Université Libanaise
Faculté de Génie

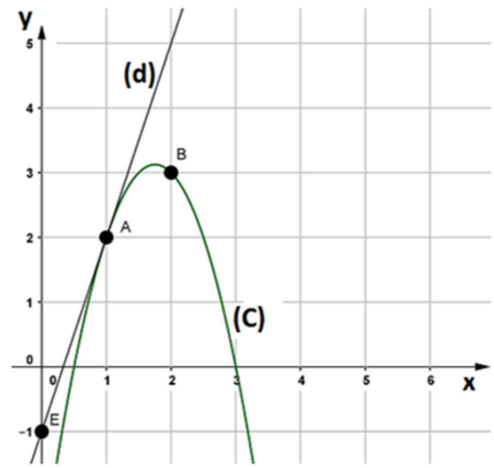
Concours d'entrée
MATHÉMATIQUES
SUJET A
(Programme Libanais)

Date : *18/07/2023*
Durée : *2h30*

Les smartphones et les documents sont strictement interdits.
Les calculatrices non graphiques sont autorisées.

Exercice 1 : (14 points)
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, ***une seule*** *des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte ½ point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.*
Répondre sur la feuille de réponses, en entourant pour chaque question ***une seule*** *des réponses* ***a***, ***b***, ***c*** *ou* ***d***.
Aucune justification n'est demandée.

1. Considérons la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois constantes réelles. La représentation graphique **(C)** de f est donnée ci-contre. Les points $A(1\,;2)$ et $B(2\,;3)$ sont deux points de la courbe **(C)**. La tangente **(d)** à la courbe **(C)** en A passe par le point $E(0\,;-1)$.
Alors :
a) $f(x) = -3x^2 + 10x - 5$
b) $f(x) = -2x^2 + 7x - 3$
c) $f(x) = x^2 - 2x + 3$
d) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

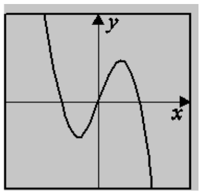


2. On considère le nombre complexe $z = -2e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Un argument de $(1-i)\bar{z}$, à 2π près, est:
a) $\frac{5\pi}{12}$ **b)** $-\frac{5\pi}{12}$ **c)** $\frac{7\pi}{12}$ **d)** $\frac{\pi}{12}$

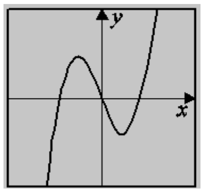
3. Considérons l'équation (E) suivante: $(e^x)^4 + e^{2x} = 6$.
a) (E) admet une seule solution réelle.
b) (E) admet deux solutions réelles.
c) (E) n'admet aucune solution réelle.
d) Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

4. En 10 minutes, l'aiguille des heures d'une montre tourne d'un angle en degrés de:
a) 30 **b)** 6 **c)** 5 **d)** Les trois réponses précédentes sont fausses.

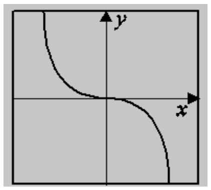
5. Le graphe de la fonction $x \mapsto x - x^3$ est :



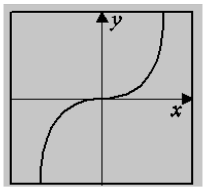
a)



b)



c)



d)

6. Une machine fabrique des pièces mécaniques. Chaque pièce peut présenter deux défauts notés A et B. Une étude statistique montre que 1,4% des pièces ont le défaut A, 1,1% des pièces ont le défaut B et 0,2% des pièces ont les deux défauts. La probabilité qu'une pièce prélevée au hasard n'ait aucun des deux défauts est:

a) 0,975 **b)** 0,973 **c)** 0,977 **d)** Aucune des trois réponses précédentes.

7. Soient z_1 et z_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $-2z^2 + 3z - \frac{25}{8} = 0$. Alors $|z_1 z_2|$ est égal à:

a) $\frac{3}{2}$ **b)** $\frac{25}{4}$ **c)** $\frac{9}{16}$ **d)** Aucune des trois réponses précédentes n'est exacte.

8. Dima dispose de deux urnes A et B contenant chacune quatre boules indiscernables au toucher. L'urne A contient deux boules vertes et deux boules rouges. L'urne B contient trois boules vertes et une boule rouge. Dima choisit au hasard une urne puis tire une boule de cette urne. Elle obtient alors une boule verte. La probabilité qu'elle ait choisi l'urne B est:

a) $\frac{5}{8}$ **b)** $\frac{3}{5}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** Aucune des trois réponses précédentes.

9. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(5x-1) \leq 1$ est :

a) $]-\infty\,;\,\frac{1}{5}]$ **b)** $]\frac{1}{5}\,;+\infty[$ **c)** $]-\infty\,;\,\frac{e+1}{5}]$ **d)** $]\frac{1}{5}\,;\,\frac{e+1}{5}]$

10. Un questionnaire à choix multiple comporte 5 questions indépendantes. Pour chaque question, 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte. Si un élève répond au hasard à toutes les questions, quelle est la probabilité qu'il réponde correctement à 2 questions exactement ?

a) $\frac{2}{5}$ **b)** $\frac{135}{512}$ **c)** $\frac{9}{16}$ **d)** Aucune des trois réponses précédentes n'est correcte.

11. Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ telle que: $\begin{cases} \cdot \text{ pour tout } x \in]0\,;3],\ f(x) = 2x+1 \\ \cdot \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+3) \end{cases}$

Alors $f(6) + f(7) + f(8) =$

a) 8 **b)** 15 **c)** 18 **d)** 21

12. On dispose d'une pièce de monnaie truquée de telle sorte que, si on la lance, le coté "FACE" a 3 fois plus de chances d'apparaitre que le coté "PILE". On lance 4 fois cette pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir une seule une fois "FACE" sur les 4 lancers?

a) $3/4$ **b)** $3/256$ **c)** $3/64$ **d)** Aucune des trois réponses précédentes n'est correcte.

13. Le nombre complexe $(1-i)^{2024}$ est:

a) un réel strictement positif. **b)** un réel strictement négatif.

c) un imaginaire pur. **d)** Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

14. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{1+\frac{2}{x}} =$

a) -1 **b)** $-\infty$ **c)** 0 **d)** 1

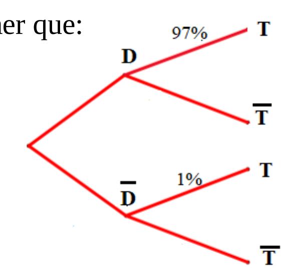
15. On donne l'arbre de probabilités ci-contre. Sachant que $p(\mathbf{T}) = 0{,}05$, on peut alors affirmer que:

a) $p(\mathbf{D}) = 1/2$

b) $p(\mathbf{D}) = 1/24$

c) Les évènements **D** et **T** sont indépendants.

d) Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.



16. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x+1}{x}$, de courbe représentative (C) dans un repère. La tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1 a pour équation:

a) $y = e + 1$ **b)** $y = ex + 1$ **c)** $y = -x + e + 2$ **d)** Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

17. Soit T la transformation du plan, d'écriture complexe $\boldsymbol{z' = i\bar{z} - 3}$. Un point M(z) du plan est dit <u>invariant</u> s'il est égal à son image par T. Alors on peut affirmer que:

a) T admet un seul point invariant. **b)** T n'admet pas de point invariant.
c) T admet une infinité de points invariants. **d)** aucune des affirmations précédentes n'est exacte.

18. Soit (C) la courbe de la fonction $f: x \mapsto \frac{\ln(x+1)+x}{x+1}$. La courbe (C) admet une asymptote horizontale et une asymptote verticale qui se coupent au point de coordonnées:

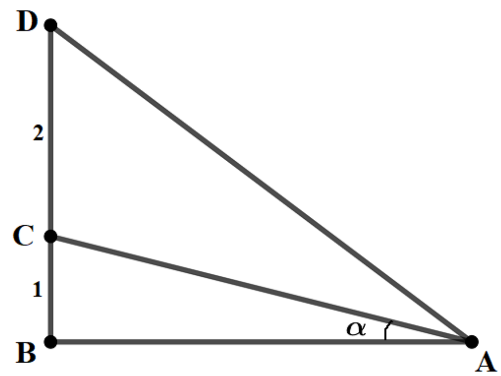
a) $(1\,;\,-1)$ **b)** $(-1\,;\,1)$ **c)** $(1\,;\,1)$ **d)** $(-1\,;\,0)$

19. Le triangle BAD est rectangle en B. Le point C appartient au segment [BD] tel que BC=1 et CD=2. De plus on a

$\text{BAC} = \alpha$ où α est une mesure de cet angle exprimée en radians (voir la figure ci-dessous).

Soit s la similitude plane directe qui transforme C en B et A en D.

Le rapport $\boldsymbol{k}$ et un angle $\boldsymbol{\theta}$ de la similitude s sont donnés respectivement par:



a) $\boldsymbol{k} = \frac{2}{3}$ et $\boldsymbol{\theta} = \alpha$.

b) $\boldsymbol{k} = 3\sin(\alpha)$ et $\boldsymbol{\theta} = \alpha - \frac{\pi}{2}$.

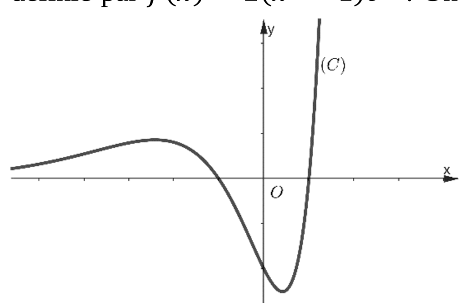
c) $\boldsymbol{k} = 3\sin(\alpha)$ et $\boldsymbol{\theta} = \alpha + \frac{\pi}{2}$.

d) Aucune des trois affirmations précédentes n'est correcte.

20. Un code de carte bancaire est composé de 4 chiffres ordonnés. Zouzou ne se souvient plus de son code. Il sait qu'il y a un **5**, un **3**, et deux **1** qui ne sont pas consécutifs. Si Zouzou tape au hasard son code, la probabilité qu'il trouve le bon code est:

a) $\frac{1}{4!}$ **b)** $\frac{1}{3^4}$ **c)** $\frac{1}{6}$ **d)** $\frac{1}{4}$

21. Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative notée *(C)* de la fonction f définie par $f(x) = 2(x^2 - 1)e^x$. On considère les points A et B de *(C)*, d'abscisses respectives 0 et -1.



a) Les tangentes à *(C)* en A et B sont parallèles.

b) L'équation $f(x) = -1$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

c) La fonction f admet un maximum global.

d) La courbe *(C)* admet un point d'inflexion unique.

22. La fonction $f: x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$ est:

a) définie sur $\mathbb{R} - \{0; 1\}$. **b)** dérivable sur $]0\,;1[$.
c) dérivable sur $[0\,;1]$. **d)** Aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

23. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, M et N d'affixes respectives $z_A = i$, $z_M = 1+2i$ et $z_N = iz_M + 1 + i$. Alors le triangle AMN est:

a) équilatéral **b)** rectangle isocèle en A **c)** semi-équilatéral **d)** non isocèle.

24. On lance deux dés cubiques parfaitement équilibrés. Quelle est la probabilité que la somme des deux nombres obtenus soit égale à 9?

a) $1/36$ **b)** $1/18$ **c)** $3/4$ **d)** Aucun des trois résultats précédents n'est correct.

25. Le nombre de solutions de l'équation $e^{-x} - \sqrt{x} = 0$, d'inconnue réelle x, est:

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

26. Considérons une fonction rélle f définie et deux fois dérivable sur $[-3;1]$ dont la courbe de la dérivée seconde f'' est représentée ci-contre.

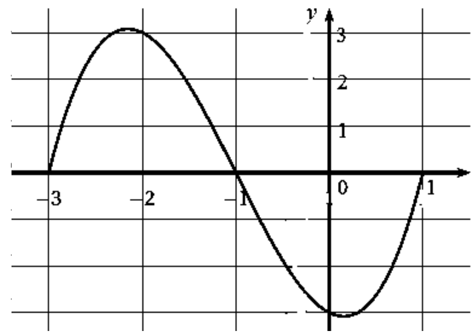
On peut alors affirmer que:

a) la fonction f' est décroissante sur l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$.

b) la fonction f' admet un maximum en $x=-1$.

c) la fonction f est convexe sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

d) la fonction f est concave sur l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$.



27. On se place dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé. Soit E l'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 + 3i$ est un nombre imaginaire pur. L'ensemble E est:

a) une droite **b)** la réunion des axes du repère **c)** un cercle **d)** la réunion de deux droites

28. Soit Γ un cercle centré en O. Les droites (AC) et (CD) sont tangentes à Γ en B et D respectivement. De plus on suppose que la mesure de l'angle DBC est de 70°.

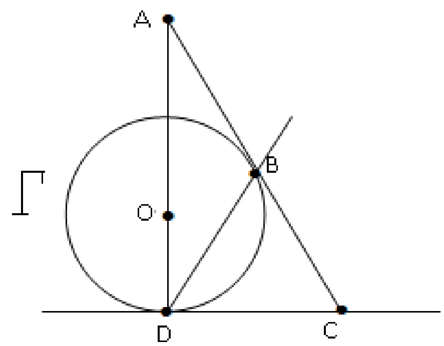
Alors la mesure en ° de l'angle DAC est:

a) 60

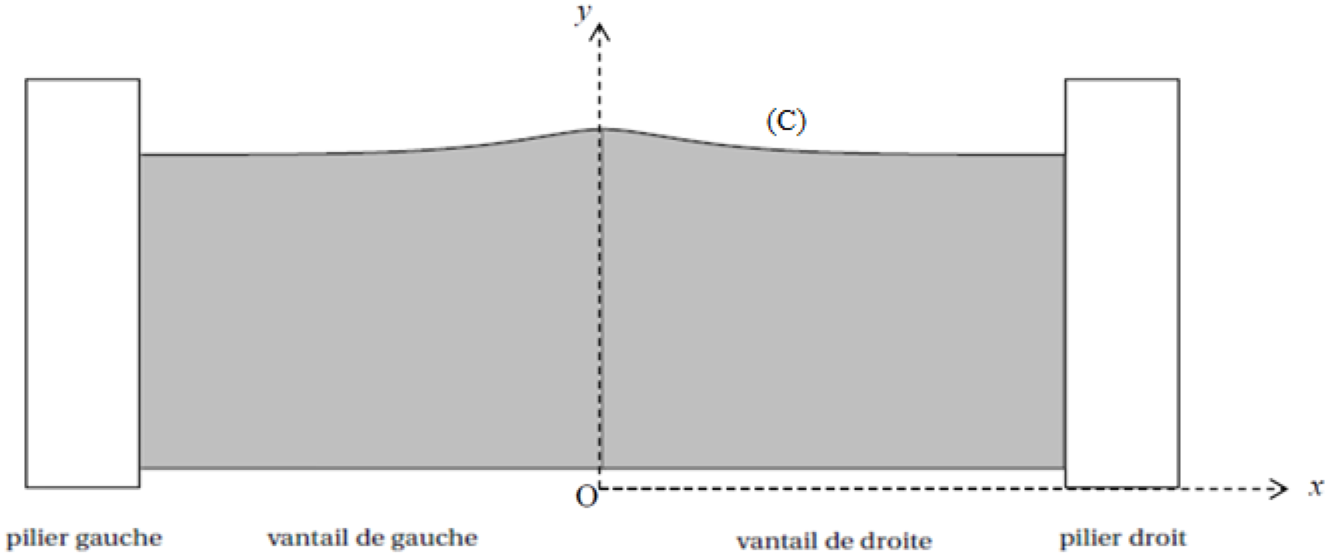
b) 55

c) 50

d) Aucune des réponses préponses précédentes.



Exercice 2 : (6 points)



On désire réaliser un portail comme indiqué ci-dessus. Ce portail est formé de deux vantaux. Chaque vantail mesure 2 mètres de large.

Partie A : ***Modélisation de la partie supérieure du portail.***

On suppose que le bord supérieur du vantail de droite a la forme de la courbe (C) de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $f(x)=\left(x+\dfrac{1}{4}\right)e^{-4x}+b$ où b est une constante réelle, relativement à un repère orthonormé (Oxy) d'origine O ((Ox) est située au sol), d'unité **1 m**. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2].

1. **a)** Calculer $f'(x)$, pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 2].
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2].
2. Déterminer le nombre b pour que la hauteur maximale du portail soit égale à 1,5 m.

Pour la suite de l'exercice, la fonction f est définie sur l'intervalle [0 ; 2] par : $f(x)=\left(x+\dfrac{1}{4}\right)e^{-4x}+\dfrac{5}{4}$.

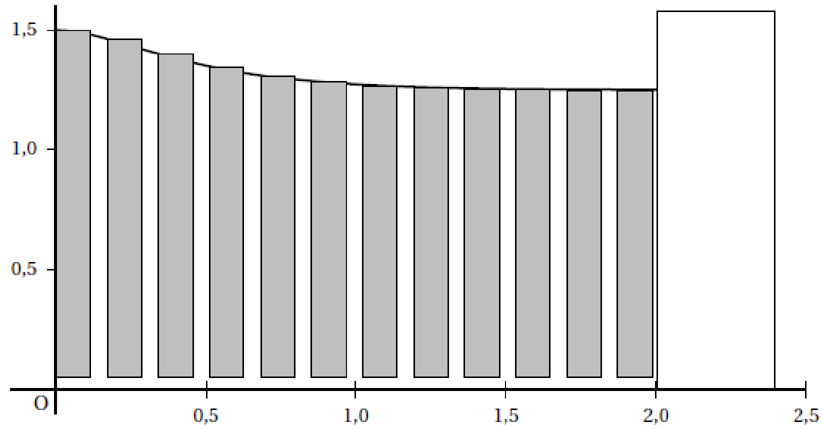
3. Etudier les variations de la fonction dérivée f' de f sur [0 ; 2].
4. Déterminer les coordonnées du point A de la courbe (C) (du bord supérieur du vantail de droite) où la tangente a la plus grande pente en valeur absolue.
5. La courbe (C) admet-elle un point d'inflexion? Si oui, quelles sont les coordonnées de ce point?

Partie B : ***Détermination de l'aire du vantail.***

Chaque vantail est réalisé à l'aide d'une plaque métallique. On veut calculer l'aire de chacune des plaques, sachant que le bord inférieur du vantail est situé à 0,05 m de hauteur par rapport au sol.

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $F(x)=\left(-\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{8}\right)e^{-4x}+\dfrac{5}{4}x$ est une primitive de la fonction f.
2. En déduire l'aire en m^2 de chaque vantail. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de cette aire. (On s'intéresse ici à l'objet « vantail » sans faire référence à son environnement).

Partie C : ***Calcul de l'aire totale des planches.***



La distance entre le bas du portail et le sol est de 0,05 m.

On désire réaliser un portail de même forme mais à partir de planches rectangulaires disjointes de largeur 0,12 m, espacées de 0,05 m. Pour le vantail de droite, le coin supérieur gauche de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail (voir la figure ci-dessus) et le bas de chaque planche est situé à 0,05 m de hauteur par rapport au sol. Les planches sont numérotées à partir de 0 (ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0, la deuxième planche porte le numéro 1, etc…).

1. Montrer que l'aire $A(k)$ en m^2 de la planche numéro k est donnée par $A(k) = (f(0{,}17k) - 0{,}05) \times 0{,}12$.
2. Montrer qu'il faut 12 planches pour réaliser le vantail.
3. Soit S la somme des aires des planches du vantail de droite. On vous donne le tableau suivant, donnant les valeurs de $f(0{,}17k)$ pour différentes valeurs de k.

$\boldsymbol{k}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
$\mathbf{0{,}17}\boldsymbol{k}$	0	0,17	0,34	0,51	0,68	0,85	1,02	1,19	1,36	1,53	1,7	1,87	
$\boldsymbol{f}(\mathbf{0{,}17}\boldsymbol{k})$	1,5	1,4628	1,4014	1,3488	1,3113	1,2867	1,2715	1,2623	1,2570	1,2539	1,2522	1,2512	Total : 15,8591

En utilisant les données de ce tableau, calculer une valeur approchée de S.

Université Libanaise
Faculté de Génie

-CORRECTION-

Concours d'entrée

MATHÉMATIQUES

SUJET A

(Programme Libanais)

Date : *18/07/2023*

Exercice 1:

Question	Réponse
1	b
2	d
3	a
4	c
5	a
6	c
7	d
8	b
9	d
10	b
11	b
12	c
13	a
14	c
15	b
16	c
17	b
18	b
19	c
20	c
21	b
22	b
23	b
24	d
25	b
26	b
27	d
28	c

Exercice 2 :

Partie A :

1. **a)** $\forall x \in [0;2], \quad f'(x) = e^{-4x} - 4\left(x+\frac{1}{4}\right)e^{-4x} = -4xe^{-4x}.$

b) Pour tout réel $x \in]0;2]$, on a $e^{-4x} > 0$ et $-4x < 0$ donc $f'(x) < 0$. De plus $f'(0) = 0$. Donc f est stristement décroissante sur $[0;2]$.

2. La fonction f est strictement décroissante sur $[0;2]$, donc son maximum est $f(0) = \frac{1}{4} + b$. On sait que le maximum est 1,5.

On a donc $f(0) = 1{,}5$ ce qui équivaut à $\frac{1}{4} + b = 1{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad b = 1{,}25 = \frac{5}{4}$

∴ La hauteur maximale du portail sera égale à 1,5 m si et seulement si $\boxed{b = 1{,}25 = \frac{5}{4}}$

3. $\forall x \in [0;2]$,
- $f'(x) = -4xe^{-4x}$
- $f''(x) = -4e^{-4x} + 16xe^{-4x} = 4(4x-1)e^{-4x}$

On a $4e^{-4x} > 0$ donc $f''(x)$ prend le signe de $4x-1$. D'où le tableau de variations de f' suivant :

x	0		¼		2
$f''(x)$	-4	$-$	0	$+$	$28e^{-8}$
f'	0	↘	$-e^{-1} \approx -0.368$	↗	$-8e^{-8} \approx -0.003$

4. Le point A où la tangente a la plus grand pente en valeur absolue, est le point de la courbe (C) où $|f'(x)|$ est maximale. D'après le tableau de variations précédent, on en déduit que A est le point d'abscisse $\frac{1}{4}$ et d'ordonnée $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}e^{-1} + \frac{5}{4}$.

∴ Le point A cherché est $\boxed{A\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{5}{4}\right)}$.

5. $\forall x \in [0;2], \quad f''(x) = 4(4x-1)e^{-4x}$ et $\begin{cases} f''(x) = 0 & \Leftrightarrow & x = \frac{1}{4} \\ f''(x) > 0 & \Leftrightarrow & x > \frac{1}{4} \\ f''(x) < 0 & \Leftrightarrow & x < \frac{1}{4} \end{cases}$. Donc f change de concavité en $x = \frac{1}{4}$.

∴ La courbe (C) admet un unique point d'inflexion; c'est le point $A\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{5}{4}\right)$.

Partie B :

1. $\forall x \in [0;2], \quad F'(x) = \left(-\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\right)' e^{-4x} + \left(-\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\right)(e^{-4x})' + \left(\frac{5}{4}x\right)'$

$$= -\frac{1}{4}e^{-4x} + \left(-\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\right)(-4e^{-4x}) + \frac{5}{4} = \left(-\frac{1}{4}+x+\frac{1}{2}\right)e^{-4x} + \frac{5}{4} = \left(x+\frac{1}{4}\right)e^{-4x} + \frac{5}{4} = f(x).$$

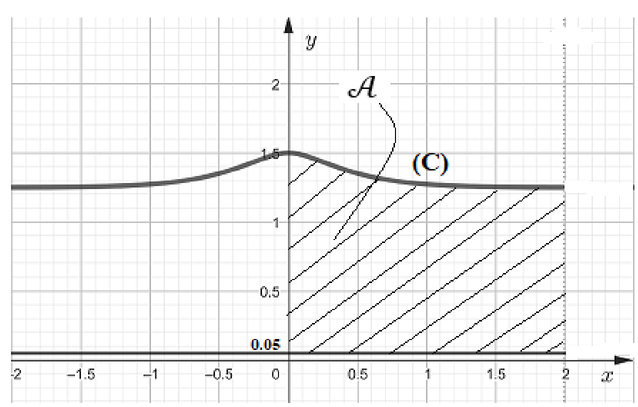
∴ La fonction F est une primitive de f sur $[0;2]$.

2. L'aire du vantail de droite est:

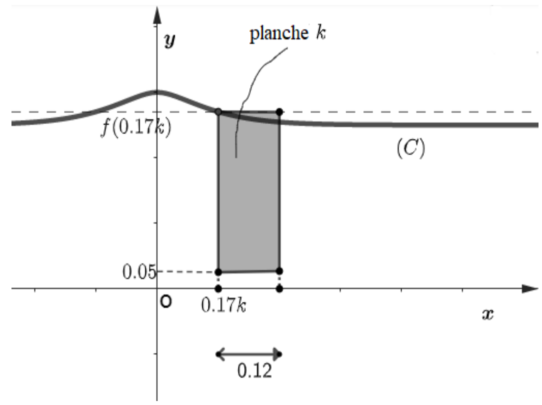
$$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x)dx - 2\times 0{,}05 = F(2) - F(0) - 0{,}1$$

$$= \left(\left(-\frac{2}{4}-\frac{1}{8}\right)e^{-8} + \frac{5}{4}\times 2\right) - \left(\left(-\frac{0}{4}-\frac{1}{8}\right)e^{0} + \frac{5}{4}\times 0\right) - 0{,}1$$

$$= -\frac{5}{8}e^{-8} + \frac{5}{2} + \frac{1}{8} - 0{,}1 = \boxed{-\frac{5}{8}e^{-8} + \frac{101}{40}} \approx \boxed{2{,}52\text{ m}^2}$$



Partie C :



1. Les bords gauches des planches sont situés tous les $0{,}12 + 0{,}05 = 0{,}17$ m;
donc le bord gauche de la planche numéro k est situé à l'abscisse $0{,}17 \times k$.
L'ordonnée du point d'abscisse $0{,}17k$ sur la courbe est $f(0{,}17k)$;
mais comme chaque planche est située à une hauteur de 0,05 m du sol, alors la longueur de la planche numéro k est donc de $f(0{,}17k) - 0{,}05$ en mètres.
Or la largeur de chaque planche est $0{,}12$ m. Ainsi l'aire $A(k)$ de la planche k est égale à sa hauteur $\times$ sa largeur.
$\therefore$ $\boxed{A(k) = (f(0{,}17k) - 0{,}05) \times 0{,}12}$ *cqfd*

2. Soit n le nombre de planches nécessaires pour réaliser le vantail. Il faut alors trouver la plus grande valeur de l'entier n vérifiant la condition suivante:
$$\begin{aligned} n \times 0{,}12 + (n-1) \times 0{,}05 < 2 \quad &\Leftrightarrow \quad n \times 0{,}17 - 0{,}05 < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad n \times 0{,}17 < 2{,}05 \\ &\Leftrightarrow \quad n \times 0{,}17 < 2{,}05 \\ &\Leftrightarrow \quad n < \frac{205}{17} = 12{,}0588\ldots \end{aligned}$$
$\therefore$ Il faut donc 12 planches pour réaliser le vantail.

3. On a: $S = A(0) + A(1) + A(2) + \ldots + A(11)$ où $A(k) = (f(0{,}17k) - 0{,}05) \times 0{,}12$.
Donc $S = 0{,}12\left(f(0{,}17\times 0) + f(0{,}17\times 1) + f(0{,}17\times 2) + \ldots + f(0{,}17\times 11) \ -12\times 0{,}05 \right)$
$= 0{,}12(15{,}8591 - 12\times 0{,}05)$
$= \boxed{1{,}8311}$ m²