite récurrente convergente définie par u_0 et $u_{n+1} = g(u_n)$.
Si la fonction $x \mapsto g(x)$ est continue, alors la limite l de cette suite est une racine de l'équation : $l = g(l)$. (On voit bien que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$).

Exemple 5 : La suite récurrente , définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ est convergente vers une limite l.
La fonction g définie par : $x \mapsto \sqrt{2+x}$ est continue, donc l vérifie $l = g(l)$ donc $l = \sqrt{2+l}$ avec $l > 0$. Donc $l^2 = l + 2$ donc $l^2 - l - 2 = 0$ et $l = -1$ (à rejeter car $l > 0$) ou $l = 2$ (acceptable).
Conclusion : La suite (u_n) converge vers 2.

4- Propriété des suites convergentes

- Si une suite converge vers une limite l, alors cette limite est unique.
- Toute suite convergente est bornée.
- Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

5- Opérations sur les limites

Les opérations sur les limites à l'infini des fonctions à variable réelle sont induites, sans changement, sur les suites. Si donc (u_n) et (v_n) sont deux suites convergeant vers l et k respectivement, alors:

$\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = l + k$	$\lim_{n\to+\infty}(u_n + c) = l + c$
$\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = l\,k$	$\lim_{n\to+\infty}(c u_n) = c\,l$
$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{l}{k}$ $(k \neq 0)$	$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{c}{v_n}\right) = \frac{c}{k}$ $(k \neq 0)$

Remarque : Dans le cas où l ou k , est $+\infty$ ou $-\infty$, opérations sur les limites des fonctions à variable réelle restent également valables dans le cas des suites.

6- Suites et inégalités

On sait que les limites à l'infini des fonctions d'une variable réelle respectent les inégalités ; il en est de même pour celles des suites, Ainsi:

- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites ayant des limites et telles que, pour tout n, $u_n \leq v_n$, alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$**.**
- Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites ayant des limites et telles que, pour tout n, $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n \leq \lim_{n\to+\infty} w_n$.

- Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites ayant des limites et telles que, pour tout n, $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$, et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

  En particulier :
  - Si $u_n \leq v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
  - Si $u_n \leq v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
  - Si $u_n \geq 0$ (resp. $u_n \leq 0$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$, (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 0$).

Exercices types :

1) Soit la suite (u_n) telle que $u_n = 2n + \sqrt{n^2+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Démontrer que $u_n > 2n$.
   b) En déduire la limite de (u_n).
2) Soit la suite (u_n) telle que $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Démontrer que $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2+1}$ (utiliser le fait que $\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1}$ pour $1 \leq k \leq n$).
   b) En déduire la limite de (u_n).

7- Application aux suites arithmétiques et géométriques

- Une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 est **non convergente**.

  En effet : $u_n = u_0 + nr$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $-\infty$ suivant que $r > 0$ ou $r < 0$.

- Soit (u_n) une suite géométrique de raison non nul q et de premier terme u_0 ; on a : $u_n = u_0 \cdot q^n$.

  Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $-\infty$ suivant le signe de u_0. La suite (u_n) est donc non convergente.

  Si $q < -1$, alors la suite (u_n) n'a pas de limite.

  Si $|q| < 1$ c-à-d $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ et parsuite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. La suite (u_n) est donc convergente.

  $S_n = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}$ est la somme de n premiers termes de la suite (u_n). Si la suite géométrique (u_n) est illimitée, c-à-d le nombre des termes est infini, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S = \frac{u_0}{1-q}$.

Exercices types

3) Déterminer la limite de la suite arithmétique (u_n) de raison $r = -\frac{2}{5}$ et de premier terme $u_0 = 3$.
4) Déterminer les limites des suites(u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

   $U_n = -2^n$; $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ et $w_n = (-3)^n$.
5) Ecris le nombre A = 1,43 43 43 …. Sous la forme d'une fraction irréductible.
6) Calculer la limite de la somme suivante lorsque le nombre des termes augmente indéfiniment :

   $E = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots$.

Suites numériques (Problèmes)

I- On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

1) Démontrer par récurrence sur n, que $0 < u_n < 2$.
2) Démontrer par récurrence sur n, que la suite (u_n) est croissante.
3) Déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

II- On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq n^2$.
2) Que peut-on déduire à propos de la convergence de la suite (u_n) ? justifier.

III- On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 2^n$.
2) Que peut-on déduire à propos de la convergence de la suite (u_n) ? justifier.

IV- Déterminer dans chaque cas, si elle existe, la limite de la suite (u_n) :

1) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$ (pour $n \geq 1$)	2) $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n-1}}$ (pour $n \geq 2$).
3) $u_n = \dfrac{2+5(-1)^n}{n}$ (pour $n \geq 1$) .	4) $u_n = 2+\dfrac{5(-1)^n}{n}$ (pour $n \geq 1$) .
5) $u_n = 3n - (-1)^n$ (pour $n \geq 0$).	6) $u_n = \dfrac{\sin(n^2+1)}{\sqrt{n+1}}$ (pour $n \geq 0$).
7) $u_n = 3n - \sqrt{n^2+1}$ (pour $n \geq 0$).	8) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$ (pour $n \geq 0$).
9) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$ (pour $n \geq 0$).	10) $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$ (pour $n \geq 1$).
11) $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$ (pour $n \geq 0$).	12) $u_n = \dfrac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$ (pour $n \geq 0$).

V- On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 3$, par $u_n = \dfrac{n^2+1}{\sqrt{n-2}}$.

1) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $u_n \geq n\sqrt{n}$.
2) Préciser alors le comportement à l'infini de la suite (u_n).

VI- On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 4$, par :

$$u_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} .$$

1) Justifier que pour tout entier naturel k, $0 < k \leq n$, $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, puis que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq \sqrt{n}$.
2) Déduire la limite de la suite (u_n).

VII- On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$.

1) Etudier les variations de la fonction g définie sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$ par $g(x) = x^2 - x + 1$.
2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $\dfrac{1}{2} \leq u_n < 1$.
3) Démontrer par récurrence sur n, que la suite (u_n) est croissante.
4) Déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite

VIII- On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, par :

$$u_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \frac{1}{n+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

1) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $\frac{n}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n+1}$.
2) Déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

IX- 1) Démontrer par récurrence sur n, que: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

2) On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

a) Déduire de la première question que cette suite est majorée par 3.
b) Montrer qu'elle est convergente.

X- On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3+2u_n}{2+u_n}$.

1) Calculer les 4 premiers termes de cette suite.
2) Démontrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3) Démontrer que la suite (u_n) est majorée par $\sqrt{3}$.
4) Etudier le sens de variation de la suite (u_n).
5) On considère la suite (v_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on demande de déterminer la raison et le premier terme.
   b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

XI- On considère la suite numérique (u_n) définie, sur $\mathbb{N}$, par : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{2u_n+3}$.

1) a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.
   b) Démontrer la suite (u_n) est décroissante.
   c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2) a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$.
   b) Démontrer que la suite définie par $u_n - \frac{1}{2}$ est majorée par une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   c) Retrouver, à partir de la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

XII- On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par
$u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

1) Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
   a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel $n > 0$, $v_n > \frac{1}{2}$.

c) Trouver le plus petit entier N tel que, si $n \geq N$, $v_n < \frac{3}{4}$.

d) En déduire que si $n \geq N$ alors $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n$.

On pose, pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n = u_5 + u_6 + ... + u_n$.

2) On se propose de montrer que la suite (S_n) $(n \geq 5)$ est convergente.

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n \leq \left[1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+...+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]u_5$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n \leq 4u_5$.

3) Montrer que la suite (S_n) $(n \geq 5)$ est croissante et en déduire qu'elle converge.

XIII- Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = 1$, $v_0 = 12$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$ et $v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n)$ où $n \in \mathbb{N}$.

1) Soit (w_n) la suite définie par : $w_n = v_n - u_n$.
   a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{12}$. Déterminer son premier terme.
   b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$ et calculer la limite de (w_n) .
2) a) Montrer que la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.
   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$.
3) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles convergent vers la même limite L.
4) Soit (t_n) la suite définie par : $t_n = 3u_n + 8v_n$.
   a) Démontrer que la suite (t_n) est une suite constante. Déterminer cette constante.
   b) Déterminer alors la valeur de L.

XIV- On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = a$, et pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$ où a est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

1) On suppose dans cette question que $a = \frac{1}{8}$.
   a) Calculer u_1 et u_2 .
   b) Dans un repère orthonormal (unité graphique 8 cm), tracer, sur l'intervalle [0 ; 2], la droite (d) d'équation $y = x$ et la courbe (P) représentative de la fonction $f : x \mapsto x(2 - x)$.
   c) Utiliser (d) et (P) pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1 , A_2 et A_3 d'abscisses respectives u_1 , u_2 et u_3.
2) On suppose dans cette question que a est un réel quelconque de l'intervalle]0 ; 1[.
   a) Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   c) Que peut-on en déduire ?
3) On suppose à nouveau dans cette question que $a = \frac{1}{8}$. On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 1 - u_n$.
   a) Exprimer, pour tout entier n, v_{n+1} en fonction de v_n .
   b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).

XV- On considère les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = 10$, $v_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + v_n}{4}$ et $v_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3v_n}{5}$.

1) On désigne par (w_n) la suite définie par $w_n = u_n - v_n$.
   a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   b) Déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq v_n$.
2) a) Démontrer que (u_n) est décroissante et déduire que (v_n) est majorée par 10.
   b) Démontrer que (v_n) est croissante et déduire que (u_n) est minorée par 0.
   c) Les suites (u_n) et (v_n) ont-elles la même limite ? Justifier.
3) Soit la suite (t_n) définie par $t_n = 8u_n + 5v_n$.
   a) Calculer u_n et v_n en fonction de w_n et t_n.
   b) En remarquant que (t_n) est une suite constante, calculer u_n et v_n en fonction de n.
   c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

XVI- On considère la suite numérique (u_n) définie, sur $\mathbb{N}$, par : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1}$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) Soit la fonction h définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;+\infty\right[$ par $h(x) = \dfrac{x+8}{2x+1}$ et (H) sa courbe représentative.
   a) Tracer (H) et la droite (d) d'équation y = x dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ (unité graphique 1 cm).
   b) Construire à l'aide de (H) et de (d) les points de l'axe $(O\ ;\ \vec{i})$ d'abscisses respectives u_0 , u_1 , u_2 et u_3.
   c) Que peut-on revoir quant à la convergence de la suite (u_n)?
3) (v_n) est la suite définie pour tout n par : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on demande de déterminer la raison et le premier terme.
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

XVII- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.
On considère également la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$.
Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			

Utiliser le tableau pour déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

XVIII- On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n + 1}{4} \end{cases}$$

1) Calculer u_1, u_2, u_3 d’une part et v_1, v_2, v_3 d’autre part.

2) a) Dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, d'unité graphique 5 cm, tracer les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $y = \dfrac{3x+1}{4}$ et $y = x$.

b) Utiliser (D) et (Δ) pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 ainsi que les points B_1, B_2, B_3 d'abscisses respectives v_1, v_2, v_3.

3) On considère la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par : $s_n = u_n + v_n$. Démontrer que la suite (s_n) est une suite constante.

4) On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par : $d_n = v_n - u_n$.

a) Montrer que la suite (d_n) est géométrique.

b) Donner l'expression de d_n en fonction de n.

c) En déduire l'expression de u_n et de v_n en fonction de n.

d) Calculer la limite de chacune des suites (u_n) et (v_n).

Bon travail

Ecoles Al-Mabarrat Lycée Al-Kawthar		En son nom
Code: EIB-F128	**Ed: 01**	**Fiche supplémentaire (10/2017)**

Année scolaire : **2016 – 2017** **Date : 14 / 10 /2016**

Nom : **Classe : 3ème année secondaire – S.G.**

Suites numériques (Problèmes)

I- La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

1) **Approche graphique**
   a) Dans un repère orthonormal tracer la droite d'équation $y = x$ et la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$.
   b) Utiliser le graphique pour construire sur l'axe des abscisses les points d'abscisses respectives u_0, u_1 , u_2 et u_3.
   c) Utiliser le graphique pour tirer une conjecture concernant le sens de variations de la suite (u_n) et pour trouver un majorant de (u_n).
2) **Approche à l'aide du théorème des suites monotones**
   a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \le u_{n+1} < 2$.
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite L à déterminer.
3) **Approche à l'aide d'une suite auxiliaire (v_n)**
   On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 2 - u_n$.
   a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et déduire la nature de la suite (v_n).
   b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

II- La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2}$.

1) Donner les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2) α est un nombre réel. La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - \alpha$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique si et seulement si $\alpha = -1$.
   b) Exprimer alors v_n, puis u_n, en fonction de n.
   c) Étudier le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (u_n).
   d) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que u_n appartient à l'intervalle $]-1-10^{-4} \,;\, -1+10^{-4}[$.

III- La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3.
2) a) Démontrer que pour tout entier $n \ge 4$, $u_n \ge 0$.
   b) En déduire que pour tout entier $n \ge 5$, $u_n \ge n - 3$.
   c) En déduire la limite de la suite (u_n).
3) On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on demande de déterminer la raison et le premier terme.
   b) Déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.
   c) Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

IV- La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n(20 - u_n)$.

1) Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 20] par : $f(x) = \frac{x}{10}(20 - x)$.
   a) Étudier les variations de la fonction f sur [0 ; 20].
   b) En déduire que pour tout x de [0 ; 10], $f(x) \in [0 ; 10]$.
2) Prouver par récurrence que: pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.
3) Prouver que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite L.

V- La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$.

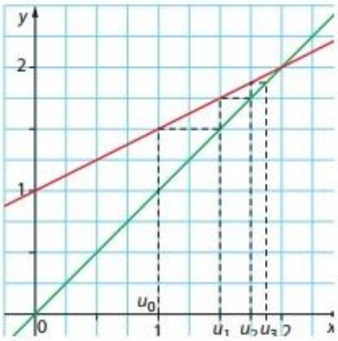
13) Vérifier que la suite (u_n) est croissante.
14) Démontrer que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 3$.
15) On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = 3 - u_n$.
   a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \sqrt{3}\frac{3-u_n}{\sqrt{u_n}+\sqrt{3}}$.
   b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leq \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} v_n$.
   c) Prouver par récurrence que: pour tout entier naturel n, $v_n \leq 2\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n$.
   d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

<u>**Bon travail**</u>

<u>**H. Ahmad**</u>

Solution du fiche 10 / 2016

I) 1) a) et b)



c) Graphiquement, la suite (u_n) semble strictement croissante et majorée par 2.

2) a) Notons(P_n) la proposition : $u_n \leqslant u_{n+1} < 2$.

$u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{3}{2}$, soit $u_0 \leqslant u_1 < 2$: (P_0) est vraie.

Supposons (P_n) vraie pour un entier naturel n, c'est-à-dire $u_n \leqslant u_{n+1} < 2$.

Il en résulte $\frac{1}{2}u_n + 1 \leqslant \frac{1}{2}u_{n+1} + 1 < \frac{1}{2} \times 2 + 1$ soit

$u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 2$. ($P_n$) vraie entraîne ($P_{n+1}$) vraie.

Conclusion : pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1} < 2$.

b) (u_n) est strictement croissante et majorée par 2, d'après le théorème des suites monotones (u_n) converge vers une limite L. L vérifie f(L) = L. On trouve que L = 2.

3) a) $v_{n+1} = 2 - u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}v_n$.

De plus $v_0 = 2 - u_0 = 1$. La suite (v_n) est géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$.

b) Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, le théorème 7 nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

III- **1.** $u_1 = -\frac{5}{3}$; $u_2 = -\frac{14}{9}$; $u_3 = -\frac{14}{27}$.

2. a) Raisonnement par récurrence.

$u_4 = \frac{67}{81} \geqslant 0$: (P_4) est vraie.

On suppose (P_n) vraie pour $n \geqslant 4$.

$u_{n+1} = \frac{u_n}{3} + n - 2$. Or $u_n \geqslant 0$ et $n - 2 \geqslant 2$ donc (P_{n+1}) est vraie. Pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.

b) Pour tout $n \geqslant 4$, $u_{n+1} \geqslant n - 2$, donc pour tout $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant (n-1) - 2 = n - 3$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-3) = +\infty$, donc (théorème 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. a) $v_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3(n+1) - \frac{21}{2}$.

$v_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2} = \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right) = \frac{1}{3}v_n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et son premier terme est $v_0 = -\frac{25}{2}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\frac{25}{2} \times \frac{1}{3^n}$.

$$u_n = -\frac{1}{2}\left(-\frac{25}{2} \times \frac{1}{3^n}\right) + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}.$$

$$u_n = \frac{25}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}.$$

c) $S_n = \frac{25}{4}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k} + \frac{3}{2}\sum\limits_{k=0}^{n} n - \frac{21}{4}(n+1)$.

$$S_n = \frac{25}{4} \times \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1).$$

$$S_n = \frac{75}{8}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) + \frac{3}{4}(n+1)(n-7).$$

II- **1.** $u_0 = 1$; $u_1 = 0$; $u_2 = -\frac{1}{2}$; $u_3 = -\frac{3}{4}$; $u_4 = -\frac{7}{8}$.

2. a) $v_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2} - \alpha = \frac{1}{2}(u_n - 1 - 2\alpha)$.

(v_n) géométrique $\Leftrightarrow -1 - 2\alpha = -\alpha \Leftrightarrow \alpha = -1$.

b) $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ avec $v_n = u_n + 1$.

Comme $v_0 = 2$, pour tout naturel n,

$$v_n = \frac{1}{2^{n-1}} \text{ et } u_n = -1 + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

c) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} = -\frac{1}{2^n} < 0$: la suite (u_n) est décroissante. Comme de plus elle est minorée par -1, elle est convergente (théorème 8).

Remarque. L'expression de u_n suffit pour prouver la convergence et donne de plus sa limite -1.

d) $-1{,}0001 < u_n < -0{,}9999 \Leftrightarrow -0{,}0001 < u_n + 1 < 0{,}0001$
$\Leftrightarrow -0{,}0001 < v_n < 0{,}0001$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2^{n-1}} < 10^{-4} \Leftrightarrow 2^{n-1} > 10^4$.

Or $2^{13} = 8\,192$ et $2^{14} = 16\,384$, donc $n = 15$.

IV- **1. a)** $f'(x) = \frac{1}{10}(20 - x) - \frac{x}{10} = 2 - \frac{x}{5}$.

x	0		10		20
f'		+	0	−	
f	0	↗	10	↘	0

b) f est continue et strictement croissante sur [0 ; 10] : $f(0) = 0$ et $f(10) = 10$, donc $f([0\,;\,10]) = [0\,;\,10]$.
$\forall x \in [0; 10]$; $f(x) \in [0; 10]$.

2. $u_0 = 1$ et $u_1 = 1{,}9$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 = f(u_0) \leqslant 10$: (P_0) est vraie. On suppose (P_n) vraie pour $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10.$$

La fonction f étant croissante sur [0; 10], on en déduit $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(10)$, soit

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 10 : (P_{n+1}) \text{ est vraie.}$$

Conclusion : Pour tout naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

3. Croissante et majorée, la suite (u_n) est convergente (théorème 8) de limite ℓ telle que $\ell = f(\ell)$. $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \frac{\ell}{10}(20-\ell)$. Comme $\ell \neq 0$ (car $u_0 = 1$), $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{10}(20-\ell) \Leftrightarrow \ell = 10$.	La suite géométrique $\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n$ a pour limite 0. Il en résulte (théorème des gendarmes) que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$.

V- 1) Démontrons par récurrence que (u_n) est strictement croissante c-à-d $u_{n+1} \geq u_n$.
En effet :

- $u_1 = \sqrt{3}$ donc $u_1 \geq u_0$.
- Supposons que $u_{n+1} \geq u_n$.
- Démontrons que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.
  En effet : on a $u_{n+1} \geq u_n$ donc $3u_{n+1} \geq 3u_n$, donc $\sqrt{3u_{n+1}} \geq \sqrt{u_n}$, donc $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.

<u>Autre méthode :</u> On considère la fonction g définie par $u_{n+1} = g(u_n)$ donc $g(x) = \sqrt{3x}$. g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x}} > 0$ don g est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, et comme $u_{n+1} \geq u_n$ donc $g(u_{n+1}) \geq g(u_n)$ donc $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. …

Conclusion : (u_n) est strictement croissante.

2) Démontrons par récurrence que $1 \leq u_n \leq 3$.

- $u_0 = 1$ donc $1 \leq u_0 \leq 3$.
- Supposons que $1 \leq u_n \leq 3$.
- Démontrons que $1 \leq u_{n+1} \leq 3$.
  En effet : On a $1 \leq u_n \leq 3$ don $3 \leq 3u_n \leq 9$ donc $1 < \sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{9}$ donc $1 \leq u_{n+1} \leq 3$.
  <u>Autre méthode :</u> on a $1 \leq u_n \leq 3$ et g est strictement croissante donc $g(1) \leq g(u_n) \leq g(3)$ donc
  $1 < \sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq 3$.

Conclusion : $1 \leq u_n \leq 3$.

3) a) Pour tout naturel n,

$$v_{n+1} = 3 - \sqrt{3u_n} = \frac{(3-\sqrt{3u_n})(3+\sqrt{3u_n})}{3+\sqrt{3u_n}} = \frac{9-3u_n}{3+\sqrt{3u_n}}$$

$$v_{n+1} = \sqrt{3}\,\frac{3-u_n}{\sqrt{3}+\sqrt{u_n}}.$$

b) Pour tout naturel n, $u_n \geqslant 1$ donc $\sqrt{u_n} \geqslant 1$ et

$$v_{n+1} = \frac{\sqrt{3}v_n}{\sqrt{3}+\sqrt{u_n}} \leqslant \frac{\sqrt{3}\,v_n}{\sqrt{3}+1}.$$

c) $v_0 = 2 \leqslant 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^0$: (P_0) est vraie.

Pour n entier naturel, supposons (P_n) vraie.

$$v_{n+1} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}v_n \leqslant 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^{n+1}. \ (P_{n+1}) \text{ est vraie.}$$

Pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n$.

d). De plus, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 3$ donc $v_n \geqslant 0$.

Donc $0 \leqslant v_n \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n$. Or $-1 < \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} < 1$.

Ecoles Al-Mabarrat Lycée Al-Kawthar		En son nom	
Code: EIB-F128	**Ed: 01**	**Fiche supplémentaire (19/2017)**	

Année scolaire : 2016 – 2017 **Date : 09 / 11 /2016**

Nom : **Classe : 3ème année secondaire – S.G.**

Complexes - Suites

I- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

On considère la suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite des affixes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par:

$z_0 = 8$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n$.

1) Calculer le module et un argument du nombre complexe $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}$. L'écrire sous forme trigonométrique.
2) Calculer z_1, z_2 et z_3 et vérifier que z_3 est réel. Placer dans le plan les points M_0, M_1, M_2 et M_3.
3) Pour tout nombre entier naturel n :
   a) calculer le rapport $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$;
   b) en déduire que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et que $|z_{n+1} - z_n| = \sqrt{3}|z_{n+1}|$.

II- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, d'unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et pour tout nombre entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n$.

On note A_n le point d'affixe z_n.

1) Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel. Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.
2) Pour tout nombre entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique, puis établir que, pour tout nombre entier naturel n : $u_n = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.
3) a) Déterminer la limite de la suite (u_n).
   b) Expliquer pourquoi, à partir d'un certain rang n_0, tous les points A_n sont situés à l'intérieur du disque de centre O et de rayon 0,01.
4) a) Établir que pour tout nombre entier naturel n, $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$. En déduire, la nature du triangle OA_nA_{n+1}.
   b) Pour tout nombre entier naturel n, on note I_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1\,A_2 ... A_{n-1}A_n$. On a ainsi : $I_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$. Exprimer I_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (I_n).

III- Pour tout entier naturel n, on définit la suite des nombres complexes suivants : $\begin{cases} z_0 = \dfrac{1}{2} \\ z_{n+1} = \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) z_n \end{cases}$.

À chaque nombre complexe z_n, on associe le point image M_n.

1) Calculer les cinq premiers termes de la suite.
2) Dans un repère du plan complexe, placer les points images des cinq premiers termes de la suite.
3) Exprimer z_n à l'aide de n.
4) Le point M_n étant placé, donner une méthode de construction du point M_{n+1}.

5) Pour quelles valeurs de n le point M_n est-il l'image d'un nombre réel positif ?

6) On note $\vec{u} = \sum_{k=0}^{k=7} \overrightarrow{OM_k}$. Quelle est l'affixe de $\vec{u}$?

IV- On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1 + i$ et, pour tout entier naturel n, par $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{3}$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + ib_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n.

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1) Donner a_0 et b_0.
2) Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.
3) Déterminer les valeurs de a_2 et b_2 arrondies à 10^{-4} près.

Partie B

1) Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n. En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, et l'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2) Quelle est la nature de la suite (b_n)? En déduire l'expression de b_n en fonction de n, et déterminer la limite de (b_n).
3) a) On rappelle que pour tous nombres complexes z et z′ : $|z+z'| \leq |z|+|z'|$ (inégalité triangulaire).

   Montrer que pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}| \leq \dfrac{2|z_n|}{3}$.

   b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

   Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$.

   En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

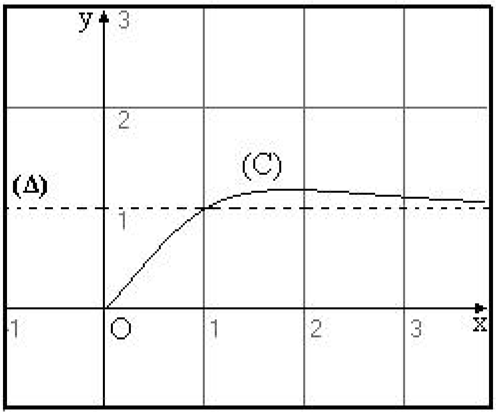
   c) Montrer que, pour tout entier naturel n, $|a_n| \leq u_n$. En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

<u>**Bon travail**</u>

Lycée Al-Imam Al-Hassan
Département des Mathématiques
Classe : 3ème année secondaire – S.G. **Date:**

FICHE D'EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES (23/2007)
Fonctions - Suites – Intégrales

I- La courbe (C) ci-contre est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$, de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$. La droite (Δ) d'équation $y = 1$ est une asymptote à (C).



On pose $U_n = \displaystyle\int_0^n [f(x) - 1]\,dx$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer U_n en fonction de n.
2) Calculer U_1. Donner une valeur approchée de U_1 à 10^{-2} près.
3) Soit A_n l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'asymptote (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = n$ $(n \geq 1)$.
   a) Calculer la limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   b) En déduire la limite de A_n lorsque n tend vers $+\infty$.

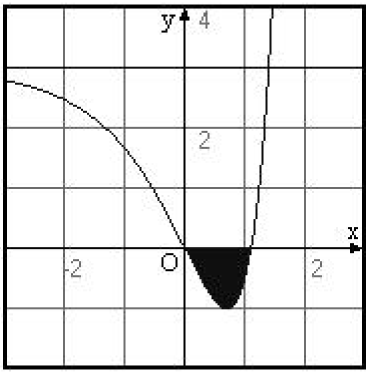
(2ème session 2001)

II- (U_n) est la suite numérique définie par : $U_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{(1-n)x}}{1+e^x}\,dx$ où n est un entier naturel.

1) Démontrer que $U_n \geq 0$.
2) Calculer U_0.
3) Calculer $U_1 + U_0$ et en déduire la valeur de U_1.
4) On pose $V_n = U_n + U_{n+1}$, pour $n \geq 1$.
   a) Démontrer que $0 \leq U_n \leq V_n$.
   b) Démontrer que $V_n = \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$.
   c) En déduire la limite de (U_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

(1ère session 2002)

III- Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine O.
La courbe (C) ci-contre est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = pe^{2x} + qe^x + r$ (p, q et r sont des réels).



Indications:

- *La droite d'équation* $y = 3$ *est asymptote à* (C).
- (C) *passe par* O .
- (C) *admet au point d'abscisse* ln2 *une tangente parallèle à l'axe des abscisses.*

1) Trouver les valeurs de p, q et r.
   Dans ce qui suit, on prend $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$.
2) Résoudre l'inéquation $f(x) > -1$.
3) Calculer l'aire du domaine (D) limité par la courbe (C) et la droite d'équation $y = 0$. ((D) est la partie hachurée du plan).

4) Soit l'équation différentielle (E): $y'' - 3y' + 2y = 6$. On pose $z = y - 3$.

a- Démontrer que z vérifie une équation différentielle (E') du second ordre. Résoudre (E') et en déduire la solution générale de (E).

b- Que représente f(x) pour l'équation différentielle (E)?

5) On définit sur $[0 ; +\infty[$ la fonction g par : $g(x) = \int_0^x f(t)dt$.

a- Exprimer g'(x) en fonction de f(x) et dresser le tableau de variations de g, (on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

b- Démontrer que la courbe représentative (G) da la fonction g admet un point d'inflexion I dont on précisera l'abscisse. Calculer la pente de la tangente à (G) en I .

c- Vérifier que g(ln6) > 0 et tracer la courbe (G), (on admet que l'axe des abscisses est une direction asymptotique de (G)).

(1ère session 2002 – S.G.)

IV- Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{2e^{nx}}{1+e^x} - 1$, où n est un entier naturel, et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, Unité 2 cm.

A- Dans cette partie on prend n = 1

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x)$.

2) Calculer $f'_1(x)$ et dresser le tableau de variations de f_1.

3) a- Démontrer que O est un point d'inflexion de (C_1).

b- Ecrire une équation de la tangente (d) en O à (C_1).

4) Tracer (d) et (C_1).

B- Soit (C_0) la courbe représentative de la fonction f_0 , correspondant à n = 0 , dans le même repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Démontrer que la courbe (C_0) est symétrique de la courbe (C_1) par rapport à l'axe des ordonnées .

2) Démontrer que (C_0) est symétrique de (C_1) par rapport à l'axe des abscisses.

3) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par les courbes (C_1), (C_0) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

C - Soit la suite (U_n) définie par $U_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

1) Démontrer que $U_{n+1} + U_n = 2\frac{e^n - n - 1}{n}$.

2) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_{n+1} + U_n)$ et en déduire que la suite (U_n) ne peut pas être convergente.

(1ère session 2004)

V- Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$ et pour $n \geq 1$, $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx$

1) Calculer U_0 et U_1.

2) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$ et en déduire la valeur de U_2.

3) a- Montrer que , pour $0 \leq x \leq 1$, on a $0 \leq \frac{x^n}{x+1} \leq x^n$, et en déduire que $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

(1ère session 2005)

VI- On considère les suites d'intégrales : $I_n = \int_0^1 (1-x^n)\sqrt{1-x^2}\,dx$ et $J_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$.

1) Calculer J_1. Si $J_0 = \frac{\pi}{4}$, déduire la valeur de I_1.
2) Démontrer que la suite (J_n) où $n \in \mathbb{N}^*$ est croissante et réduire (J_n) . Déduire que (J_n) est convergente.
3) Démontrer que la suite (I_n) est convergente ($n \in \mathbb{N}^*$).
4) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n \leq \int_0^1 x^n dx$. Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

VII- On considère la suite numérique (J_n) définie par $J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x+1}dx$ où n est un entier positif.

1) a) Calculer $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$ puis $J_0 + I$.
   b) En déduire la valeur de J_0 .
2) a) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n}$.
   b) En déduire la limite de la suite (J_n).
3) a) Démontrer la suite (J_n) est décroissante.
   b) En déduire, sans calcul supplémentaire, que $\frac{1}{2}(J_n + J_{n+1}) \leq J_n \leq \frac{1}{2}(J_{n-1} + J_n)$.
4) Calculer la valeur de $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n.
5) En déduire la limite de la suite de terme général $n\,J_n$.

VIII- On considère la suite numérique (I_n) définie par $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$ où n est un entier positif.

1) a) Démontrer la suite (I_n) est décroissante.
   b) Démontrer que $0 \leq I_n \leq 1$.
   c) La suite (I_n) est-elle convergente?
   d) Démontrer que $\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2) a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ et déduire I_0.
   b) Calculer I_1.
   c) En utilisant une intégration par parties, démontrer que $(n + 2)I_{n+2} + (n + 1)I_n = \sqrt{2}$.
3) a) Calculer l'aire limitée par la courbe (C) de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$, l'axe (x'x) et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

.   b) Calculer l'aire limitée par la courbe (γ) de la fonction $x \mapsto \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$, l'axe (x'x) et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

IX- 1) On pose, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}dx$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .

b) Prouver que, pour tout entier naturel n non nul, $0 \le I_n \le \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}dx$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

c) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$.

2) On considère la suite réelle (a_n), définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_1 = 0$ et pour tout entier naturel n non nul,

$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

X- On considère la suite (I_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $I_n = \int_1^e (\ln x)^n\, dx$.

1) a) Démontrer que pour tout x dans l'intervalle]1 ; e[et pour tout entier naturel n, on a: $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} \ge 0$.
   b) En déduire le sens de variation de la suite (I_n).
2) a) Calculer I_1 .
   b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
   c) En déduire I_2 , I_3 et I_4.
3) a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $I_n \ge 0$.
   b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $(n+1)I_n \le e$.
   c) En déduire la limite de (I_n).
   d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

Bon travail

H. AHMAD

Ecoles Al-Mabarrat Lycée Al-Kawthar		En son nom
Code: EIB-F128	**Ed: 01**	**Fiche de renforcement 10 / 2018** **Probabilités -Suites**

Année scolaire : 2017 – 2018 **Date : 23 / 04/ 2018**

Nom : **Classe : 3ème année secondaire – S.G.**

Exercice I

Juliette débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner ou de perdre la première partie.

On admet que, si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est 0,6 et si elle perd une partie, la probabilité pour qu'elle perde la suivante est 0,7.

On note, pour n entier naturel ou nul :

G_n l'événement « Juliette gagne la nième partie », P_n l'événement « Juliette perd la nième partie ».

1) a) Déterminer les probabilités $p(G_1)$, $p(G_2 / G_1)$ et $p(G_2 / P_1)$. En déduire la probabilité $p(G_2)$.
b) Calculer $p(P_2)$.

2) On pose, pour n entier naturel non nul, $x_n = p(G_n)$ et $y_n = p(P_n)$.
a) Déterminer, pour n entier naturel non nul, les probabilités $p(P_{n+1} / G_n)$ et $p(G_{n+1} / P_n)$.
b) Montrer que pour tout n entier naturel non nul : $\begin{cases} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n \\ y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n \end{cases}$.
c) Pour n entier naturel non nul, on pose $v_n = x_n + y_n$ et $w_n = 4x_n - 3y_n$
i) Montrer que la suite (v_n) est constante de terme général égal à 1.
ii) Montrer que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n.
d)i) Déduire du **c)** l'expression de x_n en fonction de n.
ii) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice II

Afin de créer une loterie, on met dans une urne n billets différents (n supérieur ou égal à 3), dont deux et deux seulement sont gagnants.

1) Dans cette question, on choisit au hasard et simultanément deux billets dans l'urne.
a) On suppose ici n = 10, X désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis. Déterminer la loi de probabilité de X.
b) On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3. Calculer la probabilité, notée p_n , d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.

2) Dans cette question, on choisit au hasard deux billets dans cette urne en remettant le premier billet tiré avant de tirer le second.
a) On suppose ici n = 10. Y désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis. Déterminer la loi de probabilité de Y.
b) On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3. Calculer la probabilité q_n , d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.

3) a) Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 3, on a : $p_n - q_n = \dfrac{4(n-2)}{n^2(n-1)}$.
b) Pour obtenir exactement un billet gagnant en choisissant deux billets de cette loterie, est-il

préférable de les tirer simultanément ou de les tirer l'un après l'autre en remettant le premier billet tiré ?

Exercice III

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un entier supérieur ou égal à 1).

U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.

On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1) On considère l'événement A : « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».

a) Montrer que la probabilité p(A) de l'événement A peut s'écrire : $p(A)=\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$.

b) Déterminer la limite de p(A) lorsque n tend vers $+\infty$.

2) On considère l'événement B : « après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche ».

Vérifier que la probabilité p(B) de l'événement B peut s'écrire $p(B)=\frac{6}{4(n+3)}$.

3) Un joueur mise 20 euros et effectue une épreuve.
A l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans U_2 :

- Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit 2n euros ;
- Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n euros ;
- Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

a) Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.
Dans la suite, on considère $n > 10$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeur les gains algébriques du joueur (par exemple, si après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, $X = 2n - 20$)

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique de X.

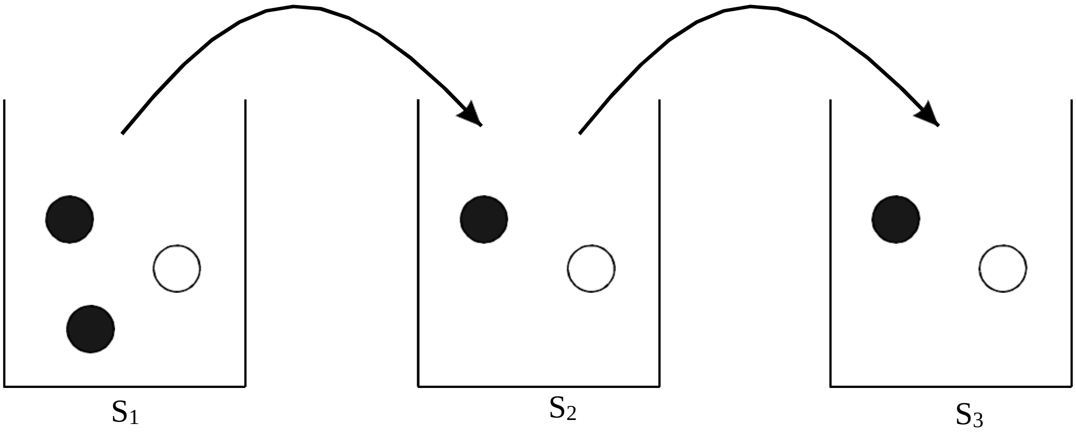
d) On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

Exercice IV

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On imagine n sacs de jetons $S_1, S_2, \cdots, S_n$.

Au départ le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc, et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc. On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectués de la façon suivante :

- Première étape : on tire au hasard un jeton de S_1.
- Deuxième étape : on place ce jeton dans S_2, et on tire, au hasard un jeton de S_2.
- Troisième étape : après avoir placé dans S_3, le jeton sorti de S_2, on tire, au hasard, un jeton de S_3 $\cdots$ et ainsi de suite.



Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on note E_k l'événement: " le jeton tire de S_k est blanc et $\overline{E_k}$ l'événement contraire.

1) **a**) Déterminer la probabilité de E_1, notée $p(E_1)$, et les probabilités conditionnelles : $p(E_2 / E_1)$ et $p\left(E_2 / \overline{E_1}\right)$. En déduire la probabilité de E_2, notée $p(E_2)$.

b) Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, la probabilité de E_k est notée p_k.

Justifier la relation de récurrence suivante : $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$.

2) On note (u_k) la suite définie par $u_1 = \frac{1}{3}$ et, pour tout entier $k \geq 1$, $u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3}$.

a) On considère la suite (v_k) définie, pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$ par, $v_k = u_k - \frac{1}{2}$. Démontrer que (v_k) est une suite géométrique.

b) En déduire l'expression de u_k en fonction de k. Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} u_k = \frac{1}{2}$.

3) Dans cette question, on suppose que n = 10. Pour quelles valeurs de k a-t-on : $0{,}4999 \leq p_k \leq 0{,}5$.

<u>Exercice V</u>

1) Soit a un nombre réel. On considère la suite (u_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$ et par la condition initiale $u_1 = a$.

a) Soit (v_n) la suite de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $v_n = 13u_n - 4$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k. Exprimer v_n en fonction de n et a.

b) Prouver que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

2) Un professeur oublie fréquemment les clés de sa salle de classe. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note E_n l'événement : "le professeur oublie ses clés le jour n" et $\overline{E_n}$ l'événement contraire de E_n.

Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{E_n}$.

On note a la probabilité p_1 qu'il oublie ses clés le premier jour.

On suppose en outre que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- si le jour n il oublie ses clés, la probabilité qu'il les oublie encore le jour suivant n + 1 est $\frac{1}{10}$.

- si le jour n il n'oublie pas ses clés, la probabilité qu'il les oublie le jour suivant n + 1 est $\frac{4}{10}$.

a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{4}{10}q_n$. Pour cela, on pourra d'abord donner les probabilités conditionnelles $p\left(E_{n+1} / E_n\right)$ et $p\left(E_{n+1} / \overline{E_n}\right)$. En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

b) A l'aide des résultats de la question 1, donner l'expression de p_n en fonction de a et n.
La limite p de p_n dépend-elle de la condition initiale a ?

Exercice VI

Les questions **1)** et **2)** sont indépendantes.

1) Soit deux urnes A et B. L'urne A contient 6 boules blanches et 4 boules noires, l'urne B contient 8 boules blanches et 2 boules noires. D'une des deux urnes, choisie au hasard (il y a équiprobabilité pour ce choix), on extrait une boule que l'on remet dans cette même urne : si la boule était blanche on recommence le tirage dans la même urne ; si la boule était noire on recommence le tirage dans l'autre urne. Cette règle est appliquée à chaque tirage et l'on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne les tirages sont équiprobables. Soit P_n la probabilité pour que le nième tirage se fasse dans l'urne A. ($n \in \mathbb{N}^*$)

a) Déterminer P_1.

b) Déterminer P_2 : on se rappellera que le second tirage s'est fait dans A soit parce que le premier tirage a été une boule blanche dans A, soit parce que le premier tirage a été d'une boule noire dans B.

c) Démontrer qu'il existe une relation de récurrence vérifiée par la suite (P_n), de la forme :
pour tout $n \geq 2$, $P_n = a\,P_{n-1} + b$, où a et b sont des réels que l'on déterminera.

2) Soit la suite réelle (u_n), dont le terme général est défini pour n entier strictement positif par :
$u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_n = \frac{2}{5}u_{n-1} + \frac{1}{5}$, pour tout $n \geq 2$.

a) Déterminer un réel α tel que la suite (v_n), dont le terme général est défini pour n entier strictement positif par $v_n = u_n - \alpha$, soit une suite géométrique.

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

c) Justifier que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) **a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a $P_n > \frac{1}{3}$.

b) Déterminer tous les entiers n pour lesquels on a : $\frac{1}{3} < P_n < \frac{1}{3} + \frac{1}{10000}$.

Bon travail

H. Ahmad

Ecoles Al-Mabarrat **Lycée Al-Kawthar**		**En son nom**	
Code: EIB-F128	**Ed: 01**	**Fiche de renforcement (04 / 2018)** **Transformations - Suites**	

Année scolaire: 2017– 2018 **Date : 01 /04 /2018**

Nom: **Classe : 3$^{\text{ème}}$ année secondaire – S.G.**

I- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = 1+2i$.

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe S telle que : S(O) = A et S(A) = B.
2. Montrer que l'écriture complexe de S est : $z' = (1-i)z + i$. Préciser les éléments caractéristiques de S (on notera Ω le centre de S).
3. On considère la suite de points (A_n) telle que : A_0 est l'origine du repère et, pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = S(A_n)$. On note z_n, l'affixe de A_n. (On a donc $A_0 = O$, $A_1 = A$ et $A_2 = B$).
   - **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = 1-(1-i)^n$.
   - **b.** Déterminer, en fonction de n, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$. Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right)$.
   - **c.** En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n. Construire les points A_3 et A_4.
4. Quels sont les points de la suite (A_n) appartenant à la droite (ΩB) ?

II- Le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 4 cm. Soit Ω le point d'affixe 2.

On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$, et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.
   - **a.** Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   - **b.** Montrer que l'écriture complexe de σ est : $\sigma : z \mapsto \frac{1+i}{2}z + 1 - i$.
   - **c.** Soit M un point quelconque du plan, d'affixe z. On désigne par M′ son image par σ et on note z′ l'affixe de M′. Montrer que $z - z' = i(2 - z')$.
2. **a.** Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que $q - a = i(p - a)$.

   b. Déduire des questions précédentes la nature du triangle, pour M distinct de Ω.
3. Soit A_0 le point d'affixe 2 + i. On considère la suite (A_n) de points du plan définis par : pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = \sigma(A_n)$.
   - **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par :
     $$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2.$$
   - **b.** Déterminer l'affixe de A_3.
4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait : pour $n > n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.

Bon travail

H. Ahmad

Lycée Al-Imam Al-Hassan

Département de Mathématiques

Classe : 3ème année secondaire – S.G **Date:**

Fiche de problèmes supplémentaires (22/2007)

Fonctions – Suites numériques

I- 1°) Soit f la fonction définie sur $]-1\ ;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$.

a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

b) En déduire que $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-1\ ;+\infty[$.

2°) Soit g la fonction définie sur $]-1\ ;+\infty[$ par $g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

a) Montrer que g est continue en 0.

b) Montrer que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = \frac{1}{2}$.

c) Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$. En déduire que, pour tout $x > 0$, on a $g(x) < 1$.

3°) a étant un réel strictement positif, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$ pour tout entier n.

a) Montrer que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.

b) En utilisant le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

II- <u>**Partie A :**</u>

Soit f la fonction définie, sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$, par $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$. On désigne par (C) la courbe représentative de f un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $\alpha \in]1\ ;2[$. En déduire le signe de f(x) lorsque x décrit $]0\ ;+\infty[$.

4) Tracer la courbe (C).

<u>**Partie B:**</u>

On se propose, dans cette partie, de calculer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

1) Soit φ la fonction définie sur $[1\ ;2]$ par $\varphi(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln x$.

a) Etudier les variations de φ sur $[1\ ;2]$, et démontrer que l'image de l'intervalle $[1\ ;2]$ par la fonction φ est un intervalle contenu dans $[1\ ;2]$.

b) Montrer que α est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

c) Montrer que, pour tout réel x de $[1\ ;2]$, on a : $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

d) En déduire que pour tout x de [1 ; 2] , on a $| \varphi(x) - \alpha | \leq \frac{1}{2} | x - \alpha |$.

2) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, pour tout entier n.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a: $1 \leq u_n \leq 2$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $| u_{n+1} - \alpha | \leq \frac{1}{2} | u_n - \alpha |$, puis que

$| u_n - \alpha | \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

d) Déterminer un entier naturel n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Donner un encadrement de u_{n_0} d'amplitude 10^{-2} .

III- Soit f la fonction définie, sur $\left]\frac{1}{e} \; ; +\infty\right[$, par $f(x) = \frac{x}{1 + \ln x}$ et l'on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O \; ; \vec{i} \; ; \vec{j})$; *(unité : 2 cm)* .

Partie A

1) Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2) Calculer f '(x) et dresser le tableau de variations de f.

3) **a-** Démontrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion W d'abscisse e. **b-** Ecrire une équation de la tangente (d) à (C) au point W.

4) Etudier suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et de la droite (D) d'équation y = x .

5) Tracer (d), (D) et (C).

Partie B

Soit l'intervalle I = [1 ; e].

1) **a-** Démontrer que f(I) est inclus dans I.

b- Etudier le signe de $f'(x) - \frac{1}{4}$ et en déduire que, pour tout x de I, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.

c- Démontrer que, pour tout x de I, on a : $\left| f(x) - 1 \right| \leq \frac{1}{4} \left| x - 1 \right|$.

2) Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$, $U_{n+1} = f(U_n)$.

a- Démontrer par récurrence sur n que U_n appartient à I.

b- Démontrer que $\left| U_{n+1} - 1 \right| \leq \frac{1}{4} \left| U_n - 1 \right|$.

c- Démontrer que $\left| U_n - 1 \right| \leq \frac{1}{4^n}$ et en déduire la limite de U_n lorsque n tend vers +∞.

(2ème session 2005 – Série S.G.)

IV- Partie A

Soit la fonction u définie sur]0 ; + ∞ [par $u(x) = x^2 + \ln x$.

1) Calculer les limites de u en 0 et + ∞.

2) Calculer u'(x) et dresser le tableau de variations de u.

3) Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in \left[\frac{1}{2} \; ; 1\right]$ et un seul tel que $u(\alpha) = 0$ et vérifier que $0{,}65 < \alpha < 0{,}66$. En déduire le signe de u(x) suivant la valeur de x sur]0 ; + ∞ [.

Partie B

Soit la fonction f définie sur]0 ; + ∞[par $f(x) = x^2 + (\ln x)^2$, et l'on désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) Calculer f '(x) et vérifier que $f'(x) = \frac{2}{x}u(x)$, et dresser le tableau de variations de f.

3) Vérifier que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha^4$, et déduire un encadrement de f(α).

4) Tracer la courbe (C).

Partie C

1) Montrer que le réel α défini dans **la partie A** est solution de l'équation h(x) = x, où h est la fonction définie sur]0 ; + ∞[par $h(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 + \ln x)$.

2) **a.** Calculer h'(x) et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

b. Démontrer que $h\left(\left[\frac{1}{2} ; 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

c. Calculer h''(x) et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

d. En déduire que, pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, on a $0 \le h'(x) \le 0{,}3$.

3) On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = h(u_n)$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$.

b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que l'on a pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \le 0{,}3\, |u_n - \alpha|$, puis que $|u_n - \alpha| \le \frac{1}{2}(0{,}3)^n$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

d. Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-5} près et indiquer la valeur de u_{n_0} donnée par le logiciel " Excel" (avec 5 décimales).

V- Partie A

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 2x - 3$.

1) On pose $z = y - 2x - 1$. Ecrire une équation différentielle (E') satisfaite par z et résoudre (E') .
2) Déduire la solution générale de (E).
3) Déterminer la solution particulière f de (E) telle que f(0) = 1 et $f'(0) = 2 - \frac{1}{e}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$.

On note(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1) a- Calculer la limite de f en + ∞ et la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en + ∞.

   b- Calculer la limite de f en – ∞ et démontrer que la droite (d) d'équation y = 2x + 1 est une asymptote à (C) .

   c- Déterminer, suivant les valeurs de x, les positions relatives de (C) et (d).
2) a) Calculer f ' (x) et f ''(x) .

   b) Dresser le tableau de variations de f '.

   c) Calculer f ' (1) et en déduire le signe de f ' (x) pour tout réel x.
3) Dresser le tableau de variations de f.

4) Vérifier que (C) admet un point d'inflexion L dont on déterminera l'abscisse.
5) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α telle que $1{,}9 \leq \alpha \leq 2$ et une solution β telle que $-0{,}5 \leq \beta \leq -0{,}4$.
6) Tracer (d) et (C).
7) Calculer, en cm^2, l'aire A du domaine limité par la courbe (C), la droite (d) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.
8) Vérifier que $A = (4\alpha - 4)\left(2 + \frac{1}{\alpha}\right)$ cm^2.

Partie C

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I = [1{,}9 ; 2]$ par: $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$.

1) Démontrer que, sur I , l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.
2) Étudier le sens de variation de la fonction g sur I et démontrer que, pour tout x appartenant à I , $g(x)$ appartient à I .
3) Démontrer que, pour tout x de l'intervalle I , $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$.
4) Soit (U_n) la suite de nombres réels définie par : $U_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = g(U_n)$.
   a) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n \in I$.
   b) Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_n - \alpha|$.
   c) En déduire, en raisonnant par récurrence, que : pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$.
   d) En déduire que la suite (U_n) converge et préciser sa limite.

Bon travail
H. Ahmad