Raisonnement par récurrence

<u>N°1</u>

Soit $f(x) = sin(x)$

Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout naturel n la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f, notée $f^{(n)}(x)$ est donnée par :

$$f^{(n)}(x) = sin\left(\frac{n,\pi}{2} + x\right)$$

<u>N°2</u>

Soit $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots \dots + n^2$

Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

<u>N°3</u>

Soit $x_n = 7^{3n} - 1$

Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, x_n est un multiple de 19.

<u>N°4</u>

Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$\left(\frac{5}{4}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{4}$$

<u>N°5</u>

Soit $y_n = n^7 - n$

Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, y_n est un multiple de 7.

<u>N°6</u>

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$

Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout naturel n la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f, notée $f^{(n)}(x)$ est donnée par :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

N°7

Soit $R_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots \ldots + n^3$

Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout naturel non nul n :

$R_n = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

N°8

Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$(1\ 1)^n \geq 1 + \frac{n}{10}$$

N°9

Soit $z_n = n^5 - n$

Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, z_n est un multiple de 5.

N°10

Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$\sqrt{1+n} \leq 1 + \frac{n}{2}$$

Exercices sur les suites

Exercice 1 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} = f(u_n) \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.
2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 2 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 4 \quad u_n \geq 2^n$.

Exercice 3 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$

1. Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Démontrer que pour tout naturel n, $u_n > n^2$.
3. Déduisez-en le comportement de la suite en $+\infty$.

Exercice 4 :

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$

1. Prouver que pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$,
2. Déduisez-en le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 5 :

On note u_n le nombre de foyers, exprimé en millions, possédant un téléviseur à écran plat l'année n.

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$

et , pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{10} u_{n,}(20 - u_n)$.

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par :
$$f(x) = \frac{x}{10}, (20 - x)$$
   a) Étudiez les variations de la fonction f sur $[0; 20]$.
   b) Déduisez-en que pour tout x de $[0; 10]$, $f(x) \in [0; 10]$.
2. Prouver par récurrence que, pour tout naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.
3. Prouvez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminez sa limite ℓ,

Exercice 6 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout naturel non nul n, par : $u_n = \frac{n!}{n^n}$

1. Justifiez que pour tout naturel non nul n, $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$.
2. Quel est le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Exercice 7 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout naturel n $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$.

Exercice 8 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par

$u_n = n + 1 - \cos(n)$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $n \leq u_n \leq n + 2$,
2. Quel est le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 9 :

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3},$$

1. a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
   b. Montrer par récurrence que, pour tout naturel $n \geq 1$, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$,
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

Exercice 10 :

Soit $(e_n)_{n\geq1}$la suite définie pour tout naturel $n \geq 1$ par :

$$e_n = \frac{11n^2}{4\sin(2n) - 7}$$

1. Montrer que pour tout naturel $n \geq 1$, $e_n \leq -n^2$.
2. En déduire la limite de la suite $(e_n)_{n\geq1}$.

Exercice 11 :

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = -\frac{2}{u_n}$,

Pour chaque proposition, indiquez si elle est vraie ou fausse et proposez une démonstration pour la réponse indiquée.

Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple :

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par -1.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 12 :

On se propose d'étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\geq1}$définie pour tout naturel non nul n par :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

1. Quel est le plus petit des n termes de la somme définissant u_n ? le plus grand ?
2. Déduisez-en un encadrement de u_n.
3. Puis déterminer le comportement de la suite $(u_n)_{n\geq1}$ à l'infini.

Exercice 13 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout naturel n par :

$u_0 = 0 \quad et \quad u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$

1. a) Démontrer que pour tout naturel n
$$0 \leq u_n < 4$$
b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
c) Déduisez-en que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. a) Démontrez que pour tout naturel n
$$4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$$
b) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout naturel n par :
$$v_n = 4 - u_n$$
Démontrer que pour tout naturel n
$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$$
c) Déduisez-en la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite puis la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 14 :

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2 \quad 3n^2 \geq (n+1)^2$

Exercice 15 :

On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes vérifient, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $\quad n, w_n = (n+1)w_{n-1} + 1$ et $w_0 = 1$.

Ce tableau donne les dix premiers termes de cette suite :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

1. Détaillez le calcul permettant d'obtenir w_{10}.
2. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte.
Donnez la nature de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Puis calculez w_{2021},

Exercice 16 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$

1. Calculez u_1 u_2 et u_3.
2. a) Démontrez que pour tout naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.
   b) Déduisez-en que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.
   c) Déduisez-en la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$
   a) Démontrez que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et précisez sa limite.
   b) Déduisez-en que pour tout naturel n,
   $$u_n = \frac{25}{4}, \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$
   c) Soit la somme S_n définie pour tout naturel n par :
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
   Déterminez l'expression de S_n en fonction de n.
   En déduire la limite de la suite$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.