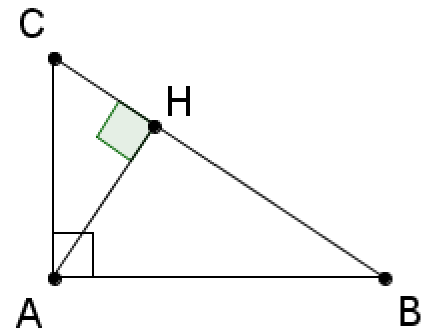
Transformations

Fiche 2

Exercice 1 :

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en A direct et H est le projeté orthogonal de A sur (BC).



1) Soit h l'homothétie de centre H qui transforme C en B.
   Déterminer et tracer l'image de (AC) par h.

   En déduire l'image D de A par h.

2) Soit S la similitude qui transforme A en B et C en A.
   a) Déterminer l'angle de S.
   b) Déterminer l'image par S de chacune des deux droites (AH) et (CH).
   c) En déduire que H est le centre de S.

3) a) Déterminer l'image par S de chacune des deux droites (AB) et (CB).
   b) Montrer que $S(B) = D$ et en déduire que $S \circ S(A) = h(A)$.

   c) Montrer que $S \circ S = h$.

4) Soit E le milieu de [AC].
   a. Déterminer les points $F = S(E)$ et $G = S(F)$.
   b. Montrer que les points E, H et G sont alignés et que le triangle EFG est rectangle.

5) Dans cette partie, $AB = 6$ et $AC = 4$, et le plan est rapporté au repère orthonormé $(A; \vec{u}, \vec{v})$ tel que : $\vec{u} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

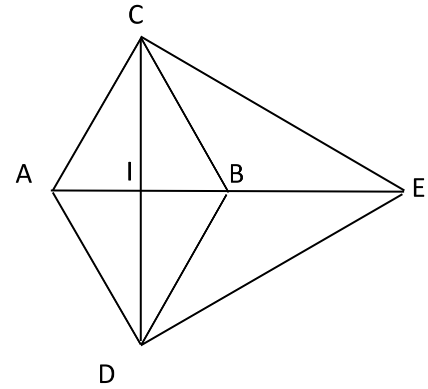
   a. Déterminer la forme complexe de S. En déduire le rapport de S et celui de h.
   b. Déduire les coordonnées de H et celles de D.

Exercice 2 : Dans la figure ci-contre,

ABC , ADB et CDE sont trois triangles équilatéraux

directs tels que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$.

On désigne par I le milieu de [AB].



1) Montrer que AE = 2AB.

Soit S **la similitude directe de centre** W, **de rapport** k **et d'angle** θ **qui transforme** A **en** B **et** E **en** D.

2) Déterminer k et vérifier que $\theta = \frac{-2\pi}{3} \quad (2\pi)$.

3) On désigne par (T) le cercle circonscrit au triangle ACE.

Démontrer que le transformé de (T) par S est le cercle (T ') de

diamètre [BD] et déduire que l'image du point C par S est le point J milieu de [DE].

4) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(A;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AI}$.

a- Déterminer les affixes des points B, C, D et E.
b- Donner la forme complexe de S et préciser l'affixe de son centre W.

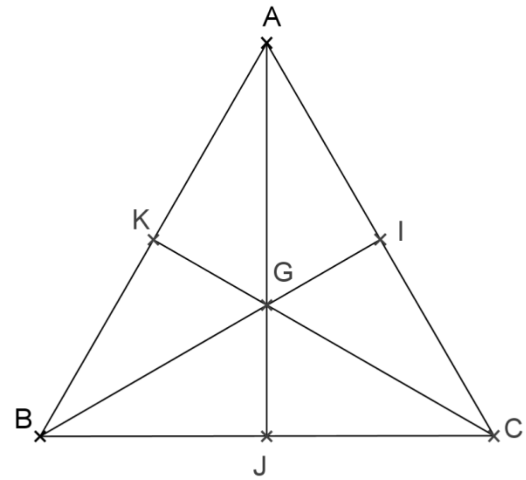
5) Soit S' la similitude directe de centre W, de rapport 2 et d'angle $\frac{-\pi}{3}$.

a- Déterminer la nature et les éléments de la transformation S'oS .

c- Calculer l'affixe du point A' transformé de A par S'oS .

Exercice 3 :

ABC ci-contre est équilatéral direct de côté 2. G est son centre de gravité.



a) Prouver qu'il existe une rotation r telle que $r(C)=K$ et $r(J)=A$, la déterminer ainsi que ses propriétés caractéristiques.

b) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{CB})$. Quelle similitude plane directe S vérifie $S(G)=C$ et $S(A)=B$?

c) Afin de vérifier le résultat du 2), on considère le plan complexe $(J;\vec{u},\vec{v})$ où $\vec{u}=\overrightarrow{JC}$ et $\vec{v}=\frac{\overrightarrow{JA}}{\sqrt{3}}$; trouver dans ce repère l'application f complexe associée à S et vérifier les résultats.

d) Soit :

t : la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$,

r_1 : la rotation de centre B et d'angle $\pi/3$.

r_2 : la rotation de centre G et d'angle $2\pi/3$.

h : l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

Déterminer la nature de chacune des transformations ci-dessous sans déterminer ses caractéristiques.

a) $f=t\circ r_1$.

b) $g=r_2\circ r_1$

c) $p=r_2\circ t\circ r_1$

d) $s=r_2\circ h$

e) Montrer qu'il existe une homothétie h' vérifiant $r_1\circ h'\circ r_1=s$ et déterminer ses caractéristiques.