# Exercices sur les nombres complexes : Partie 1

1- Soit $z = x + iy$ où $(x; y) \in IR^2$.
$Soit\ Z = z + 1 - 3i$

Quel est l'ensemble des points $M(z)$ tel que :
a. $Z$ est un réel ?
b. $Z$ est un imaginaire pur ?
c. $z \cdot \overline{z} = 16$.

2- Soit $z = x + iy$ où $(x; y) \in IR^2$.
$On\ pose\ Z = \frac{z-1}{z+1}\ avec\ z \neq -1$

1. Montrer que $Z$ a pour forme algébrique :
$Z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2} + i\frac{2y}{(x+1)^2 + y^2}$
2. Quel est l'ensemble des points $M(z)$ tels que $Z$ est :
   a. Réel.
   b. Imaginaire pur.

3- Donner la forme algébrique de $(1 + i)^{2021}$.

4- On donne les nombres complexes suivants :
$z_1 = -1 + 2i$ et $z_2 = 3 - 4i$

Déterminer la forme algébrique de :

a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 - 3z_2$ d) $z_1 \cdot z_2$

5- Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :
a) $(2 + i)^2(1 - 3i)$
b) $(5 - 2i)(1 + 4i)(2 - i)$

6- $x$ et $y$ sont deux nombres réels.
Quelle est la forme algébrique de $(x - 2 + iy)(x + 2 - iy)$ ?

7- Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$a)\ i(1-i)$ $\quad b)\ (2-3i)(4+i)$ $\quad$ c) $\frac{-1}{i}$ $\quad$ d) $\frac{1}{i}$

e) $\frac{3+2i}{4-i}$ $\quad$ f) $\frac{1}{5-3i}$ $\quad$ g) $\frac{2}{1+i}-\frac{3}{1-i}$ $\quad$ h) $\frac{2+4i}{5-2i}$

8- On donne les nombres complexes suivants :

$z_1 = 1-2i \qquad z_2 = 3+2i \qquad z_3 = 7-2i$

Calculer :

a) $Re(z_1+z_2+z_3)$ $\quad$ c) $Im(z_1 z_2)$
b) $Im(iz_1)$ $\quad$ d) $Re(2z_1-3z_2+z_3)$

9- Placer dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives :
$z_A = -3+i$ ; $z_B = 1+3i$ ; $z_C = 3+i$ ; $z_D = -3-2i$

Montrer que $ABCD$ est un trapèze.

10- Placer dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives :
$z_A = \frac{3}{2}i$, $z_B = \frac{7}{2}+i$, $z_C = 1-\frac{3}{2}i$ et $z_D = -\frac{5}{2}-i$

Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$ ? Justifier.

11- Placer dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives :
$z_A = -4+2i$, $z_B = -3-i$, $z_C = 3+i$ et $z_D = 2+4i$

Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$ ? Justifier.

12- Exprimer dans chacun des cas suivants $\overline{Z}$ en fonction de $\overline{z}$.

a) $Z = -2 + iz$
b) $Z = (i + z)(2 - iz)$
c) $Z = (2iz + 3)^2$
d) $Z = \frac{1+iz}{2z-i}$

13- Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x; y) \in IR^2$.
Répondre par Vrai ou Faux en justifiant :

a) Si $Z = 3 + z + \overline{z} + i(1 + i)^2 + i(z - \overline{z}) + 4z\overline{z}$
Alors $Z$ est un réel.

b) Si $Z = 4i^9 - 5i + z - \overline{z} + 3i(z + \overline{z})$
Alors $Z$ est un imaginaire pur.

14- Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x; y) \in IR^2$.
Préciser dans chacun des cas suivants si $Z$ est réel ou imaginaire pur ou ni l'un ni l'autre.

a) $Z = z + \overline{z} - 4i$
b) $Z = z - \overline{z} + 6i$
c) $Z = z\overline{z} - z + \overline{z}$
d) $Z = \overline{z}(z + i) + i(7i - z)$

15- $Soit\ z_1 = \frac{3-i}{4+i}\ et\ z_2 = \frac{3+i}{4-i}$
Sans avoir à passer aux formes algébriques de $z_1\ et\ z_2$, peut-on affirmer que $z_1 + z_2$ est un réel ?

16- Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
$(3 - i)z = 4 + 2i$ $\qquad$ $(5 + i)\overline{z} = 3 - 7i$

17- Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $3iz - 4 + 5i = (1 - 4i)z + 9$
b) $(3 + 2i)z = 4iz - 5$
c) $z^2 - (5 + 7i)^2 = 0$

d) $z^2 + 8 = 0$
e) $iz^2 + (4 - 7i)z = 0$
f) $\frac{z+3}{z-3} = 2i$

18- Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $2i(z + 4) - 3\overline{z} = 6 - 4i$
b) $4(z + 3i) = 5i\overline{z}$
c) $-4iz + 5\overline{z} + 2i = 2 - 5i$

19- Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

a. $-3 + 4i$
b. $7 - 24i$
c. $-21 + 20i$

20- Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 + 3z - 4 = 0$ b) $z^2 + z + 1 = 0$ c) $z^2 + 4z + 4 = 0$

d) $z^2 - 2z + 2 = 0$ e) $3z^2 + 2z + 1 = 0$ f) $z^2 + 5z + 7 = 0$

g) $z^2 + 2z - 3 = 0$ h) $z^4 + 4z^2 + 4 = 0$ i) $\bar{z} - 3z - 13 = 5 - 9i$

j) $\frac{z^2-z}{z^2+4} = 2$

21- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.

22- Pour quelle valeur de $a$ le nombre complexe $3 - i$ est-il une solution de l'équation $z^2 - 6z + a = 0$ ?
Donner alors l'autre solution de cette équation.

23- On donne l'équation $(E)$: $z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = 0$

1. Vérifier que 8 est une solution particulière de $(E)$.
2. a) Déterminer les réels $a, b$ et $c$ tels que pour tout $z$ de $\mathbb{C}$ :

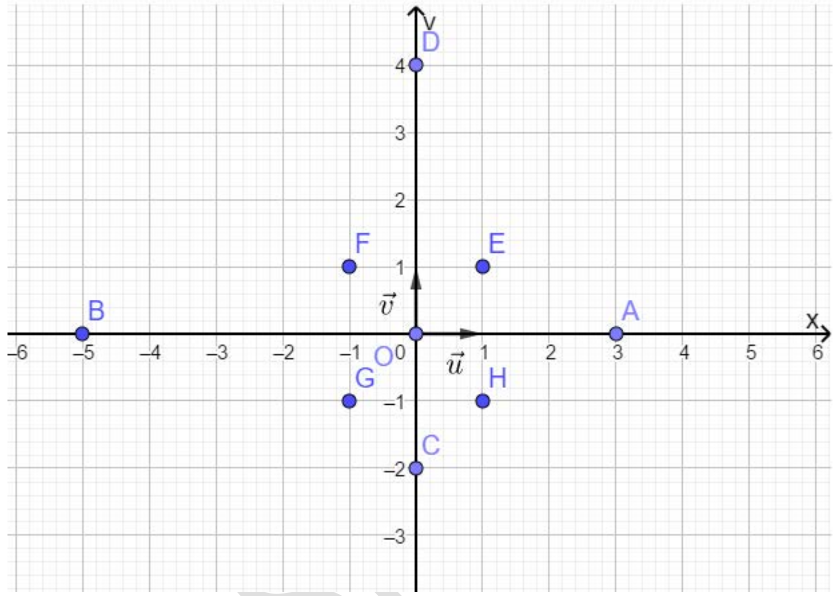
$$z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = (z - 8)(az^2 + bz + c)$$

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$.

**Activité de découverte :**

Placer les points suivants dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ :

$A(3), B(-5), C(-2i), D(4i),$
$E(1+i), F(-1+i),$
$G(-1-i)$ *et* $H(1-i)$




Puis compléter le tableau suivant :

| Nombre complexe $z$ | $\lvert z\rvert = OM$ | $\arg(z) = \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)\ (2\pi)$ |
|---|---|---|
| $z_A = 3$ | | |
| $z_B = -5$ | | |
| $z_C = -2i$ | | |
| $z_D = 4i$ | | |
| $z_E = 1+i$ | | |
| $z_F = -1+i$ | | |
| $z_G = -1-i$ | | |
| $z_H = 1-i$ | | |
| $z_I = -4-4i$ | | |
| $z_J = -5+5i$ | | |

24- Déterminer :

$\arg(4-4i)$ $\quad$ $\arg\left(\frac{-2}{1-i}\right)$ $\quad$ $\arg\left(\frac{-1-i}{1+i}\right)$ $\quad$ $\arg((-3i)^{24})$

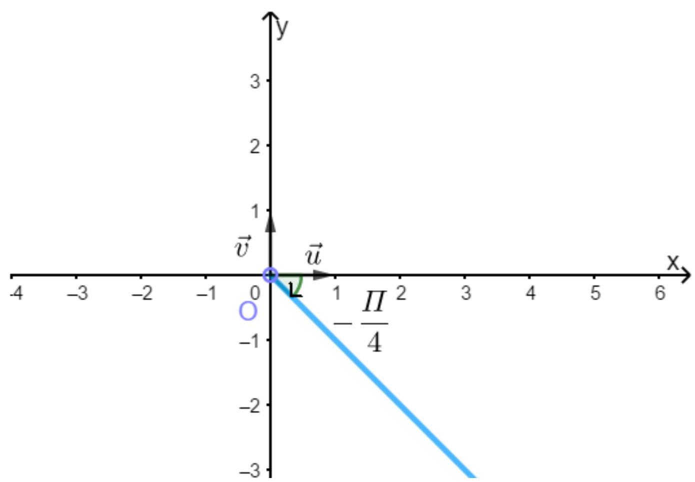
19-Déterminer :

$\arg\left(\frac{1+5i}{2-3i}\right)$ $\quad$ $\arg\left(\frac{4-8i}{-4-2i}\right)$ $\quad$ $\arg\big((1-2i)(-2-4i)\big)$

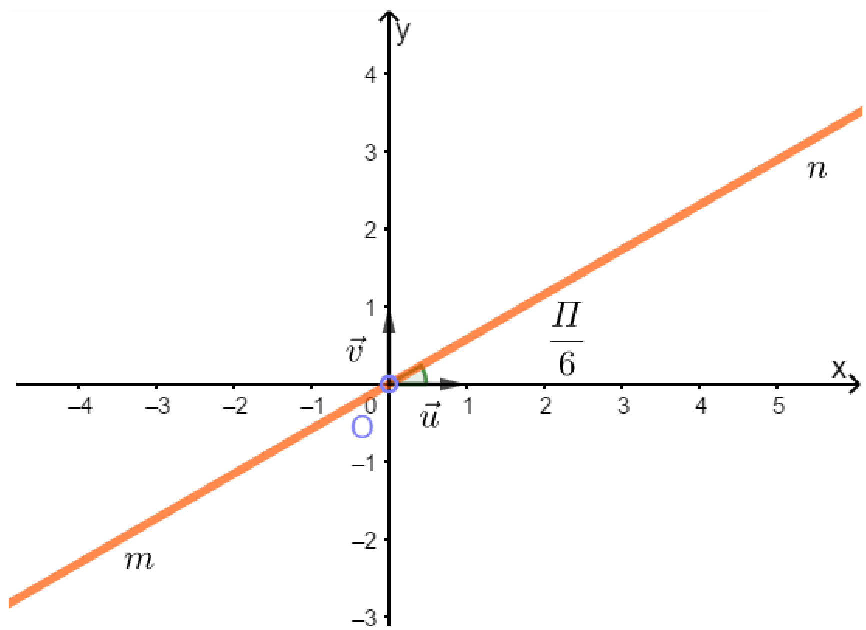
$\arg\big(2i(-3+3i)\big)$.

20- $z$ est un nombre complexe non nul.

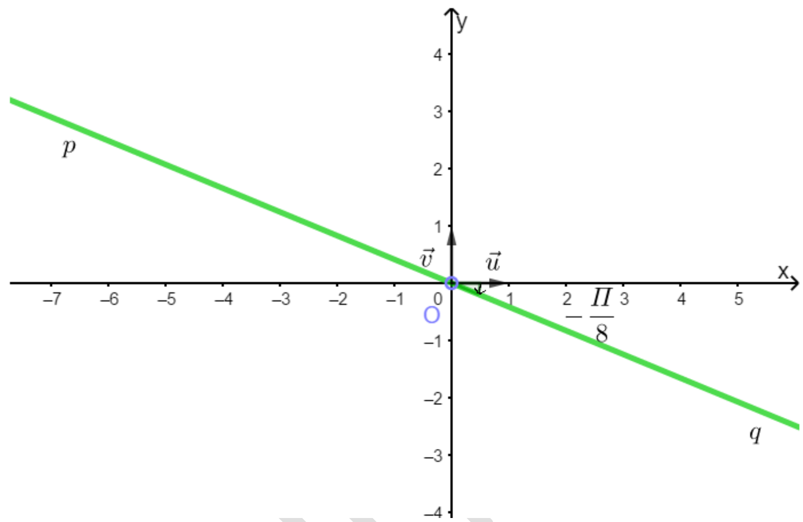
a. Quel est l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg(z) = \frac{-\pi}{4}\ (2\pi)$ ? Le tracer.




b. Quel est l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg(z) = \frac{\pi}{6}\ (\pi)$ ? Le tracer.



c. Quel est l’ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg(z) = -\frac{\pi}{8}\ (\pi)$ ? Le tracer.




21-Dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ :

Faire une figure dans chacun des cas suivants puis répondre aux questions suivantes :

1) Soient $A(1+5i)$, $B(1+2i)$

Que vaut $\left(\vec{u}\ \overrightarrow{AB}\right)$ ?

2) Soient $C(2)$, $D(-8)$

Que vaut $\left(\vec{u}\ \overrightarrow{CD}\right)$ ?

3) Soient $E(4-6i)$, $F(2-8i)$

Que vaut $\left(\vec{u}\ \overrightarrow{EF}\right)$ ?

4) Soient $G(-7)$, $H(2)$

Que vaut $\left(\vec{u}\ \overrightarrow{GH}\right)$ ?

5) Soient $I(-3+2i)$, $J(-3+7i)$

Que vaut $(\vec{u}\ \overrightarrow{IJ})$ ?

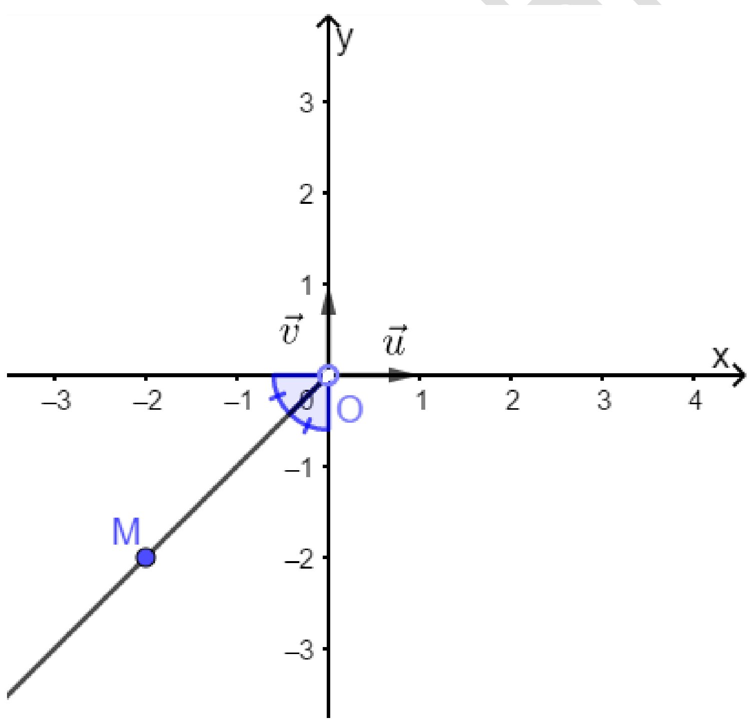
6) Soient $K(4+2i)$, $L(1+5i)$

Que vaut $(\vec{u}\ \overrightarrow{KL})$ ?

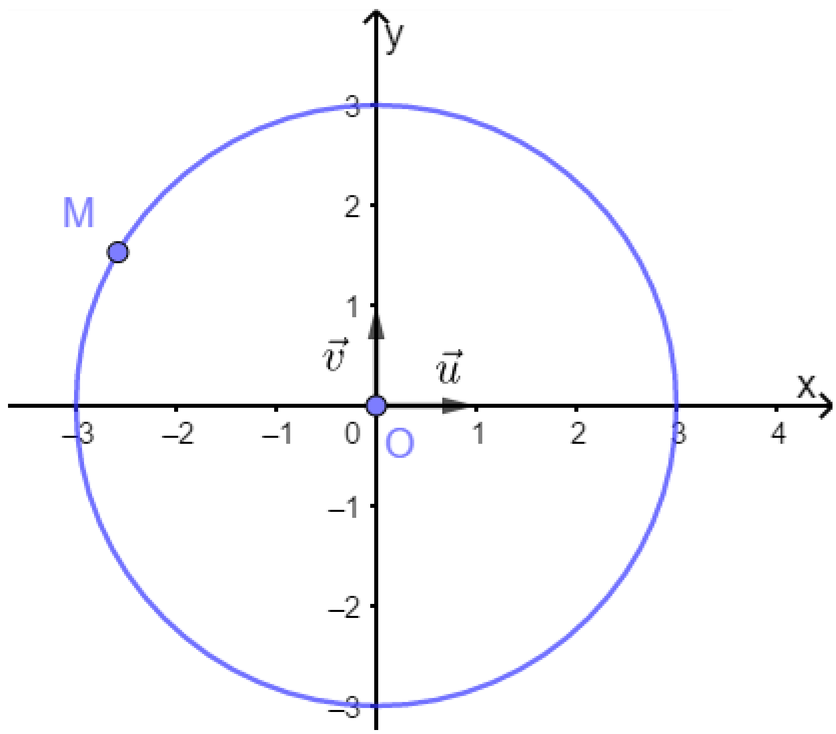
22-Dans chacun des cas suivants, on a **représenté un ensemble (E) des points $M$ du plan d'affixe $z$.**

Caractériser l'ensemble $(E)$ à l'aide de $|z|$ ou de $\arg(z)$.

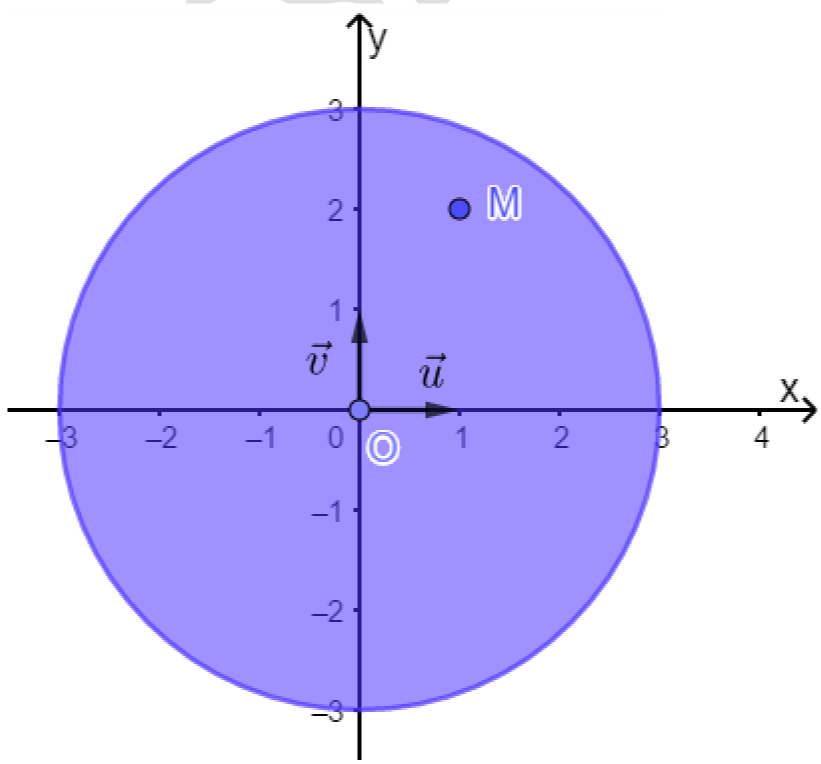
1)



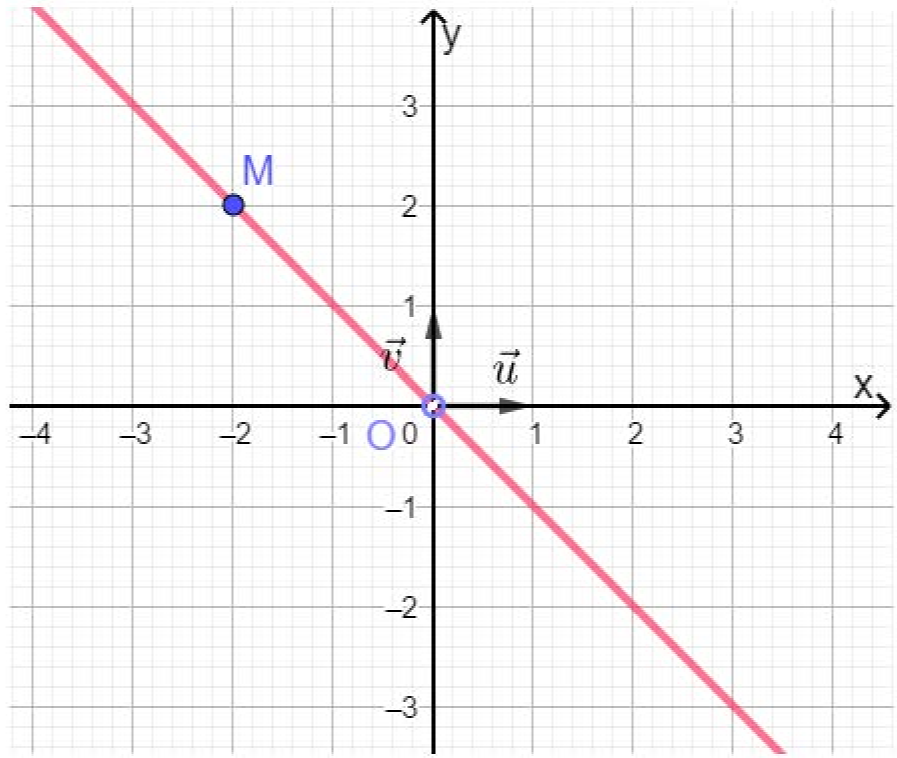
2)


y
3
M
2
1
$\vec{v}$
$\vec{u}$
x
–3
–2
–1
0
O
1
2
3
4
–1
–2
–3

3)


y
3
2
M
1
$\vec{v}$
$\vec{u}$
x
–3
–2
–1
0
O
1
2
3
4
–1
–2
–3

4)




23-On donne dans un repère orthonormé les points suivants :

$A(2-3i)$ $B(-1+4i)$ et $C(-5+2i)$

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points $M(z)$, puis le tracer :

a. $|z-2+3i|=2$

b. $|z-2+3i|=|z+1-4i|$

c. $|z-2+3i|=|z+1-4i|=|z+5-2i|$

24-On donne dans un repère orthonormé les points suivants :

$A(-4i), B(-1+3i)$, $C(-2)$ et $D(4i)$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points $M(z)$, puis le tracer :

a. $|iz-4| = 2$
b. $|\overline{z}+1+3i| = |z+2|$
c. $|\overline{z}-4i| = 3$
d. $\arg(z+4i) = \frac{\pi}{3}(2\pi)$
e. $\arg(iz+3+i) = -\frac{\pi}{6}(\pi)$ $\quad et \quad$ $|z+1-3i| > 2$
f. $\arg(2\overline{z}+8i) = \frac{3\pi}{4}(2\pi)$ $\quad et \quad$ $|2iz+8| \leq 6$

25-Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points $M(z)$ et le représenter.

a. $6 < |-2i\overline{z}+8| \leq 10$.
b. $-\frac{\pi}{4} < \arg(-3i\overline{z}-9) \leq \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$
c. $-\frac{\pi}{4} < \arg(-3i\overline{z}-9) \leq \frac{\pi}{3} \quad (\pi)$

# Exercices sur les nombres complexes : Partie 2

## Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants, donner une forme trigonométrique et une forme exponentielle de $z$.

a) $z$ est un nombre complexe tel que $\begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{7} (2\pi) \end{cases}$

b) $z$ est un nombre complexe tel que $\begin{cases} |z| = 3 \\ \arg(z) = -\frac{\pi}{5} (2\pi) \end{cases}$

c) $z = 1 + i$

d) $z = -1 + i$

e) $z = 5i$

f) $z = -1 - i$

g) $z = -7i$

h) $z = 1 - i$

i) $z = -2 + 2i$

j) $z = 4 - 4i$

k) $z = 8$

l) $z = -6$

m)$z = x$ avec $x$ un réel strictement positif

n) $z = x$ avec $x$ un réel strictement négatif

o) $z = iy$ avec $y$ un réel strictement positif

p) $z = iy$ avec $y$ un réel strictement négatif

**Exercice 2 :**

Dans chacun des cas suivants dire s'il s'agit d'une forme trigonométrique.

Sinon donner une forme trigonométrique et une forme exponentielle de $z$.

a) $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + isin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$

b) $z = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + isin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$

c) $z = 4\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

d) $z = 7\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

e) $z = 6\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + icos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

**Exercice 3 :**

Donner une forme trigonométrique et une forme exponentielle de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - isin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_2 = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_3 = -\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - isin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

$$z_4 = -7\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$$

$$z_5 = -\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) + icos\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

**Exercice 4 :**

Donner une forme trigonométrique et exponentielle de chacun des nombres suivants :

$$z_1 = \sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

$$z_2 = 2i$$

$$z_3 = \frac{1}{1+i}$$

**Exercice 5 :**

Donner une forme trigonométrique et exponentielle de chacun des nombres suivants :

$$z_1 = -2\big(\cos(\theta) + isin(\theta)\big) \qquad z_2 = 3\big(\sin(\theta) + icos(\theta)\big)$$

**Exercice 6 :**

1. Donner une forme exponentielle de $z = \left(-1 - i\sqrt{3}\right)(-1 + i)$
2. Donner une forme algébrique de $z = \left(-1 - i\sqrt{3}\right)(-1 + i)$
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

**Exercice 7 :**

Donner une forme trigonométrique et exponentielle de chacun des nombres suivants :

$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$

$z_2 = (2 - 2i)\left(3 + i\sqrt{3}\right)$

$z_3 = \dfrac{\sqrt{3} - 3i}{1 - i}$

**Exercice 8 :**

Donner le module et un argument de chacun des nombres suivants :

$z_1 = \sqrt{2}e^{i2\theta}$

$z_2 = -e^{-i\theta}$

$z_3 = -2ie^{i\theta}$

**Exercice 9 :**

On donne les nombres complexes $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

a. Donner une forme exponentielle de $\frac{z_1}{z_2}$.
b. Donner la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
c. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

**Exercice 10 :**

Ecrire sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^{12}$$

$$z_2 = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})\left(-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + isin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$$

$$z_3 = (1 + i)^{2020}(1 - i)^{2021}$$

**Exercice 11 :**

Ecrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = -4ie^{i\frac{\pi}{3}}$ $\quad z_2 = (-1 - i)e^{i\frac{\pi}{5}}$ $\quad z_3 = \left(-4e^{-i\frac{\pi}{9}}\right)^3$

$z_4 = \frac{6}{e^{i\frac{\pi}{8}}}$ $\quad z_5 = \left(\frac{-2}{3e^{-i\frac{\pi}{7}}}\right)^{14}$ $\quad z_6 = \frac{4i}{-8e^{i\frac{\pi}{3}}}$

**Exercice 12 :**

Soient les points $A(2+3i)$ $B(4-5i)$ $et$ $C(10+5i)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ du plan alors :

a) Ecrire sous forme exponentielle $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.
b) En déduire $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|$ et $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)$
c) En déduire la nature du triangle $ABC$.

**Exercice 13 :**

Soient les points $A(-2i)$ $B\left(-\sqrt{3}+i\right)$ $et$ $C(\sqrt{3}+i)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ du plan alors :

a) Ecrire sous forme exponentielle $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.
b) En déduire $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|$ et $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)$ $(2\pi)$
c) En déduire la nature du triangle $ABC$.

**Exercice 14 :**

1. Placer les points $A$ $B$ $et$ $C$ d'affixes respectives : $z_A=-\frac{1}{3}-2i$ et $z_B=1+2i$ et $z_C=\frac{7}{3}+6i$.

2. Les points $A, B$ et $C$ sont-ils alignés ?

**<u>Exercice 15 :</u>**

On donne dans le plan complexe les points $A\ \ B$ et $C$ d'affixes respectives $z_A = -2,\ z_B = 1 + i$ et $z_C = -1 - 3i$.

1. Placer les points $A\ \ B$ et $C$.
2. Quelle est la nature du triangle $ABC$ ?

**<u>Exercice 16 :</u>** Vrai ou Faux ?

Pour chacune des propositions suivantes, indiquez si elle est vraie ou fausse et donnez une démonstration de la réponse choisie.

Le plan complexe est ramené à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. $A$ est le point d'affixe $2 - 5i$ et $B$ est le point d'affixe $7 - 3i$.
Proposition 1 : Le triangle $OAB$ est rectangle isocèle.

2. On note $(\Delta)$ l'ensemble des points $M(z)$ tel que :
$$|z - i| = |z + 2i|$$
Proposition 2 : $(\Delta)$ est une droite parallèle à l'axe des réels.

3. $z$ est un nombre complexe non nul.

Proposition 3 : Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de $z$, alors $|i + z| = 1 + |z|$

4. Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.

Proposition 4 : Pour tout entier naturel $n$ non nul, $z^{3n}$ est imaginaire pur.

5. $z$ est un nombre complexe non nul.

Proposition 5 : Si $|z| = 1$, alors $z^2 + \frac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

**Exercice 17 :**

Déterminer la nature des ensembles de points suivants :

1) $|z - 3 + i| \geq 2$.
2) $z = 2 + 5i + 4e^{i\theta}$ avec $\theta \in ]-\pi; \pi]$.
3) $\arg(z - 2 + 3i) = \frac{\pi}{4} (\pi)$
4) $z = 3 - 4i + 2ie^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$ .
5) $z = -1 + 4i - 3e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]-\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right]$.