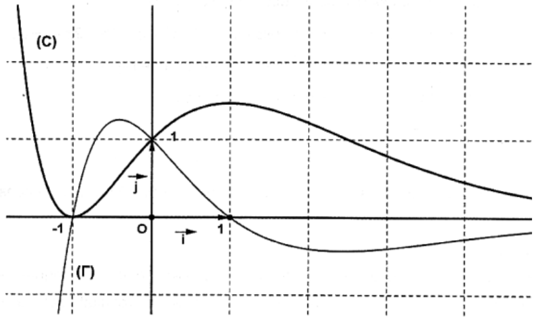
Exercices supplémentaires

Ex 2.2.1

Les deux parties A et B ci-dessous sont indépendantes

Partie A



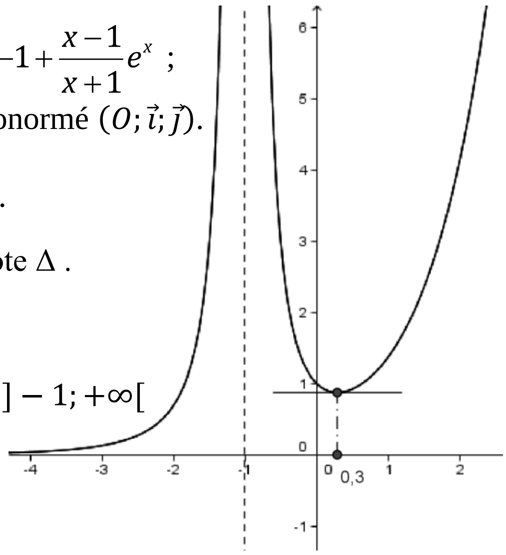
On a représenté ci-contre, dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, les courbes (C) et (Γ), représentatives d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ et de sa fonction primitive h.

1) Reconnaitre la courbe représentative de g et celle de h.

2) On suppose que la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.
Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par (C) et (Γ).

Partie B

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq -1$ par $f(x) = -1 + \dfrac{x-1}{x+1}e^x$;
on désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.



1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$; En déduire une asymptote D.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; En déduire une autre asymptote Δ .

c- Etudier la position de (C) par rapport à Δ .

2) Voici la courbe de f' (dérivée de f)

a- Montrer que f est strictement monotone sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$ et construire son tableau des variations.

b- Montrer que f admet un point d'inflexion qu'on déterminera.

3) a- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-1;+\infty[$ une unique solution α et que $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$.

b- Vérifier que $e^{\alpha} = \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$ et que $f(-\alpha) = 0$.

4) Donner $f(3)$ sous forme décimal et tracer (C).

Ex 2.2.2

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels P telle que : $f_k(x) = kxe^{-kx}$.

On note C_k sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A : Étude du cas $k = 1$

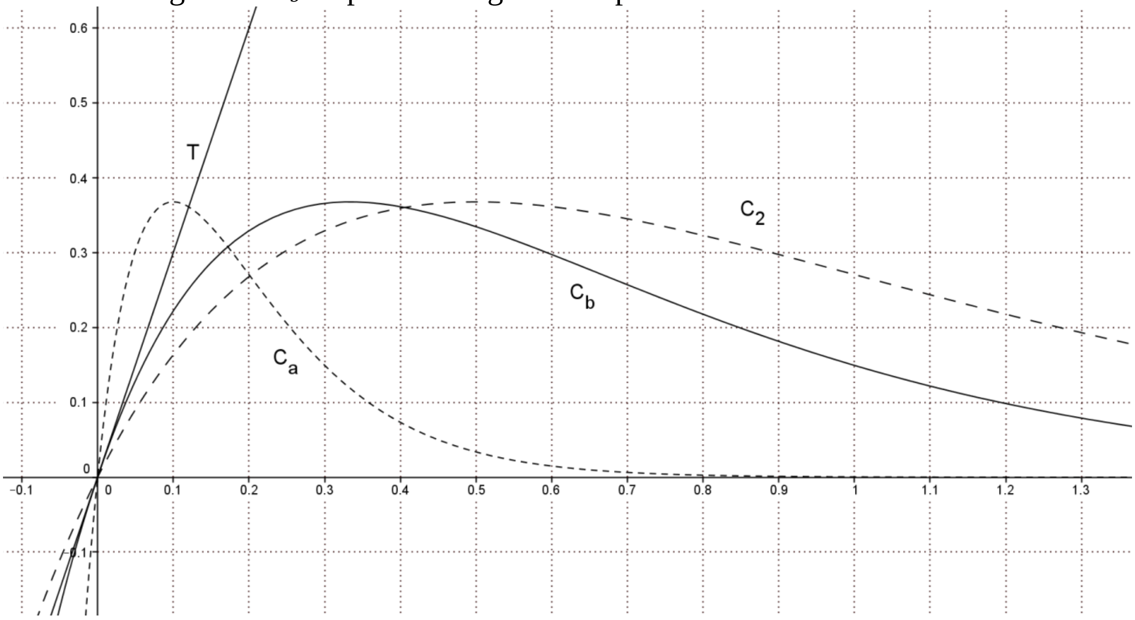
On considère donc la fonction f_1 définie sur P par $f_1(x) = xe^{-x}$.

1. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe C_1 admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier les variations de f_1 sur P puis dresser son tableau de variation sur P.
3. Montrer que f admet un point d'inflexion I.
4. Montrer que la droite (d) : $y = \dfrac{2}{e^2}$ coupe C_1 en deux points d'abscisses 2 et α tel que $0{,}4 < \alpha < 0{,}41$.

5. Tracer C_1 et (d).

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes C_2, C_a et C_b où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à C_b au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes C_k passent par un même point.
2. a. Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.
   b. En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.
3. a. Écrire une équation de la tangente à C_k au point O origine du repère.
   b. En remarquant que T passe par le point (0,1 ; 0,3), calculer b.
4. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine délimité par C_2 et C_b.
5. Montrer que la droite $(d)\colon y = \dfrac{2}{e}$ coupe C_2 aux points d'abscisses 1 et $\dfrac{\alpha}{2}$.

Ex 2.2.3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$.

C est sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan (unité graphique 2 cm).

1. Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$ (on pourra montrer que $f(x) = \dfrac{3-e^{-4x}}{1+e^{-4x}}$).
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
3. Montrer que le point de C d'abscisse 0 est un centre de symétrie. Ecrire l'équation de la tangente T à C en ce point.
4. Tracer la courbe C et sa tangente T.
5. Montrer que $f(x) = \dfrac{3e^{3x}-e^{-x}}{e^{3x}+e^{-x}}$. En déduire l'aire du domaine limité par C et les axes des coordonnées.
6. a. Montrer que f admet une réciproque f^{-1} ;
   b. Tracer la courbe (C') de f^{-1} (sur la figure précédente)
   c. Déterminer $f^{-1}(x)$ en fonction de x en déduire la valeur exacte de $\int_0^1 \ln\left(\dfrac{1+x}{3-x}\right)dx$.

Ex 2.2.4

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = 2 - \dfrac{x-2}{5}e^{x}$.

On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   b. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
   c. En déduire l'équation d'une droite D asymptote à la courbe C.
   d. Calculer les coordonnées du point d'intersection A de la droite D et de la courbe C.
   e. Déterminer la position relative de la courbe C par rapport à la droite D.
2. a. Calculer $f'(x)$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution x_0 sur [2 ; 3] et vérifier que $2{,}68 < x_0 < 2{,}69$.
5. Tracer sur un même graphique la droite D, la tangente T et la courbe C.

Partie B : Calcul d'aire

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{x-3}{5}e^x$.
   Calculer g'(x). En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. a. Hachurer sur le graphique le domaine délimité par la courbe C, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation x = 2.
   b. Calculer l'aire de la partie hachurée. Donner la valeur exacte en cm^2, puis la valeur arrondie à 10^{-2} près.

Ex 2.2.5

Partie 1

Soit g la fonction définie sur [0 ;+∞ [par $g(x)=e^x - xe^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en +∞.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. a. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur [0 ;+∞ [une unique solution α et vérifier que : $1{,}27 < \alpha < 1{,}28$
   b. Démontrer que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1}$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ telle que $A(x)=\dfrac{4x}{e^x+1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\,;+\infty[$.

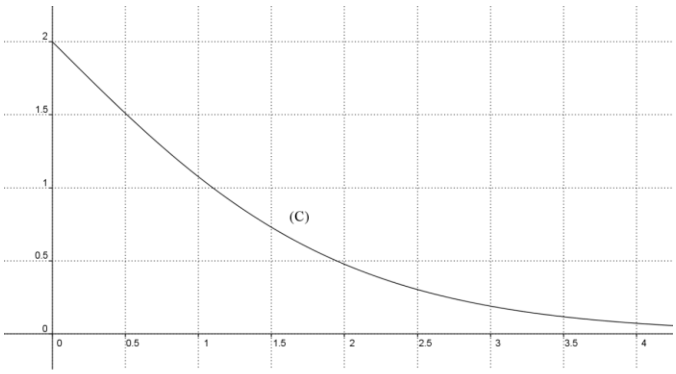
Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4}{e^x+1}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. La figure est donnée ci-dessous.

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de (C) de coordonnées (x ; $f(x)$),
P le point de coordonnées (x ; 0),
Q le point de coordonnées (0 ; $f(x)$).

1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
2. Le point M a pour abscisse α. La tangente (T) en M à la courbe (C) est-elle parallèle à la droite (PQ) ?



Ex 2.2.6

A. On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^x$ et on appelle C la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Étudier les variations de f. Préciser les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Déterminer $f(0)$ puis déterminer le signe de $f(x)$ en fonction de x.

B. Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ - {0} par $g(x) = \ln\left|e^{\frac{x}{2}} - e^x\right|$.

On note G la courbe représentative de g dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Préciser les limites de g en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0.
2. Calculer $g'(x)$ et déterminer le signe de $g'(x)$ en utilisant le signe de $f'(x)$ et le signe de $f(x)$. Dresser le tableau de variation de g.
3. a. Démonter que pour tout x réel strictement positif, $g(x) - x = \ln\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)$.

   b. Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe G.
   c. Étudier la position de la courbe G par rapport à D pour tout x réel strictement positif.
4. a. Démontrer que pour tout x réel strictement négatif : $g(x) - \frac{x}{2} = \ln\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)$.

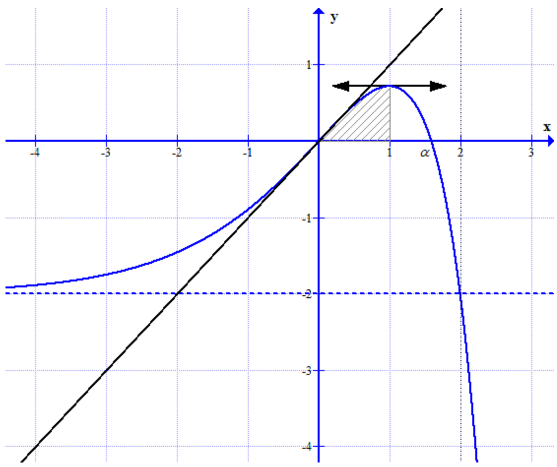
   b. Montrer que la droite d d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe G.

   c. Étudier la position de G par rapport à d pour tout x réel strictement négatif.
5. Construire G, D et d (on utilisera un graphique différent de celui de la partie A).

Ex 2.2.7 Lecture graphique

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2-x)e^x - 2$; On a construit, ci-dessous, la courbe de g dans un repère orthonormé.



1) Construire le tableau des variations de g.
2) Calculer l'aire du domaine hachuré.
3) Cette courbe coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse α $(\alpha > 0)$.
   a- montrer que $1{,}59 < \alpha < 1{,}6$.
   b- Etudier le signe de $g(x)$.

Partie B

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x - 2x}$; on admet que f est définie sur $\mathbb{R}$.

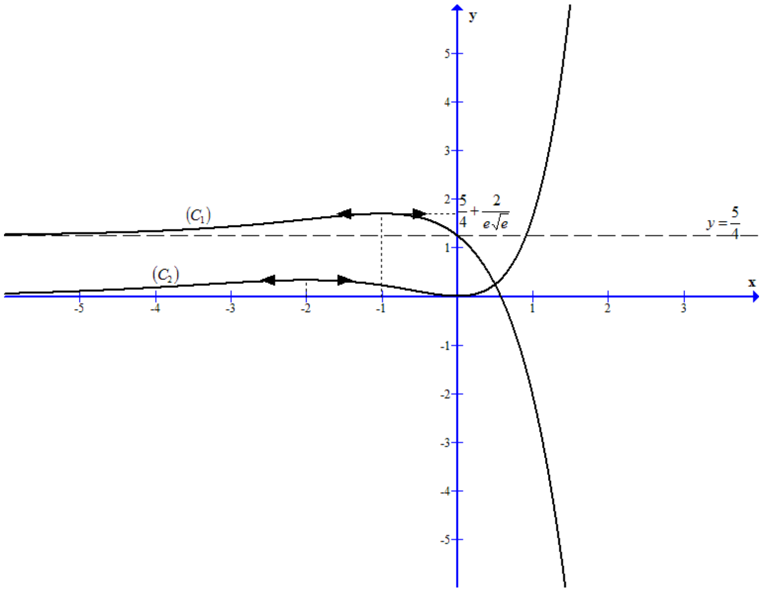
On désigne par (C) sa courbe dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; déduire que (C) admet deux asymptotes.
2) Montrer que $f'(x) = \dfrac{2\,g(x)}{(e^x - 2x)^2}$.
3) Construire le tableau des variations de f
4) Tracer (C) en précisant les points d'intersection avec les droites d'équations : $y = 0$ et $y = 1$.
5) Calculer l'aire du domaine (D) limité par (C), l'axe $(O;\vec{\imath})$ et la droite d'équation $x = 1$.
6) On admet que la restriction de f sur $[0;\alpha]$ admet une réciproque f^{-1} ; tracer sa courbe (C') sur la figure précédente.

Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale : $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$.

Ex 2.2.8 <u>Signe de *f(x) - g(x)*</u>

Dans la figure ci-dessous, les courbes (C_1) et (C_2) représentent respectivement les fonctions u et v définies par :
$u(x) = \frac{5}{4} - 2xe^{ax+b}$ et $v(x) = x^2 e^{x-\frac{1}{2}}$.



1. a- Montrer que $a = 1$ et $b = -\dfrac{1}{2}$.

   b- Comparer $u\left(\frac{1}{2}\right)$ et $v\left(\frac{1}{2}\right)$, en déduire le signe de $v(x) - u(x)$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{5}{4}x + 1 + x^2 e^{x-\frac{1}{2}}$; on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

   a- Vérifier que $f(x) = -\frac{5}{4}x + 1 + \frac{4}{\sqrt{e}}(0{,}5xe^{0{,}5x})^2$; en déduire la limite de $f(x)$ en $-\infty$.

   b- Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   c- Montrer que $f'(x) = v(x) - u(x)$, puis construire le tableau des variations de f.

   d- Montrer que la droite (d): $y = -\frac{5}{4}x + 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$ et étudier leur position relative.

   e- Tracer (C) et (d).