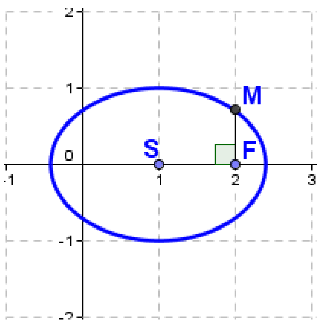
مؤسسات أمل التربوية الدائرة التربوية	باسمه تعالى إمتحانات الثانوية العامة فرع العلوم العامة (فرنسي)	الاختبار المشترك الأول العام الدراسي : 2018/2019
ثانوية : عدد المسائل: ستة	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: أربع ساعات	الاسم: الرقم:

ملاحظة: يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I – (6 points)

Dans le tableau suivant , une seule réponse à chaque question est correcte .
Donner , en **justifiant** , la réponse correspondante à chaque question .

Nº	Questions	Réponses a	Réponses b	Réponses C
1	La dérivée nième de la fonction f définie par $f(x) = \cos^2 x$ est	$2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$	$\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$	$2^{2n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$
2	Soit a un réel positif non nul. $\arcsin\left(\frac{2x}{a}-1\right)+\arcsin\left(1-\frac{2x}{a}\right)=$	0	-1	π
3	La solution de l'inéquation $(3-x)\ln(x-1)\geq 0$ est	[2,3]	]1,2]∪[3,+∞[	{2,3}
4	Soient $F(x)=\int_1^{x^2}\ln^2 t\,dt$ et $g(x) = e\ln x$ alors $(Fog)'(e)=$	e	8e	0
5	La courbe ci – contre représente celle d'une ellipse (E) du foyer F(2,0) et du centre S tel que $MF=\frac{1}{\sqrt{2}}$.  Alors une équation de (E) est	$\frac{(x-1)^2}{2}+y^2=1$	$\frac{(x-1)^2}{9}+y^2=1$	$\frac{x^2}{2}+y^2=1$
6	$\int_0^1\frac{dx}{2x^2-2x+1}=$	0	π	$\frac{\pi}{2}$
7	Si $2\arctan x-\arccos x=\frac{\pi}{2}$ alors l'ensemble des solutions est	{-1 ;0 ;1}	{-1;+1}	{0;-1}
8	Soit z est un nombre complexe donné. Si $\bar{z}=\left\lvert z-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right\rvert$ alors z =	1+i	-1	1

II - (6 points) .

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ On considère les points : A(1;1;3), B(4 ;-2;2) ; les deux plans (P) :x+y-2z+2=0 ; (Q) : -3x+y-z-6=0 et la droite (d):x=t-2 ; y = 7t ; z =4t .

1) Montrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires et vérifier que (d) est l'intersection de (P) et (Q).

2) Montrer que $E\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$ est le projeté orthogonal de A sur (P).

3) Calculer la distance de A à (Q).Déduire la distance de A à (d).

4) Montrer que H(-2,0,0) est le projeté orthogonal de I(1,-1,1) sur (d).

5) Soit (C) un cercle dans le plan (P) de centre I , de rayon R et tangent à (d).

a) Montrer que B est un point de (C) .

b) Ecrire un système d'équations paramétriques de la tangente (T) à (C) en B.

c) Soit F un point de (d) d'ordonnée positif tel que HF=R$\sqrt{6}$ .Calculer les coordonnées de F.

III - (6 points)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ .On considère les points A,B, M et M′ d'affixes respectives : i , -i, z et z′ tel que $z'=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n$ avec $z \neq -i$.

Partie A : Dans cette partie , on suppose que n =1.

1) Résoudre l'équation : z′ = i.

2) Déterminer l'ensemble des points M lorsque M′ varie sur le cercle de centre O et rayon 1.

3) Soit (d) une droite d'équation y= -1. Déterminer l'ensemble des points M′ quand M va-rie sur (d) – {B}.

Partie B :

1) Vérifier que $1+e^{i\theta}=2\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\theta}{2}}$ et $1-e^{i\theta}=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\theta}{2}}$.

2) Calculer z si z′=1 et montrer que la réponse obtenue de z est un réel à déterminer.

3) Comment peut – on prévoir le résultat précédent sans faire de calcul.

Partie C : Dans cette partie , on suppose que $z=-i-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

1) Pour quelles valeurs de n , le nombre complexe z′ est un réel ?

2) Le nombre complexe z′ peut – être imaginaire pur ? Justifier.

IV - (6 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_{n+1}=2\sqrt{u_n}$ et $u_0=8$, pour tout entier n de **N**.

1) Montrer que $u_n > 4$ pour tout entier n de **N**.

2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante .

b) Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite .

3) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n)-\ln 4$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ dont on donnera le premier terme.

4) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que $u_n = 2^{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

5) Pour quelle valeur de l'entier naturel non nul n a-t-on $u_n > 5{,}6$?

6) On donne la suite (I_n) définie par $I_n = \int_{u_0}^{u_n} \frac{dx}{x\ln\left(\frac{x}{4}\right)}$.

a) Montrer que $I_n = -n\ln 2$.

b) Calculer $S = I_1 + I_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + I_n$.

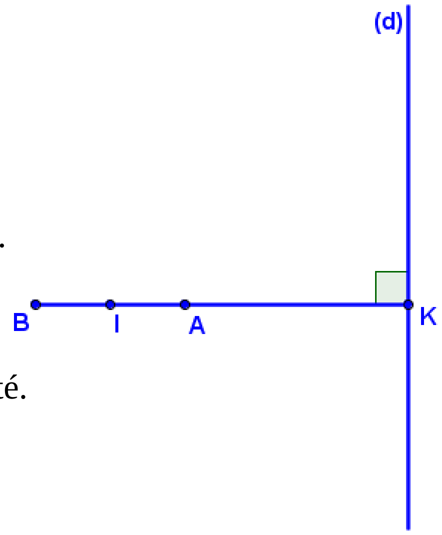
c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S$.

V – (6 points)

Dans la figure ci-contre :

- [AB] est un segment de longueur 2 cm.
- I est le milieu de [AB].
- La droite (d) est perpendiculaire à (AB) en K tel que IK=4 cm.

Soit (E) l'ellipse de centre I , de foyer A et de directrice (d).



Partie A

1) Préciser le second foyer de (E) et déterminer son excentricité.

2) Construire (E) en détaillant les étapes de construction.

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(I;\vec{i},\vec{j})$ tel que $\vec{i} = \overrightarrow{IA}$.

1) Montrer qu'une équation de (E) est $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

2) Soit $M(x_0, y_0)$ un point de (E) tels que $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 0$ .M′ est le symétrique de M par rapport à l'axe focal de (E). La normale (n) à (E) en M coupe la droite (OM′) en P.

a) Démontrer que les coordonnées du point P sont $x_P = \frac{x_0}{7}$ et $y_P = \frac{-y_0}{7}$.

b) Déduire que lorsque M varie sur (E), alors le point P décrit une ellipse (E′) dont on déterminera l'équation .

3) a) Démontrer que l'ensemble des points N(x,y) tel que $NI^2 = NA \times NB$ est une courbe

(H) d'équation $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$.

b) Déterminer la nature , les asymptotes et les directrices de (H) .

c) Démontrer que (H) admet les mêmes foyers que (E). Tracer (H).

4) a) Montrer que $Q(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$ est un point commun de (H) et (E) .

b) Démontrer que les tangentes (T) et (T′) en Q à (E) et (H) respectivement sont perpendiculaires.

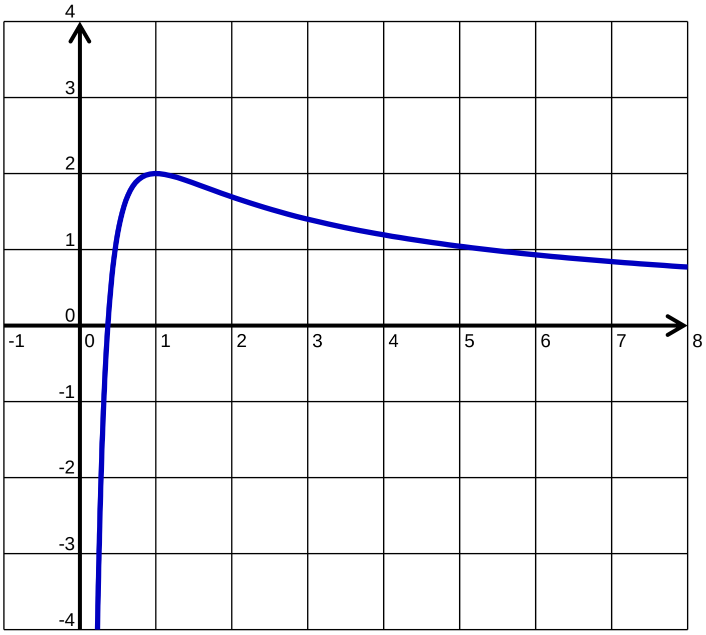
5) Soit (D) le domaine limité par (H) , la tangente (T′) et la droite $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Calculer le volume du solide engendré par la rotation de (D) autour de l'axe des abscisses.

VI – (10 points)

Partie A

La courbe (C′) ci-contre est celle de la fonction dérivée f ′ de f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = a\ln^2 x + b\ln x$. La courbe (C′) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse e^{-1}.



1) Montrer que a = 1 et b = 2 .
2) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3) Dresser le tableau des variations de f .
4) Déduire le signe de $f(x)$.

Partie B

On donne la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x\ln^2 x$.

Soit (C) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

1) a - Calculer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.
   b - Vérifier que $g'(x) = f(x)$.
   c- Tracer le tableau de variations de g.
2) Montrer que la droite (d) : $y = x$ coupe (C) en deux points A et B que l'on déterminera.
3) Etudier la position relative de (d) et (C).
4) Montrer que g a un point d'inflexion I que l'on déterminera.
5) Tracer (C) et (d).
6) Trouver l'équation de la tangente (T) à (C) perpendiculaire à (d).

7) a) Montrer que g admet sur $[1 ; +\infty[$ une fonction réciproque g^{-1} de domaine de définition à déterminer .
   b) Tracer (C^{-1}) la courbe de g^{-1} dans le même repère que (C).
   c) Soit la droite $(\Delta): y = e^2$. (Δ) coupe (C^{-1}) au point N. Déterminer les coordonnées de N.

Partie C

Pour tout entier n de **N**, on considère l'intégrale : $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n \, dx$.

1) Calculer à l'aide d'une intégration par parties I_1 .
2) a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2I_{n+1} = e^2 - (n + 1)I_n$.
   b) Déduire la valeur exacte de I_2 .
   c) Calculer l'aire du domaine (D) limité par (C) , (C^{-1}) , x′x et y′y.