VIII) ***Partie I :*** ***Étude d'une fonction auxiliaire***

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par: $f(x)=ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$.

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction f et étudier les variations de f.
3. Tracer la courbe (C_f) représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, où $\|\vec{i}\| = 4\ cm$ et $\|\vec{j}\| = 5\ cm$.

Partie II : ***Étude d'une fonction.***

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par: $g(x)=x\,ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

1. Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ et que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.
2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de g.
   On vérifie que $g'(x)=f(x)$.
3. En déduire les variations de g sur $]0;+\infty[$.
4. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=e$.

Partie III : ***Étude d'une suite***

Soit (u_n) la suite numérique définie sur N* par $u_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

Montrer, en remarquant que $ln(u_n)=g(n)$, que :

a) La suite (u_n) est une suite croissante.
b) La suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

IX) La constante d'Euler

Le but de cet exercice est de montrer que la suite $(c_n)_{n\geq 1}$ définie par :
$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - ln(n)$ est une suite convergente.

Partie A :

1. Soit $f(x) = ln(x+1) - ln(x) - \frac{1}{x+1}$
   a. Déterminer le domaine de définition de la fonction f,
   b. Étudier les variations de la fonction f.
   c. En déduire le signe de $f(x)$.
2. Soit $g(x) = ln(x+1) - ln(x) - \frac{1}{x}$
   a. Déterminer le domaine de définition de la fonction g,
   b. Étudier les variations de la fonction g.
   c. En déduire le signe de $g(x)$.
3. En déduire que pour tout $x \geq 1$,

$$\frac{1}{x+1} \leq ln(x+1) - ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

Partie B : *Soit la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par* : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

a) Appliquer le résultat obtenu dans la **Partie A.3.** pour $x = 1$, $x = 2, \ldots$, $x = n-1$ et $x = n$ $\quad (n \geq 1)$.
b) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

Partie C : Soit f la fonction définie par $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

a) En utilisant l'encadrement obtenu dans la **Partie A.3.** montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

b) Vérifier que pour tout $n \geq 2$, $c_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$.

c) En déduire que la suite $(c_n)_{n\geq 1}$ est croissante et que, pour tout $n \geq 2$,

$$f(1) \leq c_n \leq 1 - \frac{1}{n}$$

d) En déduire que la suite $(c_n)_{n\geq 1}$ converge.
(La limite de la suite $(c_n)_{n\geq 1}$ ***est dite la constante d'Euler).***

X) **Intégrale et intégration par parties**

Soit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout naturel n par :

$$I_n = \int_1^e x.(ln(x))^n dx \quad si\ n \geq 1$$

$$et\ I_0 = \int_1^e x\, dx$$

1. Calculer I_0, puis I_1.

2. a. Au moyen d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n et de I_{n-1}.

   b. Vérifier que $2I_n + nI_{n-1} = e^2$.

   c. En déduire la valeur de I_2.

   d. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   e. En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$$

   f. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.