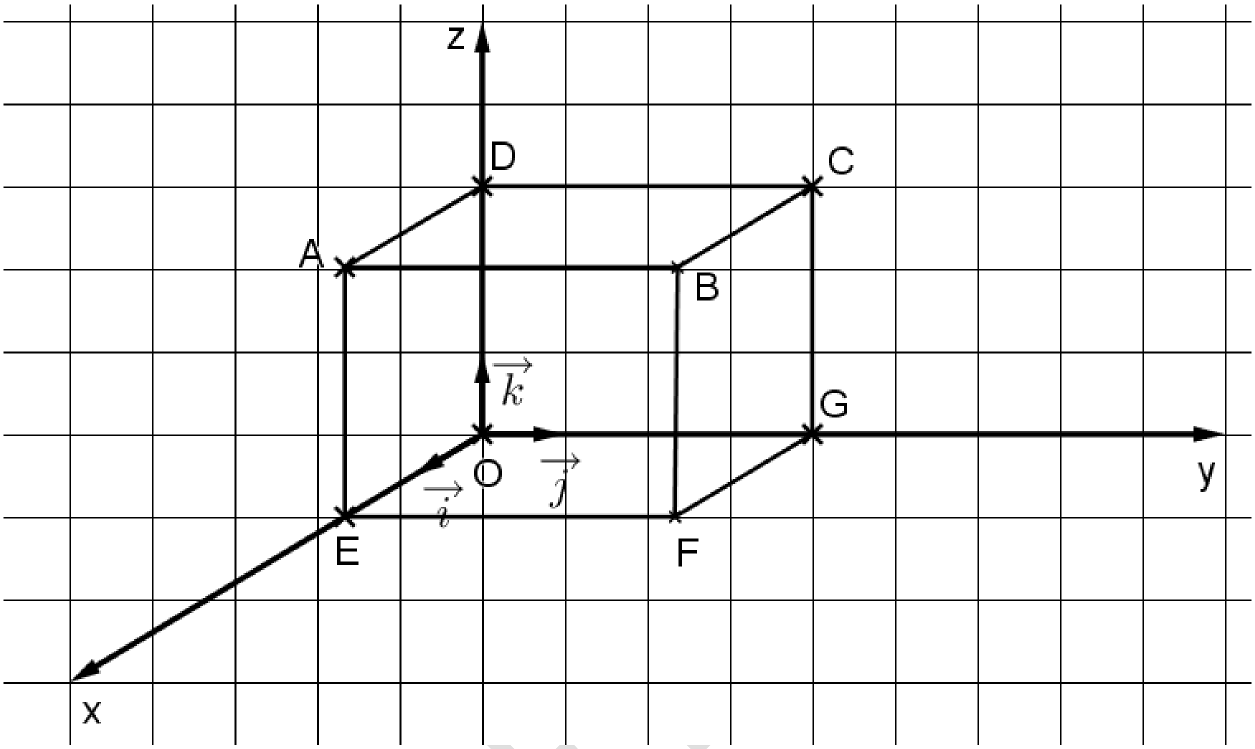
Lectures dans l'espace

Dans le repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath}\ \vec{\jmath}\ \vec{k})$, on donne le pavé ci-dessous :



1. Déterminer l'équation de chacun des plans suivants :

   (ABF), (ABC), (BCG) (ODC).

2. Déterminer l'équation de chacune des faces suivantes :

   $(ABFE)$, $(BCGF)$.

3. Déterminer l'équation de chacune des droites ou des segments suivants :

   (FG), $[FG]$, (AB) $[AB]$.

Exercices : Géométrie dans l'espace

Équation cartésienne d'un plan :

1. Écrire une équation cartésienne du plan (P) qui passe par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ dans chacun des cas suivants :
   a. $A(1\,;4\,;5)$ et $\vec{n}(2;-3;4)$.
   b. $A(2\,;\ 0\,;\ -3)$ et $\vec{n}(0;1;-4)$.

2. Écrire une équation cartésienne du plan (P) parallèle aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et passant par le point A dans chacun des cas suivants :
   a) $A(2;-1;1)$, $\vec{u}(2;1;3)$ et $\vec{v}(3;-2;4)$.
   b) $A(-1;-2;3)$, $\vec{u}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ et $\vec{v}=3\vec{k}$.

3. Écrire une équation cartésienne du plan (P) passant par les points A B et C dans chacun des cas suivants :
   a. $A(3;2;2)$, $B(1;-1;2)$ et $C(0;3;-1)$.
   b. $A(4;-1;3)$, $B(2;0;1)$ et $C(-2;0;3)$.

4. Soit le plan (P) d'équation cartésienne $x-2y+3z+1=0$.
   a. Trouver deux vecteurs normaux à (P).
   b. Déterminer trois points A B et C de (P).
   c. Le point $I(1;-2;3)$ est-il un point de (P) ?

5. Déterminer les points d'intersection du plan (P) d'équation cartésienne $2x-y+3z-6=0$ avec les axes de coordonnées.

Équation d'une droite :

1) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (d) passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{v}$ dans chacun des cas suivants :
   a. $A(1;-2;3)$ et $\vec{v}(2;3;1)$.
   b. $A(0;-4;5)$ et $\vec{v}(0;-3;7)$,
2) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (AB) dans chacun des cas suivants :
   a. $A(-2;5;1)$ et $B(3;2;-1)$.
   b. $A(0;2;0)$ et $B(0;3;0)$.
3) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (d) passant par le point A et parallèle à la droite (BC) dans chacun des cas suivants :
   a. $A(-2;1;3)$, $B(1;-1;2)$ et $C(0;2;4)$.
   b. $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$ et $C(0;0;2)$.

4) Soit $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = 3t \end{cases}$ avec $t \in IR$ une représentation paramétrique d'une droite (d).
   a) Donner deux vecteurs directeurs de (d).
   b) Déterminer deux points A et B de (d).
   c) Le point $I(2;1;-2)$ est-il un point de (d) ?

5) Déterminer les points d'intersection de la droite (d) définie par :
$\begin{cases} x = 4m - 3 \\ y = -m + 1 \\ z = m \end{cases}$ avec $m \in IR$ une représentation
avec les plans (xOy), (xOz) et (yOz).

Positions relatives de deux droites :

1. Dites, dans chacun des cas suivants, si les droites (d) et (d') sont concourantes, parallèles ou non coplanaires. (t et m sont des réels).

a.

$$(d): \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = -3t + 3 \end{cases} \qquad (d'): \begin{cases} x = \frac{\lambda}{2} + 1 \\ y = \lambda - 2 \\ z = -\frac{3}{2}\lambda \end{cases}$$

b.

$$(d): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t \\ z = 3t + 2 \end{cases} \qquad (d'): \begin{cases} x = 2m \\ y = m - 1 \\ z = 2m - 1 \end{cases}$$

c.

$$(d): \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = -2t + 3 \end{cases} \qquad (d'): \begin{cases} x = m \\ y = -m + 2 \\ z = 3m + 2 \end{cases}$$

d.

$$(d): \begin{cases} x = 2 \\ y = t + 2 \\ z = 3 \end{cases} \qquad (d'): \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 2m + 1 \end{cases}$$

2. Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (d') passant par le point $A(2; -1; 1)$ et parallèle à la droite (d) dans chacun des cas suivants :

a) $(d): \begin{cases} x = 3m + 2 \\ y = -m + 3 \\ z = -2m + 1 \end{cases}$

b) $(d): \begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$

c) $(d): \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{4}$

Droites orthogonales :

1. Dire, dans chacun des cas, si les droites (d) et (d') sont orthogonales ou non.

a)

$(d): \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3 \\ z = -t \end{cases}$ $(d'): \begin{cases} x = m + 5 \\ y = -3m \\ z = m + 2 \end{cases}$

b)

$(d): \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = t + 3 \end{cases}$ $(d'): \frac{x-3}{2} = y = \frac{z+1}{-3}$

2. Écrire un système d'équations paramétriques d'une droite (d) passant par le point A et orthogonale à la droite (d') dans chacun des cas suivants :

   a. $A(2; -1; 3)$ $(d'): \begin{cases} x = u - 1 \\ y = 2u \\ z = -3u + 2 \end{cases}$

   b. $A(-1; 2; 1)$ $(d'): \begin{cases} x = 3 \\ y = t - 1 \\ z = 2 \end{cases}$

   c. $A(0; 0; 1)$ $(d'): x = y = z$

Positions relatives d'une droite et d'un plan :

1) Déterminer la position relative de la droite (d') et du plan (P) dans chacun des cas suivants et déterminer les coordonnées de leur éventuel point d'intersection.

   a) $(d): \begin{cases} x = 2k + 3 \\ y = -k + 1 \\ z = 3k + 2 \end{cases}$ $\qquad (P): 2x - y - z + 2 = 0$

   b) $(d): \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t + 3 \end{cases}$ $\qquad (P): 3x - y + z - 8 = 0$

   c) $(d): \begin{cases} x = 3u - 1 \\ y = u + 1 \\ z = -u + 2 \end{cases}$ $\qquad (P): z = 0$

2) Soit les plans (P): $x - 3y - 2z + 1 = 0$
   et (Q): $2x + y + 3z + 1 = 0$ et le point $A(2; 1; -2)$.

   1) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (d) passant par A et parallèle à (P) et à (Q).
   2) Trouver une équation du plan (R) passant par O et parallèle à (P) et une équation du plan du plan (T) passant par O et parallèle à (Q) et vérifier par le calcul que la droite d'intersection de (R) et (T) est parallèle à (P) et à (Q).

3) Soit le plan $(P): 2x + y - 3z + 1 = 0$, la droite

$$(d): \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = -t + 1 \end{cases}$$ et le point $A(1; -1; 2)$.

Trouver un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) dans chacun des cas suivants :

a) (Δ) passe par A, est parallèle à (P) et rencontre (d).
b) (Δ) passe par A, est parallèle à (P) et rencontre $(z'Oz)$.
c) (Δ) passe par A, est parallèle à (xOy) et rencontre (d).

Droite perpendiculaire à un plan :

1) Dire si la droite (d) est perpendiculaire au plan (P) dans chacun des cas suivants :

a) $(d): \begin{cases} x = m - 2 \\ y = -m \\ z = 3m \end{cases}$ $\quad (P): x - 2y + z - 5 = 0$,

b) $(d): \begin{cases} x = 2 \\ y = t - 1 \\ z = 2t \end{cases}$ $\quad (P): 2y + 4z - 5 = 0$,

2) Écrire une équation du plan (P) passant par le point A et perpendiculaire à la droite (d) dans chacun des cas suivants :

a) $(d): \begin{cases} x = 3t \\ y = -t + 2 \\ z = t - 1 \end{cases}$ $\quad A(0; -1; 2)$

b) $(d): \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t + 1 \end{cases}$ $\quad A(2; 1; -1)$

Distance d'un point à un plan :

Calculer la distance du point A au plan (P) dans chacun des cas suivants :

1) $A(3;1;-2)$ $\qquad$ (P): $x+2y-z+1=0$.
2) $A(2;-3;4)$ $\qquad$ (P): $z+1=0$.

Distance d'un point à une droite :

1) Calculer la distance du point A à la droite (d) dans chacun des cas suivants :

   a) $A(3;2;4)$ $\qquad$ et $\qquad$ $(d):\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t-2 \\ z=3t \end{cases}$

   b) $A(1;-1;2)$ $\qquad$ et $\qquad$ $(d):\frac{x-2}{3}=y=\frac{z+1}{-2}$

2) Soit la droite $(d):\begin{cases} x=t+1 \\ y=-t+2 \\ z=2t \end{cases}$ $\qquad$ et $\qquad$ le point $A(2;0;3)$.

   a) Ecrire une équation du plan (P) passant par le point A et perpendiculaire à (d).
   b) Déterminer les coordonnées de H projeté orthogonal de A sur (d) et en déduire la distance de A à (d).

Problèmes :

1) Soit le plan $(P): 2x + y - z = 0$,

   la droite $(d): \begin{cases} x = 2t \\ y = -t + 1 \\ z = t - 2 \end{cases}$ et le point $A(2; 1; -2)$.

   a) Trouver les coordonnées de I intersection de (d) et (P).
   b) Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) passant par A, parallèle à (P) et rencontrant (d).
   c) Trouver une équation du plan (Q) passant par A et contenant (d).
   d) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (d'), intersection de (P) et (Q).
   e) Trouver les coordonnées de B projeté de A sur (P) parallèlement à (d).
   f) La droite (Δ) se projette sur (P) parallèlement à (d) suivant une droite (Δ').
      Trouver un système d'équations paramétriques de (Δ').

2) Soit les points $A(1; 2; -3)$ $B(4; 5; -1)$ et $C(3; -1; 0)$.
   a) Montrer que les points A B et C déterminent un plan (P).
      Écrire une équation cartésienne de (P).
   b) Trouver un système d'équations paramétriques de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
   c) Écrire une équation du plan contenant A et B et parallèle à la droite $(d): \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 2 \\ z = 3t \end{cases}$
   d) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) intersection de (P) avec le plan (xOz).

3) Soit la famille de plan (P_m):
   $(m + 2)x - 2(m - 1)y + (3 - m)z + m + 3 = 0$
   où m est un paramètre réel et le point $A(1; 2; -1)$.

   a) Montrer que, quel que soit m, le plan (P_m) contient une droite fixe (d).
   b) Trouver un système d'équations paramétriques de (d).

c) Trouver un point B sur $(z'Oz)$ tel que (AB) soit parallèle à (P_0).
d) Existe-t-il une droite passant par A et qui reste parallèle à (P_m) lorsque m varie ?
Si oui, trouver un système d'équations paramétriques de cette droite.

4) Soit la droite (d) définie par : $\frac{x+1}{2} = y - 1 = \frac{z}{3}$

et le plan (P) d'équation $2x + y - z + 1 = 0$.

a) Calculer le cosinus de l'angle aigu que fait (d) avec (P).
b) Écrire une équation du plan (Q) déterminé par (d) et O l'origine du repère.
c) Trouver des équations paramétriques de l'intersection des plans (P) et (Q).

5) On donne les points $A(1;2;3)$ et $B(3;2;1)$ et la droite (d) définie par : $(d)\!:\begin{cases} x = k+1 \\ y = k-1 \\ z = -k+2 \end{cases}$

On considère le point $C(1;-1;2)$.

a) Écrire l'équation du plan (P) passant par A, Bet C.
b) Écrire l'équation du plan (Q) contenant (d) et parallèle à (AB).
c) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (Δ), intersection de (P) et (Q).
d) Calculer le cosinus de l'angle aigu que fait (P) avec (Q).
e) On suppose que N est un point variable de (d).
Soit I le milieu de $[AB]$.
On pose $s = \overline{NA}^2 + \overline{NB}^2$.
Démontrer que $s = 2\overline{NI}^2 + 4 = 6k^2 - 16k + 24$.
Déterminer la valeur de k pour laquelle s est minimum
et trouver les coordonnées du point N correspondant.
f) Que représente géométriquement le point N ainsi trouvé pour le point I ? En déduire la distance de I à (d).

6) Soit (d_m) la famille de droites définies par les équations :
$\frac{x}{m} = \frac{y}{m+1} = z - 1,$

a) Montrer que les droites (d_m) passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.

b) Calculer en fonction de m les coordonnées du point B intersection de (d_m) avec le plan (xOy).
En déduire que (d_m) reste dans un plan fixe (P).
Trouver une équation cartésienne de (P).

7)

a. Déterminer un vecteur directeur de (d) et un vecteur directeur de (d').
Quelle est la position relative de (d) et (d') ?

b. Trouver un point A de (d) et deux points B et C de (d').
c. Écrire une équation cartésienne du plan (P) déterminé par A B et C.
d. Vérifier par le calcul que (d) et (d') sont incluses dans (P).
e. Trouver un vecteur $\vec{v}$ normal à (P) et écrire un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$.
f. Quelle est la position relative de (Δ) et (d) ?
g. Quelle est la position relative de (Δ) et (d') ?

8)

Le point $A(1; -2; 3)$ se projette orthogonalement sur un plan (P) en l'origine O du repère.

a. Écrire une équation cartésienne du plan (P).
b. Calculer la distance de A à (P).
c. Trouver les coordonnées de B symétrique de A par rapport à (P).
d. Trouver une équation du plan (Q) passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{OA}$.
e. Calculer la distance de A à (Q).

Position de deux droites

- Deux droites (d_1) et (d_2) sont coplanaires (dans le même plan) ou non coplanaires.
- Si elles sont coplanaires elles peuvent être :
  - Confondues $(d_1)=(d_2)$
  - parallèles $(d_1)//(d_2)$
  - sécantes $(d_1)\cap(d_2)=\{A\}$.
- Si elles sont non coplanaires $(d_1)\cap(d_2)=\phi$.

Position d'une droite et d'un plan.

Une droite (d) et un plan (P) peuvent être :

- parallèles $(d)//(P)$
- sécants la droite coupe le plan en un point $(d)\cap(P)=\{A\}$
- la droite est contenue dans le plan $(d)\subset(P)$.

Position de deux plans

Deux plans (P)et (Q) peuvent être :

- confondus $(P)=(Q)$.
- parallèles $(P)//(Q)$ $(P)\cap(Q)=\phi$
- sécants les deux plans se coupent suivant une droite $(P)\cap(Q)=(D)$.

Par convention, on dit que deux droites confondues ou deux plans confondus sont parallèles et qu'une droite contenue dans un plan est parallèle à ce plan.

Propriétés

- Trois points non alignés déterminent un plan et un seul
- Une droite et un point n'appartenant pas à cette droite déterminent un plan et un seul.
- Deux droites parallèles déterminent un plan et un seul.
- Deux droites sécantes déterminent un plan et un seul.
- Si une droite a deux de ses points dans un plan alors elle contenue dans ce plan.

Droites parallèles

- Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.
- Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.
- Si une droite (d) est parallèle à un plan (P), alors elle est parallèle à l'intersection de (P) avec tout plan qui contient (d) et coupant (P) .
- Toute droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur intersection.
- Si deux droites sont parallèles ,et contenues respectivement dans deux plans sécants, alors elles sont parallèles à l'intersection de ces deux plans.

Plans parallèles

- Deux plans sont parallèles, si deux droites sécantes de l'un sont respectivement parallèles à deux droites sécantes de l'autre.
- Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles alors toute droite contenue dans l'un est parallèle à l'autre.

Droites et plans parallèles

Une droite (d) est parallèle à un plan (P), si et seulement si, elle est parallèle à une droite de ce plan.

N.B.
Si une droite est parallèle à un plan ceci n'implique pas qu'elle est parallèle à toutes les droites du plan, mais à plusieurs droites parallèles de ce plan.

Point méthode

- **Pour prouver que deux plans sont sécants il suffit de prouver qu'ils ont un point en commun et qu'un point de l'un n'appartient pas à l'autre.**
- **Pour démontrer que trois points sont alignés il suffit de démontrer qu'elles appartiennent à deux plans distincts.**
- **Pour trouver la droite d'intersection de deux plans il suffit**
    - ❖ **soit de trouver deux points communs aux deux plans.**
    - ❖ **Soit de trouver un point commun et une droite parallèle à ces deux plans.**
- **Pour démontrer que deux droites sont parallèles, on peut démontrer qu'elles sont coplanaires et situées dans deux plans parallèles.**

Produit vectoriel et produit mixte

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{\imath}\ \vec{\jmath}\ \vec{k}\,)$.

1) Soit les vecteurs $\vec{u}(2\ \ -3\ \ 4\,)$, $\vec{v}(1\ \ 2\ \ 3\,)$ et $\vec{w}(2\ \ 0\ \ 1\,)$.
   Calculer les composantes de :
   $\vec{u} \wedge \vec{w}$; $\vec{w} \wedge (2\vec{u} - 3\vec{v})$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$

2) Soit les points $A(1\ \ -1\ \ 2)$, $B(3\ \ 1\ \ 3)$ et $C(2\ \ -3\ \ 1)$

   a) Calculer les composantes de :
      $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{k}$
   b) Montrer que les points $A\ B$ et C déterminent un plan (P).
   c) Déterminer les composantes d'un vecteur normal à (P).
   d) Déterminer une équation cartésienne de (P).

3) Soit les vecteurs $\vec{u}(1\ \ 2\ \ -3\,)$ et $\vec{v}(2\ \ 4\ \ -6\,)$.
   a) Calculer les composantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et interpréter le résultat.
   b) Retrouver cette conclusion par une autre méthode.

4) On donne les vecteurs $\vec{u}(2\ \ -1\ \ 4\,)$ et $\vec{v}(3\ \ 1\ \ 2\,)$.
   Déterminer les vecteurs $\vec{w}(a\ \ b\ \ c\,)$ orthogonaux à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

5) Soit un parallélogramme $ABCD$ avec $A(3\ \ -2\ \ -1)$, $B(2\ \ 1\ \ 3)$ et $C(0\ \ 4\ \ 1)$.
   a) Trouver les coordonnées de D.
   b) Calculer l'aire de ce parallélogramme .
   c) Calculer l'aire du triangle ABD et celle de ABC.
   d) Calculer $cos\widehat{BAC}$ et $sin\widehat{BAC}$.

6) Soit les points $A(3\ \ -1\ \ 2)$, $B(2\ \ -2\ \ 1)$, $C(0\ \ 2\ \ 3)$ et $M(\alpha\ \ \beta\ \ \gamma)$.
   Trouver une relation entre $\alpha\ \ \beta$ et γ pour que M soit dans le plan (ABC) .

7) Soit les points $A(3\ \ 2\ \ -3)$, $B(2\ \ 1\ \ -1)$ et $C(4\ \ 0\ \ 1)$.
   a) Montrer que les points O, $A\ \ B$ et C sont non coplanaires.
   b) Calculer le volume du parallélépipède de côtés $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$.
   c) Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.

8) On donne les points $A(-1\ \ 2\ \ 1)$, $B(-2\ \ 1\ \ 0)$, $C(-1\ \ 1\ \ -1)$ et $E(-2\ \ 3\ \ -2)$.
   a) Montrer que les points $A\ B$ et C déterminent un plan (P).
   b) Montrer que (EC) est perpendiculaire à (P).
   c) Montrer que les plans (OEC) et (P) sont perpendiculaires.
   d) Calculer l'aire du triangle ABC.
   e) Calculer selon deux méthodes le volume du tétraèdre $EABC$.

9) On donne les points $A\left(\frac{1}{3}\ \ -\frac{2}{3}\ \ \frac{2}{3}\right)$ et $B\left(\frac{2}{3}\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{1}{3}\right)$.
   a) Monter que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux et unitaires.
   b) Trouver un point C tel que le repère soit orthonormé et direct $(O\ ;\ \overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}\ \overrightarrow{OC}\ )$

10) On donne les points $A2\ \ 1\ \ -2)$, $B(3\ \ 2\ \ 0)$, $C(-1\ \ 2\ \ -3)$ et $M(x\ \ y\ \ z)$.
   a) Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).
   b) Trouver une relation entre $x\ \ y$ et z dans chacun des cas suivants :
      - M est dans le plan (ABC).
      - M est dans le plan médiateur de $[AC]$.
      - M est sur la sphère de diamètre [BC].
   c) Trouver une relation entre $x\ \ y$ et z si Mse trouve sur la droite (AB).

Angle de deux droites.

(d) et (d') sont deux droites de l'espace on appelle angles de (d) et (d') l'angle formé par deux parallèles à ces deux droites passant par un même point à $k\pi$ près.

Droites orthogonales (perpendiculaires)

- Deux droites (d) et (d') de l'espace sont orthogonales si leur angle est droit.
- Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

N.B. Deux droites sont orthogonales à une même troisième ne sont parallèles que si elles sont coplanaires.

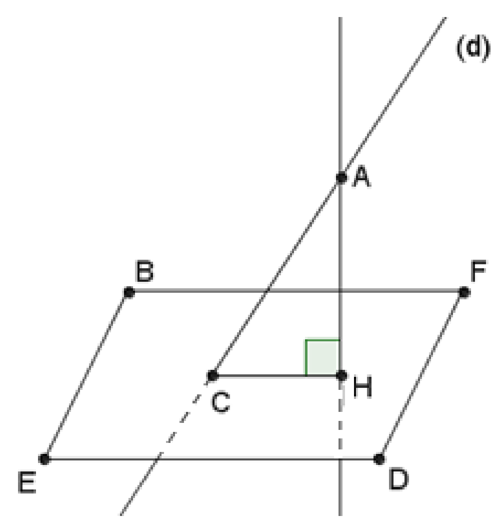
Angle d'une droite et d'un plan.

(d) non perpendiculaire à (P) / (d) coupe (P) en C.

$A \in (d)$ et $A \notin (P)$ $(AH) \perp (P)$.

$A\widehat{C}H$ est l'angle de la droite (d) et du plan (P).

L'angle de la droite (d) et du plan (P) est aussi le complément de l'angle formé par (d) et par un vecteur normal au plan (P).



Droites perpendiculaires à un plan

- Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.
- Si une droite est perpendiculaire à un plan alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
- Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan elles sont parallèles entre elles.
- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si un plan (P) est perpendiculaire à une droite (D)en un point A, alors toute droite passant par A et perpendiculaire à (D), est contenue dans (P).

Angle de deux plans.

$(P)\cap(Q)=(\Delta),\ G\in(\Delta)$

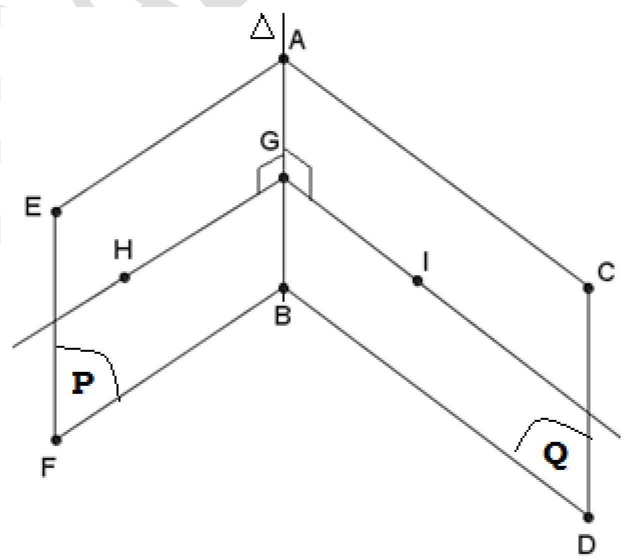
(HGI) $\perp$ (Δ) avec $(GH)\subset(P)\, et\, (GI)\subset(Q)$

D'où $(GI)\perp(\Delta)$ et $(GH)\perp(\Delta)$

L'angle $H\widehat{G}I$ est l'angle

des deux plans (P) et (Q).

On dit l'appelle aussi l'angle du dièdre $((P),(\Delta),(Q))$.



Plans perpendiculaires.

- Deux plans sont perpendiculaires lorsque leur angle est droit.
- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si l'un deux contient une droite perpendiculaire à l'autre.
- Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre eux.
- Si deux plans sécants sont perpendiculaires à un même troisième plan alors leur intersection est perpendiculaire à ce plan.

Plan médiateur.

- Le plan médiateur d'un segment est le plan perpendiculaire à ce segment en son milieu.
- Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants des points A et B.
- Dire qu'un point M de l'espace appartient au plan médiateur d'un segment $[AB]$ équivaut à dire que $MA = MB$.

Point méthode

- Pour démontrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan il suffit :
  - ❖ Soit de prouver que la droite est orthogonale à deux droites sécantes du plan.
  - ❖ Soit de prouver que le plan est le plan médiateur d'un segment de la droite.
- Pour démontrer deux plans sont perpendiculaires on démontre que l'un deux contient une droite perpendiculaire à l'autre.

- Pour montrer que deux droites sont orthogonales, il suffit de démontrer que l'une d'elles est perpendiculaire à un plan contenant l'autre.

Rappel Produit scalaire et applications

I. Les expressions du produit scalaire dans le plan

a. $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,,\vec{v})$

b. $\vec{u},\vec{v} = \overrightarrow{u'},\vec{v}$ où $\overrightarrow{u'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$,

c. Dans un repère orthonormal (orthonormé) : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u},\vec{v} = xx' + yy'$.

II. Cas particuliers :

1. $\vec{u}.\vec{v} = 0 \iff \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,,\vec{v}) \iff$

$$\|\vec{u}\| = 0 \Longrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

et /ou

$$\|\vec{v}\| = 0 \Longrightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

et /ou

$$\cos(\vec{u}\quad\vec{v}) = 0 \Longrightarrow (\vec{u}\quad\vec{v}) = \frac{\pi}{2}\,mod(\pi)\ (\frac{\pi}{2}\,mod(2\pi)\text{ ou } -\frac{\pi}{2}\,mod(2\pi))$$

2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens
   $(\vec{u}\,,\vec{v}) = 0\ (2\pi) \Longrightarrow cos(\vec{u}\,,\vec{v}) = 1 \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
3. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires
   $(\vec{u}\,,\vec{v}) = \pi\ (2\pi) \Longrightarrow cos(\vec{u}\,,\vec{v}) = -1 \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
4. $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$ $\qquad AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$
5. $\vec{u}.\vec{0} = 0\ \ (\vec{u}\,,\vec{0})$ est indéterminé.

III. Règles de calcul :

1. $\vec{u},\vec{v} = \vec{v},\vec{u}$ (le produit scalaire est commutatif)
2. $\vec{u},(\vec{v} \pm \vec{w}\,) = \vec{u},\vec{v} \pm \vec{u},\vec{w}$ (le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition)
3. $(\alpha\vec{u}).(\beta\vec{v}) = (\propto.\beta)\vec{u}.\vec{v},\quad \propto \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}$
4. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$
5. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
6. $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

IV. Relations métriques dans un triangle

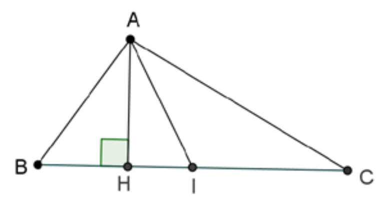
a. Théorème d'Alkashi :

Dans le triangle ABC ona : $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \times cos\hat{A}$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times cos\hat{B}$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times cos\hat{C}$$

b. Théorèmes de la médiane

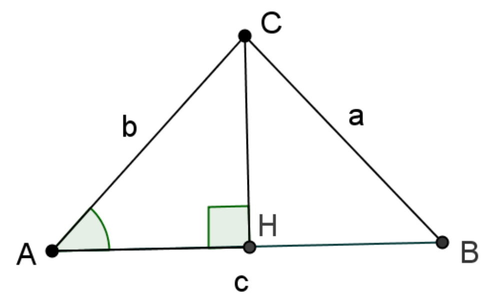


ABC est un triangle, $[AI]$ et $[AH]$ sont respectivement la médiane et la hauteur relative à $[BC]$,

$AC^2 + AB^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$

$AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{AI},\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{HI},\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{HI}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AI}$ sur $\overrightarrow{CB}$,

c. Aire d'un triangle



$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\ AB \times AC \times sin\hat{A}$. Donc $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\ bcsin\hat{A}$.

De même : $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\ acsin\hat{B}$ et $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\ absin\hat{C}$.

Conséquence On a $2\mathcal{A}_{ABC} = bcsin\hat{A} = acsin\hat{B} = absin\hat{C}$, En divisant par abc, On obtient

$$\frac{2\mathcal{A}_{ABC}}{abc} = \frac{bcsin\hat{A}}{abc} = \frac{acsin\hat{B}}{abc} = \frac{absin\hat{C}}{abc} \text{ alors } \frac{2\mathcal{A}_{ABC}}{abc} = \frac{sin\hat{A}}{a} = \frac{sin\hat{B}}{b} = \frac{sin\hat{C}}{c}.$$

V. Lieux géométriques

- $MA = MB \Leftrightarrow$ l'ensemble des points M du plan est la médiatrice de $[AB]$,
- $MA = r$ (constante) $\Longleftrightarrow$ l'ensemble des points M du plan est le cercle de centre A et de rayon r,
- $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$=0 $\Leftrightarrow$ l'ensemble des points M du plan est le cercle de diamètre $[AB]$,
- $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB}$=0 $\Leftrightarrow$ l'ensemble des points M du plan est la droite (D) perpendiculaire à (AB) passant par A,
- $\overrightarrow{MG}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$ l'ensemble des points M du plan est la droite (D') parallèle à (AB) passant par G,

VI. Distance d'un point à une droite : (dans le plan)

Soit dans un repère orthonormal la droite (D) dont $ux + vy + w = 0$ est une équation cartésienne et A est un point tel que $A(x_A\ ;\ y_A)$. La distance du point A à la droite (D) est donnée par : $d(A;(D)) = \frac{|ux_A + vx_A + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.