Contrôle 13 Octobre 2016 (20 pts)

I. Déterminer le domaine de définition de chacune de ces fonctions :

$f(x) = \frac{\sqrt{-5-E(3x-10)}}{E^2(x)-1}$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{\sqrt{E(\sin(x))-0,5}}$

(3 pts)

II. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :

Pour tout entier naturel n, $T_n = 3^{6n+2} - 2$ est divisible par 7.

(3 pts)

III. Soit a un réel et f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 3x^4$ et $g(x) = 4x^3 - a$
On note C_f et C_g les courbes représentatives respectives de f et g.

1. Démontrer que l'équation $3x^4 - 4x^3 + 1 = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer, selon les valeurs du réel a, le nombre de points d'intersection des courbes C_f et C_g.

(5 pts)

IV. Soit $F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{\sin(\pi t)\, dt}{\left(1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)^2}$.

5. Déterminer les valeurs de $F(-1)$ et de $F(1)$.
6. Calculer $F(0)$,
7. Montrer que F admet un seul extrémum sur [-1 ;1].
8. Montrer que l'équation $F(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur [-1 ;1].

(4 pts)

V. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n(x) = x, cos(x), \sin^n(x)$ et la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par $I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$.

1.
   a. Étudier le sens de variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,
   b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$.
   c. En déduire que la suite (I_n) converge.
2. a. Montrer que, sur [0 ;1], $0 \leq f_n(x) \leq \cos(x)\, , sin^n(x)$.
   b. En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{sin^{n+1}(1)}{n+1}$.
   c. En déduire la limite de la suite (I_n).
3. Calculer I_1. (On donnera sa valeur exacte). **(5 pts)**

Bonus : **(+1pt) Problème ouvert**

Trouver le réel b tel que l'aire comprise entre les paraboles d'équations respectives $y = b - \frac{1}{2}x^2$ et $y = \frac{1}{2}x^2$ dans un repère orthonormé soit égale à $\frac{32}{3}$ unités d'aire de ce repère.

Contrôle 3 Novembre 2016 (20 pts)

I) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\sqrt{(8-x)(2x-4)} + 2 - \sqrt{x^2} = 0$.

(2 pts)

II) Sans avoir recours à la règle de l'hôpital, calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin(2x) - \sqrt{3}}{\pi - 6x}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{81x^2 - 42x + 7} + 9x$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{-51x-2} - 7}{2 - \sqrt{3x^2+1}}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\sin(x).\cos(x) + \left(\dfrac{1}{\cos^2(x)} - 1\right)}$

(7 pts)

III) **Partie A :**

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{5x-4}{2x-1}$,

e) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
f) Calculer la limite de f aux bornes de son domaine et déterminer les éventuelles asymptotes à la courbe représentative de f.
g) Étudier les variations de la fonction f.
h) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}\ \vec{\jmath})$.

Partie B : Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ donnée par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{5}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{2u_n - 1} \quad pour\ n \geq 1 \end{cases}$$

a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul , $u_n \geq 2$.
b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

c) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.
d) Calculer sa limite.
e) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,
$u_n = 2 + \frac{1}{3^n - 1}$. ***(8 pts)***

IV) Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ donnée par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) u_n \quad pour\ \ n \geq 2 \end{cases}$$

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
2. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est Vraie ou Fausse.
   Justifier quand c'est vrai et donner un contre-exemple quand c'est faux.

   a. Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{n}{(n-1)!}$
   b. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$.
   c. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est minorée par 0.
   d. La suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 2$.
   e. Soit la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ donnée par $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
   La suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

(7 pts)

<u>Bonus :</u>(+1 pt) Problème ouvert

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$u_0 = 0$, $u_1 = 0\ 72$, $u_2 = 0\ 7272$, $u_n = 0\ 7272 \ldots 72$ (où le nombre 72 est écrit n fois consécutivement après la virgule).

Exprimer u_n en fonction de n pour $n \geq 1$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui déterminer sa limite.

<u>Examen de Mathématiques Décembre 2016 :</u> (20 pts)

<u>Exercice 1 :</u> (4 pts) Complexes et ensemble de points
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}\ \vec{v})$.

L'unité graphique est 1 cm.

On considère les points A B et C d'affixes respectives

$z_A = 2 - 3i \quad z_B = i \quad et \quad z_C = 6 - i.$

On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

<u>Partie A :</u>

1. Donner la forme algébrique de $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.
2. En déduire la nature du triangle ABC.

<u>Partie B :</u> On considère la fonction f qui, à tout point M d'affixe z distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{i(z-2+3i)}{z-i}$,

1. Soit D le point d'affixe $z_D = 1 - i$.
   Déterminer l'affixe du point D' image de D par f.
2. a. Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par f est le point d'affixe $2i$. On déterminera l'affixe de E.
   b. Démontrer que le point E appartient à la droite (AB),
3. Démontrer que, pour tout point M distinct du point B, $OM' = \frac{AM}{BM}$.
4. Démontrer que pour tout point M distinct du point B, on a :
   $\left(\vec{u}\ \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{BM}\ \overrightarrow{AM}\right) + \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.
5. Démontrer que, si le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$, alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
6. Démontrer que, si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

<u>Exercice 2 :</u> (5 pts) Exponentielle et réciproque

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{1+4e^{-\frac{x^2}{2}}}$

On notera (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath}\ \vec{\jmath})$.

1. Étudier la parité de f.
2. Calculer la limite de f au voisinage de $+\infty$.
3. a. Montrer que $f(x) - x = \dfrac{-4x{,}e^{-\frac{x^2}{2}}}{1+4{,}e^{-\frac{x^2}{2}}}$

   b. En déduire la position relative de (C_f) et de la droite (d) d'équation $y = x$.
4. a. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $0 < \dfrac{x}{2}, e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \dfrac{x^2}{2}, e^{-\frac{x^2}{2}}$

   b. En déduire la limite à $+\infty$ de $\dfrac{x}{2}, e^{-\frac{x^2}{2}}$.

   c. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$. (On pensera à utiliser le résultat de la question 4.b.)

5. Étudier le sens de variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$ en déduire le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
6. Écrire l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
7. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admet une fonction réciproque f^{-1}. (On ne demandera pas son expression)
8. Tracer (C_f), (d), (T) et $(C_{f^{-1}})$ dans un même repère orthonormé. (on repassera (C_f) en gris et $(C_{f^{-1}})$ en bleu.
9. Calculer $= \int_0^3 \dfrac{x}{1+4e^{-\frac{x^2}{2}}}\,dx$. (Vérifier que $I \approx 2\ 93$)
10. Donner une interprétation géométrique de I.
11. En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimité par (C_f), $(C_{f^{-1}})$ et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 3$.
12. Calculer $\mathcal{A}$ autrement, sans avoir à utiliser la valeur de I.

<u>Exercice 3 :</u> (4 pts) Intégrale fonction de sa borne supérieure et intégration par partie.

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.

On donne son tableau de variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+e^{-2}$	$\searrow$	1

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_0^x f(t)dt$.

<u>Partie A :</u>

1. En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variations de la fonction f, tracer une courbe (C) susceptible de représenter f dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm sur l'axe des abscisses et de 2 cm sur l'axe des ordonnées.
2. Interpréter graphiquement le nombre $g(2)$.
3. Montrer que $0 \leq g(2) \leq 2\,5$.
4. Soit x un réel supérieur ou égal à 2.
   a. Encadrer $f(t)$ pour $t \in [2;+\infty[$.
   b. En déduire que $\int_2^x f(t)dt \geq x-2$.
   c. En déduire que $g(x) \geq x-2$.
   d. En déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.
5. Etudier le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. (On ne demandera pas son tableau de variations).

<u>Partie B :</u> On admet que $f(t) = (t-1)e^{-t} + 1$

1. Exprimer, en fonction de x, l'intégrale : $\int_0^x (t-1)\, e^{-t} dt$
2. En déduire, que pour tout réel x, $g(x) = x(1-e^{-x})$.
3. En déduire la limite de la fonction g à $-\infty$.

<u>Exercice 4 :</u> (5 pts) Logarithme népérien et suite.

1.a) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ on a : $\ln(1+x) \leq x$,

b) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ on a : $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x)$.

c) En déduire que, pour tout réel $x \geq 0$ on a : $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$

2. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier $n \geq 1$:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right),\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right),\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

On pose, pour tout entier $n \geq 1$: $v_n = ln\,(u_n)$.
En utilisant les questions 1.c) et 2), montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

4. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Exercice 5 :</u> (2 pts) Prise d'initiative

On note j le nombre complexe de module 1 et dont $\frac{2\pi}{3}$ est un argument.

1) a. Donner une forme exponentielle de j.
   b. Vérifier que $j^2 = \overline{j}$
   c. En déduire que $1 + j + j^2 = 0$.
   d. Calculer j^3.

2) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Soit trois points A B et C deux à deux distincts, d'affixes respectives a b et c.

Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.

Contrôle 2 Février 2017 (20 pts)

Exercice 1 : (3.5 pts)

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.
Lors d'une épidémie chez des bovins, un test de dépistage est mis au point.
Les essais sur un échantillon d'animaux dont 1% est porteur de la maladie ont permis d'établir les probabilités suivantes sur la population entière :

- si un animal est porteur de la maladie, la probabilité que le test soit positif est 0,85.
- Si un animal est sain, la probabilité que le test soit négatif est 0,95.

On note les événements :
M : « L'animal est porteur de la maladie ».
T : « Le test est positif ».

1. Un animal est choisi au hasard.
   a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
   b) Montrer que la probabilité pour que ce soit un test positif est 0,058.
   c) Le test d'un animal est positif, quelle est la probabilité pour qu'il soit effectivement porteur de la maladie ?

2. On choisit dix animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer ces choix comme indépendants.
   Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'animaux ayant un test positif parmi les dix animaux choisis.
   a) Quelle est la loi de probabilité de X ?
   b) Quelle est la probabilité d'avoir exactement 3 bovins à test positif ?
   c) Quelle est la probabilité d'avoir au moins 4 bovins à test positif ?

Exercice 2 : **(3.5 pts)**
Dans un lycée, toutes les semaines, on fait appel à un technicien pour l'entretien de la photocopieuse.
On a pu constater que :

- le technicien vient la première semaine.
- s'il intervient la semaine n, alors la probabilité qu'il intervienne la semaine $n+1$ est 0,85.
- s'il n'intervient pas la semaine n, la probabilite qu'il intervienne la semaine $n+1$ est 0,1.

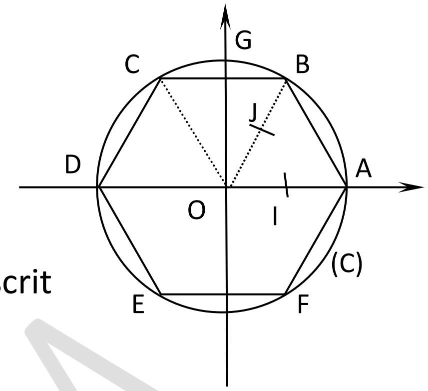
On note :

- A_n l'événement « Le technicien intervient la semaine n ».
- p_n la probabilité de A_n.

a) Quelle est la valeur de p_1 ?
b) Exprimer $P(A_{n+1} \cap A_n)$ puis $P(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$ en fonction de p_n.
c) En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.
d) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :
$u_n = p_n - \frac{2}{5}$.
Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et préciser sa raison.
En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.

e) Calculer la limite de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'interpréter.
f) Au bout de combien de semaines la probabilité que le technicien intervienne deviendra-t-elle strictement inférieure à $\frac{1}{2}$?

Exercice 3: **(8 pts)**



Dans un plan orienté on donne un hexagone régulier direct

ABCDEF de centre O, tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}$ (2π).

On appelle qu'un hexagone régulier est un polygone à 6 côtés inscrit

dans un cercle dont tous les côtés sont égaux et tous

les angles au centre sont égaux.

(C) est le cercle circonscrit à cet hexagone.

I et J sont les milieux respectifs de [OA] et [OB].

Soit S la similitude qui transforme A en B et B en J.

1) a) Déterminer le rapport et un angle de S.
   b) Démontrer que S(D) = A. Trouver S(O) et vérifier que S(C) = I.
   c) Déterminer l'image de l'hexagone ABCDEF par S.

2) Le cercle (C') est l'image de (C) par S.

   a) Déterminer le cercle (C').
   b) Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h qui transforme (C) en (C').
   c) Déterminer le centre et le rapport d'une autre homothétie h' qui transforme (C) en (C').

3) G est le milieu de l'arc BC sur le cercle (C).
   Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG})$.

   a) Trouver l'affixe de chacun des points B, C, E et F.
   b) Écrire la forme complexe de S et déduire l'affixe de son centre W.
   c) H est le point de rencontre de [AJ] et [BI].
      Déterminer le point H' image de H par S.

Test de Mathématiques 10 Février (5 pts)

Une urne A contient 5 boules rouges, 2 boules bleues et 3 boules vertes.
Une urne B contient 6 boules rouges, 3 boules bleues et une boule verte.

A. Un jeu consiste à lancer un dé tétraédrique équilibré (dé équilibré à 4 faces numérotées de 1 à 4).
   Si le joueur obtient un diviseur de 6, il tire 3 boules simultanément de l'urne B, sinon il tire 3 boules simultanément de l'urne A.

   On considère les événements suivants :
   E « Obtenir des boules de la même couleur ».
   F « Obtenir au moins deux boules de couleurs différentes ».
   G « Obtenir au moins deux boules bleues ».

   1. Calculer $P(E)$.
   2. Calculer $P(F/G)$.
   3. Calculer $P(\bar{G}/F)$.
   4. On répète n fois l'expérience « Lancer le dé et tirer 3 boules » et à chaque fois les deux urnes reprennent leurs configurations initiales avant de procéder au prochain tirage.
      a. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois « les 3 boules de la même couleur » ?
      b. Pour quelles valeurs de n a-t-on cette probabilité strictement supérieure à 0,99 ?

B. Dans cette partie on tire 3 boules simultanément de l'urne B.
   Un joueur pratique le jeu suivant : Il tire 3 boules simultanément de l'urne B ;
   - Si la boule verte figure parmi les 3 boules tirées, il gagne d $.
   - S'il obtient 3 boules de la même couleur il perd 10 $.
   - Sinon il gagne 3 $ pour chaque boule bleue tirée et perd 2 $ pour chaque boule rouge tirée.

   Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.
   1. Déterminer la loi de probabilité de X.
   2. Pour quelles valeurs de d ce jeu favorise-t-il le joueur ?

<u>Contrôle de Mathématiques</u> (10 Octobre 2017)

<u>Exercice 1</u> : (6 pts)

Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^3, (tan^2(x) + 1)dx \qquad J = \int_0^{\pi} sin(2x)\sqrt{1 + cos^2(x)}\ dx$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(x)dx \qquad L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{cos(2x)dx}{\left[\left(cos(x) + sin(x)\right)^2\right]^{17}}$$

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x, cos^2(x)dx$$

<u>Exercice 2</u> : (3 pts)

Soit $F(x) = \int_2^x (t^4 - 3t^2 - 4)dt$

3. Déterminer les extrémums de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer les abscisses des points d'inflexions de F sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 3</u> : (4 pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \cos^4(x) - \cos^2(x)$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer $f''(x)$ et l'exprimer en fonction de $\cos(x)$.
3. En déduire que $f''(x) + 16f(x) = -2$.
4. En déduire la valeur exacte de $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

Exercice 4 : (6 pts)

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ donnée par : $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

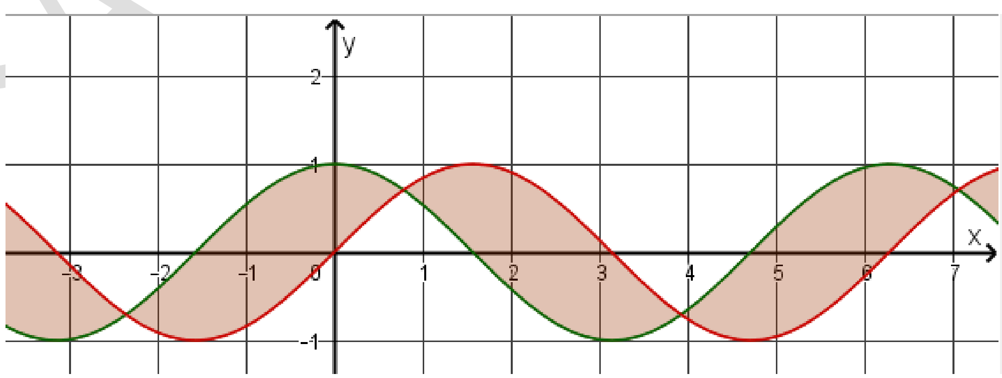
1) a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
   b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
   c. Montrer que pour tout $n \geq 1$ $\frac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$.
   d. En déduire un encadrement de u_n.
   e. Calculer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
2) Pour tout entier naturel $n \geq 3$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^{n-2}, \sqrt{1+x^2}dx$$

   a. Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 3$ on a :
   $u_n + u_{n-2} = I_n$
   b. À l'aide d'une intégration par parties portant sur I_n, et en ayant recours à la question précédente, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$ on a : $n, u_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$.
   c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a :
   $(2n-1), u_n \leq \sqrt{2}$
   d. Soit $v_n = n, u_n$
   En utilisant les questions 1.d) et 2.c), encadrer la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ et calculer sa limite.

Exercice 5 : (1 pt)

Les courbes des fonctions sinus et cosinus sont représentées dans le repère orthonormé ci-dessous.



Sur une période, quelle est l'aire du domaine coloré ?

<u>Contrôle de Mathématiques</u> (7 Novembre 2017)

<u>Exercice 1</u> : (4 pts)

Sans avoir recours à la règle de l'Hôpital, calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{4\cos^2(x)-1}{3x-\pi}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x.\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} 4x+\sqrt{16x^2+7x-1}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{E}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)\right)}{E(\sin(x))}$

<u>Exercice 2</u> : (4 pts)

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :

1) pour tout entier naturel n, $4^n + 6n - 1$ est un multiple de 9.
2) pour tout entier naturel $n \geq 1$ $\quad 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots, +(2n-1) = n^2$

<u>Exercice 3</u> : (5 pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3-5x}{x^2-4}$

g. Écrire f sous la forme $f(x) = ax + \dfrac{bx}{x^2-4}$.
h. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
i. Déterminer l'équation de la droite (Δ) asymptote oblique à la courbe représentative de (C_f) à $+\infty$ et à $-\infty$.
j. Étudier les variations de f.
k. Montrer que (C_f) rencontre (Δ) en un point dont on déterminera les coordonnées.
l. Représenter graphiquement (C_f) et (Δ) dans un repère orthogonal **sur le papier quadrillé donné.**
On prendra 2 cm pour unité graphique en abscisse et 1 cm pour unité graphique en ordonnée.

Exercice 4 : (3 pts)

Soit $f(x) = sin(x), cos(x)$ et $g(x) = -\frac{\pi, x}{4}$

On note (C_f) et (C_g) leurs courbes représentatives respectives.

Montrer que (C_f) et (C_g) ont un unique point d'intersection sur $\left[\frac{-\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Exercice 5 : (4 pts)

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4} {u_n}^2 + 2 \end{cases}$$

1. Soit $(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$.
   Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. a) Montrer que, pour tout réel x, $f(x) \geq x + 1$.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 1$.
   c) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 \geq n$.
   b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Examen de Mathématiques : (Décembre 2017)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision dans le raisonnement entreront pour une bonne part dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : (3 pts) Questions indépendantes

1) Résoudre :

   a) $e^{2\ln(x-3)} = \ln\left(e^{x+17}\right)$.

   b) $e^{x} - 6e^{-x} \geq -1$.

   c) $\ln(2x+1) + \ln(x+4) \leq 2ln2$

   d) $3\ln^2(x-1) - 2\ln(x-1)^2 + 1 = 0$

2) Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$I = \int_{e}^{e^2} \frac{\ln x - 1}{x \ln x} dx \qquad J = \int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{\cos(\pi \ln x)}{x} dx$$

$$K = \int_{-\ln 4}^{-\ln 3} \frac{e^{2x}+2}{e^{2x}+1} dx$$

Exercice 2 : (3,5 pts) Questions à Choix Multiples

Pour chacune des questions suivantes, il y a **une seule** bonne réponse.
Indiquer-la, **en justifiant.**
Toute réponse non justifiée ne sera pas notée.
Soit z un nombre complexe :

1. Si $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i\sqrt{3}}$ alors $\arg(z) =$

a) $\frac{13\pi}{12}\ (2\pi)$ b) $\frac{11\pi}{12}\ (2\pi)$ c) $\frac{5\pi}{12}\ (2\pi)$

2. Si $arg(z) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ alors :

a) $|z| = Im(z)$ b) $\arg(i.\bar{z}) = 0\ (2\pi)$ c) $|z - i| = 1 + |z|$

3. On donne les points $A(-2+3i)$, $B(4-i)$ et $C(8+5i)$. Alors le triangle ABC est :

a) équilatéral. b) rectangle isocèle en B. c) semi-équilatéral.

4. Si $|z - 2 + i| = |8 - 6i|$ et soit $A(2-i)$ et $B(8-6i)$ alors l'ensemble des points M d'affixe z est :

a) la médiatrice de $[AB]$.
b) le cercle d'équation $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 100$,
c) le cercle d'équation $z = 2 - i + 10e^{i\theta}$ avec $\theta \in IR$,

5. Si $|z + 1 - 2i| \leq 2$ et $|z + 1 - 4i| = |z - 1 - 2i|$ alors l'ensemble des points M d'affixe z est :

a) une demi-droite. b) une droite. c) un segment.

<u>Exercice 3 :</u> (3 pts)

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par f' sa fonction dérivée.

Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

(1) pour tout nombre réel x, $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$.
(2) $f'(0) = 1$.
(3) la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) \neq 0$.
   b. Calculer $f(0)$.
2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que $f''(x) = f(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f.
3. On désigne par $u = f' + f$ et $v = f' - f$.
   a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.
   b. Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$,
   c. En déduire les fonctions u et v.
   d. En déduire que pour tout réel x, $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
4. a. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5. Soit m un nombre réel.
   a. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$,
   b. En déduire que $(e^2)^\alpha - 2m, e^\alpha - 1 = 0$.

<u>Exercice 4 :</u> (7 pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

<u>Partie A :</u>

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe (C_f).
   c. Étudier la position relative de (D) et de (C_f).
   d. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$.
   e. En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction .
   Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$.
   b. En déduire les variations de la fonction .

<u>Partie B :</u>

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle d_n , l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C_f), la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$,

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$d_n = \int_0^n ln(1 + e^{-x})dx$$

2. a. Montrer que pour tout réel x, $ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$.

   b. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \leq 1$.

   c. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, d_n est croissante.

   d. En déduire que la suite (d_n) est-elle convergente pour $n \geq 1$.

<u>Partie C :</u> Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe (C_f).

On note (T) la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T).
2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   Soient M et N deux points de la courbe (C_f) d'abscisses non nulles et opposées.

   Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

<u>Exercice 5 :</u> (3,5 pts)

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels (fractions) qui converge vers e^2.

On définit pour tout naturel $n \geq 1$, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n, e^x dx$$

1. Calculer I_1.
2. a. Pour $x \in [0;2]$ encadrer $(2-x)^n$.

   b. En déduire que pour $x \in [0;2]$: $0 \leq \frac{1}{n!}(2-x)^n, e^x \leq \frac{2^n}{n!}, e^x$

   c. Établir alors que pour tout naturel $n \geq 1$, $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2-1)$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout naturel $n \geq 1$, $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)\,!}$
4. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n.$

5. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{2^n}{n\,!}$
   a. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
   b. Prouver alors que pour tout naturel $n \geq 3$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.
   c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$,
   $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} , u_3$
   d. En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.
6. En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$.
7. Justifier alors que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \; 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} = e^2$

<u>Bonus :</u> (+ 2 pts)

Soit $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = e^x$.

On note (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

Existe-t-il des droites tangentes communes aux courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle ?

Contrôle de Mathématiques (25 Janvier 2018)

Exercice 1 : (8 pts)

Les jeunes d'aujourd'hui sont ceux qu'on appelle les enfants de la net-génération. Ils maîtrisent quasiment tout sur internet et sont toujours "online" sur les réseaux sociaux qui se multiplient d'année en année.
Ils préfèrent passer leur temps sur les réseaux sociaux plutôt qu'à étudier.
Pour la plupart les réseaux sociaux occupent tout leur temps.

Les enfants et adolescents très souvent connectés sur Facebook sont moins bons à l'école.
64 % des jeunes se connectent quotidiennement pour de longues heures aux réseaux sociaux dont 95 % ont de mauvais résultats à l'école.

L'utilisation de Facebook entrave surtout la concentration.
Des heures perdues, à « scroller » à l'infini, à passer de profil en profil, de photo en photo. Pourtant, demain, ils feront exactement la même chose. Et le surlendemain aussi. En oubliant à chaque fois cette impression qu'on a perdu son temps pour rien.
Conséquence moins de temps pour les études et baisse du niveau à l'école.
27% des jeunes ne se connectent pas quotidiennement pour de longues heures aux réseaux sociaux et ont de bons résultats à l'école.

On choisit un jeune au hasard.

On considère les événements suivants :

C : « Le jeune est quotidiennement connecté pour de longues heures aux réseaux sociaux ».

B : « Le jeune a de bons résultats à l'école ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.

2. Le jeune choisi ne se connecte pas quotidiennement pour de longues heures aux réseaux sociaux. Quelle est la probabilité qu'il ait de bons résultats à l'école ?

3. Quel est la probabilité que le jeune choisi ait de mauvais résultats à l'école ?

4. Justifier par le calcul la phrase suivante :

   « Si le jeune choisi a de mauvais résultats à l'école, dans environ 87 % des cas il se connecte quotidiennement pour de longues heures aux réseaux sociaux ».

5. Dans la classe de SG à la Sagesse Brasilia, on choisit 10 élèves.
   On suppose que les choix sont indépendants.
   Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 3 d'entre eux qui se connectent pour de longues heures aux réseaux sociaux et qui ont de mauvais résultats à l'école ?

<u>Exercice 2 :</u> : (4 pts)

$\boldsymbol{f}$ est la fonction définie sur IR à valeurs dans $]0\,;+\infty[$ et donnée par

$f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{e^{x}+2}{e^{-x}}$.

d. Étudier les variations de la fonction f.
e. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.
f. On admet que (C_f) et(C_{f-1}) n'ont aucun point d'intersection.
   Tracer (C_f) et (C_{f-1}) dans un même repère othonormé.
g. Écrire l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.
h. En déduire l'équation de la tangente à (C_{f-1}) au point d'abscisse 3.
i. Déterminer l'expression de f^{-1}.

<u>Exercice 3 :</u> (8 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}\ \vec{v})$.

L'unité graphique est de 2 cm.

On considère les points A B et C d'affixes respectives $z_A = i$ $z_B = 2i$ et $z_C =$ 1.

On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

On considère la transformation f qui, à tout point M du plan d'affixe z, distinct de A, associe le point M' du plan d'affixe $z' = \frac{2iz}{z-i}$.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
2. Déterminer, sous forme algébrique, les affixes des points B' et C', images respectives des points B et C par f.
3. a. Montrer que, pour tout point M distinct de A, l'affixe z' de M' vérifie l'égalité $z' - 2i = \frac{-2}{z-i}$.

   b. En déduire que si le point M appartient au cercle (C) de centre A et de rayon 1, alors son image M' appartient à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

   c. Exprimer une mesure de l'angle $\left(\vec{u}\ \overrightarrow{BM'}\right)$ en fonction d'une mesure de l'angle $(\vec{u}\ \overrightarrow{AM})$.

   d. En déduire que si le point M appartient à la demi-droite d'origine A (et privée de A) et faisant un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec $\vec{u}$, alors son image M' appartient à une demi-droite dont on déterminera l'origine et l'angle qu'elle fait avec $\vec{u}$.

   e. On considère le point D d'affixe $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.
   Vérifier que D appartient au cercle (C),
   Sans avoir à calculer l'affixe de D', construire à la règle et au compas le point D et son image D' par f.
   On laissera apparents les traits de la construction.

Contrôle de Mathématiques (15 Février 2018)

Exercice 1 : (4,5 pts)

Une nouvelle version du jeu UNO comporte 22 cartes réparties ainsi :

- 6 cartes bleues numérotées et 2 cartes actions bleues.
- 5 cartes rouges numérotées et 1 carte action rouge.
- 4 cartes jaunes numérotées.
- 3 cartes vertes numérotée et 1 carte action verte.

1. Un joueur tire simultanément 4 cartes.

   1. On note :
      A l'événement « Obtenir 4 cartes de la même couleur ».
      B l'événement « Obtenir 4 cartes de couleurs différentes ».
      C l'événement « Obtenir au moins 2 cartes actions. »

      a) Calculer P(A) et P(B).
      On donnera tous les résultats sous forme de fractions irréductibles.

      b) Montrer que P(C)= $\frac{991}{7315}$

      c) Calculer la probabilité d'obtenir « 4 cartes de la même couleur sachant qu'on a obtenu au plus 2 cartes numérotées ».

   2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de cartes actions tirées par le joueur.

      a. Déterminer la loi de probabilité de X.

      b. Calculer E(X).

Exercice 2 : (5,5 pts)

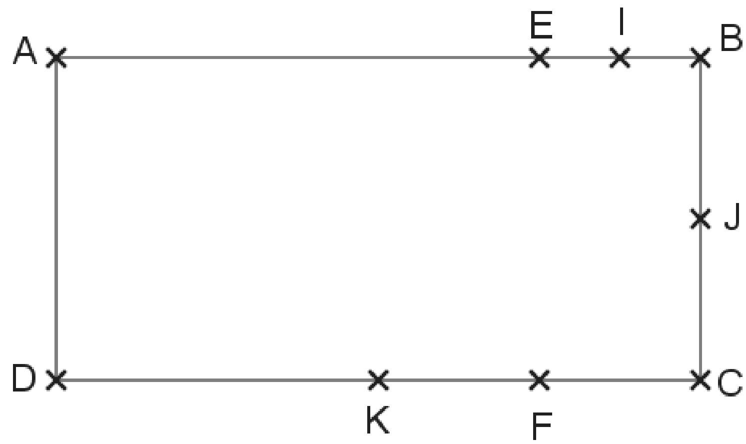
Soit $(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{\sin\ (\ \sin(x)\ )}$.

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2) Étudier sa périodicité et sa parité.
3) Montrer que $f'(x) = \dfrac{\boldsymbol{-\cos(x)\ ,\ \cos(\ \sin(x)\ )}}{\boldsymbol{\sin^2(\ \sin(x)\ )}}$.
4) Étudier les variations de la fonction f.
5) Tracer (C_f) la courbe représentative de f sur $[-3\pi\ ;3\pi]$ dans un repère orthogonal.
6) Soit $g(x) = \dfrac{1}{\sin(\ \cos(x)\ )}$, comment peut-on déduire (C_g) la courbe représentative de g à partir de celle de f ?

Exercice 3 : **(10 pts)**

Dans la figure ci-contre :

- $DCBA$ est un rectangle direct.
- $DC = 4$ et $DA = 2$.
- E est un point de $[AB]$ tel que $EB = 1$ et F est un point de $[DC]$ tel que $CF = 1$.
- I, J et K sont les milieux respectifs de $[EB]$ $[BC]$ et $[DC]$.



Soit S la similitude plane directe qui transforme F en A et E en B.

1) a) Déterminer le rapport et un angle de S.
   b) Montrer que $S(C) = D$.
   c) En déduire $S(B)$.
   d) Déterminer alors $S(I)$.
2) Soit W le centre de la similitude S et soit h la transformation définie par $h = S \circ S$.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h.
   b) Trouver $h(E)$ et $h(B)$.
   c) Construire alors le point W.
   d) Montrer que les points W I et K sont alignés.
   e) Exprimer $\overrightarrow{WK}$ en fonction de $\overrightarrow{WI}$.
3) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(D\ ;\ \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}\quad \frac{1}{2}\overrightarrow{DA})$
   a) Trouver la forme complexe de S.
   b) Déterminer l'affixe de W.
4) On définit la suite de points B_n par :
   $B_0 = B$ et $B_{n+1} = S(B_n)$ pour tout naturel n.

   Soit ℓ_n la longueur définie par $\ell_n = B_nB_{n+1}$.
   a) Déterminer le point B_1 et calculer ℓ_0.
   b) Démontrer que $\ell_{n+1} = 2\ell_n$.
   c) Exprimer ℓ_n en fonction de n et calculer sa limite.
   d) Exprimer $(\overrightarrow{WB}\ \overrightarrow{WB_n})$ en fonction de n.
      Pour quelles valeurs de n les points W B et B_n sont-ils alignés ?

<u>Contrôle de Mathématiques</u> (15 Mars 2018)

<u>Exercice 1 :</u> (4 pts)

Résoudre les équations suivantes :

1) $2\,arctan(x) = \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) - arccos\left(\frac{4}{5}\right)$

2) $arcsin(x) = arcsin\left(\frac{33}{65}\right) - arccos\left(\frac{12}{13}\right)$

3) $arctan(x) = \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) - \arccos\left(\frac{1}{2018}\right)$

<u>Exercice 2</u> : (3 pts)

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

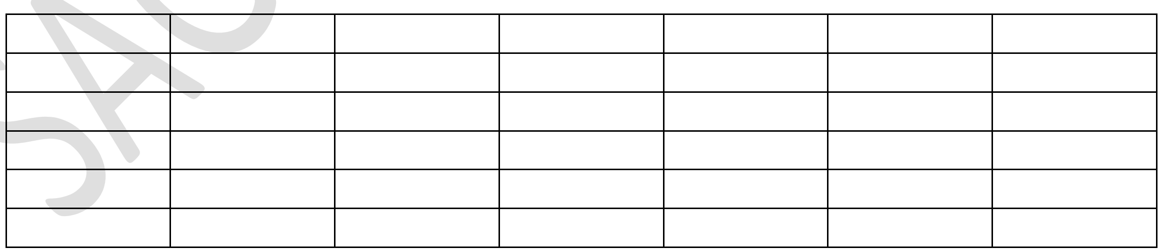
$$f(x) = \frac{1}{x(9+\ln^2 x)} \qquad g(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right),\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{25-\cos^2(x)}} \qquad h(x) = \frac{e^x}{e^{2x}-e^x+\frac{5}{4}}$$

<u>Exercice 3 :</u> (3 pts) Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.

1. Soit $A = sin\left(15arcsin\left(cos\left(\frac{9\pi}{7}\right)\right) + 16arccos\left(cos\left(\frac{9\pi}{7}\right)\right)\right)$.

   alors $A = -cos\left(\frac{9\pi}{7}\right)$

2. Dans la figure-ci-dessous, il y a en tout 587 rectangles.



3. $C_{2018}^{2017} - C_{2019}^{2017} = C_{2018}^{2016}$.

<u>Exercice 4 :</u> (6 pts)

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath}\,\vec{\jmath})$, on donne les points :
$F(3;0)$, $F'(-3;0)$ et $L\left(3;\frac{16}{5}\right)$.
On désigne par (E) l'ellipse de foyers F et F' et passant par L.

1) a) Calculer $LF + LF'$.
   b) Déterminer les coordonnées des sommets de (E).
   c) Déduire que $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ est une équation de (E) et tracer (E).
2) Soit (d) la droite d'équation $= \dfrac{25}{3}$.
   a) Que représente la droite (d) pour l'ellipse (E) ?
   b) Ecrire une équation de la tangente (T) à (E) au point L.
   c) Démontrer que les droites (d) et (T) se coupent en un point I sur l'axe des abscisses.
3) Calculer l'aire du domaine délimité par l'ellipse (E), la tangente (T), l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

<u>Exercice 5 :</u> (4 pts)

Une urne contient **10 boules** : **5** boules **blanches**, **2** boules **rouges** et **3** boules **vertes**.

1) On tire simultanément et au hasard **3 boules** de cette urne.
   Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A **: « Tirer trois boules de la même couleur ».**
   B **: « Tirer au moins une boule rouge ».**

2) On tire au hasard et successivement **2 boules** de cette urne de la façon suivante :
   On tire une première boule, si elle est blanche on la remet dans l'urne et on en tire une seconde boule.
   Si elle n'est pas blanche, on la garde à l'extérieur de l'urne et on tire une seconde boule.
   On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.
   a. Montrer que $(X = 1) = \dfrac{19}{36}$.
   b. Déterminer la loi de probabilité de X.

Contrôle de Mathématiques (11 Octobre 2018)

Exercice 1 : (2,5 pts)

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x, \tan^n(x)\, dx$

1. Déterminer le sens de variation de cette suite.
2. Montrer qu'elle converge.

Exercice 2 : (1,5 pt)

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = \int_n^{n+1} (x+1)\sqrt{x}\, dx$

Calculer $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{80}$.

Exercice 3 : (2 pts)

1. Montrer que l'équation $\tan(x) = -\frac{\pi}{8}\cos(2x)$ admet une unique solution $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.
2. Vérifier que $-\frac{\pi}{8} < \alpha < -\frac{\pi}{16}$.

Exercice 4 : (4 pts)

Pour tout naturel n non nul, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\, dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^n}\, dx$$

a. Démontrer, que pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{2n+1}$$

b. En déduire la limite de la suite (J_n).

c. Calculer pour tout naturel n, $I_n - J_n$.

d. En déduire la limite de la suite (I_n).

<u>Exercice 5</u> : (4 pts) Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 (-3x^3 - 12x), \sqrt{x^4 + 8x^2 + 2}\, dx \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan(x) + \sin^2(2x)}{\cos^2(x)} dx$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5(x) dx$$

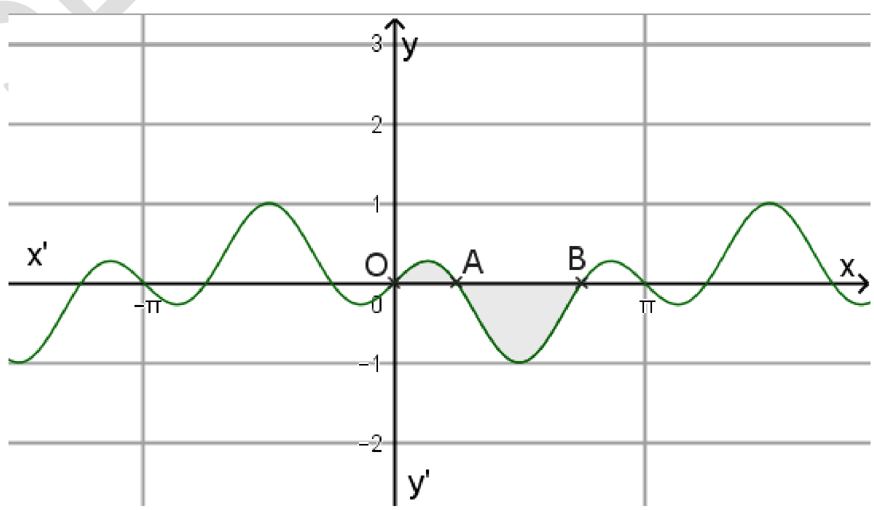
<u>Exercice 6</u> : (4 pts)

Soit $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(x)\, dx$ et $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4(x)\, dx$

5. Montrer que $A - B = \frac{1}{2}$.
6. Soit $f(x) = \sin^4(x)$,
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Calculer $f''(x)$ et l'exprimer en fonction de $\sin(x)$.
   c) En déduire que $f''(x) + 16f(x) = 12\sin^2(x)$.
   d) Calculer alors la valeur exacte de B.
7. En déduire la valeur exacte de A.

<u>Exercice 7</u> : (2 pts)

Dans le repère orthogonal ci-contre, d'unité graphique 4 cm en abscisse et 1,5 cm en ordonnée, on a représenté la fonction f définie sur IR par :
$f(x) = \sin(x), \cos(2x)$.



5. Déterminer une primitive de $f(x) = \sin(x), \cos(2x)$.
6. Résoudre, dans IR, l'équation $\sin(x), \cos(2x) = 0$.
7. En déduire les abscisses des points A et B.
8. Calculer alors, en unités d'aire puis en cm^2, l'aire du domaine grisé.

<u>Bonus</u> : (+ 2 pts)

Soit $f(t) = \sin(2t)\,, \cos\,(3t)$ et $F(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt$

1. Étudier le sens de variation de F sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Sachant que :
   - Une valeur approchée de l'aire du domaine délimité par (C_f), $x'Ox$ et les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{6}$ est 0 5.
   - Une valeur approchée de l'aire du domaine délimité par (C_f), $x'Ox$ et les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{6}$ et $x = 0$ est 0 1.

   Dresser le tableau complet de variations de F sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

   En déduire le signe de F sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Contrôle de Mathématiques (6 Novembre 2018)

Exercice 1 : (3 pts)

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{E^2(x) - 25} \qquad g(x) = \frac{1}{E\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)} \qquad h(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\sqrt{4 - E(\pi, \cos(\pi x))}}$$

Exercice 2 : (2 pts)

Soit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

1) Quel est le plus petit terme de cette somme ?
2) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 3 : (5 pts)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{8} \\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n) \end{cases}$

1. Calculer u_1.
2. Etudier les variations de la fonction f donnée par $f(x) = x(2-x)$ sur IR.
3. Montrer par récurrence que $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = 1 - u_n$.
   a. Montrer que $v_{n+1} = {v_n}^2$.
   b. Montrer, par récurrence, que $v_n = {v_0}^{2^n}$.
   c. En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.
   d. Déterminer la limite de v_n puis celle de u_n.

Exercice 4 : (2 pts) Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x, sin^2(x)dx \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x, \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}dx$$

Exercice 5 : (3 pts) Vrai ou Faux ?

Pour chacune des questions suivantes, répondre par Vrai ou Faux en justifiant à chaque fois votre réponse.

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes sont strictement positifs.

Et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $v_n = -\frac{1}{1+u_n}$ pour tout n.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est également.

Exercice 6 : (5 pts)

Soit la fonction f donnée par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 7x - 13}{x - 3}$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer les limites de f aux bornes ouvertes de son domaine de définition.
3. En déduire les éventuelles asymptotes à (Cf) la courbe représentative de f.
4. Étudier les variations de f.
5. Tracer, soigneusement, (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
6. Soit $g(x) = \frac{-x^2+7|x|-13}{|x|-3}$
   Comment peut-on déduire la courbe représentative de g à partir de celle de f ?

Bonus (+1 pt)

Soit la suite $(u_n)_n$ définie, pour tout naturel non nul n, par $u_n = \frac{3^n}{n!}$.

En utilisant le théorème des gendarmes, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

Examen de Mathématiques : (20 pts) (Durée 4 heures)

Exercice 1 : (2,5 pts)

g est la fonction définie sur IR par $g(x) = x, e^x - 1$.

1. a) Étudier les variations de la fonction g.
   b) En déduire qu'il existe un unique réel α tel que $\alpha, e^\alpha = 1$.
   c) Vérifier que $0\,56 < \alpha < 0\,57$.
2. Soit f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^x - \ln(x)$.
   a) Vérifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
   c) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé sur le papier millimétré donné.

Exercice 2 : (1,5 pt)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout naturel n par :

$$u_n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \ldots \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Et soit $v_n = \ln(u_n)$ pour tout naturel n.

1) Donner la forme la plus simple de v_n en fonction de n,
2) En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

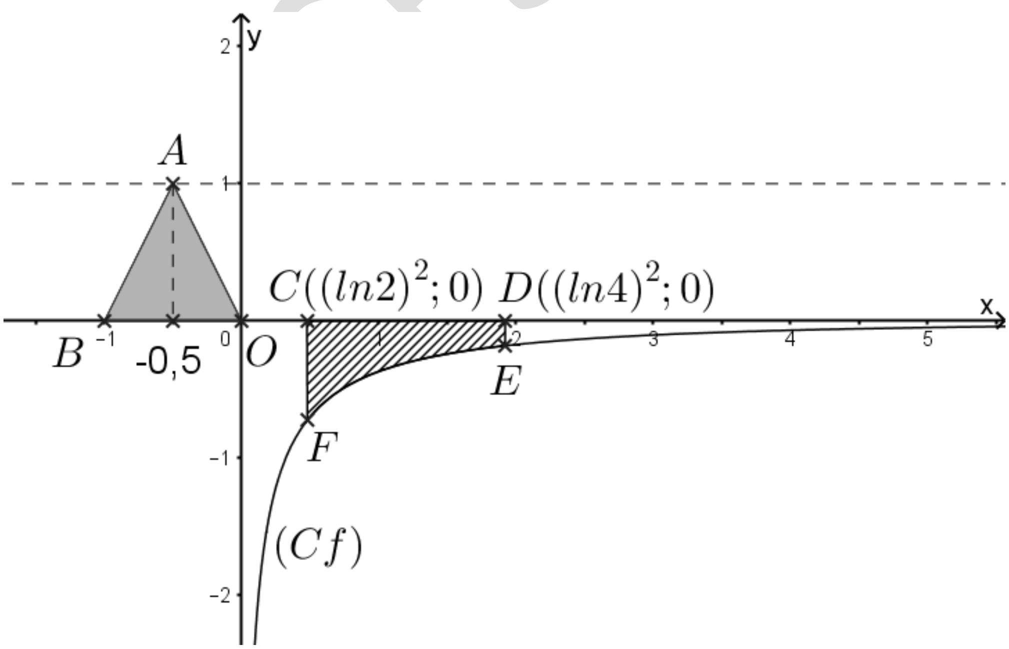
<u>Exercice 3 :</u> (5 pts)

Toutes les propositions suivantes **sont vraies**.

Justifier-les en rédigeant soigneusement votre raisonnement et en vous aidant d'un dessin lorsqu'il s'agit d'un ensemble de points.

1. Si $z = \dfrac{-\sqrt{3}-i}{2e^{i\frac{5\pi}{12}}}$ alors pour tout naturel n, z^{4n} est un réel.
2. Dans un repère orthonormé, le triangle ABC formé par les points $A(3+i)$, $B(5-2i)$ et $C(8)$ est rectangle isocèle.
3. L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z+1-3i| = 2$ est un cercle.
4. L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $\left|\dfrac{z}{1-z}\right| = 1$ est une droite parallèle à l'axe des imaginaires purs.
5. L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $\begin{cases} |z| \leq 2 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{4}(\pi) \end{cases}$ est un segment privé d'un point.
6. L'équation $z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)z + 1 = 0$ admet deux racines complexes chacune de module 1.
7. f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x},e^{\sqrt{x}}}$.

   Si $x_F = x_C$ et $x_E = x_D$, alors l'aire du domaine hachuré est égale à l'aire du triangle OAB,



<u>Exercice 4 </u>: (5 pts)

Pour chacune des questions suivantes, il y a **une seule bonne réponse**, indiquer-la et en donner une démonstration. **(On détaillera toutes les étapes de résolution).**

On écrira le numéro de la question et la lettre de la réponse qui lui convient.

Une réponse non justifiée ne sera pas notée.

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	L'ensemble solution de l'inéquation : $2e^{-x} \geq 6e^{x} + 1$ est :	$]-\infty; -\ln(2)]$	$\left]-ln(2)\,; -ln\left(\frac{2}{3}\right)\right[$	$[-\ln(2)\,; +\infty[$
2	$A = \int_{\ln\left(\frac{1}{\pi}\right)}^{\ln(\pi)} (e^{x} - e^{-x}), \sin^2(\pi x)dx =$	$2\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right)$	0	$\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{\pi}\right)$
3	L'ensemble solution de l'inéquation : $\ln^2(x-4) + \ln(4-x)^2 - 8 \geq 0$ est :	$]4; 4+e^{-4}] \cup [4+e^{2}; +\infty[$	$[4+e^{-4}\,;\ +\infty[$	$]0; 4+e^{-4}] \cup [4+e^{2}; +\infty[$
4	$B = \int_{1}^{e} \frac{\ln(x)}{x,(\ln^2(x)+1)^3} dx =$	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{6^{-4}}{4e}$
5	L'ensemble solution de l'équation : $e^{x} - e^{3} = 1 - e^{3-x}$ est :	$S = \{3\,; e^{3}\}$	$S = \{0\,; e^{2}\}$	$S = \{0\,; 3\}$
6	$C = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)} dx =$	$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)$	$\frac{\pi^2}{8} + \ln(2)$	$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$

Exercice 5 : **(6 pts)**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1+2lnx}{x^2}$.

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. En déduire que (C_f) a deux asymptotes que l'on déterminera.
3. Calculer la dérivée f' de f et étudier les variations de f.
4. Soit I le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.

   Déterminer les coordonnées de I.
5. Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on pose $g(x) = 1 - x + 2ln\,x$.

   a. Étudier les variations de la fonction g.

   b. Calculer $g(1)$.

   c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]2;\,4[$. (On donne $\alpha \simeq 3\,51$).
6. Soit (C_h) la courbe représentative de la fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x}$.

   a. Vérifier que $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{g(x)}{x^2}$.

   b. En déduire que (C_f) et (C_h) se coupent en deux points.

   c. Montrer que, pour tout réel $x \geq 4 \quad 0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$.

   d. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé sur le papier millimétré donné.

Partie B

1. Soit D la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) l'axe des abscisses et les droites d'équations $\boldsymbol{x = 1}$ **et** $\boldsymbol{x = \alpha}$ (α étant le réel défini dans la partie A).

Montrer en utilisant une intégration par parties que l'aire de D,

notée $A(\alpha)$ en unités d'aire, est $A(\alpha) = \frac{-3+3\alpha-2\ln(\alpha)}{\alpha}$.

2. Soit la suite (I_n) définie pour $n \geq 1$ par : $I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.

   a. En exploitant la partie A, montrer que, pour tout $n \geq 4$:

   $0 \leq I_n \leq ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

   b. En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

   c. Soit $S_n = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n$.

      i. Calculer S_n.

      ii. En déduire la limite de la suite (S_n).

Partie C

On considère, pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n, définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$f_n(x) = \frac{1+2ln\,x}{x^{2n}}$.

1. Calculer la dérivée f_n' de la fonction f_n.
2. Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$. Soit x_n la solution de cette équation.
3. Déterminer la limite de la suite (x_n).

<u>Contrôle de Mathématiques</u> (20 pts) (Février 2019)

<u>Exercice 1</u> : (6 pts)

Dans la classe de SG, on communique aux élèves les statistiques suivantes après le premier examen de maths :

- 7 candidats sur 10 font leurs devoirs de maths régulièrement.
- 84 % des candidats qui font leurs devoirs de maths régulièrement ont réussi leur examen de maths.
- Seulement 5% de ceux qui ne font pas leurs devoirs de maths régulièrement ont réussi leur examen de maths.

Le jour de la distribution des livrets, tous ceux qui ont réussi leur examen de maths sont fiers en prétendant qu'ils ne faisaient jamais leurs devoirs de maths, alors que tous ceux qui ont échoué protestent et prétendent faire tout le temps leurs devoirs de maths.

On rencontre au hasard un candidat de SG le jour de la distribution des livrets. On note respectivement D, R et M les événements :
« Le candidat fait régulièrement ses devoirs de maths, « Le candidat a réussi son examen de maths» et « Le candidat est menteur ».
Arrondir les résultats au centième.

1) Quelle est la probabilité que le candidat rencontré ait réussi son examen de maths et ait fait régulièrement ses devoirs ?
2) Quelle est la probabilité que ce candidat ait réussi son examen de maths ?
3) Quelle est la probabilité d'avoir affaire à un menteur ?
4) Le candidat rencontré a réussi son examen de maths. Quelle est la probabilité qu'il soit un menteur ?
5) L'enseignante de maths de la classe de SG à la Sagesse Brasilia, rencontre ses 39 élèves le jour de la distribution des livrets. Elle les questionne sur leur préparation des devoirs de maths. On suppose que les réponses des élèves sont indépendantes. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de menteurs dans ce groupe de 39 élèves.
   a) Montrer que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
   b) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 3 menteurs dans ce groupe ?

Exercice 2 : (2,5 pts)

Soit (E) l'équation différentielle $y' - y = -4x\, e^{-x}$ où y est fonction du réel x .

a. En posant $y = z + (2x+1)e^{-x}$ où z est fonction de x, trouver l'équation (E') satisfaite par z.
b. Résoudre l'équation (E') et en déduire les solutions de l'équation (E).
c. Trouver la solution particulière de (E) qui passe par l'origine du repère.
d. Trouver la solution particulière de (E) qui admet au point d'abscisse 0 une tangente perpendiculaire à la droite (d) d'équation $y = -\frac{1}{4}x + 5$.

Exercice 3 : (6 pts) Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{u}\ \vec{v})$.

On appelle A le point d'affixe $-2i$.

Soit f l'application définie sur le plan à valeurs dans le plan qui à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = f(z) = -2\bar{z} + 2i$.

1. On considère le point B d'affixe $b = 3 - 2i$.
   Déterminer la forme algébrique des affixes a' et b' des points respectifs A' et B' images par f des points A et B.
2. Déterminer les points invariants par f.
3. Montrer que si $M(z)$ appartient à la droite (Δ) d'équation $y = -2$ alors M' appartient aussi à (Δ),
4. a) Démontrer que pour tout $M(z)$: $|z' + 2i| = 2|z + 2i|$.
   b) Interpréter géométriquement cette égalité.
5. Pour tout point M distinct de A :
   a) Démontrer que $(z + 2i)(z' + 2i)$ est un réel strictement négatif.
   b) En déduire une relation entre $(\vec{u}\ \overrightarrow{AM})$ et $(\vec{u}\ \overrightarrow{AM'})$.
   c) Que peut-on en déduire pour les demi-droites $[AM)$ et $[AM')$?
6. En utilisant les résultats précédents, proposez une méthode de construction géométrique du point M' associé au point M.

<u>Exercice 4</u> : (2,5 pts)

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points $M(z)$ et représenter-le dans un repère orthonormé.

a) $\arg(-i\bar{z}+2-i)=\frac{\pi}{4}(2\pi)$.

b) $|z-3+2i|>3$ et $\arg(-z+3-2i)=\frac{\pi}{3}\ (\pi)$.

c) $z=4-i-i\sqrt{2}(1-i)e^{i\theta}$ $\quad avec\ \frac{\pi}{4}\leq\theta<\frac{3\pi}{4}$.

<u>Exercice 5</u> : (2 pts)

Sur un site web on lit l'article suivant :

« Le téléphone portable ***Samsung Galaxy Note 8*** de l'entreprise Samsung est produit par deux sous-traitants $S1$ et $S2$.
Chez le sous-traitant $S1$, qui assure une partie de la production totale, 4% des téléphones sont défectueux.
Chez le sous-traitant $S2$, qui assure le reste de la production totale, 3% des téléphones sont défectueux.
3,4% des téléphones ***Samsung Galaxy Note 8*** sont défectueux. »

L'enseignante de SG propose le défi suivant à ses élèves :

« Un client achète un téléphone ***Samsung Galaxy Note 8*** choisi au hasard dans les stocks de l'entreprise Samsung et constate qu'il est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du sous-traitant $S1$? »

Andrew un élève de SG relève le défi et répond : c'est environ 47%.

A-t-il raison ? Expliquer sa démarche et commentez.

<u>Exercice 6</u> : (1 pt)

À tout point M d'affixe z, on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3 avec z différent de 0, 1 et -1.

Montrer que le triangle MNP est rectangle en P si, et seulement si, M appartient au cercle de centre le point d'affixe $-\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

<u>Contrôle de Mathématiques</u> (20 pts) (Mars 2019)

<u>Exercice 1 </u>: (6 pts) Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k})$:

(P) et (Q) sont les plans d'équations cartésiennes respectives :

$2x-3y-9z+2=0$ et $x+2y-z+1=0$.

1) Montrer que les plans (P) et (Q) sont sécants suivant une droite (d) dont on déterminera un système d'équations paramétriques.

2) On trouve : $(d)\begin{cases} x=3t-1 \\ y=-t \\ z=t \end{cases}\quad t\in IR$

   Soit (Δ) la droite dont un système d'équations paramétriques est donné par :

   $(\Delta)\begin{cases} x=s+1 \\ y=2s-3 \\ z=-s+2 \end{cases}\quad t\in IR$

   Étudier la position relative de (d) et (Δ).

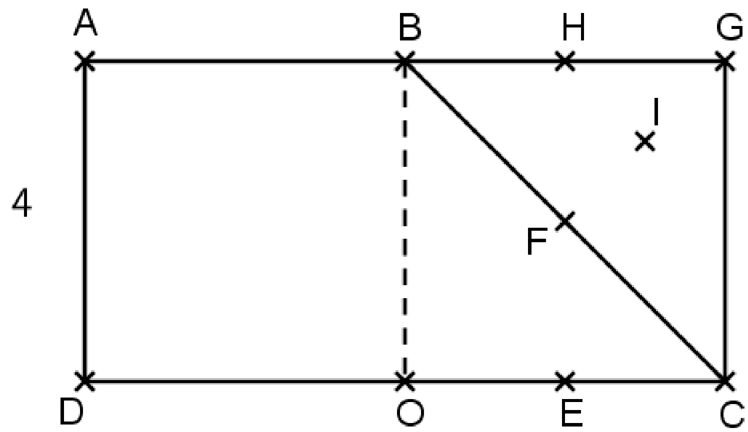
3) Écrire l'équation du plan (R) contenant (d) et (Δ),

4) Montrer que (R) est perpendiculaire au plan (Q).

<u>Exercice 2</u> : (6 pts)

Dans la figure ci-contre :

- $ADOB$ et $BOCG$ sont deux carrés juxtaposés de côté 4.
- E, F I et H sont les milieux respectifs de $[OC]$ $[OG]$ $[FG]$ et $[BG]$.



Soit S la similitude plane directe qui transforme A en E et B en F.

5) a) Déterminer le rapport et un angle de S.
   b) Montrer que $S(D) = C$.
   c) Déterminer $S((BC))$ et $S((DC))$.
   d) En déduire $S(C)$.
   e) Déterminer alors $S(F)$.
   f) Déterminer $S(G)$.

6) Soit W le centre de la similitude S et soit h la transformation définie par $h = S \circ S$.

   f) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h.
   g) Trouver $h(D)$ et $h(B)$.
   h) Justifier alors la construction du point W.
   i) Montrer que les points W C et H sont alignés.
   j) Exprimer $\overrightarrow{WH}$ en fonction de $\overrightarrow{WC}$.

7) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(D\,;\ \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}\quad \frac{1}{2}\overrightarrow{DA})$

   c) Trouver la forme complexe de S.
   d) Déterminer l'affixe de W.

Exercice 3 : (8 pts)

Une urne contient trois boules rouges numérotées de 1 à 3, cinq boules bleues numérotées de 1 à 5 et deux boules vertes numérotées 1 et 2.
On tire simultanément 3 boules de l'urne et on note les événements suivants :

A : « Obtenir des boules de couleurs différentes ».
B : « Obtenir des boules dont les numéros ont la même parité ».
C : « Obtenir au plus deux boules de numéro pair ».

Partie A :

1. Calculer la probabilité de l'événement A.
2. Montrer que $P(B) = \frac{1}{5}$.
3. Calculer $P(C)$ $P(A/\bar{C})$ et $P(B/\bar{C})$.

Partie B :

Un jeu consiste à tirer simultanément 3 boules de l'urne.
Si le tirage contient au moins une boule rouge le joueur ne gagne rien.
Sinon pour chaque boule bleue tirée le joueur perd 1 \$ et pour chaque boule verte tirée il gagne 3 \$.
Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

1. Montrer que X prend 4 valeurs.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer E(X) et interpréter ce résultat.
4. Combien de fois faut-il tirer avec remise pour espérer gagner en moyenne 100 \$?

Partie C :

On répète n fois ce jeu (n≥5) en remettant à chaque fois les

boules dans l'urne avant de procéder à un nouveau tirage.

Ainsi deux tirages successifs sont indépendants.

Et on s'intéresse au nombre de fois où l'événement B s'est

réalisé.

1. Calculer la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois l'événement B.
2. Déterminer le plus petit nombre n tel que $p_n \geq 0\,97$.

Fiche de révision 1 : Partie entière, domaine de définition et continuité

I) Résoudre, dans R, l'inéquation : $E\left(\sqrt{2x-3}\right) \leq 8$ où $E(x)$ représente la "partie entière" du réel x.

II)

a) Tracer dans un repère orthonormal la fonction f définie sur l'intervalle $[0;9]$ par $f(x) = E\left(\frac{x}{3} - 1\right)$.

b) Dire en quels points f est discontinue.

III) Donner le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{5x - 4\sqrt{12-2x}}{\sqrt{2x-1} - 3} \quad , \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos(2011x) - 1}}$$

$$h(x) = \frac{x-3}{\left|x^2 - 3\right| + 2x} \quad \text{et} \quad l(x) = \frac{8x-7}{\sqrt{E(\sin x) + 2}}$$

IV) Résoudre, dans R, l'inéquation : $16 - 2x - \sqrt{x-3} > 0$.

V) Expliciter et tracer sur $[-\pi; \pi]$ la fonction f définie par $f(x) = E(\sin x)$.

VI) Soit la fonction f donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} & si \ x > 4 \\ a & si \ x = 4 \\ bx + c & si \ x < 4 \end{cases}$$

Comment choisir les réels a, b et c pour que f soit dérivable au point d'abscisse 4 ?

VII) Soit f une fonction de x exprimée par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-x-2}{x-1} & \text{si} \quad x\leq 0\\ \dfrac{3x^2+x-2}{x+1} & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

Vérifier que f est définie sur tout R et qu'elle est continue sur R^*.