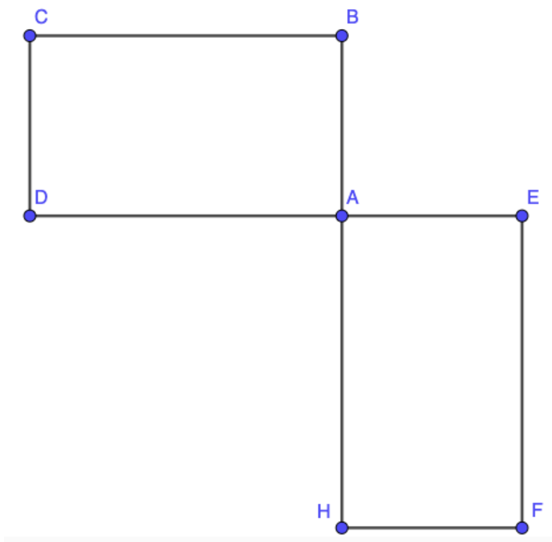
Institutions Educatives Amal Lycée ____________	Classe: 12SG	Année scolaire : 2023 / 2024 Date:
Nom: ____________	Matière: **Mathématiques**	Durée: 240 minutes

I- (8 points)

Dans le tableau ci-dessous, pour chaque question une seule réponse est correcte.
Choisir la bonne réponse en justifiant chaque fois ta réponse.

N	Questions	Réponses A	Réponses B	Réponses C
1)	Le Produit des solutions de l'équation : $5(lnx)^2 - 20lnx + 15 = 0$ est	$e^3 + e$	e^3	e^4
2)	$\lim_{x\to 0^-} xe^{-\frac{1}{x}} =$	$+\infty$	0	$-\infty$
3)	$f(x) = \ln\left((6x-12)e^{\frac{x}{2}} + 2 - x\right)$ Le domain de definition est :	$]-2\ln(6) ; +\infty[$	$]2 ; +\infty[$	$]-\infty ; -2\ln(6)[\cup]2 ; +\infty[$
4)	On donne une suite (u_n) tel que $u_n = \frac{(-1)^n}{3^{n-1}} + \frac{2^n}{3^{n+2}}$ Et soit (S_n) une autre suite tel que $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ Donc :	$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{31}{12}$	$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$	$\lim_{n\to\infty} u_n = -1$ $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{4}{9}$
5)	Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct soit le point A(2-i) alors l'affixe de B si OAB est un un triangle rectangle isocèle direct en A et l'affixe de C si OABC est un carré direct, est	$z_B = 3 + i$ et $z_C = 1 + 2i$	$z_B = 1 - 3i$ et $z_C = -1 - 2i$	$z_B = 2 + i$ et $z_C = 2i$
6)	$f(x) = x^2(lnx + e^x)$, donc $f'(x) =$	$x^2(\frac{1}{x} + e^x)$	$x(2lnx + (x+2)e^x + 1)$	$2xlnx + x^2e^x$
7)	Soit (u_n) la suite tel que $u_n = (n + (-1)^n n)^{\frac{1}{n}}$	(u_n) est convergent et $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$	(u_n) est divergente	(u_n) est convergent et $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$
8)	Soit f la fonction tel que $f(x) = e^x$ La courbe (C) de f est translaté selon le vecteur $\vec{v}(-a, b)$ pour donner la courbe (G) d'une function g. Si (G) passe par A(1, 1.5) et B(ln2 , 2) alors les composantes de $\vec{v}$ sont :	$a = -1$ et $b = 1$	$a = -ln2$ et $b = 1$	$a = ln2$ et $b = 1$

II- (6 points)



On Consider , dans le plan , deux rectangles ABCD et AHFE , sachant que AB = AE, AD = AH, et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AF}) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Partie A :

Soit S la similitude de plan direct qui transforme A en B , et D en A

1) Justifer que le rapport K de S est $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et calculer l'angle de S.
2) Montrer que (BD) et (AF) sont perpendiculaires.
3) Trouver les images de (BD) et (AF) par S.
4) Déduire que I, la point commun entre (BD) et (AF), est la centre de S.

Partie B :

Considerons la similitude S' = S'(D;$\sqrt{3}$,-$\frac{\pi}{2}$) et la homothetie h = h(I;$\sqrt{3}$) .

1)
   a) Déterminer l'image de C par la transformation S o S' .
   b) Déduire la nature et les éléments de la transformation S o S' .
2) Déterminer la nature et les éléments de la transformation S o h.

Partie C :

Soit AD = 1. Considerons la suite des points: A_0 = A tel que $S(A_n) = A_{n+1}$. Soit la longueur $l_n = A_nA_{n+1}$ ou $n \geq 0$.

1) Placer les points A_1, A_2 *et* A_3.
2) Montrer que la suite (l_n) est une suite géométrique de raison et l_0 a déterminer .
3) Déterminer l_n en fonction de n.
4) Soit S_n = l_0 + l_1 + l_2 + ... + l_n .
   a) Déterminer S_n en fonction de n et montrer que (S_n) est une suite convergente.
   b) Trouver la valeur minimal de n , sachant que $S_n \geq \frac{2}{3\sqrt{3}-3}$

III- (10 points)

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, +\infty[$ telle que $f(x) = \frac{2e^x}{e^{2x}+1}$ Et désignons par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)

a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, puis déduire une asymptote (d).

b) Etudier la position relative de (C) et (D).

2) Calculer $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.

3) Vérifier que $f''(x) = \frac{2e^x(e^{4x}-6e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^3}$, puis déduire que f admet 2 points d'inflections a determiner.

4) Montrer que O(0,0) est un centre de symétrie.

5) Tracer (C) et (D).

6) Trouver le primitive de $f(x)$ sachant que $\int \frac{u'}{u^n+1} dx = arctan(u) + c$.

7) Soit $A_{(\propto,\beta)}$ = $\int_{\propto}^{\beta} f(x)dx$. ou $\propto$ $et\ \beta \in \mathbb{R}$ $tel\ que\ \propto \neq \beta$

a) Calculer $A_{(\propto,\beta)}$ en fonction de $\propto$ $et\ \beta$, puis déduire $A_{(\propto,\beta)}$ en fonction de $\propto$ seuleument sachant que $\propto = -\beta$.

b) Calculer $\lim_{\propto\to-\infty} A_{(\propto,\beta)}$.

Partie B :

Soit h la fonction définie telle que h(x) = ln(f(x)) Et désignons par (H) sa courbe representative dans un repère orthonormal$(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer le domaine de définition de h.

2) Déterminer les limites de h sur les bornes ouverte de son domaine de définition.

3)

a) Calculer $\lim_{x\to\infty} f(x) - (x + ln2)$, puis déduire une asymptote (d) a (H).

b) Calculer $\lim_{x\to\infty} f(x) - (-x + ln2)$, puis déduire une asymptote (d') a (H).

c) Etudier la position relative de (C) et (d) , (C) et (d').

4) Calculer h'(x) , puis dresser le tableau de variation de h.

5) Montrer que $f(x) \leq 0$.

6) Tracer (H) , (d) et (d')

Partie C :

Soit (u_n) la suite tel que $u_n = \int_0^1 \frac{2e^{nx}}{e^{2x}+1}dx$ pour $n \geq 0$.

1) Calculer u_1 .

2) Calculer $u_n + u_{n+1}$, puis déduire u_0 .

3) Démontrer que (u_n) est une suite croissante.

4)

a) Démontrer que $\frac{2}{e^2+1}\int_0^1 e^{nx}\,dx \leq u_n \leq \int_0^1 e^{nx}\,dx$

b) Déduire $\frac{2(e^n-1)}{n(e^2+1)} \leq u_n \leq \frac{e^n-1}{n}$

5) Calculer $\lim_{n\to\infty} u_n$.

IV- (6 points)

On considère la suite numérique (I_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}dx$.

1)

a) Calculer I_2 . Interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que , pour tout entier naturel $n \geq 2$, $I_n > 0$.

2)

a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante .

b) Justifier que (I_n) est convergente .

3)

a) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x^{n-1}}e^{\frac{1}{x}}$.

Montrer que $g'(x) = \frac{1-n}{x^n}e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$. En déduire que , pour tout $n \geq 2$, $I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} - (n-1)I_n$.

b) Calculer I_3 .

4)

a) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle]2 ; 1[et pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 \leq \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$.

b) En déduire que , pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

c) Déterminer la limite de la suite (I_n) .

V- (5 points)

Une urne contient trois dés équilibrés ; deux d'entre eux sont bleus et possède chacun six faces numérotées de 1 à 6 alors que le troisième est rouge et possède deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 6 .

1) **On tire au hasard un dé de l'urne et on le lance . On considère les événements suivants :**

   B : " le dé tiré est bleu " ; R : " le dé tiré est rouge " et S : " on obtient 6 au lancer du dé ".

   Démontrer que $p(S) = \frac{1}{3}$.

2) **Dans cette partie , on tire au hasard un dé de l'urne . On lance ensuite ce dé n fois de suite.**

   On note S_n l'événement : " on obtient 6 à chacun des n lancers " .

   a) **Calculer la probabilité de l'événement " le dé tiré est bleu et on a obtenu 6 à chacun des n lancers " .**

   b) **Démontrer que $p(S_n) = \frac{2}{3}(\frac{1}{6})^n + \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$, et justifier la valeur de $p(S)$ obtenue en 1.**

   c) **Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on p_n note la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n lancers .**

      Démontrer que $p_n = \frac{1}{2(\frac{1}{4})^n+1}$.

3) **Déterminer le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $p_n \geq 0.999$.**

VI- (5 points)

Partie A :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. on donne les points A , B , C , D , E , M et M' d'affixes $z_A = 1$, $z_B = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_C = 3i$, $z_D = 1 + i$, $z_E = i$, z et z' telque $z' = \frac{iz+1-i}{z-3i}$ $(z \neq 3i)$.

1)
   a) **Ecrire $z_B - z_A$ sous forme exponential .**

   b) **Déterminer la nature du triangle OAB .**

2) **Soit (C) un cercle de centre O et rayon 1**

   a) **Montrer que $z' = i(\frac{z-1-i}{z-3i})$.**

   b) **Déduire le lieux géométrique de M , si M' décrit le cercle (C).**

   c) **Si M décrit la droite $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$, déduire le lieux géométrique de M' .**

3)
   a) **Montrer que $z' - i = \frac{-2-i}{z-3i}$.**

b) $|(z' - i)(z - 3i)| =$ à $une\ r$éel à déterminer .

c) Si M décrit le Cercle de centre C et rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$. déduire le lieux géométrique de M'

4) Soit $z = x + iy\ et\ z' = x' + iy'\ avec\ x, y, x', y' \in \mathbb{R}$.

a) Exprimer x' et y' en function de x et y

b) Trouver l'ensemble des points M , si z' est réel .

c) Démontrer que M' ∈ (D) d'une equation a determiner si z est reel . (n'est pas pour resolu)

d) Trouver l'ensemble des points M , si z' est imaginaire pure .

5) M est un point du plan complexe d'affixe $z = z_A . \overline{z_A} . e^{i\theta}$, ou θ est un nombre réel.

Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ decrit $\mathbb{R}$.

Partie B :

(a_n) et (b_n) sont deux suites définies par la recurrence croisée :

$a_0 = 2$; $b_0 = 4$; $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n)\ et\ b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n)$; on pose

$U_n = a_n + b_n$; $V_n = a_n - b_n$; $P_n = a_n . b_n$; $Q_n = P_n - 9$.

1) Démontrer que (U_n) est constant, indiquer cette constant.

2) Démontrer que (V_n) est géométrique, indiquer sa raison et V_0 .

3) Exprimer $a_n\ et\ b_n$ en function de n.

4) Montrer que $a_n\ et\ b_n$ sont convergentes vers une même limite et calculer cette limite.

5) Démontrer que (Q_n) est géométrique , indiquer sa raison et Q_0.

6) Calculer P_n en fonction de n et $\lim_{n\to\infty} P_n$.

7) Soit la suite des nombres complexes $Z_n = a_n + ib_n$. On appelle A_n son image dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

a) Exprimer $|Z_n|$ en function de n.

b) Calculer la limite de $|Z_n|$.

c) Que peut-on dire de A_n lorsque n tend vers l'infini ?