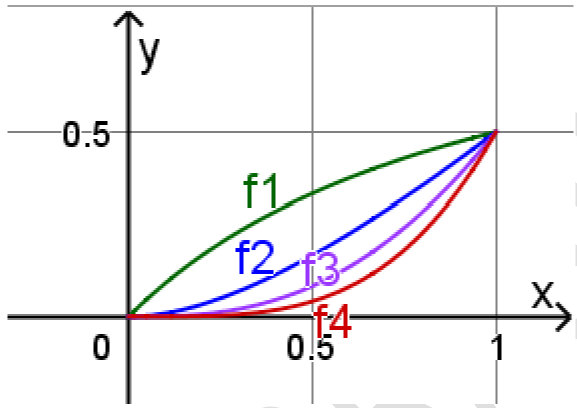
22) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$$

1. Les fonctions notées $f_n : x \to \frac{x^n}{1+x}$ sont continues et positives sur [0 ;1].




Conjecturer alors le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
b. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est elle convergente ?

2. a. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$,

$$0 \leq f_n(x) \leq x^n$$

c. Déduisez-en que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{1+n}$

3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.