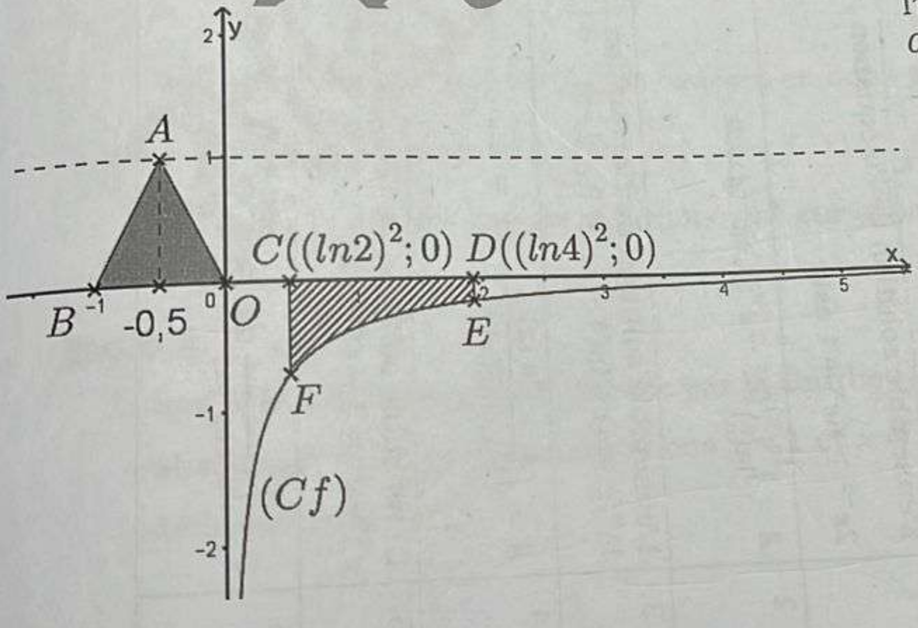
Exercice 3 : (5 pts)

Toutes les propositions suivantes **sont vraies**.
Justifier-les en rédigeant soigneusement votre raisonnement et en vous aidant d'un dessin lorsqu'il s'agit d'un ensemble de points.

1. Si $z = \frac{-\sqrt{3}-i}{2e^{i\frac{5\pi}{12}}}$ alors pour tout naturel n, z^{4n} est un réel.
2. Dans un repère orthonormé, le triangle ABC formé par les points $A(3+i)$, $B(5-2i)$ et $C(8)$ est rectangle isocèle.
3. L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z+1-3i| = 2$ est un cercle.
4. L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $\left|\frac{z}{1-z}\right| = 1$ est une droite parallèle à l'axe des imaginaires purs.
5. L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $\begin{cases} |z| \leq 2 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{4}(\pi) \end{cases}$ est un segment privé d'un point.
6. L'équation $z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)z + 1 = 0$ admet deux racines complexes chacune de module 1.
7. f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x},e^{\sqrt{x}}}$.
   Si $x_F = x_C$ et $x_E = x_D$, alors l'aire du domaine hachuré est égale à l'aire du triangle OAB,



... de la question et la lettre de la réponse qui lui convient. ... les étapes de résolution). ... bonne réponse, indiquer-la et en donner une ... réponse non justifiée ne sera pas notée.

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	L'ensemble solution de l'inéquation : $2e^{-x} \geq 6e^{x} + 1$ est :	$]-\infty; -\ln(2)]$	$\left]-\ln(2) ; -\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right[$	$[-\ln(2) ; +\infty[$
2	$A = \int_{\ln\left(\frac{1}{\pi}\right)}^{\ln(\pi)} (e^{x} - e^{-x}), \sin^2(\pi x) dx =$	$2\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right)$	0	$\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{\pi}\right)$
3	L'ensemble solution de l'inéquation : $\ln^2(x-4) + \ln(4-x)^2 - 8 \geq 0$ est :	$]4; 4+e^{-4}] \cup [4+e^{2}; +\infty[$	$[4+e^{-4} ; +\infty[$	$]0; 4+e^{-4}] \cup [4+e^{2}; +\infty[$
4	$B = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x,(\ln^2(x)+1)^3} dx =$	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{6^{-4}}{4e}$
5	L'ensemble solution de l'équation : $e^{x} - e^{3} = 1 - e^{3-x}$ est :	$S = \{3 ; e^{3}\}$	$S = \{0 ; e^{2}\}$	$S = \{0 ; 3\}$
6	$C = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)} dx =$	$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)$	$\frac{\pi^2}{8} + \ln(2)$	$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$

Exercice 4 : (2,5 pts)

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points $M(z)$ et représenter-le dans un repère orthonormé.

a) $\arg(-i\bar{z} + 2 - i) = \frac{\pi}{4}\,(2\pi)$.

b) $|z - 3 + 2i| > 3$ et $\arg(-z + 3 - 2i) = \frac{\pi}{3}\,(\pi)$.

c) $z = 4 - i - i\sqrt{2}(1 - i)e^{i\theta}$ avec $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{3\pi}{4}$.

Exercice 5 : (2 pts)

Sur un site web on lit l'article suivant :

« Le téléphone portable ***Samsung Galaxy Note 8*** de l'entreprise Samsung est produit par deux sous-traitants $S1$ et $S2$.
Chez le sous-traitant $S1$, qui assure une partie de la production totale, 4% des téléphones sont défectueux.
Chez le sous-traitant $S2$, qui assure le reste de la production totale, 3% des téléphones sont défectueux.
3,4% des téléphones ***Samsung Galaxy Note 8*** sont défectueux. »

L'enseignante de SG propose le défi suivant à ses élèves :

« Un client achète un téléphone ***Samsung Galaxy Note 8*** choisi au hasard dans les stocks de l'entreprise Samsung et constate qu'il est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du sous-traitant $S1$? »

Andrew un élève de SG relève le défi et répond : c'est environ 47%.

A-t-il raison ? Expliquer sa démarche et commentez.

Exercice 6 : (1 pt)

À tout point M d'affixe z, on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3 avec z différent de 0, 1 et -1.

Montrer que le triangle MNP est rectangle en P si, et seulement si, M appartient au cercle de centre le point d'affixe $-\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

2. Si $arg(z) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ alors :

a) $|z| = Im(z)$ b) $\arg(i.\bar{z}) = 0\ (2\pi)$ c) $|z - i| = 1 + |z|$

3. On donne les points $A(-2+3i)$, $B(4-i)$ et $C(8+5i)$. Alors le triangle ABC est :

a) équilatéral. b) rectangle isocèle en B. c) semi-équilatéral.

4. Si $|z - 2 + i| = |8 - 6i|$ et soit $A(2 - i)$ et $B(8 - 6i)$ alors l'ensemble des points M d'affixe z est :

a) la médiatrice de $[AB]$.

b) le cercle d'équation $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 100$,

c) le cercle d'équation $z = 2 - i + 10e^{i\theta}$ avec $\theta \in IR$,

5. Si $|z + 1 - 2i| \leq 2$ et $|z + 1 - 4i| = |z - 1 - 2i|$ alors l'ensemble des points M d'affixe z est :

a) une demi-droite. b) une droite. c) un segment.

Exercice 3 : (3 pts)

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par f' sa fonction dérivée.

Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

(1) pour tout nombre réel x, $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$.

(2) $f'(0) = 1$.

(3) la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) \neq 0$.

   b. Calculer $f(0)$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que $f''(x) = f(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f.

3. On désigne par $u = f' + f$ et $v = f' - f$.

   a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

   b. Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$,

   c. En déduire les fonctions u et v.

   d. En déduire que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

a. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5. Soit m un nombre réel.

   a. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$,

   b. En déduire que $(e^2)^\alpha - 2m, e^\alpha - 1 = 0$.

Exercice 4 : (7 pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Partie A :

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe (C_f).

   c. Étudier la position relative de (D) et de (C_f).

   d. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$.

   e. En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction .

   Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x+1)}$.

   b. En déduire les variations de la fonction .

Partie B :

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle d_n , l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C_f), la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$,

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

Examen de Mathématiques : (Décembre 2017)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision dans le raisonnement entreront pour une bonne part dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : (3 pts) Questions indépendantes

1) Résoudre :

a) $e^{2\ln(x-3)} = \ln\left(e^{x+17}\right)$.

b) $e^{x} - 6e^{-x} \geq -1$.

c) $\ln(2x+1) + \ln(x+4) \leq 2\ln 2$

d) $3\ln^{2}(x-1) - 2\ln(x-1)^{2} + 1 = 0$

2) Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$I = \int_{e}^{e^{2}} \frac{\ln x - 1}{x\ln x}\,dx \qquad J = \int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{\cos(\pi \ln x)}{x}\,dx$$

$$K = \int_{-\ln 4}^{-\ln 3} \frac{e^{2x}+2}{e^{2x}+1}\,dx$$

Exercice 2 : (3,5 pts) Questions à Choix Multiples

Pour chacune des questions suivantes, il y a **une seule** bonne réponse. Indiquer-la, **en justifiant.**

Toute réponse non justifiée ne sera pas notée.

Soit z un nombre complexe :

1. Si $z = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i\sqrt{3}}$ alors $\arg(z) =$

a) $\dfrac{13\pi}{12}\ (2\pi)$ b) $\dfrac{11\pi}{12}\ (2\pi)$ c) $\dfrac{5\pi}{12}\ (2\pi)$

Exercice 4 : (5 pts) Logarithme népérien et suite.

1.a) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ on a : $\ln(1+x) \leq x$,

b) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ on a : $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x)$.

c) En déduire que, pour tout réel $x \geq 0$ on a : $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$

2. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier $n \geq 1$:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right).\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right).\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

On pose, pour tout entier $n \geq 1$: $v_n = ln\,(u_n)$.

En utilisant les questions 1.c) et 2), montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

4. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5 : (2 pts) Prise d'initiative

On note j le nombre complexe de module 1 et dont $\frac{2\pi}{3}$ est un argument.

1) a. Donner une forme exponentielle de j.

b. Vérifier que $j^2 = \overline{j}$

c. En déduire que $1 + j + j^2 = 0$.

d. Calculer j^3.

2) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation

Soit trois points A B et C deux à deux distincts, d'affixes respectives a b et c.

Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si $a +$ $bj + cj^2 = 0$.