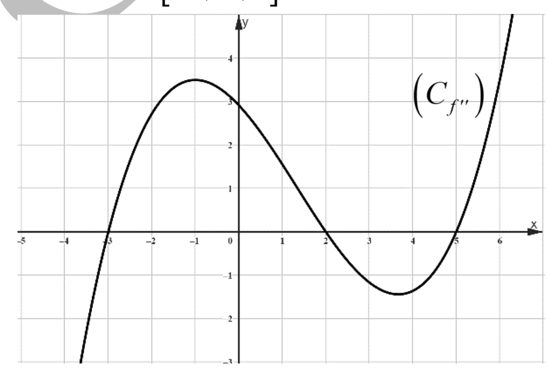
Groupes ExaMath	Examen en mathématiques Classe : SV	Préparé par : Georges H. Maamari Edité par : Hassan Ahmad
Nombre de questions : 3	Exemplaire 01 – année 2023 Durée : 1½ heures	Nom : N° :

- *Cet examen comprend trois problèmes inscrits sur trois pages.*
- *L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.*

I- (5 points)
Dans le tableau ci-dessous, une seule parmi les réponses proposées est correcte.
Choisir la bonne réponse en justifiant votre choix.

N°	Question	Réponses proposées A	B	C
1)	L'ensemble solution de l'équation : $\ln(x+2)+\ln(x-2)=\ln 3+\ln 4$ est :	$S=\{\sqrt{11};-\sqrt{11}\}$	$S=\{4;-4\}$	$S=\{4\}$
2)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=$	2	0	$+\infty$
3)	Soit la fonction g définie sur $I=\left[1\ ;\ e^2\right]$ par $g(x)=(\ln x)^2-2\ln x$. L'image de l'intervalle I par g est $g(I)=$	$[-1\ ;\ 0]$	$[0\ ;\ 1]$	$[-1\ ;\ 1]$
4)	Une entreprise fabrique des puces électroniques. Chaque pièce peut présenter deux défauts A et B. On sait que $2,8\%$ des pièces ont le défaut A, $2,2\%$ ont le défaut B et $95,4\%$ n'ont aucun défaut. La probabilité qu'une pièce ait les deux défauts est :	$0,005$	$0,004$	$0,046$
5)	On donne ci-dessous la courbe $\left(C_{f''}\right)$ représentant la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3,5\ ;6]$. 	f est convexe sur $[-3\ ;\ 3]$	La courbe représentative de f admet trois points d'inflexion	La fonction f' dérivée de f est décroissante sur $[0\ ;\ 2]$

II- (6 points)

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.
La leucose féline est une maladie touchant les chats ; elle est provoquée par un virus.
Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie.
On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire.
Ce test possède les caractéristiques suivantes :

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les événements suivants :
M : « Le chat est porteur de la maladie » ;
T : « Le test du chat est positif » ;
$\overline{M}$ et $\overline{T}$ désignent les événements contraires des événements M et T respectivement.

1) **a)** Traduire la situation par un arbre pondéré.
b) Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.
c) Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à 0,45.
d) On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.

2) On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard dont 15 femelles (évènement F). On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.
On rappelle que M : « Le chat est porteur de la maladie » et que $p(M)=0,4$.

a) Compléter le tableau ci-dessous :

	F	$\overline{F}$	**Total**
M	6		8
$\overline{M}$			
Total	15		20

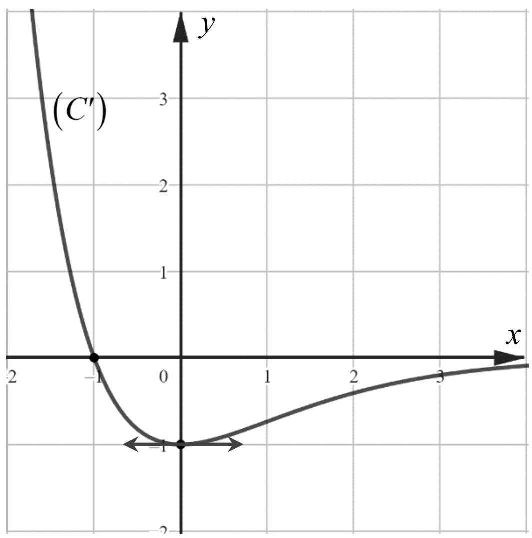
b) Calculer la probabilité que le chat choisi soit une femelle qui porte la maladie.

3) Parmi les 15 femelles, on choisit simultanément et au hasard 3 chats.
a) Quelle est la probabilité qu'au moins l'un de ces trois soit porteur de la maladie ?
b) Quelle est la probabilité que deux exactement des trois chats choisis soient atteints de la maladie ?

III- (9 points)

Partie A

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on donne la courbe (C') représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.



1) À l'aide de la courbe (C'), déterminer, en justifiant les réponses :
a) Le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
b) La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2) On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+a)e^{-x}$ où a est un réel.
a) Exprimer $f'(x)$, la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$ en fonction de a .
b) Déterminer graphiquement $f'(0)$ puis déduire la valeur de a .

Partie B

Dans cette partie on prend $a=2$ ainsi $f(x)=(x+2)e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

1) **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire une asymptote à (C).

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) **a)** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)=(-x-1)e^{-x}$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c) Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-1{,}6\,;-1{,}5]$.

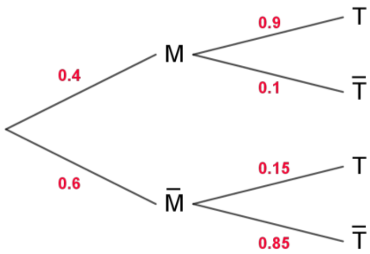
3) **a)** Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f.

Que représente pour la courbe (C) son point A d'abscisse 0 ?

b) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point A.

4) Tracer (C) et (T) dans le même repère.

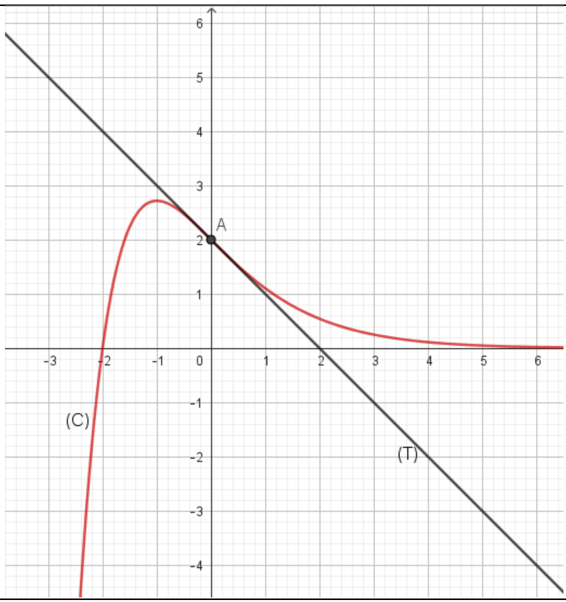
QI	Réponses	5 pts
1)	Condition d'existence : $\begin{cases} x+2>0 \\ x-2>0 \end{cases}$, $\begin{cases} x>-2 \\ x>2 \end{cases}$, $x \in]2\ ;\ +\infty[$. L'équation est équivalente à $\ln(x^2-4)=\ln 12$; $x^2=16$ donc $x=4\in]2\ ;\ +\infty[$ (acceptable) ou $x=-2 \notin]2\ ;\ +\infty[$ (à rejeter). La bonne réponse est **c**.	1
2)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x[\ln 1-\ln x]=-\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}}(x\ln x)=0$. La bonne réponse est **b**.	1
3)	Tableau de variations de g sur $I=\left[1\ ;\ e^2\right]$: $\begin{array}{c\|ccccc} x & 1 & & e & & e^2 \\ \hline g'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline g(x) & 0 & \searrow & -1 & \nearrow & 0 \end{array}$ Donc $g(I)=g([1\ ;\ e])\cup g\left(\left[e\ ;\ e^2\right]\right)=[-1\ ;\ 0]\cup[-1\ ;\ 0]=[-1\ ;\ 0]$. La bonne réponse est **a**.	1
4)	$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{2,8}{100}+\frac{2,2}{100}-\left(\frac{100}{100}-\frac{95,4}{100}\right)=\frac{0,4}{100}=0,004$. La bonne réponse est **b**.	1
5)	Dans $[-3,5\ ;6]$, $f''(x)$ s'annule trois fois en changeant de signe chaque fois, donc la courbe représentative de f admet trois points d'inflexion. La bonne réponse est **b**.	1

QII	Réponses	5 pts
1) a)		1
1) b)	$P(M\cap T)=P(M)\times P(T/M)=0,4\times 0,9=0,36$.	½
1) c)	$P(T)=P(M\cap T)+P(\bar{M}\cap T)=0,36+0,6\times 0,15=0,45$.	½
1) d)	$P(M/T)=\frac{P(M\cap T)}{P(T)}=0,8$.	½
2) a)	see table below	1
2) b)	$P(F\cap M)=\frac{6}{20}=0,3$.	½

	F	$\bar{F}$	Total
M	6	2	8
$\bar{M}$	9	3	12
Total	15	5	20

3) a)	$P($ au moins l'un des trois chats soit porteur de la maladie$)=1-P($ aucun chat est porteur de la maladie$)=1-\dfrac{C_9^3}{C_{15}^3}=0,815$.	½
3) b)	$p=\dfrac{C_6^2\times C_9^1}{C_{15}^3}=0,297$.	½

QIII	Réponses	10 pts
A.1.a	• La fonction f' est positive sur $]-\infty; 1]$, donc la fonction f est croissante sur cet intervalle; • La fonction f' est négative sur $[-1\ ; +\infty[$, donc la fonction f est décroissante sur cet intervalle.	¾
A.1.b	• La fonction f' est décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ 0\right[$, donc $f''(x)<0$ sur cet intervalle, donc la fonction f est concave sur $\left]-\infty\ ;\ 0\right[$; • La fonction f' est croissante sur $\left]0\ ;\ +\infty\right[$, donc $f''(x)>0$ sur cet intervalle, donc la fonction f est convexe sur $\left]0\ ;\ +\infty\right[$.	¾
A.2.a.	$f'(x)=e^{-x}-(x+a)e^{-x}=(1-x-a)e^{-x}$.	½
A.2.b.	$f'(0)=-1\ ;1-a=-1\ ;a=2$.	½
B.1.a.	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{e^x}=0$, donc la droite $(x'x): y=0$ est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.	¾
B.1.b.	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)e^{-x}=-\infty\times(+\infty)=-\infty$.	¼
B.2.a.	D'après la partie **A** $f'(x)=(1-x-a)e^{-x}=(1-x-2)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$.	½
B.2.b.	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & -1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & & & e & & \\ & -\infty & \nearrow & & \searrow & 0 \end{array}$	**1**
B.2.c.	Sur l'intervalle $[-1,6\ ; -1,5]$, la fonction f est continue et strictement croissante. $f(-1,6)<2$ et $f(-1,5)>2$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=2$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[-1,6\ ; -1,5]$.	¾
B.3.a.	$f''(x)=(-1)\times e^{-x}+(-x-1)\times(-1)\ e^{-x}=(-1+x+1)\ e^{-x}=x\,e^{-x}$; $e^{-x}>0$ pour tout x, donc $f''(x)$ est du signe de x. • Sur $\left]-\infty\ ;\ 0\right[$ $f''(x)<0$ donc la fonction f est concave. • Sur $]0\ ; +\infty[$, $f''(x)>0$ donc la fonction f est convexe. • En $x=0$, la dérivée seconde s'annule et change de signe donc le point A d'abscisse 0 de (C) est le point d'inflexion de cette courbe.	1½
B.3.b.	$y_A=f(0)=2$ $(T):\ y=f'(x_A)(x-x_A)+y_A=-1(x-0)+2$ donc $(T): y=-x+2$.	¾

B.4.		**2**