Collection Puissance

MATHÉMATIQUES

Sciences Générales et Sciences de la vie

Enseignement Secondaire 3ème année

Edition 2013

Al - Ahlia

Auteurs

K. ATTIEH M. EL ASMAR
C. MERHEB N. BADR
H. NASSAR A. MOARBES
G. KARROUM

Editeurs

AL-AHLIA

**Composition,
mise en page et imprimerie**

AL-AHLIA

Distribution

Zouk Mikaël - Haret El Mir - Liban
Tél. 00 961 9 214144 - 5 - Portable : 00 961 71 315959
Imprimerie : 00 961 9 636820 - Fax : 00 961 9 213499 - B.P : 369 Zouk Mikaël
www.ahliame.com - Email : al.ahlia@hotmail.com

Avant-propos

Ce livre traite le nouveau programme de la troisième année de l'enseignement secondaire avec un esprit nouveau : la construction individuelle des notions, la formation de l'élève à la communication et au raisonnement critique, la conservation du lien entre les mathématiques et les problèmes de la vie courante.

Chaque chapitre est formé de plusieurs parties.

- ***Un peu d'histoire.*** *Elle offre à l'élève un autre regard sur les mathématiques, permettant ainsi d'avoir une idée claire sur l'évolution de chaque notion étudiée à travers les siècles.*
- ***Les activités préparatoires.*** *Il est important de ne pas négliger cette partie. Elle est voulue courte et accessible, permettant l'introduction d'une notion nouvelle ou parfois une partie du cours.*
- ***Le cours.*** *Il est voulu clair simple et concis, respectant ainsi le nouveau programme. Certains résultats essentiels sont parfois mis en relief, d'une façon ou d'une autre, pour permettre à l'élève de s'y référer.*
- ***Les exercices et problèmes.*** *Nous avons proposé un bon nombre d'exercices, choisis en fonction de leur intérêt formateur, et présentés en* ***deux rubriques.***
  – ***Pour tester les connaissances.*** *Cette partie comporte les exercices les plus accessibles, permettant de vérifier si l'élève a possédé les acquis minimaux.*
  – ***Pour chercher.*** *Elle comporte des exercices qui demandent un effort supplémentaire de réflexion.*

Il est à noter qu'un bon nombre de problèmes a été choisi de la vie courante, étudiant des situations réelles, vécues, familières et non étrangères à l'élève. Ceci est fait dans un but bien déterminé : celui de consolider le lien étroit existant entre la vie quotidienne et les mathématiques.

Nous tenons à formuler deux souhaits. Le premier est de respecter le temps prévu pour chaque chapitre et qui figure dans la table des matières. Le second est d'utiliser et de profiter au maximum de la calculatrice, surtout que ceci est exigé par le nouveau programme.

Nous espérons que ce travail sera utile aux élèves de la 3ème année secondaire et contribuera à améliorer le niveau de l'enseignement des mathématiques.

Nous serons heureux et reconnaissants de recueillir toute suggestion, critique ou conseil.

Les auteurs

TABLE DES MATIÈRES

1 FONCTIONS : LIMITES , CONTINUITÉ , DÉRIVATION , ÉTUDE

Un peu d'histoire

La notion de ***fonction*** *fut dégagée par* ***Leibniz*** *et* ***les frères Bernoulli,*** *à la fin du* ***XVII^e siècle****.* ***C'est l'élève de Jean Bernoulli****, le mathématicien suisse,* ***L. Euler,*** *géant du XVII^e siècle, qui écrivit le premier traité d'analyse (1748) fondé sur la notion de fonctions. Il définit une* ***fonction*** *d'une quantité variable comme* ***«une expression composée de cette quantité variable et de nombres»;*** *il indique des procédés de constitution de cette expression pour des fonctions polynômes et donne une classification des diverses fonctions déjà connues.*
Lors du développement de l'analyse aux XVII^e et XVIII^e siècles, *le concept* ***«limites de fonctions»*** *a été traité et utilisé* ***intuitivement****. Le mérite d'avoir apporté des réponses satisfaisantes à de nombreuses questions sur les limites, revient à* ***Cauchy (1789-1857)****, le rénovateur de l'analyse mathématique, qui a introduit la rigueur de l'étude des fonctions élémentaires. Une formulation correcte (avec laquelle on peut travailler) de la phrase* ***«f(x) se rapproche de 3 quand x se rapproche de 0»*** *a été historiquement difficile et longue à obtenir, au XIX^e siècle notamment, par le mathématicien allemand* ***Weierstrass (1815-1897)****, qui développa considérablement les théories des fonctions analytiques.*
L'invention des ***dérivées*** *marque un moment très important de l'histoire des mathématiques : cette notion s'est révélée être* ***l'instrument de base*** *de la théorie des fonctions. Due à* ***Leibniz (1646-1716)*** *et* ***Newton (1642-1727)****, elle a été précédée de nombreux* ***tâtonnements (travaux de Fermat, Pascal, Wallis, Huygens ...)*** *dont ces deux savants ont su tirer les conséquences profondes. Les suites malencontreuses de cette affaire se firent sentir jusqu'à la fin du XVIII^e siècle, époque à laquelle deux générations extrêmement brillantes d'analystes se succédèrent :* ***Euler (1707-1783) , Lagrange (1736-1813)*** *à qui l'on doit* ***la notation f' .***

PLAN DU CHAPITRE

COURS

1. Limites
2. Continuité
3. Composée de deux fonctions
4. Dérivées
5. Applications aux dérivées
6. Asymptotes
7. Directions asymptotiques
8. Tableau récapitulatif
9. Plan d'étude d'une fonction numérique

EXERCICES ET PROBLÈMES

«Dans la vie , rien ne se résout , tout continue ...»

A. Gide

1 LIMITES

1° Lorsqu'une fonction admet une limite , cette **limite** est **unique** .

2° Les propriétés présentées , dans le tableau ci-dessous , permettent de connaître les limites des fonctions « $f+g$ » , « $f \times g$ » , « $\frac{f}{g}$ » avec $g \neq 0$ et « f^r » avec $r \in \mathbb{Q}^{+*}$, connaissant celle de f et celle de g .

ℓ et ℓ' sont deux réels .

La lettre « a » désigne soit un nombre réel , soit l'un des symboles : $+\infty$, $-\infty$.

Les points d'interrogation (?) signalent les cas où il n'y a pas de conclusion immédiate ; on dit qu'il s'agit de **formes indéterminées** ; on les calcule directement , en levant l'indétermination , si c'est possible et si leur limite existe . Dans les autres cas , les résultats que nous admettrons sont intuitifs et à retenir .

$\lim\limits_a f$	$\lim\limits_a g$	$\lim\limits_a (f+g)$	$\lim\limits_a (f \times g)$	$\lim\limits_a \frac{f}{g}$	$\lim\limits_a f^r$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$	$\frac{\ell}{\ell'}$ $(\ell' \neq 0)$	ℓ^r
$\ell \neq 0$	0	ℓ	0	∞ (1)	ℓ^r
0	0	0	0	?	0
$\ell \neq 0$	∞	∞ (1)	∞ (1)	0	ℓ^r
∞	$\ell' \neq 0$	∞ (1)	∞ (1)	∞ (1)	$+\infty$ (2)
0	∞	∞ (1)	?	0	0
∞	0	∞ (1)	?	∞ (1)	$+\infty$ (2)
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	?	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	?	

(1) : On applique la règle des signes pour trouver si c'est $+\infty$ ou $-\infty$.

(2) : On suppose que $\lim\limits_a f = +\infty$ (le cas $-\infty$ ne se pose pas) .

3° Si les fonctions f , g et h sont telles que $\boldsymbol{f < g < h}$ **et si** $\boldsymbol{\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} h}$, alors $\boldsymbol{\lim\limits_{a} g = \lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} h}$ (théorème des gendarmes) .

EXEMPLE

Soit à déterminer la limite de $\boldsymbol{\dfrac{\sin x}{x+1}}$ **, lorsque** $\boldsymbol{x}$ **tend vers** $\boldsymbol{+\infty}$ **.**

Pour tout réel $x > 0$, on a : $\dfrac{-1}{x+1} \leqslant \dfrac{\sin x}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{x+1}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x+1} = 0$.

4° Si $f > 0$ et si $\ell = \lim\limits_{a} f$, alors $\ell \geqslant 0$.

5° Si $f < 0$ et si $\ell = \lim\limits_{a} f$, alors $\ell \leqslant 0$.

6° Une fonction **polynôme** se comporte **à l'infini** comme son terme **de plus haut degré .**

EXEMPLES

$\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - 3x + 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2) = +\infty$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^3 - 4x^2 + 1) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^3) = +\infty$.

7° Une fonction **rationnelle** se comporte **à l'infini** comme **le rapport de ses deux termes de plus haut degré .**

EXEMPLES

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x+3}{x^2+4x+5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x} = 0 \quad (0^+)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+4x+5}{5x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{5x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{5} = -\infty$.

2 CONTINUITÉ

1° Définitions

a) Continuité en un point

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Une fonction numérique f **définie sur un intervalle contenant le réel a, est dite continue en a**, si, et seulement si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, on dit que f est continue à droite en a.

Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, on dit que f est continue à gauche en a.

La continuité de f en a exige la continuité de f à droite en a et la continuité de f à gauche en a :
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

EXEMPLE

Soit à étudier la continuité en 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

f est définie en 0 et $f(0) = 0^2 + 0 - 1 = -1$.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + x - 1) = -1 = f(0)$; f est donc continue à droite en 0.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = -1 = f(0)$; f est donc continue à gauche en 0.

Par suite f est continue en 0.

Remarque

Si f et g sont deux fonctions **continues en x_0**, il en est **de même** de : $f + g$, $f \times g$, $\dfrac{f}{g}$, f^r, chaque fois que ces fonctions sont définies en x_0.

b) Continuité sur un intervalle

Une **fonction** numérique ***f*** est **continue sur** un intervalle ***I*** si elle est **continue en tout point de *I* .**

Dans le cas où ***I* = [*a* ; *b*]** , la continuité de *f* sur *I* exige la **continuité à droite en *a* , à gauche en *b* et en tout point d'abscisse x_0 telle que $a < x_0 < b$.**

On admet que :

les fonctions polynômes, rationnelles, irrationnelles, trigonométriques, leurs sommes , leurs produits et leurs quotients sont continues sur tout intervalle *I* contenu dans leur ensemble de définition

EXEMPLES

1. Soit à étudier , sur $\mathbb{R}$, la continuité de la fonction *f* définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{pour } x \geqslant 0 \\ 1 - x & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

• Si $x \geqslant 0$, $f(x) = x + 2$; *f* est une fonction polynôme , elle est continue sur $\mathbb{R}$ et , en particulier , sur $\mathbb{R}^+$.

• On démontre de même que *f* est continue sur $\mathbb{R}^{-*}$.

• Étudions la continuité de *f* en 0 :

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (1 - x) = 1 \neq f(0)$; alors *f* n'est pas continue à gauche en 0 .

Par suite , *f* n'est pas continue en 0 .

Il en résulte que *f* n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit à étudier la continuité de la fonction $f\,.\,g$, sachant que les fonctions *f* et *g* sont définies respectivement par $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

f est une fonction polynôme , elle est continue sur $\mathbb{R}$.

g est continue sur son ensemble de définition qui est $\mathbb{R}$ (quotient de deux fonctions continues) .

Par suite , la fonction produit $f\,.\,g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2° Prolongement par continuité

f est une fonction numérique **continue** en tout point de $I = [a\,;\,x_0[\; \cup \;]x_0\,;\,b]$ et **la limite de *f* , lorsque *x* tend vers x_0 , existe et elle est finie :**

$\lim\limits_{x_0^+} f = \lim\limits_{x_0^-} f = \ell$ (limite finie).

On appelle prolongement par continuité de *f* en x_0 , la fonction *g* définie par :

$$\begin{cases} g(x_0) = \ell \\ g(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \text{ de } I\,,\ x \neq x_0 \end{cases}$$

EXEMPLE

La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ est continue sur

$]-\infty , 1[\cup]1 ,+\infty[$. Soit à montrer qu'elle admet un prolongement par continuité en 1 .

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x-2) = -1$ (limite finie).

Par suite , f admet la fonction g définie par :

$\begin{cases} g(1) = -1 \\ g(x) = f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \end{cases}$ pour tout $x \neq 1$ comme prolongement par continuité au point d'abscisse 1 .

Notons que g est continue en 1 .

3° Propriétés des fonctions continues

a) Image d'un intervalle

Soit f une fonction de x définie sur un intervalle I . L'image de I par f , notée $f(I)$, est l'ensemble de tous les réels $f(x)$ avec $x \in I$.

Conformément au programme , nous admettons les théorèmes figurant dans ce paragraphe .

Théorème 1

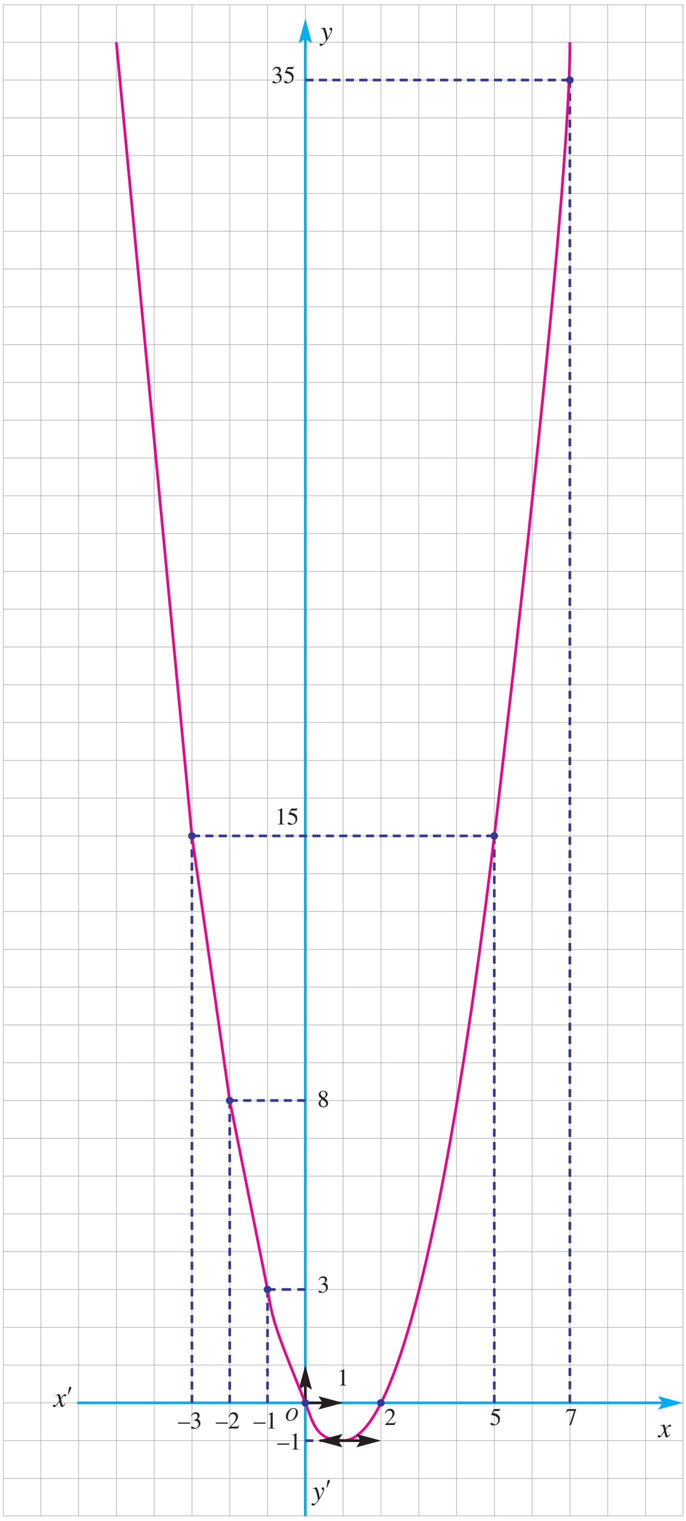
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Soit I un intervalle , fermé ou non , borné ou non , et f une fonction numérique **continue sur I** . Le théorème ci-dessus permet d'affirmer que **$f(I)$ est un intervalle .**

Si I est ouvert ou semi-ouvert , $f(I)$ peut-être ouvert , semi-ouvert , ou fermé .

EXEMPLE

Soit (C) la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x$, qui est continue sur $\mathbb{R}$ (étant une fonction polynôme) .



On vérifie que :

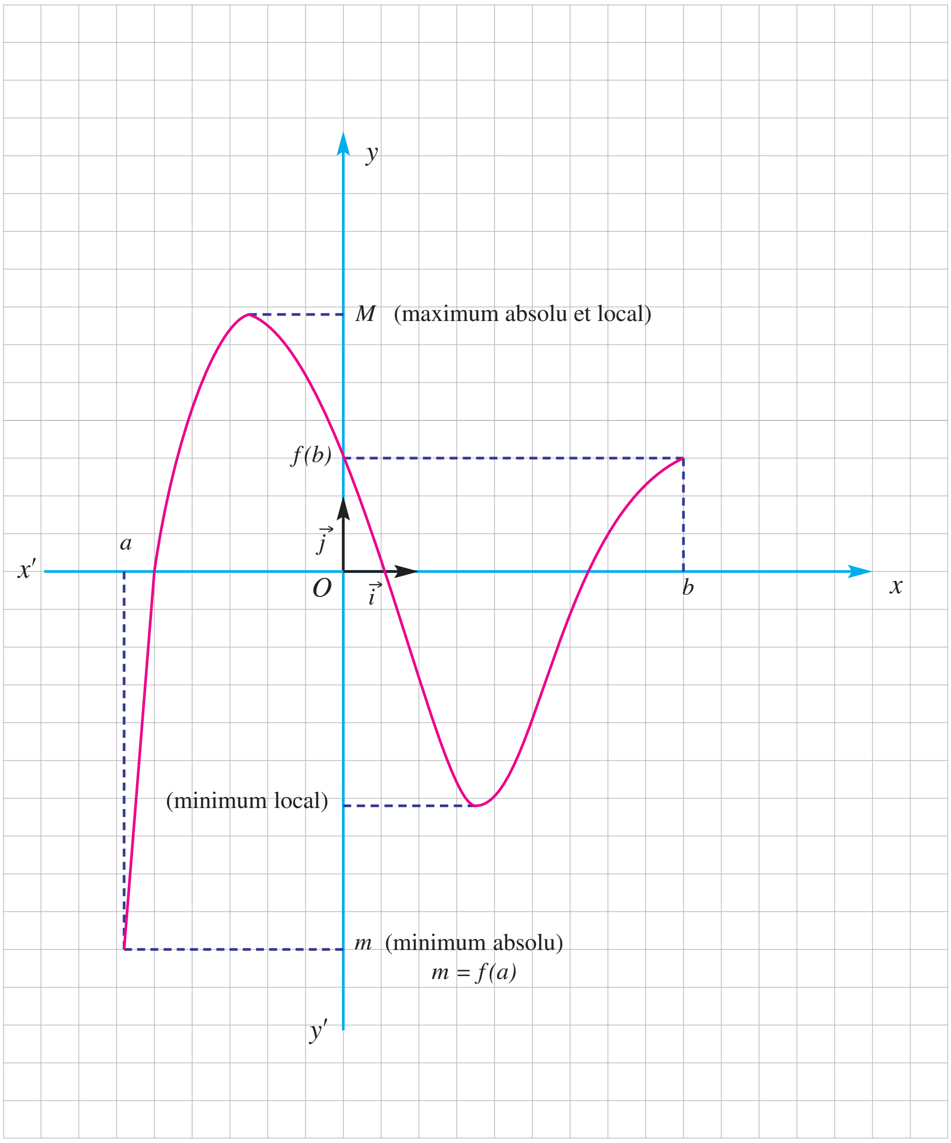
- si $I = [2\ ;\ 5[$, alors $f(I) = [0\ ;\ 15[$,
- si $I = [-3\ ;\ 0[$, alors $f(I) =]0\ ;\ 15]$,
- si $I =]-1\ ;\ 2[$, alors $f(I) = [-1\ ;\ 3[$,
- si $I =]0\ ;\ 7]$, alors $f(I) = [-1\ ;\ 35]$,
- si $I =]-2;+\infty[$, alors $f(I) = [-1;+\infty[$.

Théorème 2

L'image d'un segment (intervalle fermé) par une fonction continue est un segment

Le théorème 2 est plus précis que le théorème 1 : **si *I* est fermé , *f(I)* est fermé .**

Si ***f*** est **continue** sur **[*a* , *b*]** , alors ***f(I)* = [*m* , *M*]** , où ***m*** et ***M*** sont , respectivement , le **minimum absolu** et le **maximum absolu** de *f(x)* pour *x* élément de *I* (voir figure) : **pour tout *x* de *I* , $m \leqslant f(x) \leqslant M$.**



Dans ce cas , on a toujours : **[*f(a)* , *f(b)*] ⊂ *f(I)*** ou **[*f(b)* , *f(a)*] ⊂ *f(I)*** . D'où le **théorème 3 ,** connu sous le nom de **«théorème des valeurs intermédiaires»** :

si *f* est continue sur [*a* , *b*] , alors *f* prend , au moins une fois , toute valeur de l'intervalle [*f(a)* , *f(b)*] ⊂ *f(I)* ou [*f(b)* , *f(a)*] ⊂ *f(I)*

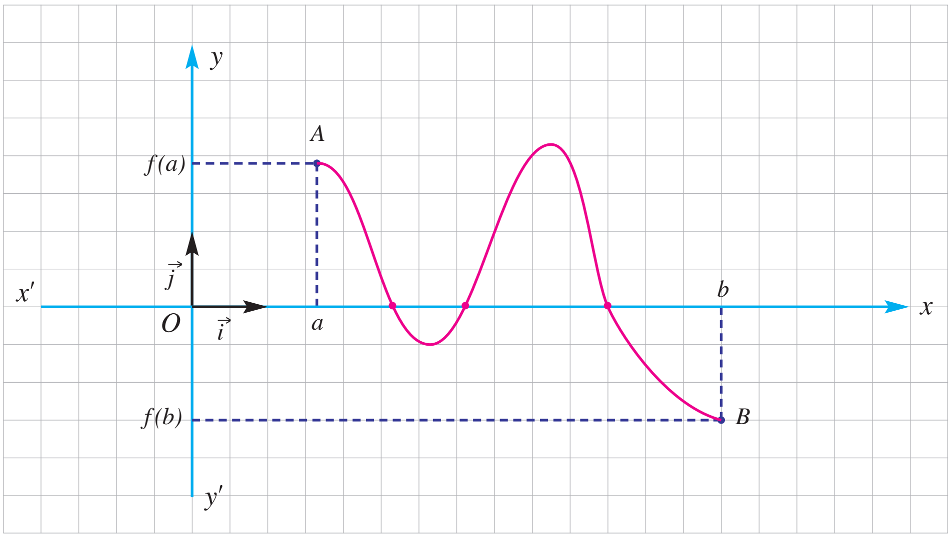
En particulier , si *f(a).f(b)* < 0 , alors l'équation *f(x)* = 0 admet , au moins , une racine *c* appartenant à l'intervalle]*a* , *b*[.

Interprétation graphique

Soit *(C)* la courbe représentative de *f* .

Comme $f(a).f(b) < 0$, alors $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires et les points représentatifs $A\left[a\ ,f(a)\right]$ et $B\left[b\ ,f(b)\right]$ sont situés de part et d'autre de l'axe des x . La courbe *(C)* , en allant de A à B sans coupure (*f* étant continue) doit nécessairement couper l'axe des x au moins une fois entre a et b.

En ces points , la fonction s'annule .



EXEMPLE

La fonction $f : x \mapsto x^4 - 3x^2 + 5x - 6$, est continue sur [1 ; 2] (étant une fonction polynôme continue sur ℝ) avec $f(1) = -3$ et $f(2) = 8$.

• Comme $f(1).f(2) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet , au moins , une solution réelle comprise entre 1 et 2 .

• Plus généralement : si $-3 \leqslant \lambda \leqslant 8$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet , au moins , une solution réelle comprise entre 1 et 2 .

Remarque

L'intervalle I est fermé .

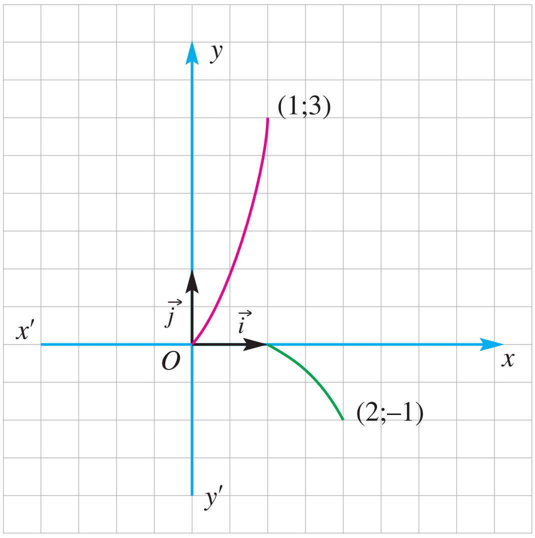
Si f est continue sur I , alors $f(I)$ est fermé . Mais , si $f(I)$ est fermé , il n'est pas nécessaire que f soit continue sur I .

Soit , par exemple , la fonction f définie sur $I = [0\ ;\ 2]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \in [0\,;1] \\ -(x-1)^2 & \text{si } x \in\ ]1\,;2] \end{cases}$$

On a $f(I) = [-1\ ;\ 3]$, intervalle fermé .

Cependant f n'est pas continue en 1 qui est un élément de $[0\ ;\ 2]$.



3 COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS

1° Définition

Soit f et g deux fonctions définies, respectivement, sur les deux intervalles I et J .

On appelle composée de f par g , la fonction gof (lire : g rond f)

définie par $(g \circ f)(x) = g\,[f(x)]$.

Si $f(I) \subset J$, alors $D_{gof} = I$

Si $f(I) \not\subset J$, alors $D_{gof} \subset I$

Remarques

• La fonction $f \circ g$ est définie par $(f \circ g)(x) = f\,[g(x)]$. Si $g(J) \subset I$, alors $D_{f \circ g} = J$, sinon, $D_{fog} \subset J$.

• En général , $f \circ g \neq\ g \circ f$.

EXEMPLES

1. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = 3x + 2$.

• $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ et la composée de f par g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right] = g(2x - 1) = 3(2x - 1) + 2 = 6x - 1$.

• $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ et la composée de g par f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$(f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right] = f(3x + 2) = 2(3x + 2) - 1 = 6x + 3$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 1$.

• $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}$ et la composée de f par g est définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right] = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + 1$.

• $g(\mathbb{R}) \not\subset \mathbb{R}^+$ ($-2 \in \mathbb{R}$ et $g(-2) = -3 \notin \mathbb{R}^+$) . Ainsi la composée de g par f , $f \circ g$ ne peut pas être définie sur $D_g = \mathbb{R}$.

$g(x) = 2x + 1$ doit être un élément de $D_f = \mathbb{R}^+$; alors $2x + 1 \geqslant 0$,

soit $x \geqslant \dfrac{-1}{2}$.

Elle est alors définie sur $\left[\dfrac{-1}{2} ; +\infty\right[\subset \mathbb{R}$ par :

$(f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right] = f(2x + 1) = \sqrt{2x + 1}$.

2° Continuité

Si f **est continue en** x_0 **et** g **est continue en** $f(x_0)$, alors leur composée $g \circ f$ est **continue en** x_0 **.**

On admet que :

si f est une fonction numérique telle que $\lim\limits_{a} f = \ell$, et si g est une fonction numérique continue au point ℓ , alors : $\lim\limits_{a} (g \circ f) = g(\ell)$

Il en résulte que : si f est continue sur I et si g est continue sur $f(I)$, alors $(g \circ f)$ est continue sur I

4 DÉRIVÉES

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x , D_f son ensemble de définition , (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O , \vec{i} , \vec{j})$, a et $a + h$ deux réels appartenant à D_f .

1° Nombre dérivé en *a* , avec *a* réel

• On appelle **nombre dérivé de f à droite en a** , la **limite** du rapport $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, lorsque **x tend vers a^+** (ou bien , en posant $x = a + h$, la limite de $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$, lorsque h tend vers 0^+) , **si cette limite existe et si elle est finie** . Dans ce cas , on écrit :

$$\boxed{f'_d(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

• On appelle **nombre dérivé de f à gauche en a** , la **limite** du rapport $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, lorsque **x tend vers a^-** (ou bien , en posant $x = a + h$, la limite de $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$, lorsque h tend vers 0^-) , **si cette limite existe et si elle est finie** . Dans ce cas , on écrit :

$$\boxed{f'_g(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

• Si $f'_d(a) = f'_g(a)$, on dit que f est **dérivable en a** et que le **nombre dérivé de f au point d'abscisse a** est :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

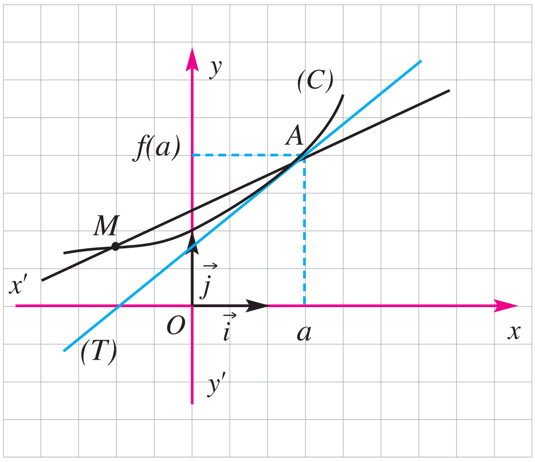
On peut donc écrire : $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a) + \epsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$,

soit : $\boxed{f(a+h) = f(a) + h\, f'(a) + h\, \varepsilon(h)}$

«$f(a) + hf'(a)$» s'appelle approximation affine (ou développement limité du premier ordre) de f au voisinage de a

2° Aspect géométrique du nombre dérivé en a : tangente en $A\left(a,f(a)\right)$

Si f est **dérivable en** a , alors (C) admet en $A\left(a,f(a)\right)$ une **tangente** (T) de **coefficient directeur** $f'(a)$ et d'équation :

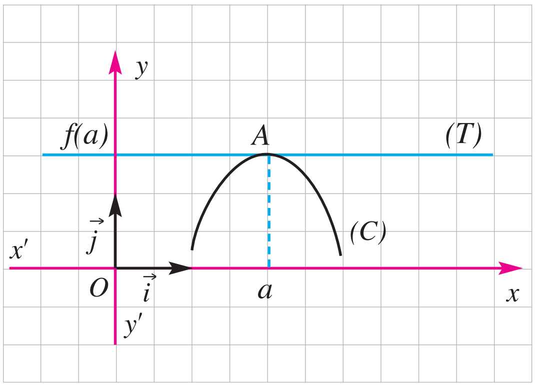


$$\boxed{y - f(a) = f'(a)\,(x - x_A)}$$

Dans le cas particulier où

$f'(a) = 0$ **,** (T) est **parallèle à l'axe des abscisses** .

Son équation est : $y = y_A$.



Remarques

• Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ (ou $-\infty$) , alors f **n'est pas dérivable en** a (car la limite n'est pas finie);

pourtant (C) **admet** en $A\left(a\ ,f(a)\right)$ une **tangente verticale** d'équation $x = x_A$ **.**

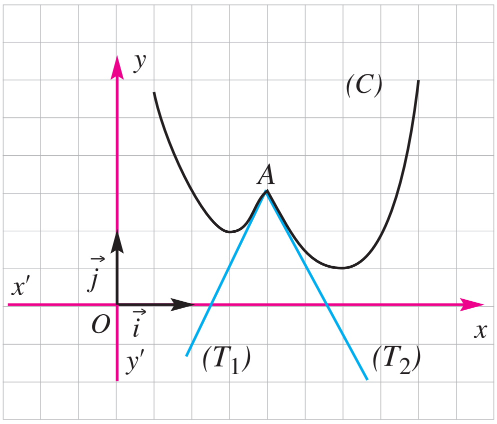
• Si f est **dérivable à droite** en a et à **gauche en** a **avec** $f'_d(a) \neq f'_g(a)$,

alors f n'est pas dérivable en a ; pourtant (C) admet en $A\left(a\ ,f(a)\right)$ deux demi-tangentes dont les supports ont pour équations :

$y - f(a) = f'_d(a)\,(x - x_A)$ et

$y - f(a) = f'_g(a)\,(x - x_A)$.

Dans ce cas , on dit que **le point** A **est un point anguleux .**



Exemples

1. Soit à étudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie par :
$f(x) = \sqrt{|x|}$ et à déterminer l'équation de la tangente à sa courbe représentative (C) en ce point .

$D_f = \mathbb{R}$ et $f(0) = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, limite qui n'est pas finie .

f n'est pas donc dérivable à droite en 0 ; pourtant sa courbe représentative (C) admet à droite en 0 , une demi-tangente verticale d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) .

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{-x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-1}{\sqrt{-x}} = -\infty$, limite qui n'est pas finie .

f n'est donc pas dérivable à gauche en 0 ; pourtant sa courbe représentative (C) admet à gauche en 0 , une demi-tangente verticale d'équation $x = 0$.

Les deux demi-tangentes en 0 , sont l'une dans le prolongement de l'autre .

2. Soit à étudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} .$$

$f(0)=0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$, limite qui n'existe pas .

f n'est donc pas dérivable en 0 .

3° Aspect cinématique du nombre dérivé

Si $t \mapsto f(t)$ est la **loi horaire du mouvement** d'un **point mobile M** , alors la **vitesse moyenne de M** sur l'intervalle $[t_0 , t]$ est égale à $\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$.

La **vitesse instantanée de M** en t_0 est donnée par $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$.

4° Dérivée sur un intervalle - Fonction dérivée

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I .

• Lorsque l'intervalle I est **ouvert** , on dit que f est **dérivable sur I** si et seulement si f est **dérivable en tout point de I .**

• Lorsque l'intervalle I est **semi-ouvert à droite** ($[a , b[$ ou $[a , +\infty[$) , on dit que f est **dérivable sur I** si et seulement si f est **dérivable en tout point de I ouvert et à droite en a .**

• Lorsque l'intervalle I est **semi-ouvert à gauche** ($]-\infty , b]$ ou $]a , b]$) , on dit que f est **dérivable sur I** si et seulement si f est **dérivable en tout point de I ouvert et à gauche en b .**

• Lorsque l'intervalle $I = [a , b]$, on dit que f est **dérivable sur I** si et seulement si f est **dérivable à droite en a , à gauche en b et sur $]a , b[$.**

• Si f est **dérivable sur** l'intervalle **ouvert I** , alors **elle fait correspondre à tout point de I la dérivée en ce point ,** ce qui définit une **nouvelle fonction** sur I , notée f' et appelée **fonction dérivée première** (ou , tout simplement , **fonction dérivée) de f sur I .**

• On admet que :

les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$; les fonctions rationnelles et trigonométriques sont dérivables sur tout intervalle de leur domaine de définition ; les fonctions irrationnelles du type $x \mapsto \sqrt{P(x)}$, où $P(x)$ est une fonction polynôme , sont dérivables sur tout intervalle de leur domaine de définition , sauf au point où elles s'annulent .

• On rappelle que :

si une fonction f est dérivable en un point a , alors f est continue en a .

Plus généralement , si f est dérivable sur un intervalle I , alors f est continue sur I .

5° Dérivée de la fonction composée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , dérivable en t_0 de I , et g une fonction définie sur un intervalle J , dérivable en $x_0 = f(t_0)$ de J .

On admet alors que :

la fonction composée de f par g , gof , est dérivable en t_0 et

$$(gof)'(t_0) = f'(t_0).g'\left[f(t_0)\right]$$

Si (gof) est dérivable pour tout t_0 de I , alors : $\boxed{(gof)' = f'.(g'of)}$

EXEMPLE

Soit u une fonction de la variable réelle x , dérivable sur un intervalle I .

Comme la fonction « sinus » est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction composée de u par sinus , notée « sin u », est dérivable sur I et sa dérivée est définie pour tout x de I par : $u'(x) . \sin'[u(x)] = u'(x).\cos[u(x)]$.

D'où : **$(\sin u)' = u'\cos u$.**

6° Tableau groupant les principales formules de dérivation

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , alors les fonctions :
(λu) avec λ réel , $(u+v)$, $(u-v)$, $(u.v)$, $\left(\frac{u}{v}\right)$ avec $v \neq 0$, $\sqrt{u}$ avec $u > 0$ et $(u)^n$ avec n un rationnel , sont dérivables sur I .
Le tableau suivant groupe les principales formules de dérivation (u et v sont deux fonctions de x , dérivables sur I , k et a deux constantes et n un rationnel) :

Fonction	Fonction dérivée
$x \mapsto k$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto n.x^{n-1}$
$x \mapsto a.x^n$	$x \mapsto n.a.x^{n-1}$
$a.u$	$a.u'$
$u + v$	$u' + v'$
$u.v$	$u'.v + u.v'$
$\frac{u}{v}$ avec $v \neq 0$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\frac{1}{u}$ avec $u \neq 0$	$\frac{-u'}{u^2}$
$(u)^n$	$n.(u)^{n-1}.u'$
$(au)^n$	$n.a(u)^{n-1}.u'$
$x \mapsto (\sqrt{x})$ avec $x > 0$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(\sqrt{u})$ avec $u > 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(gof)'$	$f'.(g'of)$

7° Dérivées d'ordre supérieur

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x , définie sur un intervalle I .

• Si f est **dérivable** sur I et si sa fonction dérivée f' est aussi **dérivable** sur I , alors la **dérivée de f'** , notée f'' , est appelée **dérivée seconde de f** sur I .

• On définit , par récurrence , la **dérivée d'ordre n de f** , notée $f^{(n)}$, sur I , par $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, pour tout entier naturel , $n > 1$.

Ainsi : $f' = f^{(1)}$; $(f')' = f'' = f^{(2)}$; $(f^{(2)})' = f^{(3)}$; ... ; $(f^{(n-1)})' = f^{(n)}$.

Exemples

1. Si la fonction f est telle que $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f^{(3)}(x) = 6$ et $f^{(4)}(x) = 0 = f^{(5)}(x) = f^{(6)}(x) = ... = f^{(n)}(x)$.

2. Soit à démontrer , par récurrence , que la dérivée d'ordre n de la fonction f définie par $f(x) = \sin x$, est donnée par :

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$$

Désignons par (P_n) la propriété : $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$.

• Vérifions que (P_n) est vraie pour le premier ordre , $n = 1$:

d'une part , si $f(x) = \sin x$, alors $f'(x) = \cos x$;

d'autre part , en remplaçant n par 1 , dans (P_n) , on obtient :

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \sin\left(x + 1 . \frac{\pi}{2}\right) = \cos x .$$

(P_n) est donc vraie pour $n = 1$.

• Supposons que (P_n) est vraie pour l'ordre n , c'est-à-dire :

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n . \frac{\pi}{2}\right) .$$

• Démontrons que (P_n) est vraie pour l'ordre suivant , $n+1$, c'est-à-dire :

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1) . \frac{\pi}{2}\right) .$$

En effet :

$$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]' = \left[\sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x + n.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\left(x + (n + 1) . \frac{\pi}{2}\right) .$$

Par suite , $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n . \frac{\pi}{2}\right)$.

Remarque

Parfois , surtout en Physique , on adopte la notation suivante , appelée «notation différentielle»: $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$ (dérivée première de f par rapport à x) ,

$f''(x) = \dfrac{d^2f}{dx^2}$ (dérivée seconde de f par rapport à x) , $f^{(3)}(x) = \dfrac{d^3f}{dx^3}$ (dérivée d'ordre 3 de f par rapport à x) , ... , $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^nf}{dx^n}$ (dérivée $n^{\text{ième}}$ de f par rapport à x) .

Ainsi :

• si la fonction f est telle que $f(x) = x + x^2 + u$ avec u une constante , alors $f'(x) = \dfrac{df}{dx} = 1 + 2x$ (on a calculé la dérivée de f par rapport à x) ,

• si la fonction g est telle que $g(t) = t^3 + t^2 + 2x$ avec x une constante , alors $g'(t) = \dfrac{dg}{dt} = 3t^2 + 2t$ (on a calculé la dérivée de g par rapport à t) ,

• si la fonction f est telle que $y = f(x) = x$, alors $\dfrac{dy}{dx} = f'(x) = y' = 1$,

• si la fonction g est telle que $x = g(y) = y$, alors $\dfrac{dx}{dy} = g'(y) = x' = 1$.

5 APPLICATIONS AUX DÉRIVÉES

1° Règle de l'Hôpital

Soit f et g deux fonctions numériques , continues et dérivables sur un intervalle I , s'annulant en un point a $\left(f(a) = g(a) = 0\right)$ de I et telles que : pour tout x de $I - \{a\}$, $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$.

On admet la propriété suivante, connue sous le nom de **«Règle de l'Hôpital»** :

si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe , alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe et $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Remarques

• On pourrait utiliser la règle de l'Hôpital pour calculer les limites , dans le cas des formes indéterminées $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$.

• Si , après avoir appliqué la règle de l'Hôpital , on aboutit toujours à l'une des formes indéterminées $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$, alors on pourrait l'appliquer successivement .

EXEMPLES

1. Soit à calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$.

Les fonctions : $x \mapsto \cos x - 1$ et $x \mapsto x^2$ vérifient les hypothèses de **la règle de l'Hôpital** sur $\mathbb{R}$, avec $a = 0$. D'où :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}, \text{ car } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

2. Soit à calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$.

Si $x \to +\infty$, $\sqrt{1+x^2} \to +\infty$, $x^2 \to +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$ aboutit à la forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$.

D'après la règle de l'Hôpital , on a :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} = 0 \qquad (0^+)$$

3. Soit à calculer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^2 - 2x + 1}$.

Si $x \to 1$, $x^3 + x^2 - 5x + 3 \to 0$, $x^2 - 2x + 1 \to 0$ et $\dfrac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^2 - 2x + 1}$ aboutit à la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.

D'après la règle de l'Hôpital , on a :

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^2 - 2x + 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 + 2x - 5}{2x - 2}$ qui aboutit aussi à la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. Alors :

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 2x - 5}{2x - 2} = \lim_{x\to 1} \frac{6x + 2}{2} = 4 .$$

2° Sens de variation d'une fonction

On sait que :

le sens de variation d'une fonction numérique dérivable est lié au signe de sa fonction dérivée .

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction **définie** et **dérivable** sur un intervalle $\boldsymbol{I}$.

• Pour tout x de I , $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ si , et seulement si , $\boldsymbol{f}$ est **constante** sur I .

• Pour tout x de I , $\boldsymbol{f'(x) \geqslant 0}$ si , et seulement si , $\boldsymbol{f}$ est **croissante** sur I .

• Pour tout x de I , $\boldsymbol{f'(x) \leqslant 0}$ si , et seulement si , $\boldsymbol{f}$ est **décroissante** sur I .

• **Si** pour tout x de I , $\boldsymbol{f'(x) < 0}$, **alors** $\boldsymbol{f}$ est **strictement décroissante** sur I .

• **Si** pour tout x de I , $\boldsymbol{f'(x) > 0}$, **alors** $\boldsymbol{f}$ est **strictement croissante** sur I .

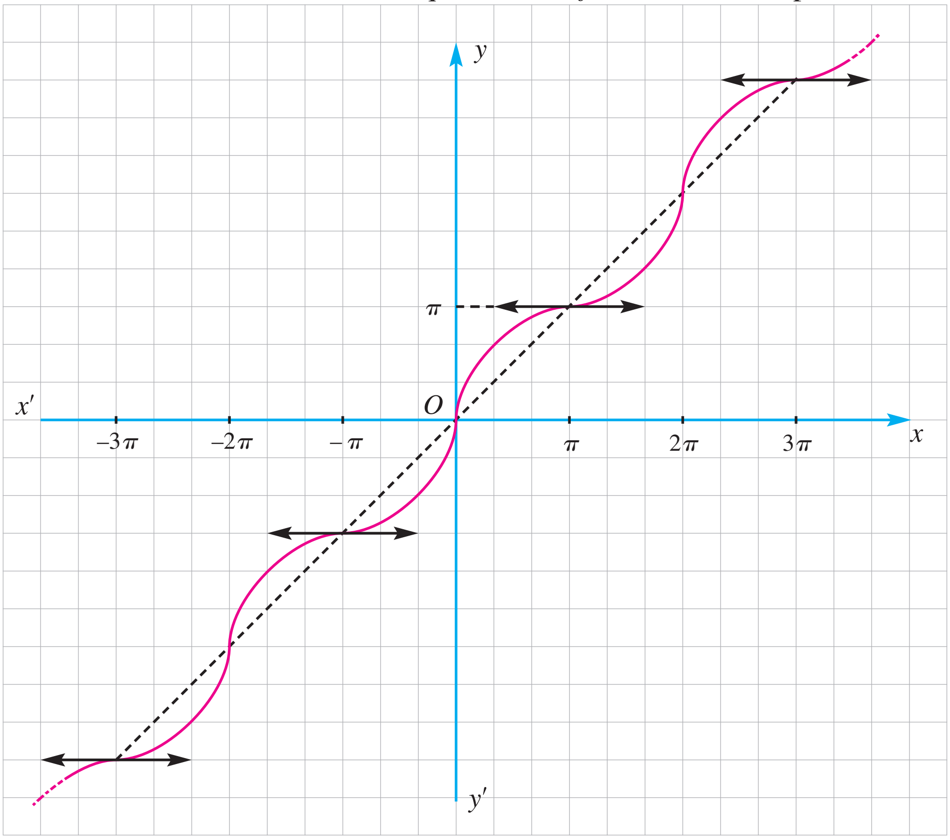
• f est dite **monotone** sur I si, pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'}$ **ne change pas de signe .**

Dans ce cas , $\boldsymbol{f}$ **est croissante sur tout** $\boldsymbol{I}$ **ou bien décroissante sur tout** $\boldsymbol{I}$ **.**

Remarque

Une fonction $\boldsymbol{f}$ **définie sur un intervalle** $\boldsymbol{I}$ **est strictement croissante sur** $\boldsymbol{I}$ **si elle est croissante sur** $\boldsymbol{I}$ **, et si elle n'est constante sur aucun sous-intervalle de** $\boldsymbol{I}$ **non réduit à un point .**

Il en résulte que la dérivée d'une fonction strictement croissante sur I peut s'annuler , à condition que les valeurs annulant cette dérivée ne constituent pas un sous-intervalle de I . C'est le cas , par exemple , de la fonction f telle que $f(x) = x + \sin x$ (voir figure ci-dessous) : f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + \cos x \geqslant 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, cependant f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (f' s'annule sur $\mathbb{R}$, mais les valeurs qui annulent f' ne constituent pas un sous-intervalle de $\mathbb{R}$) .



3° Extrémum (minimum ou maximum) d'une fonction

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée .

• Si f' **s'annule** en un point a de I , **en changeant de signe** , alors $f(a)$ est un **extrémum local** (ou relatif) pour f .

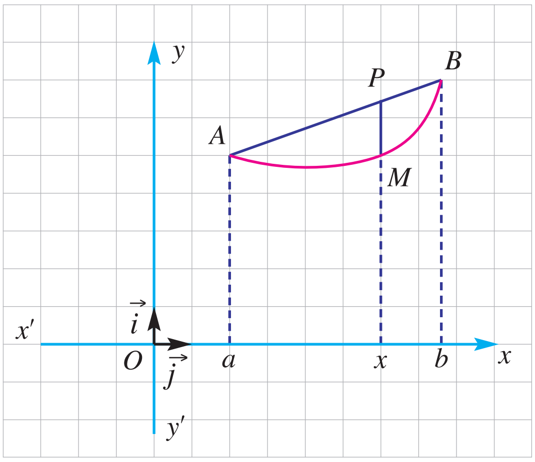
• Si f' **s'annule** en a en **passant du signe positif au signe négatif** , alors $f(a)$ est un **maximum local** (ou relatif) pour f , tandis que si **elle s'annule** en a en **passant du signe négatif au signe positif** , alors $f(a)$ est un **minimum local** (ou relatif) pour f .

4° Dérivée seconde - Concavité

a) Concavité dans un intervalle $[a\ ,\ b]$

f est une fonction continue sur $[a\ ,\ b]$ et deux fois dérivable sur $]a\ ,\ b[$.

A et B sont les points de la courbe (C) de f , d'abscisses respectives a et b . P est un point de $[AB]$ et M un point de (C) d'abscisse commune x .



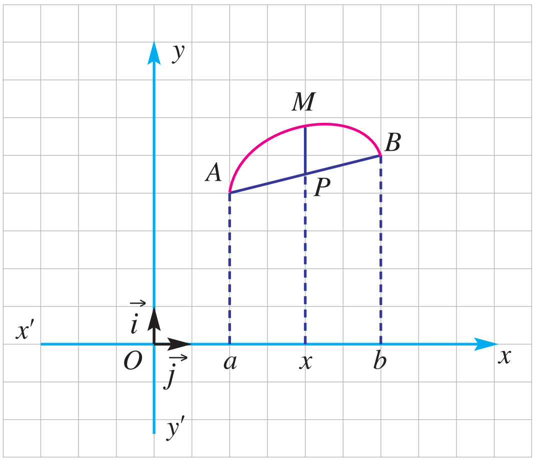
On démontre que :

si $f''(x) > 0$ sur $]a\ ,\ b[$, alors

$\overline{PM} < 0$, et l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de courbe est au-dessous de la droite (AB) . On dit que f est **convexe .** On dit aussi que la courbe **tourne sa concavité vers le haut ou vers les y positives .**

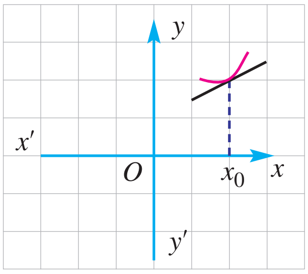
si $f''(x) < 0$ sur $]a\ ,\ b[$, alors $\overline{PM} > 0$, et l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de courbe est au-dessus de la droite (AB) . On dit que f est **concave .**

On dit aussi que la courbe **tourne sa concavité vers le bas ou vers les y négatives .**

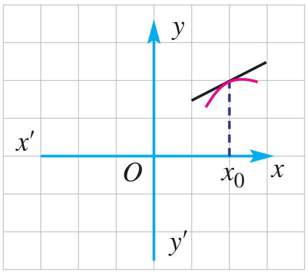


b) Concavité au voisinage d'un point

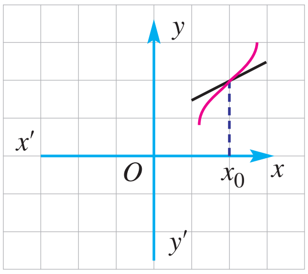
On suppose que la fonction f est deux fois dérivable au voisinage de x_0 .



• Si $f''(x_0) > 0$, alors la courbe tourne sa concavité vers le haut . Cette courbe est au-dessus de sa tangente .



• Si $f''(x_0) < 0$, alors la courbe tourne sa concavité vers le bas . Cette courbe est au-dessous de sa tangente .



• Si $f''(x)$ s'annule au point x_0 puis change de signe , alors la courbe change de concavité . Cette courbe traverse sa tangente . La courbe présente alors , en x_0 , un point dit **point d'inflexion** .

Exemple

La fonction f définie par $f(x) = x^3 + 1$ admet le point I (0 ; 1) comme point d'inflexion .

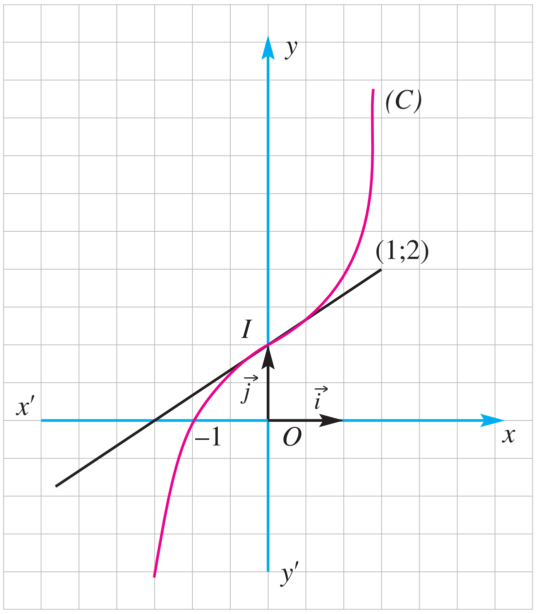
En effet : $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$. $f''(x)$ s'annule pour $x = 0$.

Si $x > 0$, $f''(x) > 0$ et la courbe représentative de f tourne sa concavité vers les y positives .

Si $x < 0$, $f''(x) < 0$ et la courbe représentative de f tourne sa concavité vers les y négatives .

Si $x = 0$, $f(x) = 0$ et I (0 ; 1) est un point d'inflexion de cette courbe (point où la concavité change) .

Au point I (0 ; 1) , la tangente traverse la courbe.



5° Fonction continue et strictement monotone

a) Image d'un intervalle

On admet le théorème suivant :

si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors :
- **$f(I)$ est un intervalle de même nature que I ,**
- **f réalise une bijection de I sur $f(I)$.**

b) Commentaires

• « ***f(I)*** est un intervalle **de même nature que *I*** » signifie que :

• si I est un intervalle **ouvert** , $f(I)$ est un intervalle **ouvert** ,

• si I est un intervalle **semi-ouvert** , $f(I)$ est un intervalle **semi-ouvert** ,

• si I est un intervalle **fermé** , $f(I)$ est un intervalle **fermé** .

De plus :

• si f est continue et strictement **croissante** sur $I = [a , b]$, $f(I) = [f(a) , f(b)]$,

• si f est continue et strictement **décroissante** sur $I = [a , b]$, $f(I) = [f(b) , f(a)]$,

• si f est continue et strictement **croissante** sur $I = [a , b[$, $f(I) = [f(a) , \ell[$, où $\ell = \lim\limits_{b} f$, **avec b et ℓ finis ou non .**

• « f réalise une **bijection** de I sur $f(I)$ » signifie que : f est une application et tout élément de $f(I)$ admet , par f , **un antécédent et un seul** dans I .

Ainsi : pour tout réel m de $f(I)$, **l'équation « $x \in I$, $f(x) = m$ »** , admet une **solution unique dans I** .

• Le **théorème** ci-dessus **conduit** , sous certaines conditions , à la **résolution approchée d'une équation de type $f(x) = 0$** . Il permet de **justifier l'existence de solutions** , de **localiser** ces **solutions** et d'en **trouver** des **valeurs approchées** .

c) Conséquence

Si f est **continue et strictement monotone sur $[a , b]$** et si $f(a).f(b) \leqslant 0$ **,** alors l'équation **« $f(x) = 0$ » admet une solution et une seule dans $[a , b]$.**

d) Exercices résolus

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x + 2}$ réalise une bijection de l'intervalle $]-2 , +\infty[$ sur un intervalle que l'on déterminera .

• f est définie si $x + 2 \geqslant 0$, soit $x \geqslant -2$. D'où : $D_f = [-2 , +\infty[$.

• f est une fonction irrationnelle de type $x \mapsto \sqrt{ax + b}$. Elle est donc continue sur son domaine de définition D_f et , en particulier , sur $]-2 , +\infty[\subset D_f$, et dérivable sur $]-2 , +\infty[$ (sur son domaine sauf au point -2 où f s'annule) .

• $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$ pour tout x de $]-2\ ,+\infty[$, alors f est strictement croissante sur l'intervalle $]-2\ ,+\infty[$.

Par suite , f est continue et strictement croissante sur $]-2\ ,+\infty[$; f réalise alors une bijection de $]-2\ ,+\infty[$ sur un intervalle de même nature , donné par : $]\lim\limits_{-2^+} f\ ,\ \lim\limits_{+\infty} f[\ = \ ]0\ ,+\infty[$.

2. Déterminer l'image de l'intervalle $]-3\ ,+\infty[$ par la fonction

$f:\ x \mapsto \dfrac{-x}{x+3}$.

• f est une fonction rationnelle ; elle est dérivable sur tout intervalle de son domaine de définition : $D_f =]-\infty\ ,-3[\ \cup\ ]-3\ ,+\infty[$, et en particulier sur $]-3\ ,+\infty[$ qui est un intervalle de D_f .

• Comme f est dérivable sur $]-3\ ,+\infty[$, alors elle est continue sur cet intervalle .

• $f'(x) = \dfrac{-3}{(x+3)^2} < 0$ pour tout x de $]-3\ ,+\infty[$; d'où la stricte monotonie de f sur cet intervalle .

Par suite , f est continue et strictement décroissante sur $]-3\ ,+\infty[$; f réalise alors une bijection de $]-3\ ,+\infty[$ sur un intervalle de même nature , donné par : $\left]\lim\limits_{+\infty} f\ ,\ \lim\limits_{(-3)^+} f\right[= \left]-1\ ,+\infty\right[$.

L'image de $]-3\ ,+\infty[$ par f est donc $]-1\ ,+\infty[$.

3. Montrer que l'équation $x^3 + x - 3 = 0$ admet une solution unique α .

Calculer $f(1)$ et $f(2)$ et localiser α . Montrer que $\alpha \in \left]\dfrac{9}{8}\ ;\ \dfrac{5}{4}\right[$.

Existence de α

f est une fonction polynôme , elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que la courbe représentative (C) de f coupe l'axe des abscisses en un point unique A d'abscisse α et que l'équation $f(x) = x^3 + x - 3 = 0$ admet une unique racine réelle α .

Localisation de α

$f(1) = -1$ et $f(2) = 7$; $f(1) \times (f(2) < 0$. Alors :

$1 < \alpha < 2$. On a ainsi localisé α .

Le tableau de variation de f montre tous les résultats déjà établis .

x	$-\infty$	1	α	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+		+
$f(x)$	$\nearrow$	-1	0	7	$\nearrow$

Meilleures localisations de α

Pour affiner la localisation de α , on pourrait utiliser la méthode suivante , connue sous le nom de « la méthode de dichotomie » .

Si $]a\ ,\ b[$ est la localisation déjà trouvée de α , la localisation suivante qui est plus affine, est obtenue en calculant $f(x_0)$ avec x_0 le milieu de $]a\ ,\ b[$ et en comparant son signe avec ceux de $f(a)$ et de $f(b)$.

On a trouvé : $\alpha \in\ ]1\ ;\ 2[$; le milieu de cet intervalle est $\dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}$.

$f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{27}{8} + \dfrac{3}{2} - 3 = \dfrac{15}{8} > 0$, alors $\alpha \in \left]1\ ;\ \dfrac{3}{2}\right[$ (localisation qui est meilleure que $]1\ ;\ 2[$) .

On peut donc prendre comme valeur approchée de α le milieu $\dfrac{5}{4}$ de $\left]1\ ;\ \dfrac{3}{2}\right[$

avec une erreur inférieure en valeur absolue à $\dfrac{\dfrac{3}{2} - 1}{2} = \dfrac{1}{4}$ ou 0,25 près .

Le milieu de l'intervalle $\left]1\ ;\ \dfrac{3}{2}\right[$ est $\dfrac{5}{4}$. $f\left(\dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{13}{64} > 0$, alors $\alpha \in \left]1\ ;\ \dfrac{5}{4}\right[$

$\left(\text{localisation qui est meilleure que } \left]1\ ;\ \dfrac{3}{2}\right[\right)$.

De même , $\dfrac{9}{8}$ est une valeur approchée de α avec une erreur inférieure en valeur absolue à $\dfrac{1}{8}$ ou

0,125 près .

Le milieu de l'intervalle $\left]1\,;\dfrac{5}{4}\right[$ est $\dfrac{9}{8}$; $f\left(\dfrac{9}{8}\right) = \dfrac{-231}{512} < 0$, alors $\alpha \in \left]\dfrac{9}{8}\,;\dfrac{5}{4}\right[$

$\left(\text{localisation qui est plus affine que } \left]1\ ;\ \dfrac{5}{4}\right[\right)$.

De même $\dfrac{19}{16}$ est une valeur approchée de α avec une erreur inférieure en valeur absolue à $\dfrac{1}{16}$.

On continue de même , si l'on désire déterminer de meilleures localisations de α .

6 ASYMPTOTES

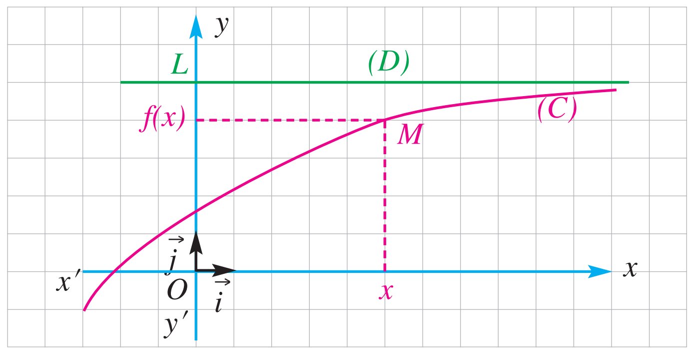
1° Asymptote horizontale

Soit f une fonction numérique et (C) sa courbe représentative , dans un repère orthonormal $(O\ ,\vec{i}\ ,\vec{j}\,)$.

La droite d'équation $y = b$ (b constante) est une asymptote horizontale à (C) » équivaut à « $f(x)$ tend vers b , lorsque x tend vers l'infini

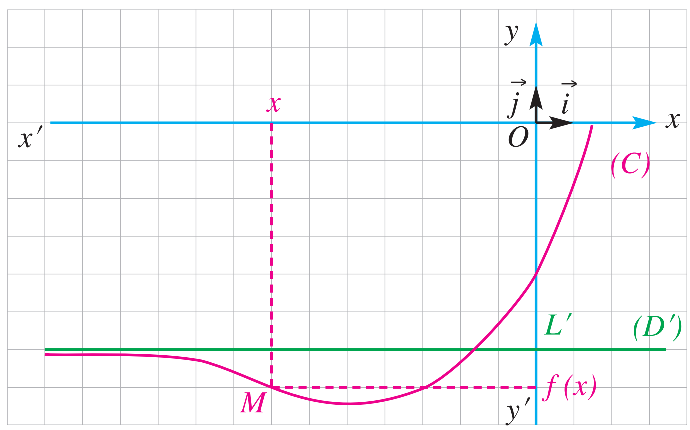
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L\ .$$

La droite (D) d'équation $y = L$ est alors une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L'\ .$$

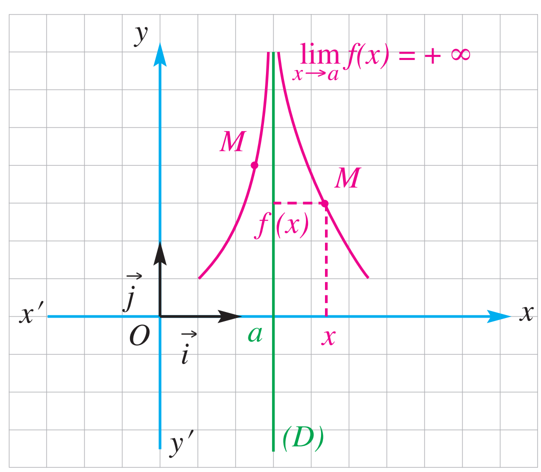
La droite (D') d'équation $y = L'$ est alors une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.

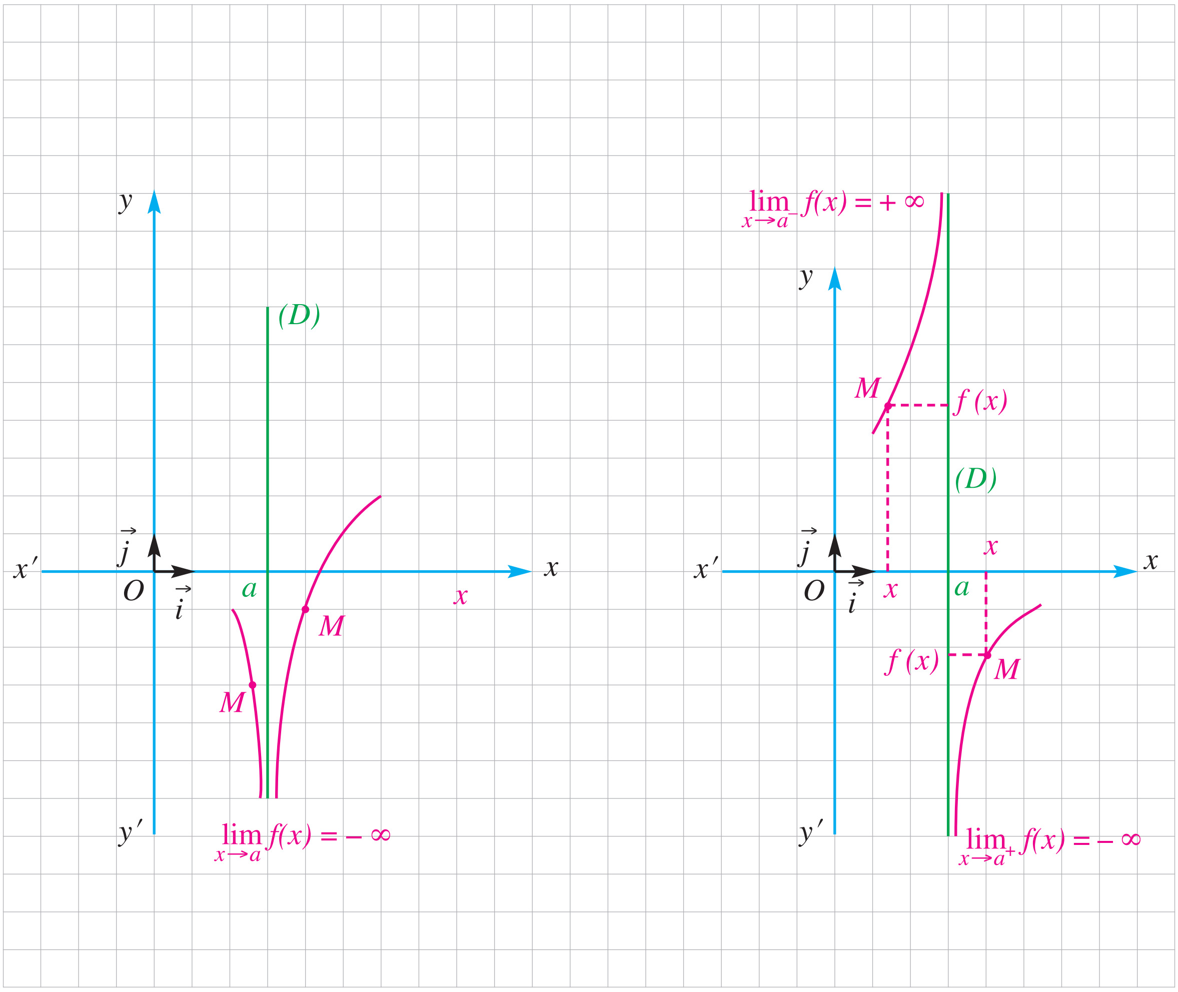


2° Asymptote verticale

Soit f une fonction numérique et (C) sa courbe représentative , dans un repère orthonormal $(O\ ,\vec{i}\ ,\vec{j}\,)$.

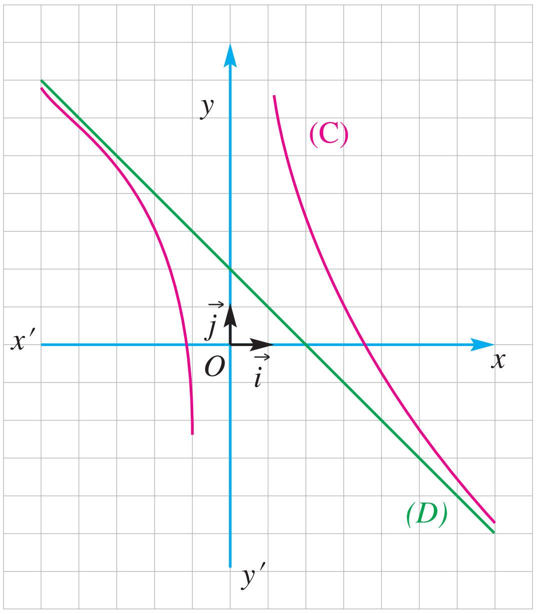
La droite (D) d'équation $x = a$ (a constante) est une asymptote verticale à (C) équivaut à $f(x)$ tend vers l'infini , lorsque x tend vers a





3° Asymptote oblique

Soit f une fonction numérique et (C) sa courbe représentative , dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



La droite *(D)* d'équation $y = ax + b$ (*a* et *b* deux constantes avec *a* non nul) est une asymptote oblique à *(C)* équivaut à

$\left[f(x) - (ax + b)\right]$ tend vers

0 , lorsque *x* tend vers l'infini]

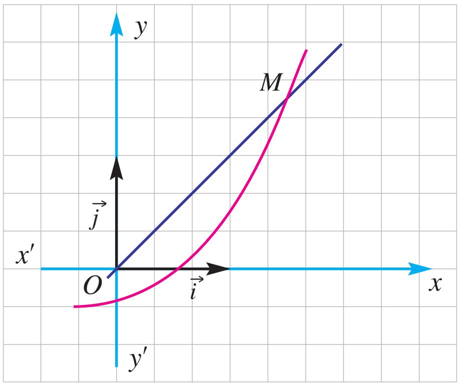
7 DIRECTIONS ASYMPTOTIQUES

Soit f une fonction numérique telle que $f(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini . (C) est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$ et $M\left(x\ ,f(x)\right)$ un point de cette courbe .

Le coefficient directeur de (OM) est $\dfrac{f(x)}{x}$, avec la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ égale à l'infini lorsque x tend vers l'infini .

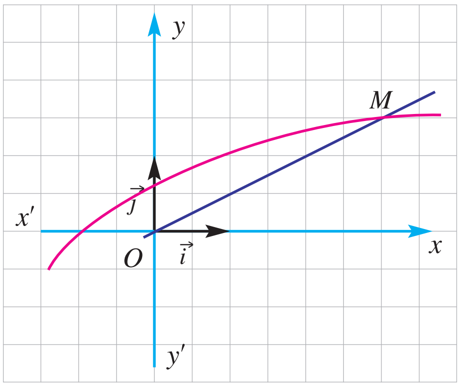
• Lorsque la **limite de** $\boldsymbol{\dfrac{f(x)}{x}}$ est **égale** à **l'infini** ,la droite **(*OM*)** tend à devenir **parallèle à l'axe des ordonnées .**

On dit alors que la courbe ***(C)*** **admet une direction asymptotique verticale .**



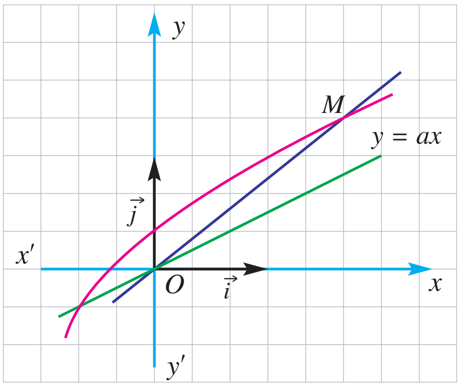
• Lorsque la **limite de** $\boldsymbol{\dfrac{f(x)}{x}}$ est **égale à zéro** , la droite **(*OM*)** tend à devenir **parallèle à l'axe des abscisses .**

On dit alors que la courbe ***(C)*** **admet une direction asymptotique horizontale .**



• Lorsque la **limite de** $\boldsymbol{\dfrac{f(x)}{x}}$ est **égale** à **un réel non nul *a*** et **la limite de [*f(x)* – *ax*] égale l'infini** , la droite (OM) tend à devenir **parallèle à la droite d'équation *y* = *ax* .**

On dit alors que la courbe ***(C)*** **admet une direction asymptotique oblique d'équation *y* = *ax* .**



8. TABLEAU RÉCAPITULATIF

a, b , k sont des réels avec $a \neq 0$ et α **désigne l'un des symboles : $+\infty$ ou $-\infty$.**

<table>
<tr><th></th><th colspan="3">LIMITES</th><th>RESULTAT</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3">$\lim\limits_{x \to k} f(x) = \alpha$
(k^+ ou k^-)</td><td>Asymptote verticale d'équation $x = k$</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = b$</td><td>Asymptote horizontale d'équation $y = b$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3</td><td rowspan="4">$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$
ou $-\infty$</td><td colspan="2">$\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$</td><td>Direction asymptotique verticale</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{x} = 0$</td><td>Direction asymptotique horizontale</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{x} = a$</td><td>$\lim\limits_{x \to \alpha} [f(x) - ax] = b$</td><td>Asymptote oblique d'équation
$y = ax + b$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x \to \alpha} [f(x) - ax] = +\infty$
ou $-\infty$</td><td>Direction Asymptotique oblique d'équation $y = ax$</td></tr>
</table>

9. PLAN D'ÉTUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Pour étudier une fonction numérique f , on doit :

1° déterminer son ensemble de définition (s'il n'est pas donné) et le réduire , éventuellement, par des considérations de symétrie ou de périodicité en un ensemble d'étude E .

2° déterminer les intervalles de E où f est continue , calculer les limites de f aux extrémités ouvertes de ces intervalles puis trouver les branches infinies (asymptotes ou directions asymptotiques) de la courbe représentative de f .

3° déterminer les intervalles de E où f est dérivable , calculer la dérivée de f sur ces intervalles , étudier son signe et dresser le tableau de variation de f .

4° calculer les coordonnées de quelques points particuliers de la courbe représentative de f et tracer cette courbe dans un repère convenable .

Pour trouver des points particuliers de la courbe de la fonction , on pourrait utiliser la calculatrice .

Casio fx-570 ES PLUS

Mode 7 :

• On introduit la fonction .
• On choisit un point de départ et un point d'arrivée .
• On choisit la différence entre deux valeurs consécutives . (par exemple : 1 ou 2 ...)
• La calculatrice montre le tableau des points particuliers .

EXEMPLE

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x - 1}$$

Tape " mode 7 "
(la calculatrice montre " $f(x) =$ ")

Tape $\frac{\square}{\square} \longrightarrow$ ALPHA $X \longrightarrow X^{\square} \longrightarrow 2 \longrightarrow -2 \longrightarrow$ ALPHA X ...

Tape " = "
(la calculatrice montre " Start ? ")

Tape " –5 = "
(la calculatrice montre " End ? ")

Tape " 4 = "
(la calculatrice montre " Step ? ")

Tape " 1 = "
La calculatrice donne

X	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-6.333	-5.4	-4.5	-3.666	-3	-3	ERROR	3	3	3.666

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Répondre par vrai ou faux .

1° Pour tout réel $a \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{x \sin x} = \dfrac{1}{a \sin a}$.

2° La limite de la fonction $f : x \mapsto \cos x - x$ est égale à $+\infty$ lorsque $\to -\infty$.

3° $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

2 Étudier , dans chacun des cas suivants , la limite de la fonction f en 0 , en distinguant éventuellement les cas : $x > 0$ et $x < 0$.

1° $f(x) = \dfrac{x^3 - 3}{x}$ **3°** $f(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x}$

2° $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ **4°** $f(x) = \dfrac{1}{1 - \cos x}$.

3 Calculer les limites suivantes :

1° $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 - 2x + 3}}{x}$ **2°** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}}$ **3°** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \neq 1$.

4 Soit f et h les fonctions définies par $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ et $h(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 1}{1 - 2x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$; .

1° Donner , sous forme d'intervalles , D_f et D_h , les ensembles de définition respectifs des fonctions f et h .

2° Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{0^-} f$, $\lim\limits_{0^+} f$, $\lim\limits_{0^-} h$, $\lim\limits_{0^+} h$.

3° Les limites suivantes existent-elles : $\lim\limits_{0} f$, $\lim\limits_{0} h$, $\lim\limits_{\frac{1}{2}} h$? Justifier .

5 Soit les fonctions $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$. Calculer : $\lim\limits_{x \to 0^+} (f + g)$.

6 Étudier la continuité en 0 de chacune des fonctions f définies comme suit :

1° $f(x) = \begin{cases} 3x + \frac{|2x|}{x} \\ 2 \end{cases}$

2° $f(x) = \begin{cases} 3x + \frac{|2x|}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

7 La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est-elle continue sur $]-\infty ; -1]$? sur $[1 ; +\infty[$?

Justifier .

8 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ admet un prolongement par continuité en 0 et déterminer ce prolongement .

9 On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^3 + 1}$.

Peut-on la prolonger par continuité en -1 ? Si oui , définir la fonction g qui est le prolongement de f par continuité en ce point .

10 Dans chacun des cas suivants , déterminer la limite de f au point a . Peut-on prolonger f par continuité en a ? Justifier .

1° $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, a = 0

2° $f : x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x + 2}$, $a = -2$

3° $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, $a = 0$

11 Soit f une fonction numérique et A une partie de $\mathbb{R}$. On note $f(A)$ l'ensemble des images par f des éléments de A : $f(A) = \{f(x) \; ; x \in A\}$.

Déterminer $f(A)$ dans chacun des cas suivants (illustrer graphiquement) .

1° $f(x) = \sqrt{x}$ avec **a)** $A = [1 ; 4]$; **b)** $A = \mathbb{R}^{+*}$

2° $f(x) = E(x)$ avec **a)** $A = [-5 ; 3]$; **b)** $A =]2 ; 3[$

$\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$ désigne la partie entière de x : l'entier inférieur ou égal à x . Par exemple : $E(1) = 1$; $E(1{,}2) = 1$; $E(1{,}9) = 1$; $E(2) = 2$; $E(-3) = -3$; $E(-4{,}7) = -5$; $E(-0{,}4) = -1$; etc.

3° $f(x) = x - E(x)$ avec **a)** $A = \left[\frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right]$; **b)** $A = \mathbb{R}$

12 Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x - \sqrt{x}$.

1° Calculer : $f(0)$, $f(4)$, $f\left(\frac{1}{16}\right)$, $f(16)$.

2° Est-il vrai que l'image de l'intervalle $[0 ; 4]$ par f est l'intervalle $[0 ; 6]$?
Justifier .

13 Soit les fonctions $f : x \mapsto \frac{x-2}{x+3}$ et $g : x \mapsto \frac{1-3x}{x-5}$.

1° Déterminer D_f , l'ensemble de définition de f , et D_g celui de g .

2° Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $\frac{x-2}{x+3} = 5$ et $\frac{1-3x}{x-5} = -3$.

3° Déterminer le domaine de définition de la composée $f\circ g$ de g par f et calculer $f\circ g(x)$.

4° Déterminer le domaine de définition de la composée $g\circ f$ de f par g et calculer $g\circ f(x)$.

14 Après avoir précisé l'ensemble de définition de la fonction f et celui de la fonction g , définir $g\circ f$ et $f\circ g$, dans chacun des cas suivants .
1° f et g sont telles que $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 2$
2° f et g sont telles que $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ et $g(x) = \frac{x+2}{2x+1}$.

15 Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ et $g(x) = 16x^3 - 48x^2 + 27x + 5$.

1° Calculer $f(0)$, $f(2)$, $g(0)$, $g(2)$ et déduire que chacune des équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ admet , au moins , une racine comprise entre 0 et 2 .

2° Résoudre les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$, et vérifier le résultat du 1° .

16 Soit la fonction f définie par $f(x) = x^5 - 3x + 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine comprise entre 0 et 1 .

17 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3 - 8x}{3x^2 - 5}$.

L'équation $f(x) = 0$ admet-elle une solution dans $]2 ; 3[$?

18 Calculer , d'après la définition , le nombre dérivé de la fonction f au point indiqué et déterminer une équation de la tangente en ce point à la courbe représentative de f .

1° $f(x)=3x^2$ pour $x=1$ **2°** $f(x)=\sqrt{x}$ pour $x=4$.

19 La fonction f ci-dessous est-elle dérivable pour $x = 1$? Dans l'affirmative , calculer le nombre dérivé de f en 1 et déterminer l'équation de la tangente à sa courbe représentative en ce point .

1° $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ **3°** $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}$

2° $f(x) = \sqrt{x-1}$ **4°** $f(x) = (x-1).\sin \dfrac{1}{x-1}$.

20 Déterminer les dérivées premières des fonctions f définies par :

1° $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ **2°** $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} + 2$ **3°** $f(x)=(x-2)(x^2+4)$ **4°** $f(x)=(3x+2)(2x+1)^2$

5° $f(x) = (x^2 - 1)^4$ **6°** $f(x) = \sin x \, . \cos x$ **7°** $f(x) = \cos^3 x$ **8°** $f(x) = \cos(3x^2 - 1)$.

21 Préciser pour quelles valeurs de x les fonctions f suivantes sont dérivables et déterminer f' .

1° $f(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$ **2°** $f(x) = \dfrac{x^2+3x+4}{x^2-1}$ **3°** $f(x) = \dfrac{x^2-4}{(2x+3)^2}$ **4°** $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}$.

22 Existe-t-il un point de la courbe représentative de la fonction f où la tangente a pour coefficient directeur -4 ?

1° $f(x) = \dfrac{3}{2x}$ **2°** $f(x) = -4x^3$ **3°** $f(x) = \cos x$.

23 Déterminer si la courbe représentative de la fonction f admet une tangente ou des demi-tangentes au point d'abscisse x_0 .

1° $f(x) = x^2 + 2x - |x|$ en $x_0 = 0$ **2°** $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ en $x_0 = 1$.

24 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$ et la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$.

Vérifier, sans calculer $(g\circ f)(x)$, que pour tout x de $\mathbb{R} - \{-6\,;-1\}$: $(g\circ f)'(x) = \dfrac{5\,(4x+9)\,(3-2x)}{(x^2+7x+6)^2}$.

25 On définit, sur $\mathbb{R}$, les fonctions $f : x \mapsto x^2 - x + 3$ et $g : x \mapsto \sin x$.

1° Donner la forme explicite de la fonction h telle que $h(x) = g\circ f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

2° Calculer $h'(x)$.

26 Soit f la fonction définie par $f(x) = 2\sin 3x - 5\cos 3x$.

Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x, $f''(x) + a\,f'(x) + b\,f(x) = 0$.

27 **1°** Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction f définie par $f(x) = \cos ax$, où a est une constante donnée. En déduire la dérivée d'ordre n de g définie par $g(x) = \sin a\,x$.

2° En déduire la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction u définie par $u(x) = \cos^2 x$ et celle de la fonction v telle que $v(x) = \cos 3x \cdot \cos 5x$.

28 On donne les deux fonctions de la variable t : $t \mapsto x = 3t + 1$ et $t \mapsto y = t^2 + 1$ et on désigne par f la fonction $x \mapsto y$.

1° Calculer $x'(t) = \dfrac{dx}{dt}$ et $y'(t) = \dfrac{dy}{dt}$.

2° Déterminer $f(x)$ et calculer $f'(x)$.

29 En appliquant la règle de l'Hôpital, calculer les limites suivantes :

1° $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$ **2°** $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$ **3°** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1}$ **4°** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi . x)}{(x-1)^2}$.

30 Soit f_m la fonction définie par $f_m(x) = \dfrac{2x^2 - 5mx + 6}{x - 2m}$, où m est un paramètre réel .

1° Calculer $f'_m(x)$.

2° Pour quelles valeurs de m l'inéquation $f'_m(x) > 0$ est-elle vérifiée pour tout réel x appartenant au domaine de définition de f'_m ?

31 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 1}$.

1° Calculer f' et étudier son signe puis dresser le tableau de variation de f .

2° Montrer que f possède sur $\mathbb{R}$ un unique minimum local m et un unique maximum local M tels que $m + M = 1$.

32 f est la fonction définie par $f(x) = x^4 + x^2 + 1$.

Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[1 \,;\, +\infty[$.

33 f est la fonction définie sur $\left[0 \,;\, \dfrac{8}{3}\right]$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$. Démontrer que f est une bijection de $\left[0 \,;\, \dfrac{8}{3}\right]$ sur un intervalle à préciser .

34 Montrer que chacune des fonctions f définies ci-dessous est une bijection de l'intervalle donné I sur un intervalle J à déterminer .

1° $f(x) = x^3 - 8x + 1$ sur $I = [-1 \,;\, 1]$

2° $f(x) = x^3 + 3x - 7$ sur $I = \mathbb{R}$.

35 Montrer que l'équation $-x^3 + x^2 - x + 2 = 0$ admet une unique solution appartenant à l'intervalle $]1 \,;\, 2[$.

$\boxed{36}$ Soit f la fonction définie par $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2$.

1° Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variation de f .

2° Calculer $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ et en déduire que l'équation $4x^3 - 3x^2 - 6x + 2 = 0$ admet trois racines α , β et γ telles que : $-2 < \alpha < -1$, $0 < \beta < 1$ and $1 < \gamma < 2$.

3° Montrer que $\dfrac{9}{32} < \beta < \dfrac{5}{16}$ (on pourrait utiliser la méthode de dichotomie) .

$\boxed{37}$ Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1 - \dfrac{1}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\ ,\vec{i}\ ,\vec{j})$. Montrer que (C) admet une asymptote verticale et une asymptote oblique à déterminer . Étudier la position de (C) et de son asymptote oblique .

$\boxed{38}$ Pour chacune des fonctions suivantes , étudier les limites éventuelles en $+\infty$ de $f(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$ puis donner l'allure de la branche infinie correspondante .

1° $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ **2°** $f : x \mapsto x - \dfrac{x^3}{3}$ **3°** $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}$.

$\boxed{39}$ Déterminer d , e et f pour que la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x^2 + dx + e}{x^2 + fx - 2}$ passe par l'origine O des coordonnées , soit tangente en O à l'axe $x'x$ et admette pour asymptote la droite d'équation $x = 1$.

$\boxed{40}$ On considère la fonction f définie par $y = f(x) = \dfrac{mx+1}{x^2-1}$ où m est un paramètre et on désigne par (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$.

Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe A et déterminer celle de ces courbes dont la tangente en A est parallèle à la droite $y + 2x = 0$.

Pour chercher

41 **1°** On donne deux fonctions f et g définies dans l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

Connaissant $f(x) = x^2$ et $g'(x) = \dfrac{1}{x}$, calculer $(g \circ f)'(x)$.

2° On donne deux fonctions f et g définies dans l'intervalle $]-\infty\ ;+\infty[$.

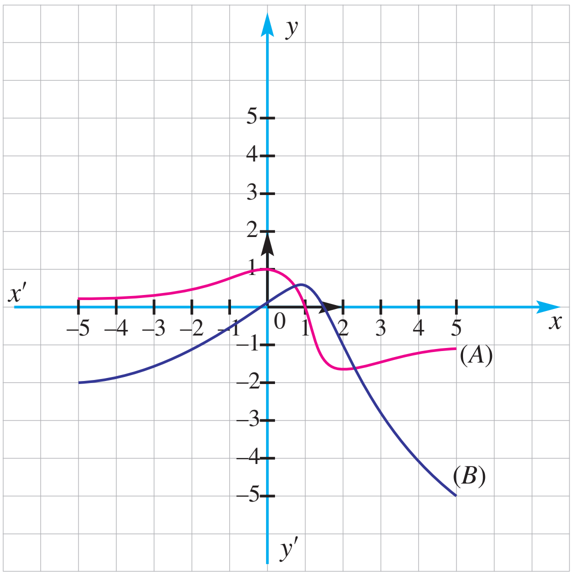
Connaissant $g(x) = x^2 + x + 1$ et $f'(x) = 2x$, calculer $(f \circ g)'(0)$.

42 On donne dans un repère orthonormal les courbes (A) et (B) représentatives de deux fonctions continues et dérivables sur $[-5\ ;5]$.

On sait que l'une de ces fonctions est la fonction dérivée de l'autre, on peut donc les noter f et f' .

1° Associer à chacune des fonctions f et f' sa courbe représentative .

2° Trouver une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point de cette courbe d'abscisse 0.



43 La courbe (F) ci-dessous est la courbe représentative de la fonction dérivée f' d'une fonction f continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont on connaît les valeurs :

x	-3	-2	0	2
$f(x)$	1	-1	1	$1{,}75$

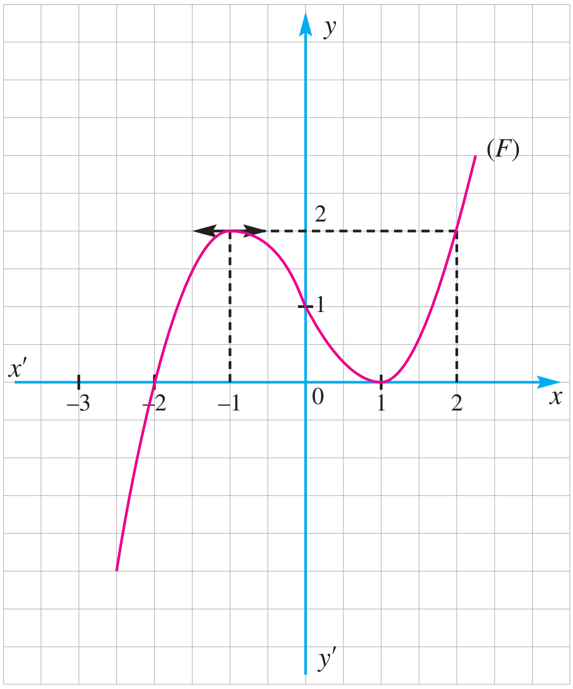
On désigne par (C) la courbe représentative de f .

1° Étudier le sens de variations de f sur l'intervalle $[-3\ ;2]$.

2° Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x}$.

3° Écrire une équation de la tangente (D) à (C) au point de (C) d'abscisse 0 .

4° Montrer que (C) admet ***deux*** points d'inflexion à déterminer .



44 Le «format» d'un rectangle est le rapport : $\dfrac{\text{Longueur}}{\text{Largeur}} = \dfrac{L}{\ell}$.

Dans un rectangle de format $x > 1$, on découpe un carré ayant pour côté la largeur de ce rectangle . Soit $g(x)$ le format du rectangle restant .

1° Expliciter $g(x)$ sur $]1\ ;2[$ et sur $[2\ ;+\infty[$.

2° Étudier la continuité de g en 2 .

45 $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$ désigne la partie entière de x : l'entier inférieur ou égal à x . Par exemple : $E(1) = 1$; $E(1{,}2) = 1$; $E(1{,}9) = 1$; $E(2) = 2$; $E(-3) = -3$; $E(-4{,}7) = -5$; $E(-0{,}4) = -1$; etc.

Soit la fonction $f : x \mapsto x - E(x)$.

1° La représenter dans un repère orthonormal $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

2° A la vue du graphique , citer des intervalles sur lesquels f paraît continue , et d'autres sur lesquels elle ne l'est pas .

3° Étudier la continuité de f à droite en 2 , à gauche en 2 . Est-elle continue en 2 ?

46 Soit f une fonction continue sur $[0 ; 1]$ et prenant ses valeurs dans $[0 ; 1]$.

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une racine appartenant à $[0 ; 1]$.

Indication :

Considérer la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

47 Soit f une fonction définie et continue sur $[0 ; 3]$ et telle que $0 \leqslant f(x) \leqslant 3$ pour tout x de $[0 ; 3]$.

Montrer qu'il existe un réel c appartenant à $[0 ; 3]$ et tel que $f(c) = c$.

48 **1°** Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{b - ax}$, où a et b sont deux constantes .

2° En déduire la dérivée d'ordre n de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2x+3}{1-x}$.

3° Déterminer deux constantes A et B telles que $\dfrac{1}{9-x^2} = \dfrac{A}{3-x} + \dfrac{B}{3+x}$ pour tout réel x différent de 3 et de -3 .

En déduire la dérivée d'ordre n de la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{1}{9-x^2}$.

49 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I =]-a\,;a[$, où $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

1° Montrer que si f est paire , alors f' est impaire .

2° Montrer que si f est impaire , alors f' est paire .

50 Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x \sin(1-x) & \text{si } x \leqslant 1 \\ ax^2 + bx & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Déterminer les constantes a et b pour que f soit continue et dérivable en $x = 1$.

51 Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{ax - b^2} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{3x + a}{x^2 + b} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Pour quelles valeurs des réels a et b la fonction f est-elle définie , continue et dérivable sur $\mathbb{R}$?

52 Soient f et g les deux fonctions définies par : $f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n$ et

$g(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$.

Calculer $f(x)$ et $g(x)$ et les mettre sous forme de fraction rationnelle .

53 Pour $m \in \mathbb{R}^*$, soit la famille de courbes (C_m) représentant la fonction f_m définie par :
$y = f_m(x) = mx^3 + 3\,mx^2 - (6m + 5)x - 8m - 3$.

Vérifier que toutes les courbes (C_m) ont le même point d'inflexion .

Admettent-elles d'autres points communs ?

54 On considère la fonction f définie par $y = f(x) = \dfrac{x(1-x)}{1+x}$ et l'on désigne par (Γ) sa

courbe représentative dans un système orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

1° Étudier les variations de f et tracer (Γ) .

2° Soit (D) la droite d'équation $y = m$ où m est un réel . Étudier l'intersection de (Γ) et (D) .

3° On désigne par (Γ_1) la courbe représentative de la fonction g définie par $y = g(x) = \dfrac{|x|\,(1-x)}{1+x}$.

Tracer (Γ_1) dans le même repère que (Γ) .

2 FONCTION RÉCIPROQUE

Un peu d'histoire

L'idée de relation entre les quantités est très ancienne. Les tables babyloniennes donnant pour un nombre son carré et les tables astronomiques des Grecs sont les premières approches des fonctions.
***Nicole Oresme** (1323-1382) utilise un diagramme donnant une vitesse en fonction du temps, mais son étude de la fonction reste sommaire.*
*En 1614, **John Neper** invente la première fonction purement abstraite (fonction logarithmique).*
*Le formalisme algébrique et la géométrie analytique de **Descartes** permettent le lien entre courbe et fonction.*
***Newton** associe les fonctions à un mouvement où la variable x est associée au temps.*
***Leibniz** appelle fonction n'importe quelle ligne ayant une fonction (au sens propre du terme) dans une figure.*
*En 1748, **Léonard Euler** traite du concept de fonction. Il définit une fonction d'une quantité variable comme :«une expression analytique composée de quelque manière que ce soit de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes».*
C'est à lui qu'on doit la notation f(x) pour la fonction.
*Dès 1755, **Lagrange** entretient une correspondance mathématique avec Euler sur le calcul des variations.*
*Il présente de nombreuses méthodes dans ses "**Leçons sur le calcul des fonctions**" en 1799.*
***Fourier** (1768-1830) élargit le concept de fonction aux fonctions "arbitraires", c'est-à-dire dont la courbe est tracée arbitrairement.*
Au XVIIIe siècle, l'idée de fonction est encore intuitive et n'est pas un objet d'étude en soi, c'est avant tout un outil pour les scientifiques.
*La recherche d'une définition rigoureuse de la notion de fonction conduit **Cauchy** (1789 - 1857), puis **Cantor** (1845-1918) à construire des fonctions n'ayant plus aucun sens physique. Elles sont définies à partir de leurs propriétés et non plus de leur expression analytique.*

PLAN DU CHAPITRE

«Le poète a une fonction sérieuse» .

Victor HUGO

A Fonction réciproque

Activité préparatoire

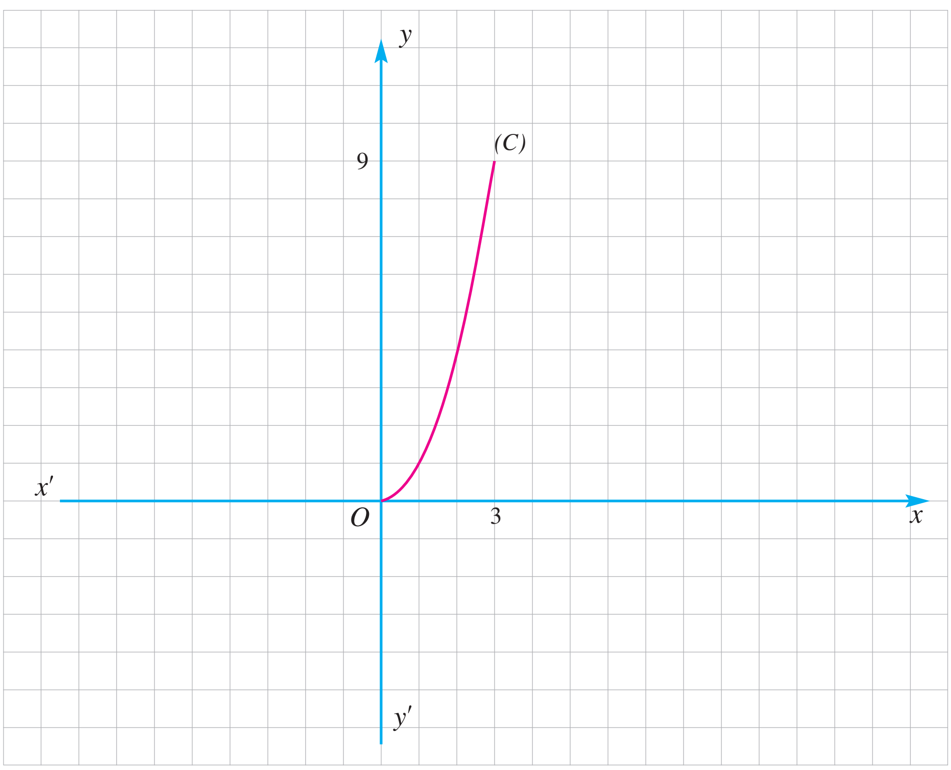
1° Étudier les variations et construire la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2$.

2° La courbe (C) est celle de f dans $[0 ; 3]$. Calculer $f(0)$ et $f(3)$. Quel est le sens de variation de f dans $[0 ; 3]$?

f est-elle continue dans cet intervalle ?

3° Soit $\lambda \in [0 ; 9]$. La droite (D) d'équation $y = \lambda$ coupe-t-elle (C) ? En combien de points ?
Y a-t-il une valeur λ où (D) ne coupe pas (C) ? où (D) coupe (C) en plus qu'un point ?

4° Résoudre , dans $[0 ; 3]$ l'équation $f(x) = 9$, $f(x) = 5$. Construire graphiquement le point de $x'x$ d'abscisse x_0 telle que $f(x_0) = 7$.



1 FONCTION STRICTEMENT MONOTONE SUR UN INTERVALLE

f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I ; x_1 et x_2 sont deux réels de I .

- Si f est strictement croissante sur I , alors :

  $x_1 < x_2$ équivaut à $f(x_1) < f(x_2)$ et

  $x_1 = x_2$ équivaut à $f(x_1) = f(x_2)$.

- Si f est strictement décroissante sur I , alors :

  $x_1 < x_2$ équivaut à $f(x_1) > f(x_2)$ et

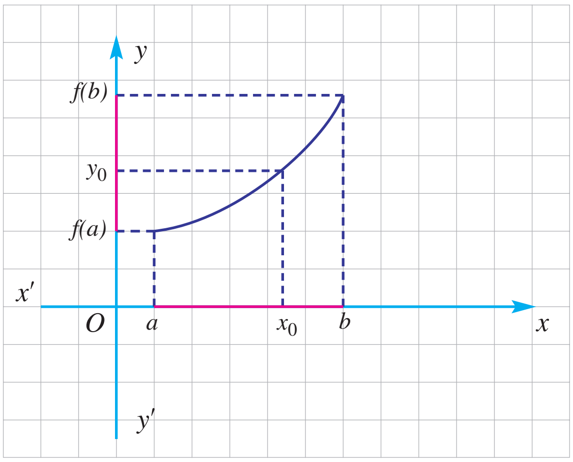
  $x_1 = x_2$ équivaut à $f(x_1) = f(x_2)$.

2 FONCTION RÉCIPROQUE

1° Existence

Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle $I = [a\ ;\ b]$, alors $f(I)$ est un intervalle et $f(I) = f\big([a\ ;\ b]\big) = \big[f(a)\ ;\ f(b)\big]$.

$$f : \quad [a\ ;\ b] \longmapsto \big[f(a)\ ;\ f(b)\big]$$
$$x_0 \longmapsto y_0 = f(x_0) .$$



f définit une bijection de $[a\ ;\ b]$ sur $\big[f(a)\ ;\ f(b)\big]$.

Par suite , à tout y_0 de $\big[f(a)\ ;\ f(b)\big]$, correspond un antécédent x_0 de $[a\ ;\ b]$ et un seul tel que $y_0 = f(x_0)$.

On définit ainsi une fonction numérique , φ , de $\big[f(a)\ ;\ f(b)\big]$ sur $[a\ ;\ b]$.

$$\varphi : \quad \big[f(a)\ ;\ f(b)\big] \longmapsto \big[a\ ;\ b\big]$$
$$y_0 \longmapsto x_0 = \varphi(y_0) .$$

φ est appelée la fonction **réciproque** ou **inverse** de f . On note : $\boldsymbol{\varphi = f^{-1}}$ **.**

$$\begin{tikzcd}
\left[a\ ;\ b\right] \arrow[r, bend left, "f"] & \left[f(a)\ ;\ f(b)\right] \arrow[l, bend left, "f^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x_0 \arrow[r, bend left, "f"] & y_0 \arrow[l, bend left, "f^{-1}"]
\end{tikzcd} \qquad y_0 = f(x_0) \text{ équivaut à } x_0 = f^{-1}(y_0)$$

Pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $y = f(x)$ équivaut à $x = f^{-1}(y)$

Il en résulte que :

toute fonction f continue et strictement croissante sur un segment I , admet une fonction réciproque f^{-1} .

Le domaine de définition de f^{-1} est $\left[f(a)\ ;\ f(b)\right]$.

On démontre de même que :

si f est continue et strictement décroissante sur un intervalle $I = [a\ ;\ b]$, alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} sur $f(I) = \left[f(b)\ ;\ f(a)\right]$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x - 2$ sur $[1\ ;\ 2]$. f est continue et strictement croissante sur $[1\ ;\ 2]$.

f admet donc une fonction réciproque f^{-1} définie sur

$f\big([1\ ;\ 2]\big) = \big[f(1)\ ,\ f(2)\big] = [1\ ;\ 4]$.

$$\begin{tikzcd}
\left[1\ ;\ 2\right] \arrow[r, bend left, "f"] & \left[1\ ;\ 4\right] \arrow[l, bend left, "f^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

2° Continuité

On admet que f^{-1} est continue sur $f(I)$.

3° Sens de variation

Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[a\ ;\ b]$ et f^{-1} sa fonction réciproque définie sur $\left[f(a)\ ;\ f(b)\right]$.

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[a\ ;\ b]$, y_1 et y_2 leurs images par f dans $\left[f(a)\ ;\ f(b)\right]$.

$y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ équivaut à $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$.

Comme f est strictement croissante sur $[a\ ;\ b]$, alors $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$, c'est-à-dire $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > 0$ ou bien $\dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} > 0$, soit $\dfrac{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)}{y_2 - y_1} > 0$, inégalité qui montre que f^{-1} est **strictement croissante** sur $\left[f(a)\ ;\ f(b)\right]$.

On démontre de même que si f est **strictement décroissante** sur $[a\ ;\ b]$, alors f^{-1} est **strictement décroissante** sur $\left[f(b)\ ;\ f(a)\right]$.

La fonction réciproque f^{-1} varie donc dans le même sens que f .

D'où le théorème :

toute fonction f **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I admet une fonction réciproque f^{-1} **continue** et **strictement monotone** sur $f(I)$. f et f^{-1} ont le même sens de variation .

Remarques

• Si f est continue et strictement croissante sur $I = [a\ ;\ b]$, alors $f(I) = \left[f(a)\ ;\ f(b)\right]$; et si f est continue et strictement décroissante sur $I = [a\ ;\ b]$, alors $f(I) = \left[f(b)\ ;\ f(a)\right]$.

• Si $I =]a\ ;\ b[$ et si f est continue et strictement croissante sur I , alors $f(I) = \left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x)\ ;\ \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$.

Si f est continue et strictement décroissante sur I , alors $f(I) = \left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x)\ ;\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$.

• Si f n'est pas continue sur I , **ou** si f n'est pas strictement monotone sur I , alors f n'admet pas une fonction réciproque .

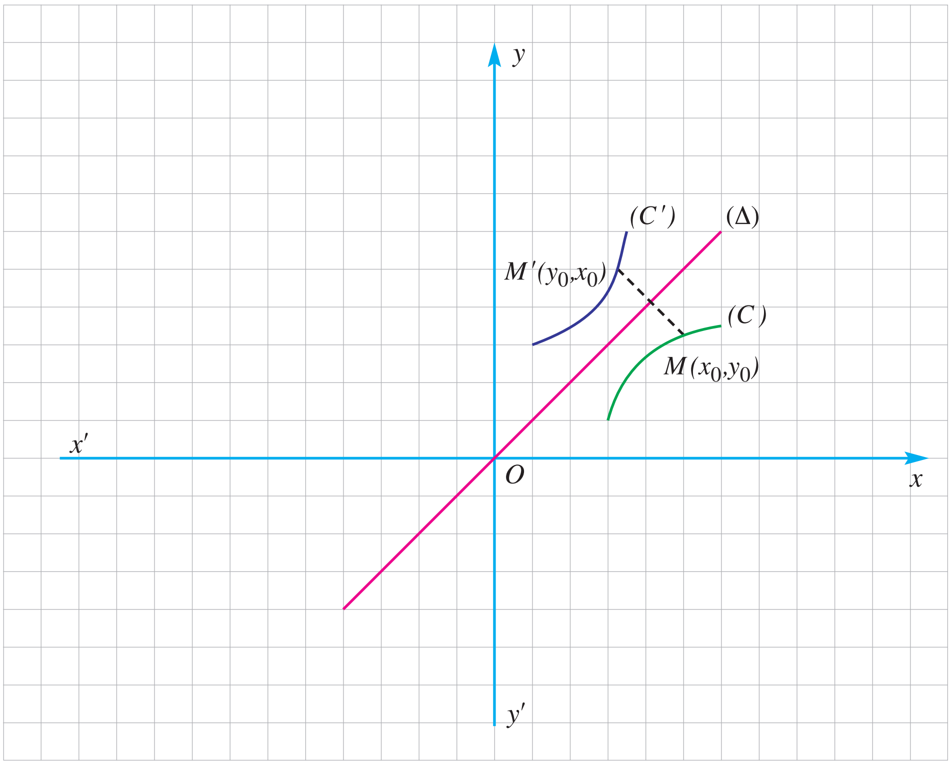
4° Courbe représentative de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I , et f^{-1} sa fonction réciproque . (C) et (C') sont les courbes représentatives de f et f^{-1} respectivement , **dans un repère orthonormé** d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

Dire que $M(x_0 \,;\, y_0)$ est un point de (C) équivaut à dire que $y_0 = f(x_0)$, c'est-à-dire $x_0 = f^{-1}(y_0)$, et $M'(y_0 \,;\, x_0)$ est un point de (C') .

Or les points $M(x_0 \,;\, y_0)$ et $M'(y_0 \,;\, x_0)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice , qui est la droite (Δ) d'équation $y = x$.

Par suite (C) et (C') sont symétriques par rapport à (Δ) .



En repère orthonormal , la courbe (C') de la fonction réciproque est le symétrique de la courbe (C) de f par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

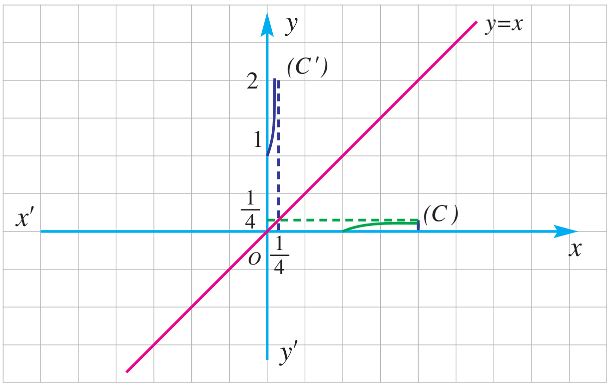
Exemple

La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ étant une fonction rationnelle , elle est définie continue et dérivable sur tout intervalle de son domaine de définition $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;+\infty[$, en particulier sur $[1\,;2] \subset\,]-2\,;+\infty\,[$.

De plus , f est strictement croissante car $f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2} > 0$ sur $[1\,;2]$.

Elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} , continue et strictement croissante sur $[f(1)\,;f(2)] = \left[0\,;\dfrac{1}{4}\right]$.

La courbe (C') de f^{-1} est le symétrique , par rapport à la droite d'équation $y = x$, de la courbe (C) de f (repère orthonormé) .



5° Expression explicite

Pour trouver l'expression explicite , si c'est possible , de f^{-1} , on exprime x en fonction de y .

Exemple

Pour la fonction f définie , sur $[1\,;2]$, par $y = f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$:

$y = \dfrac{x-1}{x+2}$ équivaut à $xy + 2y = x - 1$

ou bien $x(y-1) = -1-2y$.

Or $y \in \left[0\,;\dfrac{1}{4}\right]$, donc $y - 1 \neq 0$, et $x = f^{-1}(y) = \dfrac{-1-2y}{y-1}$,

soit $y = f^{-1}(x) = \dfrac{-1-2x}{x-1}$.

Remarque

On pourrait écrire l'expression $y = f(x)$ sous la forme $x = f(y)$ et calculer y en fonction de x .

Ainsi $y = f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ s'écrit $x = \dfrac{y-1}{y+2}$.

$xy + 2x = y - 1$; $y\,(x-1) = -1-2x$, soit $y = f^{-1}(x) = \dfrac{-1-2x}{x-1}$.

6° Dérivée de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue , strictement monotone sur un intervalle I et dérivable en un point x_0 de I avec $f'(x_0) \neq 0$.

La fonction réciproque f^{-1} de f est alors dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(y_0)\right]} \quad \text{avec } y_0 = f(x_0)\ .}$$

En effet , pour tout y de $f(I)$ on pose $x = f^{-1}(y)$, qui est équivalent à $y = f(x)$. En particulier $x_0 = f^{-1}(y_0)$ équivaut à $y_0 = f(x_0)$.

La continuité de f^{-1} en y_0 permet d'écrire , si $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$ existe ,

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{car } f'(x_0) \neq 0\ .$$

Remarque

Si $f'(x_0) = 0$, f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 mais $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \infty$.

La courbe représentative de f^{-1} admet alors au point $M_0\left(y_0\,;f^{-1}(y_0)\right)$ une tangente parallèle à (Oy) .

EXEMPLE

La fonction f définie par $f(x) = x^3 + 2x$ étant une fonction polynôme , elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$. Sa réciproque f^{-1} existe , donc , sur $f(\mathbb{R})$ et $(f^{-1})'(3) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ avec $3 = f(x_0)$, $3 = x_0^3 + 2x_0$, $x_0^3 + 2x_0 - 3 = 0$, soit $x_0 = 1$.

Par suite $(f^{-1})'(3) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{3(1)^2 + 2} = \dfrac{1}{5}$.

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Répondre par vrai ou faux .

1° Toute fonction continue et strictement monotone dans un intervalle I , admet une fonction réciproque .

2° f est une fonction définie sur un intervalle I .
La fonction réciproque f^{-1} de f lorsqu'elle existe :
a) est continue sur $f(I)$.
b) n'a pas le même sens de variation que f .
c) admet une courbe confondue avec celle de f .

2 Soit la fonction f définie par $f(x) = 3x + 4$.

Démontrer que f admet sur $\mathbb{R}$ une fonction réciproque f^{-1} . Donner la forme explicite de f^{-1} et déterminer son domaine de définition .

3 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x-2}{x+4}$.
Démontrer que f admet , sur $[2\ ;\ 5]$, une fonction réciproque f^{-1} .
Déterminer le domaine de définition de f^{-1} et donner sa forme explicite .

4 Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 8x + 8$.

1° Déterminer les intervalles dans lesquels la fonction est strictement monotone . Trouver la fonction inverse dans chacun de ces intervalles .

2° Tracer la courbe représentative de f et les courbes représentatives de ses inverses dans un repère orthonormé .

5 Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 3x + 1$.

1° Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} sur $\mathbb{R}$.

2° Sans trouver l'expression de f^{-1} , calculer $(f^{-1})'\ (5)$.

Pour chercher

6 f est la fonction définie par $f(x) = x^4 + x^2 + 1$.

1° Démontrer que f admet une réciproque f^{-1} sur $\mathbb{R}^+$.

2° Donner le domaine de définition de f^{-1} .

3° Sans trouver l'expression de f^{-1} , calculer $(f^{-1})'(3)$ et $(f^{-1})'(21)$.

7 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1° Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} sur $\mathbb{R}$.

2° Déterminer l'ensemble de définition de f^{-1} et exprimer $f^{-1}(x)$.

3° Étudier les variations de f et tracer sa courbe (C) et celle de sa réciproque (C') dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

8 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

Montrer que f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

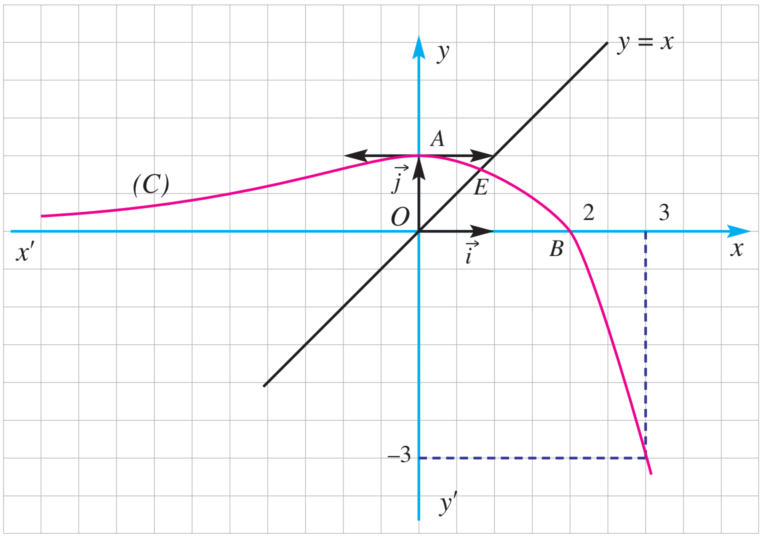
Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} et déterminer l'ensemble de définition de f^{-1} .

Déterminer l'expression de la fonction réciproque sous la forme $y = f^{-1}(x)$ (c'est-à-dire donner la forme explicite de f^{-1}) .

$\boxed{9}$ La courbe (C) ci-dessous est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Indications :

- L'axe des abscisses est une asymptote à (C) en $-\infty$.
- La courbe (C) admet en son point $A(0 ; 1)$ une tangente horizontale.
- (C) coupe l'axe des abscisses en $B(2 ; 0)$.
- (C) coupe la droite d'équation $y = x$ au point E d'abscisse α.



1° Reproduire la courbe (C).

2° Démontrer que f admet sur $[0 ; +\infty[$ une fonction réciproque g, et donner le domaine de définition de g.

3° Résoudre l'inéquation $g(x) < \alpha$.

4° Tracer la courbe représentative (G) de g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$\boxed{10}$ On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$.

1° Montrer que f admet dans l'intervalle $[1 ; +\infty[$ une fonction réciproque g.

2° On désigne par (G) la courbe représentative de g, et par A le point de (G) d'abscisse $\dfrac{5}{2}$.

a) Trouver l'équation de la tangente à (G) en A.

b) Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ n'a pas de racines.

B Fonctions trigonométriques inverses

Activité préparatoire

La courbe (C) est celle de $f : x \longmapsto \sin x$ sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

1° Calculer $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

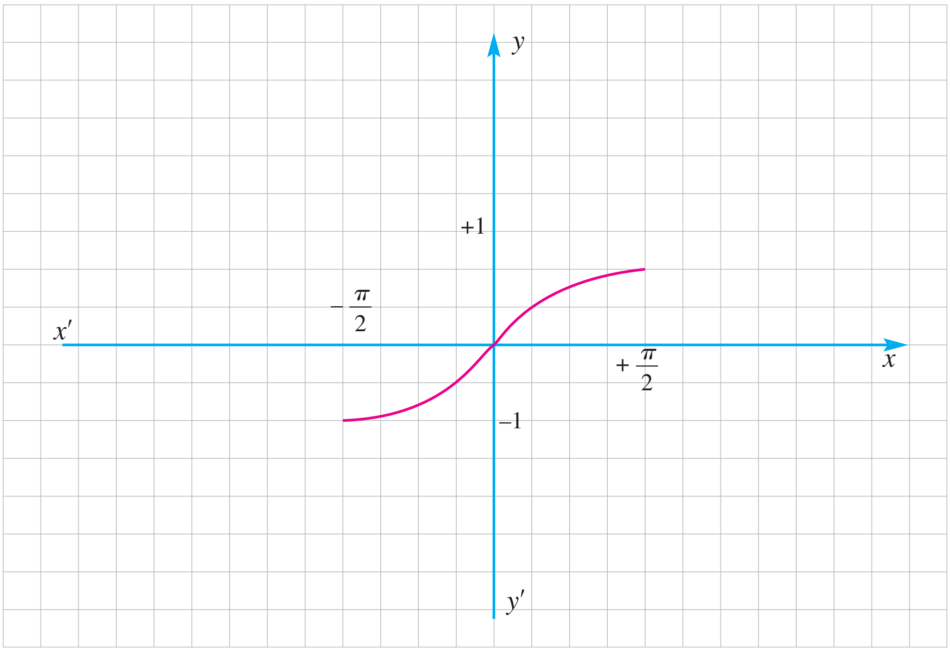
Soit $y_0 \in [-1 ; 1]$. La droite d'équation $y = y_0$ coupe-t-elle (C) ? En combien de points ?

2° Y a-t-il une valeur de x dans $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, telle que $f(x) = \frac{1}{2}$?

$f(x) = -\frac{1}{2}$?

Résoudre , dans $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ les équations : $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Quel est , dans $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, l'arc dont le sinus est égal à 1 ? à – 1 ? à 0 ?



1° Fonction Arcsinus

La fonction **sinus** est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$; elle admet donc une fonction réciproque , notée $\sin^{-1}$ ou Arcsin , continue et strictement croissante sur $[-1 ; 1]$.

$$\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\sin} [-1 ; 1] \qquad\qquad [-1 ; 1] \xrightarrow{\text{Arcsin}} \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \longmapsto y = f(x) = \sin x \qquad\qquad y \longmapsto x = \sin^{-1} y = \text{Arcsin } y$$

$y = \sin x$ équivaut à $x = \text{Arcsin } y = \sin^{-1} y$.

$x = \sin y$	**équivaut à**	$y = \text{Arcsin}\, x$
$y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$		$x \in [-1\,;\,1]$

EXEMPLE

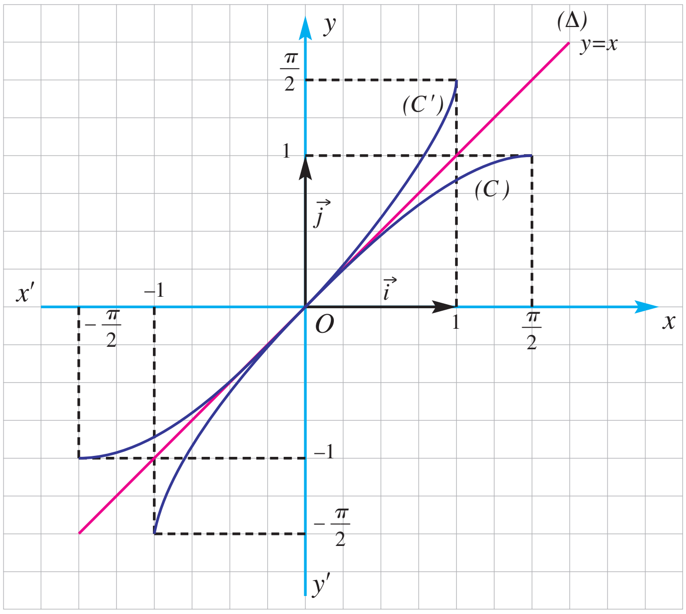
$\text{Arcsin}\,\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$; $\text{Arcsin}\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$; $\text{Arcsin}\,0 = 0$; $\text{Arcsin}\,1 = \dfrac{\pi}{2}$;

$\text{Arcsin}\,(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$; $\text{Arcsin}\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$.

En repère orthonormé , la courbe représentative (C') de la fonction Arcsin est le symétrique de la courbe (C) de la fonction sinus par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.

x	$-\dfrac{\pi}{2}$		0		$\dfrac{\pi}{2}$
$\sin x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

x	-1		0		1
$\text{Arcsin}\,x$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{2}$



Propriétés

1. $\boxed{\sin(\text{Arcsin}\,x) = x}$

En effet , soit $\alpha = \text{Arcsin}\,x$ alors $\sin\alpha = x$, soit $\sin(\text{Arcsin}\,x) = x$.

2. $\boxed{\cos(\text{Arcsin}\,x) = \sqrt{1-x^2}}$

En effet, soit $\alpha = \text{Arcsin}\,x$, alors $\sin\alpha = x$ et $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$\cos\alpha \geqslant 0$ et $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - x^2$, soit $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$ c'est-à-dire $\cos(\text{Arcsin}\,x) = \sqrt{1-x^2}$.

3. $\boxed{\text{Si } f(x) = \text{Arcsin}\,x \text{ , alors } f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ sur }]-1\,;\,1[}$

En effet , $y = \text{Arcsin}\,x$ équivaut à $x = \sin y$.

En dérivant par rapport à x on a : $1 = y' \,.\, \cos y$.

Si $y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, alors $\cos y > 0$ et $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$, d'où $\cos y = \sqrt{1-x^2}$ et $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

En général , si u est une fonction dérivable en x , alors

$$\boxed{(\text{Arcsin}\,u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad , \quad u \in\,]-1\,;\,1[}$$

2° Fonction Arccosinus

La fonction **cosinus** est continue et strictement décroissante sur $[0\ ;\ \pi]$; elle admet donc une fonction réciproque , notée $\cos^{-1}$ ou Arccos , continue et strictement décroissante sur $[-1\ ;\ 1]$.

$$[0\ ;\ \pi] \xrightarrow{\cos} [-1\ ;\ 1] \qquad\qquad [-1\ ;\ 1] \xrightarrow{\text{Arccos}} [0\ ;\ \pi]$$

$$x \longmapsto y = f(x) = \cos x \qquad\qquad y \longmapsto x = \cos^{-1} y = \text{Arccos}\, y$$

$y = \cos x$ équivaut à $x = \text{Arccos}\ y = \cos^{-1} y$.

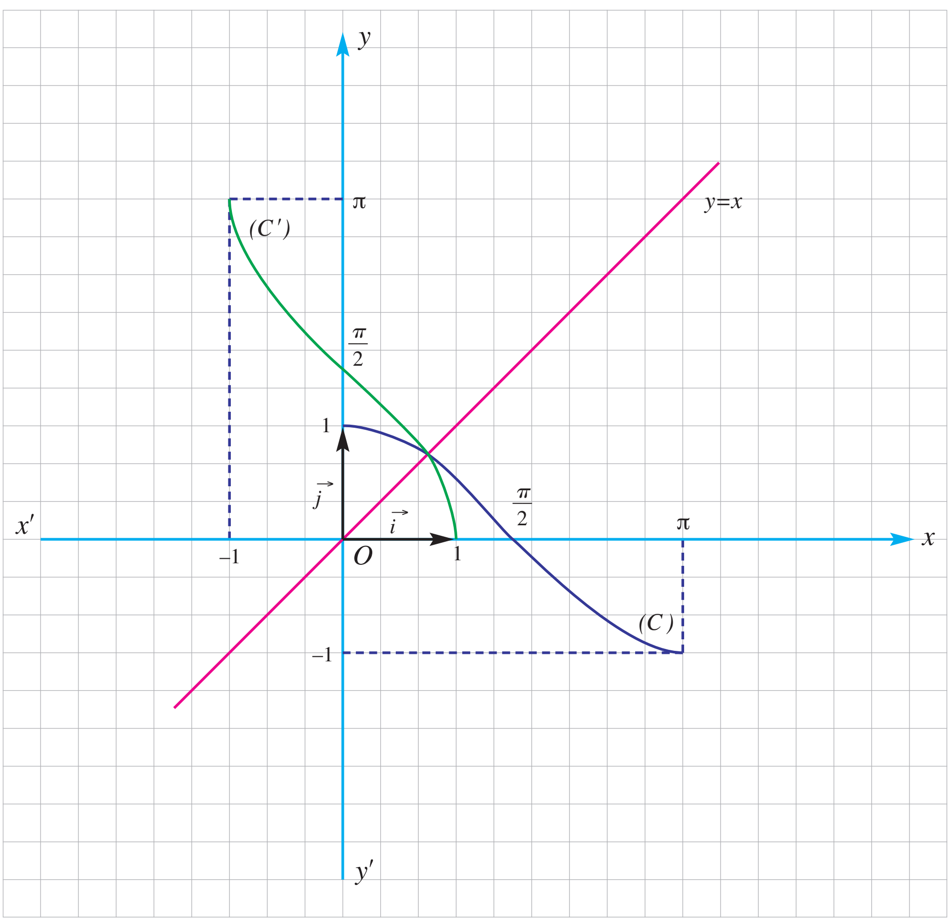
$\boldsymbol{x = \cos y}$	**équivaut à**	$\boldsymbol{y = \text{Arccos}\ x}$
$\boldsymbol{y \in [0\ ;\ \pi]}$		$\boldsymbol{x \in [-1\ ;\ 1]}$

EXEMPLES

$\text{Arccos}\,\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$; $\text{Arccos}\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$; $\text{Arccos}\ 0 = \dfrac{\pi}{2}$; $\text{Arccos}\ 1 = 0$

$\text{Arccos}\ (-1) = \pi$; $\text{Arccos}\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$.

En repère orthonormé , la courbe représentative (C') de la fonction Arccos est le symétrique de la courbe (C) de la fonction cosinus , par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1 ↘	0 ↘	-1

x	-1	0	1
Arccos x	π ↘	$\frac{\pi}{2}$ ↘	0

Propriétés

1. $\boxed{\cos(\text{Arccos } x) = x}$

En effet , $\alpha = \text{Arccos } x$ équivaut à $\cos \alpha = x$, soit $\cos(\text{Arccos } x) = x$.

2. $\boxed{\sin(\text{Arccos } x) = \sqrt{1 - x^2}}$

En effet , soit $\alpha = \text{Arccos } x$, alors $\cos \alpha = x$, $\alpha \in [0\,;\pi]$ et $\sin \alpha \geqslant 0$.

D'où $\sin \alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - x^2}$, soit

$\sin(\text{Arccos } x) = \sqrt{1 - x^2}$.

3. $\boxed{\text{Arcsin } x + \text{Arccos } x = \dfrac{\pi}{2} \,,\; x \in [-1\,;1]}$

En effet

Soit $\alpha = \text{Arcsin } x$, $\sin \alpha = x$, $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$;

$\beta = \text{Arccos } x$, $\cos \beta = x$, $\beta \in [0\,;\pi]$.

On a $-\pi \leqslant -\beta \leqslant 0$, d'où $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{2} - \beta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos \beta = x = \sin \alpha \\[2ex] \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right] \text{ et } \dfrac{\pi}{2} - \beta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right] \end{array}\right\} \text{ d'où } \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

c'est-à-dire $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, soit $\text{Arcsin } x + \text{Arccos } x = \dfrac{\pi}{2}$.

4. $\boxed{\text{Si } f(x) = \text{Arccos } x \text{ , alors } f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ sur }]-1\,;1[}$

En effet, en dérivant $\text{Arcsin } x + \text{Arccos } x = \dfrac{\pi}{2}$ on obtient :

$(\text{Arcsin } x)' + (\text{Arccos } x)' = 0$

$(\text{Arccos } x)' = -(\text{Arcsin } x)'$,

soit $(\text{Arccos } x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

En général , si u est une fonction dérivable de x , alors

$$\boxed{(\text{Arccos } u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}} \;,\; u \in]-1\,,1[}$$

3° Fonction Arctangente

La fonction **tangente** est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$; elle admet donc une fonction réciproque , notée Arctan ou Arctg ou $\tan^{-1}$ ou tg^{-1} , continue et strictement croissante sur $]-\infty\ ;+\infty[$.

$$\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\frac{\pi}{2}\right[\xrightarrow{\ \tan\ }]-\infty\ ;+\infty[\qquad\qquad]-\infty\ ;+\infty[\xrightarrow{\ \text{Arctan}\ } \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\frac{\pi}{2}\right[$$

$$x \longmapsto y = f(x) = \tan x \qquad\qquad y \longmapsto x = \text{Arctan}\ y$$

$$y = \tan x \quad \text{équivaut à} \quad x = \text{Arctan}\ y$$

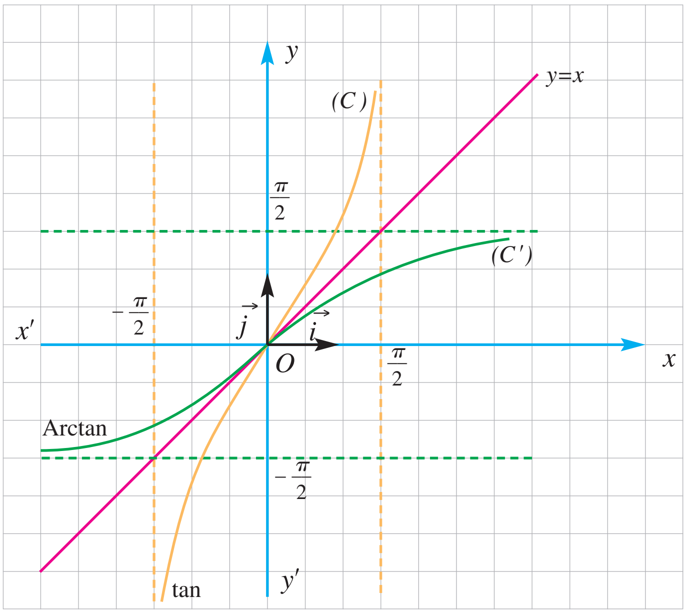
$\boldsymbol{x = \tan y}$	**équivaut à**	$\boldsymbol{y = \text{Arctan}\ x}$
$\boldsymbol{y \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\frac{\pi}{2}\right[}$		$\boldsymbol{x \in]-\infty\ ;+\infty[}$

Exemples

Arctan $1 = \frac{\pi}{4}$ Arctan $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$ Arctan $0 = 0$

Arctan $(-1) = -\frac{\pi}{4}$ Arctan $(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$.

En repère orthonormé , la courbe représentative (C') de la fonction Arctan est le symétrique de la courbe (C) de la fonction tangente , par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.



x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$\|\ -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty\ \|$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Arctan x	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Propriétés

1° **La fonction Arctan est une fonction impaire :**
$$\mathbf{Arctan}\,(-x) = -\mathbf{Arctan}\,x$$

2° $$\tan(\mathrm{Arctan}\,x) = x$$

3° $$\cot(\mathrm{Arctan}\,x) = \frac{1}{x} \text{ pour } x \neq 0$$

4° $$\text{Si } f(x) = \mathrm{Arctan}\,x \quad \text{alors} \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

En effet , si $y = \mathrm{Arctan}\,x$, alors $x = \tan y$, $y \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

En dérivant par rapport à x on obtient : $1 = y' \,.\, (1 + \tan^2 y) = y'\,(1 + x^2)$

soit $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

En général, si u est une fonction dérivable de x, alors

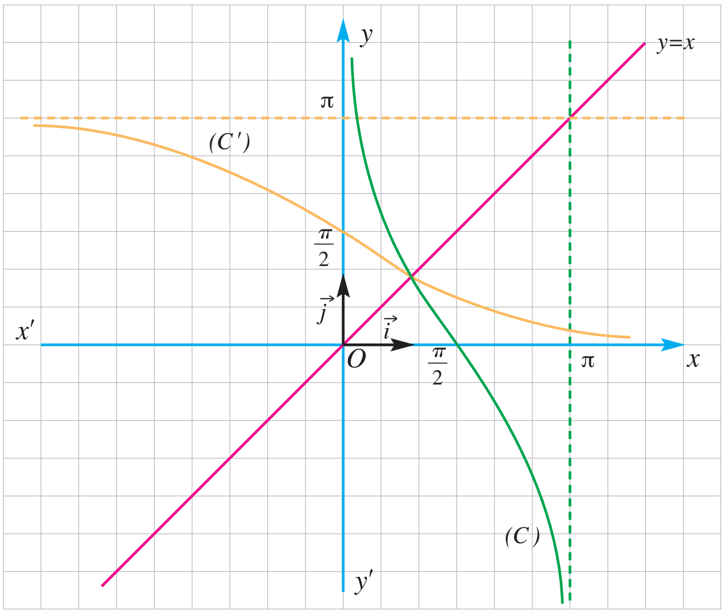
$$(\mathrm{Arctan}\,u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

4° Fonction Arccotangente

La fonction **cotangente** est continue et strictement décroissante sur $]0 ; \pi[$; elle admet donc une fonction réciproque , notée Arccot ou Arccotg ou cotg^{-1} ou $\cot^{-1}$, continue et strictement décroissante sur $]-\infty ; +\infty[$.

$x = \cot y$	**équivaut à**	$y = \mathrm{Arccot}\,x$
$y \in]0 ; \pi[$		$x \in]-\infty ; +\infty[$

En repère orthonormé , la courbe (C') de Arccot est le symétrique de la courbe (C) de cot par rapport à la droite d'équation $y = x$.



x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cot x$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{Arccot } x$	π	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

Propriétés

1. $\boxed{\cot(\text{Arccot } x) = x}$

2. $\boxed{\cot(\text{Arctan } x) = \dfrac{1}{x} \quad , \quad x \neq 0}$

Remarque

α et β sont deux arcs donnés .

Pour démontrer que $\alpha = \beta$ il suffit de démontrer que :

- $\sin\alpha = \sin\beta$ si α et β appartiennent à $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$;
- $\cos\alpha = \cos\beta$ si α et β appartiennent à $[0 ; \pi]$;
- $\tan\alpha = \tan\beta$ si α et β appartiennent à $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

Exemples

1. Soit à vérifier l'identité : $\text{Arccos } \dfrac{7}{25} = 2 \text{ Arctan } \dfrac{3}{4}$.

On appelle $\alpha = \text{Arccos } \dfrac{7}{25}$ et $\beta = \text{Arctan } \dfrac{3}{4}$. On a alors :

$$\cos\alpha = \frac{7}{25} , \quad \alpha \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{et} \quad \tan\beta = \frac{3}{4} , \; \beta \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[.$$

Le problème revient à démontrer que $\alpha = 2\beta$.

Or $2\beta \in [0\,;\pi[$ et $\alpha \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \subset \left[0\,;\pi\right]$. Il suffit donc de démontrer que $\cos\alpha = \cos 2\beta$.

$$\cos 2\beta = \frac{1-\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta} = \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{7}{25} = \cos\alpha\ .$$

Par suite $\alpha = 2\,\beta$, soit $\mathrm{Arccos}\,\frac{7}{25} = 2\ \mathrm{Arctan}\,\frac{3}{4}$.

2. Pour $x > 0$ on a $\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arccot}\,x = \frac{\pi}{2}$.

En effet , si $\alpha = \mathrm{Arctan}\,x$, alors $\tan\alpha = x$, $\alpha \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

si $\beta = \mathrm{Arccotan}\,x$, alors $\cot\beta = x$, $\beta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

$\tan\alpha = \cot\beta$, $\alpha \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\beta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, alors

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, soit $\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arccot}\,x = \frac{\pi}{2}$.

3. Soit à résoudre l'équation : $\mathrm{Arccos}\,\frac{2}{3} = -\,\mathrm{Arccos}\,x + \mathrm{Arccos}\,(-1)$.

L'équation est équivalente à :

$\mathrm{Arccos}\,x = \mathrm{Arccos}\,(-1) - \mathrm{Arccos}\,\frac{2}{3}$, $x \in [-1\,;1]$.

$\mathrm{Arccos}\,x = \pi - \mathrm{Arccos}\,\frac{2}{3}$,

soit $\alpha = \mathrm{Arccos}\,x$ et $\beta = \mathrm{Arccos}\,\frac{2}{3}$. On a alors

$\cos\alpha = x$, $\alpha \in [0\,;\pi]$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\beta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et

$\alpha = \pi - \beta$.

$\alpha \in [0\,;\pi]$ et $\pi - \beta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \subset \left[0\,;\pi\right]$.

L'équation est donc équivalente à

$\cos\alpha = \cos(\pi - \beta)$, c'est-à-dire $\cos\alpha = -\cos\beta$,

soit $x = -\frac{2}{3}$.

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Répondre par vrai ou faux .

1° La fonction $x \longmapsto \sin x$ admet sur $\mathbb{R}$ une fonction réciproque .

2° La fonction $x \longmapsto \cos x$ admet sur $[0 ; \pi]$ une fonction réciproque .

3° La fonction Arctg est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

4° L'équation $\text{Arcsin } x = 0$ admet comme solution $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5° L'équation $\text{Arccos } x = 0$ admet une solution unique $x = \frac{\pi}{2}$.

6° $\text{Arcsin } \frac{1}{3}$ est un arc de l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

7° $\text{Arccos}\left(-\frac{1}{3}\right)$ est un arc de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$.

8° $\text{Arccos}\left(-\frac{2}{5}\right)$ est un arc de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

9° $\sin(\text{Arccos } x) = \cos(\text{Arcsin } x) = \sqrt{1-x^2}$.

10° $\sin(\text{Arcsin } x) = \frac{\pi}{2}$ et $\cos(\text{Arccos } x) = \pi$.

11° $\text{Arcsin } 2x + \text{Arccos } 2x = \frac{\pi}{2}$.

2 Calculer chacun des arcs suivants :

$E = \text{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right) - \text{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$F = \text{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \text{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$G = \text{Arctan}\left(-\sqrt{3}\right) - \text{Arctan}(-1)$.

$H = \text{Arccot}\left(\sqrt{3}\right) + \text{Arccot}(-1)$.

3 On donne : $a = \text{Arccos}\,\frac{3}{5}$ et $b = \text{Arcsin}\,\frac{12}{13}$.

Calculer $\cos(a+b)$ et $\sin(a-b)$.

4 Etablir les relations suivantes :

1° $2\,\text{Arctan}\frac{1}{2} + \text{Arccos}\frac{4}{5} = \frac{\pi}{2}$

2° $\text{Arccos}\,\frac{5}{13} = 2\,\text{Arctan}\,\frac{2}{3}$

3° $2\,\text{Arccos}\frac{3}{4} = \text{Arccos}\frac{1}{8}$

4° $\text{Arcsin}\,\frac{4}{5} + \text{Arcsin}\,\frac{5}{13} + \text{Arcsin}\,\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$

5° $\text{Arccos}\,\frac{3}{5} = 2\,\text{Arctan}\frac{1}{2}$

6° $\text{Arctan}\,\frac{1}{2} + \text{Arctan}\,\frac{1}{5} + \text{Arctan}\,\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

5 Simplifier chacune des expressions suivantes :

$A = \cos(\text{Arcsin}\,x)$	$E = \tan(\text{Arcsin}\,x)$	$I = \sin^2\left(\frac{1}{2}\,\text{Arccos}\,x\right)$
$B = \sin(\text{Arccos}\,x)$	$F = \cot(\text{Arcsin}\,x)$	$J = \cos^2\left(\frac{1}{2}\,\text{Arcsin}\,x\right)$
$C = \sin(2\,\text{Arcsin}\,x)$	$G = \tan(2\,\text{Arctg}\,x)$	$K = \sin^2\left(\frac{1}{2}\,\text{Arcsin}\,x\right)$
$D = \cos(2\,\text{Arcsin}\,x)$	$H = \cos^2\left(\frac{1}{2}\,\text{Arccos}\,x\right)$	$L = \sin(\text{Arcsin}\,x + \text{Arcsin}\,y)$.

6 Résoudre chacune des équations suivantes :

1° $\sin(\text{Arctan}\,x) = 0$

2° $\cos(\text{Arctan}\,x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3° $\sin(\text{Arctan}\,x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4° $\text{Arccos}\left(\frac{2}{3}\right) = \text{Arcsin}\,x$

5° $\text{Arctan}\,3 - \text{Arctan}\,2 = \text{Arctan}\,x$

6° $\text{Arcsin}\,2x + \text{Arcsin}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$.

7 Résoudre chacune des équations suivantes :

1° $\text{Arctan } 3 + \text{Arctan } x = \dfrac{\pi}{2}$

2° $\text{Arctan } \dfrac{1}{2} + \text{Arctan } x = \dfrac{\pi}{4}$

3° $\text{Arccos } \dfrac{3}{4} + \text{Arcsin } x = \dfrac{\pi}{2}$

4° $\text{Arcsin } \dfrac{5}{13} + \text{Arcsin } x = \dfrac{\pi}{2}$

5° $\text{Arccos } \dfrac{2}{3} = - \text{Arccos } 2x + \text{Arccos } (-1)$

6° $\text{Arcsin } \dfrac{1}{2} - \text{Arccos } \dfrac{1}{3} = \text{Arcsin } x$

7° $2 \text{ Arctan } x = \text{Arctan } \dfrac{2}{x}$

8° $\text{Arctan } 2x + \text{Arctan } 3x = \dfrac{\pi}{4}, \ x > 0$

9° $\text{Arccos } (3x - 1) + \text{Arcsin } x = \dfrac{\pi}{2}$

10° $\text{Arcsin } 1 = \text{Arcsin } \dfrac{3}{5} + \text{Arcsin } x$.

Pour chercher

8 **1°** Démontrer que $\text{Arctan } x + \text{Arctan } \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}, \ x > 0$.

2° Démontrer que $\text{Arctan } x + \text{Arctan } \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}, \ x < 0$.

3° Démontrer que $\text{Arctan } \dfrac{1}{2} + \text{Arctan } \dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$.

En déduire la valeur de $\text{Arctan } 2 + \text{Arctan } 3$.

9 Montrer que , si $x > 0$, $\text{Arctan } (1 + x) - \text{Arctan } x = \text{Arccot } (1 + x + x^2)$.

En déduire une expression simple pour la somme :

$S_n = \text{Arccot } 3 + \text{Arccot } 7 + \text{Arccot } 13 + ... + \text{Arccot } (1 + n + n^2) , \ n \in \mathbb{N}^*$.

Trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

$\boxed{10}$ Dans le tableau suivant , une seule des réponses proposées à chaque question est correcte . Dire laquelle en justifiant .§

N°	Questions	Réponses		
		a	b	c
1	Si $f(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$ avec $x \in \,]-\infty\,;-1[$, alors	$f(x) = \pi + 2\text{Arctan}\,x$	$f(x) = -\,2\text{Arctan}\,x$	$f(x) = \pi - 2\text{Arctan}\,x$
2	Une solution de l'équation $\cos\left(\text{Arcsin}\,\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est	$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	1	2
3	Arcsin $(2-3x)$ est définie pour	$-1 \leqslant x < 1$	$\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$	$x \in \mathbb{R}$
4	$\cos\,[\text{Arcsin}\,(3x-2)] =$	$3x-2$	$2x-3$	$\sqrt{1-(3x-2)^2}$

$\boxed{11}$ On considère la fonction f définie pour $x \in \,]-1\,;1[$, par $f(x) = \text{Arctan}\,\dfrac{2x}{1-x^2}$.

1° Calculer la dérivée f' de f . En déduire que $f(x) = 2\ \text{Arctan}\ x$.

2° Calculer x , sachant que $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - 2\ \text{Arctan}\ \dfrac{1}{2}$.

3° Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation .

4° Calculer la dérivée seconde de f .

Étudier son signe et conclure .

5° Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormal $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$.

6° a) La fonction f admet-elle une réciproque f^{-1} ?

b) Si oui , trouver le domaine de définition de f^{-1} et son expression sous la forme $f^{-1}(x)$.

c) Tracer la courbe représentative (C') de f^{-1} dans le même repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

3 FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Un peu d'histoire

LA TRIGONOMÉTRIE *a vu ses débuts très loin dans l'antiquité.*

Aux V**^{e} **et IV**^{e} **siècle avant J.C., *les astronomes* ***babyloniens*** *se sont intéressés à la cotangente dont ils ont construit une table. L'unité utilisée était le degré qui est lié au partage du cercle en six parties de 60º (60 était la base numérique des Babyloniens).*

Les Grecs *ont profité des résultats des Babyloniens pour trouver les relations entre les angles dans un cercle et les longueurs des cordes sous-tendues. Par exemple :*

ARISTARQUE (310 - 230 Av. J.C.) *a établi le rapport de la distance de la terre à la lune à celle de la terre au soleil.*

HIPPARQUE (180 - 125 Av. J.C.), *considéré comme le PÈRE DE LA TRIGONOMÉTRIE a dressé une table des cordes (on associait les angles ou les arcs aux cordes) qui a préparé la table des sinus.*

PTOLÉMÉE (90 - 168 Ap. J.C.) *a travaillé sur ces mêmes tables dans son livre* ***"L'ALMAGESTE"*** *sur l'astronomie.*

Plus tard, les ***Hindous*** *ont utilisé la "demi-corde de l'arc double" et lui ont donné un nom qui est devenu le sinus actuel.*

Les mathématiciens ***Arabes du Moyen Age,*** *puis les* ***Latins,*** *ont perfectionné les tables et les méthodes de calculs trigonométriques.*

La notion d'angles orientés et leurs mesures en radians, sont apparues au ***XVIII**^{e} **siècle*** *avec* ***EULER.*** *Ce radian, qui permet d'associer angle et longueur, devient, dès le début du XX*^{e} *siècle, l'unité légale utilisée par les scientifiques.*

PLAN DU CHAPITRE

«Ce qui est d'une hypocrisie insupportable c'est d'accepter les privilèges d'une classe sans en accepter les fonctions» .

André MAUROIS

Activité 1

1° Résoudre chacune des équations suivantes :

$\sin 2x = 0$; $\cos 3x = 0$; $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$; $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

2° a) Étudier le signe de $\sin 2x$ dans $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Étudier le signe de $\cos 3x$ dans $[0 ; \pi]$.

Activité 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2\sin 3x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1° Quel est le domaine de définition de la fonction f ?

2° a) Calculer $f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$. Déduire que f est périodique et donner sa période.

b) Expliquer pourquoi il suffit d'étudier les variations de f dans $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$.

3° a) Vérifier que $f(x) + f\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = 0$.

b) Que représente le point $I\left(\frac{\pi}{3} ; 0\right)$ pour la courbe (C) ?

c) Expliquer pourquoi il suffit d'étudier les variations de f dans $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$.

4° Étudier le sens de variation de f et tracer (C) dans $\left[0 ; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Activité 3

A) Soit f la fonction définie par :

$f(x) = 3\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1° Démontrer que f est périodique et de période $\frac{\pi}{2}$.

2° Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe dans $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

3° Calculer $f\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)$.

Que représente la droite (d) d'équation $x = -\frac{\pi}{12}$ pour la courbe (C) ?

B) Soit h la fonction définie par $h(x) = a\cos(bx + c)$ où a et b sont deux réels non nuls et c un réel quelconque .

Montrer que la droite (d) d'équation $x = -\frac{c}{b}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction h .

PLAN D'ÉTUDE DE LA FONCTION

$x \longmapsto a \sin(bx + c)$ OU $x \longmapsto a \cos(bx + c)$ (a et b sont deux réels non nuls et c un réel)

• Une telle fonction est définie et continue pour tout réel x .

• Elle est périodique et de période $\dfrac{2\pi}{|b|}$; il suffit donc de l'étudier sur un intervalle d'amplitude $\dfrac{2\pi}{|b|}$; soit par exemple sur $\left[0 ; \dfrac{2\pi}{|b|}\right]$ ou $\left[-\dfrac{\pi}{|b|} ; \dfrac{\pi}{|b|}\right]$ ou $\left[\dfrac{\pi}{|b|} ; \dfrac{3\pi}{|b|}\right]$ etc ......

Lequel choisir ? La symétrie de la courbe permet de le savoir .

- Pour la fonction $x \longmapsto a \sin(bx + c)$, le centre de symétrie de sa courbe est le point $I\left(-\dfrac{c}{b} ; 0\right)$ (voir activité 2 3° b)) .

- Pour la fonction $x \longmapsto a \cos(bx + c)$, la droite d'équation $x = -\dfrac{c}{b}$ est un

axe de symétrie de la courbe de cette fonction (voir activité 3 , B)) .

On choisit l'intervalle d'amplitude $\dfrac{2\pi}{|b|}$ où l'élément de symétrie (centre ou

axe) est le milieu de cet intervalle . On achève la construction de cette courbe

par symétrie . Les autres parties de la courbe , se déduisent par translations de vecteurs $k . \dfrac{2\pi}{|b|}\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}^*$.

• Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$; on calcule $f'(x)$, on étudie son signe dans l'intervalle d'étude , puis on dresse le tableau de variation de f . On choisit quelques points particuliers et on construit la courbe représentative .

EXEMPLES

1. Soit à étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = 3 \sin 3x$ et à tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

• La fonction f est définie et continue pour tout réel x .

• $f\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 3 \sin 3\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 3 \sin 3x = f(x)$; f est donc périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$. Il suffit

donc de l'étudier dans l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

• $f(-x) = 3 \sin(-3x) = -3 \sin 3x = -f(x)$; f est donc impaire ; (C) admet l'origine $O\,(0\,;0)$ comme centre de symétrie ; on peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$.

• Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$.
$f'(x) = 9 \cos 3x$.

• $f'(x) = 0$ si $9 \cos 3x = 0$, soit $\cos 3x = 0$, pour $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$; et comme $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$, on prend alors $x = \frac{\pi}{6}$ (pour $k = 0$) .

$0 < x < \frac{\pi}{6}$ donne

$0 < 3x < \frac{\pi}{2}$ alors

$\cos 3x > 0$ et $f'(x) > 0$

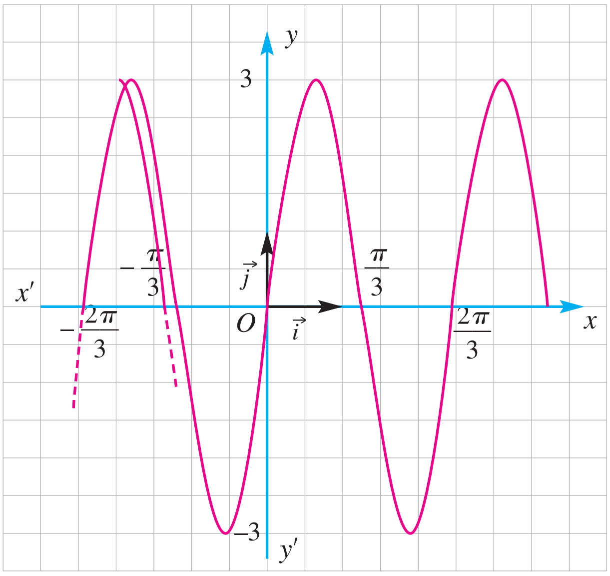
$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$ donne

$\frac{\pi}{2} < 3x < \pi$, alors

$\cos 3x < 0$ et $f'(x) < 0$.

• Tableau de variation

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0



On achève la construction de (C) dans $\left[-\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{3}\right]$ par symétrie par rapport à O .
Les autres parties de (C) se déduisent par translations de vecteurs $k \,.\, \frac{2\pi}{3}\,\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}^*$.

2. Soit à étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = 2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ et à tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

• Cette fonction f est définie et continue pour tout réel x .

• $f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = 2\cos\left[3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right] = 2\cos\left(3x+2\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$$= 2\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right) = f(x).$$

f est donc périodique de période $\frac{2\pi}{3}$. Il suffit donc de l'étudier dans un intervalle d'amplitude $\frac{2\pi}{3}$

.

• $f\left(-\frac{2\pi}{9}-x\right) = 2\cos\left[3\left(-\frac{2\pi}{9}-x\right)+\frac{\pi}{3}\right] = 2\cos\left(-3x-\frac{\pi}{3}\right)$

$= 2\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right) = f(x)$. La droite (d) d'équation

$x = -\dfrac{\frac{\pi}{3}}{3} = -\frac{\pi}{9}$ est un axe de symétrie de (C) .

• L'intervalle d'étude est $\left[-\frac{\pi}{9}-\frac{\pi}{3} ; -\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{3}\right]$, soit $\left[-\frac{4\pi}{9} ; \frac{2\pi}{9}\right]$ qui a pour milieu la valeur $-\frac{\pi}{9}$.

La symétrie par rapport à (d) réduit cet intervalle à $\left[-\frac{\pi}{9} ; \frac{2\pi}{9}\right]$.

• Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier , sur $\left[-\frac{\pi}{9} ; \frac{2\pi}{9}\right]$.

$f'(x) = -6\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$.

$f'(x) = 0$ si $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right) = 0$, soit pour $3x+\frac{\pi}{3} = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, $x = -\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}$.

Comme $x \in \left[-\frac{\pi}{9} ; \frac{2\pi}{9}\right]$, on prend alors $x = -\frac{\pi}{9}$ (pour $k = 0$) ou $x = \frac{2\pi}{9}$ (pour $k = 1$) .

$-\frac{\pi}{9} < x < \frac{2\pi}{9}$ donne $0 < 3x+\frac{\pi}{3} < \pi$

alors $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right) > 0$ et $f'(x) < 0$.

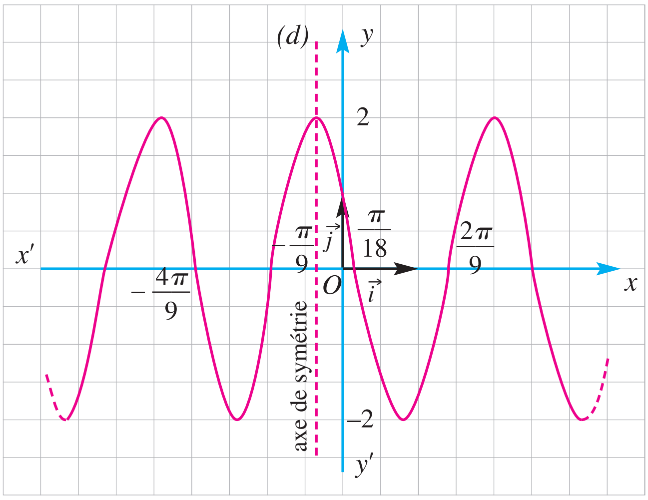
• Tableau de variation .

x	$-\dfrac{\pi}{9}$		$\dfrac{2\pi}{9}$
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	2	$\searrow$	-2

$f(0) = 2\cos\dfrac{\pi}{3} = 1$;

(0 ; 1) appartient à

(C) .



$f(x) = 0$ ou $2\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$, pour $3x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, soit $x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k\pi}{3}$ et comme

$x \in \left[-\dfrac{\pi}{9} ; \dfrac{2\pi}{9}\right]$, on prend $x = \dfrac{\pi}{18}$ (pour $k = 0$) le point $\left(\dfrac{\pi}{18} ; 0\right)$ appartient à (C) .

On achève la construction de (C) dans $\left[-\dfrac{4\pi}{9} ; \dfrac{2\pi}{9}\right]$ par symétrie par rapport à (d) .

Les autres parties de (C) se déduisent par translations de vecteurs $k \,.\, \dfrac{2\pi}{3}\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}^*$.

3. Soit à étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ et à tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

• Cette fonction f est définie et continue pour tout réel x .

• $f(x + \pi) = \sin\left[2(x + \pi) - \dfrac{\pi}{6}\right] = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = f(x)$.

f est donc périodique de période π . Il suffit de l'étudier dans un intervalle d'amplitude π .

• $f\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = \sin\left[2\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) - \dfrac{\pi}{6}\right] = \sin\left(-2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -f(x)$;

le point $I\left(\dfrac{\pi}{12} ; 0\right)$ est donc un centre de symétrie de (C) .

L'intervalle d'étude est donc $\left[+\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}\right]$ soit $\left[-\dfrac{5\pi}{12} ; \dfrac{7\pi}{12}\right]$ qui a pour milieu $\dfrac{\pi}{12}$.

La symétrie par rapport à I réduit cet intervalle à $\left[\frac{\pi}{12} ; \frac{7\pi}{12}\right]$.

• Cette fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $\left[\frac{\pi}{12} ; \frac{7\pi}{12}\right]$.

• $f'(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

$f'(x) = 0$ si $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$, soit pour $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$, comme $x \in \left[\frac{\pi}{12} ; \frac{7\pi}{12}\right]$,

on prend $x = \frac{\pi}{3}$ (pour $k = 0$) .

Si $\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{3}$ alors

$\frac{\pi}{6} < 2x < \frac{2\pi}{3}$ et

$0 < 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$, d'où

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) > 0$ et $f'(x) > 0$.

Si $\frac{\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{12}$ alors

$\frac{2\pi}{3} < 2x < \frac{7\pi}{6}$ et

$\frac{\pi}{2} < 2x - \frac{\pi}{6} < \pi$, d'où

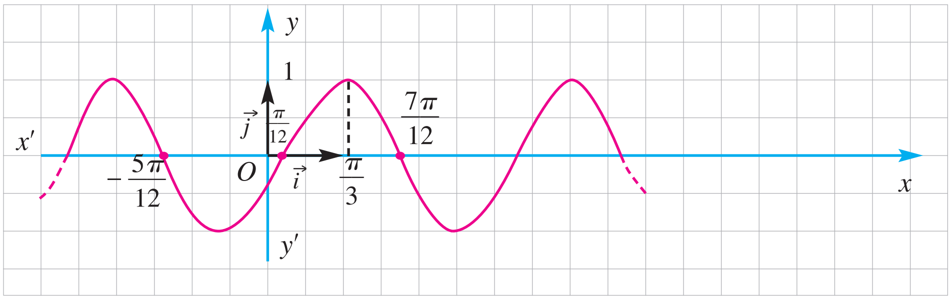
$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) < 0$ et $f'(x) < 0$.

• Tableau de variation .

x	$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{12}$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

Le point $\left(\frac{\pi}{4} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ appartient à (C) .

Le point $\left(0 ; -\frac{1}{2}\right)$ appartient à (C) .



On achève la construction de (C) dans $\left[-\frac{5\pi}{12} ; \frac{7\pi}{12}\right]$ par symétrie par rapport à I .

Les autres parties de (C) se déduisent par translations de vecteurs $k \cdot \pi\,\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}^*$.

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Répondre par vrai ou faux .

1° La fonction f définie par $f(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ est périodique de période 2π .

2° La fonction f définie par $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ est périodique de période 2π .

3° $f'(x) = 9\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ est la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = 3\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$.

4° Si la fonction f est définie par $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. Il suffit de l'étudier dans $\left[\frac{-5\pi}{8} ; \frac{3\pi}{8}\right]$.

5° f est la fonction définie par $f(x) = -3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Sa courbe représentative (C) admet la droite (d) d'équation $x = -\frac{\pi}{6}$ comme axe de symétrie .

6° f est la fonction définie par $f(x) = -2\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Sa courbe représentative (C) admet le point $I\left(-\frac{\pi}{15} ; 0\right)$ comme centre de symétrie .

7° f et g sont deux fonctions définies par $f(x) = 5\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ et $g(x) = 5\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$.

La représentation graphique de g peut être déduite de celle de f par la translation de vecteur $\frac{2\pi}{3}\vec{i}$.

2 Résoudre , dans l'intervalle donné , chacune des équations suivantes .

1° $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad [0 ; \pi]$ **2°** $3\sin\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad [0 ; \pi]$ **3°** $2\cos\left(-2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad [-\pi ; \pi]$

3 Résoudre , dans l'intervalle donné , chacune des inéquations suivantes .

1° $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) < 0 \quad [0 ; \pi]$ **2°** $-4\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) < 0 \quad [0 ; \pi]$ **3°** $\sin\left(-3x + \frac{\pi}{3}\right) > 0 \quad [-\pi ; \pi]$

4 Étudier le signe de chacune des expressions suivantes dans l'intervalle donné .

1° $\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ sur $\left[\frac{\pi}{8}\,;\,\frac{3\pi}{8}\right]$.

2° $\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$ sur $\left[-\frac{2\pi}{9}\,;\,\frac{\pi}{9}\right]$.

5 Donner la période de la fonction f dans chacun des cas suivants .

1° $f(x)=\sin\left(-x+\frac{\pi}{6}\right)$

2° $f(x)=\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$

3° $f(x)=\sin\left(2\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$

4° $f(x)=\cos\left(-\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

5° $f(x)=\sin\left(-\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

6° $f(x)=\cos\left(-3\pi x+\frac{\pi}{6}\right)$

Pour chercher

6 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\sin\frac{x}{2}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1° Étudier la parité et la périodicité de f .

2° Étudier le sens de variation de f sur $[0\,;2\pi]$.

3° Tracer (C) .

7 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ et (C) sa courbe représentative .

1° Montrer que $T=\frac{4\pi}{3}$ est la période de f .

2° Montrer que le point $I\left(-\frac{2\pi}{9}\,;0\right)$ est un centre de symétrie de (C) .

3° Montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[-\frac{2\pi}{9}\,;\,\frac{4\pi}{9}\right]$.

4° Étudier les variations de f et tracer (C) dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

8 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

On désigne par (C) sa courbre représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1° Montrer que f est périodique et de période 4π .

2° Montrer que la droite d'équation $x = -\dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de (C) .

3° Montrer que le point $I\left(\dfrac{\pi}{2}\,;0\right)$ est un centre de symétrie de (C) .

4° Montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

5° Étudier les variations de f sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Construire (C) .

6° Résoudre $f(x) = 0$. Indiquer les solutions appartenant à $[0\,;4\pi]$.

9 **(Application en éléctricité) .**

La différence de potentiel , mesurée en volts , entre deux points d'un circuit est

$u(t) = 220\sqrt{2}\sin\left(100\,\pi\,t + \dfrac{4\pi}{5}\right)$ où t est en secondes et $u(t)$ en volts .

1° Quelle est la période de la fonction u ?

2° Représenter graphiquement la fonction u .

(Prendre sur l'axe $x'Ox$ 10 cm pour représenter $\dfrac{1}{10}s$ et sur l'axe $y'Oy$ 1 cm pour représenter 100 volts) .

10 On considère la fonction f définie sur $[0\,;2]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-3x+1}{x-2} & \text{pour } x \in [\,0\,;1[\\ 2\sin\dfrac{\pi}{2}x & \text{pour } x \in [1\,;2] \end{cases} .$$

1° Étudier la continuité de f sur $[0\,;2]$.

2° La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

3° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative .

4 PRODUIT VECTORIEL PRODUIT MIXTE

Un peu d'histoire

Le produit vectoriel est un outil essentiel en Physique et en Mécanique où il sert , par exemple , à définir le moment d'une force en un point .
L'origine de cette notion remonte aux travaux de ***Hamilton (1805-1865)*** *dans sa théorie des quaternions publiée en 1853 dans ses* ***«Lectures on Quaternions»*** *et dans un ouvrage, en deux volumes, publié après sa mort, en 1886 , sous le titre de* ***«Elements of Quaternions»*** *.*
En 1832 , ***Hermann Grassmann (1809-1877)*** *, considère les distances AB et BA et constate qu'elles sont opposées à cause de leur direction . Le concept de «somme géométrique» lui permet de généraliser la relation AB + BC = AC pour des points quelconques A , B , C du plan . Il est conduit au «produit géométrique» et déduit une relation de la forme A(B + C) = AB + AC, en remarquant que la «multiplication géométrique» n'est pas commutative. Grassmann affirme que le «produit géométrique» de deux vecteurs signifie la surface contenue dans le parallélogramme déterminé par ces vecteurs .*
Le ***«produit géométrique»*** *de Grassmann est similaire à notre produit vectoriel moderne .*
Le développement de ces travaux est dû au physicien ***James Maxwell (1831 - 1879)*** *dans son célèbre* ***«Treatise on Electricity and Magnetism»*** *, publié en 1873 .*
L'établissement de l'analyse vectorielle, comme discipline autonome , fut l'œuvre de ***Josiah Gibbs (1839-1903)*** *et de l'ingénieur* ***Oliver Heaviside (1850-1925).***
La transition entre tous ces travaux est effectuée par ***William Clifford (1845-1879).*** *Il semble que ce dernier fut le premier à donner la formulation moderne du produit vectoriel .*

PLAN DU CHAPITRE

« Nous avons des produits , mais nous n'avons plus d'œuvres ...»

Honoré DE BALZAC

A Produit vectoriel

Activité préparatoire

1° Construire un parallélogramme $OABC$ sachant que $OA = 3$, $OC = 2$ et $\widehat{AOC} = 30°$.

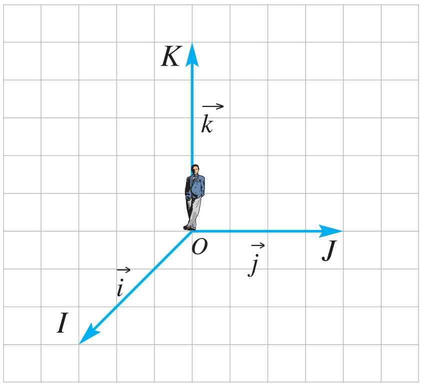
2° Calculer la norme du produit vectoriel $\vec{v} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}$ et en déduire l'aire du parallélogramme $OABC$.

3° Le vecteur $\vec{v}$ est-il parallèle au plan (ABC) ?

RAPPEL

1° Repère direct et repère indirect

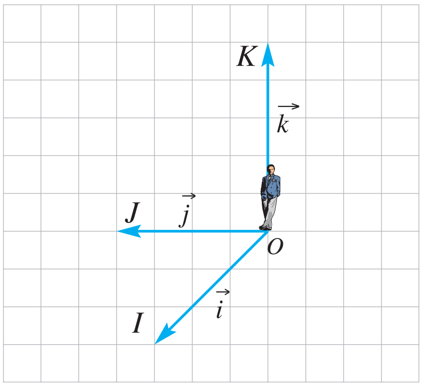
L'espace est rapporté au repère $(O , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$.



J est à **gauche** du **personnage ,**

alors le repère $\left(O , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}\right)$ est **direct** et

la base $\left(\vec{i} , \vec{j} , \vec{k}\right)$ directe .



J est à **droite** du **personnage** ,

alors le repère $\left(O , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}\right)$ est **indirect**

et la base $\left(\vec{i} , \vec{j} , \vec{k}\right)$ indirecte .

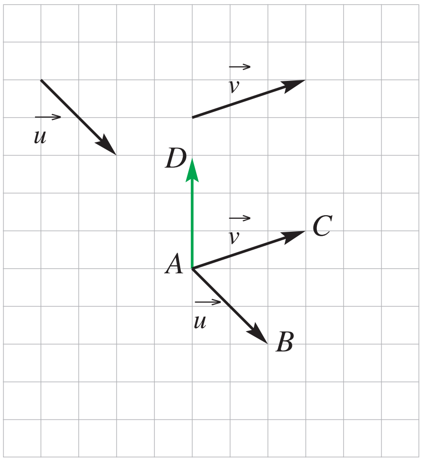
La base $(\vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ change de sens si on permute deux de ses vecteurs ou bien si on change le sens de l'un de ses vecteurs .

La base $(\vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ ne change pas de sens si on effectue une permutation circulaire à ses vecteurs .

2° Définition du produit vectoriel

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace . On appelle **produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, le vecteur** , noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$ (qu'on lit $\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$) , défini comme suit :

- lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$



- lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires , soit A , B , C trois points de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{AD}$ tel que :

• $\overrightarrow{AD}$ est **orthogonal** au plan ***(ABC)*** (direction)

($\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$) .

• le trièdre $(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AD})$ **est direct** (sens)

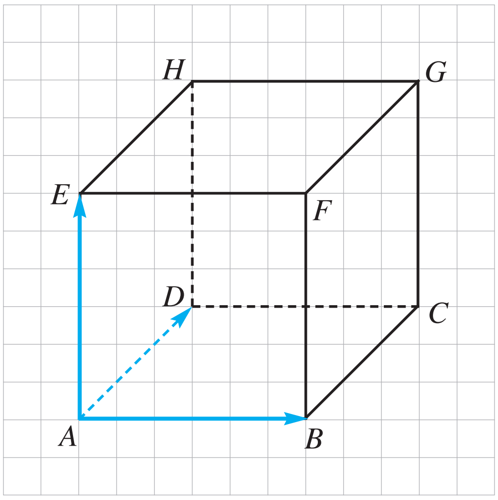
($(\vec{u} , \vec{v} , \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe) .

• $\|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \sin(\widehat{BAC})$ (norme)

$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u} , \vec{v})$.

EXEMPLE

ABCDEFGH est un cube . Dans le repère $(A , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE})$ on a : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$.



En effet :

• $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal au plan *(ABCD)*,

• le trièdre $(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE})$ est direct,

• $\|\overrightarrow{AE}\| = 1$

et $\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AD}\| \times \sin(\widehat{BAD}) = 1 \times 1 \times 1 = 1$.

3° Propriétés du produit vectoriel

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs libres de l'espace .

Le tableau suivant groupe les principales propriétés qui ont été acquises en 2ème année secondaire .

• $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

• $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$

• $(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$ **, où α est un réel**

• $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$

• **Si $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, alors $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$**

• **Si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires**

• $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$ **vaut deux fois la mesure de l'aire du triangle *ABC***

• **Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et unitaires , et si $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, alors la base $(\vec{u} , \vec{v} , \vec{w})$ est directe**

• **Lorsque le point *C* se déplace sur une parallèle *(D)* à *(AB)* , alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ ne change pas**

1 DÉTERMINANT D'ORDRE 3

On appelle **déterminant d'ordre 3** ou **déterminant du troisième ordre** ,

tout tableau de la forme : $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$, où a , b , c , a' , b' , c' , a'' , b'' et c'' sont des réels .

Un tel **déterminant** a une **valeur réelle égale** à :

$$a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} = a(b'c''-c'b'')-b(a'c''-c'a'')+c(a'b''-b'a'').$$

(On dit que c'est le développement de ce déterminant suivant la première colonne) .

Cette **valeur est aussi égale** à :

$$a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - a'\begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + a''\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = a(b'c''-c'b'')-a'(bc''-cb'')+a''(bc'-cb').$$

(On dit que c'est le développement de ce déterminant suivant la première ligne) .

EXEMPLE

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(1-0)-1(1+0)-3(0+2) = -5$ (en développant suivant la première colonne)

ou $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(1-0)-1(1+0)-2(0+3) = -5$ (en développant suivant la première ligne) .

2 EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT VECTORIEL

On considère , dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O\ ; \vec{i}\ , \vec{j}\ , \vec{k})$, les deux vecteurs $\vec{u}\ (X\ , Y\ , Z)$ et $\vec{u'}\ (X'\ , Y'\ , Z')$. On a $\vec{u} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ et $\vec{u'} = X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k}$, d'où :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) \wedge (X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k})$$

$$= XX'\ \vec{i} \wedge \vec{i} + XY'\ \vec{i} \wedge \vec{j} + XZ'\ \vec{i} \wedge \vec{k} + YX'\ \vec{j} \wedge \vec{i} + YY'\ \vec{j} \wedge \vec{j}$$
$$+ YZ'\ \vec{j} \wedge \vec{k} + ZX'\ \vec{k} \wedge \vec{i} + ZY'\ \vec{k} \wedge \vec{j} + ZZ'\ \vec{k} \wedge \vec{k}$$

$$= XY'\vec{i} \wedge \vec{j} + XZ'\vec{i} \wedge \vec{k} + YX'\vec{j} \wedge \vec{i} + YZ'\vec{j} \wedge \vec{k} + ZX'\vec{k} \wedge \vec{i} + ZY'\vec{k} \wedge \vec{j}$$

car $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$ (vecteurs colinéaires) .

Si le **repère** $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ est **orthonormé direct** , alors :

$\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = -\vec{k} \wedge \vec{j} = \vec{i}$ et $\vec{k} \wedge \vec{i} = -\vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j}$.

Par suite : $\vec{u} \wedge \vec{v} = (YZ' - ZY')\,\vec{i} + (ZX' - XZ')\,\vec{j} + (XY' - YX')\,\vec{k}$,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & X & X' \\ \vec{j} & Y & Y' \\ \vec{k} & Z & Z' \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix}$$

EXEMPLE

On considère , dans un repère orthonormal direct $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$, les points $A\ (3\,;1\,;0)$, $B\,(2\,;-1\,;1)$ et $C\,(-1\,;0\,;-1)$. Soit à calculer les composantes scalaires du vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

On a : $\overrightarrow{AB}\,(-1\,;-2\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-4\,;-1\,;-1)$. D'où :

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3\,\vec{i} - 5\,\vec{j} - 7\,\vec{k}\text{ , d'où } \vec{w}\ (3\,;-5\,;-7)\ .$$

3 APPLICATIONS AU PRODUIT VECTORIEL

À l'aide du **produit vectoriel** , on peut :
- **démontrer** que **trois points** sont **alignés** ,
- **calculer l'aire d'un triangle ,**
- **calculer** le **sinus de l'angle** de deux **vecteurs** ,
- **déterminer** un **vecteur normal à un plan ,**
- **calculer** la **distance** d'un **point** à une **droite** .

4 EXERCICE RÉSOLU

On considère , dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$, les points $A\,(-1\,;0\,;2)$, $B\,(0\,;2\,;0)$, $C\,(1\,;4\,;-2)$ et $D(1\,;1\,;1)$.

1° Montrer que les points A , B et C sont alignés .

2° Calculer l'aire du triangle DAB .

3° Calculer le sinus de l'angle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

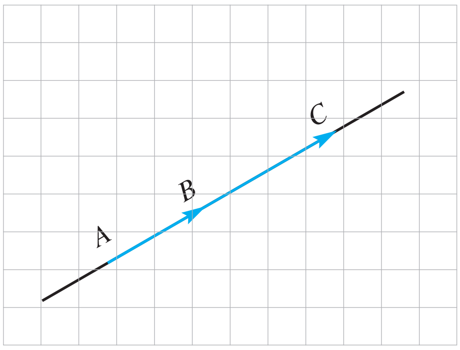
4° Déterminer un vecteur normal au plan (ABD) .

5° Calculer la distance du point D à la droite (AB) .

1° A , B et C sont alignés si , et seulement si , deux vecteurs distincts formés chacun par deux de ces points sont colinéaires , c'est-à-dire deux vecteurs dont le produit vectoriel est le vecteur nul .

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \vec{0} \ .$$

Il en résulte que les points A , B et C sont alignés .



2° $\mathscr{A}_{\text{du triangle } ABD} = \dfrac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \right\|$

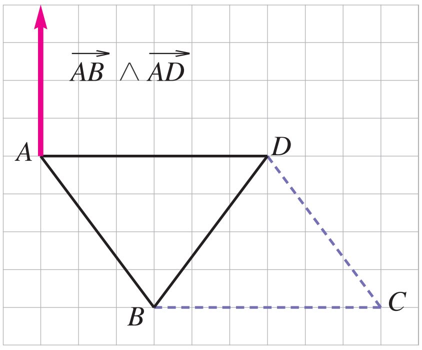
$\left(\text{ou } \mathscr{A}_{\text{du parallélogramme } ABCD} = \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \right\| \right).$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -3\,\vec{j} - 3\,\vec{k} \ ,$$

$\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \right\| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$ et

$\mathscr{A}_{\text{du triangle } ABD} = \dfrac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \right\| = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (unités d'aire) .



3° On sait , d'après la définition du produit vectoriel , que :

$\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \right\| = AB \times AD \times \sin\left(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} \right)$. D'où :

$$\sin\left(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} \right) = \frac{\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \right\|}{AB \times AD}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2} \times \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ .$$

4° D'après la définition du produit vectoriel ,

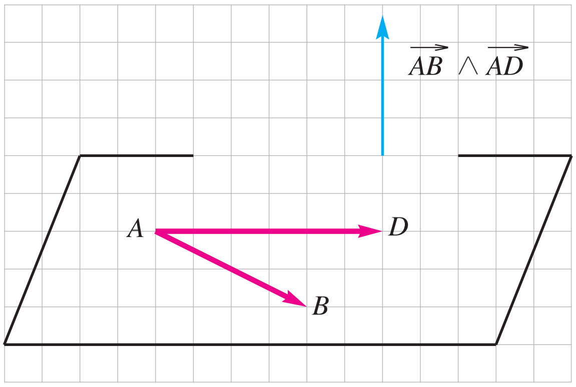
$\vec{w} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ est un vecteur dont la direction est orthogonale au plan (ABD) .

Il en résulte que

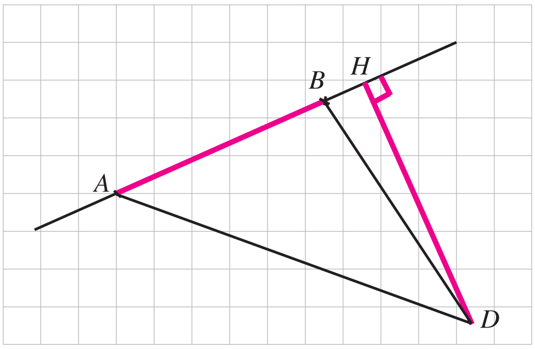
$\vec{w}$ (0;–3;–3) est un vecteur normal au plan (ABD) .

Notons que tout vecteur

colinéaire à $\vec{w}$ est un vecteur normal au plan (ABD) .



5° Si DH est la mesure du segment-hauteur relatif au côté $[AB]$ du triangle DAB , alors : d'une part :



$$\mathscr{A}_{\text{du triangle } ABD} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} ,$$

d'autre part : $\mathscr{A}_{\text{du triangle } ABD} = \dfrac{1}{2} \times DH \times AB$.

D'où : $DH = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|}{AB} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$ (unités de longueur) .

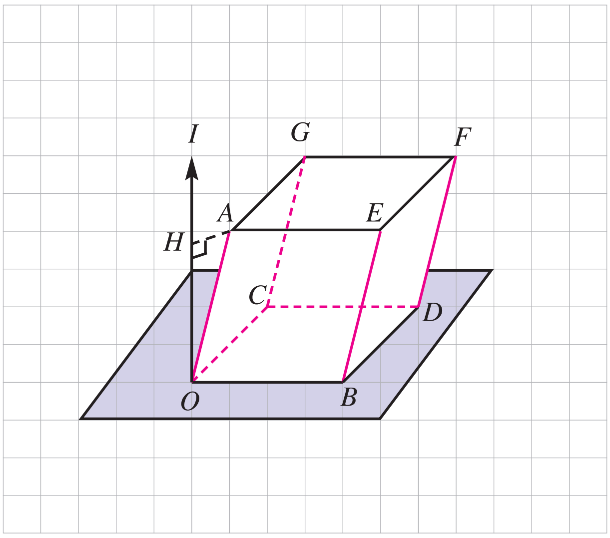
La distance du point D à la droite (AB) est donc égale à $\sqrt{2}$.

B Produit mixte

Activité préparatoire

Dans la figure ci-contre *OBDCAEFG* est un parallélépipède ,

$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}$ et H le projeté orthogonal de A sur (OI).



1° Que dire de la position de (OI) par rapport au plan $(OBDC)$? Justifier .

2° Est-il vrai que

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OI}$?

Justifier .

3° Que représente $\left\|\overrightarrow{OI}\right\| = \left\|\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}\right\|$ pour le parallélogramme *OBDC* , base du parallélépipède *OBDCAEFG* ?

4° Que représente $[OH]$ pour le parallélépipède *OBDCAEFG* ?

5° Déduire de ce qui précède une expression donnant le volume du parallélépipède *OBDCAEFG* .

1 DÉFINITION DU PRODUIT MIXTE DE TROIS VECTEURS

On appelle **produit mixte** de trois vecteurs libres $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{V_3}$, **pris dans cet ordre** , le **produit scalaire de** $\overrightarrow{V_1}$ **par** $(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3})$. On note ce produit par $(\overrightarrow{V_1} , \overrightarrow{V_2} , \overrightarrow{V_3})$ ou par $[\overrightarrow{V_1} , \overrightarrow{V_2} , \overrightarrow{V_3}]$.

On écrit :

$$\boxed{(\overrightarrow{V_1} , \overrightarrow{V_2} , \overrightarrow{V_3}) = [\overrightarrow{V_1} , \overrightarrow{V_2} , \overrightarrow{V_3}] = \overrightarrow{V_1} \cdot (\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3})}$$

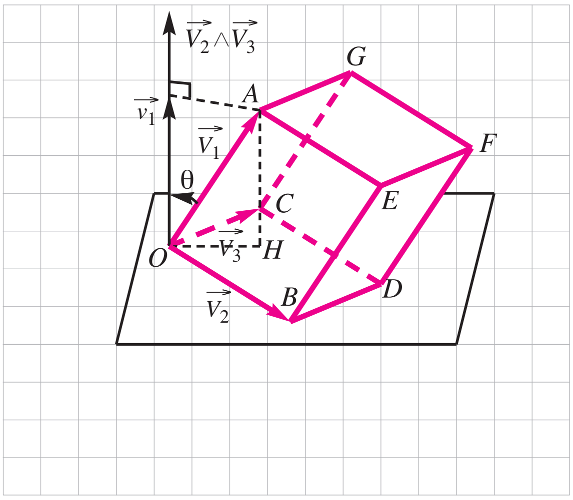
Le produit mixte de trois vecteurs est un réel .

2 INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

OBDCAEFG est un parallélépipède tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{V_3}$.

Soit $\overrightarrow{v_1}$ le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{V_1}$ sur le support du vecteur $(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3})$.

La valeur absolue du produit mixte n'est autre alors que le produit de $\|\overrightarrow{v_1}\|$ par l'aire du parallélogramme de côtés ayant $\|\overrightarrow{V_2}\|$ et $\|\overrightarrow{V_3}\|$ pour mesures. Comme $(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3})$ est perpendiculaire au plan (OBC) , alors :



la valeur absolue du produit mixte est égale au volume du parallélépipède de côtés *OA* , *OB* et *OC*

Remarques

- Si le repère $(O , \overrightarrow{V_1} , \overrightarrow{V_2} , \overrightarrow{V_3})$ est direct , les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3})$ sont du même côté par rapport au plan (OBC) ; l'angle géométrique θ de ces deux vecteurs est aigu et le produit mixte est positif . (Voir figure précédente)

Si le trièdre $(O , \overrightarrow{V_1} , \overrightarrow{V_2} , \overrightarrow{V_3})$ est indirect , θ est obtus et le produit mixte est négatif .

- **Volume d'un parallélépipède - Volume d'un tétraèdre**

Le volume d'un parallélépipède de côtés *OA* , *OB* et *OC* est donné par

$V = \left|\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC})\right| = p = \mathscr{A}_{OBDC} \times AH$, où AH est la hauteur issue de A au plan $(OBCD)$.

(Voir figure précédente)

Le volume V' du tétraèdre de côtés *OA* , *OB* et *OC* , est donné par

$$V' = \frac{\mathscr{A}_{OBC} \times AH}{3} = \frac{\frac{1}{2}\mathscr{A}_{OBCD} \times AH}{3} = \frac{V}{6} .$$

D'où $V' = \dfrac{\left|\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC})\right|}{6}$.

3 PROPRIÉTÉS

1° Antisymétrie

Soit $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{V_3}$ trois vecteurs tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{V_3}$ et *OBDCAEFG* le parallélépipède construit à partir des points O , A , B et C .

Quel que soit l'ordre dans lequel on prend ces trois vecteurs , le volume géométrique du parallélépipède reste le même et par suite la valeur absolue du produit mixte de ces trois vecteurs ne change pas .

Le signe de $\left[\overrightarrow{OA}\ ,\overrightarrow{OB}\ ,\overrightarrow{OC}\right]$ dépend du sens de la base $(\overrightarrow{OA}\ ,\overrightarrow{OB}\ ,\overrightarrow{OC})$:
il change de sens si on permute deux de ses trois vecteurs et ne change pas de sens si on effectue une permutation circulaire à ses trois vecteurs.

D'où :

le produit mixte d'un triplet de trois vecteurs ne change pas si on effectue sur ces vecteurs une permutation circulaire et change de signe si on effectue sur ces vecteurs une transposition

2° Coplanéarité de trois vecteurs

Soit $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{V_3}$ trois vecteurs tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{V_3}$ et *OBDCAEFG* le parallélépipède construit à partir des points O , A , B , C .

«$\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$ sont coplanaires» équivaut à « O , A , B et C sont situés dans un même plan » équivaut à «le parallélépipède *OBDCAEFG* est applati» équivaut à «le volume algébrique de *OBDCAEFG* est nul» équivaut à $[\overrightarrow{V_1}\ ,\overrightarrow{V_2}\ ,\overrightarrow{V_3}] = 0$.

D'où :

pour que trois vecteurs de l'espace soient coplanaires , il faut et il suffit que leur produit mixte soit nul

Remarque

On admet que : $[\lambda_1\overrightarrow{V_1}\ ,\lambda_2\overrightarrow{V_2}\ ,\lambda_3\overrightarrow{V_3}] = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\,[\overrightarrow{V_1}\ ,\overrightarrow{V_2}\ ,\overrightarrow{V_3}]$, avec λ_1 , λ_2 et λ_3 trois réels .

4 EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT MIXTE DE TROIS VECTEURS

Soit , dans un **repère orthonormal direct** $(O , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$, les vecteurs $\vec{V_1}$ (X_1 , Y_1 , Z_1) , $\vec{V_2}$ (X_2 , Y_2 , Z_2) et $\vec{V_3}$ (X_3 , Y_3 , Z_3) .

$$[\vec{V_1} , \vec{V_2} , \vec{V_3}] = \vec{V_1} . (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})$$

$$= \left(X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}\right) . \left[\left(X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}\right) \wedge \left(X_3\vec{i} + Y_3\vec{j} + Z_3\vec{k}\right)\right] .$$

Or $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$ **(vecteurs colinéaires)** .

De plus , le **repère** $(\boldsymbol{O} , \vec{\boldsymbol{i}} , \vec{\boldsymbol{j}} , \vec{\boldsymbol{k}})$ est **orthonormé direct** , alors :

$\vec{i} . \vec{j} = \vec{j} . \vec{k} = \vec{k} . \vec{i} = 0$, $\vec{i} . \vec{i} = \vec{j} . \vec{j} = \vec{k} . \vec{k} = 1$ et

$\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = -\vec{k} \wedge \vec{j} = \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = -\vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j}$.

D'où :

$$[\vec{V_1} , \vec{V_2} , \vec{V_3}] = X_1(Y_2Z_3 - Y_3Z_2) - Y_1(Z_3X_2 - Z_2X_3) + Z_1(X_2Y_3 - X_3Y_2)$$

$$= \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} .$$

5 EXERCICE RÉSOLU

On donne , dans un repère orthonormé direct $(O , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$, les trois vecteurs :
$\vec{u}$ (3 ; –1 ; 0) , $\vec{v}$ (0 ; 1 ; 2) et $\vec{w}$ (1 ; 5 ; 4) .

1° Calculer le volume du parallélépipède d'arêtes $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$.

2° Préciser le sens du trièdre $(\vec{u} , \vec{v} , \vec{w})$ et en déduire celui de chacun des trièdres $(\vec{v} , \vec{u} , \vec{w})$ et $(\vec{w} , \vec{u} , \vec{v})$.

3° Calculer $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

4° Calculer $\vec{M} = \vec{OA} \wedge \vec{v}$, où A est le point de coordonnées (1 ; 5 ; 0) .

5° Montrer que les vecteurs $\vec{M}$, $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires .

1° On sait que le volume du parallélépipède d'arêtes $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{w}\|$ est donné par la valeur absolue du produit mixte : $(\vec{u}\ ,\vec{v}\ ,\vec{w}\ ) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 3(4-10) - 0(-4-0) + 1(-2-0) = -20$.

Le volume demandé est donc $|-20| = 20$ (unités de volume) .

2° Le trièdre $(\vec{u}\ ,\vec{v}\ ,\vec{w}\ )$ est de sens indirect car $(\vec{u}\ ,\vec{v}\ ,\vec{w}\ ) = -20 < 0$.

Le sens du trièdre $(\vec{v}\ ,\vec{u}\ ,\vec{w}\ )$ est opposé à celui de $(\vec{u}\ ,\vec{v}\ ,\vec{w}\ )$ car deux des trois vecteurs sont permutés , il est donc direct .

Le sens du trièdre $(\vec{w}\ ,\vec{u}\ ,\vec{v}\ )$ est le même que celui de $(\vec{u}\ ,\vec{v}\ ,\vec{w}\ )$ car une permutation circulaire est effectuée aux trois vecteurs , il est donc indirect .

3° $\vec{v} \wedge \vec{w} = (\vec{j} + 2\vec{k}) \wedge (\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}) = -6\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Alors :

$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (3\vec{i} - \vec{j}) \wedge (-6\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) = \vec{i} + 3\vec{j}$.

4° $\vec{M} = (\overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

5° Les vecteurs $\vec{M}$, $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si , et seulement si , leur produit mixte est nul .

$(\vec{M}\ ,\vec{u}\ ,\vec{w}\ ) = \begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 10(-4-0) + 2(12-0) + 1(15+1) = 0$.

Il en résulte alors que $\vec{M}$, $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires (ou parallèles à un même plan).

EXERCICES ET PROBLÈMES

Dans tous les exercices et problèmes suivants , le repère $(O\ ,\vec{i}\ ,\vec{j}\ ,\vec{k}\ )$ est supposé orthonormal direct .

Pour tester les connaissances

1 Répondre par vrai ou faux .

1° Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$, alors les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux à deux orthogonaux ($\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls).

2° Si A , B et C sont trois points non alignés , alors l'ensemble des points M de l'espace tels que $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ est une droite parallèle à (AC) .

3° Si $(O\ ,\vec{i}\ ,\vec{j}\ ,\vec{k}\ )$ est orthonormal direct , alors $(O\ ,\vec{i} + \vec{j}\ ,\vec{j} + \vec{k}\ ,\vec{k} + \vec{i}\ )$ est direct .

4° Le produit vectoriel de deux vecteurs est une opération commutative dans l'ensemble des vecteurs de l'espace .

5° Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est égal au volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.

2 Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs orthogonaux et tels que $\left\|\vec{a}\right\| = 4$ et $\left\|\vec{b}\right\| = 5$.

1° Simplifier : $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge (\vec{a} - \vec{b})$ et $(3\vec{a} - \vec{b}) \wedge (2\vec{a} + \vec{b})$.

2° Calculer : $\left\|(\vec{a} + \vec{b}) \wedge (\vec{a} - \vec{b})\right\|$ et $\left\|(3\vec{a} - \vec{b}) \wedge (2\vec{a} + \vec{b})\right\|$.

3 Comment faut-il choisir les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ pour que leur somme et leur différence soient deux vecteurs colinéaires ?

4 Démontrer que dans tout triangle ABC on a : $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}$.

5 On donne les vecteurs : $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}$, $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$, $\vec{w} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$.

Montrer que $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère orthonormal et préciser son sens .

6 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ sont quatre vecteurs tels que : $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{d} = \vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{d}$.

Démontrer que les vecteurs $(\vec{a} - \vec{d})$ et $(\vec{b} - \vec{c})$ sont colinéaires .

7 On donne $\left\|\overrightarrow{V_1}\right\| = 10$, $\left\|\overrightarrow{V_2}\right\| = 2$ et $\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = 12$. Calculer $\left\|\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}\right\|$.

8 Déterminer un vecteur unitaire $\vec{v}$ orthogonal aux deux vecteurs $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

9 Calculer le produit $(2\vec{i} - 3\vec{j}) \cdot [(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) \wedge (3\vec{i} - \vec{k})]$.

10 Soit les vecteurs $\vec{u}\left(\frac{8}{9} ; \frac{-4}{9} ; \frac{1}{9}\right)$ et $\vec{v}\left(\frac{1}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{8}{9}\right)$.

1° Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires et orthogonaux .

2° Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ pour que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit orthonormale directe .

11 On donne les vecteurs $\vec{u}$ (2 ; –1 ; 3) et $\vec{u'}$ (1 ; –1 ; 4) et on désigne par α l'angle $(\vec{u}, \vec{u'})$.

1° Calculer cos α .

2° Calculer sin α .

3° Soit OAB le triangle tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{u'}$. Calculer l'aire du triangle OAB .

12 On donne un cube $ABCDA'B'C'D'$ d'arête de mesure a et tel que le trièdre $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$ soit de sens direct .

1° Exprimer en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AA'}$ les produits vectoriels suivants :

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{A'C}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BD'}$.

2° Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que : $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \wedge (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MD}) = \vec{0}$.

13 Soit les points A (1 ; 0 ; –1) , B (2 ; 2 ; 1) et C (3 ; –2 ; 0) .

1° Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle .

2° Déterminer un repère orthonormal de sens direct $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ tel que $\vec{u}$ soit de même direction et de même sens que $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ soit de même direction et de même sens que $\overrightarrow{AC}$.

14 On donne les points A (1 ; 0 ; 1) , B (2 ; 1 ; 0) , C (0 ; 2 ; –1) et D (–1 ; 1 ; 2) .

1° Calculer le produit mixte $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

2° En déduire le sens du trièdre $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ et la mesure du volume du tétraèdre $ABCD$.

3° Calculer la valeur du réel m pour laquelle le point M $(m–1 ; 2m+3 ; 3m–2)$ appartient au plan (ABC) .

15 On donne les points A , B et C tels que : $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
Montrer que les plans (OAB) et (ABC) sont perpendiculaires .

16 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace . Montrer que l'on a :

$$\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 \times \left\|\vec{v}\right\|^2 .$$

17 Soit les points $A\ (1\ ;\ 2\ ;\ 1)$, $B\ (2\ ;\ 2\ ;\ 1)$, $C\ (-2\ ;\ 1\ ;\ 3)$ et $D\ (3\ ;\ 2\ ;\ 5)$.

1° Calculer l'aire du triangle ABC . En déduire la distance du point A à la droite (BC) .

2° Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$. En déduire la distance du point D au plan (ABC) .

18 Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 26$ et $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = 72$.

Calculer le produit scalaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

19 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs libres , établir que : $(\vec{u} \wedge \vec{v})^2 \leqslant u^2 \times v^2$.

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Pour chercher

20 On donne un triangle ABC de sommets $A\ (1\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $B\ (3\ ;\ 0\ ;\ -3)$ et $C\ (5\ ;\ 2\ ;\ 6)$.

Calculer la longueur de la hauteur BH du triangle ABC .

21 **1°** Démontrer que les points $A\ (1\ ;\ 2\ ;\ -1)$, $B\ (0\ ;\ 1\ ;\ 5)$, $C\ (-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$ et $D\ (2\ ;\ 1\ ;\ 3)$ sont coplanaires .

2° Trouver l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}$.

22 On donne un tétraèdre $ABCD$ de volume $v = 5$ et de sommets $A\ (2\ ;\ 1\ ;\ -1)$, $B\ (3\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $C\ (2\ ;\ -1\ ;\ 3)$ et D appartient au demi-axe Oy', où $y'y$ est l'axe des ordonnées .

1° Trouver les coordonnées du point D .

2° Calculer l'aire du triangle ABC .

3° Calculer la longueur de la hauteur $[DH]$ du tétraèdre $ABCD$.

4° Trouver un vecteur $\vec{V}$ de module 5 et perpendiculaire au plan (ABC) .

23 Soit $ABCDEFGH$ un cube . L'espace est orienté par le repère orthonormé

$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, I est le milieu de $[EF]$ et K le centre du carré $ADHE$.

1° Faire une figure et y placer tous les points ci-dessus et déterminer dans le repère donné par l'énoncé les coordonnées de tous ces points .

2° Montrer que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$. En déduire l'aire du triangle IGA .

3° Calculer le volume du tétraèdre $ABIG$ sachant que la distance de B au plan (AIG) vaut $\dfrac{\left|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BK}\right|}{BK}$.

24 Soit A , B et C trois points fixes et distincts et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace orienté .

Déterminer l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{u}$.

25 Soit les points $A\,(1\,;\,1\,;\,1)$, $B\,(m\,;\,2\,;\,m)$ et $C\,(5\,;\,m\,;\,5)$, où m est un réel donné .

1° Exprimer $S(m)$, l'aire du triangle ABC , en fonction de m .

2° Représenter graphiquement la fonction : $m \mapsto S(m)$, lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

Peut-on avoir $S(m) = 0$? Interpréter géométriquement ce résultat .

5 DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Un peu d'histoire

La science du XVI^e siècle est encore médiévale : collection de connaissances floues et incertaines (vertus , esprits , ...) qu'on explique souvent à l'aide d'arguments théologiques . On progresse par tâtonnements , sans méthode . En 1637 , ***René Descartes(1596-1650)*** *, gentilhomme français exilé , pour plus de sérénité , en Hollande , va changer le cours des choses. Il publie trois traités scientifiques* ***(Dioptrique, Météores , Géométrie)*** *précédés d'un texte qui ne se voulait être qu'une modeste préface : le fameux* ***Discours de la Méthode*** *pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les* ***Sciences - Leyde, 1637 . La grande idée de Descartes , c'est l'unité de la science .*** *Il pense que tout l'univers , les étoiles , les planètes , les êtres vivants , ... sont faits de la même manière , et par suite doivent obéir à des lois semblables . Fasciné depuis l'enfance par le degré de certitude qu'apportent les mathématiques ,* ***il rêve de montrer que ces lois peuvent s'exprimer par des équations*** *et propose une méthode pour les découvrir : d'abord , éviter l'erreur et ensuite , chercher la vérité .*

Les travaux de ***Gaspard Monge(1746-1818) ,*** *en mathématiques , portent sur les applications de l'analyse et l'algèbre à la* ***géométrie*** *; en particulier , on lui doit des contributions importantes en* ***géométrie analytique de l'espace*** *et dans la théorie des surfaces .*

PLAN DU CHAPITRE

L'espace a pour jouet le cri « je ne sais pas»

Stéphane MALLARMÉ

Vrai ou faux ?

1° Trois droites concourantes sont coplanaires .

2° Une droite (D) et un plan (P) parallèles à un plan (Q) , sont parallèles .

3° Soit (D) et (D') deux droites distinctes et (P) et (P') deux plans distincts .

a) Si (D) et (D') sont parallèles à (P) , alors (D) est parallèle à (D') .

b) Si (D) est parallèle à (P) et à (P') , alors (P) est parallèle à (P') .

c) Si (D) est parallèle à (D') et à (P) , alors (D') est parallèle à (P) .

4° Soit (D) et (D') deux droites et (P) un plan contenant (D') .

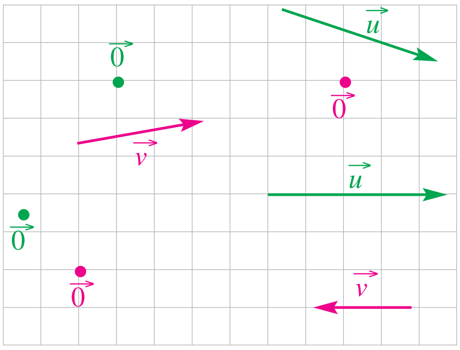
a) Si (D) est perpendiculaire à (P) , alors (D) est orthogonale à (D') .

b) Si (D) est orthogonale à (D') , alors (D) est perpendiculaire à (P) .

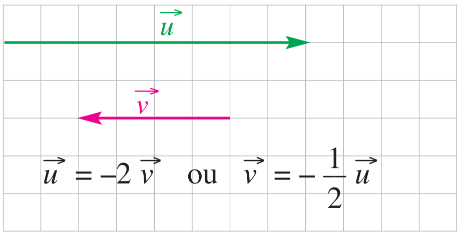
Dans ce chapitre , l'espace est rapporté , sauf indications contraires , à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

RAPPEL

1° Vecteurs colinéaires



- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont dits **colinéaires** si **l'un d'eux** , au moins , est le **vecteur nul** , ou bien , s'ils sont tous **deux non nuls** et ils ont la **même direction** .



- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** , il existe alors un unique **réel** α tel que $\vec{u} = \alpha\,\vec{v}$.

- Si on a $\vec{u}\,(X,Y,Z)$ et $\vec{v}\,(X',Y',Z')$, alors $\vec{u} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k}$ et $\vec{v} = X'\,\vec{i} + Y'\,\vec{j} + Z'\,\vec{k}$.

$\vec{u} = \alpha\,\vec{v}$ donne $X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k} = \alpha\,(X'\,\vec{i} + Y'\,\vec{j} + Z'\,\vec{k})$, d'où $\begin{cases} X = \alpha.X' \\ Y = \alpha.Y' \\ Z = \alpha.Z' \end{cases}$,

et , lorsque X' , Y' , Z' ne sont pas nuls , on peut écrire : $\dfrac{X}{X'} = \dfrac{Y}{Y'} = \dfrac{Z}{Z'}$.

$\vec{u}$ (X,Y,Z) **et** $\vec{v}$ (X',Y',Z') **sont colinéaires si , et seulement si ,**

$$\begin{cases} X = \alpha . X' \\ Y = \alpha . Y' \\ Z = \alpha . Z' \end{cases} \quad \text{ou} \quad \frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'} \text{ .}$$

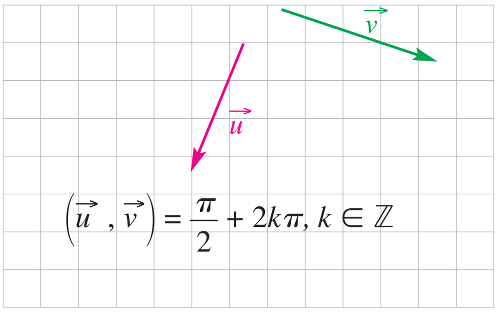
(Si $X' = 0$, $X = 0$. Si $Y' = 0$, $Y = 0$. Si $Z' = 0$, $Z = 0$)

Exemple

Les vecteurs $\vec{u}$ $(1 ; -2 ; 3)$ et $\vec{v}$ $(2 ; -4 ; 6)$ sont colinéaires car : $\dfrac{1}{2} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{3}{6}$.

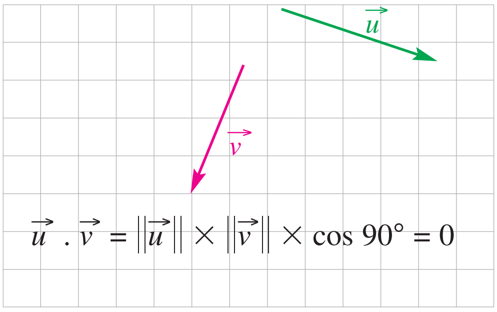
2° Vecteurs orthogonaux

• Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont dits **orthogonaux** si , et seulement si , **leur angle est droit** .



• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** , alors leur produit scalaire est nul :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ **.**



• Si on a $\vec{u}$ (X,Y,Z) et $\vec{v}$ (X',Y',Z') , alors $\vec{u} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ et $\vec{v} = X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k}$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ donne $XX' + YY' + ZZ' = 0$.

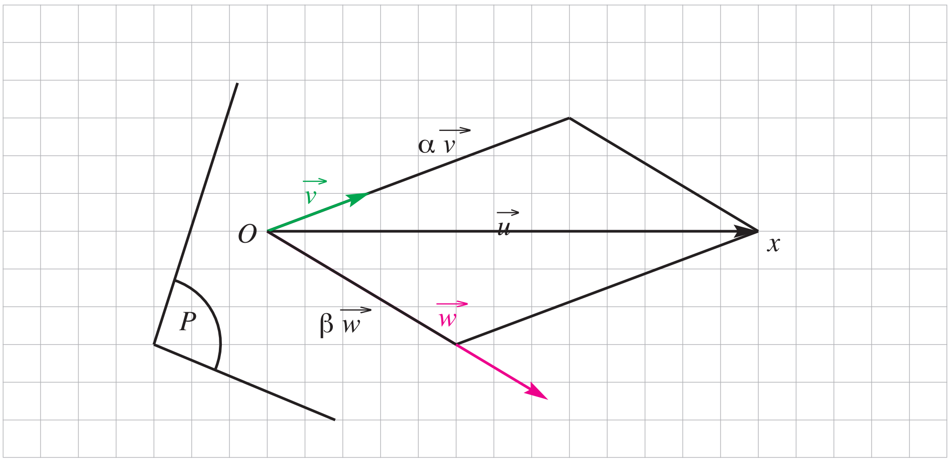
Les vecteurs non nuls $\vec{u}$ (X,Y,Z) et $\vec{v}$ (X',Y',Z') sont orthogonaux si, et seulement si :
$XX' + YY' + ZZ' = 0$

Exemple

Les vecteurs $\vec{u}$ $(1 ; -2 ; 3)$ et $\vec{v}$ $(2 ;1 ; 0)$ sont orthogonaux car $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1)(2) + (-2)(1) + (3)(0) = 0$.

3° Vecteurs coplanaires

• On sait que :



trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont dits coplanaires s'il existe deux réels α et β tels que : $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$

• Si on a $\vec{u}\ (X,Y,Z)$, $\vec{v}\ (X',Y',Z')$ et $\vec{w}\ (X'',Y'',Z'')$, alors $\vec{u} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$,
$\vec{v} = X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k}$ et $\vec{w} = X''\vec{i} + Y''\vec{j} + Z''\vec{k}$.

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \text{ donne : } \begin{cases} X = \alpha.X' + \beta.X'' \\ Y = \alpha.Y' + \beta.Y'' \\ Z = \alpha.Z' + \beta.Z'' \end{cases}$$

EXEMPLE

Les vecteurs $\vec{u}$ (–2 ; –1 ; 0) , $\vec{v}$ (1 ;2 ; 3) et $\vec{w}$ (4 ;5 ;6) sont coplanaires car $\vec{u} = 2\vec{v} - \vec{w}$.

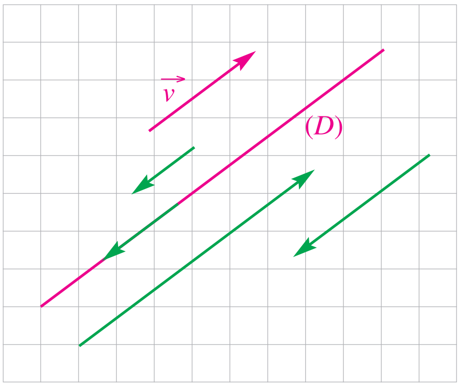
1 LES DROITES DE L'ESPACE

1° Vecteur directeur d'une droite

On appelle **vecteur directeur** (ou **base**) d'une droite donnée ***(D)*** , tout vecteur non nul $\vec{v}$ ayant la **même direction que *(D)*** .

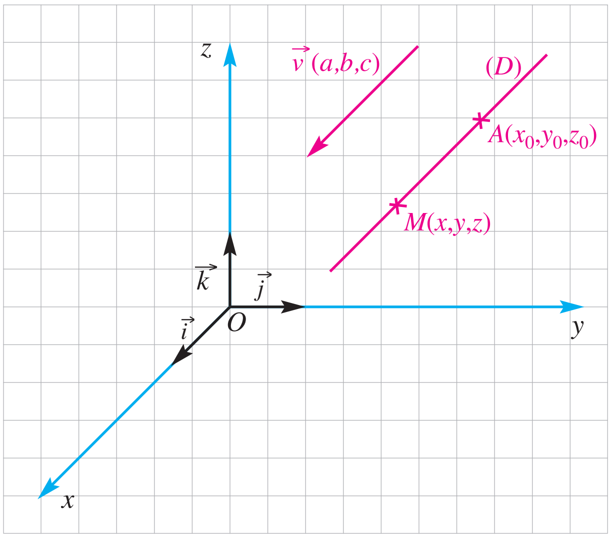
Les **coordonnées d'un tel vecteur** s'appellent **paramètres directeurs de *(D)* .**

Une droite ***(D)*** **possède** une **infinité de vecteurs directeurs** qui sont **colinéaires** .



2° Équations d'une droite

Soit la droite (D) passant par le point $A(x_A , y_A , z_A)$
et dont $\vec{v}\ (a , b , c)$ est un vecteur directeur .



• Si $M(x , y , z)$ est un point variable de (D) , alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires .

Cette colinéarité se traduit par : $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{v}\ (t \in \mathbb{R})$,

$$\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \\ z_M - z_A \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ ou } \frac{x_M - x_A}{a} = \frac{y_M - y_A}{b} = \frac{z_M - z_A}{c} \text{ (avec } abc \neq 0) ,$$

soit : $\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$ ou $\dfrac{x - x_A}{a} = \dfrac{y - y_A}{b} = \dfrac{z - z_A}{c}$

(**Équations paramétriques de *(D)***) (**Équations cartésiennes de *(D)***)

• Tout point M dont les coordonnées (x , y , z) vérifient les relations $\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$ est un point de (D) . En effet , ces relations sont équivalentes à $\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \\ z_M - z_A \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{v}$, relation qui montre que M est un point

de (D) passant par le point $A(x_A , y_A , z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\ (a , b , c)$.

• On démontre de même que tout point M dont les coordonnées (x , y , z) vérifient les relations $\dfrac{x - x_A}{a} = \dfrac{y - y_A}{b} = \dfrac{z - z_A}{c}$ est un point de (D) passant

par le point $A(x_A , y_A , z_A)$ et dont $\vec{v}\ (a , b , c)$ est un vecteur directeur.

Cas particuliers

Un système d'équations paramétriques d'une droite (D) passant par $A(x_A\ ,\ y_A\ ,\ z_A)$ et dont $\vec{v}\ (a\ ,\ b\ ,\ c)$ est un vecteur directeur , est donné par :

$$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$$

• Si $a = 0$ et $bc \neq 0$, on a : $\begin{cases} x = x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = x_A \\ \dfrac{y - y_A}{b} = \dfrac{z - z_A}{c} \end{cases}$

• Si $b = 0$ et $ac \neq 0$, on a : $\begin{cases} x = at + x_A \\ y = y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = y_A \\ \dfrac{x - x_A}{a} = \dfrac{z - z_A}{c} \end{cases}$

• Si $c = 0$ et $ab \neq 0$, on a : $\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = z_A \end{cases}$ ou $\begin{cases} z = z_A \\ \dfrac{x - x_A}{a} = \dfrac{y - y_A}{b} \end{cases}$

• Si $a = b = 0$ et $c \neq 0$, on a : $\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$

• Si $a = c = 0$ et $b \neq 0$, on a : $\begin{cases} x = x_A \\ y = bt + y_A \\ z = z_A \end{cases}$

• Si $b = c = 0$ et $a \neq 0$, on a : $\begin{cases} x = at + x_A \\ y = y_A \\ z = z_A \end{cases}$

Remarques

• On peut passer des équations paramétriques aux équations cartésiennes en calculant t dans $\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$

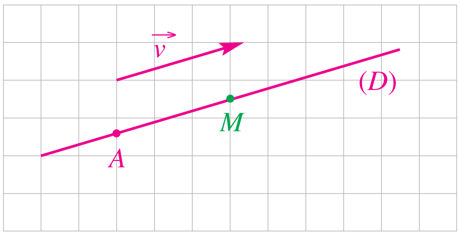
• On peut passer des équations cartésiennes aux équations paramétriques en posant $t = \dfrac{x - x_A}{a} = \dfrac{y - y_A}{b} = \dfrac{z - z_A}{c}$, puis en calculant x , y et z en fonction de t $(abc \neq 0)$.

• Il est conseillé de retenir que :

chaque fois qu'on a à écrire les équations d'une droite , on doit chercher un point fixe et un vecteur directeur de cette droite

EXEMPLES

1. Soit à écrire les équations paramétriques et cartésiennes de la droite *(D)* passant par le point $A(1\,;2\,;3)$ et dont $\vec{v}\,(-1\,;4\,;1)$ est un vecteur directeur .



Si $M(x\,,y\,,z)$ est un point variable de (D) , alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

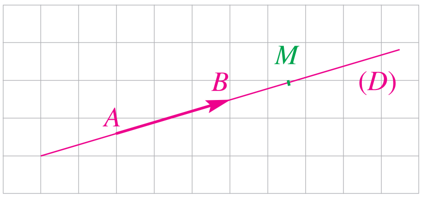
$\overrightarrow{AM} = t\,\vec{v}\ (t \in \mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, soit $\begin{cases} x = -\,t + 1 \\ y = 4t + 2 \\ z = t + 3 \end{cases}$ $\Big($équations paramétriques de $(D)\Big)$.

En tirant t des trois relations précédentes , on trouve :

$\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{1}$ $\Big($équations cartésiennes de $(D)\Big)$.

2. Soit à écrire les équations cartésiennes et paramétriques de la droite *(D)* passant par les points $A(1\,;2\,;3)$ et $B(-1\,;4\,;1)$.

Il est évident que $\overrightarrow{AB}\,(-2\,;2\,;-2)$ est un vecteur directeur de (D) .



Si $M(x\,,y\,,z)$ est un point variable de (D) , alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires :

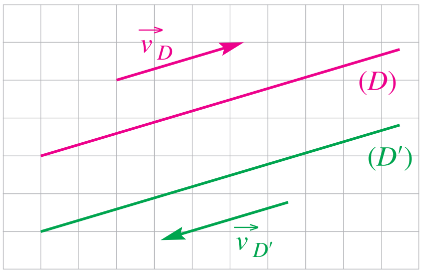
$\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}\ (t \in \mathbb{R})$, $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{-2} = t$.

D'où les équations cartésiennes de (D) : $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{-2}$.

La déduction des équations paramétriques de (D) est immédiate : $\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 2t + 2 \\ z = -2t + 3 \end{cases}$

3° Droites de même direction

Soit deux droites (D) et (D') de vecteurs directeurs respectifs $\vec{v}_D\,(a,b,c)$ et $\vec{v}_{D'}\,(a',b',c')$.



Si (D) et (D') sont de même direction , alors $\vec{v}_D$ et $\vec{v}_{D'}$ sont colinéaires ; d'où :

$\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ avec $a'b'c' \neq 0$.

Remarque

Si **deux droites** de **même direction** ont un **point commun** , alors elles sont **confondues** .

Les droites *(D)* et *(D′)* sont de même direction si , et seulement si , leurs vecteurs directeurs sont colinéaires

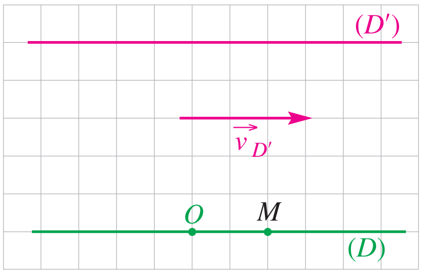
EXEMPLE

Soit à écrire les équations paramétriques de la droite *(D)* passant par l'origine des coordonnées et ayant la même direction que la droite *(D′)* ayant pour équations cartésiennes : $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{4}$ **et** $z + 5 = 0$ **.**

La droite (D) passe par O et admet $\overrightarrow{v_{D'}}$ (3 ;4 ;0) comme vecteur directeur .

Si $M(x,y,z)$ est un point variable de (D) , alors les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v_{D'}}$ sont colinéaires ; d'où $\overrightarrow{OM} = \alpha.\overrightarrow{v_{D'}}$ avec α un réel , soit $\begin{cases} x = 3\alpha \\ y = 4\alpha \\ z = 0 \end{cases}$

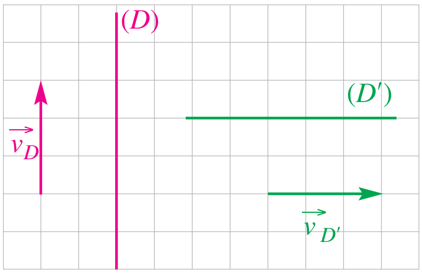
(équations paramétriques de (D)).



4° Droites orthogonales

Soit deux droites (D) et (D') de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{v_D}\,(a,b,c)$ et $\overrightarrow{v_{D'}}\,(a',b',c')$.

Si (D) et (D') sont orthogonales , alors $\overrightarrow{v_D}$ et $\overrightarrow{v_{D'}}$ sont orthogonaux ; d'où : $\overrightarrow{v_D} \,.\, \overrightarrow{v_{D'}} = 0$, soit $aa' + bb' + cc' = 0$.



Les droites *(D)* et *(D′)* sont orthogonales si , et seulement si , leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux

EXEMPLE

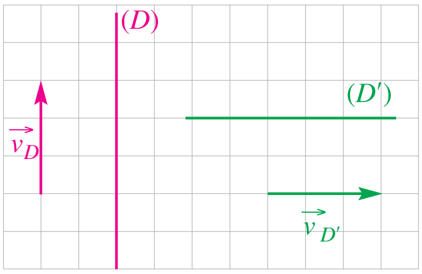
Soit à déterminer le paramètre réel *m* pour que les droites *(D)* et *(D′)* données par leurs équations : $\dfrac{x-2}{3m} = \dfrac{y+1}{4-m} = \dfrac{z+5}{-2m+1}$ **et** $\begin{cases} x = 3k \\ y = 4k \\ z = 1 \end{cases}$ **,** $k \in \mathbb{R}$ **soient orthogonales .**

Comme (D) et (D') sont orthogonales , alors leurs vecteurs directeurs

$\overrightarrow{v_D}\,(3m\,,4-m\;;-2m+1)$ et $\overrightarrow{v_{D'}}\,(3\,;4\,;0)$ sont orthogonaux .

D'où : $\overrightarrow{v_D} \,.\, \overrightarrow{v_{D'}} = 0$, $(3m)(3)+(4-m)(4) + (-2m+1)(0) = 0$,

soit $m = -\dfrac{16}{5}$.



5° Droites particulières

a, b, c sont trois réels non nuls et $\overrightarrow{v_D}$ désigne un vecteur directeur d'une droite (D) .

• Si $\overrightarrow{v_D}$ a pour coordonnées $(a , 0 , 0)$, alors $\overrightarrow{v_D}$ et $\vec{i}$ $(1 ; 0 ; 0)$ sont colinéaires . Par suite l'axe des abscisses et (D) sont de même direction .

• Si $\overrightarrow{v_D}$ a pour coordonnées $(0 , b , 0)$, alors $\overrightarrow{v_D}$ et $\vec{j}$ $(0 ; 1 ; 0)$ sont colinéaires . Par suite l'axe des ordonnées et (D) sont de même direction .

• Si $\overrightarrow{v_D}$ a pour coordonnées $(0, 0 , c)$, alors $\overrightarrow{v_D}$ et $\vec{k}$ $(0 ; 0 ; 1)$ sont colinéaires . Par suite l'axe des cotes et (D) sont de même direction .

• **Les axes du repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.**

Nom	**Vecteur directeur**	**Système d'équations cartésiennes**	**Système d'équations paramétriques**
$x'Ox$	$\vec{i}$ $(1 ; 0 ; 0)$	$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x = t \ ; t \in \mathbb{R} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
$y'Oy$	$\vec{j}$ $(0 ; 1 ; 0)$	$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$
$z'Oz$	$\vec{k}$ $(0 ; 0 ; 1)$	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \ ; t \in \mathbb{R} \end{cases}$

EXEMPLES

1. La droite ayant pour équations paramétriques $\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ a la même direction que l'axe des abscisses $x'x$ car son vecteur directeur $\vec{v}$ $(-2 ; 0 ; 0)$ et celui de $x'x$, $\vec{i}$ $(1 ; 0 ; 0)$, sont colinéaires ($\vec{v} = -2\,\vec{i}$) .

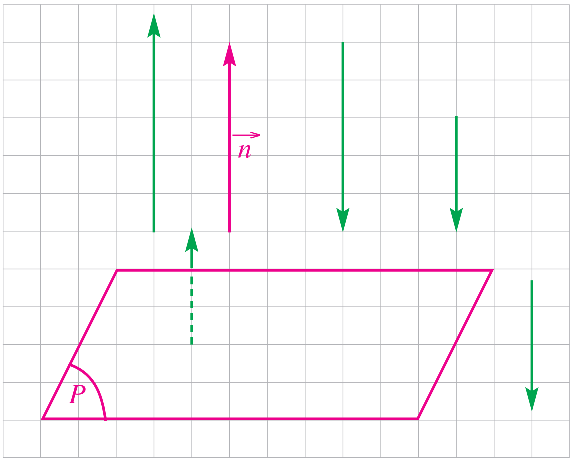
2. Un système d'équations paramétriques de la droite passant par $B(1 ; 1 ; 1)$ et ayant la même direction que l'axe des ordonnées $y'y$ est $\begin{cases} x = 1 \\ y = t + 1 \\ z = 1 \end{cases}$ ($\vec{j}$ est un vecteur directeur de cette droite) .

2 LES PLANS DE L'ESPACE

1° Vecteur normal à un plan

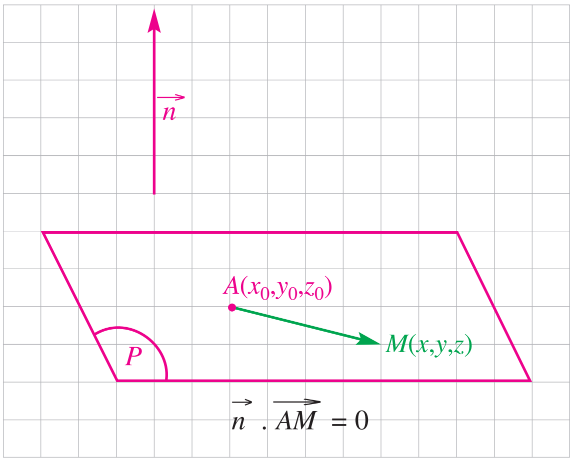
On appelle **vecteur normal** à un **plan** ***(P)*** , tout **vecteur non nul** $\vec{n}$ **orthogonal à** ***(P)*** **.**

Un plan ***(P)*** **possède** une **infinité de vecteurs normaux** qui sont **colinéaires** .



2° Équation d'un plan

Soit le plan (P) passant par le point $A(x_0 , y_0 , z_0)$ et $\vec{n}\ (u , v , w)$ un vecteur normal de (P) .



• Si $M(x , y , z)$ est un point variable de (P) , alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux .

Cette orthogonalité se traduit par : $\overrightarrow{AM} . \vec{n} = 0$,

$(x - x_0)u + (y - y_0)v + (z - z_0)w = 0$, soit :

$ux + vy + wz - (ux_0 + vy_0 + wz_0) = 0$; en désignant par r , la constante $-(ux_0 + vy_0 + wz_0)$, on obtient :

$ux + vy + wz + r = 0$ (**équation cartésienne** du plan (P) passant par le point $A(x_0 , y_0 , z_0)$ et dont $\vec{n}\ (u , v , w)$ est un vecteur normal) .

• Tout point M dont les coordonnées (x , y , z) vérifient la relation $ux + vy + wz + r = 0$ est un point de (P) . En effet , soit $A(x_0 , y_0 , z_0)$ une solution particulière de $ux + vy + wz + r = 0$.

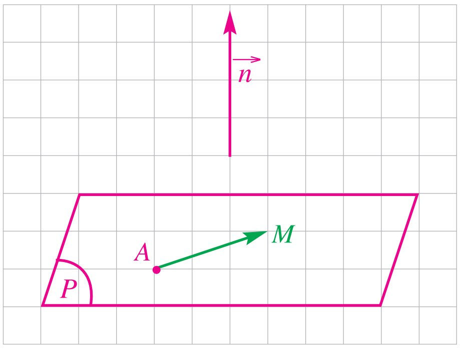
On a alors : $ux_0 + vy_0 + wz_0 + r = 0$. En retranchant , membre à membre , $ux_0 + vy_0 + wz_0 + r = 0$ de $ux + vy + wz + r = 0$, on obtient : $(x-x_0)u + (y-y_0)v + (z-z_0)w = 0$, soit $\overrightarrow{AM} . \vec{n} = 0$, relation qui montre que M est un point de (P) passant par le point $A(x_0 , y_0 , z_0)$ et de vecteur normal $\vec{n}\ (u , v , w)$.

Remarque

> **Pour écrire une équation cartésienne d'un plan , on a besoin d'un point fixe de ce plan et d'un vecteur normal à ce plan**

Exemples

1. Soit à écrire une équation du plan *(P)* passant par le point *A*(1 ; 1 ; 1) et dont $\vec{n}$ (2 ; 2 ; 3) est un vecteur normal .

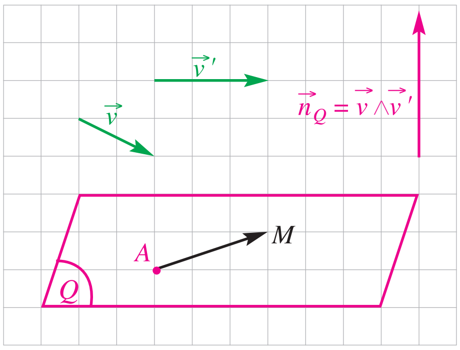


Si $M(x , y , z)$ est un point variable de (P) , alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$,

$(x–1)(2) + (y–1)(2) + (z–1)(3) = 0$, soit $2x + 2y + 3z – 7 = 0$.

2. Soit à écrire une équation du plan *(Q)* passant par le point *A*(1 ; 2 ; 3) et parallèle aux deux vecteurs $\vec{v}$ (2 ; 2 ; 3) et $\vec{v}\,'$ (1 ; –1 ; 0) .

(On dit que $(\vec{v}, \vec{v}\,')$ est une base de *(Q)* ou encore que $\vec{v}$ et $\vec{v}\,'$ sont deux directions distinctes de *(Q)*)



$A(1 ; 2 ; 3)$ étant un point fixe de (Q) , il reste à déterminer un vecteur normal de ce plan .

On sait que le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}\,'$ est orthogonal au plan de base $(\vec{v}, \vec{v}\,')$. Alors , un vecteur normal à (Q) est donné par : $\vec{n}_Q = \vec{v} \wedge \vec{v}\,'$.

Si $M(x , y , z)$ est un point variable de (Q) , alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}_Q$ sont orthogonaux :

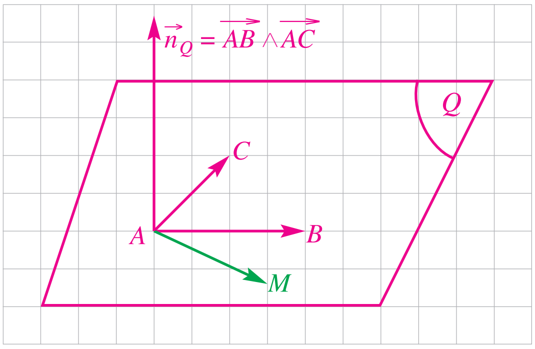
$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_Q = 0$ ou $\overrightarrow{AM} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{v}\,') = 0$ ou $\left[\overrightarrow{AM}, \vec{v}, \vec{v}\,'\right] = 0$. D'où : $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$,

$(x–1)(0+3) – (y–2)(0–3) + (z–3)(–2–2) = 0$ et l'équation de Q sera : $3x + 3y – 4z + 3 = 0$.

3. Soit à écrire une équation du plan *(Q)* passant par les points *A*(1 ; 0 ; 3) , *B*(0 ; 1 ; 2) et *C*(–1 ; 2 ; 3) .

$A(1 ; 0 ; 3)$ est un point fixe de (Q) .

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{n}_Q$ est un vecteur normal de (Q) .



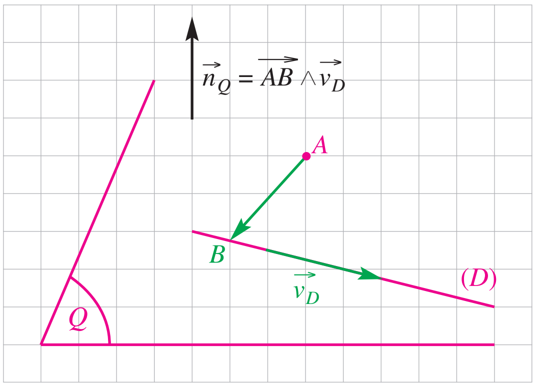
Si $M(x , y , z)$ est un point variable de (Q) , alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}_Q$ sont

orthogonaux : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_Q = 0$ ou $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$. D'où :

$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $(x–1)(0+2) – (y)(0–2) + (z–3)(–2+2) = 0$ et

l'équation de (Q) sera : $x + y – 1 = 0$.

4. Soit à écrire une équation du plan *(Q)* formé par le point $A(1\ ;\ 0\ ;\ 3)$ et la droite *(D)* dont $\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 2t + 2 \\ z = -2t + 3 \end{cases}$ **est un système d'équations paramétriques .**



$A(1\ ;\ 0\ ;\ 3)$ est un point fixe de (Q) .

Si on remplace t par 0 , on obtient un point fixe $B(1;2;3)$ de (D) .

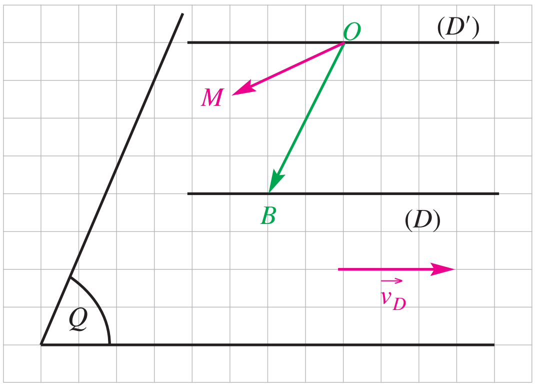
Alors $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{v}_D = \vec{n}_Q$ est un vecteur normal de (Q) , $\vec{v}_D\,(-2\ ;\ 2\ ;\ -2)$ étant un vecteur directeur de (D) .

Si $M(x\ ,\ y\ ,\ z)$ est un point variable de (Q) , alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}_Q$ sont orthogonaux : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_Q = 0$ ou $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \vec{v}_D) = 0$. D'où :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0\ .\ (x-1)(-4-0) - (y)\,(0+0) + (z-3)\,(0+4) = 0 \text{ et}$$

l'équation de (Q) sera : $-x + z - 2 = 0$.

5. Soit à écrire une équation du plan *(Q)* formé par les deux droites parallèles *(D)* : $\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = \ \ 2t + 2 \\ z = -2t + 3 \end{cases}$ **et *(D′)* :** $\begin{cases} x = -t' \\ y = \ \ t' \\ z = -t' \end{cases}$



$O(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ est un point fixe de (D') , donc de (Q) .

Si on remplace t par 0 , on obtient un point fixe $B(1;2;3)$ de (D) .

Alors $\overrightarrow{OB} \wedge \vec{v}_D = \vec{n}_Q$ est un vecteur normal de (Q) , $\vec{v}_D\,(-1\ ;\ 1\ ;\ -1)$ étant un vecteur directeur de (D) .

Si $M(x\ ,\ y\ ,\ z)$ est un point variable de (Q) , alors les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{n}_Q$ sont orthogonaux :

$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}_Q = 0$ ou $\overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OB} \wedge \vec{v}_D) = 0$. D'où :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\ ,\ \text{ et l'équation de } (Q) \text{ sera : } 5x + 2y - 3z = 0\ .$$

3° Plans parallèles

Soit deux plans (P) d'équation $ux + vy + wz + r = 0$ et (P') d'équation $u'x+v'y+w'z+r'=0$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_P\,(u,v,w)$ et $\vec{n}_{P'}\,(u',v',w')$.

Si (P) et (P') sont parallèles ,

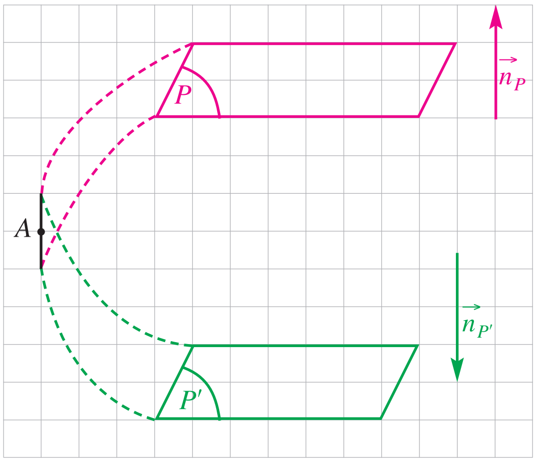
alors $\vec{n}_P$ et $\vec{n}_{P'}$ sont colinéaires ; d'où : $\dfrac{u}{u'} = \dfrac{v}{v'} = \dfrac{w}{w'}$

(avec $u'v'w' \neq 0$).

En particulier , si (P) et (P') ont en plus un point commun A , alors ils coïncident (sont confondus) .

Dans ce cas , ils auront la même équation et on aura :

$\dfrac{u}{u'} = \dfrac{v}{v'} = \dfrac{w}{w'} = \dfrac{r}{r'}$ (avec $u'v'w'r' \neq 0$).



Les plans (P) d'équation $ux + vy + wz + r = 0$ et (P') d'équation $u'x + v'y + w'z + r' = 0$ sont parallèles si , et seulement si ,

$\dfrac{u}{u'} = \dfrac{v}{v'} = \dfrac{w}{w'} \neq \dfrac{r}{r'}$, et confondus si, et seulement si :

$\dfrac{u}{u'} = \dfrac{v}{v'} = \dfrac{w}{w'} = \dfrac{r}{r'}$ (avec $u'v'w'r' \neq 0$)

EXEMPLES

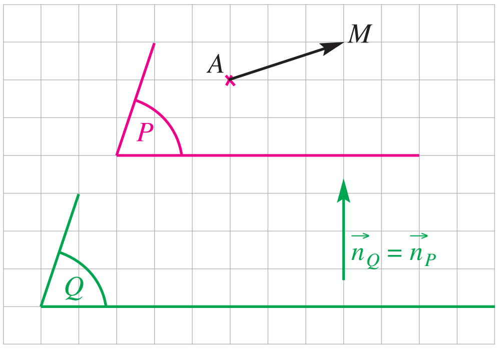
1. Les plans (P) d'équation $x + 4y + 2z + 6 = 0$ et (P') d'équation $2x + 8y + 4z + 7 = 0$ sont parallèles et distincts car $\dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{2}{4} \neq \dfrac{6}{7}$; tandis que le plan (Q) d'équation $2x + 8y + 4z + 12 = 0$ et le plan (P) sont confondus puisque $\dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{6}{12}$.

2. Soit à écrire une équation du plan (P) passant par le point $A(0\,;1\,;2)$ et parallèle au plan (Q) d'équation $2x - y + 3z + 4 = 0$.

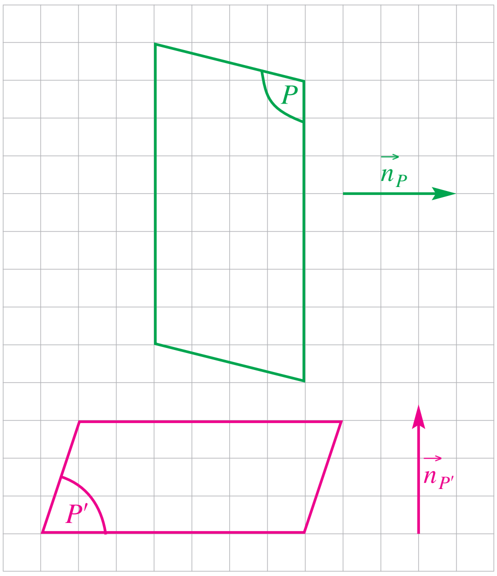
$A(0\,;1\,;2)$ est un point fixe de (P) .

Comme (P) et (Q) sont parallèles , alors $\vec{n}_Q\,(2\,;-1\,;3)$ est un vecteur normal de (P) .

Si $M(x\,,y\,,z)$ est un point variable de (P) , alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}_Q$ sont orthogonaux : $\overrightarrow{AM}\,.\,\vec{n}_Q = 0$, $(x)(2) + (y-1)(-1) + (z-2)(3) = 0$ et l'équation de (P) sera : $2x - y + 3z - 5 = 0$.



4° Plans perpendiculaires



Soit deux plans (P) d'équation $ux + vy + wz + r = 0$ et (P') d'équation $u'x + v'y + w'z + r' = 0$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_P\,(u,v,w)$ et $\vec{n}_{P'}\,(u',v',w')$.

Si (P) et (P') sont perpendiculaires ,

alors $\vec{n}_P$ et $\vec{n}_{P'}$ sont orthogonaux ;

d'où : $\vec{n}_P \,.\, \vec{n}_{P'} = 0$ et $uu' + vv' + ww' = 0$.

Les plans (P) d'équation $ux + vy + wz + r = 0$ et (P') d'équation $u'x + v'y + w'z + r' = 0$ sont perpendiculaires si , et seulement si , $uu' + vv' + ww' = 0$

EXEMPLES

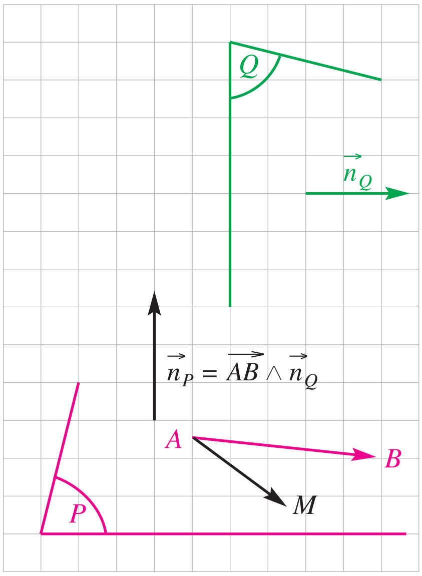
1. Les plans (P) d'équation $x + 4y + 2z + 6 = 0$ et (P') d'équation $2x + 8y - 17z + 7 = 0$ sont perpendiculaires car $(1)(2)+(4)(8)+(2)(-17) = 0$.

2. Soit à écrire une équation du plan (P) passant par les points $A(0\,;1\,;2)$ et $B(1\,;1\,;2)$ et perpendiculaire au plan (Q) d'équation $2x - y + 3z + 4 = 0$.

$A(0\,;1\,;2)$ est un point fixe de (P) .

Comme (P) et (Q) sont perpendiculaires , alors $\vec{n}_Q\,(2\,;-1\,;3)$ est parallèle à (P). Par suite $(\overrightarrow{AB}\,,\vec{n}_Q)$ est une base de (P) et $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{n}_Q$ sera un vecteur normal de (P) : $\vec{n}_P = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{n}_Q$.

Si $M(x\,,\,y\,,\,z)$ est un point variable de (P) , alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}_P$ sont orthogonaux : $\overrightarrow{AM} \,.\, \vec{n}_P = 0$, $\overrightarrow{AM} \,.\, (\overrightarrow{AB} \wedge \vec{n}_Q) = 0$.



D'où : $\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$,

$(x)\,(0+0) - (y-1)\,(3-0) + (z-2)(-1-0) = 0$ et l'équation de (P) sera :
$-3y - z + 5 = 0$.

5° Plans particuliers

• Le plan (P) d'équation $ux + vy + wz + r = 0$ passe par l'origine O si , et seulement si , $r = 0$. En effet, dans ce cas , les coordonnées de O vérifient l'équation de (P) .

Dans la suite , u , v , w sont trois réels non nuls et $\overrightarrow{n_P}$ désigne un vecteur normal d'un plan (P) .

• Si $\overrightarrow{n_P}$ a pour coordonnées $(u , 0 , 0)$, alors $\overrightarrow{n_P}$ et $\vec{i}$ $(1 ; 0 ; 0)$ sont colinéaires ; l'axe des abscisses et (P) sont perpendiculaires . Par suite (P) et le plan (yOz) sont parallèles ou confondus . L'équation de (P) est , dans ce cas , de la forme : $ux + r = 0$. **L'équation de (yOz) est donc : $x = 0$.**

• Si $\overrightarrow{n_P}$ a pour coordonnées $(0 , v , 0)$, alors $\overrightarrow{n_P}$ et $\vec{j}$ $(0 ; 1 ; 0)$ sont colinéaires ; l'axe des ordonnées et (P) sont perpendiculaires . Par suite (P) et le plan (xOz) sont parallèles ou confondus . L'équation de (P) est , dans ce cas , de la forme : $vy + r = 0$. **L'équation de (xOz) est donc : $y = 0$.**

• Si $\overrightarrow{n_P}$ a pour coordonnées $(0 , 0 , w)$, alors $\overrightarrow{n_P}$ et $\vec{k}$ $(0 ; 0 ; 1)$ sont colinéaires ; l'axe des cotes et (P) sont perpendiculaires . Par suite (P) et le plan (xOy) sont parallèles ou confondus . L'équation de (P) est, dans ce cas , de la forme : $wz + r = 0$. **L'équation de (xOy) est donc : $z = 0$.**

• Tableau résumé .

Nom	**Équation**	**Vecteur normal**
yOz	$x = 0$	$\vec{i}$ $(1 ; 0 ; 0)$
xOz	$y = 0$	$\vec{j}$ $(0 ; 1 ; 0)$
xOy	$z = 0$	$\vec{k}$ $(0 ; 0 ; 1)$

6 APPLICATIONS

1° Positions relatives de deux droites

Deux droites de l'espace sont **coplanaires** ou **non coplanaires** .

Elles sont coplanaires si elles sont sécantes ou parallèles .

Pour **étudier l'intersection** de deux droites (D) et (D') , il suffit de **résoudre** le **système** d'équations linéaires formé **par** les **équations de ces deux droites .**

• Si ce système admet une **solution unique** , alors **l'intersection** de (D) et (D') est formé d'un **point unique** .

• Si ce système est **indéterminé** , alors les droites ***(D)*** et ***(D')*** sont **confondues** .

• Si ce système est **impossible** , alors les droites ***(D)*** et ***(D')*** sont **parallèles** (lorsque leurs vecteurs directeurs sont colinéaires) **ou non coplanaires** .

EXEMPLE

Soit à étudier les positions relatives de *(D)* et *(D')* dans chacun des cas suivants :

a) $(D)\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad$ **et** $\quad (D')\begin{cases} x = m + 1 \\ y = -m \\ z = 2m + 3 \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}$

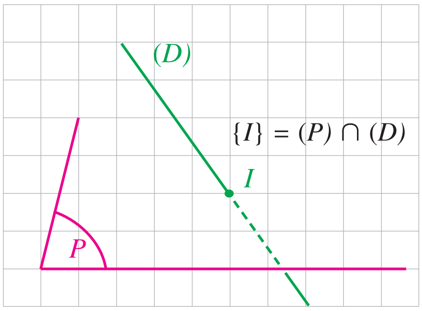
b) $(D)\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad$ **et** $\quad (D')\begin{cases} x = 5 + 2t' \\ y = 2t' \\ z = -5 - t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$

a) On résout le système $\begin{cases} 2t - 1 = m + 1 \\ t = -m \\ -t + 1 = 2m + 3 \end{cases}$ et on trouve qu'il n'admet pas de solution : (D) et (D') ne se coupent pas . Elles ne sont pas coplanaires car $\vec{v}_D$ (2 ;1 ; –1) et $\vec{v}_{D'}$ (1; –1 ;2) ne sont pas colinéaires .

b) On résout le système $\begin{cases} 2 - 3t = 5 + 2t' \\ 1 + t = 2t' \\ -3 + 2t = -5 - t' \end{cases}$, on trouve $t = -1$ et $t' = 0$ qui donnent le triplet $(x,y,z) = (5 ;0 ; -5)$ comme solution . Alors (D) et (D') sont concourantes au point I (5 ;0 ; –5) .

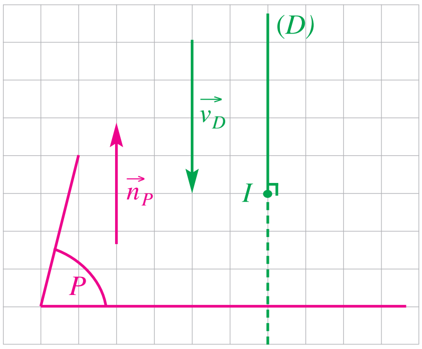
2° Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soit (P) un plan de vecteur normal $\vec{n}_P$ et (D) une droite de vecteur directeur $\vec{v}_D$.

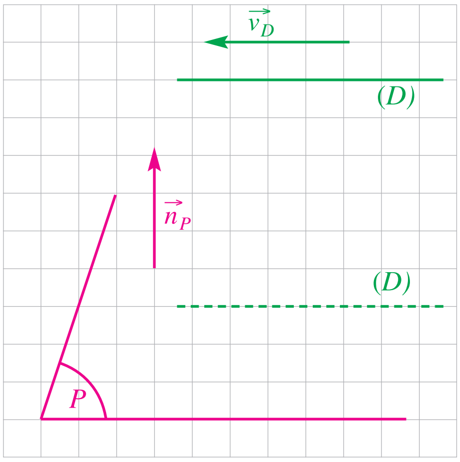


• (P) et (D) sont sécants si , et seulement si , le système formé par leurs équations , admet une solution unique .

• (P) et (D) sont perpendiculaires si , et seulement si $\vec{n}_P$ et $\vec{v}_D$ sont colinéaires .



• (D) est parallèle à (P) ou contenue dans (P) si , et seulement si , $\vec{n}_P$ et $\vec{v}_D$ sont orthogonaux .



Exemples

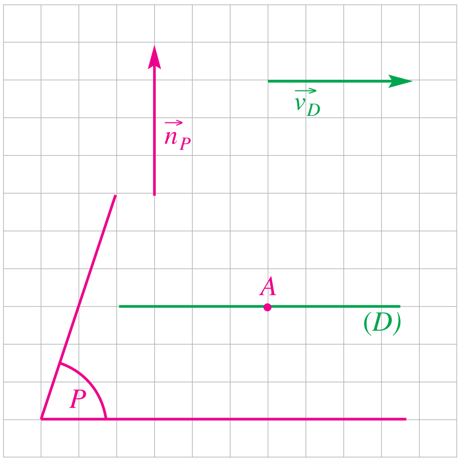
1. Soit à déterminer les coordonnées du point d'intersection I du plan (P) d'équation $x - y - z - 2 = 0$ et de la droite (D) dont $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ est un système d'équations paramétriques .

On résout le système $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = -t + 1 \\ x - y - z - 2 = 0 \end{cases}$, soit : $(2t - 1) - t - (-t + 1) - 2 = 0$; $t = 2$.

Par suite , $(x,y,z) = (3\ ;2\ ; -1)$ et (D) perce (P) au point $I\ (3\ ;2\ ; -1)$.

2. Soit à étudier la position de la droite (D) dont

$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, est un système d'équations paramétriques , par rapport au plan (P) d'équation : $x - y + z = 0$.



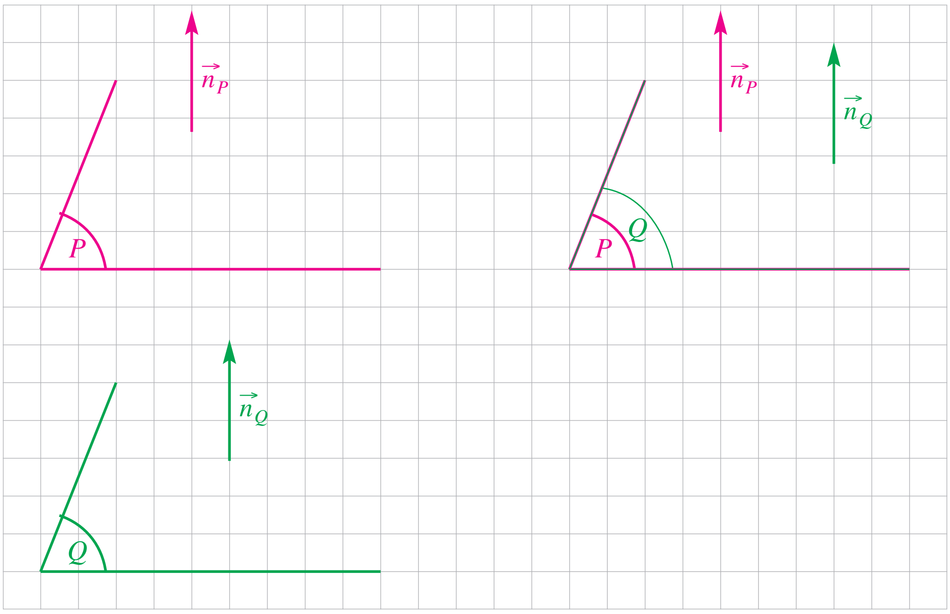
$\vec{n}_P\ (1\ ; -1\ ;1)$ et $\vec{v}_D\ (2\ ;1\ ; -1)$ sont orthogonaux car $\vec{n}_P \cdot \vec{v}_D = 0$; alors (D) est parallèle à (P) ou bien (D) est contenue dans (P) . Or le point $A\ (-1\ ; 0\ ; 1)$ appartient à (P) et à (D) (simple vérification) .

Par suite (D) est contenue dans (P) .

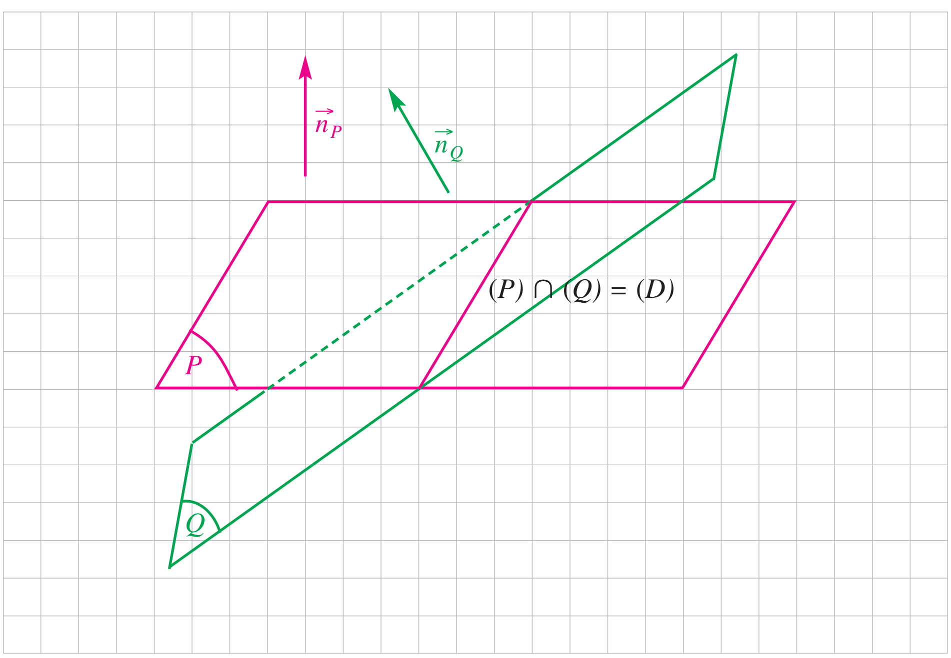
3° Positions relatives de deux plans

Soit (P) un plan de vecteur normal $\vec{n_P}$ et (Q) un plan de vecteur normal $\vec{n_Q}$.

• Si $\vec{n_P}$ et $\vec{n_Q}$ sont colinéaires , alors (P) et (Q) sont en général parallèles ; ils coïncident si , en plus , ils ont un point commun .



• Si $\vec{n_P}$ et $\vec{n_Q}$ ne sont pas colinéaires , alors (P) et (Q) sont sécants et leur intersection est une droite . Pour déterminer un système d'équations paramétriques de cette droite , on résout le système de deux équations à trois inconnues , formé par l'équation de (P) et celle de (Q) .



Dans le cas particulier où $\vec{n_P}$ et $\vec{n_Q}$ sont orthogonaux , (P) et (Q) sont perpendiculaires .

Exemple

Soit à étudier , dans chacun des cas suivants , les positions relatives de *(P)* et *(Q)* et à donner un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection *(D)* , dans le cas où ils se coupent .

a) *(P)* d'équation $x + y + z = 0$ et *(Q)* d'équation $2x + 2y + 2z + 1 = 0$.

b) *(P)* d'équation $x + y + z = 0$ et *(Q)* d'équation $2x + y - 3z + 1 = 0$.

a) On a $\overrightarrow{n_P}$ (1 ;1 ;1) et $\overrightarrow{n_Q}$ (2 ;2 ;2) colinéaires . Alors (P) et (Q) sont parallèles ou bien ils sont confondus .

On vérifie facilement que l'origine O appartient au plan (P) et n'appartient pas au plan (Q) . Par suite (P) et (Q) ne coïncident pas ; ils sont parallèles .

b) On a $\overrightarrow{n_P}$ (1 ;1 ;1) et $\overrightarrow{n_Q}$ (2 ;1 ; –3) non colinéaires ($\overrightarrow{n_P}$ et $\overrightarrow{n_Q}$ sont orthogonaux et les deux plans sont perpendiculaires) . Alors (P) et (Q) sont sécants et leur intersection est une droite , soit (D) .

Déterminons un système d'équations paramétriques de (D) .

$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ est le système linéaire formé par l'équation de (P) et celle de (Q) .

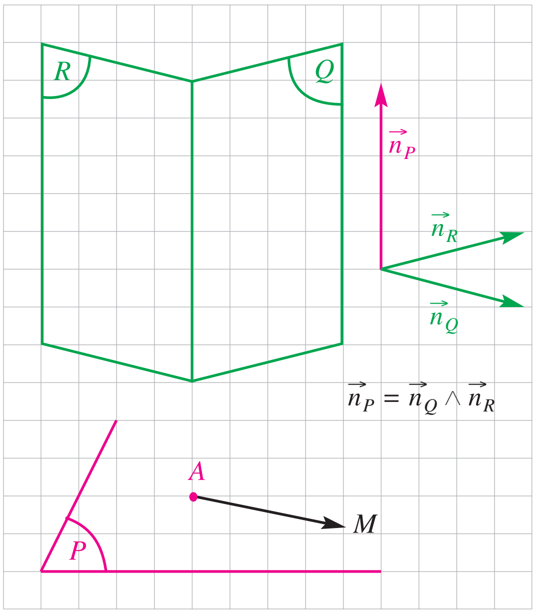
Comme c'est un système de deux équations à trois inconnues , on prend l'une des inconnues comme étant un paramètre .

En posant $z = t$, on trouve $x = 4t - 1$ et $y = -5t + 1$. D'où un système d'équations paramétriques de (D) :

$$\begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = -5t + 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} .$$

4° Plan passant par un point donné et perpendiculaire à deux plans sécants

Soit à écrire l'équation du plan *(P)* passant par le point $A(1 ;1 ;1)$ et perpendiculaire aux deux plans sécants $(Q) : x + y + z = 0$ et $(R) : x + y + 2 = 0$.



$A(1;1;1)$ est un point fixe de (P).

Le vecteur $\overrightarrow{n_Q} \wedge \overrightarrow{n_R}$ est un vecteur normal de (P) avec $\overrightarrow{n_Q}(1;1;1)$ et $\overrightarrow{n_R}(1;1;0)$.

Si $M(x , y , z)$ est un point variable de (P) , alors $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n_P}$ sont orthogonaux : $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{n_P} = 0$, $\overrightarrow{AM} . (\overrightarrow{n_R} \wedge \overrightarrow{n_Q}) = 0$.

D'où : $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$ $(x-1)(0-1) - (y-1)(0-1) + (z-1)(1-1) = 0$

et l'équation de (P) sera : $-x + y = 0$.

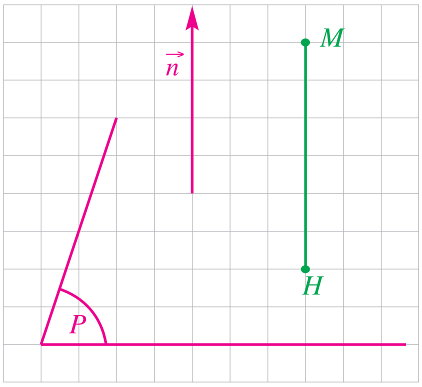
5° Les distances

a) Distance d'un point à un plan

La distance d'un point $M(x_0, y_0, z_0)$ à un plan (P) d'équation $ax + by + cz + r = 0$ est donnée par :

$$d\big(M,(P)\big) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + r|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

En effet , le vecteur $\vec{n}\,(a,b,c)$ est un vecteur normal de (P) .



Soit H le projeté orthogonal de M sur (P) . Comme H appartient à (P) , alors ses coordonnées vérifient l'équation de (P) , d'où :

$ax_H + by_H + cz_H + r = 0$ et $r = -ax_H - by_H - cz_H$.

$$\left|\vec{n}\,.\,\overrightarrow{HM}\right| = \left\|\vec{n}\right\| \times \left\|\overrightarrow{HM}\right\| \times \left|\cos\left(\vec{n}\,,\overrightarrow{HM}\right)\right|$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times d(M,P) \text{ car :}$$

$\left(\vec{n}\,,\overrightarrow{HM}\right) = 0$ ou $\pi\ [2\pi]$ et $\cos\left(\vec{n}\,,\overrightarrow{HM}\right) = 1$ ou -1 ; par suite $\left|\cos\left(\vec{n}\,,\overrightarrow{HM}\right)\right| = 1$.

Alors : $d\big(M\,,(P)\big) = \dfrac{\left|\vec{n}\,.\,\overrightarrow{HM}\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Or : $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{HM} = a(x_0 - x_H) + b(y_0 - y_H) + c(z_0 - z_H)$

$= ax_0 + by_0 + cz_0 + r$.

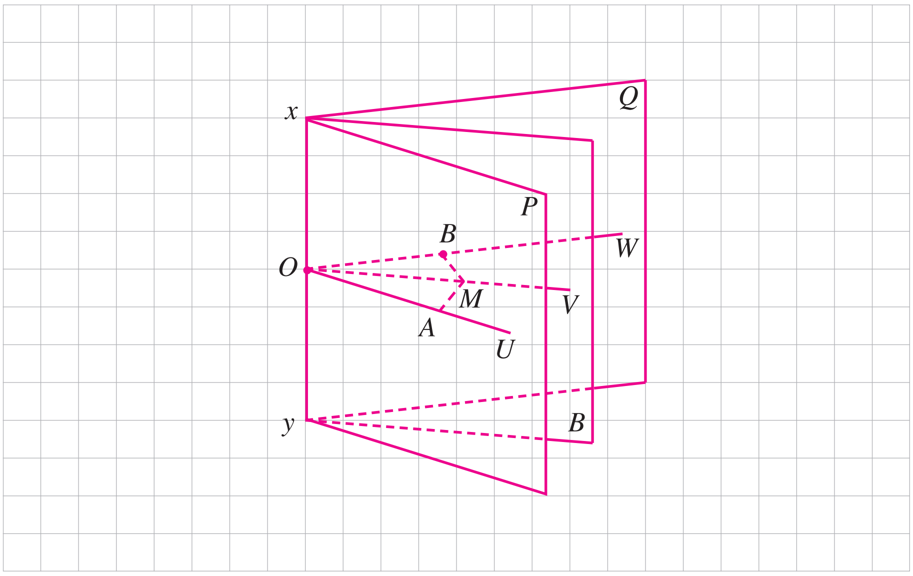
Par suite : $d\big(M,(P)\big) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + r|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

EXEMPLES

1. Soit à calculer la distance du point $A(1\,;2\,;3)$ au plan (P) d'équation $x + 2y + 3 = 0$.

$$d(A,P) = \frac{|1.1 + 2.2 + 3.0 + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} .$$

2. Soit à écrire des équations des plans bissecteurs (B) et (B') du dièdre (P,Q) , où (P) et (Q) sont les plans d'équations respectives : $x + y + 3 = 0$ et $2x + z = 0$.



Si $M(x,y,z)$ est un point variable de l'un des plans bissecteurs du dièdre (P,Q) , alors :

$d(M,P) = d(M,Q)$, soit : $\dfrac{|x + y + 3|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{|2x + z|}{\sqrt{4+1}}$. D'où les équations de (B) et (B') :

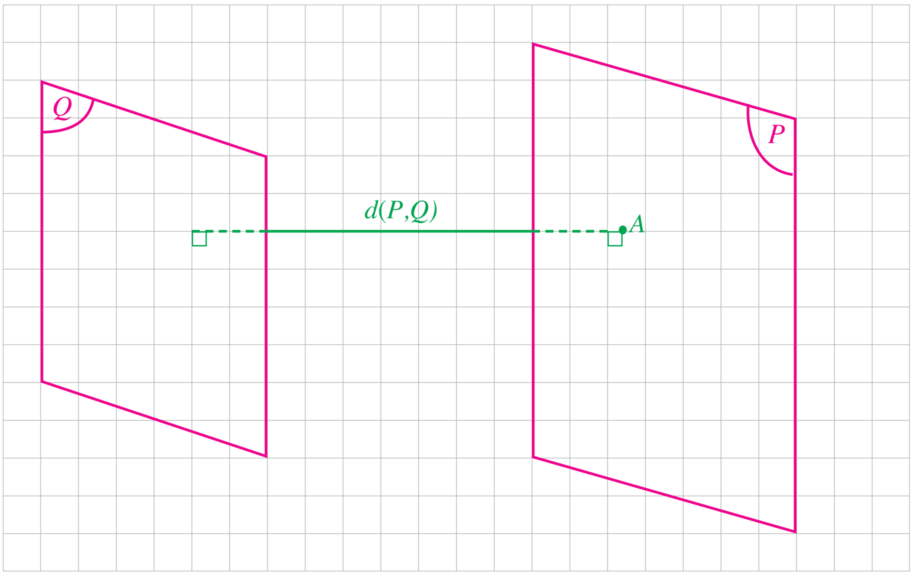
$\left(\sqrt{5} + 2\sqrt{2}\right)x + \sqrt{5}\,y + \sqrt{2}\,z + 3\sqrt{5} = 0$ et $\left(\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right)x + \sqrt{5}\,y - \sqrt{2}\,z + 3\sqrt{5} = 0$.

b) Distance de deux plans parallèles

La distance de deux plans parallèles est égale à la distance d'un point de l'un à l'autre

Exemple

Soit à calculer la distance du plan *(P)* d'équation $x + 2y + 3 = 0$ au plan *(Q)* d'équation $x + 2y + 7 = 0$.



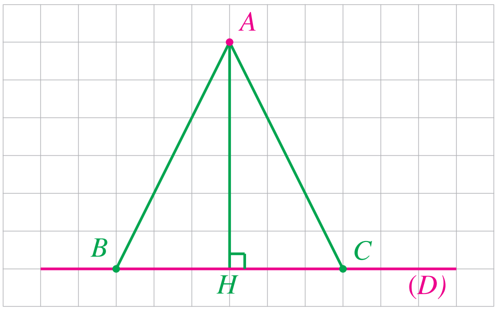
Les plans (P) et (Q) sont parallèles car leurs vecteurs normaux sont colinéaires .
Leur distance n'est autre que la distance d'un point de l'un à l'autre ; soit $A(-3\,;0\,;0)$ un point de (P) .

$d\big((P),(Q)\big) = d\big(A,(Q)\big) = \dfrac{|-3.1 + 2.0 + 0.0 + 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

c) Distance d'un point à une droite

Pour calculer la distance d'un point $A(x_0,y_0,z_0)$ à une droite (D) d'équations paramétriques $\begin{cases} x = at + x_1 \\ y = bt + y_1 \\ z = ct + z_1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ (ou d'équations cartésiennes ...) , on propose quatre méthodes :

1. une première méthode



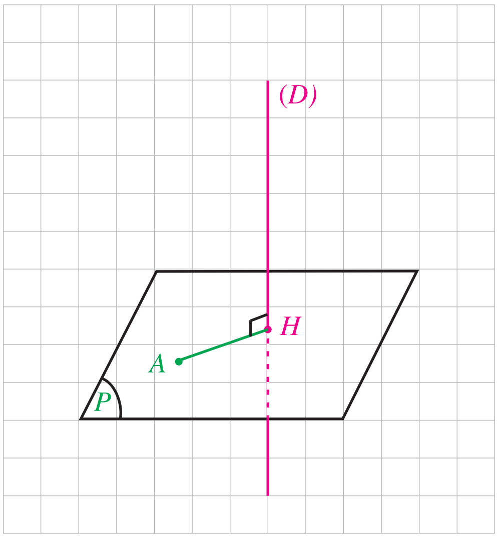
Cette méthode consiste à :

- prendre deux points fixes B et C de (D) .
- calculer BC et la norme du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
- appliquer la propriété :

l'aire du triangle $ABC = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \dfrac{1}{2} AH \times BC$; d'où :

$$d\big(A,(D)\big) = AH = \frac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|}{BC}.$$

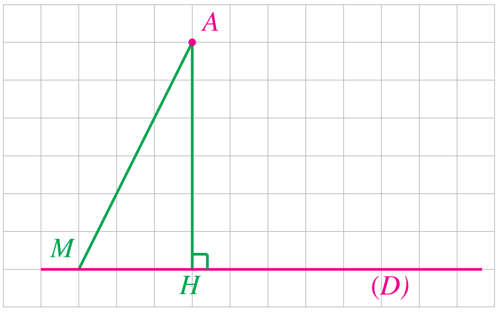
2. une deuxième méthode



Cette méthode consiste à :

- écrire l'équation du plan (P) passant par A et perpendiculaire à (D) .
- calculer les coordonnées du point H , intersection de (P) et (D) .
- tirer $d\big(A,(D)\big) = AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2}$.

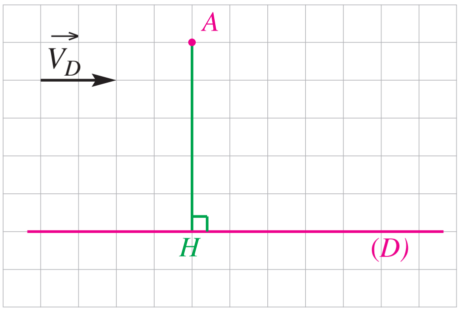
3. une troisième méthode



Cette méthode consiste à :

- prendre un point variable $M(at + x_1,\ bt + y_1,\ ct + z_1)$ de (D) .
- calculer $y = f(t) = AM^2$.
- considérer que la distance de A à (D) correspond au minimun de AM , ce qui impose $f\,'(t) = 0$, d'où l'on tire la valeur $t = \alpha$ qui annule $f\,'$, puis on calcule $y = AM^2 = f(\alpha)$ et $d\big(A,(D)\big) = AH = \sqrt{f(\alpha)}$.

4. une quatrième méthode



Cette méthode consiste à mener la perpendiculaire de A à (D) qui la coupe en H dont les coordonnées vérifient les équations paramétriques de (D) .

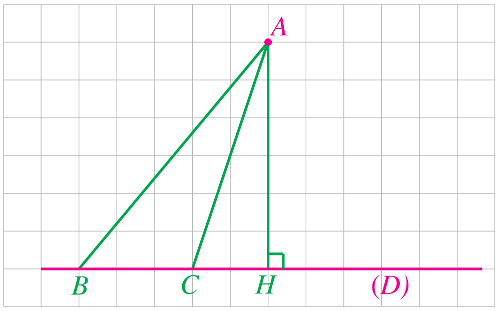
Le calcul de $\overrightarrow{AH}\,.\overrightarrow{V_D}=0$ donne la valeur du paramètre et les coordonnées de H .

D'où $AH = d\big(A,(D)\big) = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2}$.

EXEMPLE

Soit à calculer la distance du point $A\ (-1\ ;2\ ;1)$ à la droite (D) qui a pour équations paramétriques $\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 2 \\ z = 2t \end{cases}$ **,** $t \in \mathbb{R}$ **.**

1. une première méthode



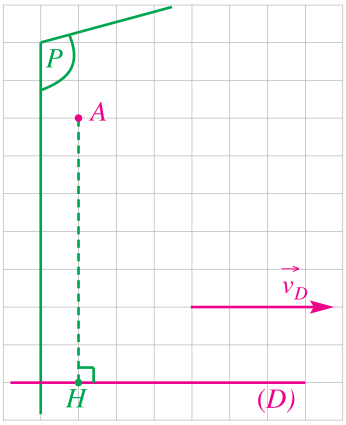
Pour $t = 0$ et pour $t = 1$, on a $B(0\ ; -2\ ;0)$ et $C(\ 1\ ;0\ ;2)$ deux points fixes de (D) .

$BC = 3$ et

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 6\,\vec{k}\ .$$

D'où : $d\big(A,(D)\big) = AH = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|}{BC} = \dfrac{9}{3} = 3$.

2. une deuxième méthode



Soit (P) le plan passant par A et perpendiculaire à (D) .

A est un point fixe et $\vec{v}_D\ (1\ ;2\ ;2)$ un vecteur normal de ce plan .

Si $M(x,y,z)$ est un point variable de (P) , alors $\overrightarrow{AM}\ .\ \vec{v}_D = 0$; d'où l'équation de (P) : $x + 2y + 2z - 5 = 0$.

Soit H l'intersection de (P) et (D) . En résolvant le système

$$\begin{cases} x + 2y + 2z - 5 = 0 \\ x = t \\ y = 2t - 2 \\ z = 2t \end{cases}$$

, on trouve $H(1\ ;0\ ;2)$.

D'où : $d\big(A,(D)\big) = AH = \sqrt{(1+1)^2 + (0-2)^2 + (2-1)^2} = 3$.

3. une troisième méthode

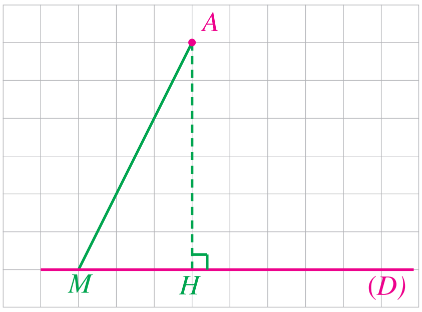
Soit $M(t\ ;\ 2t{-}2\ ;\ 2t)$ un point variable de (D) .

$y = f(t) = AM^2$

$\quad = (t+1)^2 + (2t-2-2)^2 + (2t-1)^2$, soit $f(t) = 9t^2 - 18t + 18$.

La distance de A à (D) correspond au minimum de f , ce qui impose $f'(t) = 0$. D'où : $18t - 18 = 0$, soit $t = 1$.

Par suite : $d\big(A,(D)\big) = AH = \sqrt{f(1)} = 3$.



Remarque

Cette méthode permet aussi de trouver les coordonnées de H , en remplaçant t par 1 dans les équations paramétriques de (D) . On trouve : $H(1\ ;\ 0\ ;\ 2)$.

4. une quatrième méthode

H est un point de (D) ,

donc $H\,(t\ ;\ 2t-2\ ;\ 2t)$.

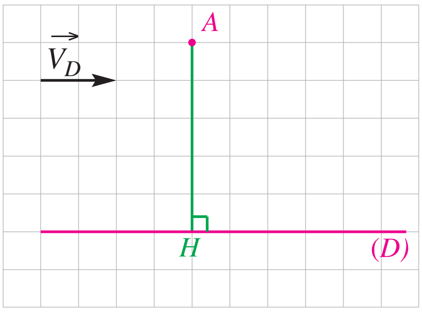
Le vecdirecteur de (D) est $\vec{v}_D\,(1\ ;\ 2\ ;\ 2)$.

$\overrightarrow{AH}\ .\ \vec{V}_D = 0$ donne

$t + 1 + 2t - 4 + 2t - 2 = 0$ et $t = 1$.

D'où $H\,(1\ ;\ 0\ ;\ 2)$.

$d\big(A,(D)\big) = AH = \sqrt{(1+1)^2 + (0-1)^2 + (2-1)^2} = 3$.



6° Les angles

a) Angle aigu de deux droites

Pour déterminer l'angle aigu de deux droites (D) et (D') , on détermine l'angle aigu de deux de leurs vecteurs directeurs $\vec{v}_D$ et $\vec{v}_{D'}$.

De $\vec{v}_D\ .\ \vec{v}_{D'}$, on tire le cosinus de cet angle (ou son sinus de $\vec{v}_D \wedge \vec{v}_{D'}$)

Exemple

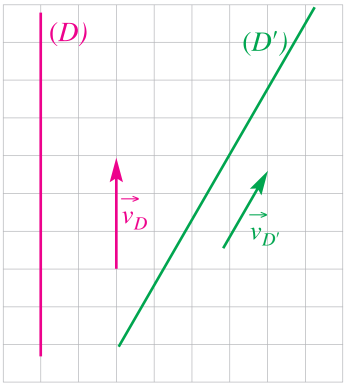
Soit à déterminer le cosinus de l'angle aigu que forme la droite *(D)* d'équations paramétriques $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t \\ z = -2t + 2 \end{cases}$ **, $t \in \mathbb{R}$ et la droite *(D′)* définie par l'intersection des deux plans**

(P) **:** $2x - 2y + z - 4 = 0$ **et *(Q)*** **:** $4x - y - z - 2 = 0$ **.**

On a $\vec{v}_D\ (1\ ;2\ ;-2)$ et

$$\vec{v}_{D'} = \vec{n}_P \wedge \vec{n}_Q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}\ .$$



Si l'on désigne par α l'angle aigu de (D) et (D') , alors :

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{v}_D \cdot \vec{v}_{D'}\right|}{\left\|\vec{v}_D\right\| \times \left\|\vec{v}_{D'}\right\|}$$

$$= \frac{\left|1 \times 3 + 2 \times 6 + (-2) \times 6\right|}{\sqrt{1 + 4 + 4} \times \sqrt{9 + 36 + 36}} = \frac{1}{9}\ .$$

$\left(\alpha \text{ est l'angle qui a pour cosinus } \frac{1}{9}\right)$

b) Angle aigu de deux plans

Pour déterminer l'angle aigu de deux plans *(P)* et *(P′)* , on détermine l'angle aigu de deux de leurs vecteurs normaux $\vec{n}_P$ et $\vec{n}_{P'}$.

De $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_{P'}$, on tire le cosinus de cet angle (ou son sinus de $\vec{n}_P \wedge \vec{n}_{P'}$)

EXEMPLE

Soit à déterminer le sinus de l'angle aigu que forme le plan *(P)* d'équation $2x - 2y + z - 4 = 0$ et du plan *(P')* d'équation : $4x - y - z - 2 = 0$.

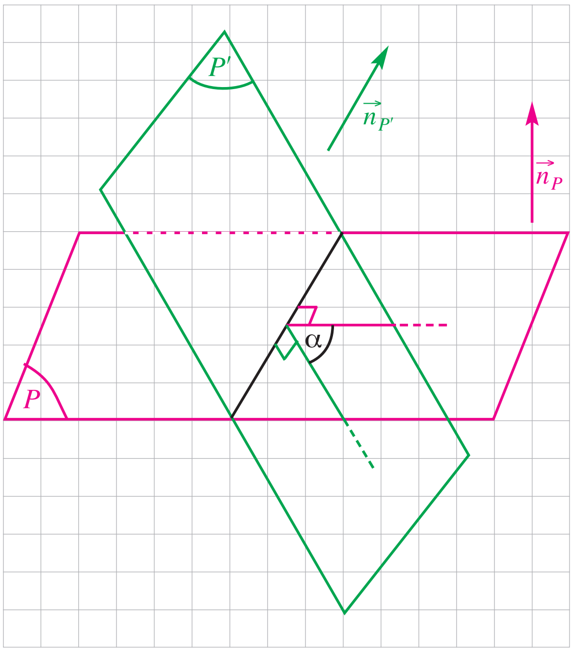
On a $\vec{n}_P\,(2\,;-2\,;1)$ et $\vec{n}_{P'}\,(4\,;-1\,;-1)$.

Si l'on désigne par α l'angle aigu de (P) et (P') , alors :

$$\sin\alpha = \frac{\|\vec{n}_P \wedge \vec{n}_{P'}\|}{\|\vec{n}_P\| \times \|\vec{n}_{P'}\|},$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{9+36+36}}{\sqrt{4+4+1} \times \sqrt{16+1+1}} = \frac{9}{3 \times 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\alpha = 45°)\ .$$



c) Angle d'une droite et d'un plan

● **Définition**

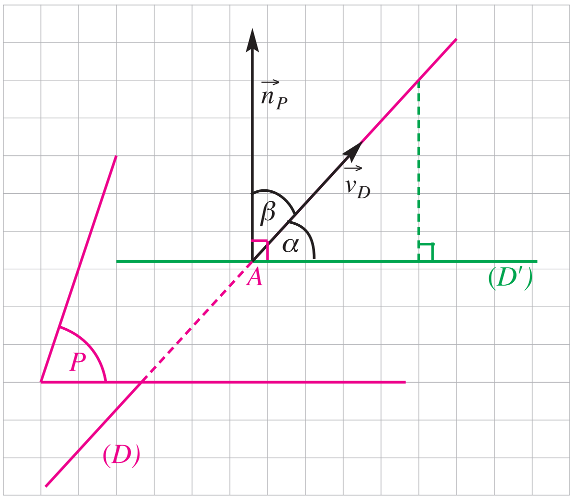
> **On appelle angle d'une droite et d'un plan l'angle aigu que fait cette droite avec son projeté orthogonal sur ce plan**

Soit (P) un plan , (D) une droite perçant (P) en A , et (D') le projeté orthogonal de (D) sur (P) .

α est l'angle de (D) et (P) .

(Voir figure)

Si (D) est parallèle ou contenue dans (P) , alors leur angle est nul .



● **Détermination**

Si $\vec{v}_D$ est un vecteur directeur de (D) , $\vec{n}_P$ un vecteur normal de (P) et β l'angle aigu de $\vec{v}_D$ et $\vec{n}_P$,

alors α et β sont complémentaires **(voir figure page 120)** .

On a : $\cos\beta = \dfrac{|\vec{v}_D \cdot \vec{n}_P|}{\|\vec{v}_D\| \times \|\vec{n}_P\|} = \sin\alpha$ (car α et β sont complémentaires) .

Connaissant $\sin\alpha$, on calcule α .

Remarque

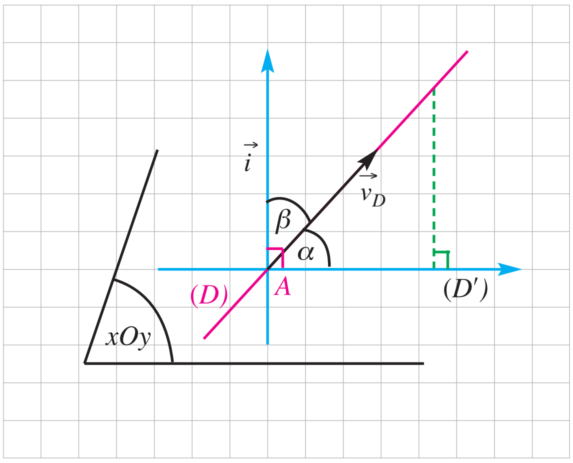
De $\left\|\overrightarrow{v_D} \wedge \overrightarrow{n_P}\right\| = \left\|\overrightarrow{v_D}\right\| \times \left\|\overrightarrow{n_P}\right\| \times \sin\beta$, on peut tirer $\sin\beta$ c'est-à-dire $\cos\alpha$.

Connaissant $\cos\alpha$, On calcule α .

EXEMPLE

Soit à déterminer l'angle α que forme la droite *(D)* : $\begin{cases} x = t-1 \\ y = 2t \\ z = -2t+2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ avec le plan (yOz) .

α n'est autre que l'angle aigu que fait *(D)* avec son projeté orthogonal *(D')* sur le plan (yOz) qui a pour équation $x = 0$.



Désignons par β l'angle aigu de

$\overrightarrow{v_D}$ (1 ;2 ; –2) et $\vec{i}$ (1 ;0 ;0) .

On a : $\cos\beta = \dfrac{\left|\overrightarrow{v_D} \cdot \vec{i}\right|}{\left\|\overrightarrow{v_D}\right\| \times \left\|\vec{i}\right\|} = \dfrac{1}{3} = \sin\alpha$ (car α et β sont complémentaires) .

Par suite : $\alpha = \text{Arc}\sin\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

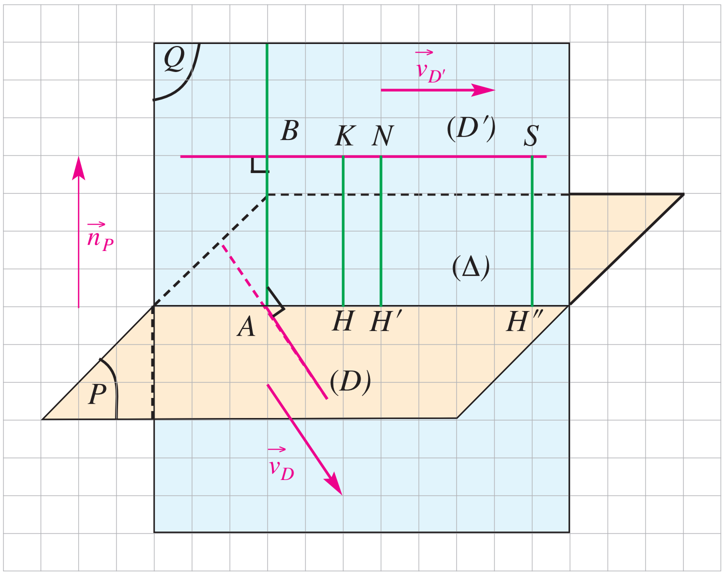
7° Perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires

On sait que :

deux droites non coplanaires *(D)* et *(D')* admettent une perpendiculaire commune et une seule et que la longueur du segment de cette perpendiculaire commune entre *(D)* et *(D')* est le plus court chemin de *(D)* à *(D')*

Soit (D) et (D') deux droites non coplanaires.

Si (P) est le plan contenant (D) et parallèle à (D') , (Q) le plan contenant (D') et perpendiculaire à (P) , et A le point d'intersection de (Q) et (D) , alors la perpendiculaire commune à (D) et (D') n'est autre que la droite passant par A et ayant le vecteur normal de (P) , $\vec{n}_P$, comme vecteur directeur (la droite (AB) sur la figure ci-contre où la droite (Δ) est l'intersection de (P) et (Q) .



Remarque

Sur la figure précédente , la longueur du segment de la perpendiculaire commune entre (D) et (D') n'est autre que la distance d'un point de (D') au plan (P) :

$$\boxed{BA = KH = NH' = SH''}$$

EXEMPLE

Soit à écrire des équations cartésiennes de la perpendiculaire commune (AB) à (D) :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = -3t + 2 \end{cases} , t \in \mathbb{R} \text{ et } (D') : \begin{cases} x = m + 1 \\ y = m - 2 \\ z = -2m + 7 \end{cases} , \ m \in \mathbb{R} ,$$

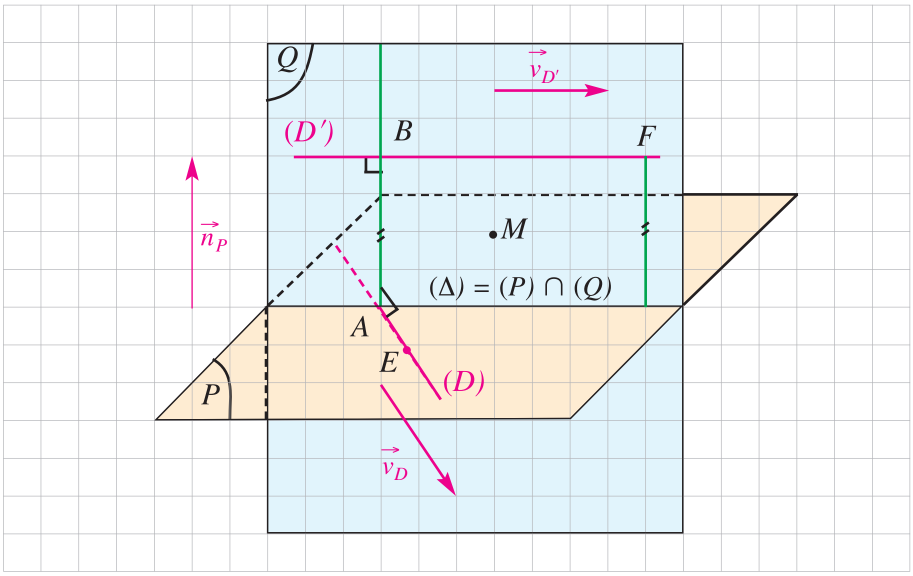
et à calculer la longueur de $[AB]$ $\Big($on suppose que A appartient à (D) et B à $(D')\Big)$.

1. une première méthode

Soit (P) le plan contenant (D) et parallèle à (D') . (P) passe par $E(0\ ;1\ ;2)$ de (D) et admet $\vec{v}_D\,(2\,;1\,;-3) \wedge \vec{v}_{D'}\,(1\ ;1\ ;-2)$ comme vecteur normal . L'équation de (P) est : $x + y + z - 3 = 0$.

Soit (Q) le plan contenant (D') et perpendiculaire à (P) . (Q) passe par $F(1\ ;-2\ ;7)$ de (D') et admet $\vec{v}_{D'}\ (1\ ;\ 1\ ;\ -2) \wedge \vec{n}_P\ (1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ comme vecteur normal . Une équation de (Q) est : $x - y - 3 = 0$.

Soit A le point d'intersection de (Q) et (D).



Le système $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = -3t + 2 \end{cases}$ donne $A(8 ;5 ; -10)$.

La perpendiculaire commune (AB) passe par $A(8 ;5 ; -10)$ et admet $\vec{n}_P$ $(1 ;1 ;1)$ comme vecteur directeur. Ses équations cartésiennes sont : $\dfrac{x-8}{1} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z+10}{1}$.

La longueur du segment $[AB]$ est égale à la distance du point $F(1 ; -2 ;7)$ de (D') au plan (P) : $x + y + z - 3 = 0$.

Soit $AB = d\big(F,(P)\big) = \dfrac{|1.1 + (-2).1 + 7.1 - 3|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}$.

2. une deuxième méthode

Soit $M_1(2t , t{+}1 , -3t{+}2)$ un point quelconque de (D) et $M_2(m{+}1 , m{-}2 , -2m{+}7)$ un point quelconque de (D') .

La droite (M_1M_2) coïncide avec la perpendiculaire commune (AB) lorsque : $\vec{v}_D \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0$ et $\vec{v}_{D'} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0$.

Comme $\overrightarrow{M_1M_2}\,(m - 2t + 1 ; m - t - 3 ; -2m + 3t + 5)$, alors :

$2(m - 2t + 1)+(m - t - 3) - 3(-2m + 3t + 5) = 0$ et $(m- 2t + 1) + (m - t - 3) - 2(-2m + 3t + 5) = 0.$

D'où le système $\begin{cases} 9m - 14t = 16 \\ 6m - 9t = 12 \end{cases}$ qui donne $m = 8$ et $t = 4$.

Pour $t = 4$, M_1 devient $A(8 ; 5 ; -10)$.

Pour $m = 8$, M_2 devient $B(9 ; 6 ; -9)$.

Alors $\overrightarrow{AB}$ $(1 ; 1 ; 1)$.

Des équations cartésiennes de la perpendiculaire commune (AB) sont données par : $\dfrac{x-8}{1} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z+10}{1}$ et $AB = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$.

Exercices et problèmes

Dans tous les exercices et problèmes suivants , le repère $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$ est supposé orthonormal direct .

Pour tester les connaissances

1 Les points $A(2\;;\,-1\;;3)$, $B(1\;;2\;;0)$, $C(-2\;;1\;;2)$ et $D(-1\;;\,-2\;;5)$ sont-ils les sommets d'un parallélogramme ? Justifier .

2 Trouver les équations cartésiennes et paramétriques de la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1° $A(2\,,1\,,-3)\,;\vec{u}\,(1\,,-2\,,1)$ **2°** $A(1\,,0\,,-2)\,;\vec{u}\,(3\,,0\,,-1)$.

3 Déterminer les équations paramétriques de la droite passant par les deux points donnés .

1° $A(1\,,-1\,,2)$ et $B(3\,,1\,,-1)$ **2°** $A(1\,,2\,,3)$ et $B(2\,,0\,,-2)$

4 Donner des équations cartésiennes de la droite (D) passant par le point $A(1\;;\,-1\;;\,-3)$ et ayant $(1\;;\,-3\;;4)$ comme paramètres directeurs .

5 Trouver un point A et un vecteur normal du plan (P) qui a pour équation : $3x-5y+z=1$.

6 Déterminer une équation du plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ dans les cas suivants :

1° $A(-1\,,2\,,1)\,;\vec{n}\,(1\,,3\,,-2)$ **2°** $A(0\,,1\,,2)\,;\vec{n}\,(-2\,,1\,,1)$

7 Trouver une équation du plan (Q) passant par le point A et parallèle au plan (P) dans les cas suivants :

1° $A(1\ ,-1\ ,2)$; $(P) : x + y - z + 5 = 0$ **2°** $A(-1\ ,3\ ,-2)$; $(P) : 2x - y + 3z = 0$.

8 Trouver une équation du plan (P) passant par le point A et de base $(\vec{u}\ ,\vec{v})$.

1° $A(1\ ,2\ ,3)$; $\vec{u}\ (-1\ ,1\ ,2)$; $\vec{v}\ (-2\ ,1\ ,1)$ **2°** $A(-1\ ,2\ ,0)$; $\vec{u}\ (1\ ,2\ ,3)$; $\vec{v}\ (-2\ ,1\ ,1)$

9 On donne le point $A(2; -1; 3)$ et le plan (P) d'équation : $2x - 3y + 4z - 3 = 0$.

1° Donner une équation du plan (P') passant par A et parallèle à (P) .

2° Soit B le point de coordonnées $(1\ ;0\ ;0)$. Donner une équation du plan (P'') passant par A et B et perpendiculaire à (P) .

10 Déterminer une équation du plan passant par les points A , B et C donnés .

1° $A(1\ ;2\ ;3)$; $B(0\ ;-1\ ;2)$; $C(-1\ ;1\ ;3)$ **2°** $A(-1\ ;0\ ;2)$; $B(2\ ;3\ ;1)$; $C(4\ ;-1\ ;0)$.

11 Trouver les coordonnées du point d'intersection de la droite (D) et du plan (P) dans les cas suivants :

1° $(D) : x = 2t - 1\ ,\ y = t\ ,\ z = -t + 1$ et $(P) : x - y - z - 2 = 0$

2° $(D) : x = 2z - 3\ ,\ y = z + 2$ et $(P) : -x + 3y + z - 5 = 0$.

12 Trouver les intersections du plan (P) donné avec les axes de coordonnées .

1° $(P) : x - y + z - 3 = 0$ **2°** $(P) : 2x - 3y - z - 1 = 0$.

13 Calculer la distance du point I au plan (P) dans les cas suivants :

1° $I(1\ ,-1\ ,-2)$; $(P) : x - y + 2z - 3 = 0$ **2°** $I(-2\ ,1\ ,3)$; $(P) : 2x + y - z + 4 = 0$.

14 Trouver une équation du plan passant par le point A et perpendiculaire à la droite (D) .

1° $A(1\ ,2\ ,-1)$; $(D) : x = m + 1\ , y = -\ m\ , z = 2m + 3$ **2°** $A(-1\ ,1\ ,3)$; $(D) : x = z + 2\ , y = -\ 2z + 1$.

15 Déterminer une équation de la droite passant par le point A et perpendiculaire au plan (P) , dans chacun des cas suivants .

1° $A(1\ ,2\ ,3)$; $(P) : x - y + 2z - 3 = 0$ **2°** $A(1\ ,0\ ,2)$; $(P) : 2x + y - z = 0$.

16 On désigne par (D) et (D') les droites $D(A, \vec{u})$ et $D'(B, \vec{v})$, avec $A(0\ ;0\ ;\ -1)$, $B(1\ ;0\ ;0)$, $\vec{u}\ (1\ ;-1\ ;1)$ et $\vec{v}\ (1\ ;2\ ;1)$.

Étudier la position de (D) par rapport à (D') .

17 On considère les points : $A(1\ ;0\ ;2)$, $B(3\ ;-1\ ;5)$, $C(1\ ;1\ ;1)$, $D(-1;\ 2;\ 1)$ et $E(0\ ;3\ ;1)$.

Montrer que les points A , B et C définissent un plan . Ce plan est-il parallèle à (DE) ? Justifier .

18 Donner une équation du plan (P) passant par le point $A(-2\ ;1\ ;3)$ et perpendiculaire à la droite (BC), avec $B(1\ ;-2\ ;2)$ et $C(4\ ;1\ ;-1)$.

19 Donner une équation du plan (P) passant par les points : $A(2\ ;\ 1\ ;\ -1)$, $B(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et $C(3\ ;0\ ;-2)$.

20 Soit (P) le plan défini par $P(A, \vec{u}\,', \vec{u}\,'')$, avec $A(-3\ ;\ 1\ ;\ 4)$, $\vec{u}\,'(-1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et $\vec{u}\,''(2\ ;-2\ ;\ 1)$.

1° Donner une équation cartésienne de (P) .

2° Étudier l'intersection de (P) et de la droite (D) passant par $B(1\ ;0\ ;13)$ et ayant $(-2\ ;1\ ;-5)$ comme paramètres directeurs .

21 Donner une équation du plan (P) perpendiculaire à la droite (AC) et passant par l'orthocentre du triangle ABC , avec $A(3\ ;0\ ;4)$, $B(-1\ ;1\ ;1)$ et $C(2\ ;0\ ;0)$.

22 **1°** Donner des équations paramétriques de la droite (D) passant par le point $A(2\ ;0\ ;-3)$ et qui est parallèle :

a) au vecteur $\vec{v}\ (2\ ;-3\ ;5)$.

b) à la droite (D') : $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$.

c) à l'axe des abscisses $(x'x)$.

2° Donner un système d'équations paramétriques de la droite qui passe par les points $B(0\ ;-2\ ;3)$ et $C(3\ ;-2\ ;1)$.

3° Donner une équation du plan passant par A et perpendiculaire à (D') .

23 Donner des équations paramétriques de la droite (D) passant par le point $A(2\ ;2\ ;3)$ et orthogonale aux deux droites ayant pour paramètres directeurs $(2\ ;-1\ ;3)$ et $(-1\ ;2\ ;0)$.

24 Trouver l'angle aigu des deux droites (D) : $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-5}{-1}$ et (D') : $\dfrac{x+5}{1} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z-1}{1}$.

25 Montrer que les droites (D) : $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-5}{4}$ et (D') : $\begin{cases} x = 3t+7 \\ y = 2t+2 \\ z = -2t+1 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ sont coplanaires et donner une équation cartésienne du plan (P) qu'elles déterminent .

26 Montrer que les droites (D) : $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-2}$ et (D') : $\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 2t+2 \\ z = -2t+3 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ sont coplanaires et donner une équation cartésienne du plan (P) qu'elles déterminent .

27 Trouver la distance entre les deux plans parallèles (P) : $6x + 2y - 3z - 63 = 0$ et (P') : $6x + 2y - 3z + 49 = 0$.

28 Soit (P) le plan d'équation : $2x - 2y + z - 3 = 0$.

1° Montrer que le plan (P_m): $mx + (2m - 1)y + 2(m - 1)z + 1 = 0$ est perpendiculaire à (P) pour tout réel m .

2° Montrer que tous les plans (P_m) passent par une droite fixe (D) dont on donnera un système d'équations paramétriques .

29 **1°** Montrer que le point $A(1\ ;1\ ;1)$ est à égale distance des plans (P): $ax + by + cz = 0$ et (P') : $bx + cy + az = 0$.

2° Evaluer cette distance lorsque (P) et (P') sont perpendiculaires .

En déduire la distance de A à la droite d'intersection de (P) et (P') .

30 Donner un système d'équations paramétriques du projeté orthogonal de la droite (D) , intersection des deux plans $(P) : 3x - 2y - z + 4 = 0$ et $(P') : x - 4y - 3z - 2 = 0$, sur le plan (Q) d'équation : $5x + 2y + 2z - 7 = 0$.

31 Donner des équations des plans bissecteurs des dièdres formés par les deux plans

(P) : $3x - 4y + 12z + 12 = 0$ et (P') : $4x + 12y - 3z + 4 = 0$.

32 On donne les points $A(2\ ; -1\ ; 0)$, $B(3\ ; 1\ ; 2)$, $C(0\ ; -2\ ; -2)$ et le plan (P) d'équation $2x - y - 2z = 0$.

1° Écrire une équation du plan (Q) passant par A et parallèle au plan (P) .

2° Écrire une équation du plan (ABC) .

3° Écrire une équation du plan (R) passant par B et C et perpendiculaire au plan (P) .

33 On donne les points $A(2\ ,\ 1\ ,\ 3)$, $B(4\ ,\ 2\ ,\ 5)$ et la droite (D) définie par un système d'équations

paramétriques : $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t \\ z = -2t + 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1° Déterminer un vecteur directeur de (D) .

2° Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (AB) .

3° Montrer que les droites (D) et (AB) sont orthogonales .

4° Déterminer le point d'intersection I de la droite (D) et du plan (P) d'équation $2x - y - z + 2 = 0$.

34 Soient (P) et (Q) les plans définis par les équations :
$(P) : x + y - 2z + 1 = 0$ et $(Q) : 2x + 3y - 3z + 1 = 0$.

1° Pourquoi les plans (P) et (Q) sont-ils sécants ?

2° Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (D) , intersection des plans (P) et (Q) .

3° Écrire des équations paramétriques de la droite (D') passant par $A(2 ; 1 ; -1)$ et $B(-6 ; 1 ; 1)$.

4° Démontrer que les droites (D) et (D') sont concourantes en un point I dont on calculera les coordonnées .

35 Soit (D) la droite d'intersection des plans : $(P) : 2x - 2y + z - 4 = 0$ et $(Q) : 4x - y - z - 2 = 0$.

1° Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (D) .

2° Calculer les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point $A(-1 ; 2 ;1)$ sur (D) . En déduire la distance de A à (D) .

3° Calculer les coordonnées du point B symétrique de A par rapport à (D) .

36 On donne les droites $(D) : x = 2 - 3t$, $y = 1 + t$, $z = -3 + 2t$ et $(D') : x = 5 + 2t'$, $y = 2t'$, $z = -5 - t'$.

1° Montrer que (D) et (D') sont concourantes .

2° Trouver une équation du plan qu'elles déterminent .

37 Soit la droite (D) définie par le système : $x + y - z + 3 = 0$ et $2x - y + 2z = 0$.

1° Calculer les coordonnées du point d'intersection de (D) avec le plan (yOz) .

2° Déterminer un système de paramètres directeurs de (D) .

3° En déduire le cosinus de l'angle aigu que forme (D) avec (Ox) .

4° Trouver une équation du plan passant par (D) et parallèle à (Ox) .

38 On donne le plan (P) : $x + y + 2z - 2 = 0$ et la droite (D) définie par $x = t + 1$, $y = 2t$ et $z = t - 3$ avec t un réel .

1° Déterminer l'angle de (D) et (P) .

2° Trouver une équation du plan (Q) passant par (D) et perpendiculaire à (P) .

39 On donne les droites (D_1) et (D_2) définies par les équations :

(D_1): $x = 2t$, $y = t + 1$, $z = -3t + 2$, où t est un réel

(D_2): $x = m + 1$, $y = m - 2$, $z = -2m + 7$, où m est un réel .

1° Trouver l'équation du plan (Q) contenant (D_2) et parallèle à (D_1).

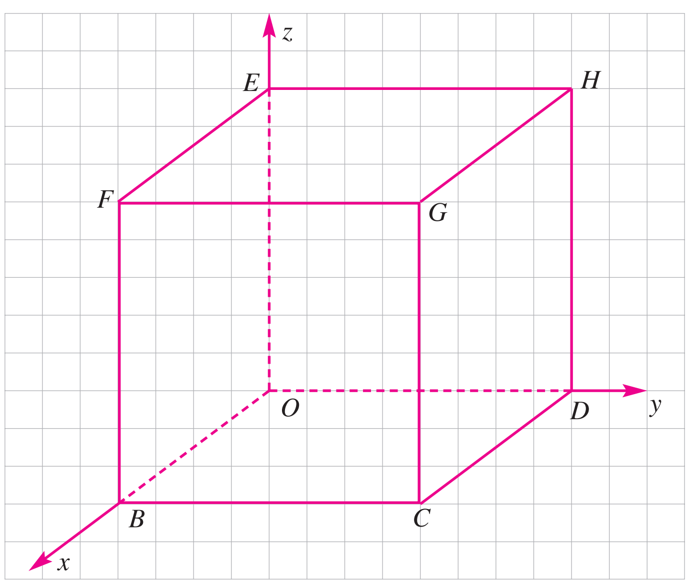
2° Déterminer des équations paramétriques du projeté orthogonal (L) de (D_1) sur (Q) .

3° Calculer les coordonnées du point commun A de (L) et (D_2).

4° Soit B le point de (D_1) tel que (AB) soit perpendiculaire à (D_1) et (D_2). Calculer la longueur de $[AB]$.

Pour chercher

40 On considère le cube $OBCDEFGH$ et on rapporte l'espace au repère orthonormé direct $(O\,;\,\overrightarrow{OB}\,,\,\overrightarrow{OD}\,,\,\overrightarrow{OE})$.



1° Écrire une équation du plan (OFH) .

2° Soit le point $K\,(-1\,;-1\,;\,1)$.

a) Vérifier que K est le symétrique de G par rapport à E .

b) Calculer la distance de K au plan (OFH) .

c) Démontrer que le plan (KOF) est perpendiculaire au plan (OFH) .

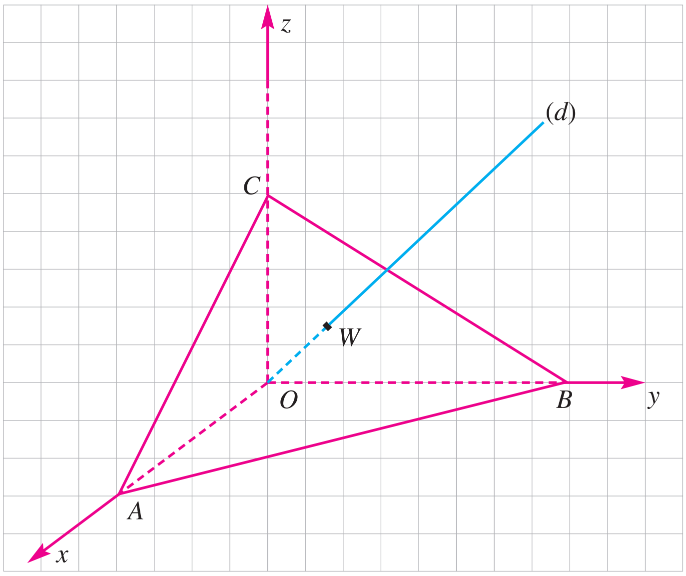
3° Soit I le milieu de $[EF]$ et J le point tel que $4\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EH}$.

a) Calculer l'aire du triangle OIJ .

b) Calculer le volume du tétraèdre $BOIJ$ et en déduire la distance de B au plan (OIJ) .

Bac.

41 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$, on donne le plan (P) d'équation $x + y + z - 2 = 0$.



1° Déterminer les coordonnées de A , B et C , points d'intersection du plan (P) avec les axes des coordonnées.

2° Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (d) passant par O et perpendiculaire à (P) .

3° a) Déterminer les coordonnées du point W intersection de (d) et (P) .

b) Démontrer que W est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

4° Soit le point $E\left(\frac{4}{3}\,;-\frac{2}{3}\,;\frac{4}{3}\right)$.

a) Vérifier que E est le symétrique de B par rapport à W .

b) Calculer l'aire du quadrilatère $ABCE$.

Bac.

42 Donner des équations paramétriques de la perpendiculaire commune aux deux droites

$(D) : \begin{cases} x = 3t - 7 \\ y = -2t + 4 \\ z = 3t + 4 \end{cases}$ avec t un réel , et $(D') : \begin{cases} x = t' + 1 \\ y = 2t' - 9 \\ z = -t' - 12 \end{cases}$ avec t' un réel .

43 On considère la famille de plans (P_m) d'équation : $(m + 1)x + (2m - 1)y + (m - 1)z + 3m - 2 = 0$, avec m un réel .

1° Montrer que les plans (P_m) passent par une droite fixe (D) dont on donnera un système d'équations paramétriques .

2° Calculer m pour que (P_m) soit parallèle à $(z'z)$.

3° Calculer m pour que (P_m) soit perpendiculaire au plan (Q) d'équation : $3x - y + 2z = 0$.

4° Comment faut-il choisir m pour que (P_m) coupe la demi-droite $[Oy)$?

44 On donne le point $A(-1\ ,\ 0\ ,\ 0)$, le plan $(P) : x - y - 2z - 1 = 0$ et la droite $(D) : x = m\ ,\ y = m + 1\ ,\ z = -m - 1$ avec $m \in \mathbb{R}$.

1° Trouver des équations paramétriques de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire à (P) .

2° Calculer les coordonnées du point A' symétrique de A par rapport à (P) .

3° Vérifier que A appartient à (D) ; en déduire des équations paramétriques de la droite (D') , symétrique de (D) par rapport à (P) .

45 Soit le point $A(2\ ,\ 1\ ,\ -1)$, le plan $(P) : x - y + 2z - 3 = 0$ et la droite (D) définie par : $x = 2m + 1$, $y = 2m - 3$ et $z = m - 2$ avec $m \in \mathbb{R}$.

1° Trouver une équation du plan passant par A et parallèle à (P) .

2° Déterminer les coordonnées du point B de (D) tel que la droite (AB) soit parallèle à (P) .

3° Déterminer une équation du plan contenant (D) et perpendiculaire à (P) .

4° Soit (D') la droite du plan (xOy) définie par $y = x - 4$.
Montrer que (D) et (D') sont concourantes .

46 Soit la droite (D) définie par $x = t + 1$, $y = -2t$ et $z = 2t - 2$ avec $t \in \mathbb{R}$.

1° Trouver une équation du plan (P) contenant (D) et parallèle à (Oz) .

2° Trouver une équation du plan (Q) déterminé par (D) et le point O .

3° Calculer le cosinus de l'angle que forme (P) et (Ox) .

47 On considère le plan (P) d'équation : $(2m + 1)x + y - mz - 3(m + 1) = 0$, où m est un paramètre réel .

1° Montrer que , quelque soit m , (P) contient la droite (D) définie par : $x = t + 1$, $y = -t + 2$ et $z = 2t - 1$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2° Déterminer m pour que (P) soit parallèle à la droite (D') définie par : $x = 2\lambda + 1$, $y = \lambda + 2$ et $z = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

3° Trouver la longueur du segment déterminé par (D) et (D') sur leur perpendiculaire commune .

48 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\ ;\vec{i}\ ,\vec{j}\ ,\vec{k}\right)$, on considère les droites (d_1) et (d_2) définies par : $(d_1) : \begin{cases} x = m \\ y = m-1 \\ z = 1 \end{cases}$ $m \in \mathbb{R}$ et $(d_2) : \begin{cases} x = -t+1 \\ y = t \\ z = -2t+4 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

1° Démontrer que (d_1) et (d_2) sont orthogonales et non coplanaires .

2° Vérifier que le vecteur $\vec{n}(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ est orthogonal à (d_1) et (d_2) .

3° Démontrer qu'une équation du plan (P) contenant (d_1) et parallèle à $\vec{n}$ est $x-y+2z-3=0$.

4° La droite (d_2) coupe le plan (P) en B . Déterminer les coordonnées de B .

5° Démontrer que la droite (D) passant par B et de vecteur directeur $\vec{n}$ coupe la droite (d_1) au point $A(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$.

6° Soit (Q) le plan contenant (d_1) et perpendiculaire à (P) et M un point variable de (d_2) . Démontrer que la distance de M à (Q) est égale à AB .

Bac.

49 Soit la droite (D) intersection des deux plans (P) et (Q) d'équations respectives :
$x - y + 2z - 3 = 0$ et $2x + y - z + 6 = 0$.

1° Déterminer un système de paramètres directeurs de (D) .

2° Trouver les coordonnées du point I intersection de (D) avec le plan (xOy) .

3° A désignant le point d'intersection du plan (Q) avec (Oz) , calculer les coordonnées du point A' symétrique de A par rapport à (P) .

4° Trouver une équation du plan (Q') symétrique de (Q) par rapport à (P) .

50 On donne les droites (D_m) définies par : $\dfrac{x-1}{m+1} = \dfrac{y}{m} = z - 1$.

1° Montrer que les droites (D_m) passent par un point fixe .

2° (D_m) coupent le plan (xOy) en un point I . Déterminer l'ensemble de I lorsque le paramètre réel m varie .

3° Montrer que (D_m) sont contenues dans un plan fixe que l'on déterminera .

51 On considère les points $A(2\ ,-1\ ,\ 3)$, $B(1\ ,\ 1\ ,\ 4)$ et $C(3\ ,\ 0\ ,\ 7)$.

1° Montrer que l'on peut trouver deux réels u et v tels que : $\overrightarrow{OA} = u\,\overrightarrow{OB} + v\,\overrightarrow{OC}$. Quelle conclusion peut-on tirer sur la position de O par rapport au plan (ABC) ?

2° Déterminer le barycentre G de la famille : $\left\{(A\ ,\ 2)\ ,\ (B\ ,\ 2)\ ,\ (C\ ,\ -2)\right\}$.

3° Déterminer une équation du plan (P) passant par (Oz) et perpendiculaire au plan (ABC) . Calculer la distance de A au plan (P) .

52 On donne la droite (D) définie par $x = 2y - 7$ et $z = x - 8$, et le plan (P) d'équation : $3x + 2y - z + 7 = 0$.

1° Trouver une équation du plan projetant orthogonalement la droite (D) sur le plan (P) .

2° Trouver une équation de la droite (D') , sous la forme $y = ax + b$, projeté de (D) sur le plan (xOy) parallèlement à la droite (D_1) de paramètres directeurs $(1\ ;\ -1\ ;\ 2)$.

53 On donne les droites (D) et (D') définies par les équations :
$x = m + 1\ ,\ y = 2m - 3\ ,\ z = m$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $x = -t + 2\ ,\ y = 2t\ ,\ z = 4t - 1$ avec $t \in \mathbb{R}$.

1° Montrer que (D) et (D') ne sont pas coplanaires .

2° Déterminer le cosinus de l'angle obtus formé par (D) et (D') .

3° Trouver une équation du plan passant par (D) et parallèle à (D') .

4° En déduire la distance de (D') à (D) .

54 L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k}\right)$.
On considère les points $A(4\ ;\ 3\ ;\ 2)$, $B(-8\ ;\ -1\ ;\ 6)$ et le plan (P) d'équation $x - y - z + 4 = 0$.

1° a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AB) .
b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (AB) avec (P) .
c) Montrer que A et B sont situés de part et d'autre du plan (P) .

2° Soit (d) l'ensemble des points de (P) qui sont équidistants de A et B .
a) Trouver une équation du plan médiateur (Q) de $[AB]$.
b) Montrer que (d) est la droite définie par le système d'équations paramétriques :
$x = m - \dfrac{2}{3}\ ;\ y = -m - 1\ ;\ z = 2m + \dfrac{7}{2}$. (m est un réel)

3° Soit J le projeté orthogonal de A sur (d) .
Calculer les coordonnées de J et montrer que (d) est perpendiculaire au plan (ABJ) .

Bac.

$\boxed{55}$ On donne la famille de plans (P_m) définis par : $(2m+1)x+(m+1)y+(m+2)z+3-m=0$, où m est un paramètre réel .

1° Déterminer m pour que (P_m) soit orthogonal au plan (xOy) .

2° Montrer que, quelque soit le paramètre réel m, (P_m) passent par une droite fixe à déterminer .

3° On considère les deux droites (D) et (D') définies par :
(D) : $x = m$, $y = -3m + 5$, $z = m - 4$ et
(D') : $x = m' + 1$, $y = -2m' - 1$, $z = -m' + 3$.
a) Montrer que (D) et (D') sont concourantes .
b) Trouver des équations paramétriques de (D'') , symétrique de (D') par rapport à (D) .

4° M étant un point variable sur (D) et N variable sur (D') , on considère la famille $\{(O\ ;\ 1)\ ;\ (M\ ,\ 2)\ ;\ (N\ ,\ -2)\}$. Montrer que le barycentre G de cette famille se déplace dans un plan fixe à déterminer .

$\boxed{56}$ Soit les deux plans : (P) : $x-2y+z+2=0$ et (Q) : $2x+y-z+1=0$.

1° Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (d) , intersection de (P) et (Q) .

2° Déterminer des équations des plans bissecteurs des dièdres d'arête (d) et de faces (P) et (Q) .

3° Déterminer une équation du plan (P') , symétrique de (P) par rapport à (Q) .

$\boxed{57}$ Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k}\right)$, on considère le point $A(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et les deux plans (P) et (Q) d'équations respectives $2x - y - 2 = 0$ et $x + 2y - z = 0$.

1° a) Vérifier que A est un point commun à (P) et (Q) .
b) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (d) , intersection de (P) et (Q) .

2° a) Donner un système d'équations paramétriques de la droite (d) perpendiculaire en A à (P) .

b) Calculer les coordonnées d'un point E de (d) tel que $AE = \sqrt{5}$.

3° a) Montrer que les points $B(0\ ;\ -2\ ;\ 0)$ et $C(2\ ;\ 2\ ;\ t)$ appartiennent à (P) . (t est un réel)
b) Calculer t pour que le triangle ABC soit rectangle en B et trouver , dans ce cas, le volume du tétraèdre $EABC$.

Bac.

58 Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$, on donne le plan (P) d'équation $x-2y+z-2=0$ et les droites (D) et (D') définies par :

$$(D) : \begin{cases} x = m \\ y = -2m + 1 \\ z = m - 2 \end{cases} \quad m \in \mathbb{R} \text{ et } (D') : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = t - 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1° Démontrer que les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires .

2° a) Prouver que (D) est perpendiculaire à (P) .

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (D) et (P) .

3° a) Prouver que (D') est contenue dans (P) .

b) Le cercle (C) de centre I et de rayon $\sqrt{5}$ contenu dans le plan (P) , coupe la droite (D') en deux points A et B .

Calculer les coordonnées de A et B .

c) Soit J le milieu de $[AB]$. Prouver que la droite (IJ) est perpendiculaire à (D) et (D') .

Bac.

59 Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$, on considère les points $A\,(4\,;0\,;0)$, $B\,(0\,;6\,;0)$, $C\,(0\,;0\,;4)$ et $E\,(2\,;3\,;0)$.

1° Montrer que le point E appartient à la droite (AB).

2° Soit (P) le plan passant par E et parallèle aux deux droites (OB) et (AC).

Montrer qu'une équation de (P) est $x + z - 2 = 0$.

3° Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (BC).

4° Le plan (P) coupe les droites (BC) , (OC) et (OA) respectivement en F , G et H .

Montrer que F a pour coordonnées $(0\,;3\,;2)$ et préciser les coordonnées respectives de G et H .

5° a) Démontrer que $EFGH$ est un rectangle.

b) Soit Γ le cercle circonscrit au rectangle $EFGH$ et (T) la droite du plan (P) tangente en E à Γ .

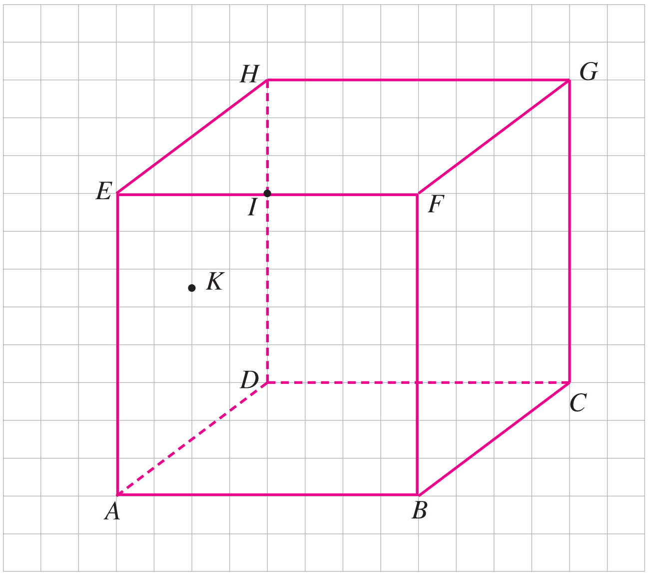
Déterminer un système d'équations paramétriques de (T).

Bac.

60 On considère un cube $ABCDEFGH$.

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $\left(A\ ,\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AE}\right)$.

On désigne par I le milieu de $[EF]$ et par K le centre du carré $ADHE$.



1° a) Calculer l'aire du triangle IGA .

b) Calculer le volume du tétraèdre $ABIG$.

c) Déduire que la distance du point B au plan (AIG) est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

2° a) Écrire une équation du plan (AFH) .

b) La droite (CE) coupe le plan (AFH) en un point L . Calculer les coordonnées de L .

c) Montrer que L est un point de la droite (FK) . Que représente le point L pour le triangle AFH ?

Bac.

61 L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k}\right)$.

On considère les points $A\ (2\ ;\ -2\ ;\ -1)$, $B\ (1\ ;\ 0\ ;\ -2)$, $C\ (2\ ;\ 1\ ;\ -1)$ et le plan (P) d'équation :

$x - 2y + z + 1 = 0$.

1° Montrer qu'une équation du plan (Q) déterminé par A , B et C est $x - z - 3 = 0$.

2° a) Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires et qu'ils se coupent suivant la droite (BC) .

b) Calculer la distance de A à (BC) .

3° Soit (d) la droite définie par : $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 1 \\ z = t + 2 \end{cases}$ où t est un paramètre réel .

a) Vérifier que (d) est incluse dans (P) .

b) Soit M un point variable de (d) .

Démontrer que l'aire du triangle MBC reste constante lorsque M se déplace sur (d) . **Bac.**

62 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$, on donne les points suivants :

$A\,(4\,;0\,;1)$, $B\,(2\,;1\,;2)$, $C\,(2\,;0\,;3)$ et $E\,(3\,;-1\,;0)$.

1° a) Écrire une équation du plan (P) déterminé par A , B et C .

b) Montrer que A est le projeté orthogonal de E sur (P) .

2° a) Montrer que le triangle ABC est rectangle .

b) Calculer l'aire du triangle ABC .

c) Calculer le volume du tétraèdre $EABC$.

3° On désigne par (Q) le plan d'équation $x - 2y - 2z - 2 = 0$.

Montrer que (Q) passe par A et qu'il est perpendiculaire à la droite (BE) .

4° a) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (BC) .

b) Soit M un point variable de (BC). Démontrer que , lorsque M décrit (BC) , la distance de M au plan (Q) reste constante . **Bac.**

63 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$, on considère la droite (d) définie par : $(d)\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 3 \\ z = t + 1 \end{cases}$ (t est un paramètre réel) .

1° Écrire une équation du plan (Q) déterminé par le point O et la droite (d).

2° a) Calculer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de O sur (d).

b) Montrer que la distance du point O à la droite (d) est égale à $2\sqrt{2}$.

3° (P) est le plan d'équation $(2m - 1)x - m\,y + (1 - m)z + 6m - 2 = 0$ où m est un paramètre réel .

a) Vérifier que H appartient à (P) .

b) Montrer que (P) contient la droite (d) .

c) Calculer, en fonction de m, la distance du point O à (P) .

4° Déterminer m pour que la droite (OH) soit perpendiculaire à (P) . **Bac.**

64 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne le point $A\,(1\,;1\,;2)$,

le plan (P) d'équation $x + y - z + 2 = 0$ et la droite (d) d'équations paramétriques $\begin{cases} x = m + 1 \\ y = m - 2 \\ z = 2m + 1 \end{cases}$ où m est un paramètre réel .

1° Montrer que la droite (d) est contenue dans le plan (P) et que A n'appartient pas à (P) .

2° Trouver une équation du plan (Q) déterminé par le point A et la droite (d) .

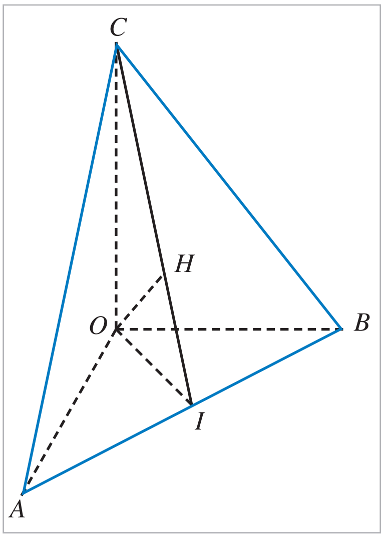
3° Montrer que le point $A'\left(\frac{-1}{3}\,;\frac{-1}{3}\,;\frac{10}{3}\right)$ est symétrique de A par rapport à (P) .

4° Soit (Q') le plan déterminé par A' et (d) . Vérifier qu'une équation de (Q') est $x + 5y - 3z + 12 = 0$.

5° Soit H le projeté orthogonal de A sur (d) et α l'angle aigu des deux plans (Q) et (Q') .

Montrer que l'angle aigu des deux droites (HA) et (HA') est égal à α et calculer $\cos\alpha$. **Bac.**

65 La figure ci-contre est considérée dans un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ où : $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OC} = 2\vec{k}$.



Soit I le milieu de $[AB]$.

1° Justifier qu'une équation du plan (ABC) est : $2x + 2y + z - 2 = 0$.

2° On considère le point $H\left(\frac{4}{9}\,;\frac{4}{9}\,;\frac{2}{9}\right)$.

a) Montrer que C , H et I sont alignés.

b) Démontrer que (OH) est perpendiculaire au plan (ABC) .

c) Démontrer que les deux plans (OIC) et (ABC) sont perpendiculaires.

3° a) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) passant par C et parallèle à (OB) .

b) Soit F un point variable de (Δ) .

Démontrer que le tétraèdre $FOAB$ a un volume constant que l'on calculera . **Bac.**

66 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne le plan (P) d'équation $x+y+z-4=0$ et les points $A\,(3\,;1\,;0)$, $B\,(1\,;2\,;1)$, $C\,(1\,;1\,;2)$ et $E\,(2\,;0\,;-1)$.

1° Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B .

2° **a)** Vérifier que les points A , B et C appartiennent au plan (P).

b) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (d) perpendiculaire en A au plan (P) et vérifier que E est un point de (d).

3° On désigne par (Q) le plan passant par A et perpendiculaire à (BE) .

Écrire une équation de (Q).

4° Les plans (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D) .

a) Démontrer que les droites (D) et (BC) sont parallèles .

b) M est un point variable de (BC), démontrer que la distance de M au plan (Q) reste constante . **Bac.**

6 NOMBRES COMPLEXES

Un peu d'histoire

*Au 16e siècle, l'école mathématique italienne élabore des méthodes de résolution pour les équations du troisième degré, avec Scipione **dal Ferro** (1465-1526), **Niccolo Tartaglia** (1499 env.-1557) **, Jérôme Cardan** (1501-1576), et, pour les équations du quatrième degré, **Ludovico Ferrari** (1522-1565).*
***Cardan** est préoccupé par le cas d'équations du troisième degré admettant plusieurs solutions, bien que l'équation du second degré utilisée pour les résoudre ait un discriminant négatif, et soit donc sans solution. Passant outre cette difficulté, **Raffaele Bombelli** introduit en 1572, peu avant sa mort, des nombres qu'il nomme imaginaires en raison de leur caractère mystérieux. À cette époque, on utilise le symbole $\sqrt{-1}$ qui n'a, en fait, aucune signification. Cependant les résultats obtenus sont corrects. Le mystère subsiste pendant trois siècles.*
*En 1777, le mathématicien suisse **Léonhard Euler** (1707-1783) emploie i au lieu de $\sqrt{-1}$. Quelques mathématiciens, dont le Norvégien **Caspar Wessel** (1745-1818), le Genevois **Jean Robert Argand** (1768-1822), l'Anglais **John Warren** (1796-1852), donnent une représentation géométrique qui rassure quelque peu leurs contemporains.*
*En 1831, l'**Allemand Gauss** (1777-1855) introduit l'appellation : nombres complexes. Il démontre rigoureusement le théorème de d'**Alembert** , contribue à la justification de l'addition et de la multiplication. Le Français **Augustin Cauchy** (1789-1857) donne une nouvelle définition des nombres complexes. Ces nouveaux êtres mathématiques sont enfin adoptés sans réticence.*
*En 1843, l'Irlandais **William Rowan Hamilton** (1805-1865) étend la même conception aux espaces de dimension 4 , en créant les quaternions.*

PLAN DU CHAPITRE

«On ne pourra bien dessiner le simple qu'après une étude approfondie du complexe».

Gaston BACHELARD

RAPPEL

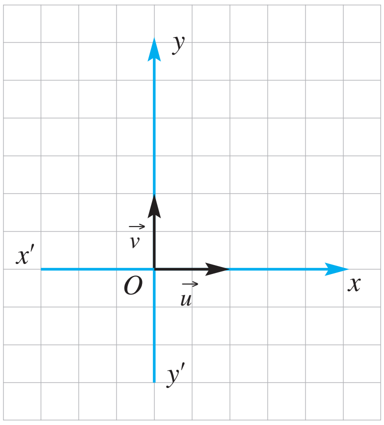
$z = x + iy$ est un nombre complexe , avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

- $Re\ (z) = x$ et $Im\ (z) = y$.
- $z = z'$ équivaut à $Re\ (z) = Re\ (z')$ et $Im\ (z) = Im\ (z')$.
- $z = 0$ équivaut à $Re\ (z) = 0$ et $Im\ (z) = 0$.
- z réel équivaut à $Im\ (z) = 0$.
- z imaginaire pur équivaut à $z \neq 0$ et $Re\ (z) = 0$.
- Si $\overline{z}$ est le conjugué de z , alors $\overline{z} = x - iy$ et
  - $Re\ (\overline{z}) = Re\ (z)$ et $Im\ (\overline{z}) = -\ Im\ (z)$
  - $\overline{(\overline{z})} = z$
  - $z + \overline{z} = 2\ Re\ (z)$ et $z - \overline{z} = 2i\ Im\ (z)$
  - z imaginaire pur équivaut à $z \neq 0$ et $Re\ (z) = 0$, soit $z + \overline{z} = 0$, et $\overline{z} = -\ z$, $z \neq 0$.
  - z réel équivaut à $Im\ (z) = 0$, soit $z - \overline{z} = 0$ et $\overline{z} = z$.
- Quels que soient les nombres complexes z et z' :
  - $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
  - $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$
  - $\overline{z\ .\ z'} = \overline{z}\ .\ \overline{z'}$
  - $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$
- $z\ .\ \overline{z} = x^2 + y^2 = \left(Re\ (z)\right)^2 + \left(Im\ (z)\right)^2$

A Module et argument d'un nombre complexe

1 REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1° Activité



Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O\ ,\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$.

1° Tracer la demi-droite $[Ot)$ telle que $(\vec{u}\ ,\ \vec{Ot}\ ) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Placer sur $[Ot)$ le point M tel que $OM = 2$.

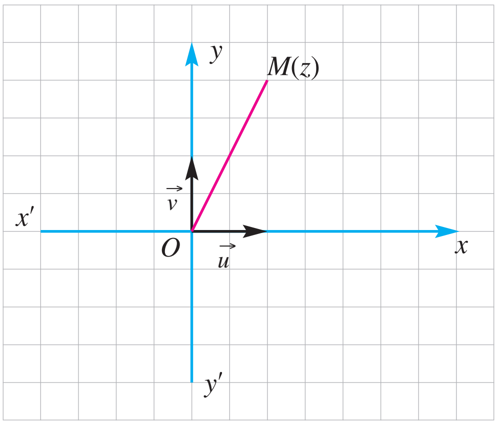
2° Soit P et Q les projetés orthogonaux de M sur $(x'x)$ et $(y'y)$ respectivement .

Calculer $\overline{OP}$ et $\overline{OQ}$.

En déduire la forme algébrique du nombre complexe z affixe de M .

2° Représentation géométrique . Image , affixe

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.



À chaque nombre complexe z donné par sa forme algébrique $z = x + iy$, correspond un point M et un seul , $M\,(x\,;y)$, appelé **image** de z et noté $\boldsymbol{M\,(z)}$.

Réciproquement , à tout point $M\,(x\,;y)$ du plan , correspond un nombre complexe z et un seul tel que $z = x + iy$. z s'appelle **affixe** de M .

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$, ou tout vecteur $\vec{V}$ tel que $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$; s'appelle **vecteur image** de z et on note $\overrightarrow{OM}\,(z)$ ou $\boldsymbol{\vec{V}\,(z)}$.

z s'appelle **affixe** de $\overrightarrow{OM}$ ou de $\vec{V}$. (On note $z = z_{\overrightarrow{OM}} = z_{\vec{V}}$) .

L'image de tout réel z se trouve sur l'axe des abscisses .

L'axe $x'Ox$ s'appelle axe des réels .

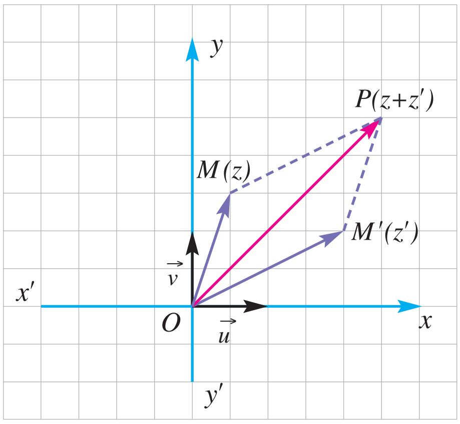
L'image de tout imaginaire pur se trouve sur l'axe des ordonnées .

L'axe $y'y$ privé de O s'appelle axe des imaginaires purs .

3° Représentation géométrique de $z + z'$

Soit z et z' deux nombres complexes d'images respectives M et M' . On a

$\overrightarrow{OM}\,(z)$ et $\overrightarrow{OM'}\,(z')$.

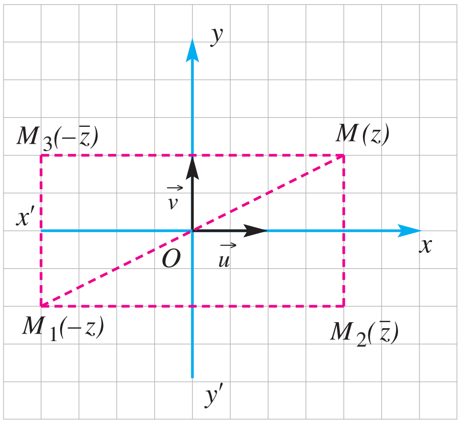


Si P est le point tel que

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$, alors $\overrightarrow{OP}$ est le vecteur image du nombre complexe $z + z'$: $\overrightarrow{OP}\,(z + z')$.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}} \textbf{ équivaut à } \boldsymbol{z_{\overrightarrow{OP}} = z + z'}$$

4° Représentations géométriques de $-z$, $\bar{z}$ et $-\bar{z}$



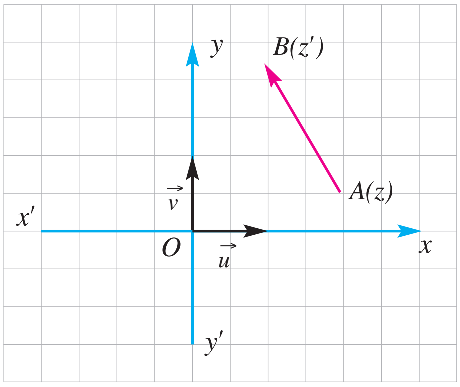
Soit $z = x + iy$ un nombre complexe d'image $M\,(x\,;\,y)$.

L'image M_1 de $-z = -x - iy$ est le point symétrique de M par rapport à O .

L'image M_2 de $\bar{z} = x - iy$ est le point symétrique de M par rapport à $x'Ox$.

L'image M_3 de $-\bar{z} = -x + iy$ est le point symétrique de M par rapport à $y'Oy$.

5° Affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$



Soit z et z' deux nombres complexes d'images respectives A et B .

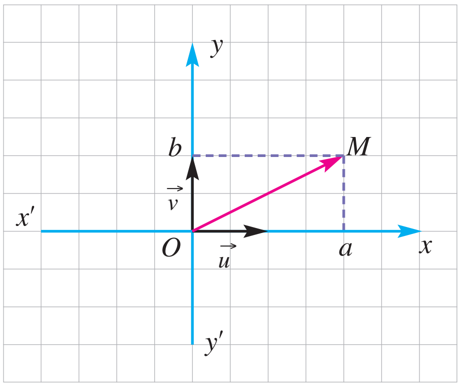
On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, d'où

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{OB}} - z_{\overrightarrow{OA}}$.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z' - z$:

$\overrightarrow{AB}\ (z' - z)$.

2 MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE



Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$. Si $z = a + ib$ est un nombre complexe écrit sous sa forme algébrique et $M\,(a\,;\,b)$ l'image de z , alors $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z .

1° Définition

On appelle **module** du nombre complexe $z = a + ib$, le réel positif noté $|z|$:

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}} \quad \text{car } z\,\bar{z} = a^2 + b^2$$

Comme $a^2 + b^2 = \mathrm{OM}^2$, alors $|z| = OM$, et :

le module d'un nombre complexe est égal à la norme de son vecteur image : $|z| = \|\overrightarrow{OM}\|$

Ce module est la distance de l'origine O du repère à l'image M de z .

EXEMPLE

$|5 - 2i| = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$; $|-5i| = 5$; $|7\,i| = 7$; $|3| = 3$.

2° Propriétés

- **$|z| = 0$ équivaut à $OM = 0$, soit $z = 0$**
- **$|-z| = |z|$ et $|\bar{z}| = |z|$**

En effet , si $z = a + ib$ alors $-z = -a - ib$ et $\bar{z} = a - ib$.

$|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$;

$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

- **$|z|^2 = a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z} = \overline{OM}^2$**
- **$|zz'| = \sqrt{(zz') \cdot \overline{(zz')}} = \sqrt{(z\bar{z}) \cdot (z'\bar{z}')} = \sqrt{(z\bar{z})} \cdot \sqrt{z'\bar{z}'} = |z| \cdot |z'|$**

Il en résulte que, pour tout entier naturel n , $|z^n| = |z|^n$.

• Pour tout nombre complexe non nul z on a :

$z \cdot \dfrac{1}{z} = 1$, ce qui donne : $\left|z \cdot \dfrac{1}{z}\right| = |1|$, ou bien $|z| \cdot \left|\dfrac{1}{z}\right| = 1$,

soit $\boxed{\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}}$

$\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \left|z' \cdot \dfrac{1}{z}\right| = |z'| \cdot \left|\dfrac{1}{z}\right| = |z'| \cdot \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{|z'|}{|z|}$, soit $\boxed{\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}}$

• Pour tout nombre complexe non nul $z = a + ib$ on a :

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z.\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$; $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2}\, i$.

EXEMPLES

1. Soit $z = 2 - 3i$.

On a : $|z| = \sqrt{4 + (-3)^2} = \sqrt{13}$.

$$|-z| = |-2 + 3i| = \sqrt{(-2)^2 + 9} = \sqrt{13} = |z| .$$

$$|\bar{z}| = |2 + 3i| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} = |z| .$$

2. Si $z = 2 - 3i$ et $z' = -3 + i$, alors

$$|z \, . \, z'| = |z| \, . \, |z'| = \sqrt{4+9} \, . \, \sqrt{9+1} = \sqrt{13} \, . \, \sqrt{10} = \sqrt{130} .$$

$$\left|\frac{z'}{z}\right| = \left|\frac{-3+i}{2-3i}\right| = \frac{|z'|}{|z|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{10}{13}} .$$

$$\frac{1}{z} = \frac{2}{4+9} - \frac{-3}{4+9}\, i \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2-3i} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}\, i .$$

Un nombre complexe est de module 1 si et seulement si $z \, . \, \bar{z} = 1$, soit $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$

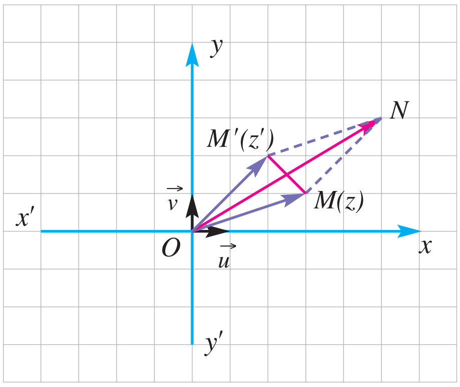
EXEMPLE

Le nombre complexe $z = \dfrac{3 - \sqrt{2}i}{3 + \sqrt{2}i}$ est tel que :

$\bar{z} = \dfrac{\overline{(3 - \sqrt{2}\, i)}}{\overline{(3 + \sqrt{2}\, i)}} = \dfrac{3 + \sqrt{2}\, i}{3 - \sqrt{2}\, i} = \dfrac{1}{z}$. Par conséquent $|z| = 1$.

• Si M et M' sont les images des nombres complexes z et z' , alors $\overrightarrow{MM'}$ est le vecteur image de $z' - z$ et $|z' - z| = MM'$.

Si N est le point tel que $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$, alors $\overrightarrow{ON}$ est le vecteur image de $z + z'$ et $|z + z'| = ON$.



Dans le triangle OMN on a :

$ON \leqslant OM + MN$.

Or $OM = |z|$, $MN = OM' = |z'|$ et $ON = |z + z'|$, d'où

(Inégalité triangulaire) .

$$\boxed{|z + z'| \leqslant |z| + |z'|}$$

Exercices résolus

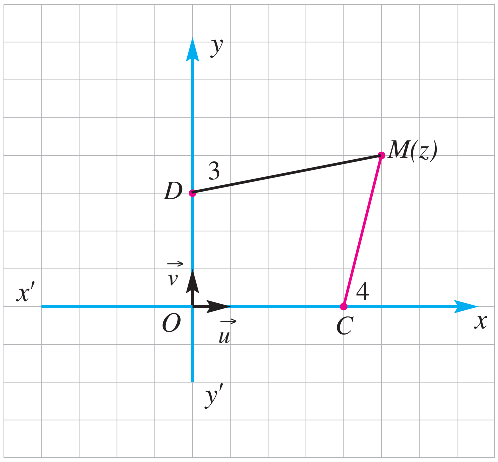
① z est un nombre complexe d'image M dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.

1° Déterminer géométriquement $|z-4|$ et $|z-3i|$.

2° Déterminer l'ensemble des points M dans chacun des cas suivants :

a) $|z| = 2$.

b) $|z-4| = 3$



1° Soit C le point d'affixe 4 et D celui d'affixe $3i$.

On a $C\ (4\ ;\ 0)$ et $D\ (0\ ;\ 3)$ et

$$\left|z-4\right| = \left|z_M - z_C\right| = \left\|\overrightarrow{CM}\right\| = CM\ ,$$

$$\left|z-3i\right| = \left|z_M - z_D\right| = \left\|\overrightarrow{DM}\right\| = DM\ .$$

2° a) $|z| = 2$ équivaut à $OM = 2$.

L'ensemble des points M est donc le cercle de centre O et de rayon 2 .

* On peut chercher analytiquement cet ensemble .

On pose $M\ (x\ ;\ y)$, soit $z = x + iy$.

$|z| = 2$ équivaut à $|z|^2 = 4$, soit $x^2 + y^2 = 4$.

C'est une équation de l'ensemble des points M . Cette équation est celle du cercle de centre O et de rayon 2 .

b) $|z-4| = 3$ équivaut à $CM = 3$.

L'ensemble des points M est alors le cercle de centre C et de rayon 3 .

* On peut chercher analytiquement cet ensemble . $|z-4| = 3$ équivaut à $|z-4|^2 = 9$,

$|x-4+iy|^2 = 9$ soit $(x-4)^2 + y^2 = 9$.

② **Déterminer les nombres complexes z tels que : z , $\frac{1}{z}$ et $z - 1$ aient même module .**

On a : $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z - 1|$.

Comme $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$, on a $|z| = \frac{1}{|z|}$, ou bien $|z|^2 = 1$, soit $|z| = 1$.

On a alors $|z - 1| = 1$, ou bien $(z - 1)\,\overline{(z - 1)} = 1$, $(z - 1)(\overline{z} - 1) = 1$, $z\,\overline{z} - z - \overline{z} + 1 = 1$, soit $z + \overline{z} = z\,\overline{z}$.

Comme $|z| = 1$, on a $z\,\overline{z} = 1$ et par suite $z + \overline{z} = 1$.

On pose $z = x + iy$, avec x et y réels , on obtient $2x = 1$, $x = \frac{1}{2}$.

De plus $|z|^2 = 1$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 = 1$, d'où $y^2 = \frac{3}{4}$, soit $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

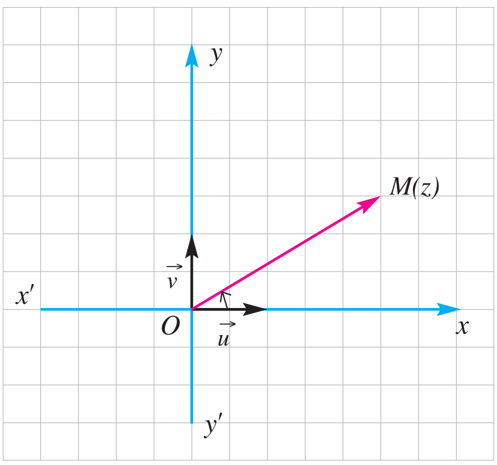
Il y a , donc, deux nombres complexes qui répondent à la question :

$z_1 = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3 ARGUMENTS D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

z est un nombre complexe non nul et M est l'image de z .



1° Définition

On appelle **argument** du nombre complexe non nul z , une mesure (à $2k\pi$ près , $k \in \mathbb{Z}$) de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$.

On note : $\arg(z) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})\ [2\pi]$.

Remarques

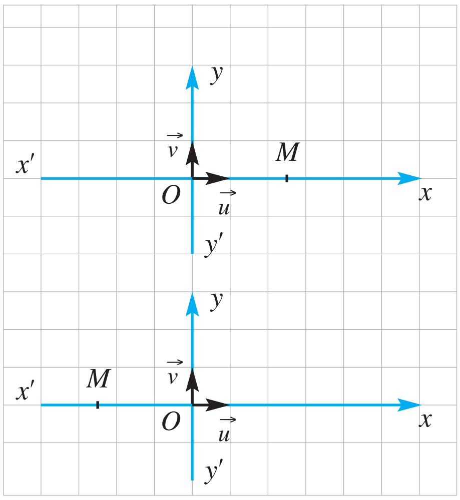
1. L'angle $(\vec{u}\ ;\ \vec{0})$ n'étant pas défini , le nombre complexe 0 n'a pas d'argument .

2. L'unité d'angle choisie est souvent le radian .

Un nombre complexe admet une infinité d'arguments .

Si θ est l'un de ces arguments , alors $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$.

3. Il n'est pas parfois nécessaire de prendre , comme argument de z , la détermination principale de $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM})$.



4. a) Si z est un réel strictement positif , alors M se trouve sur $[Ox)$ et

$\arg(z) = 0\ [2\pi]$.

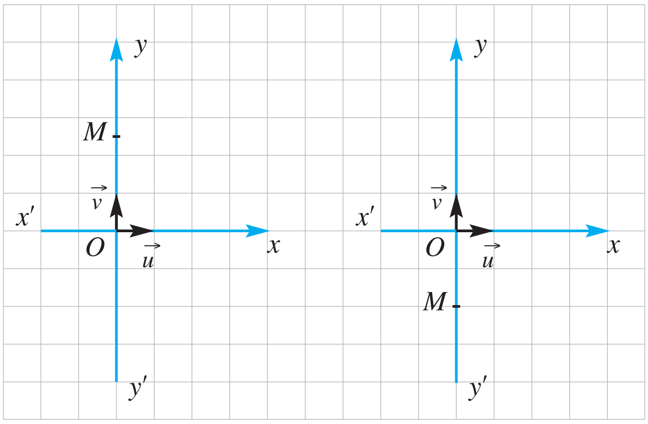
b) Si z est un réel strictement négatif , alors M se trouve sur $[Ox')$ et

$\arg(z) = \pi\ [2\pi]$.

On en déduit que, si z est réel, alors

$\arg(z) = 0\ [\pi]$.

c) Si z est un imaginaire pur , alors M se trouve sur $[Oy)$ privé du point O ou sur $[Oy')$ privé du point O .



Dans le premier cas on a :

$$\arg(z) = +\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\ ,$$

et dans le deuxième cas on a :

$$\arg(z) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi\ ]\ .$$

On en déduit que , si z est un imaginaire pur , alors

$$\arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi\ ]\ .$$

EXEMPLES

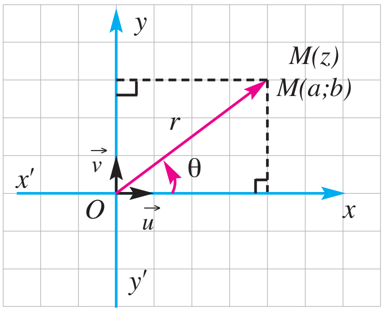
1. Si $z = 5$, alors $\arg(z) = 0\ [2\pi]$.

2. Si $z = -7$, alors $\arg(z) = \pi\ [2\pi]$.

3. Si $z = 4i$, alors $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

4. Si $z = -6i$, alors $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

2° Détermination d'un argument d'un nombre complexe non nul



Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul et M l'image de z dans le plan d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$.

On a : $M\ (a\ ;\ b)$;

$OM = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;

$\arg(z) = (\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM}) = \theta\ [2\pi]$.

En désignant par r le module du nombre complexe z on a :

$$\boldsymbol{OM = r = |z|}\ .$$

et $\boldsymbol{a = r\cos\theta}$, $\boldsymbol{b = r\sin\theta}$, soit

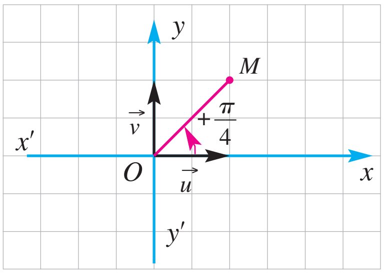
$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{a}{r}}\ , \qquad \boldsymbol{\sin\theta = \frac{b}{r}}\ ,$$

relations qui permettent de déterminer une valeur de θ .

Exemples

Soit à déterminer un argument de chacun des nombres complexes suivants :

1. $z = 1 + i$. L'image de z est le point $M\ (1\ ;\ 1)$.



On a : $r = |z| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$.

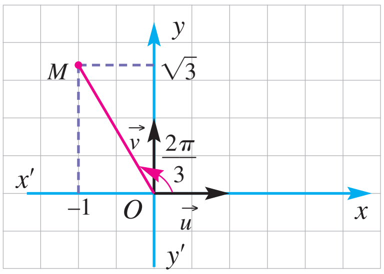
$\cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et

$\sin\theta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Une valeur de θ est donc $+\dfrac{\pi}{4}$, et

$$\arg(z) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]\ .$$

2. $z = -1 + \sqrt{3}\,i$. L'image de z est le point $M\ (-1\ ;\ \sqrt{3})$.

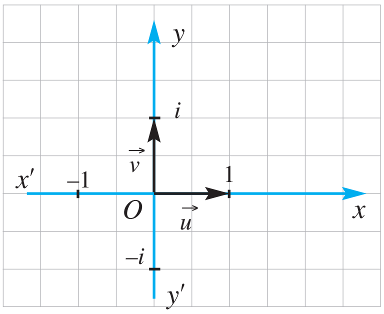


On a : $r = |z| = \sqrt{1 + 3} = 2$.

$\cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{-1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Une valeur de θ est donc $\dfrac{2\pi}{3}$, et $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

3. On trouve de même que :

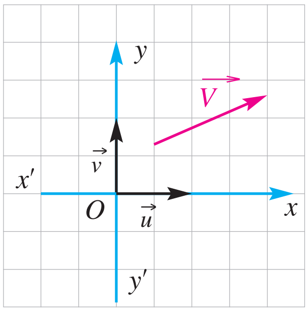


$\arg(1) = 0\ [2\pi]$; $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

$\arg(-1) = \pi\ [2\pi\ ]$; $\arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

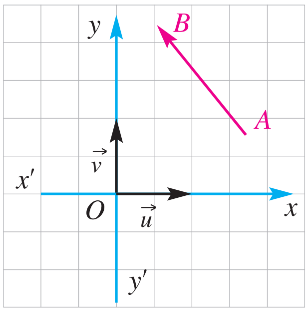
4 INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE $\left|\frac{z-a}{z-b}\right|$ ET DE $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$

1° Module et argument de $z_B - z_A$



Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

si $\vec{V}$ est un vecteur du plan , d'affixe z , alors
$|z| = \left\|\vec{V}\right\|$ et $\arg(z) = \left(\vec{u}, \vec{V}\right)$ $[2\pi]$



Soit A et B deux points du plan , d'affixes respectives z_A et z_B .

On a : affixe $(\overrightarrow{AB}) = Z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

D'où :

$$\left|z_B - z_A\right| = AB \text{ et } \arg(z_B - z_A) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) \quad [2\pi]$$

2° Interprétation géométrique de $\left|\frac{z-a}{z-b}\right|$ et de $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$

A et B sont deux points donnés du plan, d'affixes respectives a et b , et M un point d'affixe z . A , B et M sont supposés distincts deux à deux .

• On a : $|z-a| = AM$ et $|z-b| = BM$.

Par suite $$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \frac{|z-a|}{|z-b|} = \frac{AM}{BM} \text{ avec } A(a)\text{ , }B(b)\text{ et }M(z)$$

EXEMPLE

Soit A, B et M les points d'affixes respectives $a = 1 + i$, $b = 1 - i$ et $z = 3 - 2i$.

$$\frac{z-a}{z-b} = \frac{3-2i-1-i}{3-2i-1+i} = \frac{2-3i}{2-i}$$

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \frac{|z-a|}{|z-b|} = \frac{\sqrt{4+9}}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{\frac{13}{5}} \text{ , soit } \frac{MA}{MB} = \sqrt{\frac{13}{5}} .$$

• On a : $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) = \arg(z-a) - \arg(z-b) \quad [2\pi]$.

Or $\arg(z-a) = \left(\vec{u}\ , \overrightarrow{AM}\right) \quad [2\pi]$ et $\arg(z-b) = \left(\vec{u}\ , \overrightarrow{BM}\right) \quad [2\pi]$,

d'où $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) = \left(\vec{u}\ , \overrightarrow{AM}\right) - \left(\vec{u}\ , \overrightarrow{BM}\right) \quad [2\pi]$

$= \left(\overrightarrow{BM}\ , \overrightarrow{AM}\right) \quad [2\pi]$

$= \left(\overrightarrow{MB}\ , \overrightarrow{MA}\right) \quad [2\pi]$

$$\mathbf{arg}\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \left(\overrightarrow{BM}\ , \overrightarrow{AM}\right) \quad [2\pi] = \left(\overrightarrow{MB}\ , \overrightarrow{MA}\right) \quad [2\pi]$$

avec $A(a)$, $B(b)$ et $M(z)$

EXEMPLE

Si $a = 2 - 2i$, $b = 1 - i$ et $z = 3 - i$, alors $\dfrac{z-a}{z-b} = \dfrac{3-i-2+2i}{3-i-1+i} = \dfrac{1+i}{2}$

et $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$, soit $\left(\overrightarrow{MB}\ , \overrightarrow{MA}\right) = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$, avec $A(a)$, $B(b)$ et $M(z)$.

Propriétés

A , B et M sont trois points distincts deux à deux d'affixes respectives a , b et z .

• Pour que les points A , B et M , soient alignés il faut et il suffit que $\left(\overrightarrow{MB}\ , \overrightarrow{MA}\right) = 0 \quad [\pi]$, soit $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) = 0 \quad [\pi]$.

• Pour que les droites (AM) et (BM) soient perpendiculaires il faut et il suffit que $\left(\overrightarrow{MB}\ , \overrightarrow{MA}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$, soit $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$.

EXEMPLES

1. Soit les points A , B , C et D d'affixes respectives $a = 3 + i$, $b = 1 - i$, $c = 5 + 3i$ et $d = 1 + 3i$.

a) Les points A , B et C sont alignés car

$\dfrac{b-a}{c-a} = \dfrac{1-i-3-i}{5+3i-3-i} = \dfrac{-2-2i}{2+2i} = -1$, $\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) = \arg(-1) = \pi \quad [2\pi]$,

et par suite $\left(\overrightarrow{AC}\ , \overrightarrow{AB}\right) = \pi \quad [2\pi]$.

b) Les droites (AB) et (AD) sont orthogonales car :

$$\frac{b-a}{d-a} = \frac{-2-2i}{-2+2i} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i\ .$$

$\arg\left(\dfrac{b-a}{d-a}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}\quad [2\pi]$, soit

$$\left(\overrightarrow{AD}\ ,\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{2}\quad [2\pi]\ .$$

2. Soit à déterminer la nature du triangle AMB sachant que $A(a)$, $B(b)$ et $M(z)$ sont tels que $a = 2-2i$, $b = 1-i$ et $z = 2-i$.

On a : $\dfrac{z-a}{z-b} = \dfrac{2-i-2+2i}{2-i-1+i} = i = \left[1\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Par suite $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = |i| = 1 = \dfrac{MA}{MB}$, soit $MA = MB$

et $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}\quad [2\pi]$, soit $\left(\overrightarrow{MB}\ ,\overrightarrow{MA}\right) = \dfrac{\pi}{2}\quad [2\pi]$.

On en déduit que le triangle AMB est un triangle rectangle en M et isocèle .

3° Applications

a) Points cocycliques

Dans le plan d'un repère orthonormal direct $(O\ ,\vec{u}\ ,\vec{v})$, on donne les points A , B , C et D d'affixes respectives $a = 1$, $b = i$, $c = 1+2i$ et $d = \dfrac{1+2i}{5}$.

On se propose de démontrer que les quatre points A , B , C , D sont cocycliques .

On a : $\dfrac{a-c}{b-c} = \dfrac{1-1-2i}{i-1-2i} = 1+i$; $\dfrac{a-d}{b-d} = \dfrac{1-\dfrac{1+2i}{5}}{i-\dfrac{1+2i}{5}} = -1-i$.

D'où $\arg\left(\dfrac{a-c}{b-c}\right) = \dfrac{\pi}{4}\quad [2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{CB}\ ,\overrightarrow{CA}\right) = \dfrac{\pi}{4}\quad [2\pi]$,

$\arg\left(\dfrac{a-d}{b-d}\right) = \pi + \dfrac{\pi}{4}\quad [2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{DB}\ ,\overrightarrow{DA}\right) = \pi + \dfrac{\pi}{4}\quad [2\pi]$

On en déduit que $\left(\overrightarrow{DB}\ ,\overrightarrow{DA}\right) = \left(\overrightarrow{CB}\ ,\overrightarrow{CA}\right) + \pi + 2k\pi$,

ou $\left(\overrightarrow{CB}\ ,\overrightarrow{CA}\right) = \left(\overrightarrow{DB}\ ,\overrightarrow{DA}\right)\quad [\pi]$

et les quatre points A , B , C et D sont cocycliques .

b) Ensemble de points vérifiant certaines conditions

1. Soit à déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|\dfrac{z-4}{z-3i}\right| = 1$.

En désignant par A et B les points d'affixes respectives $a = 4$ et $b = 3i$, l'égalité : $\left|\dfrac{z-4}{z-3i}\right| = 1$ équivaut à $\dfrac{|z-4|}{|z-3i|} = 1$, soit $\dfrac{MA}{MB} = 1$.

L'ensemble des points M est la médiatrice de $[AB]$.

2. Soit à déterminer l'ensemble des points N d'affixe z tels que $\left|\dfrac{z-4}{z-3i}\right| = 2$.

En désignant par A et B les points d'affixes respectives $a = 4$ et $b = 3i$, l'égalité $\left|\dfrac{z-4}{z-3i}\right| = 2$ équivaut à $\dfrac{NA}{NB} = 2$, soit $\overline{NA}^2 - 4\overline{NB}^2 = 0$.

En posant $z = x + iy$ on obtient $N(x\,;\,y)$, $A(4\,;\,0)$ et $B(0\,;\,3)$. D'où :

$$(4-x)^2 + y^2 - 4\left[x^2 + (3-y)^2\right] = 0\,;$$

$$x^2 + y^2 + \frac{8}{3}x - 8y + \frac{20}{3} = 0\,.$$

C'est l'équation de l'ensemble des points N . Cet ensemble est le cercle de centre $\omega\left(-\dfrac{4}{3}\,;\,4\right)$ et de rayon $R = \dfrac{10}{3}$.

3. Dans le plan d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$ on donne les points C , D , E et P d'affixes respectives $c = 3$, $d = i$, $e = 1 + i$ et z .

On se propose de calculer $\dfrac{c-e}{d-e}$ et de déterminer l'ensemble des points P tels que $\arg\left(\dfrac{3-z}{i-z}\right) = \arg(-2+i)$.

On a : $\dfrac{c-e}{d-e} = \dfrac{3-1-i}{i-1-i} = -2+i$

$\arg\left(\dfrac{3-z}{i-z}\right) = \arg\left(\dfrac{c-z}{d-z}\right) = \left(\overrightarrow{PD}\,,\overrightarrow{PC}\right)\quad [2\pi]$.

$\arg(-2+i) = \arg\left(\dfrac{c-e}{d-e}\right) = \left(\overrightarrow{ED}\,,\overrightarrow{EC}\right)\quad [2\pi]$.

D'où : $\left(\overrightarrow{PD}\,,\overrightarrow{PC}\right) = \left(\overrightarrow{ED}\,,\overrightarrow{EC}\right)\quad [2\pi]$, et les quatre points P , D , C et E sont cocycliques .

Or les trois points D , C et E sont fixes et non alignés , ils déterminent un cercle fixe (Γ) .

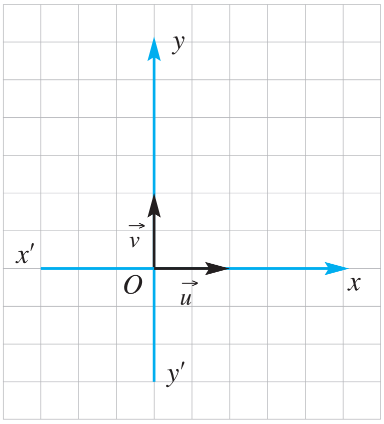
L'ensemble des points P est donc le cercle fixe (Γ) circonscrit au triangle CDE .

B Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe

Activité

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

Soit $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i$ un nombre complexe d'image M .



1° Placer M et donner ses coordonnées .

2° Calculer OM .

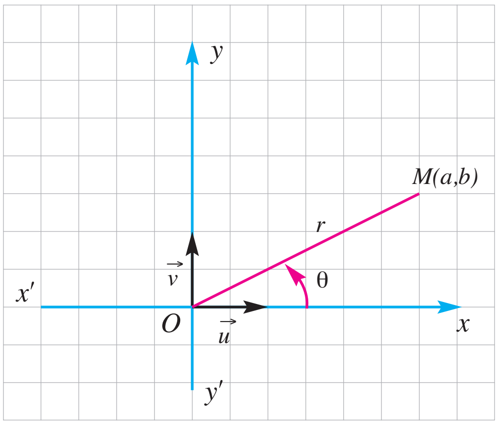
3° Calculer $\cos(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM})$, $\sin(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM})$ et $\tan(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM})$. En déduire une valeur de $(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM})$.

4° Écrire alors z sous la forme $z = \cos\theta + i\sin\theta$, où θ est une valeur à déterminer .

1 FORME TRIGONOMÉTRIQUE

1° Notation

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul donné sous sa forme algébrique , M l'image de z en repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.



On a : $M(a\,;b)$; $r = |z| = OM$, $r > 0$, $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$, $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$. D'où :

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

On dit qu'on a écrit z sous **sa forme trigonométrique .**

On note symboliquement

$$\boxed{z = [r\,;\theta]}$$

Ainsi

$$\left.\begin{array}{l} z=[r\,;\theta] \\ \text{ou} \\ z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \end{array}\right\} \text{ équivaut à } \left\{\begin{array}{l} |z|=r \\ \\ \arg(z)=\theta\ [2\pi] \end{array}\right.$$

$r\in\mathbb{R}_+^*$, $\theta\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{C}^*$

2° Relations entre les formes algébrique et trigonométrique

Si $a+ib$ et $[r\,;\theta]$ sont les formes algébrique et trigonométrique du nombre complexe non nul z , alors :

$$a+ib=[r;\theta] \text{ équivaut à } \left\{\begin{array}{l} a=r\cos\theta \\ b=r\sin\theta \\ \sqrt{a^2+b^2}=r \end{array}\right. \quad (1)\text{ , soit } \left\{\begin{array}{l} r=\sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta=\dfrac{a}{r} \\ \sin\theta=\dfrac{b}{r} \end{array}\right. \quad (2)$$

Le système (1) permet de déterminer a et b connaissant r et θ , c'est-à-dire il permet de déterminer la forme algébrique de z connaissant sa forme trigonométrique .

Le système (2) permet de déterminer r et θ connaissant a et b , c'est-à-dire il permet de déterminer la forme trigonométrique de z connaissant sa forme algébrique .

Exemple

1. Soit à chercher la forme algébrique du nombre complexe $z=\left[2;-\dfrac{\pi}{3}\right]$.

On a : $r=2$; $\theta=-\dfrac{\pi}{3}$, et $a=r\cos\theta=2\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$

$b=r\sin\theta=2\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

D'où $z=1-i\sqrt{3}$.

2. Soit à chercher la forme trigonométrique de $z = \sqrt{3} - i$.

On a : $a = \sqrt{3}$ et $b = -1$.

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$;

$\cos \theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \theta = \dfrac{b}{r} = -\dfrac{1}{2}$.

Une valeur de θ est $-\dfrac{\pi}{6}$, et $z = \left[2 ; -\dfrac{\pi}{6}\right]$,

ou $z = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$.

3. Soit à chercher la forme trigonométrique du nombre complexe $z = -3\left(\cos \dfrac{\pi}{12} - i \sin \dfrac{\pi}{12}\right)$.

-3 ne représente pas le module r de z , car $r \geqslant 0$.

On écrit z sous la forme :

$$z = 3\left(-\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right) = 3\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$z = 3\left(\cos \frac{11\pi}{12} + \mathrm{i} \sin \frac{11\pi}{12}\right).$$

La forme trigonométrique de z est $z = \left[3 ; \dfrac{11\pi}{12}\right]$, ou $z = 3\left(\cos \dfrac{11\pi}{12} + i \sin \dfrac{11\pi}{12}\right)$.

3° Propriétés

z et z' sont deux nombres complexes non nuls tels que :

$z = [r ; \theta]$ et $z' = [r' ; \theta']$.

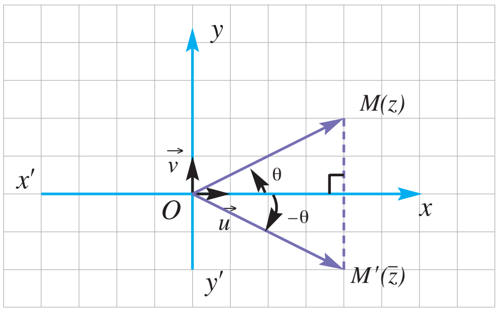
M et M' sont les images respectives de z et z' .

a) $z = z'$ équivaut à $[r ; \theta] = [r' ; \theta']$, donc M et M' sont confondus , soit $r = r'$ et $\theta = \theta'$ $[2\pi]$.

$[r ; \theta] = [r' ; \theta']$ équivaut à $r = r'$ et $\theta = \theta'$ $[2\pi]$

b) Si $z' = \bar{z}$, alors M' est symétrique de M par rapport à $x'Ox$.

D'où $\theta' = -\theta\ [2\pi]$, soit

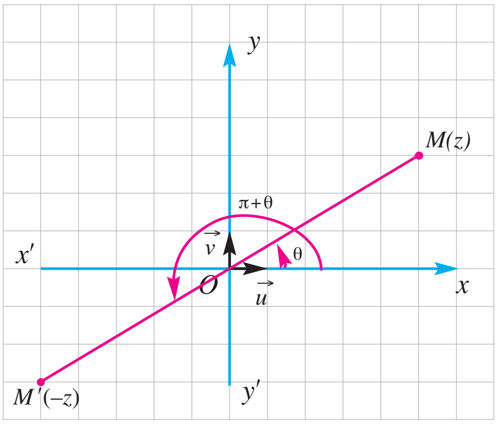


$$\boxed{\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]}$$

et $$\boxed{\bar{z} = [r\ ;\ -\theta]}$$

c) Si $z' = -z$ alors M' est le symétrique de M par rapport à O .

D'où $\theta' = \theta + \pi\ [2\pi]$, soit



$$\boxed{\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]}$$

et $$\boxed{-z = [r\ ,\ \pi + \theta]}$$

d) $z\ .\ z' = [r\ ;\ \theta]\ .\ [r'\ ;\ \theta'] = r(\cos\theta + i\sin\theta)\ .\ r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$$= rr'\Big[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')\Big]$$

$$= rr'\Big[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\Big] = \Big[rr'\ ,\ \theta+\theta'\Big].$$

D'où $$\boxed{[r\ ;\ \theta]\ .\ [r'\ ;\ \theta'] = [rr'\ ;\ \theta + \theta']}$$

et $$\boxed{\arg(z\ .\ z') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]}$$

Cette propriété montre que le module de $z\ .\ z'$ est $r\ .\ r'$.

On retrouve ici la propriété du module d'un produit de deux nombres complexes : $|z\ .\ z'| = |z|\ .\ |z'|$.

e) Si $z' = k\,z$ avec k réel non nul , alors

• $k > 0$ donne $k = [k\,;0]$, et $z' = [k\,,0] \times [r\,,\theta] = [kr\,,\theta]$.

• $k < 0$ donne $k = [-\,k\,,\pi]$, et $z' = [-\,k\,;\pi] \times [r\,;\theta] = [-\,kr\,,\pi + \theta]$.

f) D'après les résultats précédents on a :

• $\arg\left(z \times \dfrac{1}{z}\right) = \arg(z) + \arg\left(\dfrac{1}{z}\right)\ [2\,\pi]$.

Or $z \times \dfrac{1}{z} = 1$, et $\arg(1) = 0\ [2\pi]$, d'où $\arg(z) + \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = 0\ [2\pi]$, soit

$$\boxed{\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{1}{[r\,.\,\theta]} = \left[\frac{1}{r}\,,-\theta\right]}$$

• $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \dfrac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\dfrac{1}{z'}\right)\ [2\pi]$, soit

$$\boxed{\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{[r\,;\theta]}{[r'\,;\theta']} = \left[\frac{r}{r'}\,;\theta - \theta'\right]}$$

g) On démontre que , pour tout entier relatif n ,

$$\boxed{\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]} \quad \text{et} \quad \boxed{[r\,;\theta]^n = [r^n\,;n\theta]}$$

Remarque

Les propriétés des modules et des arguments permettent de donner le résumé suivant , $[r\,;\theta]$ et $[r'\,;\theta']$ étant deux nombres complexes non nuls ($r\,.\,r' \neq 0$) :

• $[r'\,;\theta'] = [r\,;\theta]$ **équivaut à** $\left(r' = r \text{ et } \theta' = \theta\ [2\pi]\right)$

• **Le conjugué de** $[r\,;\theta]$ **est** $[r\,;-\,\theta]$

• **L'opposé de** $[r\,;\theta]$ **est** $[r\,;\theta + \pi]$

• $[r\,;\theta] \times [r'\,;\theta'] = [r\,.\,r'\,;\theta + \theta']$

• $k\,.\,[r\,;\theta] = \begin{cases} [kr\,,\theta] \text{ si } k \in \mathbb{R}_+^* \\ [-\,kr\,,\pi + \theta] \text{ si } k \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$

• $\dfrac{1}{[r\,;\theta]} = \left[\dfrac{1}{r}\,;-\,\theta\right]$

• $\dfrac{[r\,;\theta]}{[r'\,;\theta']} = \left[\dfrac{r}{r'}\,;\theta - \theta'\right]$

• $[r\,;\theta]^n = [r^n\,;n\theta]$, $n \in \mathbb{Z}$

4° Formule de Moivre

Si $z = [1\ ;\ \theta] = \cos\theta + i\sin\theta$, alors

$z^n = [1\ ;\ \theta]^n = [1\ ;\ n\theta]$.

On obtient la formule suivante , appelée **formule de Moivre** :

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

Remarque

Par application de la formule de Moivre on peut retrouver les formules donnant $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ ($n \in \mathbb{N}^*$) en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Ainsi ,en posant par exemple n = 2 , on obtient :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$, ou en développant :

$\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$.

Cette égalité donne :

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$.

2 FORME EXPONENTIELLE

Tout nombre complexe z de module 1 s'écrit :

$z = [1\ ;\ \theta] = \cos\theta + i\sin\theta$.

On note , par définition :

$$\boxed{e^{i\theta} = [1\ ;\ \theta] = \cos\theta + i\sin\theta}$$

$e^{i\theta}$ se lit "exponentielle $i\theta$" ou "$e\ i\ \theta$" .

e est la base du logarithme népérien .

Tout nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ s'écrit alors sous la forme :

$$\boxed{z = [r\ ;\ \theta] = r\,e^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

EXEMPLE

On a : $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$;

$-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-i\frac{\pi}{2}}$;

$1 = \cos 0 + i\sin 0 = e^{i0}$;

$-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$.

La forme exponentielle du nombre complexe permet d'écrire :

• $r' e^{i\theta'} = r e^{i\theta}$ **équivaut à** $r' = r$ **et** $\theta' = \theta$ $[2\pi]$	• $r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = rr' e^{i(\theta+\theta')}$
• **Le conjugué de** $r e^{i\theta}$ **est** $r e^{-i\theta}$	• $\dfrac{1}{r e^{i\theta}} = \dfrac{1}{r} e^{-i\theta}$
• **L'opposé de** $r e^{i\theta}$ **est** $re^{i(\theta+\pi)}$	• $\dfrac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$
	• $(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$

3 LINÉARISATION DE POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES

Soit un polynôme trigonométrique en sin x et cos x .
On peut **linéariser** ce polynôme trigonométrique en le transformant en une somme de termes du type cos nx et sin nx , $n \in \mathbb{N}$.
Pour cela on utilise les nombres complexes de module 1 :
$z = [1 ; \theta] = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$
$\bar{z} = [1 ; -\theta] = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$.
Ces égalités permettent d'obtenir les formules suivantes , dites **formules d'Euler :**

pour tout θ de $\mathbb{R}$: $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

EXEMPLES

1. Soit à linéariser $\cos^2\theta$.

$$\cos^2\theta = \frac{1}{4}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2e^{i\theta} \,.\, e^{-i\theta}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(e^{i(2\theta)} + e^{-i(2\theta)} + 2\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{i(2\theta)} + e^{-i(2\theta)}}{2} + 1\right]$$
$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}\left(\cos 2\theta + 1\right) .$$

2. Soit à linéariser $\sin^3\theta$.

$$\sin^3\theta = \left[\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\right]^3 = \frac{1}{8i^3}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^3$$
$$= -\frac{1}{8i}\left(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3e^{2i\theta} \,.\, e^{-i\theta} + 3\, e^{i\theta} \,.\, e^{-2i\theta}\right)$$
$$= -\frac{1}{8i}\left[e^{i(3\theta)} - e^{-i(3\theta)} - 3\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\right]$$
$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2i}\left(e^{i(3\theta)} - e^{-i(3\theta)}\right) - 3 \,.\, \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\right]$$
$$\sin^3\theta = -\frac{1}{4}(\sin 3\theta - 3\sin\theta) \text{ , soit } \sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta .$$

3. Soit à linéariser $\cos^2 x \sin^4 x$.

$$\cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{2^2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2 . \frac{1}{(2i)^4}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2 . \frac{1}{16}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4$$

$$= \frac{1}{64}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2 . \left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2 . \left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2$$

$$= \frac{1}{64}\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)^2 . \left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2$$

$$= \frac{1}{64}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}-2\right)\left(e^{2ix}+e^{-2ix}-2\right)$$

$$= \frac{1}{64}\left(e^{6ix}-e^{2ix}-2e^{4ix}-e^{-2ix}+e^{-6ix}-2e^{-4ix}+4\right)$$

$$= \frac{1}{64}\left[\left(e^{6ix}+e^{-6ix}\right)-\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)-2\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)+4\right]$$

$$= \frac{1}{32}\left[\frac{1}{2}\left(e^{6ix}+e^{-6ix}\right)-\frac{1}{2}\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)-2.\frac{1}{2}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)+2\right]$$

$$\cos^2 x \sin^4 x = \frac{1}{32}\left(\cos 6x-\cos 2x-2\cos 4x+2\right).$$

Remarque

En utilisant les formules d'Euler , on peut retrouver les formules de transformation de produits en sommes .

Soit , par exemple , à transformer $\cos x \cos y$, $\sin x \cos y$ en somme de sinus et de cosinus .

- $$\cos x . \cos y = \frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) . \frac{1}{2}\left(e^{iy}+e^{-iy}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{i(x+y)}+e^{i(x-y)}+e^{i(-x+y)}+e^{i(-x-y)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(e^{i(x+y)}+e^{-i(x+y)}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{i(x-y)}+e^{-i(x-y)}\right)\right]$$

$$\cos x . \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right].$$

- $$\sin x . \cos y = \frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right) . \frac{1}{2}\left(e^{iy}+e^{-iy}\right)$$

$$\sin x . \cos y = \frac{1}{2} . \frac{1}{2i}\left[e^{i(x+y)}+e^{i(x-y)}-e^{-i(x-y)}-e^{-i(x+y)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2i}\left(e^{i(x+y)}-e^{-i(x+y)}\right)+\frac{1}{2i}\left(e^{i(x-y)}-e^{-i(x-y)}\right)\right]$$

$$\sin x . \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right].$$

Exercices et problèmes

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

Pour tester les connaissances

Forme algébrique - conjugué - équation

1 Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1° $(1+i\sqrt{3})^2-(1-i\sqrt{3})^2$ **2°** $(1+i)^4$ **3°** $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$ **4°** $(3+2i)^2+\dfrac{4(2-i)}{2+i}-\dfrac{3-i}{i}$

5° $\dfrac{(2+i)^2-(1-i)^2}{(2-i)^2-(1+i)^2}$ **6°** $\dfrac{2-3i}{3+2i}+\dfrac{2+3i}{3-2i}$ **7°** $3-2i+\dfrac{2}{1+i}$ **8°** $(2-3i)\,(3+4i)\,(1-i)$.

2 Résoudre , dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

1° $(3+2i)\,z+1-2i=2i\,z-2+i$ **2°** $3\,z-i\,\bar{z}=2+i$. **3°** $\dfrac{1-iz}{z+i}=1+i$.

3 Calculer $(1+i)^2$ puis $(1+i)^{100}$.

4 Pour tout M d'affixe z , on considère le nombre complexe $z'=z^2$.

1° Si $z=x+iy$ (x et y réels) , exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de z' .

2° Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit réel .

3° Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur .

5 Déterminer les nombres complexes z tels que :

1° $(z-2)\,(\bar{z}-i)$ soit un réel . **2°** $\dfrac{z-4i}{z+2i}$ soit un réel .

Module

6 Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

1° $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$ **2°** $(\sqrt{3} + i\sqrt{5})(\sqrt{2} + i\sqrt{3})$ **3°** $\dfrac{2 - i}{3 + i}$ **4°** $\dfrac{(2 + 3i)(4 - 5i)}{(3 + 2i)(5 + 4i)}$

5° $(3 - 4i)^3$ **6°** $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)^{1999}$ **7°** $(\sqrt{3} + i)^8$ **8°** $\dfrac{(1 - i)^3}{(1 - i\sqrt{3})^4}$

7 Soit $z = x + iy$ (x et y réels) . Exprimer , en fonction de x et y , le module de chacun des nombres complexes suivants :

1° $z - 1$ **2°** $z^2 + 1$ **3°** $1 + \dfrac{1}{z}$ **4°** $\dfrac{z + 3}{z - 2}$ **5°** $z + \dfrac{9}{z}$ **6°** $\dfrac{z + 2}{iz - 3}$.

8 Déterminer z pour que z , $1 - z$ et z^2 aient même module .

9 M est un point image du nombre complexe $z = x + iy$ (x et y réels) .
Soit $z' = (1 - i)z - 1 + 2i$.

1° Exprimer , en fonction de x et y , le module de z' .

2° Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'| = 3$.

10 $z = x + iy$ est la forme algébrique d'un nombre complexe d'image M . Soit $z' = \dfrac{z + 1}{z - i}$.

Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$.

11 Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe , d'affixes z , vérifiant la relation suivante :

1° $|z| = |1 - z|$; **2°** $|z - 2| = |iz + 3|$.

12 z et z' étant deux nombres complexes de module 1 et de somme non nulle , montrer que $\dfrac{1 + zz'}{z + z'}$ est réel .

13 Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles la somme S suivante est nulle :

$S = \sum_{k=0}^{n} i^k = 1 + i + i^2 + ... + i^n$.

(Remarquer que S est la somme des termes d'une suite géométrique) .

Forme trigonométrique

14 Écrire sous forme algébrique , les nombres complexes suivants donnés par leurs formes trigonométriques .

1° $\left[2\,;\frac{\pi}{2}\right]$ **2°** $\left[2\sqrt{2}\,;-\frac{\pi}{4}\right]$ **3°** $\left[2\,;\frac{5\pi}{6}\right]$ **4°** $\left[\sqrt{2}\,;-\frac{3\pi}{4}\right]$

5° $\left[4\,;\frac{\pi}{3}\right]$ **6°** $\left[5\,;-\frac{\pi}{2}\right]$ **7°** $\left[\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{4}\right]$ **8°** $\left[\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{8}\right]$ **9°** $\left[1\,;\frac{\pi}{12}\right]$

15 Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants et dessiner leurs images .

1° $4 - 4i$ **2°** $-1 + \sqrt{3}\,i$ **3°** $-3 - i\sqrt{3}$

4° $\sqrt{2} - i\sqrt{6}$ **5°** $3 - 4i$ **6°** $-1 + 2i$.

16 **1°** Calculer le module et un argument de $z = \dfrac{1+i}{1-i}$

2° Calculer alors $u = z^{32}$

17 Mettre sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

1° $\cos\frac{\pi}{15} - i\sin\frac{\pi}{15}$ **2°** $\sin\frac{\pi}{15} + i\cos\frac{\pi}{15}$ **3°** $1 - i\tan\frac{\pi}{17}$ **4°** $\tan\frac{\pi}{17} + i$

5° $\dfrac{2i - 2\sqrt{3}}{4i + 4}$ **6°** $\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$ **7°** $\cos\alpha - i\sin\alpha$

8° $\sin\alpha + i\cos\alpha$ **9°** $\sin\alpha - i\cos\alpha$ **10°** $\dfrac{1 - i\tan\alpha}{1 + i\tan\alpha}$ $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

11° $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$ $(\pi < \alpha < 2\pi)$ **12°** $1 + i\tan\alpha$ (discuter suivant les valeurs de α)

13° $\left(\dfrac{i}{1+i}\right)^{1999}$ **14°** $(1999 + i)^3 + (1999 - i)^3$ **15°** $\dfrac{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}{\sin\alpha + i(1 - \cos\alpha)}$.

18 Trouver la forme trigonométrique du nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$.

En déduire celle de $(\sqrt{3} + i)^{14}$.

Trouver la partie réelle et la partie imaginaire de $(\sqrt{3} + i)^{10}$.

19 Trouver la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes :

1° $(-1 + i)^8\,(3 - i\sqrt{3})$ **2°** $\left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{1 + i}\right)^{24}$.

20 **1°** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = \dfrac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = 1 - i$; $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

2° Calculer $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

21 Calculer les formes algébrique et trigonométrique de $z = \dfrac{\sqrt{3} + i}{1 + i}$.

En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

22 **1°** Trouver le module et un argument de $z = \dfrac{1 + i}{1 - i\sqrt{3}}$.

2° Pour quels entiers naturels non nuls n , z^n est-il réel ?

Calculer le plus petit de ces z^n .

Forme exponentielle

23 Donner la forme exponentielle de chacun des nombres complexes suivants :

1° $\left[\sqrt{2} ; \dfrac{\pi}{6}\right]$ **2°** $\left[\sqrt{3} ; -\dfrac{\pi}{3}\right]$ **3°** $[1 ; \pi]$ **4°** $\left[2 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ **5°** -4 **6°** $-4i$

7° $2 + 2i$ **8°** $(1 + i)^3$ **9°** $(\sqrt{3} + i)^7$.

24 En utilisant les formules d'Euler , exprimer $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x$ et $\cos 5x$ en fonction de $\cos x$.

25 Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans chacun des cas suivants :

1° $z = \dfrac{4}{e^{i\frac{\pi}{3}}}$ **2°** $z = (-1 + i)^3 e^{i\frac{3\pi}{4}}$ **3°** $z = \dfrac{(1 + i)^{12}}{(\sqrt{3} + i)^9} e^{i\frac{\pi}{2}}$.

26 **1°** Dans un repère orthonormé direct du plan complexe , placer les points A , B , C d'affixes respectives : $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_B = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_C = \sqrt{3}\, e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

2° Donner une forme exponentielle de chacun des complexes : $z_A z_B z_C$; $\dfrac{1}{z_B}$; z_C^2 ; $\dfrac{z_B}{z_C}$.

27 Soit $z = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$.

1° Déterminer le module et un argument de z .

2° Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que z^n soit un réel .

3° Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que z^n soit un imaginaire pur .

28 Soit θ un réel tel que $\theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et z le nombre complexe défini par : $z = i \cdot \dfrac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1}$.

Montrer que z est réel et le calculer en fonction de θ .

29 Répondre par vrai ou faux .

1° Les images du nombre complexe z et de son conjugué $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe $x'Ox$.
2° Les images de z et de $(-z)$ sont symétriques par rapport à $y'Oy$.
3° Les images de z , $\bar{z}$, $-z$, $-\bar{z}$ sont les sommets d'un rectangle .
4° Si z et z' sont les affixes des points A et B , alors $z - z'$ est l'affixe de $\overrightarrow{AB}$.
5° Le module d'un nombre complexe z est toujours positif .
6° Si $z = 1 + i\sqrt{3}$ alors $|z| = 4$.
7° Si $z = -3\left(\cos\dfrac{\pi}{} + i\sin\dfrac{\pi}{}\right)$ alors le module de z est -3 .
8° Pour tous nombres complexes z et z' on a $|z + z'| = |z| + |z'|$.
9° Pour tous nombres complexes z et z' , $(z' \neq 0)$, on a : $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$ et $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.
10° $|z| = 1$ équivaut à $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$.
11° Un nombre complexe non nul admet un seul argument .
12° $\arg(z + z') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$.
13° $\arg(z \cdot z') = \arg(z) \cdot \arg(z')\ [2\pi]$.
14° $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$.
15° Si $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $\arg(z') = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$, alors zz' est un imaginaire pur .
16° Si z est un réel non nul , alors $\arg(z) = 0\ [2\pi]$.
17° Si $z = -2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, alors $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et $|z| = -2$.
18° $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$ est un argument de $\sin\alpha + i\cos\alpha$.
19° On a : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.
20° $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $e^{i\pi} = -1$.

30 Dans le plan d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$, on donne les points A , B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 1 - \frac{1}{2}i \ ,\ z_B = \frac{5}{2}i \ \text{ et } \ z_C = 2 + \frac{3}{2}i\ .$$

1° Placer ces points dans le plan .

2° Calculer $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C .

Pour chercher

31 Une des réponses proposées à chaque question est correcte .

Dire laquelle en justifiant .

N°	**Questions**	**Réponses**			
		a	**b**	**c**	**d**
1	Si $z = e^{-i\frac{\pi}{6}}$, alors $z^9 =$	9	$9i$	i	$-i$
2	Si $z' = \dfrac{z-1}{\bar{z}-1}$ avec $z \neq 1$, alors $\lvert z'\rvert =$	$\lvert z\rvert$	$2\lvert z\rvert$	1	2
3	Si $z = -2e^{-i\frac{\pi}{6}}$, alors un argument de z est	$-\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{7\pi}{6}$	$\dfrac{5\pi}{6}$
4	$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12} =$	-1	$2\sqrt{2}$	2^6	1
5	Si $z = \sin\dfrac{\pi}{3} - i\cos\dfrac{\pi}{3}$, alors $z =$	$e^{i\frac{\pi}{6}}$	$e^{-i\frac{\pi}{6}}$	$e^{i\frac{\pi}{3}}$	$e^{-i\frac{\pi}{3}}$
6	Si $z = 1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}$, alors $\bar{z} =$	$e^{-2i\frac{\pi}{3}}$	$e^{i\frac{\pi}{3}}$	$e^{-i\frac{\pi}{3}}$	$e^{i\frac{2\pi}{3}}$
7	Si $z = -\sqrt{3} - i$, alors un argument de $\bar{z}$ est	$-\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{5\pi}{6}$	$-\dfrac{5\pi}{6}$
8	Si $\bar{z} - \dfrac{1}{z} = 0$ avec $z \neq 0$, alors $M(z)$ décrit	le cercle $C(0\,;1)$	la droite $(D) : y = x$	l'axe $x'x$	l'axe $y'y$

32 Soit f une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et M un point d'affixe $z = x + iy$.

Trouver l'ensemble des points M , tels que :

1° $f(z)$ soit réel ,

2° $f(z)$ soit imaginaire pur dans chacun des cas suivants :

a) $f(z) = z^2 + z + 1$ **b)** $f(z) = (z-1)(\bar{z} - i)$ **c)** $f(z) = \dfrac{z+1}{z-2}$.

33 Soit A le point d'affixe le nombre complexe a .

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telle que $(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = a\,\bar{a}$.

34 Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $z_1 = (1+i)^n + (1-i)^n$ est réel $z_2 = (1+i)^n - (1-i)^n$ est imaginaire pur .

35 En utilisant les images A et B des complexes $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = -\sqrt{2}$, construire l'image M du nombre complexe $z = -1 - \sqrt{2} + i$.

En déduire la valeur exacte d'un argument de z .

Application : Trouver les valeurs exactes de $\cos \dfrac{7\pi}{8}$ et $\sin \dfrac{7\pi}{8}$.

36 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1° les images des nombres i , z et iz soient alignées .

2° les images des nombres 1 , z et $1 + z^2$ soient alignées .

37 Soient A , B et M les images respectives des nombres complexes a , b et z , et soit $Z = \dfrac{z-a}{z-b}$.

1° Interpréter géométriquement $|Z|$ et $\arg(Z)$.

2° Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z soit réel .

3° Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\dfrac{z+1}{z-1}$ soit imaginaire pur .

38 Soit les quatre points A , B , C et D d'affixes respectives $z_A = -1 + 2i$; $z_B = 4 + 3i$; $z_C = 3i$ et $z_D = 4 - 3i$.

1° Représenter les points A , B , C et D dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u} , \vec{v})$.

2° Calculer $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ et $\dfrac{z_C - z_B}{z_D - z_B}$.

3° En déduire la nature des triangles ACD et BCD .

4° Démontrer que les points A , B , C et D sont sur un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon .

39 À tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = f(z) = z^2 + z\,\bar{z}$.

1° Mettre z' sous forme algébrique .

2° Quels sont les points M dont l'image par f est le point O ?

3° Montrer que O , M et M' sont alignés .

4° Quel est l'ensemble des points M' images par f des points M de la droite d'équation $y = 1$? Représenter cet ensemble .

5° Quel est l'ensemble des points M pour lesquels les images M' par f appartiennent à la droite d'équation $y = 1$? Représenter cet ensemble .

40 À tout point M distinct du point B d'affixe i , on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{z - i}{\bar{z} + i}$.

1° Calculer $|z'|$.

2° Quel est l'ensemble des points M tels que $z' = -1$?

3° Montrer que $\dfrac{z' + 1}{z - i}$ est réel .

41 À tout point M d'affixe $z \neq i$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z + 2}{z - i}$, dans le plan complexe .

On pose $z = x + iy$ (x et y réels) .

Déterminer et dessiner l'ensemble des points M vérifiant :

1° $(\vec{u}\ , \overrightarrow{OM'}) = 0\ [\pi]$ **2°** $(\vec{u}\ , \overrightarrow{OM'}) = 0\ [2\pi]$ **3°** $(\vec{u}\ , \overrightarrow{OM'}) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

42 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ; \vec{u}\ , \vec{v})$, on considère les points A , M et M' d'affixes respectives i , z et z' tels que $z' = \dfrac{iz}{z - i}$ avec $z \neq i$.

1° Déterminer les points M tels que $z' = z$.

2° Dans le cas où $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$, trouver un argument de z' .

3° Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, où x , y , x' et y' sont des réels .

a) Calculer x' et y' en fonction de x et y .

b) Déterminer l'ensemble des points M dans le cas où z' est réel .

4° a) Montrer que $z' - i = \dfrac{-1}{z - i}$.

b) Démontrer que lorsque M se déplace sur le cercle (w) de centre A et de rayon 1 , alors M' se déplace sur le même cercle.

Bac.

43 Rechercher tous les couples (z_1 , z_2) de nombres complexes satisfaisant aux conditions :

$$\begin{cases} z_1 z_2 = \dfrac{1}{2} \\ z_1 + 2z_2 = \sqrt{3} \end{cases} .$$

Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres ainsi obtenus .

44 Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} , \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = \sqrt{3} - i$, $b = \sqrt{3} + i$ et $c = 2i$.

1° Montrer que les points A , B et C sont sur un même cercle de centre O .

2° Écrire $\dfrac{c-b}{a-b}$ sous formes algébrique et exponentielle .

3° Soit M un point de (P) privé de O , d'affixe $z = x + iy$. On pose $Z = \dfrac{z-b}{z}$.

a) Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que $|Z| = 1$.

b) Vérifier que A et C appartiennent à (E) .

c) Déterminer l'ensemble (F) des points M tels que Z soit un imaginaire pur .

Bac.

45 Dans le plan rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} , \vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes $z_A = -2$ et $z_B = -1 + i$.

À tout point M du plan d'affixe $z \neq -2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{iz + i + 1}{z + 2}$.

1° Montrer que $z' = i \cdot \dfrac{z - z_B}{z - z_A}$ puis interpréter géométriquement le module et un argument de z' .

2° Déterminer et tracer l'ensemble (Δ) des points M tels que $|z'| = 1$.

3° Déterminer et tracer l'ensemble (E) des points M tels que z' ait pour argument $\dfrac{\pi}{2}$.

46 θ est un réel de l'intervalle $]0\,;\pi[$.

1° On pose : $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$.

a) Développer $e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)$.

b) En déduire le module et un argument de z .

2° Procéder de façon analogue pour donner , selon les valeurs de θ , le module et un argument de $Z = 1 - \cos\theta - i\sin\theta$.

47 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on considère les points A , B , M et M' d'affixes respectives 2 , $-i$, z et $z' = \dfrac{iz-1}{z-2}$ avec $z \neq 2$.

1° Trouver les coordonnées de M lorsque $z' = 1 + 2i$.

2° Donner une interprétation géométrique de $|z-2|$ et de $|iz-1|$ et déterminer l'ensemble des points M tels que $|z-2| = |iz-1|$.

3° On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, où x , y , x' et y' sont réels .

a) Calculer x' et y' en fonction de x et y .

b) Montrer que lorsque z' est imaginaire pur , M se déplace sur une droite dont on déterminera une équation .

c) Montrer que lorsque z est réel , M' se déplace sur une droite dont on déterminera une équation .

Bac.

48 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et $z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z$.

1° On suppose dans cette partie que $z = 2i$.

a) Déterminer la forme exponentielle de z' .

b) Calculer $\left|\dfrac{z'}{z}\right|$ et $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right)$.

c) Montrer que le triangle OMM' est rectangle en M .

2° On suppose dans cette partie que $z = (1+i)^3$.

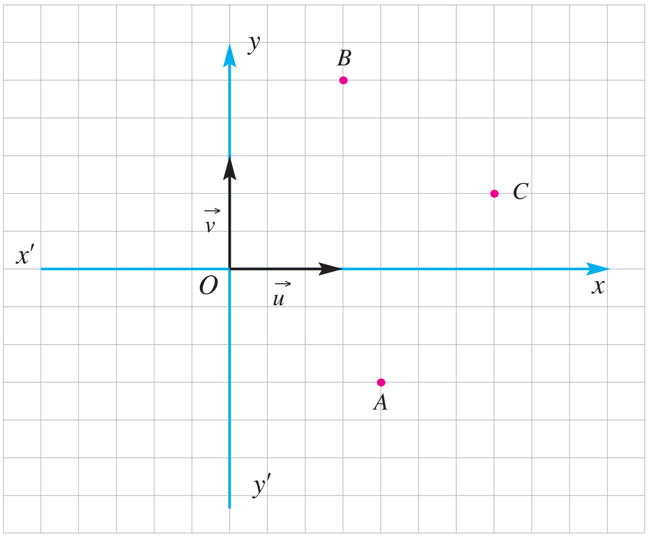
a) Écrire z sous formes exponentielle et algébrique .

b) Écrire z' sous formes exponentielle et algébrique .

c) Déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{13\pi}{12}$.

Bac.

49 Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} - i$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = z_A + z_B = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$.



1° Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle .

2° **a)** Démontrer que $\dfrac{z_B}{z_A} = i$.

b) Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle .

c) Vérifier que $OACB$ est un carré .

3° **a)** Utiliser la figure pour montrer qu'une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OC})$ est $\dfrac{\pi}{12}$.

b) Calculer la valeur exacte de $|z_C|$, puis écrire z_C sous forme exponentielle .

c) Déduire la valeur exacte de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Bac.

50 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et -1 .

On considère l'application f qui , à tout point M d'affixe z différent de B , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z-1}{z+1}$.

1° Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'| = 1$.

2° Déterminer les points invariants par f , c'est-à-dire vérifiant $M' = f(M) = M$, soit $z' = z$.

3° **a)** Montrer que , pour tout nombre complexe $z \neq -1$, on a $(z'-1)(z+1) = -2$.

b) En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$ puis une relation entre $\arg(z'-1)$ et $\arg(z+1)$.

c) Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2 , alors M' appartient à un cercle (C') dont on déterminera le centre et le rayon .

4° Soit le point P d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.

a) Trouver la forme exponentielle du nombre $(p+1)$.

b) Montrer que le point P appartient au cercle (C) .

c) Soit Q le point d'affixe $q = -\overline{p}$.

Montrer que les points A , P' et Q sont alignés , où P' est le point associé à P par l'application f .

51 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on donne les points A et A' d'affixes respectives -4 et 4 .
M étant un point du plan d'affixe z , (M distinct de A) , on considère le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{z-4}{z+4}$.

1° Écrire z' sous forme algébrique dans le cas où $z = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2° On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y .

Dans ce qui suit on désigne par (*C*) le cercle de centre *O* et de rayon 4 et on suppose que *M* décrit (*C*) privé de *A* et de *A'* .

3° Démontrer que z' est imaginaire pur .

4° On pose $z = 4e^{i\theta}$ où $0 < \theta < \dfrac{\pi}{\ }$.

Soit N le point d'affixe $\bar{z}$ et L le point d'affixe $z_1 = 4e^{i3\theta}$.
a) Placer les points M , N et L dans le repère précédent .
b) Vérifier que $z_1 = \dfrac{z^2}{\bar{z}}$.
c) Démontrer que le triangle MLN est isocèle de sommet principal M . **Bac.**

52 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.
À tout point M d'affixe z ($z \neq 0$) , on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{2}{\bar{z}}$.
1° Soit $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$) , écrire z' sous forme exponentielle .
2° a) Montrer que $OM \times OM' = 2$.
b) Démontrer que si $z = z'$, alors M se déplace sur un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon .
3° On pose $z = 1 + iy$ où y est un réel .
a) Montrer que $|z' - 1| = 1$.
b) Montrer que lorsque y varie , M' se déplace sur un cercle (C') dont on déterminera le centre et le rayon . **Bac.**

53 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' telles que : $z' = (1 + i\sqrt{3})z - 2$.
1° On suppose dans cette partie que $z = 1 + i$.
a) Montrer que le point M' appartient à la droite d'équation $y = -x$.
b) Montrer que le triangle OMM' est rectangle en O .
2° Soit I le point d'affixe -2.
a) Vérifier que $|z' + 2| = 2|z|$.
b) Démontrer que , lorsque M décrit le cercle de centre O et de rayon 2 , M' décrit un cercle fixe dont on déterminera le centre et le rayon .
3° On pose $z = x + i\,y$ et $z' = x' + i\,y'$ où x , y , x' et y' sont des réels .
a) Exprimer x' et y' en fonction de x et de y .
b) Montrer que si M décrit la droite d'équation $y = -x\sqrt{3}$, alors M' décrit une droite que l'on précisera. **Bac.**

54 Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

Écrire le numéro de chaque question et donner, en justifiant, la réponse qui lui correspond.

Nº	Questions	Réponses a	Réponses b	Réponses c
1	Si $z = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $z' = -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, alors un argument de $(z - z')$ est	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
2	Si z est l'affixe d'un point M tel que $\lvert z - 2i\rvert = \lvert z + 4i\rvert$, alors M décrit	un cercle	une droite parallèle à l'axe des ordonnées	une droite parallèle à l'axe des abscisses
3	Une des valeurs de z qui vérifient $\lvert z + 1\rvert^2 + \lvert z - 1\rvert^2 = 2\lvert z + i\rvert^2$ est	$3i$	$2 + 3i$	2
4	La forme exponentielle de $\frac{\cos\theta - i\sin\theta}{}$ est	$\frac{1}{2}e^{i\left(-\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$	$2e^{i\left(-\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$	$\frac{1}{2}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$

Bac.

55 Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Écrire le numéro de chaque question et donner, en justifiant, la réponse qui lui correspond :

Nº	Questions	Réponses a	Réponses b	Réponses c	Réponses d
1	$\left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)^2 =$	0	$2 + \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
2	La forme exponentielle de $z = \sin\theta - i\cos\theta$ est :	$e^{i\theta}$	$e^{-i\theta}$	$e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$	$e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$
3	A, B et C sont les points d'affixes respectives $zA = -3i$, $zB = i$ et $zC = 3i$. Le point M d'affixe z, tel que $\lvert z + 3i\rvert = \lvert -i\rvert$ décrit :	La médiatrice du segment $[AB]$	Le cercle de centre A et de rayon 1	Le cercle de centre C et de rayon 1	La médiatrice du segment $[CB]$
4	Si $Z = \frac{iz}{z + 1 - i}$ alors :	$\overline{Z} = \frac{i\overline{z}}{\overline{z} - 1 + i}$	$\overline{Z} = \frac{i\overline{z}}{\overline{z} + 1 + i}$	$\overline{Z} = \frac{-i\overline{z}}{\overline{z} - 1 + i}$	$\overline{Z} = \frac{-i\overline{z}}{\overline{z} + 1 + i}$

Bac.

56 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A et B tels que : $z_A = 1$ et $z_B = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 1 .

1° a) Écrire $z_B - z_A$ sous forme exponentielle .

b) Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u} ; \overrightarrow{AB})$.

c) Montrer que le point B appartient au cercle (C).

2° À tout point M d'affixe z , non nul , on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{\bar{z} + 2}{\bar{z}}$.

a) Démontrer que $\bar{z}(z' - 1) = 2$.

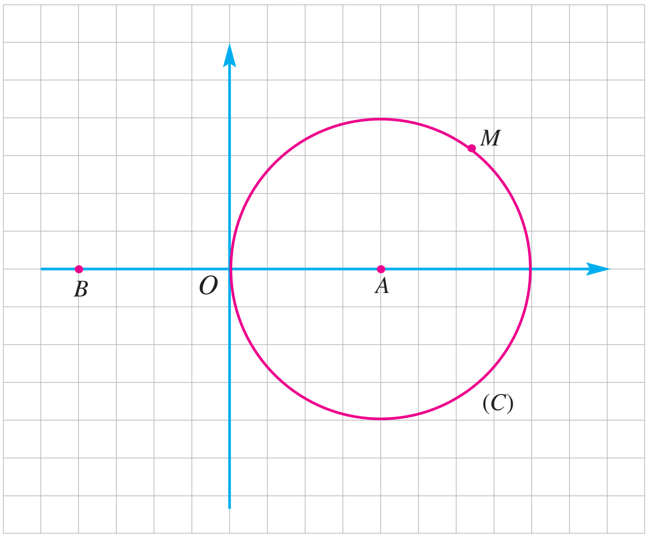
b) En déduire que , lorsque M' décrit le cercle (C) , M décrit un cercle (T) à déterminer .

Bac.

57 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et -1 . Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 1.

La forme exponentielle de l'affixe z d'un point M de (C) , distinct de O , est donnée par $z = re^{i\theta}$.

Soit M' le point d'affixe z' telle que $z' = \frac{1}{r}e^{i(\pi+\theta)}$.



1° Montrer que $z' \times \bar{z} = -1$.

2° Montrer que les points O , M et M' sont alignés .

3° a) Justifier l'égalité $|z - 1| = 1$.

b) Démontrer que $|z' + 1| = |z'|$ et en déduire que M' décrit une droite (d) que l'on déterminera .

4° Déterminer les points M de (C) pour lesquels $z' = -z$.

Bac.

7 INTÉGRATION

Un peu d'histoire

*Le **calcul intégral** prend son origine dans le calcul des aires et des volumes. Dès l'antiquité, **Eudoxe** (406-359 av. J.-C.) et **Archimède** (287-212 av. J.-C.) utilisent la méthode d'exhaustion pour le calcul des aires. Cette méthode consiste à encadrer la surface dont on cherche l'aire par deux surfaces polygonales.*
*Au début du XVII^e siècle, **Johannes Kepler** (1571-1630) et **Bonaventura Cavalieri** (1598-1647) décomposent les surfaces et les solides en éléments infinitésimaux de même dimension; mais c'est **Pierre de fermat** (1661-1716) qui introduit les éléments essentiels de la définition de l'intégrale par la méthode des rectangles.*
*En considérant l'**intégration** comme opération inverse de la différenciation, **Isaac Newton** (1642-1727) introduit la notion d'intégrale indéfinie.*
*Il faut cependant attendre le XIX^e siècle, avec **Augustin Louis Cauchy** (1789-1847), pour avoir une définition précise de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle* $[a ; b]$ *ainsi que la notation* $\int_a^b f(x)dx$.

PLAN DU CHAPITRE

«Il ne faut pas uniquement intégrer, il faut aussi désintégrer.
C'est ça la vie, c'est ça la science, c'est ça le progrès.»

Eugène IONESCO

f est une fonction définie et continue sur un intervalle I .

On appelle primitive de f sur I , une fonction F dérivable sur I et telle que $F' = f$.

1° Trouver une primitive F de f définie par :

a) $f(x) = 1$; **b)** $f(x) = x$; **c)** $f(x) = x^2$; **d)** $f(x) = 0$; **e)** $f(x) = \cos x$; **f)** $f(x) = \sin x$.

2° Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et soit F et G deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ et $G(x) = \frac{x^2}{2} - 5$.

a) Calculer $F'(x)$ et $G'(x)$. Conclure .

b) Calculer $F(x) - G(x)$. Conclure .

3° On appelle intégrale indéfinie de la fonction f , notée $\int f(x)\, dx$, l'ensemble de ses primitives .

Si F est une primitive de f , alors $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, où C est une constante arbitraire .

Calculer :

a) $\int 3dx$; **b)** $\int dx$; **c)** $\int \frac{1}{x^2}\, dx$; **d)** $\int 0dx$.

1 DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , F une de ses primitives sur I , a et b deux réels de I .

On appelle **intégrale de la fonction f** sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ (ou entre a et b) **le réel $F(b) - F(a)$.**

On note cette intégrale $\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$ **.**

On lit **«somme de a à b»** ou **«intégrale de a à b» de $f(t)\, dt$.** a et b sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de l'intégrale.

Pratiquement , on écrit $\boxed{\int_a^b f(t)\, dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a) \text{ où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } [a\ ;\ b]}$

$F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la variable de la fonction f et dépend uniquement des bornes a et b et de la primitive considérée F de la fonction f sur $[a\ ;\ b]$. Pour cela, on dit que la variable est **«muette»** et elle peut être remplacée par n'importe quelle lettre , puisqu'elle n'intervient pas dans le résultat final : $\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(x)\, dx$.

EXEMPLES

1. $\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{3}(1)^3 = \frac{7}{3}$.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$.

3. $\int_2^5 \frac{dt}{2\sqrt{t-1}} = \left[\sqrt{t-1}\right]_2^5 = \sqrt{5-1} - \sqrt{2-1} = 2 - 1 = 1$.

4. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2z\,dz = \left[-\frac{1}{2}\cos 2z\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$.

2 PROPRIÉTÉS

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , F et G leurs primitives respectives sur I , a et b deux éléments de I .

1° Propriété P_1

Si la fonction f est continue sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, alors :

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$$

En effet :

Comme f est continue sur l'intervalle I , elle admet donc une primitive F sur I . D'après la définition de l'intégrale , on a :

- $\int_a^a f(t)\,dt = F(a) - F(a) = 0$.
- $\int_b^a f(t)\,dt = F(a) - F(b) = -\big(F(b) - F(a)\big) = -\int_a^b f(t)\,dt$.

EXEMPLES

1. $\int_1^1 x^2\,dx = 0$.

2. $\int_{-1}^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{3}(-1)^3 = \frac{2}{3}$.

3. $\int_1^{-1} x^2\,dx = -\int_{-1}^1 x^2\,dx = -\frac{2}{3}$.

2° Propriété P_2 (Relation de Chasles pour les intégrales)

Si f est une fonction continue sur un intervalle I , a , b et c sont trois éléments de I , alors :

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$$

En effet :

soit F une primitive de f sur l'intervalle I , alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ et $\int_b^c f(t)\,dt = F(c) - F(b)$.

En ajoutant membre à membre on obtient :

$$\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(t)\,dt \,.$$

EXEMPLE

$$\int_{-1}^{1} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} |x|\,dx + \int_{0}^{1} |x|\,dx \,,$$

soit $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

3° Propriété P_3 (Linéarité)

Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, α et β sont deux réels quelconques , alors :

$$\boxed{\int_a^b \left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right) dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt}$$

En effet :

soit F une primitive de f et G une primitive de g sur $[a\,;\,b]$.

Pour tout x de $[a\,;\,b]$ on a : $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = g(x)$.

Pour tous réels α et β , $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$, car pour tout x de $[a\,;\,b]$,

$$\left(\alpha F(x) + \beta G(x)\right)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \,.$$

Par suite $\displaystyle\int_a^b \left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right] dt = \left[\alpha F(t) + \beta G(t)\right]_a^b$,

ou
$$\begin{aligned}\int_a^b \left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right] dt &= \left(\alpha F(b) + \beta G(b)\right) - \left(\alpha F(a) + \beta G(a)\right)\\ &= \alpha\left[F(b) - F(a)\right] + \beta\left[G(b) - G(a)\right].\end{aligned}$$

Soit $\displaystyle\int_a^b \left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right] dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$.

EXEMPLES

1. $\int_0^{\pi} (3x^2 + 4\cos x)\, dx = 3\int_0^{\pi} x^2\, dx + 4\int_0^{\pi} \cos x\, dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} + 4\left[\sin x\right]_0^{\pi} = \pi^3$.

2. $\int_5^{13} \left[\frac{7}{x^2} + \frac{10}{\sqrt{x-4}}\right] dx = 7\int_5^{13} \frac{dx}{x^2} + 10\int_5^{13} \frac{dx}{\sqrt{x-4}} = 7\left[-\frac{1}{x}\right]_5^{13} + 10\left[2\sqrt{x-4}\right]_5^{13}$

$$= 7\left(-\frac{1}{13} + \frac{1}{5}\right) + 20\,(\sqrt{9} - \sqrt{1})$$

$$= \frac{56}{65} + 20.(3-1) = \frac{56}{65} + 40 = \frac{2\,656}{65}\ .$$

4° Propriété P_4

Si f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, alors : $\int_a^b f(t)\, dt \geqslant 0$

En effet :

soit F une primitive de f sur $[a\,;\,b]$; pour tout x de $[a\,;\,b]$, $F'(x) = f(x)$. Comme $F' = f$ est positive sur $[a\,;\,b]$, alors F est une fonction croissante sur $[a\,;\,b]$, par suite $F(b) \geqslant F(a)$, car $b > a$. D'où $F(b) - F(a) \geqslant 0$, soit $\int_a^b f(t)\, dt \geqslant 0$.

Remarque

Si f est négative sur $[a\,;\,b]$, alors $\int_a^b f(t)\, dt \leqslant 0$.

EXEMPLES

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx \geqslant 0$, car pour tout x de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \geqslant 0$.

2. $\int_2^5 \frac{dt}{\sqrt{t-1}} > 0$, car pour tout t de $[2\,;\,5]$, $\frac{1}{\sqrt{t-1}} > 0$.

5° Propriété P_5 (Comparaison de deux intégrales)

f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.

Si $f \geqslant g$, alors $\int_a^b f(t)\, dt \geqslant \int_a^b g(t)\, dt$

En effet :

si $f \geqslant g$ sur $[a;b]$, alors pour tout t de $[a;b]$, $f(t) \geqslant g(t)$, ou $f(t) - g(t) \geqslant 0$; par suite $\int_a^b \left[f(t) - g(t)\right] dt \geqslant 0$, d'après P_4 .

D'où $\int_a^b f(t)\, dt - \int_a^b g(t)\, dt \geqslant 0$ et $\int_a^b f(t)\, dt \geqslant \int_a^b g(t)\, dt$.

EXEMPLE

Soit à comparer les deux intégrales $\int_0^1 t\,dt$ et $\int_0^1 t^2\,dt$.

Pour cela , il suffit de comparer les deux fonctions $t \longmapsto t$ et $t \longmapsto t^2$ qui sont définies sur [0 ; 1] .

Or pour tout t de [0 ; 1] , $t^2 - t = t\,(t-1) \leqslant 0$. Par suite

$t \geqslant t^2$ sur [0 ; 1] et $\int_0^1 t\,dt \geqslant \int_0^1 t^2\,dt$.

6° Propriété P_6 (Intégrales de fonctions paires - impaires)

Soit a un réel strictement positif et f une fonction continue sur l'intervalle $[-a\,;\,a]$.

On admet les propriétés suivantes :

si f est paire sur $[-a\,;\,a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$

si f est impaire sur $[-a\,;\,a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$

EXEMPLES

1. $\int_{-1}^{1} x^2\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx$, car la fonction : $x \longmapsto x^2$ est continue et paire sur [–1 ; 1] .

En effet : $\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \dfrac{2}{3}$, et $2\int_0^1 x^2\,dx = 2\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{2}{3}$.

2. $\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$, car la fonction : $x \longmapsto x^3$ est continue et impaire sur [–1 ; 1] .

En effet : $\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \left[\dfrac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \left(\dfrac{1}{4}\right) - \left(\dfrac{1}{4}\right) = 0$.

7° Propriété P_7 (Périodicité)

On admet la propriété suivante :

si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique et de période T , alors , pour tous réels a et b :

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_b^{b+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$$

EXEMPLES

1. $\displaystyle\int_{1999\pi}^{2001\pi} \sin x\, dx = \int_0^{2\pi} \sin x\, dx$, car la fonction : $x \longmapsto \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$, périodique et de période 2π .

En effet : $\displaystyle\int_{1999\pi}^{2001\pi} \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_{1999\pi}^{2001\pi} = \Big[-\cos(2001\pi) + \cos(1999\pi)\Big] = -1+1 = 0$

et $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = 0$.

2. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}+2\pi} \cos x\, dx = \int_0^{2\pi} \cos x\, dx$, car la fonction : $x \longmapsto \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$, périodique et de période 2π .

En effet : $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}+2\pi} \cos x\, dx = \Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}+2\pi} = \sin\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right) - \sin\frac{\pi}{6} = 0$

et $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x\, dx = \Big[\sin x\Big]_0^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0 = 0$.

3 THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'INTÉGRATION

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I .

La fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

La fonction f , étant continue sur l'intervalle I , admet donc une primitive sur I . Soit G cette primitive .

On a par définition : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt = \Big[G(t)\Big]_a^x = G(x) - G(a)$, pour tout x de I .

Il en résulte que F est dérivable sur I et que $F'(x) = G'(x) = f(x)$ pour tout x de I ; c'est-à-dire :

$$\boxed{\left(\int_a^x f(t)\, dt\right)' = f(x)}$$

F est donc une primitive de f sur I , qui s'annule en a , car $F(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)\, dt = G(a) - G(a) = 0$.

Conséquence

Soit φ une fonction dérivable sur un intervalle J , f une fonction continue sur un intervalle I , a un élément de I .

On suppose que $\varphi(J) \subset I$.

La fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^{\varphi(x)} f(t)\, dt$ est la composée de deux fonctions dérivables :

$x \longmapsto \varphi(x)$ et $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$.

Il en résulte qu'elle est dérivable sur J et que

$$\boxed{\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\, dt\right)' = \varphi'(x)\, .\, f[\varphi(x)]}$$

EXEMPLE

Soit à calculer les dérivées des fonctions suivantes : $x \longmapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$ et $x \longmapsto \int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$.

• $\left(\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$; $\left(\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{1+t}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

4 MÉTHODES D'INTÉGRATION

1° Le tableau suivant donne, pour chaque fonction f, une primitive F sur le ou les intervalles I où la fonction f est définie et continue .

Fonction f	Une primitive F	Intervalles I
a , a réel	ax	$\mathbb{R}$
x^n , $n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
x^n , $n \in \mathbb{Z}^*_{-}\ \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
$x^{\frac{p}{q}}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ q impair	$\frac{x^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q}+1}$	$\mathbb{R}$
$x^{\frac{p}{q}}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ q pair	$\frac{x^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q}+1}$	$\mathbb{R}^+$
$x^{\frac{p}{q}}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{Z}^*_-$ q pair	$\frac{x^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q}+1}$	$\mathbb{R}^*_+$
$x^{\frac{p}{q}}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{Z}^*_-$ q impair	$\frac{x^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q}+1}$	$\mathbb{R}^*$.
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^*_+$
$\sin ax$, $a \in \mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{a}\cos ax$	$\mathbb{R}$
$\cos ax$, $a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a}\sin ax$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 ax} = 1 + \tan^2 ax,\ a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a}\tan ax$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin^2 ax} = 1 + \cot^2 ax,\ a \in \mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{a}\cot ax$	$]k\pi\ ;\ (k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arc}\tan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{Arc}\sin x$ ou $-\text{Arc}\cos x$	$]-1\ ;\ 1[$

$u' \,.\, u^n$, $n \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	sur l'intervalle où u existe et est dérivable
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	sur l'intervalle où $u > 0$ et est dérivable
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	sur l'intervalle où $u \neq 0$ et dérivable
$u' + v'$	$u + v$	sur l'intervalle où u et v sont dérivables
au'	au	sur l'intervalle où u est dérivable
$u' \cos u$	$\sin u$	sur l'intervalle où u est dérivable
$u' \sin u$	$-\cos u$	sur l'intervalle où u est dérivable
$\dfrac{u'}{\cos^2 u} = (1 + \tan^2 u)u'$	$\tan u$	sur l'intervalle où u est dérivable et $u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$\dfrac{u'}{\sin^2 u} = (1 + \cot^2 u)u'$	$-\cot u$	sur l'intervalle où u est dérivable et $u \neq k\pi$
$\dfrac{u'}{1 + u^2}$	Arc tan u	sur l'intervalle où u est dérivable
$\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	Arc sin u ou $-$ Arc cos u	sur l'intervalle où u est dérivable et $u \in \,]-1\,;\,1[$.

2° Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, u' et v' leurs dérivées respectives sur $[a\,;\,b]$.

$(u\,.\,v)' = u'v + uv'$ soit $u'.v = (u.v)' - uv'$

D'où : $\displaystyle\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = \int_a^b \left[u(x)\,.\,v(x)\right]' dx - \int_a^b u(x)\,.\,v'(x)\,dx$

Soit : $$\boxed{\int_a^b \mathbf{u'(x)\,v(x)\,dx} = \Big[\mathbf{u(x)\,.\,v(x)}\Big]_a^b - \int_a^b \mathbf{u(x)\,.\,v'(x)\,dx}}$$

Exemple

Soit à calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos x\, dx$.

Il suffit de poser : $u'(x) = \cos x$ par suite $u(x) = \sin x$
$v(x) = x$ et $v'(x) = 1$.

En appliquant la formule , on obtient : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x\,dx = \Big[x \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx$.

Soit $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x\,dx = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{8} + \Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$.

Remarque

On utilise l'intégration par parties, lorsqu'il y a un produit de deux fonctions de natures différentes.

3° Linéarisation de polynômes trigonométriques

Il s'agit de transformer un produit du type, $\cos^n x$, $\sin^n x$ ou $\cos^n x \,.\, \sin^m x$ en une somme de termes du type $a \cos \alpha x$ ou $b \sin \beta x$. Ceci se fait, soit en utilisant les formules trigonométriques soit en utilisant les formules **d'Euler** .

$$\boldsymbol{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad , \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$$

EXEMPLES

1. Soit à calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x \, dx$.

En effet $\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$.

D'où $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\, dx = \left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$, soit $I = \frac{\pi}{8}$.

2. Soit à calculer $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \, dx$.

On linéarise d'abord $\sin^4 x$.

Comme $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, alors $\sin^4 x = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^4}{16}$.

En utilisant le développement de $(a - b)^4$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sin^4 x &= \frac{1}{16}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{3ix} \,.\, e^{-ix} + 6e^{2ix} \,.\, e^{-2ix} - 4e^{ix} \,.\, e^{-3ix} + e^{-4ix}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left[\left(e^{4ix} + e^{-4ix}\right) - 4\,(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6\right] \\
&= \frac{1}{16}\left(2 \cos 4x - 8 \cos 2x + 6\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où } J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{16}\left[2 \cos 4x - 8 \cos 2x + 6\right] dx \\
&= \left[\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\sin 4x - 4 \sin 2x + 6x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{32} - \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

4° Changement de variable

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Pour tout x de I , on a : $f'(x) = \dfrac{d\,f(x)}{dx}$, par suite $d\,f(x) = f'(x)\,dx$.

dx s'appelle la différentielle de la variable.

$d\,f(x)$ s'appelle la différentielle de la fonction f en x relative à dx .

On utilise souvent cette différentielle pour faire un changement de variable exigé par certaines intégrations .

Exemple

Soit à calculer $I = \int_0^{\pi} \sin t \cos^2 t \, dt$.

En posant $x = \cos t$, dans l'intervalle $[0 ; \pi]$, la fonction $t \longmapsto \cos t$ est dérivable et **monotone** , par suite $dx = -\sin t \, dt$.

Pour $t = 0$, $x = 1$ et pour $t = \pi$, $x = -1$.

$I = \int_0^{\pi} \sin t \cos^2 t \, dt = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3} x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{3}(-1)^3 = \frac{2}{3}$.

Remarque

La méthode de changement de variable cesse d'être applicable lorsque la fonction considérée n'est pas monotone, c'est-à-dire qu'il n'est pas permis, dans l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$, de faire un changement de variable de la forme $x = \varphi(t)$ où φ n'est pas une fonction monotone sur $[a ; b]$.

En effet : soit l'intégrale $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^3 t \, dt$.

La fonction $t \longmapsto \sin t \cos^3 t$ est continue et impaire dans $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, par suite $A = 0$. Mais si l'on fait le changement de variable de la forme $x = \cos^2 t$, la fonction $\varphi : t \longmapsto \cos^2 t$ n'est pas monotone sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

En effet : $\varphi'(t) = -2 \sin t \cos t$, d'où le tableau de variation :

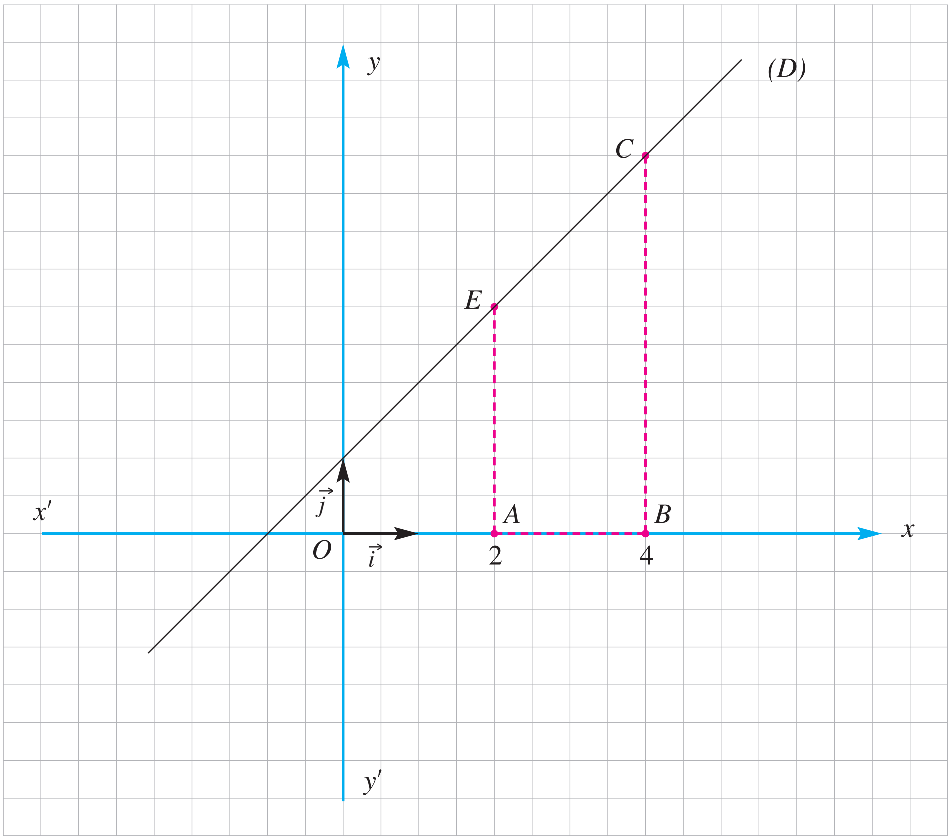
t	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\varphi'(t)$	0	$+$	0	$-$	0
$\varphi(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

L'image de $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ par la fonction φ est donc l'intervalle $[0 ; 1]$; on a : $dx = -2 \sin t \cos t \, dt$.

D'où $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t \, dt = \int_0^1 -\frac{1}{2} x \, dx = \left[\frac{-1}{4} x^2\right]_0^1 = -\frac{1}{4}$, ce qui est faux car $A = 0$.

5 CALCUL D'AIRE

Activité



Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$ (l'unité de longueur est 1 cm) .

Soit (D) la droite définie par la fonction affine f telle que $f(x) = x + 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

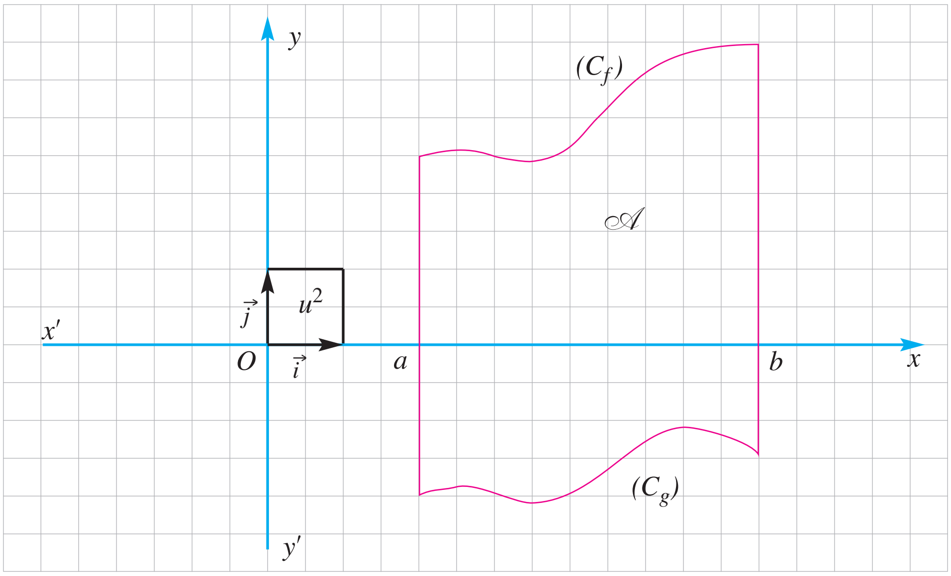
$A\,(2\,;0)$, $B\,(4\,;0)$, $C\left(4\,;f(4)\right)$ et $E\left(2\,;f(2)\right)$ sont les sommets du trapèze rectangle $ABCE$.

1° Calculer , en cm^2 , l'aire $\mathscr{A}$ du trapèze $ABCE$.

2° Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x$ est l'une des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3° Calculer $F(2)$ et $F(4)$ puis comparer $\mathscr{A}$ à $\left(F(4) - F(2)\right)$ cm^2 .

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, (C_f) et (C_g) leurs courbes représentatives dans un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.



Soit u^2 l'unité d'aire dans le plan de ce repère .

On suppose que $f \geqslant g$ sur $[a \,;\, b]$.

D est le domaine plan limité par (C_f) , (C_g) et les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.
D peut être défini comme un ensemble :
$D = \left\{ M\,(x,y) \,/\, a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad g(x) \leqslant y \leqslant f(x) \right\}$.

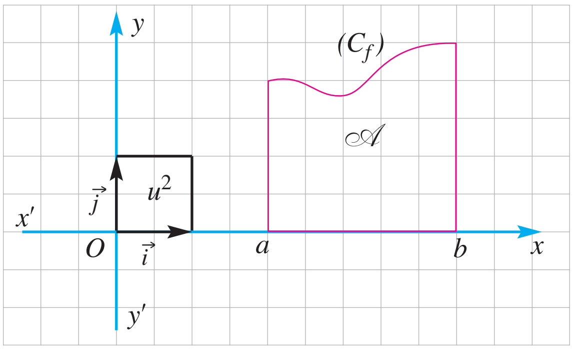
$\mathscr{A}$ est l'aire du domaine plan D .

On admet que

$$\boxed{\mathscr{A} = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx \;\; u^2}$$

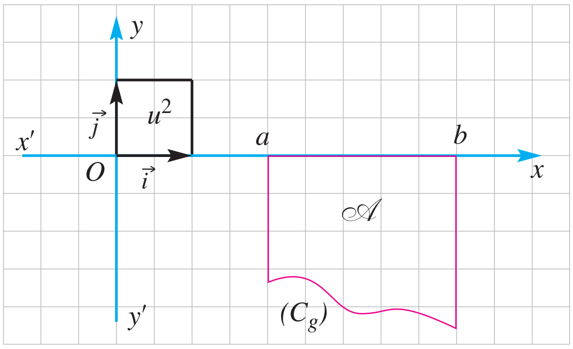
Cas particuliers

a) (C_g) se confond avec le segment $[a \,;\, b]$ avec $g(x) = 0$ et $f(x) \geqslant 0$ sur $[a \,;\, b]$.



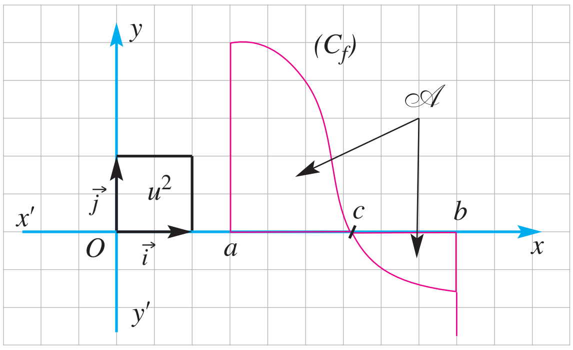
$$\boxed{\mathscr{A} = \int_a^b \left[f(x) - 0 \right] dx \;\; u^2 = \int_a^b f(x)\, dx \;\; u^2}$$

b) (C_f) se confond avec le segment $[a \,;\, b]$ avec $f(x) = 0$ et $g(x) \leqslant 0$ sur $[a \,;\, b]$.



$$\boxed{\mathscr{A} = \int_a^b \left[0 - g(x) \right] dx \;\; u^2 = \int_a^b - g(x)\, dx \;\; u^2 = - \int_a^b g(x)\, dx \;\; u^2}$$

c) (C_f) coupe $x'Ox$ en un point d'abscisse c et pour $x \in [a\,;\,c]$, $f(x) \geqslant 0$, pour $x \in [c\,;\,b]$, $f(x) \leqslant 0$.



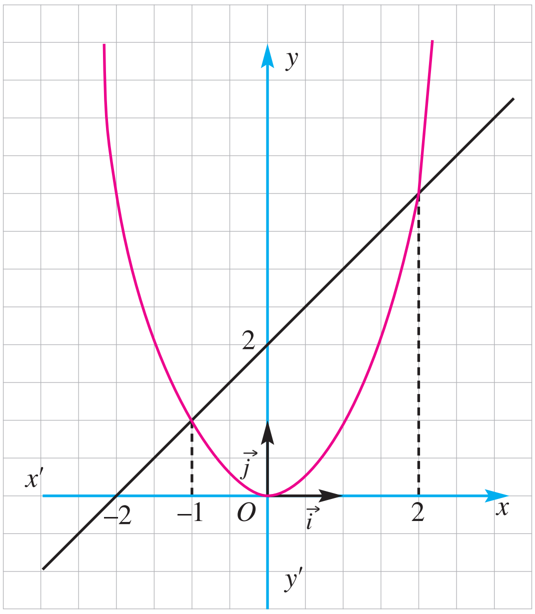
$$\boxed{\mathscr{A} = \left[\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b -f(x)\,dx\right]\ u^2}$$

Exemples

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$ (l'unité de longueur est le cm) .

1. Soit à calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par les courbes représentatives (C_f) et (C_g) des fonctions f et g définies par :

$f(x) = x^2$ **et** $g(x) = x + 2$ **.**



(C_f) et (C_g) se coupent en deux points d'abscisses respectives -1 et 2 .

Pour $x \in [-1\,;2]$, $x+2 \geqslant x^2$.

$$\mathscr{A} = \int_{-1}^{2}\left[(x+2) - x^2\right] dx \text{ cm}^2 = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} \text{ cm}^2 .$$

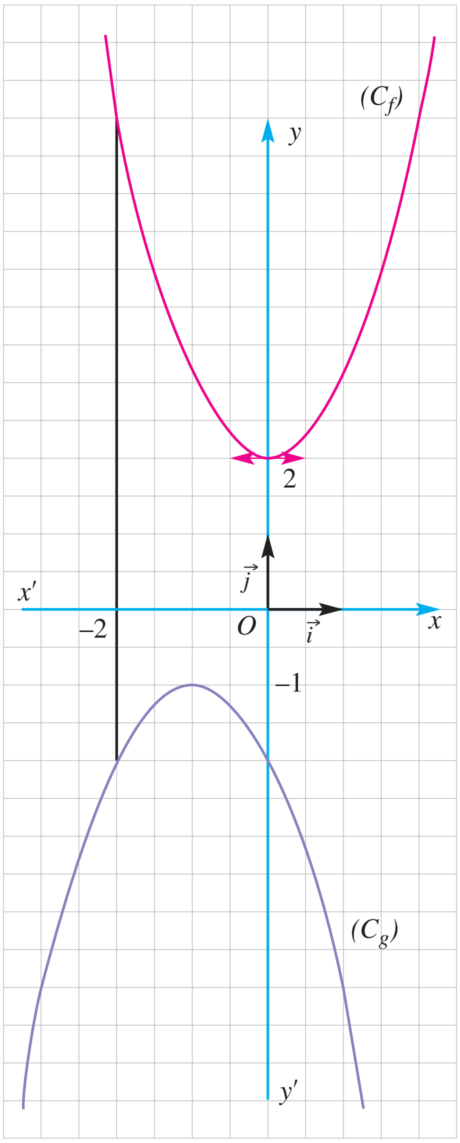
Soit $\mathscr{A} = \dfrac{9}{2}$ cm^2 .

2. Soit à calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par les courbes représentatives (C_f) et (C_g) des fonctions f et g définies par :

$f(x) = x^2 + 2$ et

$g(x) = -x^2 - 2x - 2$

et les deux droites d'équations respectives $x = -2$ et $x = 0$.



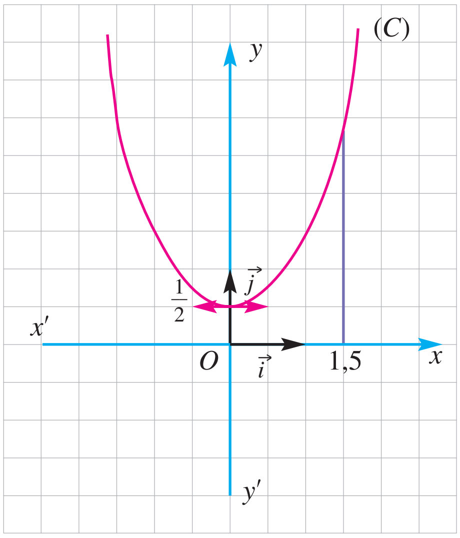
Pour tout $x \in [-2\ ;\ 0]$, $f(x) > g(x)$

$$\mathscr{A} = \int_{-2}^{0} \left[(x^2+2)-(-x^2-2x-2)\right] dx \, \text{cm}^2$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-2}^{0} \text{cm}^2 ,$$

soit $\mathscr{A} = \dfrac{28}{3}$ cm^2 .

3. Soit à calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par la courbe représentative (C) de la fonction f définie par :
$f(x) = x^2 + \dfrac{1}{2}$, l'axe $x'Ox$ et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1{,}5$.



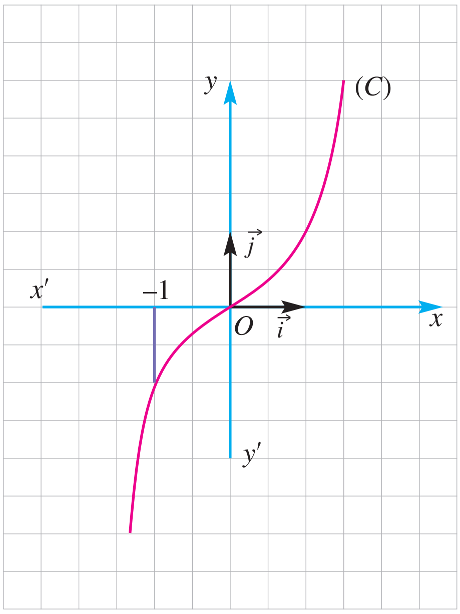
$$\mathscr{A} = \int_{0}^{1{,}5} \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) dx \ \text{cm}^2$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2}\right]_{0}^{1{,}5} \text{cm}^2 ,$$

soit $\mathscr{A} = \dfrac{27}{24} + \dfrac{3}{4}$ cm^2 $= \dfrac{15}{8}$ cm^2 .

4. Soit à calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par la courbe représentative (C) de la fonction f définie par :

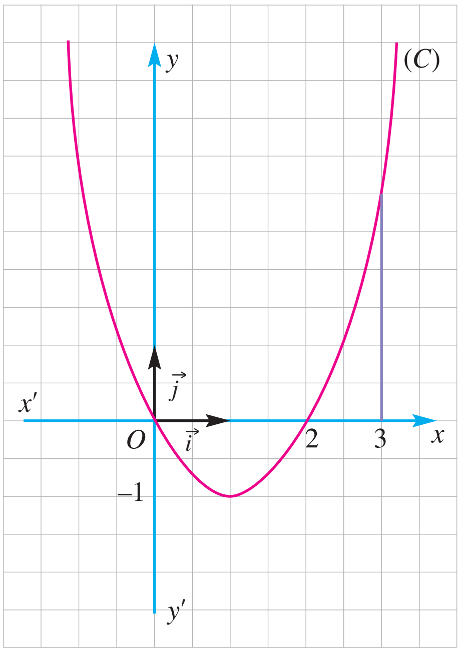
$f(x) = x^3$, l'axe $x'Ox$ et les deux droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.



$$\mathscr{A} = \int_{-1}^{0} -x^3 \, dx \text{ cm}^2 = \left[-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} \text{cm}^2,$$

soit $\mathscr{A} = \dfrac{1}{4}$ cm^2 .

5. Soit à calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par la courbe représentative (C) de la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 2x$, l'axe $x'Ox$ et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.



La courbe (C) coupe $x'Ox$ en deux points d'abscisses respectives 0 et 2 .

Pour $x \in [0 \,;\, 2]$, $f(x) \leqslant 0$ et pour $x \in [2 \,;\, 3]$, $f(x) \geqslant 0$

$$\mathscr{A} = \int_{0}^{2} -(x^2 - 2x)\, dx \text{ cm}^2 + \int_{2}^{3} (x^2 - 2x)\, dx \text{ cm}^2$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 \text{cm}^2 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^3 \text{cm}^2 ,$$

soit $\mathscr{A} = \left(-\dfrac{8}{3} + 4\right) \text{cm}^2 + \left[(9 - 9) - \left(\dfrac{8}{3} - 4\right)\right] \text{cm}^2$

$\mathscr{A} = \dfrac{8}{3}$ cm^2 .

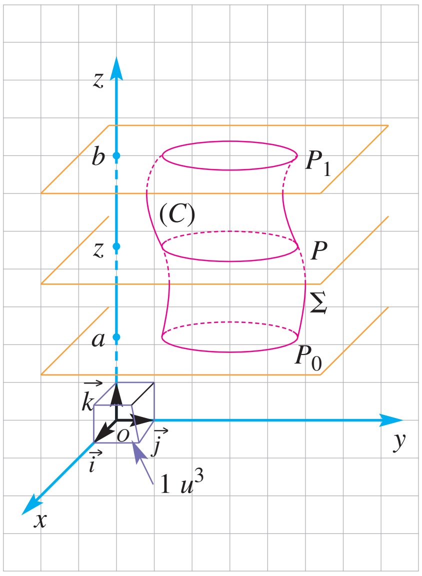
6 CALCUL DES VOLUMES

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ et $z'Oz$.

Un solide (Σ) est délimité par deux plans (P_0) et (P_1) parallèles au plan (xOy) d'équations respectives : $z = a$ et $z = b$ et l'on suppose que $a < b$.

On note V le volume de ce solide et $S(z)$ l'aire de la section de ce solide par le plan (P) parallèle à (P_0) et à (P_1) de cote z.

On admet que le volume V peut être calculé par la formule
$V = \int_a^b S(z)\, dz \;\; u^3$ où u^3 est l'unité de volume.



Exemples

1. Volume d'une boule.

Soit $B(O, R)$ une boule de centre O et de rayon R.

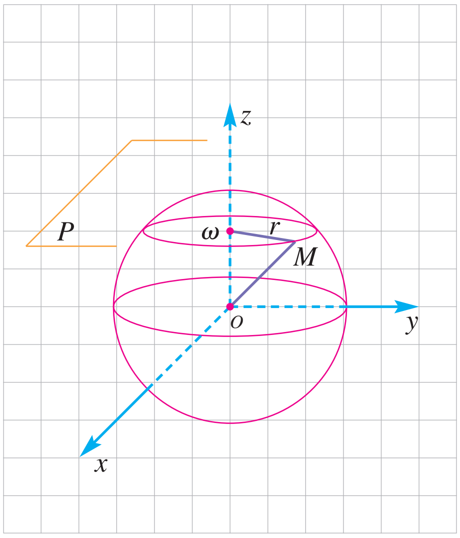
L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ et $z'Oz$.

Un plan (P) de cote z coupe la boule suivant un disque de rayon r avec $r^2 = R^2 - z^2$, l'aire de ce disque est $S(z) = \pi r^2 = \pi\,(R^2 - z^2)$.

Le volume V de la boule est donc

$$V = \int_{-R}^{R} \pi\,(R^2 - z^2)\, dz \;\; u^3 \quad \text{où } u \text{ est l'unité de longueur .}$$

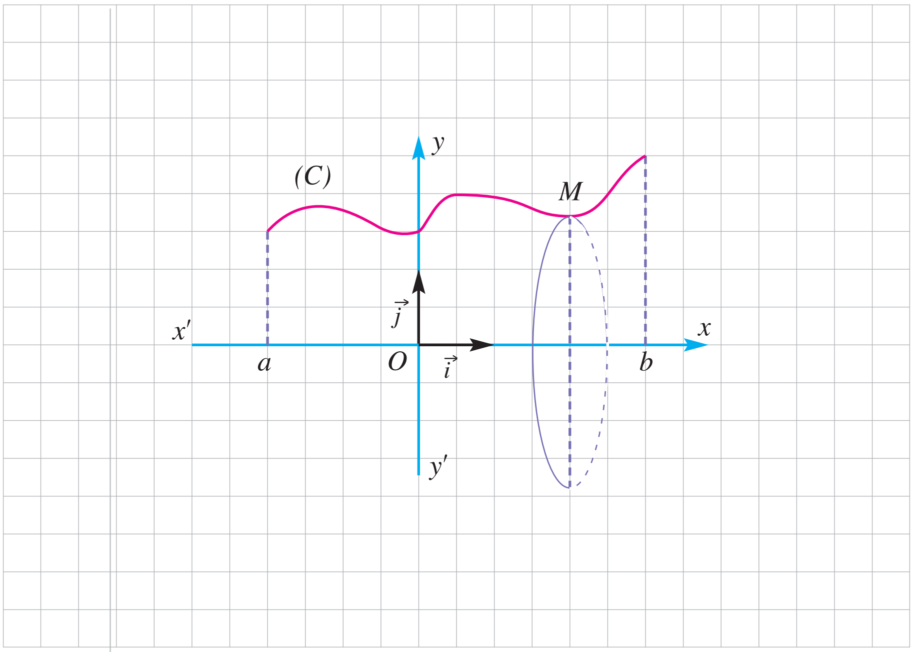
Soit $V = \left[\pi\left(R^2 z - \dfrac{z^3}{3}\right)\right]_{-R}^{R} \; u^3$; $V = \dfrac{4\pi}{3} R^3 \;\; u^3$.



2. Volume d'un solide de révolution

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

Soit (C) la courbe représentative d'une fonction f continue sur un intervalle $[a ; b]$. D est le domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.



Par rotation autour de l'axe des abscisses , D engendre un solide de révolution admettant l'axe des abscisses comme axe de symétrie . Chaque point $M\left(x\ , f(x)\right)$ de (C) décrit par rotation autour de l'axe des abscisses un cercle de rayon $\left|f(x)\right|$.

D'où l'aire de la section de ce solide engendré par rotation par un plan perpendiculaire à l'axe de symétrie est $\pi\left(f(x)\right)^2$.

Le volume de ce solide est donc $\boxed{V = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx \quad u^3}$

Remarque

La rotation autour de l'axe des ordonnées du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des y et les droites d'équations $y = a$ et $y = b$ engendre un solide de révolution dont le volume est donné par $V = \int_a^b \pi x^2\, dy \quad u^3$

EXEMPLE

Soit (P) la parabole d'équation $y = x^2$ dans le plan d'un repère orthonormal direct $(O\ ; \vec{i}\ , \vec{j})$.

Soit D le domaine plan limité par (P) , $x'Ox$ et la droite d'équation $x = 2$.

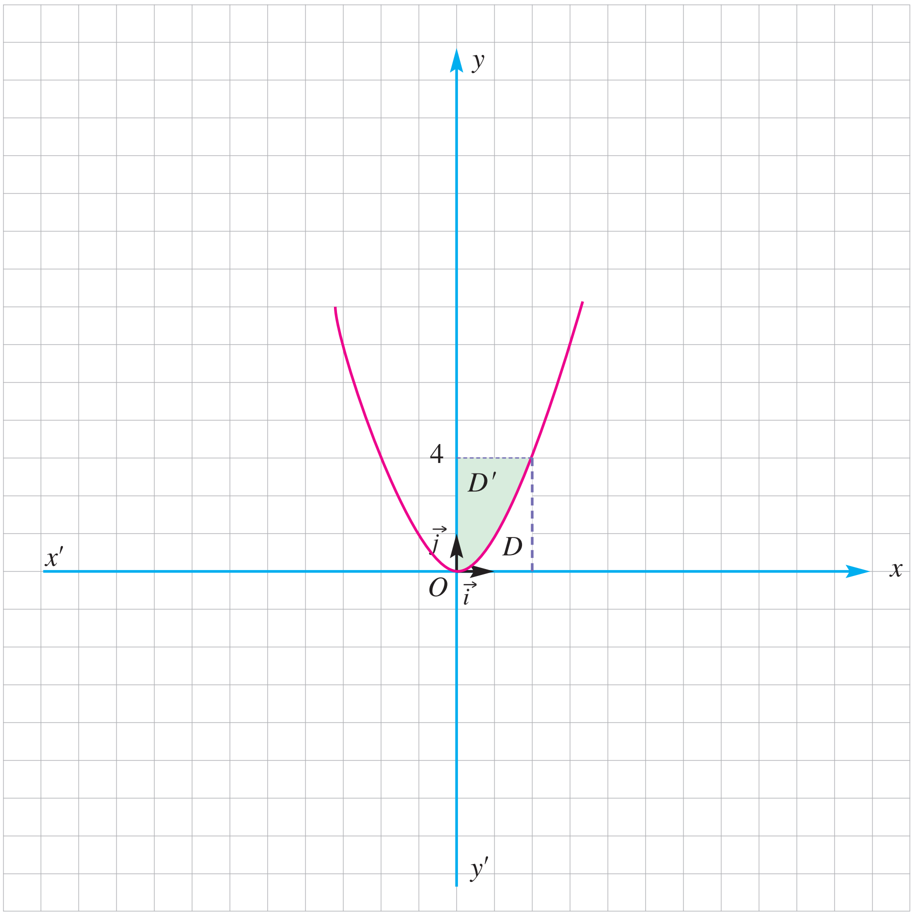
Le volume V engendré par la rotation autour de l'axe $x'Ox$ est

$$V = \int_0^2 \pi y^2\, dx\ u^3 = \int_0^2 \pi x^4\, dx\ u^3 = \left[\frac{\pi x^5}{5}\right]_0^2 u^3 = \frac{32}{5}\pi \quad u^3 .$$

Soit D' le domaine plan limité par (C) , $y'Oy$ et la droite d'équation $y = 4$.

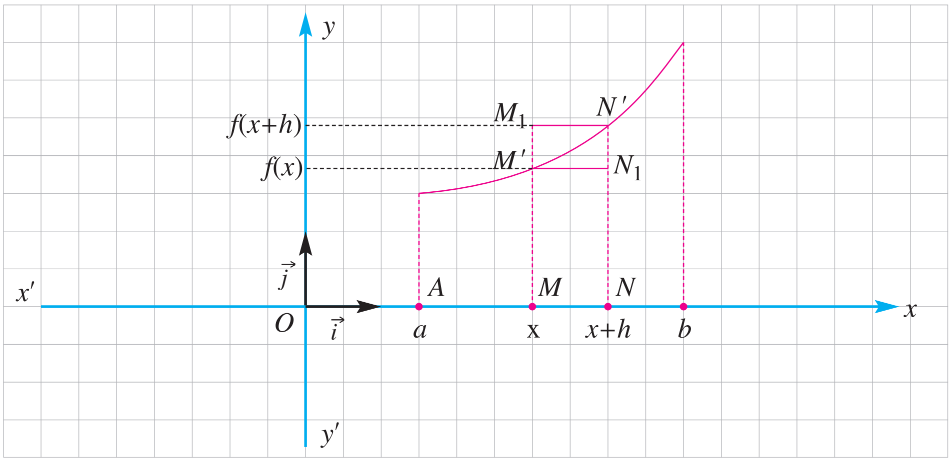
Le volume V' engendré par la rotation autour de l'axe $y'Oy$ est

$$V' = \int_0^4 \pi x^2 \, dy \; u^3 = \int_0^4 \pi y \, dy \; u^3 = \left[\frac{\pi y^2}{2}\right]_0^4 u^3 = 8\pi \quad u^3 .$$



7 CALCUL APPROCHÉ D'UNE INTÉGRALE

1° Activité



Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{i}\ ,\vec{j}\,)$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

On considère la fonction f continue , croissante et positive sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. Soit (C) la courbe représentative de f .

On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du domaine du plan limité par (C) , $x'Ox$ et les deux droites parallèles à $y'Oy$ menées par les points $A(a\ ;0)$ et $M(x\ ;0)$ respectivement .

On se propose de démontrer que la fonction $\mathscr{A}$ est une primitive de la fonction f sur $[a\ ;b]$.

$\mathscr{A}\ (x + h)$ est l'aire du domaine du plan limité par (C) , $x'Ox$ et les deux droites parallèles à $y'Oy$ menées par les points $A(a\ ;0)$ et $N(x{+}h\ ;0)$ respectivement .

On suppose que h est strictement positif .

En utilisant l'aire du rectangle de sommets $M(x\ ;0)$, $N(x{+}h\ ;0)$,

$N'\big(x{+}h\ ,f(x{+}h)\big)$ et $M_1\big(x\ ,f(x{+}h)\big)$ et celle du rectangle de sommets $M(x{,}0)$, $N(x{+}h{,}0)$, $N_1\big(x{+}h\ ,f(x)\big)$ et $M'(x\ ,f(x))$, vérifier que :

$$f(x) < \frac{\mathscr{A}\ (x+h) - \mathscr{A}\ (x)}{h} < f(x+h)\ .$$

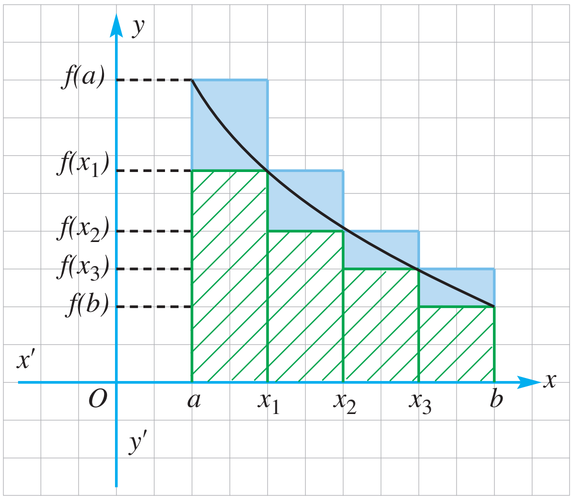
En déduire que $\mathscr{A}\ '(x) = f(x)$.

La fonction $\mathscr{A}$ est-elle une primitive de la fonction f sur $[a\ ,b]$?

Quelle est la valeur de $\mathscr{A}\ (a)$?

2° Méthode des rectangles

Soit deux réels a et b tels que $a < b$ et f une fonction monotone et positive sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. On désigne par (C) la courbe représentative de f sur $[a\ ;\ b]$ dans le plan d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{i}\ ,\vec{j}\,)$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.



On cherche une valeur approchée de $\int_a^b f(x)\,dx$ qui est l'aire du domaine plan compris entre (C) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.

Pour cela , on partage le segment $[a\ ;\ b]$ en n $(n > 2)$ segments égaux et on obtient les intervalles $[a\ ;x_1]$, $[x_1\ ;x_2]$, ... , $[x_{n-1}\ ;b]$.

L'amplitude de chaque intervalle est donc $\dfrac{b-a}{n}$.

On désigne par S_n la somme des aires des rectangles en bleu et par s_n la somme des aires des rectangles hachurés en vert .

Par suite $s_n \leqslant \frac{b}{a} f(x)\, dx \leqslant \mathrm{S}_n$.

s_n est la valeur approchée par défaut de $\int_a^b f(x)\, dx$ et

S_n est la valeur approchée par excès de $\int_a^b f(x)\, dx$.

Dans le cas de la figure précédent , $[a\ ;\ b]$ est partagé en quatre intervalles de même amplitude $\frac{b-a}{4}$.

$$S_4 = \frac{b-a}{4} f(a) + \frac{b-a}{4} f(x_1) + \frac{b-a}{4} f(x_2) + \frac{b-a}{4} f(x_3)$$

$$s_4 = \frac{b-a}{4} f(x_1) + \frac{b-a}{4} f(x_2) + \frac{b-a}{4} f(x_3) + \frac{b-a}{4} f(b)\ .$$

Remarques

• Si , sur $[a\ ;\ b]$, f est monotone et négative , alors on encadre $-f$ par s_n et S_n et l'on obtient :
$s_n \leqslant \int_a^b -f(x)\, dx \leqslant S_n$. Soit $-S_n \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant -s_n$.

• L'approximation est d'autant plus précise que n est grand .

EXEMPLE

Soit à trouver une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

La fonction f définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est une fonction positive sur $[0\ ;\ 1]$ et strictement décroissante sur $[0\ ;\ 1]$ car $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \leqslant 0$ sur $[0\ ;\ 1]$.

On partage le segment $[0\ ;\ 1]$ en 10 segments égaux , par exemple , et on obtient le tableau suivant :

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$	1	0,99	0,96	0,92	0,86	0,80	0,74	0,67	0,61	0,55	0,50

La valeur approchée par excès de I est :

$$S_{10} = \frac{1}{10} + \frac{0{,}99}{10} + \frac{0{,}96}{10} + \frac{0{,}92}{10} + \frac{0{,}86}{10} + \frac{0{,}80}{10} + \frac{0{,}74}{10} + \frac{0{,}67}{10} + \frac{0{,}61}{10} + \frac{0{,}55}{10} = \ ,81\ .0$$

La valeur approchée par défaut de I est :

$$s_{10} = \frac{0{,}99}{10} + \frac{0{,}96}{10} + \frac{0{,}92}{10} + \frac{0{,}86}{10} + \frac{0{,}80}{10} + \frac{0{,}74}{10} + \frac{0{,}67}{10} + \frac{0{,}61}{10} + \frac{0{,}55}{10} + \frac{0{,}50}{10} = 0{,}76\ .$$

Remarque

Toute valeur de l'intervalle $[s_{10}\ ;\ S_{10}]$ peut être considérée comme une valeur approchée de l'intégrale I .

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Calculer les intégrales suivantes .

1° a) $\int_{-1}^{2} 3t^2\,dt$; **b)** $\int_{0}^{\pi} 8\cos x\,dx$

c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4\sin x\,dx$; **d)** $\int_{1}^{3} \frac{4dt}{t^2}$.

2° a) $\int_{-1}^{0} (4t^3 - 6t + 5)\,dt$; **b)** $\int_{2}^{-8} 0\,dt$

c) $\int_{1}^{-4} 4dt$; **d)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 z)\,dz$

3° a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{10}} 8\cos 5x\,dx$; **b)** $\int_{0}^{4\pi} 2\sin\frac{x}{8}\,dx$

c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (5\cos 2x - 8\sin 3x)\,dx$

d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t\,dt$; **e)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 t\,dt$

4° a) $\int_{0}^{1} \frac{2x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$; **b)** $\int_{2}^{3} \frac{x\,dx}{(x^2-1)^2}$

c) $\int_{0}^{1} x\sqrt{1+x^2}\,dx$; **d)** $\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

5° a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}\,dx$

b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos x\,dx$

c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^4 x}\,dx$; **d)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$.

6° a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x}{\cos^2 x}\,dx$; **b)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{\sin^4 z}\,dz$

c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x)\tan^5 x\,dx$

d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos^2 t}$

7° a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{12}} (1+\tan^2 3x)\tan^{1999} 3x\,dx$

b) $\int_{0}^{1} x(1+x^2)^{1999}\,dx$

c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^{1999} x\,dx$

8° a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{12}} \sin 2x \cos 2x\,dx$

b) $\int_{0}^{1} \frac{8t}{\sqrt{1+4t^2}}\,dt$

c) $\int_{0}^{2} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+8}}\,dx$

9° a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{40}} \cos^2 x + \sin^2 x)\,dx$

b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx$

c) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cot 3x}{\sin 3x}\,dx$; **d)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{3+\cos x}}\,dx$.

2 Calculer les intégrales suivantes :

1° $\int_0^1 \frac{8du}{3(1+u^2)}$ **2°** $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{-3dt}{\sqrt{1-t^2}}$ **3°** $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{du}{\sqrt{4-u^2}}$

4° $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \frac{dt}{\sqrt{1-4t^2}}$ **5°** $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dz}{\sqrt{4-9z^2}}$ **6°** $\int_{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

3 Linéariser puis calculer les intégrales .

1° a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 5\cos 4x \cos 8x\, dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \cos x\, dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 3x\, dx$.

2° a) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x\, dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 3x\, dx$

c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 2x\, dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 2x\, dx$.

4 Effectuer (Intégration par parties) .

1° $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx$ et déduire $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx$.

2° $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cos 3x\, dx$ et déduire $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^2 \sin 3x\, dx$.

5 Effectuer (Intégration par parties) .

1° $I = \int_0^1 x \operatorname{Arc\,tan} x\, dx$.

2° $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arc\,sin} x\, dx$.

6 Effectuer (fonctions paires - impaires - périodiques).

1° $I = \int_0^{\pi} \cos 2x\, dx$ et déduire $J = \int_{-2\pi}^{\pi} \cos 2x\, dx$.

2° $I = \int_0^{\pi} \sin 2x\, dx$ et déduire $J = \int_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x\, dx$.

3° $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$ et déduire $J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$.

4° $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x\, dx$ et déduire $J = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x\, dx$.

7 Calculer les dérivées des fonctions suivantes .

1° $x \longmapsto \int_0^x t\sqrt{1-t^2}\, dt$, $x \in]-1\, ;\, 1[$.

2° $x \longmapsto \int_0^{\cos x} (1-t^2)\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{8}$ Calculer les dérivées des fonctions suivantes .

1° $x \longmapsto \int_0^{\cos x} \text{Arc}\cos t \, dt$, $x \in]0\,;\,\pi[$. **2°** $x \longmapsto \int_x^{\frac{1}{1+x^2}} (3t^2+1)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{9}$ Calculer les intégrales suivantes (Intégrale d'une fonction du type $u' \,.\, f'(u)$) .

1° $\int_2^3 8(4x-1)(2x^2-x-5)^4\,dx$. **2°** $\int_2^3 \frac{2t+1}{\sqrt{t^2+t-1}}\,dt$. **3°** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos^{25} x\,dx$.

4° $\int_1^2 \frac{10x+1}{(5x^2+x+3)^2}\,dx$. **5°** $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (1+\tan^2 2x)\tan^{35} 2x\,dx$. **6°** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8\sin 2x}{\cos^4 x}\,dx$.

7° $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^5}\,dx$. **8°** $\int_{-1}^1 t\sqrt{1+t^2}\,dt$. **9°** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\sin x}{(1+\cos x)^4}\,dx$.

$\boxed{10}$ Calculer (intégrale comportant une valeur absolue).

1° $\int_{-1}^1 |x|\,dx$. **2°** $\int_{-2}^1 |x^2-1|\,dx$. **3°** $\int_0^{\pi} \sin x\,|\cos^3 x|\,dx$.

4° $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |x\cos x|\,dx$. **5°** $\int_{-1}^2 \frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$. **6°** $\int_0^{\pi} |\pi-3z|\sin z\,dz$.

7° $\int_{-6}^2 |x^2+4x-5|\,dx$.. **8°** $\int_{-1}^2 \frac{|x|}{(1+x^2)^3}\,dx$. **9°** $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |x|\,|\sin x|\,dx$.

$\boxed{11}$ **1°** Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n , on a : $0 \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$.

2° On pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \quad (n \in \mathbb{N})$

Déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

$\boxed{12}$ On considère les deux fonctions f et g définies par : $f(x) = x\sin x$ et $g(x) = x\cos x$.

1° Vérifier que $g'(x) + f(x) = \cos x$.

2° En déduire la valeur de $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$.

13 Soit (C) la courbe représentative de la fonction f, continue sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, dans le plan d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\vec{j}\,)$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$. Soit D le domaine plan limité par (C), $x'Ox$ et les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.

Calculer les racines possibles dans $[a\ ;\ b]$ de l'équation $f(x) = 0$. Sans tracer (C) calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine D.

1° $a = \frac{\pi}{4}$; $b = \pi$; $f(x) = \cos^2 x$.

2° $a = -4$; $b = 2$; $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

3° $a = 1$; $b = 3$; $f(x) = x - \frac{8}{x^2}$.

4° $a = -\frac{\pi}{2}$; $b = \pi$; $f(x) = \sin x \cos^3 x$.

14 Soit (C) et (C') les courbes représentatives des fonctions f et g continues sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, dans le plan d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\vec{j}\,)$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$. Soit D le domaine plan limité par (C), (C') et les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.

Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine D.

1° $a = -1$; $b = 2$; $f(x) = -x^2 + 2x$, $g(x) = x - 2$.

2° $a = -2$; $b = 3$; $f(x) = -x^2 + 2x$, $g(x) = x - 2$.

3° $a = -\frac{\pi}{2}$; $b = \frac{\pi}{2}$; $f(x) = \sin^2 x$, $g(x) = -\sin^2 x$.

4° $a = -1$; $b = 1$; $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$, $g(x) = -4$.

15 Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\vec{j}\,)$ d'unité 2 cm.

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x^2}$.

1° Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C).

2° Donner la position de (C) par rapport à (D).

3° Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par (C), (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

16 L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\vec{j}\ ,\vec{k}\,)$ d'axes $x'Ox$, $y'Oy$ et $z'Oz$. Calculer le volume des solides suivants :

1° Un cône de révolution de sommet $S(0\ ;\ 0\ ;\ 4)$ et de base le disque défini par : $z = 0$ et $x^2 + y^2 - 16 \leqslant 0$.

2° Un cylindre de révolution dont l'axe de symétrie est l'axe $z'Oz$ et de bases les disques définis par :
première base : $z = -2$ et $x^2 + y^2 - 16 \leqslant 0$
deuxième base : $z = 3$ et $x^2 + y^2 - 16 \leqslant 0$.

Pour chercher

17 Comparaison des intégrales .

Justifier que , pour $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$, on a : $\frac{\sin x}{1+\pi^2} \leqslant \frac{\sin x}{1+x^2} \leqslant \frac{4 \sin x}{4+\pi^2}$.

En déduire un encadrement de l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x \, dx}{1+x^2}$.

18 Sans calculer les intégrales , justifier les inégalités .

1° $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} \leqslant 2$

2° $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \leqslant \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+\cos x}} \leqslant \frac{\pi}{2}$.

19 Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \sin 2x \, dx$.

Montrer que $0 \leqslant I_n \leqslant \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$.

20 Soit (I_n) la suite définie par :$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+x} \, dx$ et pour n de $\mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x} \, dx$.

1° Calculer I_0 .

2° Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties .

3° Comparer x^n et x^{n+1} lorsque $0 \leqslant x \leqslant 1$; en déduire que la suite (I_n) est décroissante .

4° Grâce à un encadrement de $\sqrt{1+x}$, établir que : $\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

5° En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} I_n$.

21 Calculer l'aire du domaine plan limité par les deux droites d'équations respectives $x - 4y = 0$ et $y = 2x$ et la courbe d'équation $y = \frac{2}{x^2}$.

22 Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

Calculer le volume V obtenu par la rotation autour de l'axe $x'Ox$ ou $y'Oy$ du domaine plan D défini par :

1° D est limité par la courbe (C) de la fonction f définie par $f(x) = x + 1$ et les deux droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$ (rotation autour de $x'Ox$) .

2° D est limité par la courbe (C) de la fonction f définie par : $f(x) = x^2 + 1$ et les deux droites d'équations $y = 1$ et $y = 2$ (rotation autour de $y'Oy$) .

3° D est limité par la courbe (C) de la fonction f définie par $f(x) = \sin x$, la droite d'équation $y = x$ et $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ (rotation autour de $x'Ox$) .

4° D est limité par la courbe (C) de la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x}$ et la droite déquation $y = x$ (rotation autour de $y'Oy$) .

23 Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$.

1° Calculer I_0 .

2° Par une intégration par parties , calculer I_1 .

3° Montrer que , pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $(2n + 3)\, I_n = 2n\, I_{n-1}$.

4° En déduire la valeur de I_n .

24 Soit (U_n) la suite définie , pour tout entier naturel n non nul , par $U_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$.

1° Montrer que , pour tout entier naturel n , $n \geqslant 1$; $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$.

2° Démontrer que la suite (U_n) est décroissante.

3° Montrer que , pour tout réel t dans $[0\ ;\ 1]$, $0 \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$. Déduire que , pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $0 \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{n+1}$, puis déterminer la limite de (U_n) .

25 Soit l'intégrale $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$.

1° Calculer I en posant $x = \cos t$.

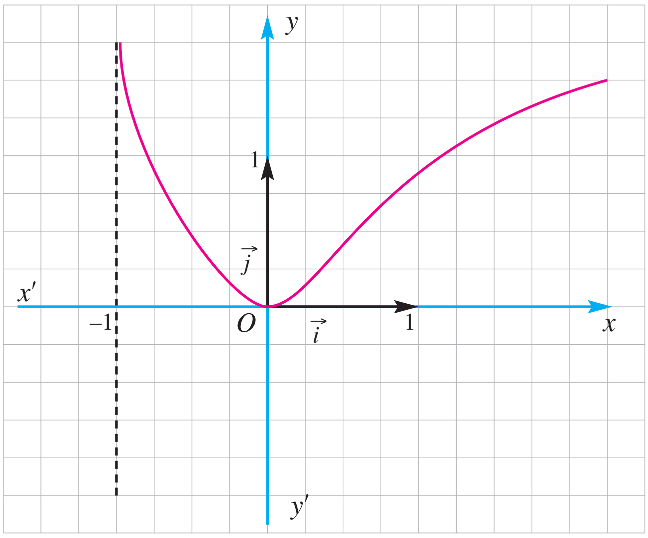
2° Retrouver le résultat obtenu par considération d'aire .

26 On se propose de calculer les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x\, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x\, dx$.

1° Calculer $I + J$ et $I - J$.

2° En déduire les valeurs de I et J .

27 La courbe (C) ci-contre est celle de la fonction f définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$ dans le repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.



1° Dresser le tableau de variation de f .

2° a) Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine limité par (C) , $x'Ox$, $y'Oy$ et la droite d'équation $x = \lambda$ avec $-1 < \lambda < 0$.

b) En déduire $\lim\limits_{\lambda \to -1} \mathscr{A}(\lambda)$.

28 On se propose de calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{(1 + 2\sin x)^3}\, dx$.

1° Calculer $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1 + 2\sin x)^3}\, dx$.

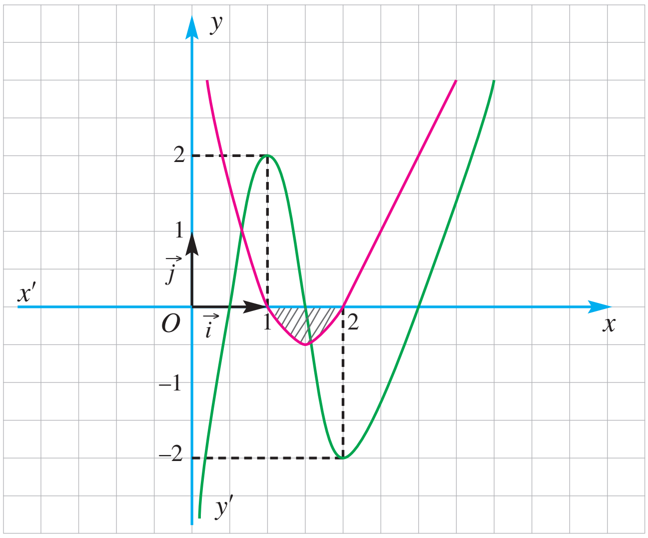
2° Calculer $I + J$ puis déduire la valeur de I .

29 Calculer la valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ par la méthode des rectangles en partageant l'intervalle $[a;\ b]$ en n $(n > 2)$ intervalles de même amplitude. (On utilise la calculatrice pour certains calculs).

1° $a = 0$; $b = 1$; $n = 5$; $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

2° $a = 1$; $b = 3$; $n = 10$; $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

30 On donne les deux courbes (C) et (C') ci-contre dans le repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.



(C) est la courbe représentative d'une fonction f définie dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et (C') la courbe représentative de la fonction f' dérivée de f .

1° Calculer $f(1)$ et $f(2)$.

2° Dresser le tableau de variation de la fonction f .

3° Calculer l'aire de la surface hachurée , limité par la courbe (C') et l'axe $(x'Ox)$.

8 LOGARITHMES

Un peu d'histoire

*Aux **XVI^e et XVII^e siècles** , les calculs , dans plusieurs domaines (astronomie , navigation , économie , etc ...) , étaient devenus trop complexes . L'idée de simplification de ces calculs est le remplacement de la multiplication par des additions à l'aide d'une table de correspondance . On doit à **John Napier ou Néper** (1550-1617) la mise au point de la première table à partir de considérations cinématiques . Cette table a été modifiée par les Anglais **Briggs** (1561-1631) et **Wright** (1560-1645) . L'Écossais **Neper** inventa , à partir d'un raisonnement sur des mouvements , les logarithmes comme correspondance entre suites géométriques et suites arithmétiques . Il travailla pendant une vingtaine d'années à la découverte de ces logarithmes et publia ses travaux dans l'ouvrage **«Mirifici logarithmorun canonis descriptio»** .*
*A la fin du XVII^e siècle , une démonstration géométrique fondée sur des calculs d'aires , est proposée par **Grégoire de Saint-Vincent** .*
*La notation **e** pour le nombre dont le logarithme népérien est 1 , a été introduite par le mathématicien suisse **Euler** en 1736 . Ce nombre n'est ni entier , ni rationnel , ni suceptible d'être écrit avec des radicaux . Il est dit transcendant .*
La fonction logarithme joue un rôle capital en mathématiques et dans plusieurs disciplines : physique , chimie , mécanique , économie , géographie , etc ...

PLAN DU CHAPITRE

«La valeur d'une sensation est proportionnelle au logarithme de la valeur de l'excitation qui la provoque» .

FECHNER

Activité 1

1° Trouver une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto 1$; $x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

b) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geqslant 2)$.

2° Peut-on trouver , de la même manière , une primitive de la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$?

Activité 2

Sur la calculatrice se trouve la touche $\boxed{\ell n}$.

Cette notation se lit «logarithme népérien» .

Par example $\boxed{\ell n}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ **0** **(ou** $\boxed{1}$ $\boxed{\ell n}$ $\boxed{=}$ **0)**

$\boxed{\ell n}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ **0 , 6 9 3 1 4 7 1 8**

1° a) Calculer alors $\ell n\ 3$, $\ell n\ 4$ et $\ell n\ 12$.

b) Vérifier que $\ell n\ 12 = \ell n\ 3 + \ell n\ 4$.

2° a) Calculer , si c'est possible , $\ell n\,3{,}5$, $\ell n\,5$, $\ell n\,14$, $\ell n\,0$, $\ell n\,(-1)$, $\ell n\,(-2)$.
Que peut-on en déduire ?

b) Que semble être le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \ell n\ x$?

3° a) Compléter le tableau suivant :

x	0,5	1	2	3	3,5	14	10^3	10^5	10^9
$\ell n\ x$									

b) Que semble être le sens de variation de la fonction $x \longmapsto \ell n\ x$?

A Logarithme népérien

1 DÉFINITION

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. Elle admet donc des primitives sur cet intervalle et parmi celles-ci , une seule prend la valeur 0 en 1 .

On appelle logarithme népérien la primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur]0 ; +∞[qui s'annule en 1 .

Elle est notée $\boldsymbol{\ell n\, x}$ qu'on lit **logarithme népérien de x ou «ℓn de x» .**

2 CONSÉQUENCES DE LA DÉFINITION

- **L'ensemble de définition** de la fonction ℓn est **]0 ; +∞[** .
- $\boldsymbol{\ell n\, 1 = 0}$ **.**
- Sur]0 ; +∞[, $\boldsymbol{(\ell n\, x)' = \frac{1}{x}}$. Etant dérivable , la fonction $\boldsymbol{\ell n}$ **est continue** sur cet intervalle .
- Pour tout $x > 0$, $(\ell n\, x)' = \frac{1}{x} > 0$: $\boldsymbol{\ell n}$ est donc **strictement croissante** sur]0 ; +∞[.
- Le signe de $\ell n\, x$ est donné par le tableau suivant :

x	0	1	$+\infty$
$(\ell n\, x)' = \frac{1}{x}$	‖	$+$	
$\ell n\, x$	‖	$-$ ↗ 0 ↗ $+$	

$\boldsymbol{\ell n\, x > 0}$ pour $\boldsymbol{x \in\,]1 ; +\infty[}$

$\boldsymbol{\ell n\, x = 0}$ pour $\boldsymbol{x = 1}$

$\boldsymbol{\ell n\, x < 0}$ pour $\boldsymbol{x \in\,]0 ; 1[}$.

3 RÈGLES DE CALCUL

1° Logarithme d'un produit (Propriété fondamentale)

a étant un réel strictement positif , soit la fonction f définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = \ell n\, ax$ avec $u(x) = ax$.

Les fonctions u et $x \longmapsto \ell n\, x$ étant dérivables sur]0 ; +∞[, alors leur fonction composée f est dérivable sur]0 ; +∞[et

$f'(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$.

Or $(\ell n\, x)' = \frac{1}{x}$ sur]0 ; +∞[, par suite les fonctions $x \longmapsto \ell n\, x$ et $x \longmapsto \ell n\, ax$ ont la même dérivée sur]0 ; +∞[et elles diffèrent d'une constante k .

$\ell n\, (ax) = \ell n\, x + k$.

Pour $x = 1$, on a : $\ell n\, a = \ell n\, 1 + k = k$; d'où $\ell n\, (ax) = \ell n\, x + \ell n\, a$.

En posant $x = b > 0$, on obtient : $\boxed{\boldsymbol{\ell n\, ab = \ell n\, a + \ell n\, b \ \ (a > 0 \text{ et } b > 0)}}$

On démontre par récurrence que $\ell n\, (a_1\, a_2 \ldots a_n) = \ell n\, a_1 + \ell n\, a_2 + \ldots \ell n\, a_n$.

EXEMPLE

Pour $x > 0$ et $x - 3 > 0$, soit pour $x > 3$,

$\ell n\, x + \ell n\,(x - 3) = \ell n\, x\,(x - 3) = \ell n\,(x^2 - 3x)$.

2° Logarithme d'un quotient

Soit le quotient $q = \dfrac{a}{b}$ avec $a > 0$ et $b > 0$, alors $q > 0$.

On peut écrire $bq = a$ et $\ell n\,(bq) = \ell n\, a$ ou $\ell n\, b + \ell n\, q = \ell n\, a$, soit $\ell n\, q = \ell n\, a - \ell n\, b$.

Par suite :

$$\boxed{\boldsymbol{\ell n\,\frac{a}{b} = \ell n\, a - \ell n\, b \quad (a > 0 \text{ et } b > 0)}}$$

En particulier , $\ell n\,\dfrac{1}{b} = \ell n\, 1 - \ell n\, b = -\,\ell n\, b$.

$$\boxed{\boldsymbol{\ell n\,\frac{1}{b} = -\,\ell n\, b \quad (b > 0)}}$$

3° Logarithme d'une puissance

α) **Pour tout réel $a > 0$ et tout entier relatif p , $\ell n\, a^p = p\,\ell n\, a$**

• Pour $p = 0$ ou $p = 1$, l'égalité est évidente .

• Pour $p \geqslant 2$, $\ell n\, a^p = \ell n\left(\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{p \text{ fois}}\right) = \underbrace{\ell n\, a + \ell n\, a + \ldots + \ell n\, a}_{p \text{ fois}}$

D'où : $\ell n\, a^p = p\,\ell n\, a$.

• Pour $p \leqslant -1$, $a^p = \dfrac{1}{a^{-p}}$ avec $-p \geqslant 1$, $\ell n\, a^p = \ell n\left(\dfrac{1}{a^{-p}}\right) = -\,\ell n\, a^{-p} = -\,(-\,p\,\ell n\, a) = p\,\ell n\, a$.

β) **Pour tout réel $a > 0$, $\ell n\,\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\,\ell n\, a$**

a étant un réel strictement positif , alors $a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$ et

$\ell n\, a = \ell n\,(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ell n\,\sqrt{a} + \ell n\,\sqrt{a}$, $\ell n\, a = 2\,\ell n\,\sqrt{a}$, soit $\ell n\,\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\,\ell n\, a$.

γ) On démontre que , pour tout réel strictement positif a , et tout rationnel r ,

$$\boxed{\boldsymbol{\ell n\, a^r = r\,\ell n\, a \quad (a > 0)}}$$

EXEMPLES

1. $\ell n\,(2{,}15)^7 = 7\,\ell n\,(2{,}15)$.

2. Pour $x > 0$, $\ell n\, 5 + \dfrac{1}{2}\,\ell n\, 8 - 3\,\ell n\, x = \ell n\, 5 + \ell n\,\sqrt{8} - \ell n\, x^3 = \ell n\left(\dfrac{5\sqrt{8}}{x^3}\right) = \ell n\left(\dfrac{10\sqrt{2}}{x^3}\right)$.

Remarques

- Si a et b sont deux réels **non nuls et de même signe ,** alors :
  $\ell n\ ab = \ell n\left(|a| \times |b|\right) = \ell n\ |a| + \ell n\ |b|$.

  $\ell n\ \dfrac{a}{b} = \ell n\left(\dfrac{|a|}{|b|}\right) = \ell n\ |a| - \ell n\ |b|$.
- Si a est un réel **non nul** et $\boldsymbol{p}$ **un entier relatif ,** alors : $\ell n\ (a^{2p}) = \ell n\ (a^2)^p = p\ \ell n\ a^2 = 2p\ \ell n\ |a|$.

4° Egalités et inégalités

La fonction ℓn définie sur $]0\ ;+\infty[$ étant une fonction continue et strictement croissante , alors :

> **pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$,**
> **$\ell n\ a = \ell n\ b$ équivaut à $a = b$**
> **$\ell n\ a > \ell n\ b$ équivaut à $a > b$**
> **$\ell n\ a < \ell n\ b$ équivaut à $a < b$**

EXEMPLES

1. Soit à résoudre $\ell n\ x + \ell n\ (x+2) = \ell n\ 3$.

Cette équation a un sens pour $x > 0$ et $x + 2 > 0$, soit pour $x > 0$. Elle s'écrit $\ell n\ x\ (x+2) = \ell n\ 3$; d'où $x\ (x+2) = 3$, $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Les racines de cette équation étant 1 et – 3 , la seule valeur acceptable est donc $x = 1$.

2. Soit à résoudre : $\ell n\ x + \ell n\ (x+2) > \ell n\ 3$.

Cette inéquation a un sens pour $x > 0$ et s'écrit $\ell n\ x\ (x+2) > \ell n\ 3$, d'où $x\ (x+2) > 3$, $x^2 + 2x - 3 > 0$,

qui est vérifiée pour $x \in\ ]-\infty\ ; -3[\ \cup\ ]0\ ;+\infty[$.

Comme $x > 0$, alors la solution est $]0\ ;+\infty[$.

4 DÉRIVÉE ET INTÉGRALE

1° Dérivée

u étant une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I , d'après la dérivée de la fonction composée , on peut écrire :

$$(\ell n\ u)' = u' \times \frac{1}{u} = \frac{u'}{u}\ .$$

Remarque

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , ne s'annulant pas et gardant un signe constant sur I , alors la fonction $\ell n\ |u|$ est dérivable pour $u \neq 0$.

• Si $u > 0$, $|u| = u$ et $\left(\ell n\ |u|\right)' = \left(\ell n\ u\right)' = \dfrac{u'}{u}$.

• Si $u < 0$, $|u| = -u$ et $\left(\ell n\ |u|\right)' = \left[\ell n\ (-u)\right]' = \dfrac{-u'}{-u} = \dfrac{u'}{u}$.

Par suite ,

$$\boxed{\left(\ell n\ |u|\right)' = \frac{u'}{u}\ \text{, pour } u \neq 0}$$

EXEMPLE

Soit à trouver la dérivée de la fonction f telle que $f(x) = \ell n\ |x^2 - 4|$.

f est définie et dérivable pour $x^2 - 4 \neq 0$, soit pour $x \neq 2$ et $x \neq -2$.

$f'(x) = \dfrac{(x^2-4)'}{x^2-4} = \dfrac{2x}{x^2-4}$.

2° Intégrale

Comme $\left(\ell n\ |u|\right)' = \dfrac{u'}{u}$ pour $u \neq 0$, alors $\ell n\ |u|$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ pour $u \neq 0$.

Par suite ,

$$\boxed{\int \frac{u'}{u}\,dx = \ell n\ |u| + C\ \text{, avec } u \neq 0 \text{ et } C \text{ une constante réelle}}$$

Si $u > 0$; alors : $\boxed{\displaystyle\int \frac{u'}{u}\,dx = \ell n\ u + C}$

En particulier :

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ell n\ |x| + C\ \text{, avec } x \neq 0 \text{ et } C \text{ une constante réelle}}$$

EXEMPLES

1. Pour $x > 0$, $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ell n\ x + C$.

2. Pour $x \neq 2$ et $x \neq -2$, $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-4}\,dx = \ell n\ |x^2-4| + C$.

3. Pour tout x réel , $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,\ell n\ (x^2+1) + C$

$= \ell n\ \sqrt{x^2+1} + C$.

5 LIMITES

1° Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} \ell n\, x$

1. Première méthode

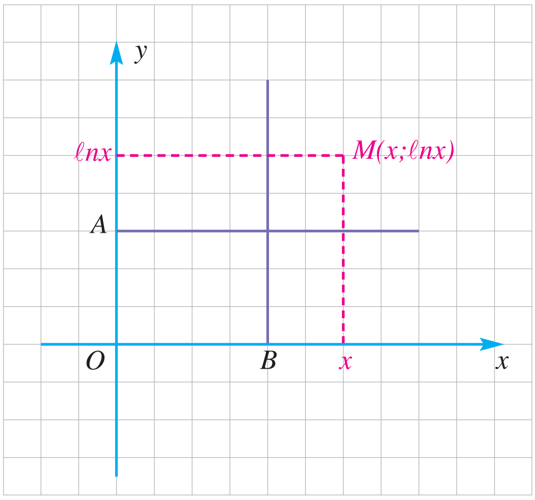
On constate sur une calculatrice que pour avoir :

- $\ell n\, x > 10$, il suffit que $x > 22500$,
- $\ell n\, x > 100$, il suffit que $x > 3 \times 10^{43}$.

En général , soit un réel positif A .

On démontre qu'il existe un réel $B > 0$ tel que pour $x > B$ on a $\ell n\, x > A$, car la fonction ℓn est strictement croissante .

Graphiquement, tous les points M de coordonnées $(x\,;\,\ell n\, x)$, avec $x > B$ sont situés dans la partie coloriée de la figure ci-contre ; cela signifie que $\ell n\, x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.



$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ell n\, x = +\infty}$$

2. Deuxième méthode

Tout réel $x > 1$ est tel que $10^n \leqslant x < 10^{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Comme la fonction ℓn est strictement crissante , alors $\ell n\, 10^n \leqslant \ell n\, x < \ell n\, 10^{n+1}$, soit $n\, \ell n\, 10 \leqslant \ell n\, x < (n + 1)\, \ell n\, 10$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, comme $x < 10^{n+1}$, alors n tend vers $+\infty$.

Comme $\ell n\, x > n\, \ell n\, 10$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n\, \ell n\, 10 = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \ell n\, x = +\infty$.

Par suite : $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ell n\, x = +\infty}$$

2° Calcul de $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell n\, x$

Si on pose $X = \dfrac{1}{x}$, alors $\ell n\, x = \ell n \dfrac{1}{X} = -\ell n\, X$.

Lorsque x tend vers 0^+ , X tend vers $+\infty$.

Comme $\lim\limits_{X \to +\infty} \ell n\, X = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell n\, x = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ell n\, x = -\infty}$$

3° Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ell n\, x}{x}$

Quand x tend vers $+\infty$, $\ell n\, x$ tend vers $+\infty$ et $\dfrac{\ell n\, x}{x}$ prend la forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$. La règle de l'Hôpital permet d'écrire : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ell n\, x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ell n\, x}{x} = 0 \quad (0^+)}$$

4° Calcul de $\lim\limits_{x \to 0^+} x \,\ell n\, x$

Si on pose $X = \dfrac{1}{x}$, alors $\ell n\, x = \ell n \dfrac{1}{X} = -\,\ell n\, X$.

Lorsque x tend vers 0^+ , X tend vers $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} x \,\ell n\, x = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{X} \,\ell n \left(\dfrac{1}{X}\right) = -\left(\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ell n\, X}{X}\right) = 0$, car $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ell n\, X}{X} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} x \,\ell n\, x = 0 \quad (0^-)}$$

Remarque

α étant un rationnel strictement positif , on démontre , en posant $X = x^\alpha$, que :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ell n\, x}{x^\alpha} = 0 \quad (0^+)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \,\ell n\, x = 0 \quad (0^-)}$$

On dit que la puissance (x^α) **«l'emporte»** sur le logarithme ($\ell n\, x$) , pour un quotient ou un produit .

5° Calcul de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ell n\, (1 + x)}{x}$

Quand x tend vers 0 , $\ell n\, (1 + x)$ tend vers $\ell n\, 1 = 0$ et $\dfrac{\ell n\, (1 + x)}{x}$ prend la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.

La règle de l'Hôpital permet d'écrire :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ell n\, (1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1 + x}}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + x} = 1 .$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ell n\, (1 + x)}{x} = 1}$$

6 ÉTUDE DE LA FONCTION ℓn

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ell n\, x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

• f est définie , continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

• $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, f est donc strictement croissante .

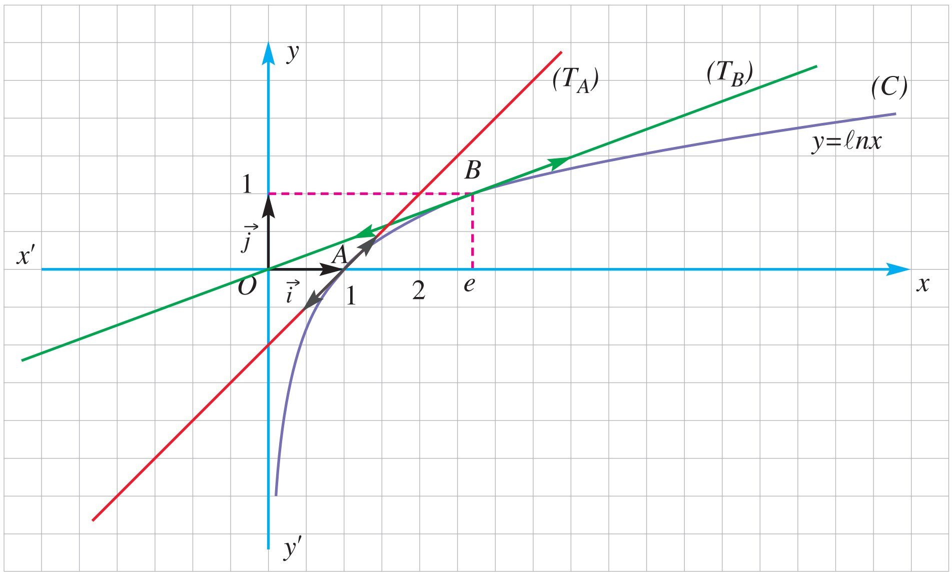
• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ell n\, x = -\infty$. La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des y) est une asymptote verticale à (C) .

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ell n\, x = +\infty$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ell n\, x}{x} = 0$.

La courbe (C) admet donc , en $+\infty$, une direction asymptotique horizontale ou une branche parabolique de direction $x'Ox$.

• Tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$



(C) passe par le point A (1 ; 0) .

Conséquences

• Comme la fonction ℓn est continue et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ dont l'image par ℓn est $]-\infty ; +\infty[$, il existe alors une seule valeur notée e de $]0 ; +\infty[$ telle que $\boldsymbol{\ell n\, e = 1}$. Ce nombre est appelé **nombre de Néper** ou base des logarithmes népériens . Une valeur approchée de e donnée par la calculatrice est $\boldsymbol{e \simeq 2,718281828\,46}$, soit $\boldsymbol{e \simeq 2,718}$ **à** $\boldsymbol{10^{-3}}$ **près** .

• Au point A (1 ; 0) , la courbe (C) admet une tangente (T_A) de coefficient directeur 1 et d'équation $y = x - 1$.

• Au point B (e ; 1) , la courbe (C) admet une tangente (T_B) d'équation $y = \dfrac{1}{e}x$ qui passe par l'origine O du repère .

• Graphiquement, la courbe (C) est au-dessous de la tangente (T_A) , c'est-à-dire pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $\ell n\, x \leqslant x - 1$, et comme $x - 1 < x$, alors :

pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $\ell n\, x < x$

Pour tout rationnel r , $\ell n\, e^r = r$.

Pour tout réel α et pour tout réel $x > 0$,
$\ell n\, x = \alpha$ équivaut à $x = e^{\alpha}$

B Logarithme de base a ($a \neq 1$, $a > 0$)

1 DÉFINITION

On appelle fonction logarithme de base a , notée $\mathbf{log_a}$, la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$\log_a x = \frac{\ell n\, x}{\ell n\, a} \quad \text{avec } a \neq 1 \text{ et } a > 0$$

Remarques

- $\log_a 1 = 0$ et $\log_a a = 1$.
- Sur $]0 ; +\infty[$, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\, \ell n\, a}$.

  Le signe de cette dérivée dépend de a .

  * Si $a > 1$, $\ell n\, a > 0$, $(\log_a x)' > 0$ et la fonction $\log_a$ est strictement croissante .

  * Si $0 < a < 1$, $\ell n\, a < 0$, $(\log_a x)' < 0$ et la fonction $\log_a$ est strictement décroissante .

- Le signe de $\log_a x$ est donné par les tableaux suivants .

$a > 1$

x	0		1		$+\infty$
$(\log_a x)'$	‖		$+$		
$\log_a x$	‖	$-$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+$	

$\log_a x > 0$ pour $x \in]1 ; +\infty[$

$\log_a x = 0$ pour $x = 1$

$\log_a x < 0$ pour $x \in]0 ; 1[$

$0 < a < 1$

x	0		1		$+\infty$
$(\log_a x)'$	‖		$-$		
$\log_a x$	‖	$+$ $\searrow$	0	$\searrow$ $-$	

$\log_a x > 0$ pour $x \in]0 ; 1[$

$\log_a x = 0$ pour $x = 1$

$\log_a x < 0$ pour $x \in]1 ; +\infty[$

- **Formule de changement de base**

Soit les deux fonctions logarithmes $\log_a$ et $\log_b$ de bases respectives a et b ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$) .

Pour tout x de $]0 ; +\infty[$ on a : $\log_a x = \dfrac{\ell n\, x}{\ell n\, a}$ et $\log_b x = \dfrac{\ell n\, x}{\ell n\, b}$.

En divisant membre à membre on obtient : $\dfrac{\log_a x}{\log_b x} = \dfrac{\ell n\, b}{\ell n\, a} = \log_a b$, soit :

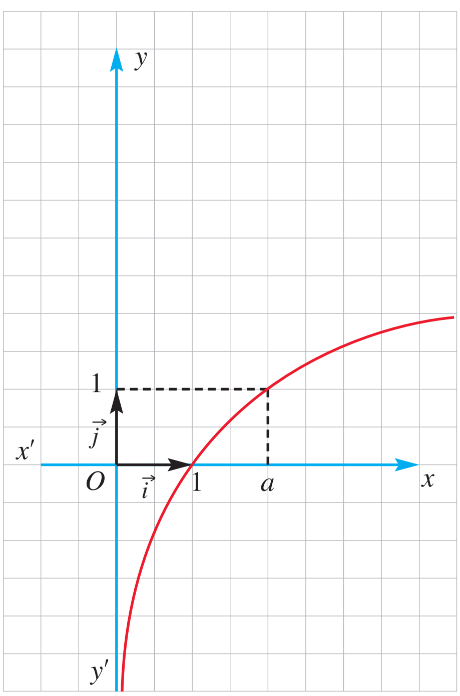
$$\log_a x = \log_a b \,.\, \log_b x$$

2 COURBE REPRÉSENTATIVE DE LA FONCTION $\log_a$ DANS UN REPÈRE ORTHONORMAL

Dans ce qui suit figurent les tableaux résumant les variations de la fonction logarithme de base a et les courbes représentant cette fonction .

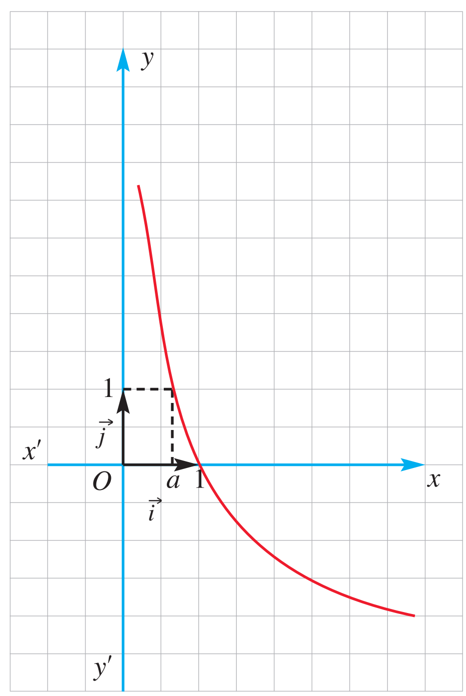
$a > 1$

x	0		1		$+\infty$
$(\log_a x)'$	||		$+$		
$\log_a x$	||	$-\infty$ ↗	0	↗	$+\infty$



$0 < a < 1$

x	0		1		$+\infty$
$(\log_a x)'$	||		$-$		
$\log_a x$	|| $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$



3 LOGARITHME DÉCIMAL

1° Définition

Le logarithme décimal est le logarithme de base $a = 10$, noté **log**

$$\mathbf{log}\ x = \mathbf{log_{10}}\ x = \frac{\ell n\ x}{\ell n\ 10}$$

2° Propriétés

• La fonction log est définie sur $]0\ ;+\infty[$.

• $\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$ et $\log 10^n = n$.

• Comme $a = 10 > 1$, la fonction log est strictement croissante .

• $\log x = \dfrac{1}{\ell n\ 10} \cdot \ell n\ x \simeq 0{,}434\ \ell n\ x$

• Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$,
$\log ab = \log a + \log b$ et $\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b$.

• Pour tous réels $a > 0$ et tout entier relatif p , $\log a^p = p \log a$.

• $\lim\limits_{x \to 0^+} \log x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \log x = +\infty$.

3° Quelques applications de la fonction log

*** En chimie**

L'acidité d'une solution est mesurée par son pH défini par $\boldsymbol{pH = -\log [H_3O^+]}$, où $[H_3O^+]$ est la concentration d'ions H_3O^+ (en mole par litre) dans la solution .

*** En sismologie**

La magnitude M d'un séisme d'intensité I est mesurée sur l'échelle de Richter par $\boldsymbol{M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)}$ où I_0 désigne une intensité de référence .

*** En acoustique**

L'intensité I (en décibels) d'un son de puissance P est donnée par $\boldsymbol{I = 10 \log\left(\frac{P}{P_0}\right)}$ où P_0 correspond au seuil d'audibilité au-dessous duquel aucun son n'est perçu .

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Préciser l'ensemble de définition de la fonction f définie par :

1° $f(x) = -x^2 + 2 + \ell n\, x$.

2° $f(x) = \ell n\,(-2x^2 + 5x - 3)$.

3° $f(x) = (1 + \ell n\, x)^2$.

4° $f(x) = \ell n \left(\dfrac{2x+3}{x-1}\right)$.

5° $f(x) = \dfrac{2\ell n\, x + 5}{\ell n\, x - 1}$.

6° $f(x) = \sqrt{\ell n\, x}$.

7° $f(x) = \ell n\, |x^2 + x - 2|$.

8° $f(x) = \ell n \left(\dfrac{x-2}{|x+1|}\right)$.

2 Résoudre , dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes .

1° $\ell n\,(x+2) = \ell n\,(8-2x)$.

2° $\ell n\,(2x+1) + \ell n\,(x-1) = \ell n\, 2$.

3° $\ell n\,(2x-3) + 2\ell n\,(x-2) = \ell n\,(-2x^2 + 19x - 24)$.

4° $\ell n \left[(x+3)\,(x+5)\right] = \ell n\, 15$.

5° $\ell n\,(x+1) + \ell n\,(x-1) = \ell n\, 3 + 4\ell n\, 2$.

6° $2\ell n\,(x-4) = \ell n\, x - 2\ell n\, 2$.

7° $2\ell n\, x = \ell n \left(\dfrac{4x+3}{2x+5}\right)$.

8° $\ell n\, x^2 = \ell n \left(\dfrac{4x+3}{2x+5}\right)$.

9° $\dfrac{1}{2}\,\ell n\,(2x) = \ell n\,(3-x) - \ell n\,\sqrt{x+1}$.

10° $\ell n\, |2x+3| + \ell n\, |5-x| = \ell n\, 7$.

11° $(\ell n\, x)^2 - 3\ell n\, x - 4 = 0$.

12° $\ell n\,(2x+1) = \ell n\,(x+3) + 1$.

13° $\log\,(x+3) + \log\,(x+5) = \log\, 15$.

14° $\log\,(x+1) = 3 + \log\,(1-2x)$.

15° $(\ell n\, x)^3 - 4(\ell n\, x)^2 - 29\ell n\, x - 24 = 0$.

16° $2\ell n\, |\ell n\, x^2| = \ell n\, 9$.

17° $\log_2 x = 3$.

18° $\log_2 x = \log_8 (3x-2)$.

3 Résoudre , dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes .

1° $\ell n\,(x+2) \leqslant \ell n\,(8-2x)$.

2° $2\ell n\, x - 7 \geqslant 0$.

3° $\sqrt{\ell n\, x} > 2$.

4° $\ell n\,(x+1) \leqslant 3 + \ell n\,(1-2x)$.

5° $(\ell n\, x)^2 - 3\ell n\, x < 4$.

6° $(\ell n\, x)^3 - 25\,\ell n\, x \geqslant 0$.

7° $\ell n \left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right) \geqslant 0$.

8° $\log\, |2x+1| + \log\, |x+3| < 1$.

9° $\log_5 x < 1$.

10° $\log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} (3x-4)$.

4 Résoudre , dans $\mathbb{R}^2$, chacun des systèmes suivants .

1° $\begin{cases} x + y = 9 \\ \ell n\, x + \ell n\, y = 1 \end{cases}$ 2° $\begin{cases} \ell n\,(xy) = 9 \\ \ell n\left(\dfrac{x}{y}\right) = 1 \end{cases}$ 3° $\begin{cases} \ell n\, x + \ell n\, y = 0 \\ \ell n\,(x + y) = 1 \end{cases}$ 4° $\begin{cases} \ell n\,(xy) = 3 \\ (\ell n\, x)(\ell n\, y) = 2 \end{cases}$

5° $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ \ell n\, x + \ell n\, 2y = 2\ell n\, 3 + \ell n\, 2 \end{cases}$ 6° $\begin{cases} y - x = \dfrac{2}{e} \\ \ell n\, x^2 = -1 + \ell n\, y \end{cases}$ 7° $\begin{cases} 2 \log x + \log y = 7 \\ \log x^3 - 5 \log y = 4 \end{cases}$

8° $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = -\dfrac{5}{2} \\ xy = e^5 \end{cases}$.

5 Sans utiliser la calculatrice , trouver la valeur de :

1° $\ell n\, e^3$ 2° $\ell n\, \sqrt{e}$ 3° $\log \sqrt[3]{10}$ 4° $\log 0{,}01$

5° $\log_3 27$ 6° $\log_3 \dfrac{1}{3}$ 7° $\log_3 \sqrt{3}$ 8° $\log_{\frac{1}{3}} 3$

9° $\log_5 25$ 10° $\log_{\frac{1}{7}} 49$ 11° $\log_2 \dfrac{1}{16}$ 12° $\log_{\frac{1}{2}} 16$.

6 Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$:

1° $f : x \longmapsto -x^2 + 2 + 2\ell n\, x$ 2° $f : x \longmapsto x\, \ell n\, x$ 3° $f : x \longmapsto \dfrac{\ell n\, x}{x}$ 4° $f : x \longmapsto \sqrt{\ell n\, x}$

7 Calculer les limites suivantes .

1° $\lim\limits_{x \to 0^+} x\,(1 - \ell n\, x)$. 2° $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ell n\, x}{x} + \dfrac{x^2 - 1}{2x}$. 3° $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 3\ell n\, x)$.

4° $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ell n\,(\cos x)}{1 - \cos x}$. 5° $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ell n\,(1 + 2x)}{x^2}$. 6° $\lim\limits_{x \to +\infty} x\, \ell n\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

8 Calculer les intégrales suivantes .

1° $\displaystyle\int_{-1}^{5} \frac{dx}{x + 2}$. 2° $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x + 1}{3x^2 + 6x + 8}\, dx$. 3° $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ell n\, x}$. 4° $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{dx}{(x + 1)\left[\ell n\,(1 + x)\right]^2}$.

5° $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}\,dx$. **6°** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$. **7°** $\displaystyle\int \cot x\,dx$.

8° $\displaystyle\int \tan x\,dx$. **9°** $\displaystyle\int \tan 3x\,dx$. **10°** $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\cos(\ell n\, x)}{x}\,dx$.

11° $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x\,\ell n\,(\sin x)}\,dx$. **12°** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\text{Arc}\sin x}$. **13°** $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\,\text{Arc}\tan x}$.

9 **1°** Déterminer les constantes a et b telles que : $\dfrac{13x+1}{x\,(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$.

En déduire $I = \displaystyle\int_1^{e} \frac{13x+1}{x\,(x+1)}\,dx$.

2° Déterminer les constantes a , b et c telles que : $\dfrac{x+1}{x\,(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$

En déduire $J = \displaystyle\int \frac{x+1}{x\,(x^2+1)}\,dx$.

10 **1°** Sachant que x appartient à $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right]$, encadrer l'expression $\cos x + \sin x$ et déduire son signe .

2° On considère les deux intégrales :

$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$.

Calculer $I + J$ et $I - J$. En déduire I et J .

3° Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I et de J .

11 **1°** En intégrant par parties , calculer $\displaystyle\int_1^{e} (\ell n\, x)\,dx$

2° En déduire $\displaystyle\int_1^{e} (\ell n\, x)^2\,dx$

12 **1°** Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{2} \frac{\ell n\, x}{x}\,dx$.

2° Montrer que pour tout réel x tel que $x \geqslant 1$, $\dfrac{1}{2x} \leqslant \dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \dfrac{1}{x}$.

3° Déduire des résultats précédents un encadrement de l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^{2} \frac{x\,\ell n\, x}{1+x^2}\,dx$.

13 **1°** Vérifier que pour tout réel $t \geqslant 1$, $\sqrt{t} \leqslant t \leqslant t^2$.

2° En déduire un encadrement de $\ell n\ 2$ $\left(\text{on rappelle que } \ell n\ 2 = \int_1^2 \frac{dt}{t}\right)$.

14 **1°** Montrer , en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f définie par $f(x) = \ell n\ x$, que si $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{n+1} \leqslant \ell n\ (n+1) - \ell n\ n \leqslant \frac{1}{n}$.

2° En déduire la limite de la suite (u_n) telle que: $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ quand n tend vers $+\infty$

$\big((u_n)$ s'appelle série harmonique$\big)$.

15 Étudier chaque fonction f et tracer sa courbe représentative (C) (domaine de définition , limites , dérivée et tableau de variation) .

1° $f(x) = x\ \ell n\ x$. En déduire la courbe représentative de la fonction g telle que $g(x) = x\ \ell n\ |x|$.

2° $f(x) = \frac{x}{\ell n\ x}$. En déduire la courbe représentative de la fonction g telle que $g(x) = \frac{x}{\ell n\ |x|}$.

3° $f(x) = x + \ell n\ x$.

4° $f(x) = \ell n\ (\ell n\ x)$.

5° $f(x) = x - 1 + 2\ell n\ \frac{x+1}{x}$.

16 Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x\ (1 - \ell n\ x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\ , \vec{i}\ , \vec{j}\ )$.

1° Étudier la continuité de f en 0 .

2° Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des x , ainsi que les équations des tangentes à (C) en ces points .

3° Tracer ces tangentes à (C) dans $(O\ , \vec{i}\ , \vec{j}\ )$.

17 Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \ell n\ |x|$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

1° Étudier les variations de f et tracer (C) .

2° **a)** Montrer que , pour tout m , la courbe (C) coupe la droite (D) d'équation $y = x + m$ en deux points M_1 et M_2 .

b) Montrer que les tangentes à (C) aux points M_1 et M_2 se coupent sur l'axe $y'Oy$.

3° **a)** Calculer la dérivée de la fonction z définie par $z(x) = x\ \ell n\ |x|$.

b) En déduire l'aire du domaine plan limité par (C) , l'axe des x et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

18 Répondre par vrai ou faux .

1° $\ell n\ x$ est la primitive de $\dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$, telle que $\ell n\ 1 = 0$.

2° $\ell n\ x$ existe pour tout x de $\mathbb{R}$.

3° $\ell n\ x > 0$ pour $x > 1$.

4° $\ell n\ (a + b) = \ell n\ a\ .\ \ell n\ b$ $(a > 0$ et $b > 0)$.

5° $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell n\ x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ell n\ x = +\infty$.

6° u étant une fonction dérivable de x , $\left(\ell n\ u\right)' = \dfrac{u'}{u}$ pour $u > 0$.

7° $\ell n\ (x^2 - 1)$ existe pour $x \in]-1\ ;\ +1[$.

8° $\ell n\ e = 1$.

9° Si $\ell n\ x > \ell n\ 3$, alors $x < 3$.

10° $\ell n\ x = m$ n'a de solution que si $m > 0$.

11° $\ell n\ (ab) = \ell n\ a + \ell n\ b$ pour $ab > 0$.

12° $\displaystyle\int \frac{u'}{u}\,dx = \ell n\ |u| + C$ avec $u \neq 0$ et C une constante réelle .

13° La fonction ℓn est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

14° $\ell n\ x^2 = 2\ell n\ |x|$ pour $x \neq 0$.

15° $\log x = \dfrac{\ell n\ x}{\ell n\ 10}$ et $\log_a x = \dfrac{\ell n\ x}{\ell n\ a}$ avec $a > 0$ et $a \neq 1$.

16° $\ell n\ \dfrac{a}{b} = \ell n\ a - \ell n\ b$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

17° $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ell n\ x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ell n\ x}{x} = 0$.

18° Si $\log x = 1$ alors $x = e$.

Application au logarithme décimal

* pH - métrie

19 L'acidité d'une solution est mesurée par son pH : $pH = -\log [H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ désigne la concentration (en mole/ℓ) d'ions H_3O^+ .

1° Montrer que $[H_3O^+] = 10^{-pH}$.

2° Quelle est la concentration en ions H_3O^+ d'une solution neutre ($pH = 7$) ?

3° Comment varie le pH lorsque cette concentration décuple (c'est-à-dire , est multipliée par 10) ?

20 Lors d'une réaction acide/base , le pH de la solution est défini par :
$pH = pK_A + \log \dfrac{[\text{base}]}{[\text{acide}]}$, où $pK_A = -\log K_A$, avec $K_A = \dfrac{[\text{base}]\,[H_3O^+]}{[\text{acide}]}$, appelé constante d'équilibre .

On considère une solution contenant divers couples acide/base , dont le couple NH_4^+ / NH_3 avec $K_A = 6{,}3 \times 10^{-10}$.

On suppose que , dans cette solution , l'ammoniac (NH_3) est l'espèce prédominante du couple : il y a vingt fois plus de molécules d'ammoniac que d'ions hydronium (NH_4^+) .

Déterminer le pH de la solution considérée .

* Acoustique

21 En acoustique , on définit le niveau d'intensité acoustique L_I par la relation $L_I = 10 \log \left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ où I est l'intensité acoustique du son en w/m^2 , I_0 est une valeur de référence $I_0 = 10^{-12}$ w/m^2 et L_I s'exprime en dB (décibel) .

1° Un chanteur de Chorale développe une intensité acoustique de 10^{-8} w/m^2 en un point de la salle d'écoute . Calculer le niveau d'intensité acoustique en ce point .

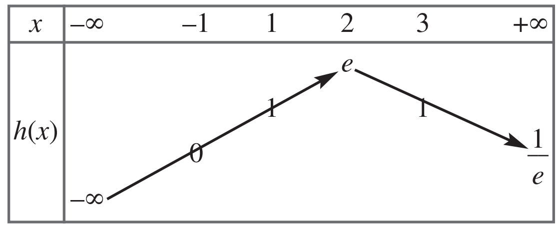
2° Calculer le niveau d'intensité acoustique au même point si vingt chanteurs chantent à l'unisson , chacun donnant une intensité acoustique de 10^{-8} w/m^2 au point considéré .

* Sismologie

22 La magnitude d'un séisme d'intensité I est mesurée sur l'échelle de Richter par $M = \log \left(\dfrac{I}{I_0}\right)$, où I_0 est une intensité de référence .

Calculer , sur l'échelle de Richter , la magnitude du séisme de San Francisco en 1906 où $I = 1{,}78 \times 10^{-8}\, I_0$.

23 On donne le tableau de variation d'une fonction h continue sur $\mathbb{R}$.



Soit g la fonction définie par $g(x) = \ell n[h(x)]$.

1° Donner le domaine de définition de g et dresser son tableau de variation .

2° Résoudre l'inéquation $g(x) < 0$.

24 Dans le tableau suivant , une seule des réponses proposées à chaque question est correcte . Dire laquelle en justifiant .

N°	**Questions**	**Réponses** **a**	**b**	**c**
1	Si $g(x) = (\ell n\, x)^2$ sur $]0\,;+\infty[$, alors $g'(x) =$	$\frac{1}{x^2}$	$2\,\ell n\, x$	$\frac{2\,\ell n\, x}{x}$
2	$\lim\limits_{x\to+\infty} (\ell n\, x - x) =$	0	$-\infty$	$+\infty$
3	$\ell n\,(x^2 - 2x + 2) > 0$ est vérifiée dans	$]1\,;+\infty[$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} - \{1\}$
4	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ell n\,(1+x)}{x} =$	0	1	$+\infty$
5	$\ell n\, 2 + \ell n\, 16 =$	$\ell n\, 18$	$5\,\ell n\, 2$	$3\,\ell n\, 2$
6	Une solution de $(\ell n\, x)^2 - 3\ell n\, x + 2 = 0$ est	e	1	-1
7	Une primitive de la fonction f définie pour $x > 1$ par $f(x) = \frac{1}{x\,\ell n\, x}$ est	$\ell n\,\lvert x\rvert$	$\ell n\,(\ell n\, x)$	$\ell n\,(\ell n\,\lvert x\rvert)$
8	La fonction f définie par $f(x) = \frac{\ell n\, x}{x}$ admet un maximum pour	$x = 1$	$x = e$	$x = \frac{1}{e}$
9	Si f est définie par $f(x) = \ell n\, x$, alors le domaine de définition de $f \circ f$ est	$]1\,;+\infty[$	$]0\,;+\infty[$	$]0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$
10	Si $f(x) = x - \frac{(\ell n\, x)^2}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$	$+\infty$	0	$-\infty$

Pour chercher

25 **1°** Démontrer que , pour tout x réel , $2x^2 + 1 > x$.

2° Étudier les variations de la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{\ell n\, x}{x}$.

En déduire que , pour tout $x > 0$, on a $\ell n\, x < x$.

3° On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2 + \ell n\, x}{x}$

a) Étudier les variations de f .

b) On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O , \vec{i} , \vec{j})$.
Étudier les positions respectives de la courbe (C) et de la droite (D) d'équation $y = 2x$.
Déterminer le point de (C) où la tangente est parallèle à la droite (D) . Construire (C) .

c) Calculer l'aire du domaine plan, ensemble des points $M\,(x\,;\,y)$ tels que : $1 \leqslant x \leqslant e$; $2x \leqslant y \leqslant f(x)$.

26 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1 + m\,\ell n\, x}{x}$ où m est un paramètre réel . On désigne par (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O , \vec{i} , \vec{j})$.

1° Montrer que les courbes (C_m) passent par un point fixe A .

2° Montrer que les courbes (C_m) admettent les mêmes asymptotes pour tout réel m .

3° **a)** Déterminer m pour que (C_m) coupe l'axe des x au point d'abscisse $x_0 = \dfrac{1}{e}$.
b) Étudier les variations de la fonction ainsi obtenue et tracer sa courbe (C) .

4° Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par (C) l'axe des x , et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = 1$.

5° On désigne par M_1 le point d'intersection de (C) et de $x'Ox$, par M_2 le point de (C) où la tangente passe par O , par M_3 le point de (C) où la tangente est parallèle à $x'Ox$, et par M_4 le point d'inflexion de (C) . Soit x_1 , x_2 , x_3 et x_4 les abscisses respectives de M_1 , M_2 , M_3 et M_4 .
Montrer que la suite (x_1 , x_2 , x_3 , x_4) est une suite géométrique .

27 Soit f la fonction numérique définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 + \ell n\, \dfrac{x}{x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O , \vec{i} , \vec{j})$, (unité 2 cm) .

1° **a)** Montrer que la courbe (C) admet pour asymptote oblique la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$.
b) Étudier la position de (C) par rapport à (D) .

2° Étudier les variations de f et tracer (C) .

3° Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $\alpha \in [0{,}8\,;\,0{,}9]$.

28 Le but de ce problème est l'étude de la fonction numérique f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ell n\, x}{1 + x^2}$.

A. On se propose d'étudier le signe de $g(x)$ où g est la fonction numérique définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ \ell n\, x$.

1° Montrer que g est strictement décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$ et que $g(x) > 1$ sur $]0\ ;\ 1]$.

2° Calculer $g(1)$ et $g(2)$.

3° Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ et un seul tel que $g(\alpha) = 0$. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près .

B. 1° a) Exprimer la fonction dérivée f' de f à l'aide de la fonction g .

b) Étudier les variations de f .

Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.

2° Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Tracer la courbe (C) représentant f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité : 2 cm sur l'axe des x et 5 cm sur l'axe des ordonnées) .

29 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.

A. 1° Démontrer que f est une fonction paire . Étudier ses variations et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

2° a) Démontrer que $f(x)$ s'écrit sous la forme $f(x) = 1 + \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+2}$ où a et b sont deux réels à déterminer .

b) En déduire alors une primitive de f .

B. Soit F la fonction définie par $F(x) = x + \ell n \left| \dfrac{x-2}{x+2} \right|$.

1° Déterminer son ensemble de définition . Montrer que f est impaire et étudier ses variations .

2° Soit (C') la courbe représentative de F dans un nouveau repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Étudier les asymptotes de (C') . Préciser une équation de l'asymptote oblique et une équation de la tangente à (C') en O .

b) Calculer $F\left(\dfrac{3}{2}\right)$, $F\left(\dfrac{5}{2}\right)$, $F(4)$.

c) Tracer (C') .

3° Soit (D) la droite d'équation $y = x + m$ où m est un paramètre réel non nul . Démontrer que l'intersection de la droite (D) et de la courbe (C') comporte exactement deux points M_1 et M_2 . Calculer leurs abscisses x_1 et x_2 et vérifier que $x_1 \cdot x_2$ est indépendant de m .

30 **1°** Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x} - \ell n\,(1+x)$ et en déduire que $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$.

2° Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ell n\,(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Montrer que la fonction g est continue en 0 .

b) Montrer que la fonction g est dérivable en 0 et que $g'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

c) Étudier les variations de g et tracer sa courbe (C) dans un repère orthonormal $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.
En déduire que , pour tout $x > 0$, on a $g(x) < 1$.

3° (Pour la série sciences générales seulement).

a étant un réel strictement positif , on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et par la relation de récurrence , $u_{n+1} = \ell n\,(1 + u_n)$ pour tout entier n .

a) Montrer que tous les termes de (u_n) sont strictement positifs .

b) En utilisant le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer que cette suite est monotone décroissante .

c) Montrer que cette suite est convergente et calculer sa limite .

31 Soit f la fonction définie par $f(x) = \ell n\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

1° Déterminer le domaine de définition de f . Démontrer que f est impaire . Étudier les variations de f et tracer (C) .

2° Démontrer que f admet , sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, une fonction réciproque h dont on déterminera le domaine de définition .

3° Soit g la fonction définie par $g(x) = x - \ell n\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ et (C') sa courbe représentative dans le même repère .

a) Étudier les variations de g et tracer (C') .

b) Calculer l'aire du domaine plan limité par (C') , son asymptote oblique et les deux droites $x = 2$ et $x = 3$ et donner la réponse sous la forme $3\ell n\,\dfrac{a}{b}$.

(Utiliser la dérivée de la fonction Z telle que $Z(x) = (x+k)\,\ell n\,(x+k)$ où k est une constante) .

4° Les courbes (C) et (C') ont , dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$, un seul point d'intersection M . Déterminer l'équation de la droite (OM) et montrer que l'abscisse de M appartient à l'intervalle $]2\,;3[$ (utiliser la calculatrice) .

32 Soit f_m la fonction définie par $f_m(x) = \dfrac{\ell n\, mx}{x}$ où m est un paramètre réel strictement positif. On désigne par (C_m) la famille de courbes représentant f_m dans un repère orthonormal d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

1° Étudier les variations de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = \dfrac{\ell n\, x}{x}$ et tracer sa courbe (C_1).

2° Calculer l'aire du domaine plan limité par (C_1), $x'Ox$, le point $A\ (1\ ;\ 0)$ et la droite d'équation $x = e$.

3° Soit α un réel donné . Déterminer , suivant les valeurs de α , le nombre des racines de l'équation $\alpha x = \ell n\, x$.

4° **a)** Trouver , en fonction de m et t , l'équation de la tangente (T_m) à (C_m) au point de (C_m) d'abscisse t .

b) Démontrer que , lorsque m varie , t restant fixe , les droites (T_m) passent par le point fixe I_t de coordonnées $X = 2t$ et $Y = \dfrac{1}{t}$.

c) Montrer que , quelque soit t , le point I_t appartient à une hyperbole (H) à déterminer .

5° Soient m_1 et m_2 deux valeurs données de m . Pour tout $x > 0$, on note M_1 et M_2 les points des courbes (C_{m_1}) et (C_{m_2}) admettant x pour abscisse et l'on désigne par G le barycentre des points M_1 et M_2 affectés respectivement des coefficients 1 et 2 .
Montrer que lorsque m varie , le point G varie sur l'une des courbes (C_m) .

33 Soit la fonction définie sur l'intervalle $I =]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ell n\, x}{x} - 1$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\,)$, (unité : 2 cm)

1° **a)** Calculer les limites de f aux bornes de I .

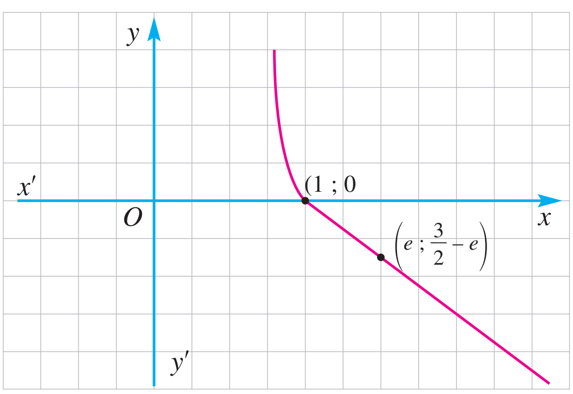
b) Déterminer les asymptotes de (C) .

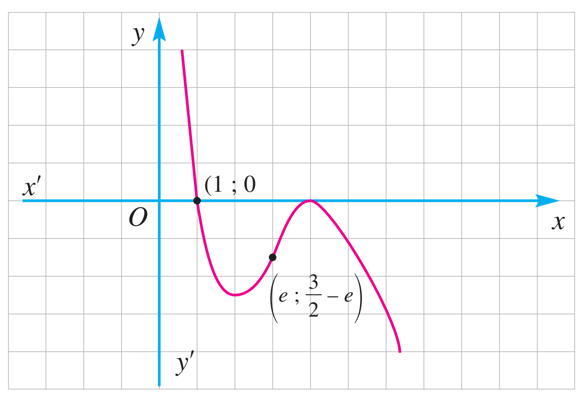
2° Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

3° Vérifier que la tangente (d) à (C) , au point $A\ (1\ ;\ -1)$, a pour équation $y = x - 2$.

4° Tracer la droite (d) et la courbe (C) .

5° L'une des deux courbes (G) et (H) tracées ci-dessous est la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f .





a) Laquelle de ces deux courbes représente-t-elle la fonction F ? Justifier la réponse .

b) Sans trouver l'expression de $F(x)$, calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) de la fonction f , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. Donner la réponse à 10^{-2} près .

Bac.

34 On considère les deux fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1+\ell n\, x}{x} + x - 1$ et $g(x) = x^2 - \ell n\, x$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,; \vec{i}\,, \vec{j}\,)$.

1° a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

b) Étudier les variations de g et en déduire le signe de $g(x)$ pour $x > 0$.

2° a) Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à (C) .

b) Étudier la position relative de (C) et (d) .

c) Trouver une autre asymptote à (C) .

3° Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ et dresser le tableau de variations de f .

4° Montrer que la tangente (D) à (C) au point A de (C) d'abscisse 1 est parallèle à (d) .

5° Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique α et vérifier que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.
(Dans la suite on prend $\alpha = 0{,}5$)

6° Tracer (D) , (d) et (C) .

7° a) Montrer que f admet dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ une fonction réciproque h .

b) Indiquer le domaine de définition de h et tracer sa courbe représentative (C') dans le repère $(O\,; \vec{i}\,, \vec{j}\,)$.

35 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x + 2\,\dfrac{\ell n\, x}{x}$. (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,; \vec{i}\,, \vec{j}\,)$; unité 2 cm .

1° a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et en donner une interprétation graphique .

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et vérifier que la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) .

c) Étudier , suivant les valeurs de x , la position relative de (C) et (d) .

2° Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction f' dérivée de f .

x	0		e		$e\sqrt{e}$		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert\ +\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$1-e^{-3}$	$\nearrow$	1

a) Montrer que f est strictement croissante sur son domaine de définition et dresser son tableau de variations .

b) Écrire une équation de la tangente (D) à (C) au point G d'abscisse e .

c) Démontrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I .

d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique α et vérifier que $0{,}75 < \alpha < 0{,}76$.

3° Tracer (D) , (d) et (C) .

36 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{(\ell n\, x)^2}{x}$.

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$. (unité : 1 cm)

1° Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Déduire une asymptote à (C) .

2° Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et vérifier que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) .

3° Le tableau ci-dessous donne les variations de la fonction φ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$\varphi(x) = x^2 + (\ell n\, x)^2 - 2\,\ell n\, x$.

Vérifier que $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$. En déduire que f est strictement croissante .

x	0		1		$+\infty$
$\varphi(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4° a) Démontrer que (D) est tangente à (C) au point $A\,(1\,;1)$ et que (D) est au-dessus de (C) pour $x \neq 1$.

b) Vérifier que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse e^2 est parallèle à (D) .

5° Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique α et vérifier que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

6° Tracer (D) , (T) et (C) .

7° On désigne par (C') la courbe représentative de la fonction réciproque f^{-1} de f .

Tracer (C') dans le mieme repère que (C) .

8° a) Calculer $\displaystyle\int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx$ en fonction de α .

b) Déduire , en fonction de α , l'aire du domaine plan limité par (C) , (C') et les deux droites d'équations

$x = 0$ et $y = 0$.

$\boxed{37}$ **A.** La fonction f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{2}\ell n\, x$.

1° a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Étudier le sens de variation de f (on ne demande pas la représentation graphique) .

2° a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0\,;+\infty[$ une solution unique ℓ et que $\ell \in \,]1\,;2[$.

b) Étudier le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

B. On se propose , dans cette partie , de calculer une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près .

1° Soit φ la fonction définie sur $[1\,;2]$ par $\varphi(x) = 2 - \dfrac{1}{2}\ell n\, x$.

a) Étudier les variations de φ . Prouver que l'image par φ de l'intervalle $[1\,;2]$ est un intervalle contenu dans $[1\,;2]$.

b) Montrer que ℓ est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

2° (Pour la série sciences générales seulement).

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \text{ , pour tout entier } n . \end{cases}$$

a) Démontrer que , pour tout entier n , on a : $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

b) Montrer que , pour tout réel x de $[1\,;2]$, on a :

$|\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

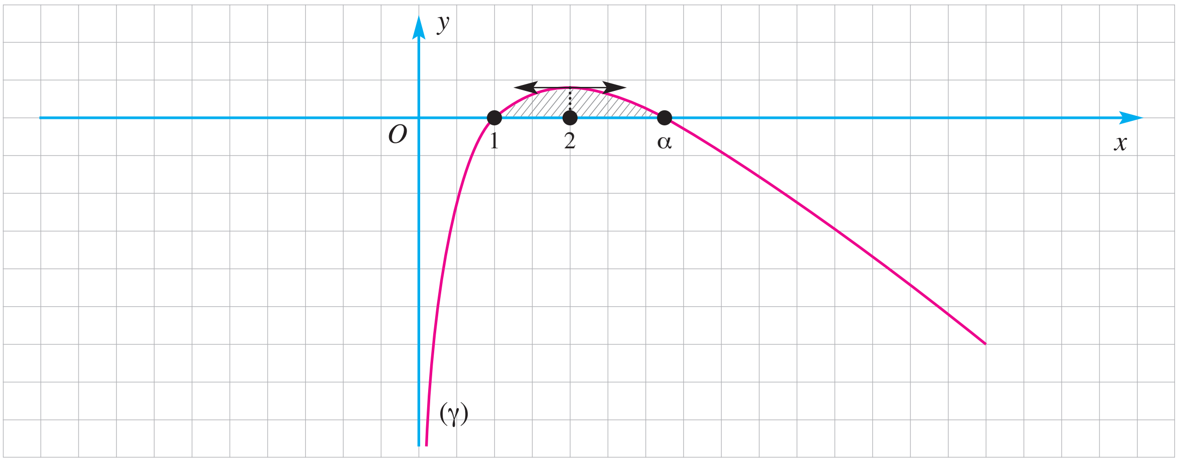
c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis , montrer que , pour tout entier n ,

$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ell|$.

d) Montrer que la suite (u_n) converge vers ℓ .

e) Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée à 10^{-2} près de ℓ . Donner un encadrement de u_{n_0} d'amplitude 10^{-2} .

$\boxed{38}$ **A.** La figure ci-dessous , montre la courbe représentative (λ) , dans un repère orthonormé , de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = 1 - x + 2\ell n x$.



1° a) Montrer que $3{,}51 < \alpha < 3{,}52$.

b) Déterminer le maximum de $h(x)$.

2° a) À l'aide d'une intégration par parties , calculer $\int_1^{\alpha} \ell n\, x\, dx$ en fonction de α .

b) En déduire l'aire $S(\alpha)$ du domaine hachuré limité par (λ) et l'axe des abscisses .

B. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1 + 2\ell n\, x}{x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1° a) Déterminer le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses .

b) Montrer que les axes du repère sont asymptotes à (C) .

2° a) Dresser le tableau de variations de f et montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$.

b) Tracer (C) .

3° a) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[1\,;+\infty[$ admet une fonction réciproque f^{-1} .

b) Déterminer le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f^{-1} .

c) Résoudre l'inéquation $f^{-1}(x) > \alpha$.

C. Soit (I_n) la suite définie , pour $n \geqslant 4$, par $I_n = \int_n^{n+1} f(x)\, dx$.

1° Démontrer que , pour tout x dans l'intervalle $[4\,;+\infty[$, $0 \leq f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

2° En déduire que , pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $0 \leqslant I_n \leqslant \ell n\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

3° Déterminer la limite de la suite (I_n) . **Bac. (SG)**

39 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ell n\, x}{\sqrt{x}} + 1 - x$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1° a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et en déduire une asymptote à (C) .

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à (C) .

c) Étudier la position relative de (C) et (d) .

2° Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = 2 - \ell n\, x - 2x\sqrt{x}$.

a) Démontrer que g est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

b) Vérifier que $g(1) = 0$ et déduire le signe de $g(x)$.

3° a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

4° a) Trouver les coordonnées de A de (C) où la tangente (T) est parallèle à (d) .

b) Tracer (d) , (T) et (C) dans $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

5° Calculer l'aire du domaine plan limité par (C) , la droite (d) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

6° a) Montrer que f admet sur $[1\,;+\infty[$ une fonction réciproque h et donner son domaine de définition .

b) Soit (C_1) la courbe représentative de h , montrer que (T) est tangente à (C_1) au point d'ordonnée e^2 et tracer (C_1) dans $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

7° On définit une suite (U_n) par son premier terme $U_0 > 1$ et pour tout entier naturel n ,
$U_{n+1} = U_n + f(U_n)$.

a) Démontrer , par récurrence , que pour tout entier naturel n , on a $U_n > 1$. (On pourra utiliser la courbe (C)).

b) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante .

c) Déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite .

Bac. (SG)

40 Soit f la fonction définie , sur $\left]\frac{1}{e} \,;\, +\infty\right[$, par $f(x) = \dfrac{x}{1 + \ell n\, x}$ et l'on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$; (unité : 2 cm)

A. 1° Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2° Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

3° a) Démontrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion W d'abscisse e .

b) Écrire une équation de la tangente (d) à (C) au point W .

4° Étudier suivant les valeurs de x , la position relative de (C) et de la droite (D) d'équation $y = x$.

5° Tracer (d) , (D) et (C) .

B. Soit l'intervalle $I = [1\,;\,e]$.

1° a) Démontrer que $f(I)$ est inclus dans I .

b) Étudier le signe de $f'(x) - \dfrac{1}{4}$ et en déduire que , pour tout x de I , $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

c) Démontrr que , pour tout x de I , on a : $\left|f(x) - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{4}\left|x - 1\right|$.

2° Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$, $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Démontrer par récurrence sur n que U_n appartient à I .

b) Démontrer que $\left|U_{n+1} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{4}\left|U_n - 1\right|$.

c) Démontrer que $\left|U_n - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$ et en déduire la limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$. **Bac. (SG)**

41 **A-** Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x + \ell n\, x$.

1° Calculer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2° Dresser le tableau de variations de g .

3° Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et vérifier que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

4° Déterminer suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$.

B- On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\,(2\ell n\, x + x - 2)$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1° Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et déterminer $f(e)$.

2° Démontrer que $f(\alpha) = -\alpha(\alpha + 2)$.

3° Vérifier que $f'(x) = 2g(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

4° Tracer (C) . (on prendra $\alpha = 0{,}55$) .

5° Utiliser une intégration par parties pour calculer $\displaystyle\int_{0{,}5}^{1} x\,\ell n\, x dx$ et déduire l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0{,}5$ et $x = 1$.

6° La courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse 1,37 .
On désigne par F une primitive de f sur $]0;+\infty[$, déterminer suivant les valeurs de x, les variations de F.
Bac.

42 Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{1}{x\,\ell n\,x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1° Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et en déduire une asymptote à (C) .

2° Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à (d) .

3° Calculer $f'(x)$ et montrer que f est strictement croissante .

Dresser le tableau de variations de f .

4° Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique α et vérifier que $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$.

5° Tracer (d) et (C).

6° a) Calculer l'aire $A(t)$ du domaine limité par la courbe (C) , la droite (d) et les deux droites d'équations $x = e$ et $x = t$ où $t > e$.

b) Montrer que pour tout $t > e$, on a $A(t) < t$.

Bac.

43 Soit f la fonction définie , sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1+\ell n\,x}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1° Démontrer que la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à (C) .

2° a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et démontrer que la droite (d) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$ est une asymptote à (C) .

b) Déterminer les coordonnées de E , point d'intersection de la droite (d) et de la courbe (C) .

3° Vérifier que $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2\,\ell n\,x}{2x^2}$.

4° Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction h définie par : $h(x) = x^2 - 2\,\ell n\,x$.

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

a) Vérifier que f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

b) Soit W le point de (C) d'abscisse 1 .

Écrire une équation de la tangente (D) à (C) au point W .

5° Tracer la courbe (C) et les droites (d) et (D) et placer les points E et W .

6° Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'asymptote (d) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Bac.

44 Soit f la fonction définie , sur $]0\,;+\infty[$, par : $f(x)=(\ell nx)^2+2\ell nx-3$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1° a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et en déduire une asymptote à (C).

2° Déterminer les abscisses des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses .

3° a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

b) Vérifier que $f''(x)=\dfrac{-2\ell nx}{x^2}$; montrer que (C) admet un point d'inflexion I et écrire une équation de la tangente (d) à (C) en I .

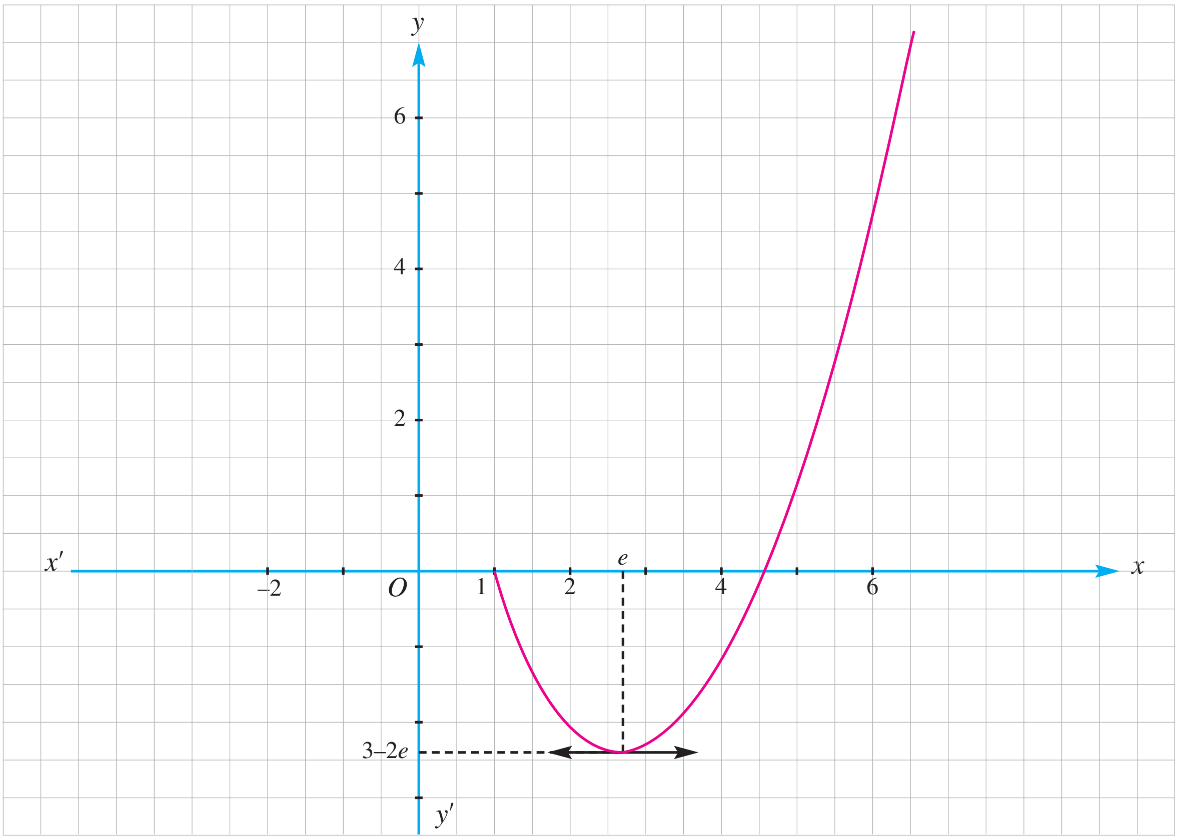
4° Tracer la droite (d) et la courbe (C).

5° a) Démontrer que la fonction f admet sur $[1\,;+\infty[$ une fonction réciproque g et déterminer le domaine de définition de g .

b) Vérifier que $A(5\,;e^2)$ est un point de la courbe représentative (G) de g et écrire une équation de la tangente à (G) en A .

6° Déterminer graphiquement , suivant les valeurs du réel m , le nombre des racines de l'équation $(\ell nx)^2+2\ell nx=m$.

7° La courbe (T) ci-dessous est la courbe représentative , sur $[1\,;+\infty[$, d'une primitive F de la fonction f .



Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et x = e .

Bac. (SG)

45 On considère les deux fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 2x + \dfrac{1 - \ell n\, x}{x}$ et $g(x) = 2x^2 - 2 + \ell n\, x$ et on désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

A- 1° Montrer que g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2° Calculer $g(1)$ et déduire,suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$.

B- 1° **a)** Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et déduire une asymptote à (C) .

b) Prouver que la droite (d) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à (C) et étudier , suivant les valeurs de x , la position relative de (C) et (d) .

2° Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

3° Dresser le tableau de variations de f .

4° Tracer (d) et (C) dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

5° a) Montrer que f admet sur $]1\,;+\infty[$ une fonction réciproque h et préciser son domaine de définition .

b) Tracer la courbe (Γ) représentative de h dans le même repère que (C) .

c) Déterminer l'abscisse du point de (Γ) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$.

6° a) Pour tout entier naturel n , on pose $U_n = \displaystyle\int_{e^n}^{e^{n+1}} f(x) - 2x)\, dx$.

Calculer U_n et prouver que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison .

b) Soit A l'aire du domaine limité par (C) , (d) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

Vérifier que A , en unités d'aire , est égale à $U_0 - U_1$.

C- On définit sur $]0\,;+\infty[$ une fonction p par : $p(x) = x^2\,(1 + \ell n\, x) - 3x + 2$.

1° Montrer que p est prolongeable par continuité au point $x = 0$.

2° Démontrer que pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, on a $\dfrac{p(x)}{x} = f\left(\dfrac{1}{x}\right) - 3$ et prouver que $p(x) \geqslant 0$.

3° Préciser la valeur de x pour laquelle $p(x) = 0$.

Bac. (SG)

9 EXPONENTIELLES

Un peu d'histoire

Au cours du XVI^e^ siècle et au début du XVII^e^ siècle, les calculs auxquels devaient se livrer les astronomes étaient devenus d'une complexité effroyable. De nombreux efforts furent faits pour tenter d'alléger ce fardeau, et l'astronome ***Képler (1571-1630)*** *fit lui-même des tentatives dans ce sens.*
Une des idées directrices de ces tentatives de simplification est le remplacement des multiplications par des additions. C'est à ***John Neper,*** *mathématicien écossais* ***(1550-1617)****, qu'on attribue l'honneur d'avoir inventé les logarithmes. La découverte de* ***Neper*** *fut modifiée par* ***Briggs (1550-1630)*** *et* ***Wright (1560-1615)*** *qui confectionnèrent des tables de logarithmes décimaux.*
*La nécessité de simplifier les calculs était si vivement ressentie que la découverte se répandit avec une grande rapidité; elle donna lieu à l'invention, par des mathématiciens anglais, de la règle à calculs [****Gunta (1581-1626)*** *et* ***Wingate (1596-1657)****].*
Comme souvent, l'introduction de cette nouvelle technique de calcul déboucha sur des études théoriques [citons, par exemple, ***Mercator (1620-1687)*** *et* ***Newton (1642-1727)****] qui précisèrent les notions de fonctions logarithmes, puis celles de fonctions exponentielles.*
D'ailleurs, les mathématiciens, dès l'antiquité, ont utilisé les exposants pour l'écriture de grands nombres, mais la notation exponentielle n'a été introduite qu'au XVI^e^ siècle.
*C'est au XVIII^e^ siècle, après la mise en place du concept de fonction, qu'****Euler (1707-1783)*** *définit clairement les fonctions exponentielles et puissances.*
Ces fonctions sont depuis très utilisées, car elles décrivent et permettent d'interpréter de nombreux phénomènes dans des domaines variés : physique, chimie, biologie, démographie, économie, etc ...

PLAN DU CHAPITRE

«Et tout croît , et tout monte.»

Arthur RIMBAUD

Activité 1

Le but de cette activité est la résolution de l'équation $\ell n\ y = x$ où y est l'inconnue et x un réel donné .

1° La solution y peut-elle être négative ou nulle ?

2° Pour tout réel x , la solution y de cette équation est-elle unique dans $]0\ ;\ +\infty[$? Justifier.

3° Résoudre les équations suivantes sans utiliser la calculatrice.

a) $\ell n\ y = 0$; **b)** $\ell n\ y = 1$; **c)** $\ell n\ y = -1$

d) $\ell n\ y = 3$; **e)** $\ell n\ y = -3$; **f)** $\ell n\ y = \frac{1}{3}$.

Sous quelle forme se présente chacune de ces solutions ?

Activité 2

Sur la calculatrice se trouve la touche $\boxed{e^x}$. Cette notation se lit **«exponentielle»** .

Par exemple : e^0 : $\boxed{\textbf{shift}}$ $\boxed{\mathbf{0}}$ $\boxed{=}$ 1

e^1 : $\boxed{\ell n}$ $\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{=}$ 2,718281828

1° a) Calculer e^2 , e^3 et e^5 .

b) Vérifier que $e^5 = e^2 \times e^3$.

2° a) Calculer e^{-2} , e^{-1} , $e^{-0,5}$, e^2 , e^3 , e^4 .

Obtient-on toujours une valeur ?

b) Que semble être le domaine de définition de la fonction $x \longmapsto e^x$?

3° a) Compléter le tableau suivant.

x	-2	-1	$-0,5$	0	1	2	3	3,5	10	12
e^x										

b) Que semble être le sens de variation de la fonction $x \longmapsto e^x$?

A Exponentielle de base *e* (népérienne)

1 DÉFINITION

La fonction ℓn est continue et strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$ dont l'image est $]-\infty\ ;+\infty[$. Elle définit donc une bijection de $]0\ ;+\infty[$ sur $]-\infty\ ;+\infty[$ et admet une fonction réciproque appelée **fonction exponentielle népérienne** (de base e) , notée *exp*.

$\ell n :]0\ ;+\infty[\longrightarrow]-\infty\ ;+\infty[$

$exp :]-\infty\ ;+\infty[\longrightarrow]0\ ;+\infty[$

Notation

On déduit de la définition que, pour tout x de $\mathbb{R}$ et pour tout y de $\mathbb{R}_+^*$,

$$\boxed{x = \ell n\, y \text{ équivaut à } y = exp(x) \text{ ou } y = e^x \text{ (car } x = \ell n\, e^x)}$$

Conséquences de la définition

- L'ensemble de définiton de la fonction $x \longmapsto e^x$ est $]-\infty\ ;+\infty[$.
- Pour tout réel x , $e^x > 0$.
- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

x	0	$+\infty$
$\ell n\, x$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	0 ↗	$+\infty$

On déduit de ces deux tableaux que :

* Comme la fonction ℓn est continue et strictement croissante, alors sa fonction réciproque $x \longmapsto e^x$ est aussi continue et strictement croissante.

* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

$$\boxed{x = \ell n\, y \text{ équivaut à } y = e^x \text{ , d'où } e^{\ell n y} = y \text{ pour tout } y \text{ de }]0\ ;+\infty[\ .}$$

2 RÈGLES DE CALCUL

1° Exponentielle d'une somme

Soit x et x' deux réels quelconques.

On a : $x = \ell n\,(e^x)$ et $x' = \ell n\,(e^{x'})$, d'où :

$x + x' = \ell n\,(e^x) + \ell n\,(e^{x'}) = \ell n\,(e^x \,.\, e^{x'})$. Par suite :

$$\boxed{\boldsymbol{e^{x+x'} = e^x \,.\, e^{x'}}}$$

2° Exponentielle d'une différence

Soit x et x' deux réels quelconques .

On a : $x = \ell n\,(e^x)$ et $x' = \ell n\,(e^{x'})$, d'où :

$x - x' = \ell n\,(e^x) - \ell n\,(e^{x'}) = \ell n\left(\dfrac{e^x}{e^{x'}}\right)$. Par suite : $\boxed{\boldsymbol{e^{x-x'} = \dfrac{e^x}{e^{x'}}}}$

En particulier $e^{-x} = e^{0-x} = \dfrac{e^0}{e^x} = \dfrac{1}{e^x}$

$$\boxed{\boldsymbol{e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}}}$$

3° Exponentielle du produit d'un réel par un rationnel

Soit x un réel et r un rationnel .

On a : $x = \ell n\,(e^x)$, alors $rx = r\ \ell n\,(e^x) = \ \ell n\left[(e^x)^r\right]$.

Par suite : $\boxed{\boldsymbol{e^{rx} = (e^x)^r}}$

EXEMPLE

1. $e^2 \,.\, e^3 = e^5$ et $\dfrac{e^7}{e^2} = e^5$.

2. $e^{\ell n\, 3 + \frac{1}{5}} = e^{\ell n 3} \,.\, e^{\frac{1}{5}} = 3\,\sqrt[5]{e}$.

3. $e^{2x} = (e^x)^2$; $e^{3x} = (e^x)^3$.

4. $\dfrac{e^{3x+4}}{e^{x+2}} = e^{3x+4-x-2} = e^{2x+2} = e^{2\,(x+1)} = (e^{x+1})^2$.

4° Egalités et inégalités

La fonction exponentielle népérienne $(x \longmapsto e^x)$, étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors pour tous réels a et b ,

$$\boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{e^a = e^b \text{ équivaut à } a = b} \\ \boldsymbol{e^a > e^b \text{ équivaut à } a > b} \\ \boldsymbol{e^a < e^b \text{ équivaut à } a < b} \end{array}}$$

EXEMPLES

1. Soit à résoudre $e^{3x+2} = e^5$.

Cette équation a un sens pour tout réel x et équivaut à $3x + 2 = 5$, soit $x = 1$.

2. Soit à résoudre $e^x + 3e^{-x} = 4$. Cette équation a un sens pour tout réel x et s'écrit $e^x + \frac{3}{e^x} = 4$ ou $(e^x)^2 - 4e^x + 3 = 0$.

En posant $e^x = X$ avec $X > 0$, elle devient :

$X^2 - 4X + 3 = 0$, de racines $X = 1$ et $X = 3$ qui sont acceptables .

Pour $X = 1$, on a $e^x = 1$ et $x = 0$.

Pour $X = 3$, on a $e^x = 3$ et $x = \ell n 3$.

3. Soit à résoudre l'inéquation $e^x - 4e^{-x} \geqslant 3$.

Cette inéquation a un sens pour tout réel x et s'écrit $e^x - \frac{4}{e^x} - 3 \geqslant 0$ ou $(e^x)^2 - 3e^x - 4 \geqslant 0$, soit $(e^x + 1)\,(e^x - 4) \geqslant 0$.

Comme $e^x + 1 > 0$, alors $e^x - 4 \geqslant 0$, $e^x \geqslant 4$ et $x \geqslant \ell n\, 4$.

3 DÉRIVÉE ET INTÉGRALE

1° Dérivée

La fonction exponentielle népérienne étant la réciproque de la fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a : $x = f(y) = \ell n\, y$ équivaut à $y = f^{-1}(x) = e^x$.

D'où : $\left[f^{-1}(x)\right]' = \dfrac{1}{f'(y)} = \dfrac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$.

Par suite : $\boxed{(e^x)' = e^x}$

Remarque

Si u est une fonction dérivable de x , la dérivée de la fonction composée $x \longmapsto e^{u(x)}$ est $u'(x) \,.\, e^{u(x)}$.

$$\boxed{(e^u)' = u'\, e^u}$$

EXEMPLE

Soit à trouver la dérivée de la fonction f telle que $f(x) = e^{x^2+3x}$.

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = (x^2 + 3x)'\, e^{x^2+3x} = (2x + 3)\, e^{x^2+3x}$.

2° Intégrale

Comme $u'\, e^u = (e^u)'$, alors e^u est une primitive de $u'\, e^u$ dans $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\int u'\, e^u\, dx = e^u + C \text{ , avec } C \text{ une constante réelle}}$$

ou $\int e^u\, du = e^u + C$ avec $du = u'\, dx$.

En particulier , $\boxed{\int e^x\, dx = e^x + C \text{ , avec } C \text{ une constante réelle}}$

EXEMPLES

1. $\int x\, e^{x^2-3}\, dx = \dfrac{1}{2} \int 2x\, e^{x^2-3}\, dx = \dfrac{1}{2}\, e^{x^2-3} + C$.

2. $\int \dfrac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}\, dx = -\int -\dfrac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}\, dx = -\, e^{\frac{1}{x}} + C$.

4 LIMITES

1° On a déjà vu que : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$

2° Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$

Quand x tend vers $+\infty$, e^x tend vers $+\infty$ et $\dfrac{e^x}{x}$ prend la forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$. La règle de l'Hôpital permet d'écrire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{1} = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

Remarque

Soit à calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha}$ avec α un rationnel positif .

En posant $y = \dfrac{e^x}{x^\alpha}$, alors $\ell n\, y = \ell n\ e^x - \ell n\ x^\alpha = x - \alpha\, \ell n\ x$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell n\, y = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x \left(1 - \alpha\, \dfrac{\ell n\, x}{x} \right) \right] = +\infty$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ell n\, x}{x} = 0$. Par suite :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \text{ , avec } \alpha \text{ un rationnel positif}}$$

3° Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^{\alpha} e^{x}$ avec α un rationnel positif

En posant $y = |x|^{\alpha} e^{x}$, alors $\ell n\, y = \ell n\, (|x|^{\alpha} e^{x}) = \alpha\, \ell n\, |x| + x$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \ell n\, y = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x \left(1 + \alpha \dfrac{\ell n\, |x|}{x} \right) \right] = -\infty$, car

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ell n\, |x|}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[- \dfrac{\ell n\, (-x)}{(-x)} \right] = 0$.

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} |x|^{\alpha} e^{x} = 0 \text{ , avec } \alpha \text{ un rationnel positif}}$$

En particulier , pour $\alpha = 1$, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} |x|\, e^{x} = 0}$

Remarque

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{\alpha}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^{\alpha} e^{x} = 0$ (α rationnel positif) , on dit que l'exponentielle (e^{x}) **"l'emporte"** sur la puissance (x^{α}) pour un quotient ou un produit .

4° Calcul de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - 1}{x}$

Quand $x \longrightarrow 0$, $e^{x} - 1 \longrightarrow 0$ et $\dfrac{e^{x} - 1}{x}$ prend la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. La règle de l'Hôpital permet d'écrire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x}}{1} = 1$.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1}$$

5 ÉTUDE DE LA FONCTION $x \longmapsto e^{x}$

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O , \vec{i} , \vec{j})$.

• f est définie , continue et dérivable sur $]-\infty\, ; +\infty[$.

• $f'(x) = e^{x} > 0$; f est donc strictement croissante .

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$. La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des x) est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.

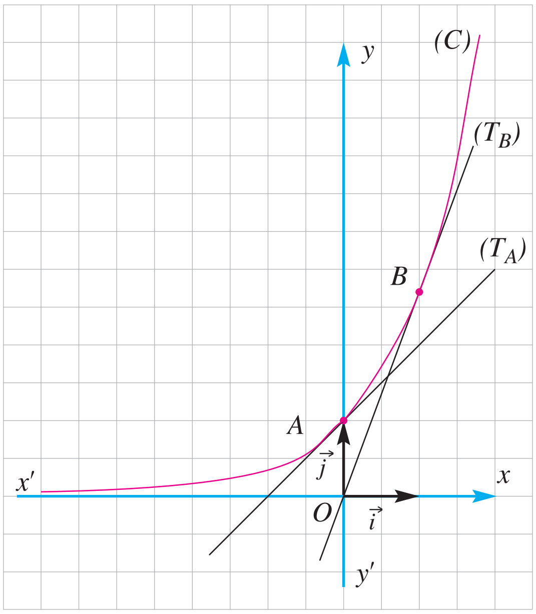
• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$.

La courbe (C) admet donc , en $+\infty$, une direction asymptotique verticale ou une branche parabolique de direction $y'Oy$.

• Tableau de variation .

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

(C) passe par les points $A\ (0\ ;\ 1)$ et $B\ (1\ ;\ e)$.



Remarques

• La fonction $f : x \longmapsto e^x$ étant la réciproque de la fonction ℓn , sa courbe représentative (C) est le symétrique de celle de ℓn par rapport à la première bissectrice en repère orthonormal .

• Au point $A\ (0\ ;\ 1)$, la courbe (C) admet une tangente (T_A) de cœfficient directeur $f'(0) = e^0 = 1$ et d'équation $y = x + 1$.

• Au point $B\ (1\ ;\ e)$, la courbe (C) admet une tangente (T_B) d'équation $y = ex$ qui passe par l'origine O du repère .

• Graphiquement , la courbe (C) est au-dessus de la tangente (T_A) , c'est-à-dire pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$. Comme $x + 1 > x$, alors :

$$\boxed{\textbf{Pour tout } x \textbf{ de } \mathbb{R} \textbf{ , } e^x > x}$$

B Exponentielle de base *a* ($a > 0$, $a \neq 1$)

1 DÉFINITION

La fonction $\log_a$ est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ dont l'image est $\mathbb{R}$. Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ et admet une fonction réciproque appelée fonction exponentielle de base a , notée exp_a .

On a : $\log_a :]0\ ;\ \infty[\longrightarrow]-\infty\ ;\ +\infty[$

$\qquad exp_a :]-\infty\ ;\ +\infty[\longrightarrow]0\ ;\ +\infty[$

Pour tout x de $\mathbb{R}$ et pour tout y de $\mathbb{R}_+^*$,

$$\boxed{x = \log_a y \textbf{ équivaut à } y = exp_a\,(x) \textbf{ ou } y = a^x \textbf{ (car } x = \log_a a^x\textbf{)}}$$

Remarque

Pour tout x de $\mathbb{R}$ et pour tout y de $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$y = a^x$ équivaut à $x = \log_a y = \dfrac{\ell n\, y}{\ell n\, a}$, soit $x\ \ell n\, a = \ell n\, y$ et $y = e^{x\ \ell n\, a}$.

D'où : $\boxed{\boldsymbol{a^x = e^{x \ell n\, a}} \textbf{ pour tout } \boldsymbol{x} \textbf{ de } \mathbb{R} \textbf{ avec } \boldsymbol{a > 0} \textbf{ et } \boldsymbol{a \neq 1}}$

2 PROPRIÉTÉS

Toutes les propriétés suivantes se déduisent de la formule $a^x = e^{x\ell n\, a}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

1° Règles de calcul .

- $a^1 = a$ et $a^0 = 1$.
- $a^x > 0$, pour tout x de $\mathbb{R}$.
- $a^{x+x'} = a^x \times a^{x'}$.
- $a^{x-x'} = \dfrac{a^x}{a^{x'}}$ et $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.
- $(a^x)^{x'} = a^{xx'}$.

2° Limites .

- Pour $a > 1$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$ avec $\alpha > 0$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha\, a^x = 0$ avec $\alpha > 0$.

- Pour $0 < a < 1$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha\, a^x = 0$ avec $\alpha > 0$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a^x}{|x|^\alpha} = +\infty$ avec $\alpha > 0$.

3° Dérivées et intégrales .

- $(a^x)' = (e^{x\ell n a})' = a^x\ \ell n\, a$.
- $(a^u)' = u'\ a^u\ \ell n\, a$ avec u une fonction dérivable de x .
- $\displaystyle\int a^x\, dx = \frac{1}{\ell n\, a}\ a^x + C$ où C est une constante réelle .
- $\displaystyle\int u'\ a^u\, dx = \frac{1}{\ell n\, a}\ a^u + C$ où C est une constante réelle .

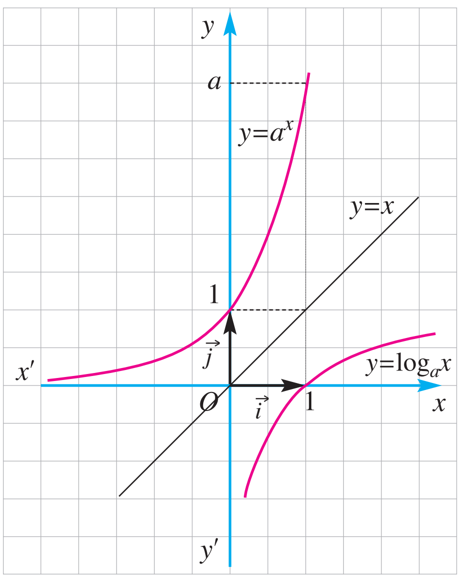
ou $\displaystyle\int a^u\, du = \frac{1}{\ell n\, a}\ a^u + C$ avec $du = u'dx$.

3 COURBE REPRÉSENTATIVE DE LA FONCTION $x \longmapsto a^x$ DANS UN REPÈRE ORTHONORMAL

Dans ce qui suit figurent les tableaux qui résument les variations de la fonction $x \longmapsto a^x$ et les courbes représentant cette fonction .

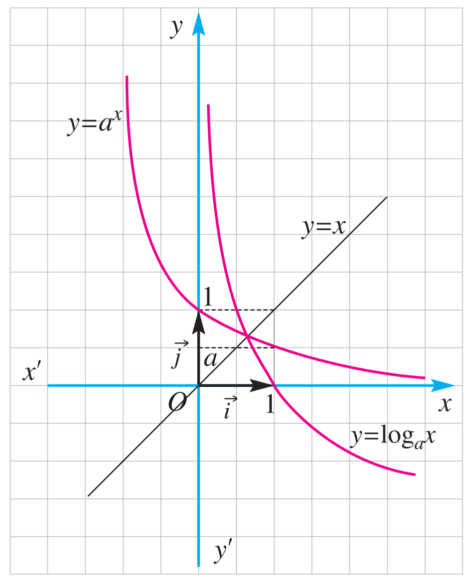
$a > 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$(a^x)'$	$+$	
a^x	$0 \nearrow$	$+\infty$



$0 < a < 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$(a^x)'$	$-$	
a^x	$+\infty \searrow$	0



C Fonction puissance $x \longmapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

1 DÉFINITION

La fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\boldsymbol{x^\alpha = e^{\alpha \ell n x}}$.

• Elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ étant la composée de deux fonctions continues .

• Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ étant la composée de deux fonctions dérivables , alors :

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ell n x})' = \frac{\alpha}{x}\, e^{\alpha \ell n x} = \frac{\alpha}{x}\, x^\alpha = \alpha\, x^{\alpha-1} .$$

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}}$$

Il en résulte que la **fonction puissance** est **croissante** lorsque $\boldsymbol{\alpha > 0}$ et **décroissante** lorsque $\boldsymbol{\alpha < 0}$ **.**

Pour $\boldsymbol{\alpha = 0}$, c'est la **fonction constante** $\boldsymbol{x \longmapsto 1}$ **.**

2 LIMITES

1° Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$ et si $\alpha < 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$.

En effet , $x^\alpha = e^{\alpha \ell n x}$ et les résultats découlent de la fonction $x \longmapsto e^x$.

2° Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$ et si $\alpha < 0$ $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty$.

En effet , $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell n\, x = -\infty$ et les résultats de ces limites sont encore ramenés aux limites de $x \longmapsto e^x$.

3° Si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{x} = +\infty$ et si $0 < \alpha < 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{x} = 0$.

Ces résultats sont déduits de a) , en remarquant que $\dfrac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1}$.

On en déduit que :

• Pour $\alpha > 1$, la courbe représentative de $x \longmapsto x^\alpha$ a une direction asymptotique verticale .

• Pour $0 < \alpha < 1$, la direction asymptotique est horizontale .

3 COURBE REPRÉSENTATIVE

1° On note (C_α) la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x^\alpha$.
Cette courbe passe par le point A (1 ; 1) et admet en ce point une tangente de cœfficient directeur α et d'équation $y = \alpha x + 1 - \alpha$.

2° La fonction puissance admet comme tableau de variation :

$(\alpha > 0)$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	‖ 0	↗	$+\infty$

$(\alpha < 0)$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0

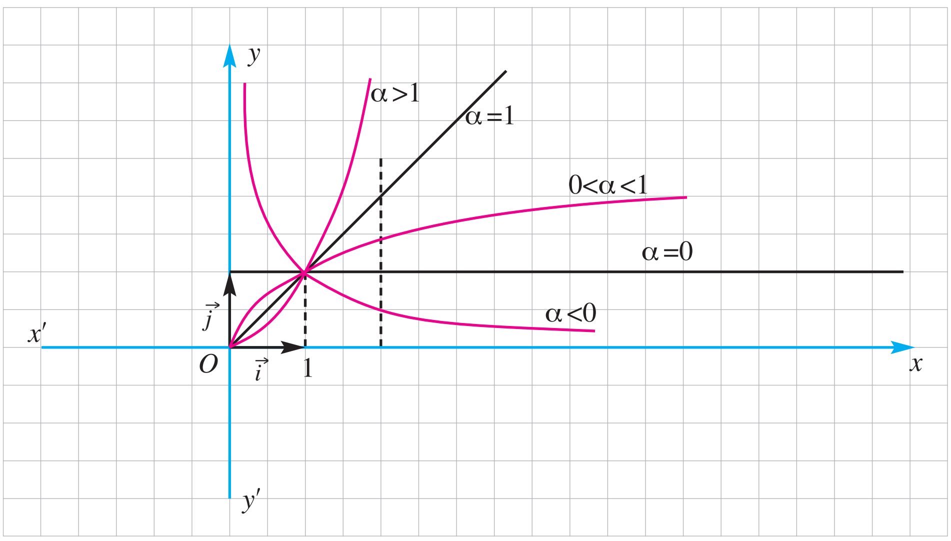
3° **a)** Lorsque $\alpha > 0$, la fonction se prolonge par continuité en 0 . On pose $f(0) = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha - 1} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

La courbe est tangente en O à $x'x$ lorsque $\alpha > 1$ et à $y'y$ lorsque $\alpha < 1$.

b) Lorsque $\alpha < 0$, la courbe (C_α) est asymptote aux deux axes de coordonnées .

4° La figure suivante donne les différentes formes possibles de la courbe (C_α) , suivant les valeurs de α .



Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par :

1° $f(x) = e^{-x}$ **2°** $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1} e^x$ **3°** $f(x) = e^x \left(\ell n\, x^2 + \dfrac{2}{x} \right)$

4° $f(x) = \dfrac{\ell n\,(1 + e^x)}{e^x}$ **5°** $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ **6°** $f(x) = \ell n\,(e^x - 1)$.

2 Résoudre , dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes .

1° $e^x = 3$ **2°** $e^x = -5$ **3°** $e^{4x+2} = e^2$ **4°** $e^{x^2} = 16$

5° $x\left(e^x - \frac{1}{2}\right) = 0$ **6°** $e^{x^2+2x} = \frac{1}{e^{-3}}$ **7°** $(e^x - 2)^2 = 9$ **8°** $e^x + 3e^{-x} = 4$

9° $\frac{e^{-x}}{e^{-x} - 3} = 2$ **10°** $2e^{2x} + 5e^x - 7 = 0$ **11°** $e^{3x} - 21e^x + 20 = 0$ **12°** $e^{2x-1} - \sqrt{e^{2x+2}} - 2e^3 = 0$

13° $4^{-x} = 8$ **14°** $3^x = 5^{2x+3}$ **15°** $2^x + \frac{6}{2^x} = 5$ **16°** $x^{\frac{1}{4}} = 2$

3 Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

1° Calculer $P(1)$ et résoudre $P(x) = 0$.

2° En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de chacune des équations suivantes :

a) $e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$

b) $(\ell n\, x)^3 - 2(\ell n\, x)^2 - 5\,\ell n\, x + 6 = 0$

c) $8^x - 2 \times 4^x - 5 \times 2^x + 6 = 0$

4 Résoudre , dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes .

1° $e^x < 5$ **2°** $e^{-x} \leqslant -2$ **3°** $e^{-x} \leqslant 2$ **4°** $e^x > -3$

5° $e^{-2x} > e^{x+5}$ **6°** $1 \leqslant e^{x^2} - 3$ **7°** $e^{2x} - 3e^x > -2$ **8°** $e^{2x} - 19 + 30e^{-x} \leqslant 0$

9° $\frac{e^x - 1}{e^x - 2} < \frac{e^x + 3}{e^x - 5}$ **10°** $-e^{4x} + 7e^{2x} - 12 > 0$ **11°** $3^x \geqslant 9$ **12°** $2^{-x} < 2^{2x+3}$

5 Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^2 - 5x + 4$.

1° Factoriser $P(x)$.

2° Résoudre , dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations suivantes :

a) $e^{2x} - 5e^x + 4 \geqslant 0$ **b)** $4^x - 5 \times 2^x < -4$

6 Résoudre , dans $\mathbb{R}^2$, chacun des systèmes suivants :

1° $\begin{cases} e^x + e^y = 4 \\ 3e^x - 2e^y = 2 \end{cases}$ **2°** $\begin{cases} e^x + e^y = 8 \\ e^{x+y} = 12 \end{cases}$ **3°** $\begin{cases} e^x = 3e^y \\ x + y = 2 - \ell n\, 3 \end{cases}$ **4°** $\begin{cases} e^x \cdot e^{2y} = 1 \\ 2xy = -1 \end{cases}$

5° $\begin{cases} e^x - 2e^y = 1 \\ e^{x-y} = 3 \end{cases}$ **6°** $\begin{cases} e^x \cdot e^y = 3 \\ \ell n\, x - \ell n\, y = \ell n\, 3 - \ell n\, 2 \end{cases}$ **7°** $\begin{cases} y - x = \frac{2}{e} \\ \ell n\, x^2 = -1 + \ell n\, y \end{cases}$ **8°** $\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 8 \\ 2^x + 2^y = 5\sqrt{2} \end{cases}$

7 Sans utiliser la calculatrice , trouver la valeur de :

1° $e^{\ell n 3}$ **2°** $e^{-\ell n 2}$ **3°** $e^{\ell n 5 - \ell n 2}$ **4°** $e^{\frac{1}{2}\ell n 4}$

5° $\ell n \sqrt{e^5}$ **6°** $e^{\ell n\, 2 + \ell n\, 3}$ **7°** $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$

8 Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1° $f(x) = e^{2x^2 - 3x + 4}$ **2°** $f(x) = 2x\, e^x$ **3°** $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

4° $f(x) = (x^2 + 2)\, e^{-3x}$ **5°** $f(x) = \ell n\,(e^x + 3)$ **6°** $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 2}$

9 Calculer les limites suivantes .

1° $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1 + x^2}$ **2°** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x + 3}{2e^x - 5}$ **3°** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - e^x)$ **4°** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} + e^x - 2}{e^x - 1}$

5° $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$ **6°** $\lim\limits_{x\to 0} x e^{\frac{1}{x}}$ **7°** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x + 3^x - 2}{x}$ **8°** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x + 9^x - 2}{3x}$

10 Calculer les intégrales suivantes .

1° $\int_0^2 e^{\frac{3x}{2}}\, dx$ **2°** $\int_0^{\sqrt{2}} x e^{x^2 - 2}\, dx$ **3°** $\int_0^1 \dfrac{e^x}{1 + e^x}\, dx$

4° $\int_{\frac{1}{2}}^1 \dfrac{e^x}{1 - e^x}\, dx$ **5°** $\int_1^4 \sqrt{x}\, e^{x\sqrt{x}}\, dx$ **6°** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\, e^{\cos^2 x}\, dx$

7° $\int_1^e \ell n x\, e^{x - x\,\ell n\, x}\, dx$ **8°** $\int 3^{-x}\, dx$ **9°** $\int \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx$

10° $\int_2^4 (1 + \ell n x) x^x\, dx$ (indication : $x^x = e^{x \ell n x}$) **11°)** $\int_0^2 (x - 2)\, e^{2x+1}\, dx$ (par parties) .

11 **1°** Déterminer les réels a , b et c pour que : $\dfrac{1}{t\,(t^2 - 5t + 4)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t - 1} + \dfrac{c}{t - 4}$.

2° En déduire $I(x) = \displaystyle\int \dfrac{dx}{e^{2x} - 5e^x + 4}$.

12 Déterminer les réels a et b pour que :

1° $\displaystyle\int \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2}\, e^x\, dx = \dfrac{ax + b}{x}\, e^x$. **2°** $\displaystyle\int \dfrac{ax + b}{\sqrt{x + 1}}\, e^x\, dx = \sqrt{x + 1}\, e^x$.

13 **1°** Résoudre le système $\begin{cases} x - 3y = 2\ell n\, 2 \\ x + y \ = 4\ \ell n\, 2 \end{cases}$

2° On pose $I = \displaystyle\int_0^{\ell n 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4}\, dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\ell n 16} \frac{1}{e^x + 4}\, dx$.

Calculer $I - 3\,J$ et $I + J$, en déduire les valeurs exactes de I et J .

14 Soit l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\, e^x\, dx$ où n est un entier naturel non nul .

1° Calculer I_1 .

2° En utilisant une intégration par parties , trouver une relation entre I_{n+1} et I_n .

3° En déduire la valeur de I_5 .

15 Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x + 1 + \dfrac{3}{e^x - 3}$.

1° Calculer $f(0)$, $f(\ell n\, 2)$, $f\left(\ell n\, \dfrac{1}{3}\right)$ et $f(-\,\ell n\, 2)$.

2° Quel est l'ensemble de définition de f ?

3° Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) représentant f dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ avec :

a) l'axe des abscisses ,

b) la droite d'équation $y = -\,2$.

16 Étudier chaque fonction f et tracer sa courbe représentative (C) . (domaine de définition , limites , dérivée et tableau de variation)

1° $f(x) = x\, e^x$

2° $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

3° $f(x) = e^x\, \ell n\, x$ et déduire celle de g telle que $g(x) = |f(x)|$

4° $f(x) = (1 - x)\, e^{-x}$

5° $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ et déduire celle de g telle que $g(x) = |f(x)|$.

17 Suivant les valeurs du paramètre réel m , déterminer le nombre de solutions de chacune des équations suivantes :

1° $e^{2x} - (m + 2)\, e^x + m = 0$ **2°** $\dfrac{m}{e^x} + x = 1$.

18 **1°** Étudier le sens de variation de la fonction f définie par $f(x) = x + \ell n\,(2 - e^x)$ et tracer sa courbe représentative (C) .

2° Déterminer l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\,,\,y)$ sont solutions de : $e^{y-x} + e^x > 2$.

19 Répondre par vrai ou faux .

1° La fonction $x \longmapsto e^x$ est définie pour tout x de $\mathbb{R}$.

2° $e^x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

3° $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

4° La fonction $x \longmapsto e^{\ell n\, x}$ est définie pour tout x de $\mathbb{R}$.

5° $\int e^x\, dx = e^x + C$ où C est une constante réelle .

6° $\int e^{x^2}\, \mathrm{dx} = e^{x^2} + C$ où C est une constante réelle .

7° 2 est solution de l'équation $e^{\ell n\, x} = 2$.

8° Si $e^x > e^2$, alors $x < 2$.

9° $e^{a+b} = e^a + e^b$ et $e^{a-b} = e^a - \mathrm{e}^b$.

10° La fonction $x \longmapsto e^x$ est la réciproque de $x \longmapsto \ell n\, x$.

11° La courbe représentant $x \longmapsto e^x$ est située au-dessous de l'axe des x .

12° $a^x = e^{x \ell n\, a}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

13° La fonction $x \longmapsto a^x$ est strictement croissante pour $0 < a < 1$.

14° $(e^x)' = e^x$ et $(a^x)' = a^x\, \ell n\, a$.

15° $(e^u)' = u'\, e^u$ et $(a^u)' = u'\, a^u\, \ell n\, a$.

Pour chercher

20 Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x(e^x - 2)$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

1° Étudier les variations de f et tracer (C) .

2° Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par (C) , $x'x$ et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = 0$.

3° Utiliser (C) pour étudier , suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre des solutions , dans $\mathbb{R}$, de l'équation : $e^{2x} - 2e^x - m = 0$ (E) .

4° Soit l'équaiton $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$. Déterminer sa solution réelle .

21 On considère la fonction f définie par $f(x) = (x + 1)e^{-x}$ et l'on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

1° Étudier les variations de f et tracer (C) .

2° a) Calculer , en fonction du réel m , l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par (C) , l'axe $x'Ox$, l'axe $y'Oy$ et la droite d'équation $y = m$ $(m > 0)$ (On pourrait déterminer les réels a et b pour que la fonction $x \longmapsto (ax + b)\, e^{-x}$ soit une primitive de f) .

b) Quelle est la limite de $\mathscr{A}$ lorsque m tend vers $+\infty$?

3° Utiliser la courbe (C) pour tracer la courbe (C') représentant la fonction g telle que $g(x) = |f(x)|$.

22 Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 1 - \dfrac{4e^x}{1 + e^x}$ et l'on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

1° Démontrer que le point $I\,(0\,;\,-1)$ est un centre de symétrie de (C) .

2° Démontrer que $f(x) - (x + 1)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$ et que $f(x) - (x - 3)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire les asymptotes de (C) .

3° Étudier les variations de f et tracer (C) .

4° **a)** Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par (C) , la droite d'équation $y = x - 3$ et les deux droites d'équations $x = 3$ et $x = m$ $(m > 3)$.

b) Calculer $\lim\limits_{m \to +\infty} \mathscr{A}$.

23 Soit la fonction $f : x \longmapsto 2x + \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

1° Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

2° Démontrer que le point $I\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C) .

3° Soit m un réel . Déterminer le nombre de racines de l'équation : $2xe^x + (1-m)\,e^x - 2x + m = 0$.

4° Soit α un réel strictement supérieur à 2 . Calculer l'aire S_α de la partie du plan comprise entre la courbe (C) et les droites d'équations respectives $y = 2x + 1$, $x = \ell n\, 2$ et $x = \ell n\, \alpha$.

Quelle est la limite de S_α lorsque α tend vers $+\infty$?

24 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$ et l'on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

1° Étudier les variations de f et tracer (C) .

2° Montrer que le point $I\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C) .

3° Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe $x'Ox$ et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

4° Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}\,dx$, où n est un entier naturel .

Vérifier que $u_n + u_{n+1} = \dfrac{e^n - 1}{n}$ et trouver la valeur de u_2 .

5° Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on précisera le domaine de définition et l'expression sous la forme $f^{-1}(x)$. Tracer sa courbe (C') dans le même repère .

25 On considère la fonction f_m définie par $f_m(x) = 1 + x + m\,(e^x - 1)$ où m est un paramètre réel et l'on désigne par (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

Partie A

On suppose dans cette partie que m est différent de 0 .

1° Démontrer que les courbes (C_m) ont un point commun que l'on déterminera .

2° Démontrer que , pour tout m différent de 0 , la droite (D_m) d'équation $y = x + 1 - m$ est asymptote à (C_m) .

3° Démontrer que , pour $m > 0$, la fonction f_m est strictement croissante et que , pour $m < 0$, la fonction f_m admet un maximum qui se déplace , lorsque m varie , sur une courbe fixe dont on déterminera l'équation .

4° La droite $x = 2$ coupe (C_m) en I . La tangente en I à (C_m) coupe son asymptote oblique (D_m) en J .
Déterminer l'ensemble décrit par J lorsque m varie .

Partie B

1° On fait $m = -1$.
Étudier les variations de la fonction f_{-1} définie par $f_{-1}(x) = x + 2 - e^x$ et tracer sa courbe (C_{-1}) .

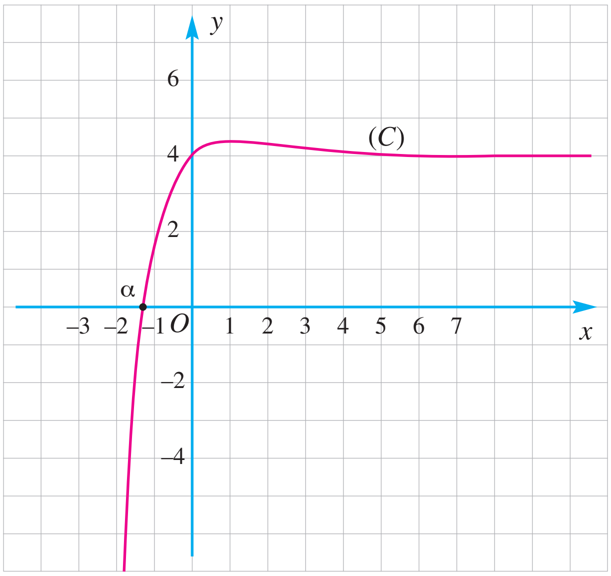
2° On fait $m = 1$.
Étudier les variations de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = x + e^x$ et tracer sa courbe (C_1) dans le même repère que (C_{-1}) . On précisera en particulier la tangente à (C_1) au point où (C_1) coupe $y'\,O\,y$.

3° Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par (C_1) , (C_{-1}) , $y'\,O\,y$ et la droite d'équation $x = \ell n\, 2$.

26 Dans le tableau suivant , une seule des réponses proposées à chaque question est correcte . Dire laquelle en justifiant .

N°	Questions	Réponses a	b	c
1	L'équation $e^{2x} + 3e^{x} - 4 = 0$ admet comme solution	$x = 1$	$x = 0$	$x = -4$
2	Si $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, alors $f'(x) =$	$\frac{1}{x}\, e^{\frac{1}{x}}$	$\frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}$	$-\frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}$
3	La fonction f telle que $f(x) = e^{\ell n\, x}$ est définie sur	$\mathbb{R}$	$]0\ ;+\infty[$	$\mathbb{R} - \{0\}$
4	x et y étant deux réels , $e^{x-y} =$	$e^{x} - e^{y}$	$\frac{e^{x}}{e^{y}}$	$e^{x}.\, e^{y}$
5	Sur $]0\ ;+\infty[$, une primitive de $f(x) = e^{x}\ell n\, x + \frac{1}{x}\, e^{x}$ est	$e^{x}\ \ell n\, x$	$\frac{\ell n x}{e^{x}}$	$\frac{1}{x}\, e^{x}\ \ell n\, x$
6	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ell n\,(e^{x} + 1)}{x} =$	0	1	e
7	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} =$	1	0	$+\infty$
8	$\lim\limits_{x \to -\infty} (x + e^{-x}) =$	$+\infty$	0	$-\infty$
9	L'équation $e^{2x} + e^{x} - 2 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$	deux racines distinctes	aucune racine	une seule racine
10	L'équation $e^{2x} + 2x - 1 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$	une seule racine	aucune racine	deux racines distinctes

27 **A -** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 + x\,e^{-x}$ et dont la courbe représentative (C) , dans un repère orthonormé est donnée par la figure ci-contre .
(C) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse α .



1° Utiliser (C) pour déterminer le signe de $f(x)$.

2° À l'aide d'une intégration par parties , calculer $\int_0^2 x\,e^{-x}\,dx$, puis calculer l'aire du domaine plan limité par l'axe des ordonnées , l'axe des abscisses , la courbe (C) et la droite d'équation $x = 2$.

B - Dans ce qui suit , on prend $\alpha = -1{,}2$.

On considère la fonction g , définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x - 3 - (x + 1)\,e^{-x}$ et on désigne par (G) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

1° Vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et déterminer $g(-2{,}5)$ à 10^{-2} près .

2° Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et vérifier que la droite (D) d'équation $y = 4x - 3$ est une asymptote à (G) .

3° Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de (G) avec son asymptote (D) et étudier la position relative de (G) et (D) .

4° **a)** Montrer que $g'(x) = f(x)$.
b) Dresser le tableau de variation de g .

5° Tracer (D) et (G) . **Bac.**

28 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x + 1} - 1$, et l'on désigne par (C) sa courbe représentative . (unité : 2 cm)

1° Vérifier que $f(x) + f(-x) = 0$ et déterminer le centre de symétrie de (C) .

2° Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et en déduire les asymptotes de (C) .

3° Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

4° Écrire une équation de la tangente (D) en O à (C) .

5° Tracer (D) et (C) .

6° Calculer l'aire A du domaine plan limité par (C) , l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

7° On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f dans $\mathbb{R}$.
a) Déterminer le domaine de définition de f^{-1} et trouver $f^{-1}(x)$.
b) Tracer la courbe (G) représentative de f^{-1} .
c) Résoudre l'inéquation $f^{-1}(x) > \ell n\, 2$.
d) Calculer l'aire B du domaine plan limité par (G) , l'axe des ordonnées et les deux droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.

29 Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \dfrac{4}{e^x - 1}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$.

1° a) Montrer que l'axe des ordonnées est une asymptote à (C) .

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe (C) .

c) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 3$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.

2° Démontrer que le point $S\,(0\,;1)$ est un centre de symétrie de (C) .

3° a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines α et β et vérifier que :
$1{,}7 < \alpha < 1{,}8$ et $-3{,}2 < \beta < -3{,}1$.

4° Tracer (d) , (D) et (C) .

5° a) Prouver que $f(x) = x + 3 - \dfrac{4e^x}{e^x - 1}$.

b) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

6° Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et g la fonction réciproque de h .
Démontrer que l'équation $h(x) = g(x)$ n'admet pas de racines .

Bac.

30 Soit la fonction définie par $f(x) = x + (x + 1)e^x$ et (C) sa courbe représentative .

1° a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et vérifier que la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) .

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection E de la courbe (C) avec son asymptote (d) .

c) Pour quelles valeurs de x la courbe (C) est-elle au-dessus de (d) ?

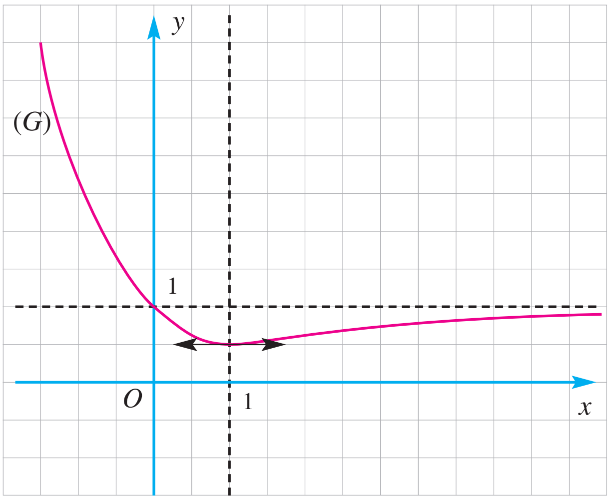
2° a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Calculer $f(-2)$ et donner la réponse sous forme décimale à 10^{-1} près .

3° La courbe (G) ci-contre est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f dans un repère orthonormé .

a) Justifier que la fonction f est strictement croissante .

b) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (G) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.



4° a) Écrire une équation de la tangente (D) à (C) au point A d'abscisse 0 .

b) Démontrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion d'abscisse 1 .

c) Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe (C) et sa tangente (D) dans un repère orthonormé .

31 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^x + 1$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (d) à (C) .

b) Étudier , suivant les valeurs de x , la position relative de (C) et (d) .

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et donner $f(2)$ sous forme décimale .

2° Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

3° Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion W dont on déterminera les coordonnées .

4° a) Tracer (d) et (C) .

b) Discuter graphiquement , suivant les valeurs du réel m , le nombre de solutions de l'équation $(m-1)e^{-x} = x - 1$.

5° a) Montrer que la fonction f admet sur $]0\ ;\ +\infty[$ une fonction réciproque g et tracer la courbe représentative (G) de g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Trouver l'aire du domaine plan limité par les deux courbes (C) et (G) .

Bac.

32 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ell n(1 + e^x) - x$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Démontrer que la droite (d) d'équation $y = -x$ est une asymptote à (C) à $-\infty$.

c) Étudier la position relative de (C) et (d) .

d) Démontrer que l'axe des abscisses est une asymptote à (C) à $+\infty$.

2° a) Montrer que , pour tout réel x , $f'(x) < 0$ et dresser le tableau de variations de f .

b) Tracer (d) et (C) . (On placera en particulier le point de (C) d'abscisse 0)

3° a) Montrer que f admet sur $\mathbb{R}$ une fonction réciproque g et indiquer son domaine de définition .

b) Tracer dans le même repère la courbe représentative (C') de la fonction g .

c) Résoudre l'inéquation $(E) : g(x) > \ell n\, 2$.

d) Trouver l'équation de la tangente à (C') au point de (C') d'abscisse $\ell n\, 2$.

e) Montrer que $g(x) = -\ell n(e^x - 1)$.

Retrouver alors la solution de l'inéquation (E) .

f) Les deux courbes (C) et (C') ont un point commun A .

Calculer les coordonnées de A .

33 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$.

1° a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

2° Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

3° Montrer que O est un point d'inflexion de (C) .

4° Écrire une équation de la tangente (T) en O à (C) .

5° Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) + 2x$.

a) Montrer que $h'(x) \geqslant 0$ pour tout réel x .

b) En déduire , suivant les valeurs de x , la position relative de (C) et (T) .

6° Tracer (T) et (C) .

7° Calculer l'aire du domaine plan limité par (C) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations : $x = 0$ et $x = \ell n3$.

8° a) Montrer que f admet sur l'intervalle $[\ell n2\,;+\infty[$, une fonction réciproque f^{-1} .

b) Montrer que l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$ admet une solution unique α et vérifier que $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$.

Bac.

34 **A -** On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = e^{-x} + 2x$.

1° Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$.

2° Étudier les variations de k .

3° En déduire que , pour tout réel x , $e^{-x} + 2x > 0$.

B - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$ et l'on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$.

1° a) Montrer que f est impaire .

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c) Vérifier que $f'(x) = e^{-x}(e^x - 1)^2$.

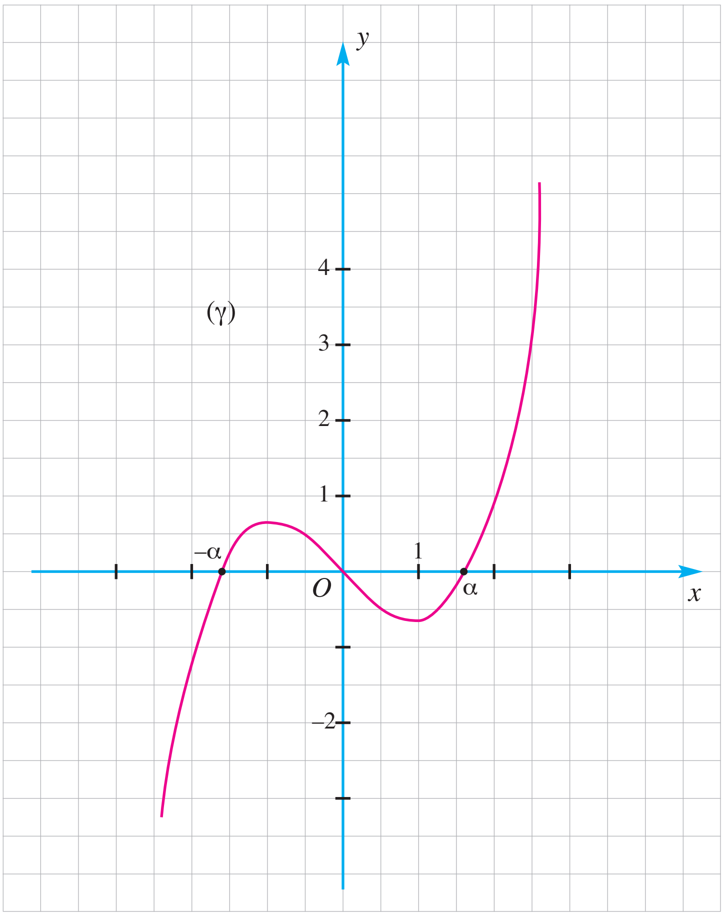
d) Dresser le tableau de variations de f .

2° Montrer que (C) admet un point d'inflexion et préciser la tangente à (C) en ce point .

3° La figure ci-contre montre la courbe représentative (γ) de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - e^{-x} - 3x$.

a) Montrer que $1,62 < \alpha < 1,63$.

b) En utilisant (γ) , montrer que la courbe (C) de f coupe la droite (d) d'équation $y = x$ en trois points dont on déterminera les abscisses .



4° a) Calculer $f(1)$ et $f(2)$.

b) Tracer (d) et (C) .

5° a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} et déterminer le domaine de définition de f^{-1} .

b) Déterminer les valeurs de x qui vérifient $1 < f^{-1}(x) < 2$.

c) Tracer la courbe représentative (C') de f^{-1} dans le repère $(O , \vec{i} , \vec{j})$.

6° Calculer , en fonction de α , l'aire du domaine plan limité par (C) et (C') .

C - On considère la suite (U_n) définie par $U_0 \in]0 ; \alpha[$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout n .

1° Démontrer par récurrence sur n que , pour tout n , $0 < U_n < \alpha$.

2° a) En remarquant que $f(x) < x$ pour tout x de l'intervalle $]0 ; \alpha[$, démontrer que la suite (U_n) est décroissante et déduire qu'elle est convergente .

b) Calculer la limite de (U_n) .

Bac. (SG)

35 **A -** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\,e^{-2x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1° a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et déduire une asymptote à (C) .

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

2° Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

3° a) Tracer la courbe (C) .

b) Déterminer , suivant les valeurs du réel m , le nombre de solutions de l'équation $me^{2x} - x^2 = 0$.

B - Soit (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $I_n = \int_0^1 x^n\,e^{-2x}\,dx$.

1° Démontrer que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

2° Démontrer que (I_n) est décroissante .

3° Déduire que (I_n) est convergente et préciser sa limite .

4° En utilisant une intégration par parties , démontrer que $I_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{e^2} + (n+1)I_n\right]$.

5° Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$h(x) = -\dfrac{1}{4}(2x+1)e^{-2x}$, calculer $h'(x)$ puis
calculer I_n .

6° Déduire l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

C - Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \ell n\left[f(x)\right]$.

1° Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et interpréter graphiquement le résultat .

2° Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et montrer que la courbe représentative de g admet une direction asymptotique .

3° Dresser le tableau de variations de g .

4° Tracer la courbe représentative de g dans un nouveau repère . **Bac. (SG)**

36 Soit f la fonction définie , sur $]-\infty\,;+\infty[$, par $f(x) = x + 2 - \dfrac{3}{1+e^x}$.

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1° a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; montrer que la droite (d_1) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à (C) et préciser la position relative de (d_1) et (C) .

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; montrer que la droite (d_2) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à (C) et préciser la position relative de (d_2) et (C) .

2° Démontrer que le point $I\left(0 \,;\, \dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C) .

3° Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty \,;\, +\infty[$ et dresser son tableau de variations .

4° Tracer (d_1) , (d_2) et (C) .

5° a) Vérifier que $f(x) = x + 2 - \dfrac{3e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

b) Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine limité par la courbe (C) , l'asymptote (d_2) et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$ où $\lambda > 0$ puis calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

6° On désigne par g la fonction réciproque de f , sur $]-\infty \,;\, +\infty[$; (G) est la courbe représentative de g .

a) Vérifier que $E(1+\ell n2 \,;\, \ell n2)$ est un point de (G) .

b) Calculer la pente de la tangente à (G) au point E .

Bac.

37 Soit f la fonction définie sur $]0 \,;\, +\infty[$ par $f(x) = 2x - 2 + \dfrac{1}{e^x - 1}$.

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O \,;\, \vec{i} \,,\, \vec{j})$.

1° a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et déduire une asymptote à (C) .

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = 2x - 2$ est une asymptote à (C)

c) Quelle est la position relative de (C) et (d) ?

2° a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{(e^x - 2)\,(2e^x - 1)}{(e^x - 1)^2}$.

b) Compléter le tableau de variations de f ci-contre .

x	0	$\ell n2$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$			

3° Tracer (d) et (C) .

4° Vérifier que $\dfrac{1}{e^x - 1} = \dfrac{e^x}{e^x - 1} - 1$ et calculer l'aire du domaine limité par (C) , la droite (d) et les deux droites d'équations $x = \ell n2$ et $x = \ell n3$.

5° Soit g la fonction définie sur $]0 \,;\, +\infty[$ par $g(x) = \ell n(f(x))$.

a) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

b) Dresser le tableau de variations de g .

c) Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet deux racines distinctes . **Bac.**

38 Soit f la fonction définie, sur $]0;+\infty[$, par $f(x)=\dfrac{1+\ell n\, x}{e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

La courbe (C_g) ci-contre est la courbe représentative , dans un repère orthonormé , de la fonction g définie , sur $]0\,;+\infty[$, par $g(x)=\dfrac{1}{x}-1-\ell n\, x$.

1° Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C_g) , l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 2$.

2° Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{e^x}$ et en déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .

3° Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et déterminer les asymptotes de la courbe (C) .

4° Dresser le tableau de variations de f .

5° Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

6° Trouver une équation de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $\dfrac{1}{e}$.

7° Tracer (C).

8° Discuter , suivant les valeurs du réel m , le nombre de solutions de l'équation $\ell n\, x = me^x - 1$. **Bac.**

39 On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{2x} + 2e^x - 2$.

A- 1° a) Résoudre l'équation $h(x) = 0$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$.

2° a) Dresser le tableau de variations de h .

b) Tracer la courbe représentative (H) de h dans un repère orthonormé .

c) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (H) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

B- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$g(x) = \dfrac{e^{2x} + 2}{e^x + 1}$ et f la fonction donnée par $f(x) = \ell n(g(x))$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un nouveau repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$. (unité graphique : 2 cm)

1° a) Montrer que f est définie pour tout réel x.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et en déduire une asymptote (d) à (C) .

2° a) Montrer que $f(x) = x + \ell n\left(\dfrac{1 + 2e^{-2x}}{1 + e^{-x}}\right)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et démontrer que la droite (d') d'équation $y = x$ est asymptote à (C) .

c) Étudier suivant les valeurs de x la position relative de (C) et (d') .

3° a) Montrer que $g'(x) = \dfrac{e^x\left(h(x)\right)}{\left(e^x + 1\right)^2}$.

b) Montrer que $f'(x)$ et $h(x)$ ont même signe et dresser le tableau de variations de f .

c) Trouver l'abscisse du point de la courbe (C) où la tangente à (C) est parallèle à (d') .

4° Tracer (d) , (d') et (C) .

C- On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$; (C') est la courbe représentative de f^{-1} .

1° Tracer (C') dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

2° Écrire une équation de la tangente à (C') au point d'abscisse $\ell n2$. **Bac. (SG)**

40 **A-** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+xe^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$. (unité : 2 cm) .

1° a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) .

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

2° a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f' et en déduire que $f'(x) > 0$.

c) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées .

d) Dresser le tableau de variations de f .

3° Déterminer les coordonnées du point A de la courbe (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (d) d'équation $y = x$.

4° Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une racine unique α et vérifier que $0{,}65 < \alpha < 0{,}66$.

5° Tracer (d) , (T) et (C) .

6° Calculer , en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'asymptote (d) et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

7° On désigne par g la fonction réciproque de f et par (G) sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

Préciser l'asymptote et la direction asymptotique de (G) et tracer (G) .

B- Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x + x^n e^{-x}$ (n est un entier naturel non nul) et soit la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_0^1 [f_n(x) - x]dx$.

1° Déterminer la valeur de U_1 .

2° Montrer que $0 \leqslant x^n e^{-x} \leqslant 1$ sur $[0\,;\,1]$ et en déduire que la suite (U_n) est bornée .

3° Démontrer que la suite (U_n) est décroissante . La suite (U_n) est-elle convergente ? Justifier .

Bac. (SG)

10 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Un peu d'histoire

Après l'introduction du calcul infinitésimal, l'analyse de certains phénomènes mécaniques et physiques faisant intervenir une fonction et ses dérivées aboutit à l'établissement d'équations différentielles.
Jaques Bernoulli (1654-1705) *est le premier à intégrer une équation différentielle.*
Pour résoudre certains problèmes astronomiques, ***Clairaut (1713-1765)*** *développe une méthode pour obtenir des solutions singulières.*
Euler (1707-1783)*, par l'intermédiaire de ses problèmes de mécanique et d'élasticité, étudie des équations du second ordre et des équations linéaires à coefficients constants.*
Vers la fin du XVIII^{e} siècle, les équations différentielles se détachent de leur contenu physique et deviennent un objet d'étude mathématique.
Augustin Louis Cauchy (1789-1857) *établit l'existence et l'unicité des solutions vérifiant certaines conditions initiales; mais la résolution des équations différentielles reste, encore de nos jours, l'objet d'étude de nombreux mathématiciens.*

PLAN DU CHAPITRE

COURS

EXERCICES ET PROBLÈMES

«L'équation de la pudeur des femmes est autrement difficile» .

André BRETON

1 DÉFINITION

Activité

Soit f la fonction définie par $y = f(x) = e^{3x}$.

- Calculer $y' = f'(x)$
- Quelle relation existe-t-il entre y' et y ?
- Les fonctions f_1 , f_2 , f_3 , et f_4 définies respectivement par $f_1(x) = 2\,e^{3x}$, $f_2(x) = -\,e^{3x}$, $f_3(x) = -5\,e^{3x}$ et $f_4(x) = e^{-3x}$ vérifient-elles la relation (E) : $y' - 3y = 0$?

Dans l'affirmative on dit que la fonction considérée est **une solution de (*E*)** .

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction n fois dévirables sur I .

1° On appelle équation différentielle d'ordre n toute relation entre la variable x , la fonction f telle que $y = f(x)$ et éventuellement ses dérivées successives y' , y'' , ... , $y^{(n)}$.
Cette équation s'écrit sous la forme $\varphi\,(x\,, y\,, y'\,, y''\,, \dots, y^{(n)}) = 0$ ou $\varphi\left(x\,,\, y\,,\, \dfrac{dy}{dx}\,,\, \dfrac{d^2y}{dx^2}\,,\, \dots\,,\, \dfrac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$.

2° On appelle **ordre** d'une équation différentielle le plus grand ordre de dérivées figurant dans cette équation .

EXEMPLES

1. $x\,y'' - 2y' + y - 5 = 0$	est une équation différentielle d'ordre 2 .
2. $y'' - 3x + 2 = 0$	est une équation différentielle d'ordre 2 .
3. $y' + 2y = 0$	est une équation différentielle du premier ordre ou d'ordre 1 .
4. $y - 2x + 1 = 0$	n'est pas une équation différentielle .

3° On appelle **solution** ou **intégrale** d'une équation différentielle toute fonction f telle que $y = f(x)$ vérifiant cette équation pour tout x de I .

EXEMPLE

La fonction $y = e^{x^2}$ est une solution de l'équation différentielle $y' - 2xy = 0$.

4° Résoudre ou **intégrer** une équation différentielle , sur I , c'est trouver toutes les fonctions dérivables sur I , solutions de cette équation .

EXEMPLE

Soit *(E)* l'équation différentielle $y' - 2x + 3 = 0$. $y = x^2 - 3x + c$, où c est une constante arbitraire , est une **solution générale** de *(E)* sur $\mathbb{R}$.

Si $y = 2$ pour $x = 1$, alors $2 = 1 - 3 + c$ donne $c = 4$ et par suite $y = x^2 - 3x + 4$ s'appelle **solution particulière** de *(E)* .

5° La courbe représentative d'une fonction f solution de l'équation différentiele s'appelle **courbe intégrale** de cette équation .

2 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Activité

Soit f la fonction définie par $y = f(x) = m\,x + 3$ où m est un paramètre réel .

- Calculer la dérivée y' par rapport à x .
- Déterminer une relation indépendante de m , entre x , y et y' .

I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Une équation linéaire du premier ordre , définie sur I , est de la forme : $\varphi(x\,,\,y\,,\,y') = 0$

où φ est une application de $I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (y et y' ne figurent qu'avec des exposants égaux à 1) .

1° Équation différentielle de la forme $y' = f(x)$.

La résolution de cette équation se ramène à la recherche des fonctions dont la dérivée est f . Ces fonctions sont donc les primitives de f sur I .

On note $y = \int f(x)\,dx$.

$$\boxed{y' = f(x) \text{ donne } y = \int f(x)\,dx}$$

EXEMPLES

1. Soit à résoudre l'équation différentielle $y' = 2x + 3$.
On a $y = \int (2x+3)\,dx$, d'où la solution générale $y = x^2 + 3x + c$ avec c une constante arbitraire .

2. Soit à trouver la solution de l'équation différentielle $y' - 3x^2 = 0$ satisfaisant à $y = -3$ pour $x = 1$.
On a $y' = 3x^2$ et $y = \int 3x^2\,dx = x^3 + c$.
La condition initiale donne $-3 = 1 + c$ et $c = -4$.
La solution particulière demandée est donc $y = x^3 - 4$.

3. Soit à trouver la solution de l'équation différentielle $y' - \cos x + \sin 2x = 0$ satisfaisant à $y = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ pour $x = \dfrac{\pi}{4}$.

On a $y' = \cos x - \sin 2x$ et $y = \int (\cos x - \sin 2x)\,dx$ soit $y = \sin x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + c$.

La condition initiale donne $\dfrac{5\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + c$ et $c = 2\sqrt{2}$.

La solution particulière demandée est donc $y = \sin x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + 2\sqrt{2}$.

2° Équation linéaire de la forme $y' + ay = b$ où a et b sont deux réels , a non nul .

L'équation linéaire $y' + ay = b$, où a et b sont deux réels donnés est dite à coefficients constants .

Si $b = 0$, elle est dite **sans second membre** ou **incomplète** .

Si $b \neq 0$, elle est dite **avec second membre** ou **complète** .

a) Étude de l'équation $y' + ay = 0$.

Soit à résoudre l'équation différentielle $y' + ay = 0$, où a est un réel donné . $y = 0$ est une solution particulière de cette équation .

Pour y non nul , l'équation $y' + ay = 0$ s'écrit $y' = -ay$ ou $\dfrac{y'}{y} = -a$

et $\displaystyle\int \frac{y'}{y}\,dx = \int -a\,dx$, soit $\ell n\,|y| = -ax + b$

$|y| = e^{-ax+b} = e^{b} \,.\, e^{-ax}$ et $y = \pm e^{b} \,.\, e^{-ax}$.

En posant $c = \pm e^{b}$ on obtient $y = c\,e^{-ax}$ qui est la solution générale .

$y' + ay = 0$ a pour solution générale $y = c\,e^{-ax}$

EXEMPLE

Soit (E) l'équation différentielle $y' + 3y = 0$.
Les solutions de (E) sont les fonctions f définies par $y = f(x) = c\,e^{-3x}$ avec c réel .
Il existe parmi toutes ces solutions , une seule fonction vérifiant la condition $f(0) = 4$, c'est la solution particulière $y = f(x) = 4e^{-3x}$.

b) Étude de l'équation $y' + ay = b$ (avec $a \neq 0$)

L'équation $y' + ay = b$ s'écrit aussi $y' + a\left(y - \dfrac{b}{a}\right) = 0$.

Elle se ramène au cas précédent en posant $z = y - \dfrac{b}{a}$, ce qui donne $z' = y'$ et $z' + az = 0$.

On a donc $z = c\,e^{-ax}$ et $y = c\,e^{-ax} + \dfrac{b}{a}$.

$y' + ay = b$ a pour solution générale $y = c\,e^{-ax} + \dfrac{b}{a}$

EXEMPLE

Soit à résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = 3$, et à déterminer l'équation de la courbe intégrale passant par le point $A(0\,;\,1)$.

L'équation donnée est de la forme $y' + ay = b$ avec $a = -2$ et $b = 3$. La solution générale s'écrit : $y = c\,e^{2x} - \dfrac{3}{2}$.

Sa courbe représentative passe par A si , et seulement si $1 = c - \dfrac{3}{2}$, soit $c = \dfrac{5}{2}$.

L'équation de cette courbe est donc $y = f(x) = \dfrac{5}{2}\,e^{2x} - \dfrac{3}{2}$.

3 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE AVEC SECOND MEMBRE DE LA FORME $y' + ay = f(x)$

Soit *(E)* l'équation différentielle avec second membre $y' + ay = f(x)$, où a est un réel non nul et f une fonction définie sur un intervalle I .

Pour résoudre *(E)* il faut :
déterminer une solution particulière g de *(E)* (la forme de cette solution sera indiquée à chaque fois) ,
déterminer la solution générale h , sur I , de l'équation *(E')* sans second membre $y' + ay = 0$ associée à *(E)* .

La fonction $g + h$ est la solution générale de *(E)*

EXEMPLE

Soit à résoudre l'équation différentielle *(E)* : $y' - y = x + 2$, sachant qu'une solution particulière est de la forme $z = g(x) = mx + n$.

On a $z' = m$, en remplaçant dans *(E)* on obtient : $z' - z = x + 2$ ou $-mx + m - n = x + 2$.

Par identification on trouve $m = -1$ et $n = -3$.
$z = -x - 3$ est donc une solution particulière de *(E)* .

L'équation sans second membre *(E')* : $y' - y = 0$ a pour solution générale $h(x) = c\, e^x$.

Par suite , $h(x) + g(x) = c\, e^x - x - 3$ est la solution générale de *(E)* .

4 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE À VARIABLES SÉPARABLES

C'est une équation qui peut s'écrire sous la forme $f(x)\, dx = g(y)\, dy$.
En intégrant , on obtient $\int f(x)\, dx = \int g(y)\, dy$

Cette relation conduit à la forme implicite ou explicite de la solution générale .

EXEMPLE

Soit l'équation différentielle $x\, dx + y\, dy = 0$. Elle s'écrit $x\, dx = -y\, dy$.

En intégrant , on obtient $\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + c_1$, c_1 est une constante arbitraire (dans ce cas c_1 est nécessairement positive) .

En posant $2c_1 = c^2$, on obtient $x^2 + y^2 = c^2$, c'est l'équation d'une famille de cercles concentriques centrés à l'origine de coordonnées et de rayon $|c|$.

5 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA FORME $y' + u(x)\,y = 0$

Soit *(E)* l'équation différentielle $y' + u(x)\,y = 0$, où u est une fonction simple à intégrer .

$y = 0$ est une solution particulière de *(E)* .

Pour $y \neq 0$, *(E)* s'écrit $\dfrac{dy}{dx} + u(x)\,y = 0$ ou $\dfrac{dy}{dx} = -\,u(x)\,y$, donc $\dfrac{dy}{y} = -\,u(x)\,dx$,

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int -u(x)\,dx$ soit $\ell n\,|y| + c_1 = -\displaystyle\int u(x)\,dx$; $\ell n\,|y| = -\,c_1 - \displaystyle\int u(x)\,dx$

$|y| = e^{-c_1 - \int u(x)\,dx} = e^{-c_1}\,e^{-\int u(x)\,dx}$;

$y = \pm\,e^{-c_1}\,.\,e^{-\int u(x)\,dx}$, en posant $\pm\,e^{-c_1} = c$, on obtient : $y = c.e^{-\int u(x)\,dx}$.

EXEMPLE

Soit à résoudre l'équation différentielle $y' - 2xy = 0$ (1) .

(1) s'écrit $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ ou $\dfrac{dy}{y} = 2x\,dx$, donc $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$ et $\ell n\,|y| = x^2 + k$,

$|y| = e^{x^2+k} = e^k\,.\,e^{x^2}$ ou $y = \pm\,e^k\,.\,e^{x^2}$, soit $y = c\,e^{x^2}$.

6 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Activité

Soit f la fonction définie par $y = f(x) = \sin x$.

- Déterminer $y' = f'(x)$ et $y'' = f''(x)$.
- En déduire une relation entre y et y'' .
- Les fonctions suivantes définies par :
  $f(x) = 2\sin x$, $g(x) = \cos x$ et $h(x) = 3\sin x$ vérifient-elles la relation (E) : $y'' + y = 0$?

Dans l'affirmative , on dit que la fonction considérée est **une solution de (E)** .

1° Équation différentielle de la forme $y'' = f(x)$

La résolution de cette équation se ramène à la recherche des fonctions dont la dérivée seconde est f .

$y'' = f(x)$ donne $y' = \displaystyle\int f(x)\,dx$.

Si F est une primitive de f , alors $y' = F(x) + c_1$, c_1 étant une constante arbitraire , d'où $y = \displaystyle\int (F(x) + c_1)\,dx$.

Cette nouvelle intégration introduit une deuxième constante arbitraire c_2 . L'expression de y obtenue est la solution générale de l'équation donnée .

EXEMPLES

1. Soit à intégrer l'équation différentielle $y'' = x^2 + 2x - 4$.

On a $y' = \int (x^2 + 2x - 4)\,dx = \dfrac{x^3}{3} + x^2 - 4x + c_1$ et $y = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + c_1 x + c_2$

où c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires .

2. Soit à résoudre l'équation différentielle $y'' - x - 2 = 0$ et à déterminer la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales : $y = 0$ et $y' = -1$ pour $x = 0$.

Comme $y'' = x + 2$, alors $y' = \int (x + 2)\,dx = \dfrac{x^2}{2} + 2x + c_1$ et $y = \int \left(\dfrac{x^2}{2} + 2x + c_1\right) dx$, d'où $y = \dfrac{x^3}{6} + x^2 + c_1 x + c_2$.

Les conditions initiales donnent $c_1 = -1$ et $c_2 = 0$.

La solution particulière est donc $y = \dfrac{x^3}{6} + x^2 - x$.

2° Équation différentielle du second ordre de la forme $ay'' + by' + cy = 0$ où a , b et c sont des réels donnés , a non nul

L'équation $ar^2 + br + c = 0$ s'appelle **équation caractéristique** de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$.

On admet les résultats suivants .

- **Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{R}$, alors la solution générale est $y = c_1\, e^{r_1 x} + c_2\, e^{r_2 x}$ où c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires .**
- **Si l'équation caractéristique admet une racine double $r = r_1 = r_2$, alors la solution générale est $y = (c_1 + c_2 x)\, e^{rx}$ où c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires .**
- **Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, alors la solution générale est**
$y = e^{\alpha x}\,(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ où c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires .

EXEMPLES

1. Soit à résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' - 4y = 0$ *(E)* .

(E) a pour équation caractéristique $r^2 - 3r - 4 = 0$ qui admet deux racines réelles distinctes $r_1 = -1$ et $r_2 = 4$.

Les solutions de *(E)* sont les fonctions f définies , pour tout x de $\mathbb{R}$, par $y = f(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{4x}$, où c_1 et c_2 sont deux nombres réels quelconques .

2. Soit à résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = 0$ *(F)* .

(F) a pour équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ qui admet $r = 2$ pour racine double .

Les solutions de *(F)* sont les fonctions g définies , sur $\mathbb{R}$, par $y = g(x) = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x}$, où c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires .

3. Soit à résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 5y = 0$ *(H)* .

(H) a pour équation caractéristique $r^2 + 2r + 5 = 0$ qui admet deux racines dans $\mathbb{C}$: $r_1 = -1 + 2i$ et $r_2 = -1 - 2i$.

Les solutions de *(H)* sont les fonctions h définies , sur $\mathbb{R}$, par $y = h(x) = e^{-x}\,(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$, où c_1 et c_2 sont deux nombres réels .

3° Cas particulier : $y'' + \omega^2 y = 0$ avec ω^2 un réel positif non nul donné

L'équation caractéristique associée est $r^2 + \omega^2 = 0$.

Cette équation admet **deux racines complexes conjuguées $r_1 = i\omega$ et $r_2 = -i\omega$.**

La solution générale s'écrit $\boldsymbol{y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x}$, où c_1 et c_2 sont deux réels .

EXEMPLE

Soit à déterminer la solution $y = f(x)$ de l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$ satisfaisant aux conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(\pi) = -2$.
La solution générale de cette équation est $y = f(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$.
Comme $f(0) = 1$ alors $c_1 = 1$.
La dérivée est $y' = f'(x) = -3\sin 3x + 3c_2 \cos 3x$. Comme $f'(\pi) = -2$, alors $-3c_2 = -2$ et $c_2 = \dfrac{2}{3}$.
La solution particulière est donc $y = \cos 3x + \dfrac{2}{3} \sin 3x$.

7 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA FORME $y'' + \omega^2 y = k$ AVEC ω^2 UN RÉEL POSITIF NON NUL ET k UN RÉEL

$y'' + \omega^2 y = k$ s'écrit $y'' + \omega^2 \left(y - \dfrac{k}{\omega^2} \right) = 0$ (1)

En posant $z = y - \dfrac{k}{\omega^2}$, on obtient $z' = y'$ et $z'' = y''$, l'équation (1) sera $z'' + \omega^2 z = 0$.

Cette dernière équation a pour intégrale générale $z = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$ et $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x + \dfrac{k}{\omega^2}$ où c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires .

$$\boxed{y'' + \omega^2 y = k \ \textbf{ a pour solution générale } \ y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x + \frac{k}{\omega^2}}$$

EXEMPLE

Soit l'équation différentielle $y'' + 4y = 2$.
La solution générale de l'équation complète (avec second membre) est $y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \dfrac{1}{2}$.

Remarque

L'intégrale générale de l'équation avec second membre $y'' + \omega^2 y = k$ s'écrit aussi sous la forme $y = A \cos(\omega t + B) + \dfrac{k}{\omega^2}$, car en développant $\cos(\omega t + B)$, on obtient la forme
$y = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \dfrac{k}{\omega^2}$.

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Vérifier que la fonction f donnée , dans chacun des cas suivants , est une solution de l'équation différentielle correspondante .

1° $f(x) = x^2 + x - 1$; $y' + y = x^2 + 3x$

2° $f(x) = \frac{x^2}{4} + 5x + 3$; $y' - \frac{x}{2} + 5 = 0$

3° $f(x) = 3e^{2x}$; $y' - 2y = 0$

4° $f(x) = e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{5}{3}$; $2y' + 3y - 5 = 0$

5° $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$; $y' - xy = 0$

6° $f(x) = \sin x - \cos x$; $y' + y = 2\sin x$

2 Intégrer les équations différentielles suivantes :

1° $y' = 3x + 1$ **2°** $y' - x^2 + 2x = 5$ **3°** $y' - e^{-3x} = 0$ **4°** $2y' - e^{2x} = 0$

5° $x^2 y' - 1 = 0$ **6°** $y' - \cos\frac{x}{2} = 0$ **7°** $\sqrt{x^2+1}\, y' - 2x = 0$ **8°** $xy' - 3\ell n\, x = 0$

9° $(1 + e^x)\, y' = e^x$ **10°** $\sqrt{1-x^2}\, y' - 1 = 0$ **11°** $y'' + 4 = 0$ **12°** $y'' + x - 2 = 0$.

3 Déterminer la solution f définie par $y = f(x)$ de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales données :

1° $y' = x - 3$; $f(0) = 1$

2° $y' + x^2 - 1 = 0$; $f(1) = \frac{1}{3}$

3° $2y' + 4x - 5 = 0$; $f(2) = 3$

4° $y' - (x+1)(2-3x) = 0$; $f(-1) = \frac{5}{2}$

5° $y'' - 4 = 0$; $y'(1) = 3$ et $y(1) = 0$

6° $y'' + x = 1$; $y'(0) = 2$ et $y(1) = \frac{2}{5}$

7° $y'\sqrt{x} = 1$; $y(1) = 0$

8° $y' - \sin\frac{3x}{2} = 0$; $y\left(2\frac{\pi}{9}\right) = \frac{8}{3}$.

4 Résoudre les équations différentielles :

1° $y' - 5y = 0$ **2°** $y' + 2y = 3$ **3°** $3y' + y = 0$

4° $3y' - 5y = 6$ **5°** $y'' - \cos 2x = 0$ **6°** $y'' - 2x + 3 = 0$

7° $y'' - 3y' = 0$ **8°** $y'' = y$ **9°** $y'' - x + 3\sin x = 0$ **10°** $y'^2 + 4y'y + 4y^2 = 0$.

5 Vérifier que la fonction f donnée dans chacun des cas suivants est solution de l'équation différentielle correspondante :

1° $f(x)=\dfrac{x^3}{2}+2x^2+3x-5$; $y''-3x-4=0$

2° $f(x)=2e^{-2x}+3e^{2x}$; $y''-4y=0$

3° $f(x)=3e^{x}-4e^{-3x}$; $y''+2y'-3y=0$

4° $f(x)=x\cos x$; $y''+y=-2\sin x$

5° $f(x)=e^{-x}\sin x$; $y''+2y'+2y=0$.

6 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1° $y''-5y'+4y=0$ **2°** $y''-5y=0$ **3°** $y''+6y'-7y=0$ **4°** $y''+9y=0$

5° $3y''-2y'+5y=0$ **6°** $y''-2y'=0$ **7°** $y''+4y'+4y=0$ **8°** $4y''+y=8$.

7 Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle donnée , vérifiant les conditions initiales .

1° $y''-2y'+y=0$ $f(0)=1$ et $f'(0)=1$

2° $y''-y'-y=0$ $f(0)=0$ et $f'(0)=1$

3° $y''-4y'-5y=0$ $f(0)=0$ et $f'(0)=1$

4° $y''+4y=0$ $f(0)=6$ et $f'(0)=10$

5° $y''-4y=0$ $f(0)=2$ et $f'(0)=2$.

8 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4e^{\frac{5x}{3}}$.

Déterminer une équation linéaire du premier ordre dont f est solution .

9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\sin x+\cos x$.

1° Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2° En déduire une relation entre x , $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$ (ne contenant ni $\sin x$ ni $\cos x$) .

3° Former une équation différentielle dont f est solution .

10 On considère l'équation différentielle (E) : $y'+y=2x+1$.
On pose $y=z+ax+b$

1° Former l'équation différentielle (E') satisfaite par z .

2° Quelles valeurs faut-il donner à a et b pour que (E') soit sans second membre ?
Résoudre alors l'équation obtenue . En déduire la solution générale de l'équation (E) .

3° Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe passe par l'origine des coordonnées .

11 On donne l'équation différentielle $y'' + y = x$ (1)

On pose $y = z + x$. Déterminer l'équation différentielle (2) satisfaite par z . Intégrer (2) et déduire la solution générale de (1) .

Trouver la solution particulière de (1) telle que pour $x = 0$, $y = y' = 0$.

12 On donne l'équation différentielle $y' + y = x - 1$ (1) .

1° On pose $y = x - 2 + z$. Écrire l'équation différentielle (2) satisfaite par z . Intégrer (2) et donner la solution générale de (1) .

2° Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - 2 + e^{-x}$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{x}$. Conclure .

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. En déduire que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à la courbe représentative (C) de g .

c) Dresser le tableau de variations de g .

d) Tracer (C) et (D) dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

13 Donner la solution générale de l'équation différentielle $z' - z = 0$. En déduire la solution de l'équation différentielle $y'' - y' = 0$ vérifiant $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$.

14 Résoudre l'équation différentielle $xy' - y + x = 0$ en posant $y = z \cdot x$.

15 **1°** Résoudre l'équation $xu' + u = 0$ (E) .

2° Soit (E') l'équation $xy' + x + y = 0$.

a) On pose $y = z + \lambda x$ où λ est un paramètre réel .
Déterminer λ pour que (E') satisfaite par z soit identique à (E) .

b) Résoudre (E') .

16 **1°** Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y'' + 2y' - 3y = 0$ vérifiant les conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

2° On désigne par F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 . Déterminer F .

17 Intégrer l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Déterminer la solution particulière vérifiant les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.

18 Intégrer les équations différentielles suivantes :

1° $x\,dx - y\,dy = 0$. **2°** $x\,dy + y\,dx = 0$.

19 Répondre par vrai ou faux .

1° $x^2 y' + 3y + 2x = 0$ est une équation différentielle du premier ordre .

2° La fonction $x \longmapsto e^{3x}$ est une solution de l'équation différentielle $y' + 3y = 0$.

3° $y' - 3y + 2 - x = 0$ est une équation différentielle avec second membre .

4° Une solution de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ est $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x}$ avec c_1 et c_2 deux nombres réels .

Pour chercher

20 Soit l'équation différentielle $(E) : y'' + 3y' + 2y = 2$.

On pose $z = y - 1$.

1° Former l'équation différentielle (E') satisfaite par z et résoudre (E') .

2° En déduire la solution générale de (E) et trouver la solution particulière de (E) dont la courbe représentative est tangente en O à l'axe $x'Ox$.

21 Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 6x\,e^{-2x}$.

On pose $z = y - 3x^2 e^{-2x}$.

1° Trouver l'équation différentielle (E') satisfaite par z et résoudre (E') .

2° En déduire la solution générale de (E) et trouver la solution particulière de (E) vérifiant $y(0) = 0$.

Bac.

22 **1°** Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.

2° Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = x$.

a) Montrer qu'il existe une fonction affine f_0 telle que $f_0(x) = mx + p$ soit solution de (E) .

b) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E') .

c) En déduire la solution générale de (E) .

3° Montrer qu'il existe une solution unique de (E) vérifiant $f(0) = \dfrac{3}{4}$.

23 **1°** Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = (1 + x)\, e^{-2x}$ est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = e^{-2x}$.

2° Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = e^{-2x}$ si $f - f_0$ est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.

3° Déduire des questions précédentes que l'équation différentielle $y' + 2y = e^{-2x}$ admet une solution vérifiant $f(0) = 3$.

24 **1°** Trouver la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 3y = 0$ et vérifiant les conditions $f(0) = 4$ et $f'(0) = 2$.

2° **a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^3 - 5X - 2 = 0$ (on cherchera une solution particulière dans $\mathbb{Z}$).

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -2$.

25 Soit E_1 l'équation différentielle $y'' + 9y = 5x + 1$.

1° Montrer que si une fonction polynôme P est solution de (E_1) , alors son degré est 1 . Déterminer P solution de (E_1) .

2° On pose $g = f - P$.

a) Montrer que f est solution de (E_1) si et seulement si , g est solution de l'équation sans second membre (E_2) : $y'' + 9y = 0$.

b) Résoudre (E_2) .

c) Résoudre (E_1) et montrer que cette équation admet une solution unique f vérifiant les conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

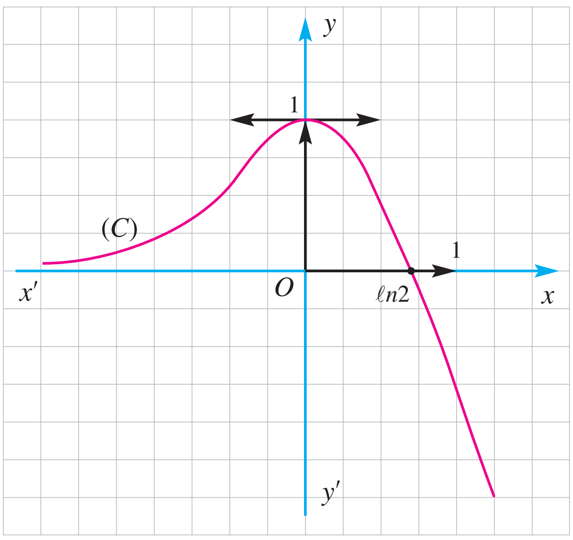
26 Soit l'équation différentielle $xy' + (1 - x)\,y = 3 \quad (1)$.

1° On pose $z = xy$. Trouver l'équation différentielle satisfaite par z . En déduire la solution générale de l'équation (1) donnée .

2° Déterminer la solution particulière de l'équation (1) telle que pour $x = \ell n\,3$, $y = 0$.

3° **a)** Vérifier que , quelque soit $X > 0$, la fonction définie par $Y = e^X - X$ est croissante et positive .
b) En déduire que si $1 - x > 0$ alors $e^x\,(1 - x) < e$ et la fonction définie par $y = \dfrac{e^x - 3}{x}$ est croissante sur chaque intervalle où elle est définie .

27 La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
f est une solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$.
Déterminer $f(x)$.



Bac.

28 On considère l'équation différentielle $y' - y = 2xe^x \quad (1)$.

1° On pose $y = ze^x$ où z est une fonction de x .
Former l'équation différentielle (2) à laquelle satisfait z .

2° Intégrer l'équation (2) et en déduire la solution générale de (1) . Déterminer en particulier la solution vérifiant $y(0) = 1$.

3° Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 1)e^x$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Conclure .

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Conclure .

c) Dresser le tableau de variations de f et tracer (C) .

29 **1°** Résoudre l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$.

2° Trouver la solution f de cette équation vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 4$.

3° Trouver deux réels positifs ω et φ tels que , pour tout réel t , $f(t) = \sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi)$.

30 **1°** Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 6y = 0$ (E) .

2° On se propose de résoudre l'équation $y'' + y' - 6y = -6x^2 + 2x + 4$ (E') .

a) Trouver un polynôme P du second degré , solution de l'équation (E') .

b) Montrer que f est solution de (E') si , et seulement si $f - P$ est solution de (E) . Déduire alors les solutions de (E) .

31 On se propose de déterminer les fonctions définies sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ qui sont solutions de l'équation différentielle suivante : $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{x-1}{x^2}e^{-x}$ (1) .

1° Montrer que la fonction P définie sur $]0 ; +\infty[$ par $P(x) = e^{-x}\,\ell n x$ est une solution particulière de l'équation (1) .

2° Démontrer qu'une fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ est solution de l'équation différentielle (1) , si , et seulement si la fonction $h = f - P$ est une solution de l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = 0$ (2) .

3° Déterminer les solutions de l'équation différentielle (2) .

4° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1) .

32 On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 5y = 2x + 3$.

1° Déterminer les réels a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ soit solution de cette équation .

2° Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que g vérifie (E) si , et seulement si $g - f$ vérifie l'équation (E') : $y'' + 2y' + 5y = 0$.

3° Résoudre (E') en déduire la solution générale de (E) .

4° Déterminer la fonction numérique h, solution particulière de (E) vérifiant les conditions initiales $h(0) = 1$ et $h'(0) = 1$.

33 Résoudre les équations différentielles à variables séparables .

1° $(1 + y)\,dx - (1 - x)\,dy = 0$.

2° $(1 + x)\,y\,dx + (1 - y)\,x\,dy = 0$.

34 **1°** Résoudre l'équation différentielle (1) : $9y'' + y = 0$.

2° **a)** Déterminer la fonction f, solution de (1) , telle que $f(0) = 3$ et $f'(0) = \sqrt{3}$.

b) Montrer que , pour toute valeur de x , $f(x) = 6\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$.

35 **1°** Résoudre l'équation différentielle (1) : $y'' - 2y' + y = 0$.

2° Trouver la solution particulière de (1) tel que pour $x = 0$, $y = 1$ et $y' = 2$.

3° Soit (C) la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)e^x$

a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Conclure .

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Conclure .

c) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

d) Tracer (C) dans un repère orthonormal $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$.

4° **a)** Calculer la dérivée de F définie par $F(x) = x\,e^x$.

b) En déduire l'aire du domaine plan limité par (C) , l'axe $x'Ox$, l'axe $y'Oy$ et la droite d'équation $x = -1$.

36 On considère l'équation différentielle (I) : $xy' - y = 1 - 2\ell n\,x$.

1° Vérifier que $y_1 = 1 + 2\ell n\,x$ est une solution particulière de (I) .

2° Déterminer la solution générale Y de l'équation différentielle $xy' - y = 0$.

3° **a)** Vérifier que $Y + y_1$ est la solution générale de (I) .

b) Déterminer la solution particulière y de (I) telle que $y(1) = 0$. **Bac.**

37 On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = 2e^{-x}$.

1° Déterminer le réel λ pour que $y = \lambda\,e^{-x}$ soit une solution de (E) .

2° **a)** Résoudre l'équation $y' - y = 0$.

b) En déduire la solution générale de (E) .

c) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - e^{-x}$ est une solution particulière de (E) .

Bac.

38 **A -** On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = -x + 1$.

On pose $y = z - x - 1$.

1° Former l'équation différentielle (E') satisfaite par z et résoudre (E') .

2° En déduire la solution générale de (E) et trouver la solution particulière y de (E) vérifiant $y(0) = -1$ et $y'(0) = 0$.

B - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = xe^x - x - 1$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

1° Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Conclure .

2° **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite (d) d'équation $y = -x - 1$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.

c) Étudier les positions relatives de (C) et (d) .

3° Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la dérivée f' de f .

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0		$+$		
$f'(x)$	-1	$\searrow$	$-1-e^2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

a) Trouver le signe de f' et dresser le tableau de variations de f .

b) Montrer que f admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées .

c) Tracer (C) et (d) .

4° **a)** Par une intégration par parties , calculer $\int_{-1}^{0} x\,e^x\,dx$.

b) En déduire l'aire du domaine plan limité par (C) , (d) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

Bac.

39 **A.** On désigne par h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative (ℓ) est donnée ci-contre .

(ℓ) est tangente en O à l'axe des ordonnées et admet (d) comme asymptote en $+\infty$ et l'axe des abscisses comme direction asymptotique .

1° Démontrer que h admet sur $\mathbb{R}$ une fonction réciproque g telle que $g(0) = 0$.

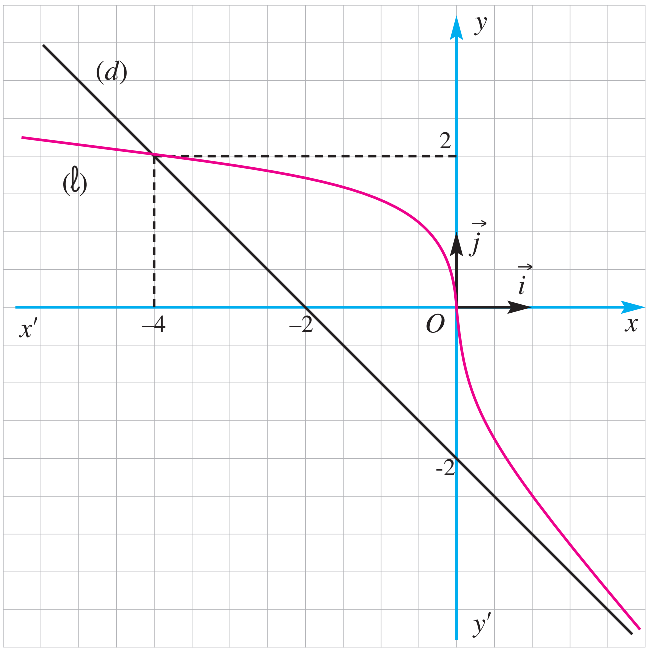
2° Soit (γ) la courbe représentative de g .

a) Déterminer la tangente à (γ) au point O et déduire $g'(0)$.

b) Démontrer que (d) est asymptote à (γ) et déterminer le point d'intersection de (γ) et (d) .

c) Tracer (γ) dans un autre repère .

d) Montrer que $g(x)$ et x sont de signes opposés .



3° On suppose que g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)\,(1 + e^x) + c$ où a, b et c sont trois nombres réels .

a) Calculer $g'(x)$.

b) En utilisant $g(0)$, $g'(0)$ et $g(2)$, calculer a , b et c et vérifier que $g(x) = (2 - x)e^x - x - 2$.

B. On considère l'équation différentielle (E) : $(1 + e^x)y' - y = 0$.

1° En constatant que $\dfrac{1}{1 + e^x} = \dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$, calculer $\displaystyle\int \dfrac{dx}{1 + e^x}$.

2° Résoudre l'équation différentielle (E) . Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point $I(0\,;\,2)$.

C - On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4e^x}{1 + e^x}$, et par (C) sa courbe représentative .

1° Étudier les variations de f . Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on déterminera le domaine de définition et calculer $f^{-1}(x)$.

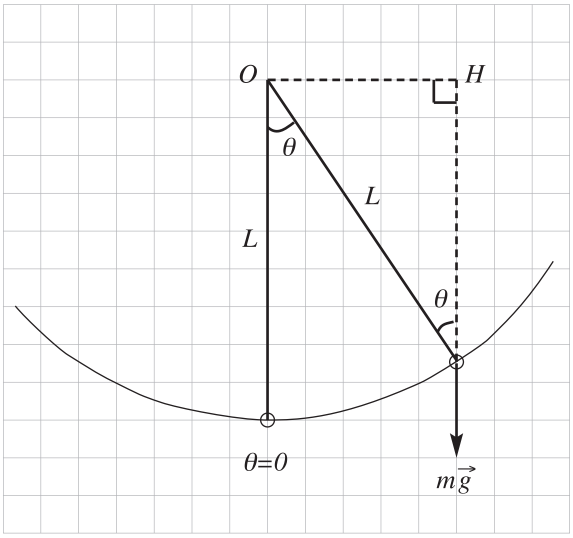
2° Montrer que le point $I(0\,;\,2)$ est un centre de symétrie de (C) et déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point I .

3° En utilisant la fonction g trouvée dans la partie A , étudier la position relative de (C) et (T) .

4° Tracer (C) et (T) .

40 On considère un pendule simple de longueur L , de masse ponctuelle m . Ce pendule tourne autour d'un axe horizontal (O) sans frottement .

Trouver l'équation différentielle qui régit le mouvement .



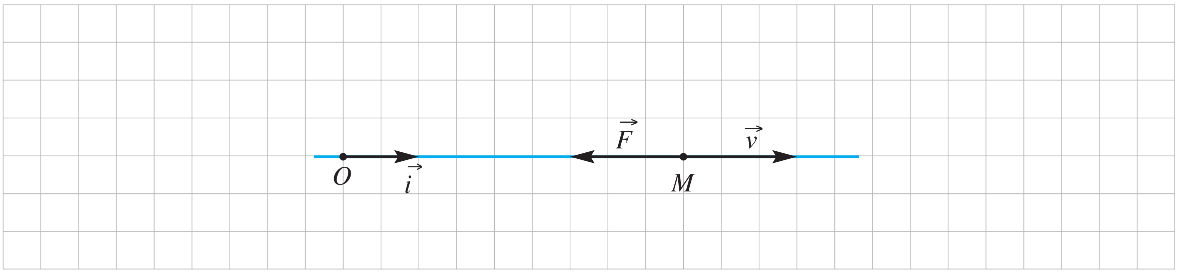
41 **Le freinage du hors-bord.**

Un hors-bord de 200 kg se déplace en ligne droite avec une vitesse initiale égale à 44 m.s^{-1} . La résistance de l'eau est proportionnelle à la vitesse et elle est égale à 50 Newtons pour une vitesse de 1 m.s^{-1} . Le moteur étant coupé , on se propose de calculer :

a) la durée , notée τ , nécessaire pour atteindre une vitesse de 5 m.s^{-1} .

b) la distance parcourue durant ce délai .

La date $t = 0$ est celle où le moteur est coupé , l'abscisse $x = 0$ est celle qui repère la position M du hors-bord à cette date $t = 0$.



À la date t , on désigne par $x(t)$ l'abscisse du point M , par $v(t)$ la valeur de sa vitesse , par $\gamma(t)$ la valeur de son accélération relativement au repère $(O , \vec{i})$.
D'après le cours de physique , le mouvement du point M est régi par l'équation : $200\gamma(t) = -50v(t)$.

1° On sait que $v(t) = x'(t)$ et que $\gamma(t) = v'(t) = x''(t)$.

a) Montrer que la fonction $t \longmapsto x(t)$ vérifie $4y'' + y' = 0$ (1) .

b) Déduire que la fonction $t \longmapsto v(t)$ vérifie $4z' + z = 0$ (2) .

2° **a)** Résoudre l'équation (2) .

b) Avec la condition initiale $v(0) = 44$, préciser $v(t)$, pour tout t positif .

42 Rappelons quelques définitions et résultats vus en Sciences physiques .

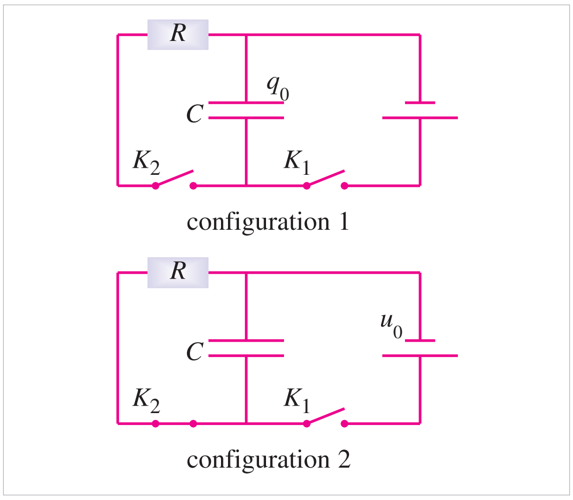
• Soit un condensateur de capacité C (en farads) . À tout instant t , la charge $q(t)$ de celui-ci (en coulombs) et la tension $u(t)$ (en volts) entre ses bornes vérifient la relation $q(t) = C.u(t)$ (1) .

De plus , à tout instant t , l'intensité $i(t)$ du courant de charge ou de décharge est égale à $\dfrac{dq}{dt} = q'(t)$, soit encore , d'après la relation (1) , $C\dfrac{du}{dt}$.

• Dans tout circuit en série , l'intensité du courant est la même en tout point du circuit .

Décharge d'un condensateur à travers une résistance .

Le condensateur a été préalablement chargé .



À l'instant $t = 0$, on passe de la configuration 1 à la configuration 2 .

Le condensateur se décharge alors à travers la résistance R .

À l'instant t , on désigne par $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur , par $q(t)$ sa charge et par $i(t)$ l'intensité du courant dans le circuit .

On sait que la relation sur les tensions est donnée par $R\dfrac{dq}{dt}$.

1° Trouver les équations différentielles satisfaites par q et u .

2° Résoudre chacune des équations différentielles obtenues .

43 Si dans une culture , le nombre de bactéries passe de 400 à 1000 en 3 heures , et si à tout instant le taux de croissance est proportionnel au nombre de bactéries présentes , le nombre de bactéries présentes après t heures est une fonction f de t qui vérifie : $f'(t) = af(t)$ pour $t \geqslant 0$.

1° Résoudre l'équation différentielle donnée .

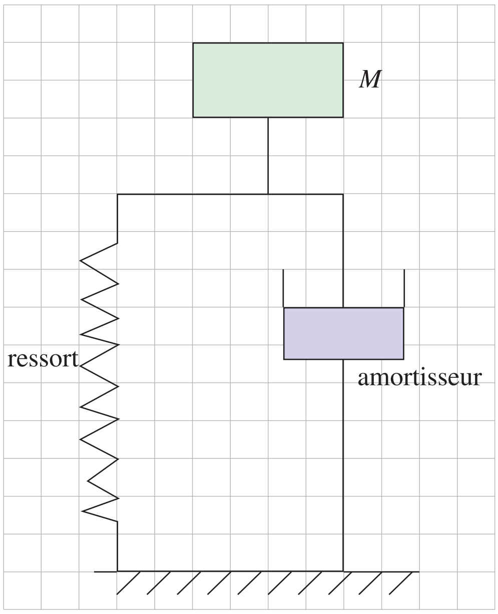
2° Trouver la solution particulière vérifiant les conditions : $y(0) = 400$ et $y(3) = 1000$.

44 Un corps de masse m , lâché sans vitesse initiale , subit en chute libre une force de freinage d'intensité F proportionnelle à la vitesse v : $F = -kv$ où k , coefficient de forme , est positif .

1° Montrer que la fonction de temps $t \longmapsto v(t)$ est une solution sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle $y' + \frac{k}{m} y = g$ (g : accélération de la pesanteur) .

2° Trouver une fonction constante solution particulière de cette équation .
En déduire que $v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$ et interpréter $v = \frac{mg}{k}$.

45 Une masse M est posée sur le sol à l'aide d'une suspension amortie comme le montre la figure ci-dessous .



Pour tout t de $[0 ; +\infty[$ on désigne par $x(t)$ la longueur du ressort .

On établit en mécanique que la fonction $t \longmapsto x(t)$ définie sur $[0 ; +\infty[$ est solution de l'équation différentielle $x'' + kx' + 25x = 20$ où k désigne une constante réelle positive qui dépend des caractéristiques de l'amortisseur .

1° a) Donner suivant les valeurs de k les différentes formes de solutions de l'équation $x'' + kx' + 25x = 0$ (1) .

b) Déterminer l'intervalle dans lequel il faut choisir le nombre k pour que (1) n'admette pas de solution faisant intervenir des fonctions trigonométriques , donc que le système ne soit pas soumis à des oscillations .

2° On choisit $k = 10$ et on considère l'équation différentielle $x'' + 10x' + 25x = 20$ (2) .

a) Résoudre $x'' + 10x' + 25x = 0$.

b) Déterminer le réel m pour que la fonction constante h définie sur $[0 ; +\infty[$ par $h(t) = m$ soit solution de (2) . En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (2) .

c) Déterminer la solution particulière x de l'équation (2) qui vérifie les conditions initiales $x(0) = 0{,}4$ et $x'(0) = 0$.

3° On considère la fonction x définie sur $[0 ; +\infty[$ par $x(t) = (-2t - 0{,}4)\, e^{-5t} + 0{,}8$ et (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 10 cm) .

a) Étudier les variations de la fonction x .

b) Déterminer la tangente (T) à la courbe (C) en O .

c) Compléter le tableau .

t	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2
$x(t)$							

Tracer (C) , (T) et l'asymptote (D) à (C) .

46 Soit m la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $t \longmapsto m(t)$ où $m(t)$ est la masse de sel en grammes que contient une solution salée (eau + sel) à l'instant t , t en minutes . On admet que la fonction m vérifie $m(0) = 300$ et que m est une solution sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle $5y' + y = 0$ (E) .

1° a) Résoudre l'équation différentielle (E) .

b) Montrer que pour t de $[0 ; +\infty[$ on a $m(t) = 300\, e^{-\frac{t}{5}}$.

2° Calculer le réel t_0 tel que $m(t_0) = 150$.

3° On admet qu'il est impossible de détecter la présence de sel à l'instant t si , et seulement si $m(t) \leqslant 10^{-2}$.

A partir de quel instant t est-il impossible de détecter la présence de sel ?

$\boxed{47}$ **A-** Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 6xe^{-2x}$.

On pose $z = y - 3x^2e^{-2x}$.

1° Écrire une équation différentielle (E') satisfaite par z et résoudre (E') .

2° Déduire la solution générale de (E) et trouver une solution particulière y de (E) qui vérifie $y(0) = 0$.

B- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2e^{-2x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i}\ ,\vec{j})$.

1° **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et déduire une asymptote à (C) .

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

2° **a)** Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

b) Démontrer que la courbe (C) admet deux points d’inflexion.

3° **a)** Tracer la courbe (C) .

b) Déterminer , suivant les valeurs du réel m , le nombre de racines de l'équation : $me^{2x} - 3x^2 = 0$.

4° Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$.

a) Déterminer a , b et c pour que F soit une primitive de f .

b) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

5° La tangente à (C) au point $A(1\ ;\ 3e^{-2})$ recoupe la courbe (C) au point E d’abscisse t .

a) Vérifier que $-0{,}3 < t < -0{,}2$.

b) Soit h la fonction définie , sur $\mathbb{R}$, par $h(x) = -e^{x-1}$. Démontrer que $h(t) = t$.

6° Soit g la fonction définie par $g(x) = e^{f(x)}$.

a) Dresser le tableau de variations de g.

b) Trouver le nombre de solutions de l'équation $g(x) = e$.

c) Résoudre l'inéquation $g(x) > 1$. **Bac. (SG)**

48 **A-** On considère l'équation différentielle $(E) : y + xy' = e^x \ (x \neq 0)$.
On pose $z = xy$.

1° Former une équation différentielle (E') satisfaite par z .

2° Résoudre l'équation (E') et déduire la solution générale de (E) .

3° Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative dans un repère orthonormé admet au point d'abscisse 1 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.

B- Soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} , \vec{j})$.

1° a) Vérifier que $h'(x) = \dfrac{(x-1)e^x + 1}{x^2}$.

b) Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = (x-1)\,e^x$.

Dresser le tableau de variations de g et déduire que $h'(x) > 0$.

2° a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{h(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variations de h .

3° a) Écrire une équation de la tangente (Δ) à (C) au point d'abscisse 1 .

b) Tracer (Δ) et (C) .

4° a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} et donner le domaine de définition de h^{-1} .

b) Calculer $(h^{-1})'(e-1)$.

C- On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = h(x) + \ell n\, x$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans le même repère que (C) .

1° a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

2° a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et vérifier que $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$.

b) Comparer $h(\alpha)$ et $h(1)$. En déduire que $\ell n\, \alpha > 1 - e$.

3° a) Étudier , suivant les valeurs de x , la position relative de (C) et (Γ) .

b) Tracer (Γ) .

4° Soit A et B deux points de même abscisse x appartenant respectivement à (C) et (Γ) .
Montrer que , pour tout réel $m > 0$ tel que $AB = m$, il existe deux valeurs de x dont le produit est indépendant de m .

5° Pour $0 < t < 1$, calculer l'aire $S(t)$ du domaine limité par (C) , (Γ) et les deux droites d'équations $x = t$ et $x = e$. Trouver $\lim\limits_{t\to 0} S(t)$.

Bac. (SG)

11 STATISTIQUES

Un peu d'histoire

L'objet *des* ***Statistiques*** *est le dénombrement, l'étude et l'analyse des données relatives à un même phénomène. À l'origine, les statistiques avaient pour but de rassembler et d'étudier tous les renseignements intéressant l'état* ***(STATUS)****.*
Vers ***1700 avant J.C, les Égyptiens*** *ont enregistré le relevé détaillé des propriétés territoriales quant à leur valeur, étendue et situation.*
Vers ***1240 avant J.C, les Chinois*** *font le recensement de leurs populations agricoles.*
Vers ***80 avant J.C,*** *l'empereur* ***César*** *ordonne le recensement de la population guerrière.*
Avant le XVIIIème siècle, *on se limita à collecter des renseignements et à leur donner un caractère descriptif. Voici quelques exemples :*
- ***en 1570 Cardan*** *travailla sur la durée de la vie humaine.*
- ***en 1662 Graunt*** *établit les tables de mortalité à Londres.*
- ***en 1693 Halley*** *étudia les assurances-vie.*

En 1880, Napoléon Bonaparte *fonda à Paris le premier bureau de statistique qui est actuellement «l'Institut National de la Statistique et des Études Économiques»* ***(INSEE)****, l'un des plus grands centres de recherche.*
Vers 1900, *commence l'étude mathématique des phénomènes statistiques.*
Actuellement, *le champ d'application des statistiques s'est élargi au dépouillement et à l'analyse des données dans tous les domaines : physique, biologie, psychologie, industrie, économie, médecine, science sociale, agronomie, linguistique, etc ...*

PLAN DU CHAPITRE

«Il y a trois genres de mensonges : les ***mensonges*** *, les* ***mensonges maudits*** *et les* ***statistiques****» .*

Marc TWAIN

Un professeur de troisième année secondaire demande à ses 35 élèves de remplir une fiche de renseignement concernant l'étude des caractères suivants :

Ordre alphabétique , nombre de frères et sœurs et **âge .**
Le résultat de cette étude est résumé dans les trois tableaux ci-dessous .

Nom commençant par la lettre	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*K*	*L*	*M*	*N*	*R*	*Y*
Nombre d'élèves	2	5	3	8	3	1	4	2	4	2	1

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4	5
Nombre d'élèves	4	10	12	5	3	1

Age	[15 ; 16[	[16 ; 17[	[17 ; 18[	[18 ; 19]
Nombre d'élèves	5	22	6	2

1° Quelle est la population étudiée ? l'individu ?

2° Quelle est la nature de chacun des trois caractères ?

3° Dans le cas où le caractère est quantitatif , préciser s'il est discret ou continu .

Caractère «ordre alphabétique»

1° Calculer la fréquence des noms commençant par chacune des lettres données .

2° Quel est le nombre d'élèves dont le nom commence par la lettre *A* ? *B* ? *C* ? Quel est leur pourcentage ?

Caractère «nombre de frères et sœurs»

1° Représenter ce caractère par un diagramme en bâtons .

2° Calculer le nombre moyen des frères et sœurs .

3° Quel est le pourcentage des élèves ayant au plus 3 frères et sœurs ? au moins 4 frères et sœurs ?

Caractère «âge»

1° Construire l'histogramme des effectifs .

2° En prenant pour valeur du caractère le centre de chaque classe , trouver l'âge moyen des élèves de cette classe .

3° Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants .

4° Construire le polygone des effectifs cumulés .

Toutes les notions nécessaires à une étude statistique ont été données dans les classes antérieures . Elles seront mises en œuvre au cours de cette année . Pour une meilleure acquisition , on tient à rappeler les principales définitions et propriétés .

1 VOCABULAIRE STATISTIQUE

1° Population - individu

• Tout ensemble sur lequel portent des observations et faisant l'objet d'une étude statistique s'appelle **population** .

• Tout élément de cet ensemble s'appelle **individu** .

• Si une étude statistique est limitée à une partie d'une population , cette partie est appelée **échantillon** .

EXEMPLE

Lorsqu'on étudie le salaire des employés d'une entreprise , alors la population est l'ensemble de ces employés . L'individu est chacun d'entre eux .

2° Caractère ou variable

Dans une population , un aspect ou un trait commun à tous les individus est appelé **caractère ou variable** . Par exemple , la taille des élèves d'une classe , l'âge des professeurs d'un collège , etc ...

• Si on peut **mesurer** cet aspect , alors la variable est dite **quantitative** (exemple : les salaires des employés , le poids des élèves d'une classe , etc ...) .
Cet aspect peut prendre différentes valeurs appelées aussi **modalités** . Quand ces valeurs sont entières , la variable est dite **discrète** ou **discontinue** (exemple : le nombre des enfants d'une famille) .
Dans le cas où cet aspect peut prendre une valeur quelconque dans un intervalle , alors la variable est dite **continue** (exemple : la taille des élèves) . On peut regrouper les valeurs de cette variable dans des intervalles appelés **classes statistiques .**

• Si la variable n'est **pas mesurable** , elle est dite **qualitative** (exemple : la couleur des yeux , le sexe d'une personne , etc ...) . **Pour une telle variable on ne parle pas de valeurs mais de modalités .**
Pour cela , on utilisera le mot modalité pour les caractères quantitatif et qualitatif .

3° Effectifs et fréquences

• **L'effectif** d'une modalité est le nombre des individus possédant cette modalité .

• **L'effectif total** ou **la taille** d'une population est la somme des effectifs de toutes les modalités .

• La **fréquence** f_i d'une modalité X_i est le rapport de l'effectif n_i de cette

modalité à l'effectif total N de la population : $f_i = \frac{n_i}{N}$.

La fréquence est une valeur comprise entre 0 et 1 . Elle est souvent donnée en pourcentage .

4° Série statistique

La donnée d'une **population** , d'une **variable** et de **l'effectif** (ou de la **fréquence**) de chaque valeur ou modalité , s'appelle une **série statistique .**

5° Effectifs cumulés - Fréquences cumulées

• Il est parfois commode d'indiquer pour chaque valeur du caractère étudié (ou pour chaque classe) en plus de l'effectif qui lui correspond , **la somme des effectifs de cette valeur** (ou de cette classe) **et de toutes celles qui précèdent** , ces valeurs étant ordonnées de la plus petite à la plus grande .

Ce nombre s'appelle **effectif cumulé croissant** de la valeur (ou de la classe) .

L'effectif cumulé décroissant de cette valeur (ou de cette classe) est la **somme des effectifs de cette valeur** (ou de cette classe) et de **toutes celles qui suivent.**

Le rapport de l'effectif cumulé croissant (respectivement décroissant) d'une valeur ou d'une classe à **l'effectif total** de la population , s'appelle **fréquence cumulée croissante** (respectivement décroissante) de cette valeur ou de cette classe .

EXEMPLE

Le tableau suivant résume une étude faite sur l'âge des 30 élèves d'une classe de troisième année secondaire .

Age	[15 ; 16[	[16 ; 17[	[17 ; 18[	[18 ; 19]
Effectif	6	8	12	4

L'effectif cumulé croissant de la classe [17 ; 18[est : **12** + 8 + 6 = 26 .

L'effectif cumulé décroissant de la classe [17 ; 18[est : **12** + 4 = 16 .

La fréquence cumulée croissante de cette classe est $\frac{26}{30} = 0,866$ ou $86,6\%$.

La fréquence cumulée décroissante de cette classe est $\frac{16}{30} = 0,533$ ou $53,3\%$.

2 REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

Les séries statistiques se présentent , en général , sous forme de tableaux . On peut aussi les représenter graphiquement . Quoique moins précise que le tableau , **la représentation graphique** a l'avantage d'être plus expressive .

1° Diagramme en bâtons

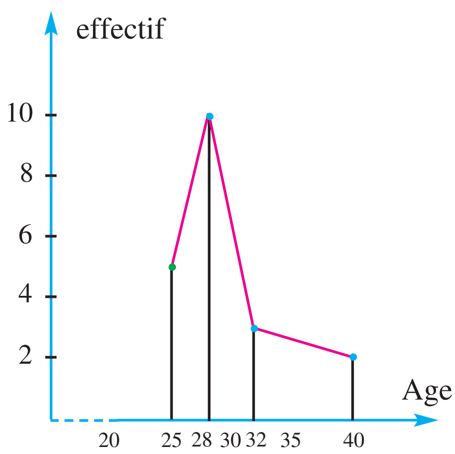
Ce diagramme est surtout utilisé pour schématiser les séries statistiques correspondant à une **variable quantitative discrète** . Il représente , pour les valeurs considérées , les effectifs , les fréquences , les effectifs cumulés ou les fréquences cumulées .

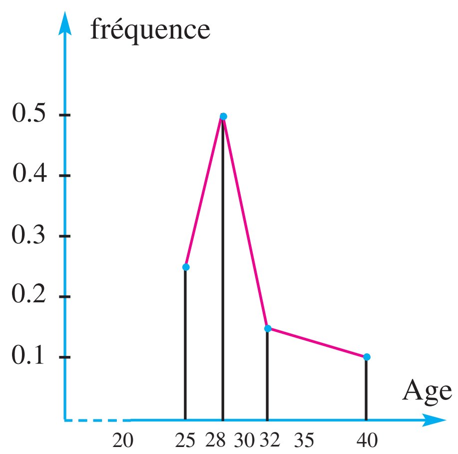
EXEMPLE

Le tableau ci-dessous donne la série des âges de 20 personnes.

Age	25	28	32	40	
Effectif	5	10	3	2	**Total 20**
Fréquence	0,25	0,5	0,15	0,1	**Total 1**

Le schéma suivant représente le diagramme en bâtons des effectifs et des fréquences .





La ligne brisée obtenue en joignant les sommets des bâtons , s'appelle le **polygone des effectifs** ou **le polygone des fréquences** .

Remarque

Dans le cas où le caractère étudié est continu , on peut encore représenter la série statistique par un diagramme en bâtons . Il suffit , pour cela , de remplacer chaque classe par son centre $\left(\text{si } [a\ ,\ b[\text{ est une classe , son centre est } c = \dfrac{a+b}{2}\right)$.

2° Diagramme circulaire

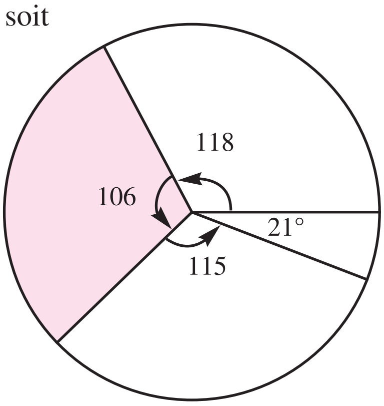
Ce diagramme est surtout utilisé pour représenter une série statistique à variable **qualitative.** Il consiste à partager un disque en secteurs dont les angles sont proportionnels aux effectifs (ou aux fréquences) . Si α est l'angle en degrés d'un secteur représentant une modalité X_i de la variable dont l'effectif est n_i , alors : $\boldsymbol{\frac{\alpha}{360°} = \frac{n_i}{N} = f_i}$ (N étant l'effectif total et f_i la fréquence de X_i) .

EXEMPLE

Le tableau ci-dessous donne la répartition de 1855 élèves suivant le niveau d'étude.

Niveau	1ère année secondaire	2ème année secondaire	3ème année secondaire	Technique	
Effectif	610	545	590	110	**Total 1 855**

Le nombre total des élèves est représenté par un disque complet, soit un secteur d'angle de mesure 360°.



L'angle α du secteur représentant la 1ère année secondaire vérifie $\frac{\alpha}{360°} = \frac{610}{1\,855}$,
soit $\alpha = 118°$.

L'angle β du secteur représentant la 2ème année secondaire vérifie :
$\frac{\beta}{360°} = \frac{545}{1\,855}$, soit $\beta = 106°$.

De même l'angle du secteur représentant la 3ème année secondaire est 115° et celui de la technique est 21° .

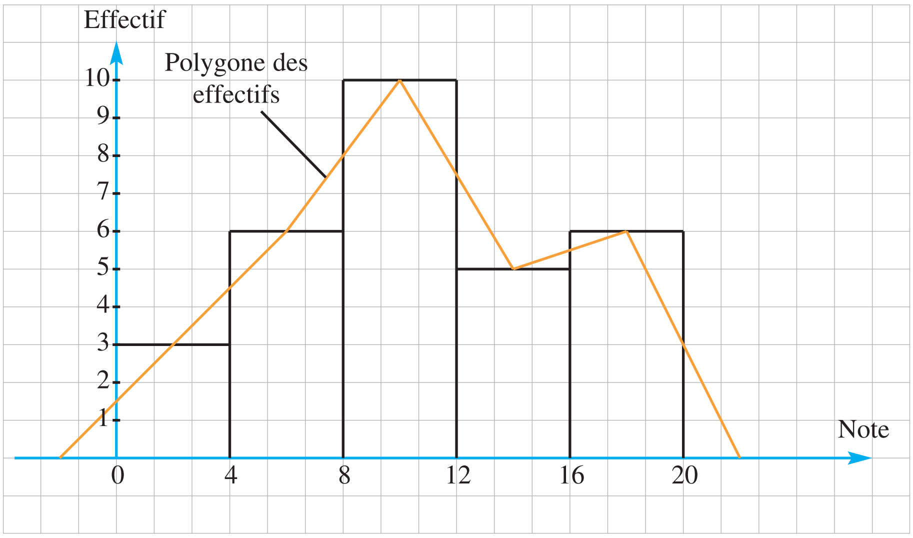
3° Histogramme

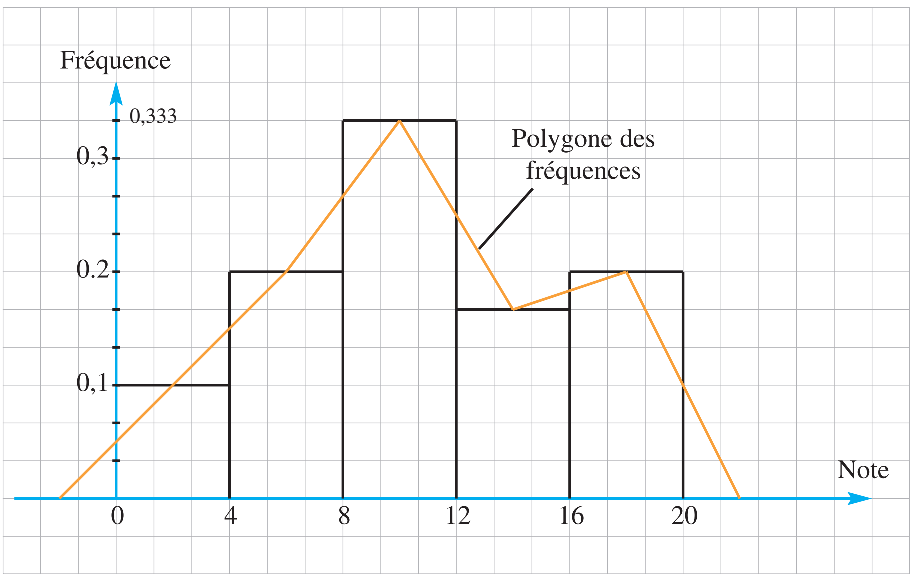
Pour représenter une série statistique dont les valeurs sont regroupées en classes d'amplitudes égales , on utilise une représentation graphique appelée histogramme des effectifs , des fréquences , des effectifs cumulés ou des fréquences cumulées . Il est formé de rectangles dont l'un des côtés est l'amplitude α de la classe $[a\,;b[$ ($\alpha = b - a$) pris sur l'axe des x et l'autre côté est égal à l'effectif ou la fréquence de cette classe pris sur l'axe des y .

EXEMPLE

1. Le tableau ci-dessous donne les notes sur 20 obtenues par les 30 élèves d'une classe pour un devoir de mathématiques .

Note	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20]	
Effectif	3	6	10	5	6	**Total 30**
Fréquence	0,1	0,2	0,333	0,166	0,2	**Total 1**



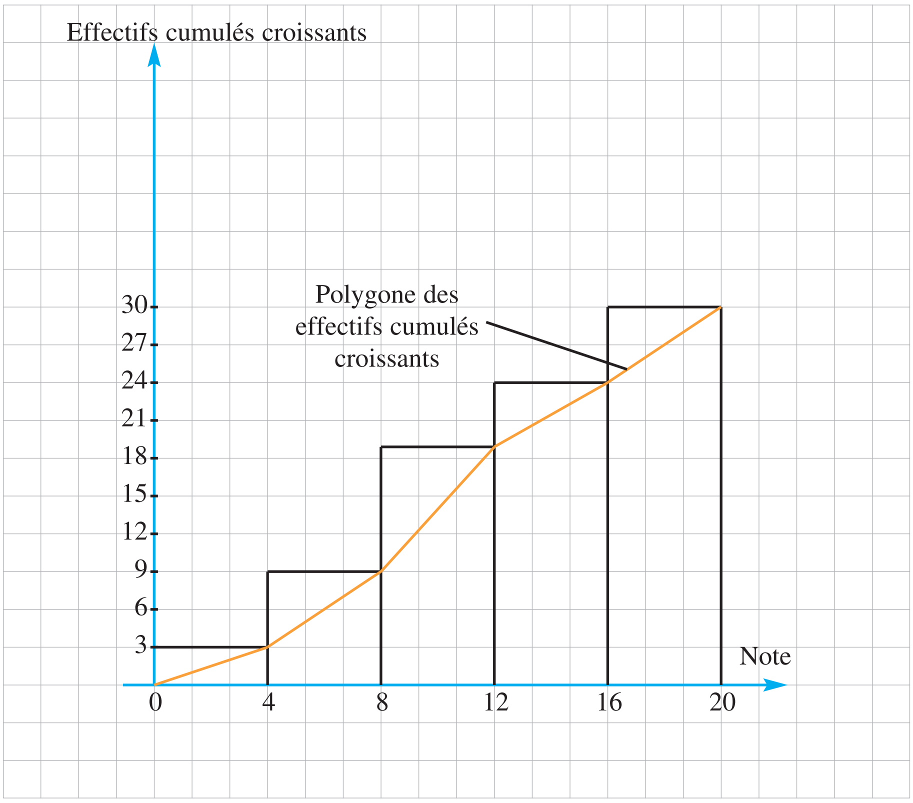


La ligne polygonale joignant les points $(x_i\,;\,y_i)$ où $x_i = \dfrac{b+a}{2}$ et y_i est l'effectif (ou la fréquence) de la classe correspondante . Elle s'appelle **polygone des effectifs** ou **des fréquences** .

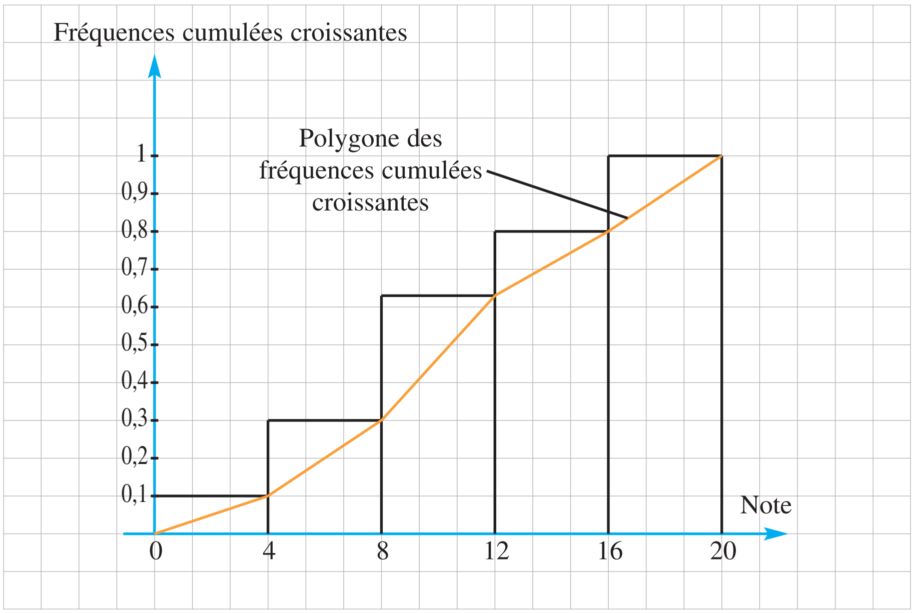
Il est commode de prolonger cette ligne polygonale aux centres des deux classes : celle qui est immédiatement inférieure à la première classe et celle qui est supérieure à la dernière classe et dont les effectifs (ou les fréquences) sont nuls (points situés sur l'axe des abscisses) .

2. Le tableau ci-dessous donne les effectifs cumulés croissants et les fréquences cumulées croissantes de la même série statistique .

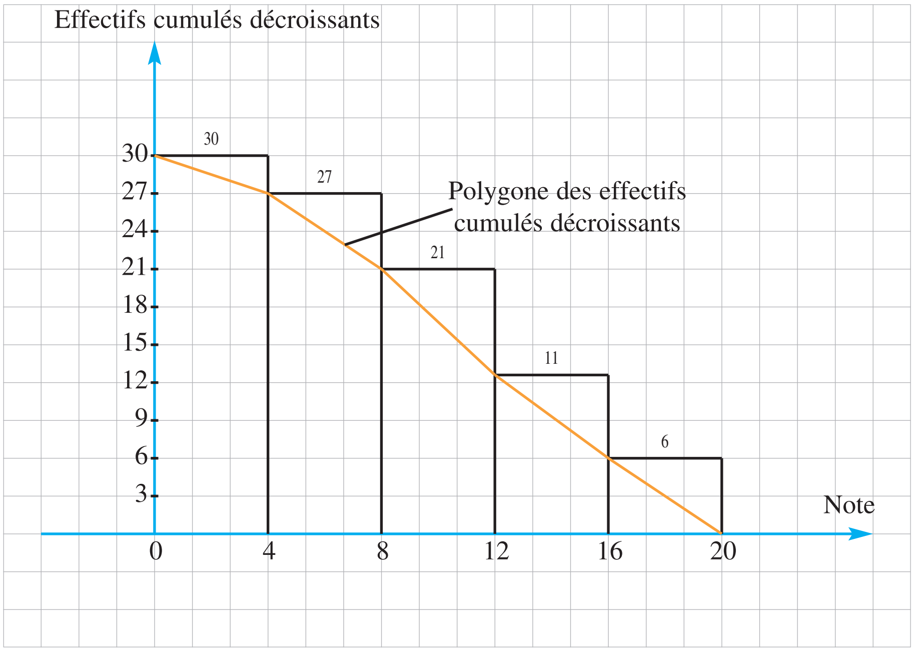
Note	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20]
Effectifs cumulés croissants	3	9	19	24	30
Fréquences cumulées croissantes	0,1	0,3	0,633	0,799	1



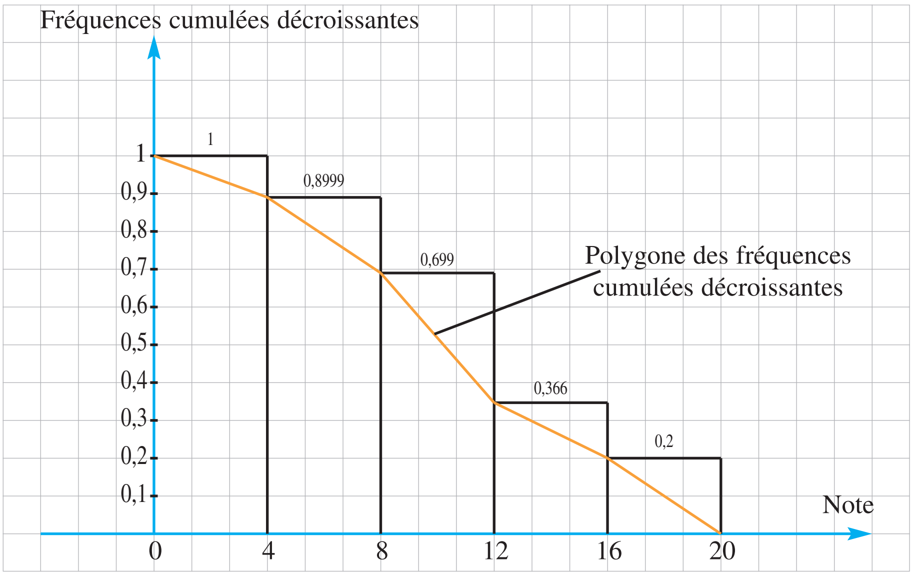
La ligne brisée obtenue en joignant les points (0 ; 0) , (4 ; 3) , (8 ; 9) , (12 ; 19) , (16 ; 24) et (20 ; 30) s'appelle le polygone des effectifs cumulés croissants ou la courbe cumulative croissante .



La ligne brisée obtenue en joignant les points (0 ; 0) , (4 ; 0,1) , (8 ; 0,3) , (12 , 0,633) , (16 ;. 0,799) et (20 ; 1) s'appelle le polygone des fréquences cumulées croissantes ou la courbe cumulative croissante .



La ligne brisée obtenue en joignant les points (0 ; 30) , (4 ; 27) , (8 ; 21) , (12 ; 11) , (16 ; 6) et (20 ; 0) s'appelle le polygone des effectifs cumulés décroissants ou la courbe cumulative décroissante des effectifs .



La ligne brisée obtenue en joignant les points (0 ; 1) , (4 ; 0,899) , (8 ; 0,699) , (12 ; 0,366) , (16 ; 0,2) et (20 ; 0) s'appelle le polygone des fréquences cumulées décroissantes ou la courbe cumulative décroissante des fréquences .

3. CARACTÉRISTIQUES OU INDICATEURS D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

A Caractéristiques de position

1° Mode - Classe modale

Le mode d'une série statistique , notée ***Mo*** **est la valeur** de la variable **correspondant à l'effectif le plus grand** , c'est-à-dire **la plupart des individus de la population ont cette valeur .**

Dans le cas où la série est répartie en classes , la **classe modale** de cette série est la classe qui a le plus grand effectif . **Une valeur approchée du mode d'une série regroupée en classes est le centre de la classe modale .**

Le mode ou la classe modale d'une série peut ne pas exister (si toutes les valeurs ou toutes les classes ont le même effectif) , ou peut ne pas être unique , dans ce dernier cas la série est dite multimodale .

EXEMPLES

- La série 1 2 333 4444 55 a pour mode 4 .
- La série 1 1 1 2 333 44 5 est bimodale . Elle a pour modes 1 et 3 .
- La série 1 3 5 7 9 11 n'a pas de mode .
- La répartition de 100 élèves d'une école suivant leur taille est donnée par le tableau suivant :

Taille en cm	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180]
Effectif	20	25	35	20

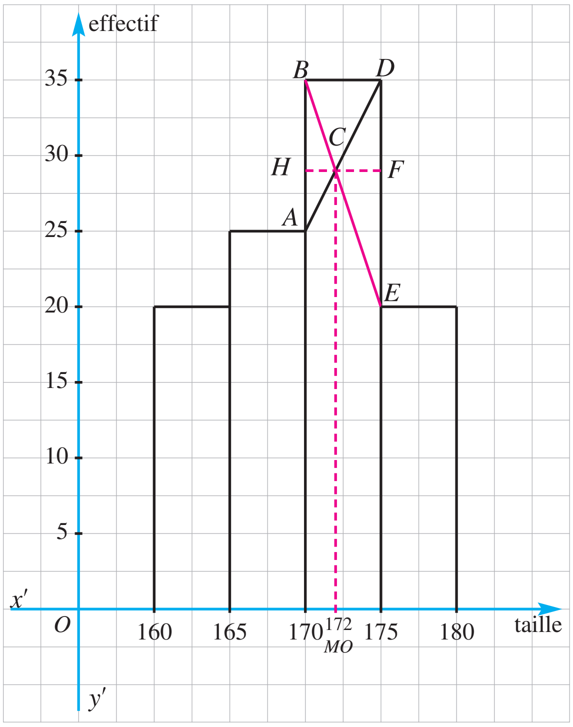
La classe modale de la série est [170 ; 175[. Une valeur approchée du mode de cette série est 172,5 cm .

2° Détermination du mode pour une série groupée en classes

a) Graphiquement

L'histogramme ci-contre représente la série de l'exemple précédent . Le mode *Mo* est l'abscisse du point *C* intersection des segments [*AD*] et [*BE*] construits dans le rectangle relatif à la classe modale .

On remarque que *Mo* est approximativement égal à 172 cm .



b) Par le calcul

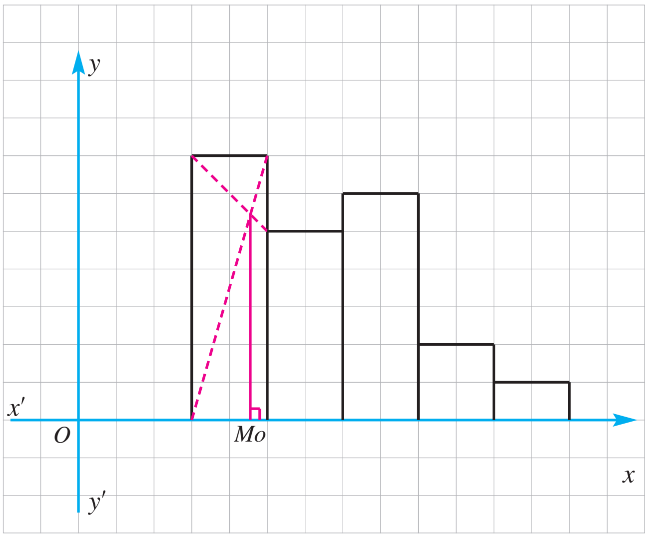
La similitude des deux triangles *CAB* et *CDE* donne $\frac{CH}{CF} = \frac{AB}{ED}$; $\frac{CH}{5 - CH} = \frac{35 - 25}{35 - 20} = \frac{10}{15}$; d'où

$15CH = 50 - 10CH$; $25CH = 50$ et $CH = 2$.

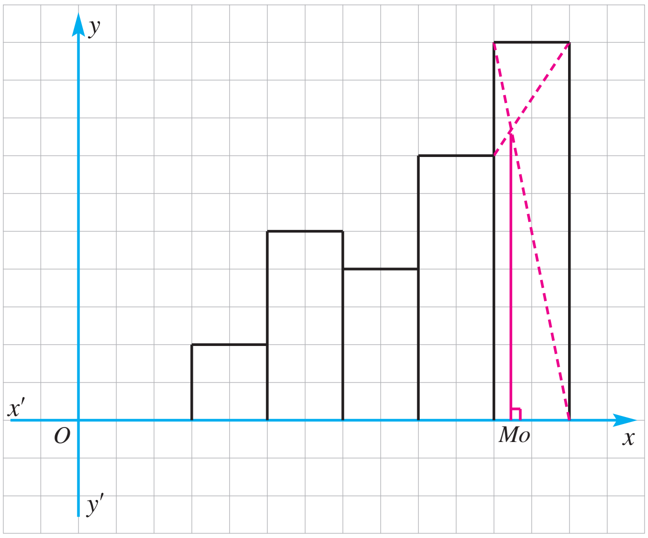
Par suite $Mo = 170 + 2 = 172$, où 170 est la borne inférieure de la classe modale , soit $Mo = 172$ cm .

c) Cas particuliers

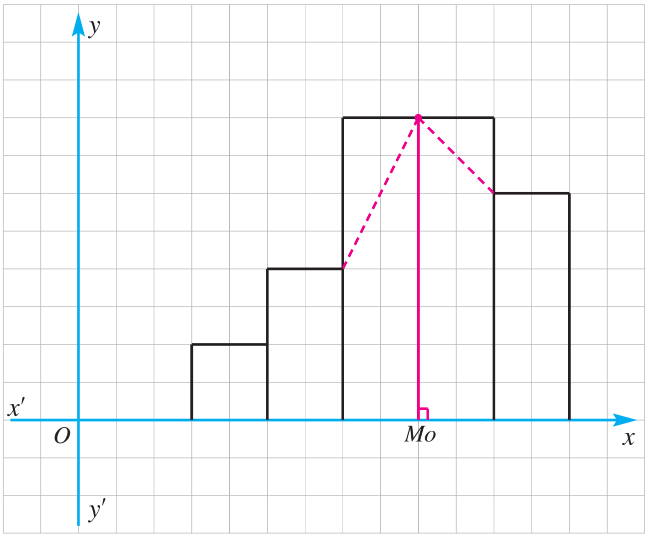
1. La première classe est la classe modale



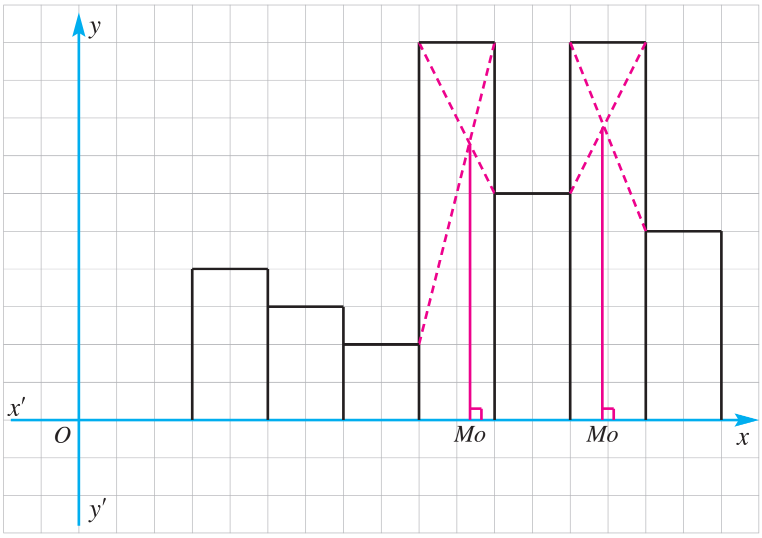
2. La dernière classe est la classe modale



3. Il y a deux classes modales adjacentes



4. La série est bimodale (la série a deux modes)



3° La moyenne (arithmétique)

La moyenne $\overline{x}$ d'une série statistique **est le quotient de la somme de toutes les valeurs prises par la variable par l'effectif total ou le nombre total de ces valeurs .**

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{N}$$

où N est l'effectif total et n_i l'effectif de la valeur x_i prise par la variable .
Si la série statistique est répartie en classes , le centre de chaque classe est considéré comme la valeur de la variable .

EXEMPLE

Les notes de mathématiques d'un élève sont :

8 10 10 12 12 12 12 14 15 15

La moyenne de ces notes est :

$$\overline{x} = \frac{1\times8 + 2\times10 + 4\times12 + 1\times14 + 2\times 15}{10} = 12 .$$

Remarque

Lorsqu'on ajoute une même quantité *k* (ou on multiplie par *k*) à chacune des valeurs de la variable , cela revient à ajouter (ou à multiplier) la même quantité *k* à la moyenne .

4° Médiane - Classe médiane

Les valeurs d'un caractère d'une série stastistique étant classées par ordre croissant , la **médiane** notée ***Me*** est la valeur telle qu'il existe autant de termes de la série inférieurs à *Me* que de termes supérieurs , c'est-à-dire **50% des individus de la population ont une valeur inférieure à *Me* .**

• Dans la série : $\underbrace{3 \quad 5 \quad 8} \quad \boxed{9} \quad \underbrace{11 \quad 14 \quad 17}$ la médiane est $Me = 9$

• Dans la série : $\underbrace{8 \quad 8} \quad \boxed{11} \quad \underbrace{12 \quad 14}$ la médiane est $Me = 11$

• Dans la série : $\underbrace{6 \quad 6 \quad 6} \quad \boxed{6} \quad \underbrace{13 \quad 14 \quad 15}$ la médiane est : $Me = 6$

• Dans la série : $\underbrace{5 \quad 7 \quad 8 \quad 8} \quad \boxed{10\ 11} \quad \underbrace{13 \quad 14 \quad 14 \quad 16}$

le nombre des termes étant pair , toute valeur comprise entre 10 et 11 est une valeur médiane . En général , on prend : $Me = \dfrac{10 + 11}{2} = 10{,}5$.

• Soit la série des notes de 12 élèves donnée par le tableau suivant :

Note	6	8	12	15	16	18
Effectif	1	1	3	4	2	1
Effectifs cumulés croissants	1	2	5	9	11	12

L'effectif total étant 12 (pair) , la médiane est la demi somme correspondante à la $6^{ème}$ et $7^{ème}$ notes qui se trouvent dans la case où l'effectif cumulé croissant est 9 .

$$Me = \frac{15 + 15}{2} = 15 .$$

Dans le cas où la série statistique est groupée en classes , la classe médiane est celle qui correspond à l'effectif cumulé qui dépasse $\dfrac{N}{2}$ où N est l'effectif total de la série .

5° Détermination de la médiane pour une série groupée en classes .

a) Graphiquement

La médiane est déterminée graphiquement de deux façons :

• par l'abscisse du point du polygone des effectifs cumulés croissants dont l'ordonnée est la moitié de l'ordonnée maximale , ou l'abscisse du point du polygone des fréquences cumulées croissantes dont l'ordonnée est 0,5 ou 50% .

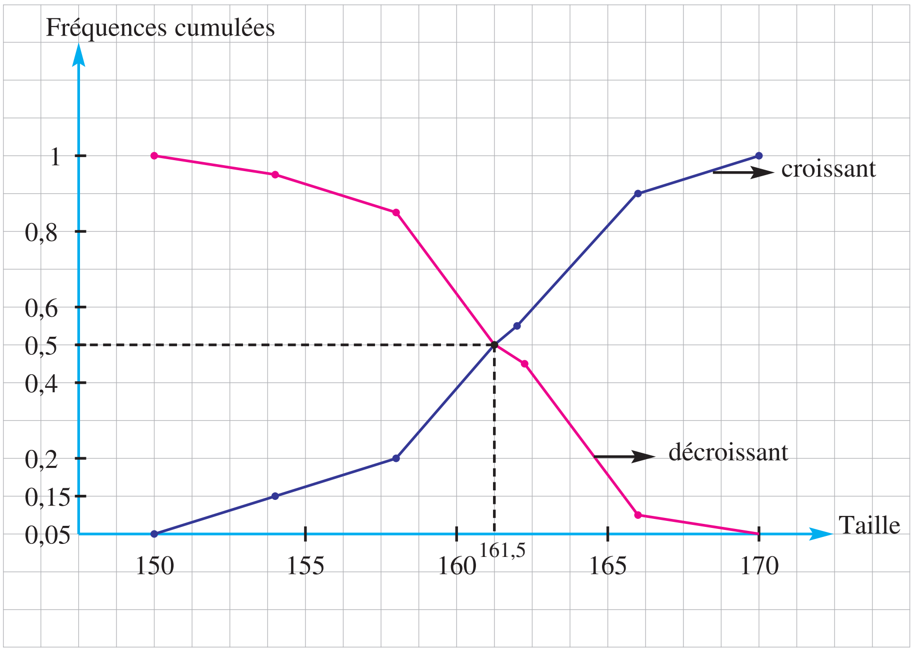
• par l'abscisse du point d'intersection des deux polygones (ou des deux courbes cumulatives) des effectifs (ou des fréquences) cumulés croissants et décroissants .

EXEMPLE

La répartition des 500 élèves d'une école suivant leur taille est donnée par le tableau suivant :

Taille en cm	[150 ; 154[	[154 ; 158[	[158 ; 162[	[162 ; 166[	[166 ; 170]
Effectif	25	50	200	175	50
Effectifs cumulés croissants	25	75	275	450	500
Effectifs cumulés décroissants	500	475	425	225	50
Fréquences cumulées croissantes	0,05	0,15	0,55	0,9	1
Fréquences cumulées décroissantes	1	0,95	0,85	0,45	0,1

• Pour tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes , on joint les points suivants : (150 ; 0) , (154 ; 0,05) , (158 ; 0,15) . (162 ; 0,55) , (166 ; 0,9) , (170 ; 1) .



Me = 161,5

La médiane , comme l'indique le schéma , est : Me = 161,5 cm .

• Pour tracer le polygone des fréquences cumulées décroissantes on joint les points suivants :(150 ; 1) , (154 ; 0,95) , (158 ; 0,85) , (162 ; 0,45) , (166 ; 0,1) , (170 ; 0) .

L'abscisse du point d'intersection des deux polygones est la médiane qui est $Me = 161{,}5$ cm .

b) Par le calcul

1. Une première méthode

Dans l'exemple précédent , la médiane est dans la classe dont l'effectif cumulé dépasse la moitié de l'effectif $\frac{N}{2} = 250$ où N est l'effectif total , soit 500 élèves . Cette classe est donc [158 ; 162[.
On effectue une règle de trois par une approximation qui suppose les tailles également réparties à l'intérieur de la classe [158 ; 162[.

À un effectif de 200 correspond une différence de $162 - 158 = 4$.

À un effectif de $250 - 75 = 175$ correspond une différence de $\frac{175 \times 4}{200} = 3{,}5$.

La taille médiane Me est donc $\underbrace{158}_{\substack{\textbf{borne inférieure}\\ \textbf{de la classe}\\ \textbf{[158 ; 162[}}} + 3{,}5 = 161{,}5$, soit 161,5 cm .

Ce calcul peut être résumé par :

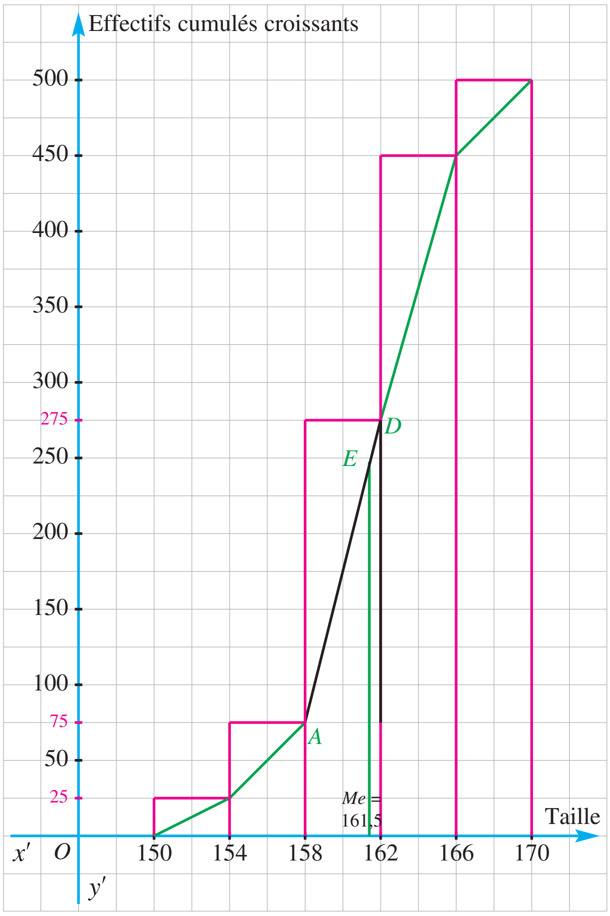
$$Me = \underbrace{158}_{\substack{\textbf{borne inférieure}\\ \textbf{de la classe}}} + \underbrace{(162 - 158)}_{\substack{\textbf{amplitude de}\\ \textbf{la classe}}} \times \frac{\overbrace{\mathbf{250 - 75}}^{\substack{\frac{N}{2}\ \textbf{moins effectif cumulé}\\ \textbf{da la classe}\\ \textbf{précédente}}}}{\underbrace{\mathbf{200}}_{\substack{\textbf{effectif de}\\ \textbf{la classe}}}} = 161{,}5$$

2. Une deuxième méthode (Par interpolation linéaire)

L'histogramme ci-contre est celui des effectifs cumulés croissants de la série précédente . La droite d'équation $y = 250$ coupe la ligne polygonale en $E(x_E\ ;\ 250)$. x_E est la médiane *Me* de la série . Les points *A* , *E* et *D* étant alignés , les droites (*AE*) et (*AD*) ont même coefficient directeur , par suite :

$$\frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A}\text{ , soit }\frac{250 - 75}{x_E - 158} = \frac{250 - 75}{162 - 158}\ ;$$

qui donne $x_E = 161{,}5$; d'où $Me = 161{,}5$.



Remarque

Si la série statistique est répartie en classes , une modification du groupement peut changer les valeurs de la médiane , de la classe modale et de la moyenne .

B Caractéristiques de dispersion

Les caractéristiques de position situent la série autour d'une valeur centrale mais ne donnent aucune idée de l'étalement des termes autour de cette valeur .

Soit deux familles de cinq enfants dont les âges sont respectivement les suivants :

Première série :	11	13	14	15	16
Deuxième série :	2	5	14	23	25

Ces deux séries ont même médiane ($Me = 14$) et même moyenne ($\overline{x} = 13{,}8$) . Elles ne sont pas , cependant , identiques , les termes de la seconde série étant beaucoup plus dispersés que ceux de la première .

Cet exemple montre la nécessité de calculer de nouvelles caractéristiques destinées à renseigner sur la répartition des termes d'une série autour de sa valeur centrale . Elles sont appelées **caractéristiques de dispersion** . Les plus employées sont : l'étendue , l'écart-moyen et l'écart-type .

1° Étendue

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur prises par le caractère étudié . Dans le cas d'une série groupée en classes , **l'étendue est la différence entre la borne supérieure de la dernière classe et la borne inférieure de la première classe .**

Par exemple , dans la première série l'étendue est 16 – 11 = 5 .

2° Écart-moyen

L'écart-moyen , noté e , est la moyenne des écarts de chaque valeur à la moyenne , pris en valeurs absolues .

$$\boldsymbol{e = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \, |x_i - \bar{x}|}{N}}$$

où N est l'effectif total ,
x_i la valeur du caractère (ou le centre de la classe)
n_i l'effectif de la valeur x_i ,
$\bar{x}$ la moyenne .

Cet écart donne une idée assez bonne de la concentration des valeurs autour de la moyenne .

3° Variance et écart-type

Pour donner plus d'importance aux valeurs éloignées de la série , on élève au carré l'écart de chaque valeur à la moyenne . La moyenne de ces carrés est la **variance** notée $\boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{V = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N}}$$

L'unité de la variance est le carré de celle de la variable . Pour garder la même unité , on calcule la racine carrée de la variance appelée l'**écart-type** noté $\boldsymbol{\sigma}$ (lire sigma) : $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{V}}$

Reprenons l'exemple précédent : Première série : 11 13 14 15 16
Deuxième série : 2 5 14 23 25

L'écart-type σ_1 de la première série est :

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{(13,8-11)^2 + (13,8-13)^2 + (14-13,8)^2 + (15-13,8)^2 + (16-13,8)^2}{5}} = 1,7 .$$

L'écart-type σ_2 de la seconde série est :

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{(13,8-2)^2 + (13,8-5)^2 + (14-13,8)^2 + (23-13,8)^2 + (25-13,8)^2}{5}} = 9,2 .$$

Interprétation

- L'écart-type est le plus employé pour caractériser la dispersion des termes d'une série . Il sert à comparer la régularité des valeurs de deux séries. Celle dont l'écart-type est plus petit , est régulière et celle dont l'écart-type est plus grand , est dispersée . Plus l'écart-type est faible , plus les valeurs sont regroupées autour de la moyenne . La moyenne serait , dans ce cas , plus représentative de la population . Dans l'exemple précédent on a $\sigma_1 < \sigma_2$: la première série est donc plus régulière que la seconde .

- Le plus grand nombre des valeurs d'une série se trouve dans l'intervalle $[\bar{x} - \sigma ; \bar{x} + \sigma]$.

Pour la pemière série $[\bar{x} - \sigma_1 ; \bar{x} + \sigma_1] = [12.1 ; 15,5]$. Les valeurs de cette série qui sont 11 , 13 , 14 , 15 et 16 sont situées dans cet intervalle sauf 11 et 16 , soit 60 % des valeurs .

- Si on prend l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma_1 ; \bar{x} + 2\sigma_1] = [10,4 ; 17,2]$, on remarque que toutes les valeurs de cette série sont situées dans cet intervalle , soit 100 % .

Remarque

• Pratiquement , pour la facilité des calculs on utilise la formule suivante de la variance , obtenue par le développement de celle citée précédemment :

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \bar{x}^2 .$$

• Lorsqu'on ajoute une même quantité h à chacune des valeurs de la variable , la variance ne change pas . Mais si on multiplie chacune des valeurs de la variable par un même nombre h la variance est multipliée par h^2.

4 USAGE DE LA CALCULATRICE

Le tableau suivant résume les poids en kg de vingt élèves d'une classe de troisième année secondaire .

Classe	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60]	
Centre x_i	47,5	52,5	57,5	
Effectif n_i	9	4	7	**Total** **$N = 20$**

Casio *fx* 95 - 570 ES PLUS

$\boxed{\text{MODE}} \rightarrow \boxed{3} \rightarrow \boxed{1}$

Fais démarrer l'effectif .

$\boxed{\text{SHIFT}} \rightarrow \boxed{\text{MODE}} \rightarrow \downarrow \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{1}$

$\boxed{47.5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{52.5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{57.5}$

passe à la colonne suivante pour remplir les

effectifs $\boxed{9}$ $\boxed{=}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{7}$ $\boxed{=}$

tape $\boxed{\text{AC}}$

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{1} \rightarrow \boxed{4}$.

$\boxed{2} \rightarrow \boxed{\bar{x}}$

$\boxed{3} \rightarrow \boxed{\sigma x}$.

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Les notes , sur 100 , d'un élève à 6 examens sont les suivantes :

68 72 78 84 87 91

1° Quelle est l'étendue de cette série des notes ?

2° Quelle est la moyenne de ces notes ?

3° Calculer la médiane de cette série .

2 On a relevé pour 100 voitures la distance parcourue en 5 ans .

Le tableau suivant résume les résultats obtenus :

Distance parcourue (en milliers de km)	[40 ; 50[	[50 ; 60[	[60 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 90]
Effectif	20	45	15	12	8

1° Quelle est la population étudiée ? Quel est l'individu ?

2° Quel est le caractère étudié ? Est-il qualitatif on quantitatif ? Est-il discret ou continu ?

3° Construire l'histogramme de cette série .

4° Quelle est la distance moyenne parcourue par une voiture ?

3 Sami a obtenu les notes suivantes , sur 20 , aux devoirs de chimie : 8 10 9 6,5 11,5 .

1° Calculer la moyenne de ses notes .

2° Quelle note doit-il obtenir au sixième devoir pour que sa moyenne augmente d'un point ?

4 Lors d'un examen , la moyenne des notes d'une classe est 9,5 . Le professeur décide d'augmenter les notes d'un point .

1° La moyenne des notes restera-t-elle la même ? Sinon quelle est la nouvelle moyenne ?

2° En est-il de même de l'écart-type des notes ?

5 A partir d'un relevé des prix , exprimés en dollars , de 400 robes en vente dans un grand magasin , on a établi le tableau suivant :

Classes (en dollars)	[400 ; 500[	[500 ; 600[	[600 ; 700[	[700 ; 800[	[800; 900]
Effectif	25	90	145	90	50

1° Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et des fréquences cumulées croissantes .

2° Construire l'histogramme des effectifs et le polygone des fréquences cumulées croissantes .

3° Calculer le prix moyen d'une robe et l'écart-type de ces prix .

6 Le tableau suivant indique le nombre de livres lus par les trente élèves d'une classe de troisième année secondaire .

Nonbre de livres lus	0	1	2	3	4	5	6
Effectif	4	6	10	5	3	1	1

1° Quel est le mode de cette série ?

2° Quelle est la médiane de cette série ?

3° Calculer l'étendue de cette série .

4° Calculer la moyenne $\overline{x}$ et l'écart-type σ .

5° On double le nombre de livres lus .
Calculer la moyenne et l'écart-type de la nouvelle série ainsi formée . Que peut on conclure ?

6° a) Regrouper , dans un tableau , ces données en classes d'amplitude 2 cm indiquant les effectifs cumulés croissants et décroissants et les fréquences cumulées croissantes et décroissantes .
b) Quelle est la classe modale ? La moyenne $\overline{m}$? L'écart-type σ' ?
c) Construire les courbes cumulatives croissante et décroissante des effectifs . Déduire la médiane . Retrouver cette valeur par le calcul .

7 Soit la série statistique donnée par le tableau suivant :

Valeurs x_i	650	670	820
Effectif	10	6	5

1° Calculer la moyenne $\overline{x}$, la variance V et l'écart-type σ .

2° On triple les trois valeurs en conservant les effectifs . Que devient la moyenne ? La variance ? L'écart-type ?

3° Construire le diagramme circulaire de cette série .

8 Pour juger du niveau des élèves de deux classes parallèles , on les fait composer sur un même sujet . Les résultats sont donnés par le tableau suivant :

	Effectif	Moyenne	Ecart-type
1ère classe	$N_1 = 35$	$\overline{x}_1 = 12{,}23$	$\sigma_1 = 2{,}43$
2ème classe	$N_2 = 42$	$\overline{x}_2 = 13{,}41$	$\sigma_2 = 1{,}83$

1° Quelle est la classe qui a le meilleur niveau ? Justifier .

2° On forme un nouvel échantillon en réunissant les copies des deux classes . Calculer la moyenne des notes de ce nouvel échantillon .

9 On désire comparer la régularité des résultats des deux élèves Fouad et Rami , sur 12 devoirs :

Fouad : 6 - 14 - 9 - 5 - 13 - 16 - 13 - 10 - 12 - 9 - 14 - 8 .

Rami : 11 - 12 - 11 - 8 - 12 - 14 - 9 - 10 - 11 - 10 - 10 - 11 .

1° Trouver la moyenne $\overline{x}_1$ des notes de Fouad et la moyenne $\overline{x}_2$ des notes de Rami .

2° Comparer les écarts-types σ_1 et σ_2 des notes respectives de Fouad et Rami . Qui est le plus régulier?

10 On effectue des essais sur 110 batteries d'une marque donnée pour tester la durée de vie (exprimée en heures) . Les renseignements obtenus sont regroupés par classes d'amplitude 50 h dans le tableau suivant :

Classes	$[550^h;600^h[$	$[600^h;650^h[$	$[650^h;700^h[$	$[700^h;750^h[$	$[750^h;800^h[$	$[800^h;850^h[$	$[850^h;900^h[$	$[900^h;950^h]$
Effectif	3	7	15	35	40	5	4	1

1° Dresser le tableau résumant les fréquences cumulées croissantes et tracer le polygone correspondant . Déduire graphiquement la médiane .

2° Calculer , en remplaçant chaque classe par son centre x_i , la moyenne $\overline{x}$ et l'écart-type σ de la série ainsi formée .

3° On a également testé un même nombre de batteries d'une autre marque . La moyenne de durée de vie est 700 ^{h} et l'écart-type est 167 ^{h} . Quelle est la marque qui vous semble la meilleure ? Expliquer .

4° Calculer le mode de cette série .

Pour chercher

11 On jette un dé 100 fois et on note par x_i le numéro obtenu . On appelle n_i l'effectif correspondant à x_i. On obtient le tableau ci-contre :

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	20	10	26	14	10	20

1° Déterminer les fréquences f_i , les fréquences cumulées croissantes , le diagramme en bâtons et le polygone des fréquences .

2° Déterminer le mode , la moyenne $\overline{x}$ et la médiane Me .

3° **a)** Calculer l'écart-type σ .

b) Quel est le pourcentage d'apparition des numéros compris dans $[\overline{x}-\sigma\,;\overline{x}+\sigma]$ et dans $[\overline{x}-2\sigma\,;\overline{x}+2\sigma]$?

12 Dans un club de tir à l'arc , deux joueurs Sami et Ziad sont en concurrence pour une place de titulaire dans l'équipe du club .
On teste ces deux joueurs en leur faisant effectuer 50 tirs sur la cible représentée sur la figure ci-contre .
La marque s'effectue selon la règle suivante :
3 points pour la zone A ,
2 points pour la zone B ,
1 point pour la zone C
et 0 point pour D .

La série de Sami et celle de Ziad sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Marque	0	1	2	3
Sami	7	12	15	16
Ziad	3	13	25	9

1° Quelle est la marque moyenne de Sami ? Celle de Ziad ?

2° Quels sont les écarts-types des marques des deux joueurs ? Quel est le joueur le plus régulier ? Lequel sera choisi comme titulaire dans l'équipe ?

13 Dans une usine , deux machines A et B fabriquent un même genre de roues . On mesure avec précision le diamètre en mm de 100 roues fournies par chacune des deux machines . Les résultats sont donnés par les deux tableaux suivants :

Machine A

Diamètre en mm	35	36	37	38	39	40	41
Effectif	5	16	25	22	18	8	6

Machine B

Diamètre en mm	35	36	37	38	39	40	41
Effectif	0	14	18	20	32	8	8

1° Calculer le diamètre moyen $\overline{d}$ des roues fournies par chacune de ces deux machines .

2° Calculer la variance V et l'écart-type σ des diamètres des roues de chacune des deux machines .

3° La production de quelle machine est la plus régulière ? Expliquer .

4° Trouver les poucentages des diamètres qui se trouvent dans $[\overline{d} - 2\sigma\ ;\ \overline{d} + 2\sigma]$ pour chacune des deux machines .

5° Une machine est jugée «bonne» si la série des mesures vérifie les conditions suivantes :

a) $\overline{d} \in [38\ ;\ 39]$;

b) $\sigma < 1{,}5$;

c) 95% de l'effectif est dans $[\overline{d} - 2\sigma\ ;\ \overline{d} + 2\sigma]$.

Laquelle des deux machines est «bonne» ?

14 Les élèves d'une classe ont passé un contrôle écrit en deux groupes sur le même sujet et ont donné les résultats suivants :

Groupe *A*	**Effectif $N_A = 13$**						
Note x_i	5	7	8	9	10	11	15
Effectif n_i	1	2	1	3	2	3	1

Groupe *B*	**Effectif $N_B = 14$**							
Note x_i	6	7	9	10	11	13	14	16
Effectif n_i	2	1	2	2	1	3	2	1

On considère la classe toute entière .

1° Dresser le tableau des effectifs de toutes les notes .

2° Construire le diagramme en bâtons de la série statistique ainsi formée .

3° Quel est le mode de cette série ?

4° Comparer les deux groupes par leur moyenne .

5° Comparer les deux groupes par leur médiane .

6° Comparer les deux groupes par leur étendue . Peut-on avoir une idée sur la dispersion ?

7° Comparer les deux groupes par leur écart-type . Que peut-on déduire ? Quel est le groupe le plus homogène ?

15 Une machine fabrique des tiges cylindriques de diamètre théorique 25 mm pour le béton armé . On contrôle le fonctionnement de la machine en prélevant un échantillon de 100 pièces au hasard dans la fabrication . Les mesures , en mm , des diamètres ont donné les résultats suivants :

Diamètre en mm	[24 ; 24,2[	[24,2 ; 24,4[	[24,4 ; 24,6[	[24,6 ; 24,8[	[24,8 ; 25[	[25 ; 25,2[	[25,2 ; 25,4[	[25,4 ; 25,6[	[25,6 ; 25,8[	[25,8 ; 26]
Effectif	0	5	13	24	19	14	10	8	5	2

1° Calculer le diamètre moyen d et l'écart-type σ des diamètres de cette série .

2° La production est jugée «bonne» si la série des diamètres vérifie les conditions suivantes :

a) $\overline{d} \in [24{,}9 ; 25{,}1]$;

b) $\sigma < 0{,}4$;

c) au moins 90% de l'effectif appartient à $[\overline{d} - 2\sigma ; \overline{d} + 2\sigma]$.

La production est-elle «bonne» ?

16 Le tableau suivant donne la quantité de calcium (en mg) prise chaque jour par personne d'un groupe de 35 personnes .

879	1096	701	986	828	1077	703
555	422	997	473	702	508	530
513	720	944	673	574	707	864
1099	743	1025	655	1043	599	1008
705	380	387	542	893	1052	473

1° Organiser ces données dans un tableau de classes d'amplitude 100, en commençant par la classe [350 ; 450] .

2° Calculer la médiane de la série groupée dans la question précédente et interpréter cette valeur .

3° Calculer la moyenne $\overline{x}$ et l'écart-type de la série ainsi groupée .

4° On suppose que la quantité de calcium prise quotidiennement est normale si :

a) $750 \leqslant \overline{x} \leqslant 850$;

b) $\sigma \leqslant 100$ mg ;

c) au moins 95% de l'effectif total appartient à l'intervalle $[\overline{x} - 2\sigma ; \overline{x} + 2\sigma]$.

Que pouvez-vous dire du niveau de vie de ces personnes ?

Bac.

17 Le tableau suivant donne la distribution des salaires annuels (en millions LL) des employés d'une entreprise :

Salaires (en millions LL)	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30[	[30 ; 35]
Effectif	21	30	39	27	15	12	6

1° Déterminer pour cette distribution :

a) la population .

b) le caractère et sa nature .

2° Déterminer la classe modale . Justifier votre réponse .

3° Calculer la moyenne de cette distribution .

4° Reproduire le tableau précédent et le compléter par les effectifs cumulés croissants , les fréquences et les fréquences cumulées croissantes .

5° **a)** Construire le polygone des effectifs cumulés croissants .

b) Déduire graphiquement une valeur approchée de la médiane et donner une signification à la valeur ainsi trouvée .

Bac.

18 Dans les deux usines A et B d'une même société industrielle , travaillent 150 employés .
Les tableaux suivants donnent la distribution des salaires mensuels dans chacune des deux usines .

Usine *A* :

(*A*)

Salaire en 100 000 LL	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[	[20 ; 24]
Nombre d'employés	15	12	20	11	2

Usine *B* :

(*B*)

Salaire en 100 000 LL	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[	[20 ; 24]
Nombre d'employés	12	35	25	17	1

On note $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ les moyennes respectives de ces deux séries statistiques (A) et (B) .

1° Calculer $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ à 10^{-1} près . Quel est le salaire mensuel moyen des employés de cette société ?

2° Calculer l'écart-type de chacune de ces deux séries .

3° Laquelle de ces deux séries est moins dispersée autour de sa moyenne ? Justifier la réponse .

Bac.

12 DÉNOMBREMENT

Un peu d'histoire

Une technique de dénombrement consiste à partager un ensemble que l'on veut dénombrer en sous-ensembles que l'on peut plus facilement dénombrer.
Dès la Renaissance , les mathématiciens utilisent les techniques de dénombrement pour résoudre certains énigmes .
L'égalité $C_n^2 = \frac{1}{2} n(n-1)$ *est connue au* ***III^e siècle*** *de notre ère .*
Au XII^e siècle *, le mathématicien hindou* ***Bhaskara*** *connaît la formule générale permettant de calculer* C_n^p .
Au début du XIV^e ***siècle*** *, le rabbin provençal* ***Levi Ben Gerson (1288 - 1344)*** *sait calculer les arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments et connaît les égalités* $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$, $C_n^p = C_n^{n-p}$.
Ses travaux semblent avoir eu peu d'influence sur son époque .
Plus tard , ***Cardan (1501-1576)*** *montre que* $2^n - 1$ *est le nombre de parties non vides d'un ensemble à n éléments .*
Pascal (1623-1662) et ***Fermat (1601-1665)*** *retrouvent la formule générale de* C_n^p .
Le procédé du triangle , attribué généralement à Pascal , semble être connu des ***Arabes*** *dès le* ***XIII^e siècle*** *et des* ***Chinois*** *au XIV^e* ***siècle*** *.*

PLAN DU CHAPITRE

ACTIVITÉ PRÉPARATOIRE

COURS

Rappel
1. Parties de *p* éléments d'un ensemble fini - Combinaisons
2. Les différents types de tirages
3. Triangle de Pascal
4. Formule du binôme de Newton

EXERCICES ET PROBLÈMES

«Le poète dort le jour pour compter les étoiles la nuit .
Le mathématicien dort la nuit pour compter le soleil le jour» .

Aphorisme contemporain

Activité préparatoire

Soit $E = \{ a , b , c , d \}$ et $H = \{ a , b , c\}$ une partie de E formée de trois éléments .

1° Nommer les 3! permutations des trois éléments de H , chacune d'elles étant un arrangement de trois éléments de E .

2° Nommer toutes les parties formées de trois éléments de E . Soit x le nombre de ces parties . Quelle est la valeur de x ? Vérifier que $A_4^3 = x \times 3!$

RAPPEL

1° Factorielle d'un entier naturel

• n étant un entier naturel , on définit factorielle n qu'on note $n!$ par : $0! = 1$; $1! = 1$ et pour $n \geqslant 2$, $n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$.

• Pour tout entier naturel n , on a : $(n+1)! = (n+1) \times n!$

2° Arrangement avec répétition (p-listes ou p-uplets)

Soit E un ensemble fini de n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$) et p un entier naturel non nul .
On appelle arrangement avec répétition de p éléments de E tout choix ordonné formé de p éléments de E , distincts ou non .
Ces différents choix s'appellent aussi p-listes ou p-uplets .

Le nombre de p-uplets qu'on peut former dans un ensemble de n éléments est n^p

Exemples

Soit E l'ensemble des lettres du mot “maison” .

Le nombre de mots de trois lettres qu'on peut former à partir des éléments de E est
$6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$ mots (c'est le nombre de 3-listes de l'ensemble E qui est formé de 6 éléments) .

3° Arrangement sans répétition

• Soit E un ensemble fini de n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$) et p un entier naturel non nul avec $p \leqslant n$.
On appelle arrangement sans répétition de p éléments de E tout choix ordonné formé de p éléments distincts de E .
Deux arrangements de E diffèrent l'un de l'autre :
- s'ils n'ont pas les mêmes éléments,
- s'ils ont les mêmes éléments mais pris dans un ordre différent .

• Le nombre d'arrangements de p éléments de E est donné par
$A_n^p = n\,(n-1)\,(n-2)\,...\,(n-p+1)$ ou par $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

$$\boxed{\boldsymbol{A_n^p = n\,(n-1)\,(n-2)\;...\,(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}}}$$

Exemple

Soit à choisir des mots de trois lettres distinctes parmi celles du mot «maison» .

Le nombre de ces mots n'est autre que le nombre d'arrangements sans répétition de 3 lettres parmi 6 ($p = 3$ et $n = 6$) , soit A_6^3 mots .

$$A_6^3 = 6 \,.\, 5 \,.\, 4 = 120 \text{ mots ,}$$

ou $A_6^3 = \dfrac{6!}{(6-3)!} = \dfrac{6.\,5 \,.\, 4 \,.\, 3!}{3!} = 120$ mots .

On peut aussi, à l'aide de la calculatrice Casio Fx 95 MS , calculer A_6^3 en suivant la séquence suivante :

$\boxed{6}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{nCr}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$, la calculatrice affiche 120 .

4° Permutation

• E est un ensemble fini de n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$) .

On appelle permutation des n éléments de E tout arrangement sans répétition des n éléments de E .

• Le nombre de permutations des n éléments de E , noté P_n , étant le nombre d'arrangements sans répétition de ces n éléments est donc :

$$\boxed{P_n = A_n^n = n\,(n-1)\,(n-2)\,...\times 2 \times 1 = n\,!}$$

$$\boxed{P_n = n!}$$

Exemples

1. Soit à trouver le nombre d'anagrammes du mot «maison» . (On appelle anagramme d'un mot tout assemblage ordonné formé de toutes les lettres du mot) .

Le nombre de ces mots n'est autre que le nombre de permutations sans répétition des 6 lettres du mot "maison" , soit P_6 mots .

$P_6 = 6! = 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 720$ mots

2. Soit à trouver le nombre d'anagrammes du mot *SES* (ce mot comprend deux fois la lettre *S*) .

On suit le raisonnement suivant :

• on différencie les deux lettres S en les notant S_1 et S_2 . On est alors ramené au cas de l'exemple 1 et le nombre des "mots" des lettres différenciées est le nombre des permutations des trois lettres c'est-à-dire $3! = 6$.

• en considérant par exemple le mot *ESS* , la lettre *E* étant fixée , on constate qu'il correspond à ce mot ES_1S_2 et ES_2S_1 (lettres indexées) associés aux 2! permutations des deux lettres S_1 et S_2 .
Le nombre demandé est donc : $\frac{3!}{2!} = 3$.
D'ailleurs, ces mots sont : *ESS ; SES* et *SSE* .

1 PARTIES DE *p* ÉLÉMENTS D'UN ENSEMBLE FINI COMBINAISONS

1° Définition

Soit E un ensemble de n éléments et p un entier naturel , $p \leqslant n$.

On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E ayant p éléments .

• Une telle combinaison est donc un choix (non ordonné) de p éléments distincts de E .

• Deux combinaisons sont différentes lorsqu'elles diffèrent d'au moins un élément .

EXEMPLES

1. Soit $E = \{1 ; 2 ; 3\}$. Les combinaisons de deux éléments de E sont les parties $\{1 ; 2\}$, $\{1 ; 3\}$ et $\{2 ; 3\}$.

2. Soit $E = \{a ; b ; c ; d\}$ un ensemble de 4 éléments . On sait que cet ensemble possède 24 arrangements de trois éléments : $A_4^3 = 4 . 3 . 2 = 24$.
Ainsi $(a ; b ; c)$, $(a ; c ; b)$, $(b ; a ; c)$, $(b ; c ; a)$, $(c ; a ; b)$, $(c ; b ; a)$ sont des arrangements distincts de trois éléments de E . Ces 6 arrangements définissent la même combinaison $\{a ; b ; c\}$ parce que , pour les combinaisons , l'ordre d'écriture ne compte pas .

2° Nombre de combinaisons

Soit E un ensemble de n éléments et p un entier naturel , $p \leqslant n$. Le nombre de combinaisons de p éléments de E , notée C_n^p ou $\binom{n}{p}$, est donné par la formule :

$$\boxed{C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

En effet :

à une combinaison de p éléments de E , correspond $p!$ arrangements ;

à C_n^p combinaisons , correspond alors $p!\, C_n^p$ arrangements

d'où : $A_n^p = C_n^p \times p!$

$$\boxed{\boldsymbol{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}}$$

EXEMPLE

Le nombre de façons de choisir 3 personnes parmi 5 est le nombre de combinaisons de 3 personnes choisies parmi les 5 ; ce nombre est donc $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!\,2!} = \dfrac{5\,.\,4\,.\,3!}{3!\,2\,.\,1} = 10$ façons .

On peut aussi calculer C_5^3 à l'aide de la calculatrice Casio Fx 95 MS (ou 100 MS) en suivant la séquence suivante :

$\boxed{5}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{nCr}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$, la calculatrice affiche 10 .

3° Propriétés

n et p sont des entiers naturels avec $0 \leqslant p \leqslant n$.

a) $\boxed{\boldsymbol{C_n^0 = C_n^n = 1}}$ (conséquence directe de l'expression de C_n^p) .

b) $\boxed{\boldsymbol{C_n^1 = C_n^{n-1} = n}}$ (conséquence directe de l'expression de C_n^p) .

c) $\boxed{\boldsymbol{C_n^p = C_n^{n-p}}}$

En effet : $C_n^{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,\left[n-(n-p)\right]!} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_n^p$.

d) $\boxed{\textbf{Si } \boldsymbol{p \geqslant 1 \text{ , } C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p}}$ **(relation de Pascal)** . En effet :

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!\,(n-p-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p-1)!}\left[\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p}\right]$$

$$= \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p-1)!}\left[\frac{n}{p\,(n-p)}\right] = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_n^p \ .$$

2 LES DIFFÉRENTS TYPES DE TIRAGES

On dispose d'un ensemble E de n éléments et l'on «tire» p éléments de E .
Trois types de tirages sont classiques :

1° Les tirages successifs avec remise , pour lesquels on tire un élément de E , on remet cet élément dans E , et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait effectué p tirages .
Dans ce cas , ***p* n'est pas nécessairement inférieur à *n* ,** chaque résultat est une suite de p éléments .
Le nombre de résultats est n^p .

2° Les tirages successifs sans remise , pour lesquels on tire successivement les p éléments de E , un à un .
Dans ce cas , ***p* est nécessairement inférieur ou égal à *n* ,** chaque résultat est un arrangement de p éléments de E .
Le nombre de résultats est A_n^p .

3° Les tirages simultanés , pour lesquels on effectue en une seule fois le tirage de p éléments de E .
Dans ce cas , ***p* est nécessairement inférieur ou égal à *n* ,** chaque résultat est une combinaison de p éléments de E .
Le nombre des résultats est C_n^p .

Le tableau suivant résume les différents types de tirage .

Type de tirage	Ordre	Répétition des éléments	Dénombrement
Successif avec remise	on tient compte de l'ordre	un élément peut être tiré plusieurs fois	n^p (p-listes)
Successif sans remise	on tient compte de l'ordre	un élément n'est tiré qu'une seule fois	A_n^p (arrangement)
Simultané	l'ordre n'intervient pas	un élémemt n'est tiré qu'une seule fois	C_n^p (combinaison)

3. TRIANGLE DE PASCAL

La formule $C_n^P = C_{n-1}^{P-1} + C_{n-1}^p$, permet de calculer , de proche en proche les C_n^P .

Le triangle suivant est appelé **triangle de Pascal** .

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	7	...
0	1									
1	1 +	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6 +	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
⋮										

C_n^0

C_n^n

$$C_n^p + C_n^{p+1} \downarrow C_{n+1}^{p+1}$$

Le triangle de Pascal est un tableau croisé dans lequel la valeur de chaque C_n^p , inscrite à l'intersection de la n-ième ligne et de la p-ième colonne , est

obtenue de la façon suivante :

• Dans la colonne d'indice 0 , tous les coefficients sont égaux à 1 , puisque $C_n^0 = 1$.

• La ligne d'indice 0 contient le naturel C_0^0 égal à 1 .

• La ligne d'indice 1 contient les naturels C_1^0 et C_1^1 égaux à 1 .

• Dans la ligne d'indice 2 , C_2^1 s'obtient à partir de l'égalité $C_2^1 = C_1^0 + C_1^1$, quant au naturel C_2^2 , il est égal à 1 .

• Dans la ligne d'indice n ; pour tout entier p tel que $0 < p \leqslant n - 1$, on calcule C_n^p en ajoutant C_{n-1}^{p-1} et C_{n-1}^{p} ; quant à C_n^n , il est égal à 1 .

4 FORMULE DU BINÔME DE NEWTON

a et b sont deux nombres quelconques et n un entier naturel . On démontre par récurrence la formule suivante dite formule du binôme de Newton :

$$\boldsymbol{(a+b)^n = C_n^0\, a^n + C_n^1\, a^{n-1}\, b + C_n^2\, a^{n-2}\, b^2 + \dots + C_n^p\, a^{n-p}\, b^p + \dots + C_n^n\, b^n}$$

qu'on note $\boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^{n-p}\, b^p}$

Remarques

Pour écrire le développement de $(a + b)^n$ sans trop de difficulté , on peut utiliser les remarques suivantes :

• ce développement comporte $(n + 1)$ termes .

• chaque terme est un monôme de degré n par rapport à l'ensemble des deux variables a et b (la somme des exposants de a et b est égale à n) .

• les coefficients de ces monômes sont , dans l'ordre :

C_n^0 , C_n^1 , C_n^2 , ... , C_n^n ; l'indice supérieur étant égal à l'exposant de b .

• ces coefficients sont les termes de la ligne d'indice n du triangle de Pascal .

EXEMPLES

Soit à développer $(a + b)^4$

On exécute le triangle de Pascal jusqu'à la ligne d'indice 4 .

indice					
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

On obtient :

$(a + b)^4 = 1.a^4 + 4a^3\, b + 6a^2\, b^2 + 4a\, b^3 + 1.b^4$.

Conséquence : Nombre de parties d'un ensemble

Soit E un ensemble non vide de n éléments et $p \in [0\ ;\ n]$.

Le nombre de parties de E ayant p éléments est C_n^p .

Le nombre de parties de E est donc :

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^p + ... + C_n^n$, soit

$C_n^0\, 1^n + C_n^1\, 1^{n-1}\, 1 + C_n^2\, 1^{n-2}\, 1^2 + ... + C_n^p\, 1^{n-p}\, 1^p + ... + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n$.

Le nombre de parties de E est donc 2^n , d'où :

$$\textbf{si Card } E = n\text{ , } \textbf{ alors } \textbf{ Card}\big(P(E)\big) = 2^n$$

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Calculer :

1° C_{12}^{7} **2°** C **3°** C **4°** A_{9}^{1} **5°** C_{10}^{0} **6°** C_{9}^{9} **7°** A_{12}^{2} **8°** C_{10}^{9} .

2 Simplifier :

1° $\dfrac{C_9^5}{C_8^5}$ **2°** $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ **3°** $\dfrac{C_4^2 \times C_6^3}{C_{10}^5}$ **4°** $\dfrac{C_{n+1}^p}{C_n^p}$.

3 Résoudre les équations .

1° $C_n^2 = 10$ **2°** $C_n^{n-2} = 28$ **3°** $C_n^3 = 5n$

4° $C_n^4 = C_n^3$ **5°** $C_n^3 + C_n^2 = 3n\,(n-1)$ **6°** $A_n^4 = 42 \,.\, A_n^2$

4 **1°** Simplifier $\dfrac{C_n^3}{C_n^2}$.

2° En déduire la résolution de l'équation : $3C_n^3 = 4C_n^2$.

5 Développer :

1° $(2 + x)^4$ **2°** $(1 - 2x)^5$ **3°** $(3x - 2y)^3$ **4°** $(2x + 1)^6$.

6 Écrire sous la forme $a + b\sqrt{3}$, où a et b sont des entiers relatifs , les nombres :

1° $(2 - \sqrt{3})^5$ **2°** $(2\sqrt{3} + 3)^3$ **3°** $(1 + 2\sqrt{3})^4$.

7 Il y a 15 places dans un bus . 6 personnes montent dans le bus . De combien de façons ces 6 personnes peuvent-elles s'asseoir dans 6 places différentes ?

8 Huit coureurs prennent le départ de la finale du 100 mètres olympiques . Quel est le nombre d'arrivées possibles de ces huit coureurs ?

9 Combien de choix possibles y a-t-il dans un jeu au Loto national ?

10 Dans une pièce de théâtre , il y a sept rôles qui peuvent être tenus par n'importe lesquelles des 20 personnes de la troupe .

Quel est le nombre de distributions possibles de ces rôles ?

11 Dans un aquarium il y a trois poissons rouges , deux poissons noirs et un poisson argenté .

Avec une épuisette , on pêche simultanément et au hasard 3 poissons que l'on met dans un bocal. Combien y a-t-il de possibilités ?

12 Cinq garçons et six filles désirent former une équipe de volley-ball . Le nombre de joueurs sur le terrain est 6 .

1° Combien y a-t-il d'équipes possibles ?

2° Combien y a-t-il d'équipes composées de 2 garçons et 4 filles ?

13 18 chevaux prennent le départ d'une course .

1° Quel est le nombre d'arrivées possibles des trois premiers ?

2° Quel est le nombre de choix possibles des trois chevaux qui , dans un ordre quelconque , termineront en tête ?

$\boxed{14}$ Une urne contient neuf boules numérotées de 1 à 9 .
Soit $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$.

1° On tire trois boules successivement en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne avant de tirer la suivante . On note le numéro de chaque boule tirée suivant l'ordre dans lequel elle a été tirée . Le résultat est un nombre formé de trois chiffres de 1 à 9 . Quel est le nombre de résultats possibles ?

2° On tire trois boules successivement et sans remise .
Quel est le nombre de résultats possibles ?

3° On tire trois boules simultanément , obtenant ainsi une partie B de A à trois éléments .
Quel est le nombre de résultats possibles ?

$\boxed{15}$ L'effectif d'une classe est de 19 élèves : 12 externes et 7 internes . Le professeur de mathématiques décide de constituer un groupe de 3 élèves . Il veut désigner lui-même les membres de ce groupe .

1° Entre combien de groupes le professeur peut-il à priori choisir ?

2° Combien y a-t-il de groupes constitués de 3 internes ?

3° Combien y a-t-il de groupes constitués de 2 externes et 1 interne ?

$\boxed{16}$ Une assemblée de 20 personnes élit son bureau , composé de 4 membres : un président , un vice-président , un trésorier , un secrétaire .

1° Quel est le nombre de bureaux possibles ?

2° Si ces 20 personnes sont 15 femmes et 5 hommes , et s'il a été décidé , pour la session en cours , que les postes de président et de trésorier seraient occupés par des femmes , ceux de vice-président et de secrétaire par des hommes , quel est alors le nombre de bureaux possibles ?

$\boxed{17}$ Combien d'anagrammes peut-on former du mot «chercher» ?

$\boxed{18}$ **1°** Avec les lettres du mot GESTION employées une fois chacune , combien peut-on former de mots de sept lettres ?

2° Parmi ces mots , combien finissent par une voyelle ?

19 **1°** Combien de nombres entiers naturels *n* de quatre chiffres distincts deux à deux peut-on former avec les chiffres 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 ?

2° Reprendre la même question avec les chiffres 0 , 1 , 2 , 3 , ... , 8 , 9 (le chiffre de gauche du nombre ne peut pas être 0) .

20 On considère les couples de cartes extraites d'un jeu de 52 .
Combien parmi eux vérifient la condition :

1° les deux cartes sont noires ?

2° l'une est rouge et l'autre noire ?

3° l'une des cartes au moins est rouge ?

21 La salle de la classe ES contient 36 places .

1° De combien de manières différentes ces élèves peuvent-ils s'asseoir ?

2° De combien de manières différentes peuvent-ils s'asseoir s'il y a trois absents ?

22 Dans le tableau suivant une seule des réponses proposées à chaque question est correcte . Écrire le numéro de chaque question et donner , en justifiant , la réponse qui lui correspond .

N°	**Questions**	**Réponses**		
		a	**b**	**c**
1	Dans une classe il y a 10 filles et 15 garçons . Le nombre de comités formés de 3 filles et 2 garçons est	1260	12 600	150
2	Une urne contient 10 jetons blancs , 10 jetons rouges et 10 jaunes . Le nombre de possibilités de tirer 2 jetons de couleurs différentes est	400	200	300
3	Un numéro de téléphone est formé de 6 chiffres dont le premier est 2 , 3 , 4 , 5 ou 6 . Le nombre de numéros formés de chiffres distincts et ne contenant pas de zéro est	8^5	$C_5^1 \times C_8^5$	$A_8^5 \times A_5^1$
4	On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 52 cartes . Le nombre de tirages contenant 3 dames est	4	6	24
5	Le nombre d'anagrammes du mot LILI est	24	12	6

Pour chercher

23 Montrer que , pour tous entiers relatifs a et b , on a :

$(a + b)^5 - a^5 - b^5$ est divisible par 5 .

24 **1°** Montrer que pour tous naturels n et p tels que $1 \leqslant p \leqslant n$, $p\, C_n^p = n\, C_{n-1}^{p-1}$

2° En déduire que pour tout naturel $n \geqslant 1$, $C_n^1 + 2\, C_n^2 + 3\, C_n^3 + \ldots + n\, C_n^n = n \,.\, 2^{n-1}$.

25 Écrire le développement de $(1 + x)^n$ suivant la formule du binôme et en déduire la valeur de la somme :

1° $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 2^3 C_n^3 + \ldots + 2^p C_n^p + \ldots + 2^n C_n^n$.

2° $1 + 3C_n^1 + 3^2 C_n^2 + \ldots + 3^p C_p^p + \ldots 3^{n-1} C_n^{n-1} + 3^n$.

26 Dans un jeu de dominos , une pièce est constituée d'un rectangle comportant 2 chiffres pris entre 0 et 6 .

Exemple de pièce d'un jeu de dominos .

Il y a une seule pièce de chaque sorte .

Combien de pièces comporte un jeu de dominos ?

27 Une classe comporte 45 élèves dont 15 filles , toutes externes , et 30 garçons dont 10 externes , les autres internes . On se propose de former un bureau constitué :

- d'un président nécessairement interne
- d'une secrétaire (une fille)
- de 3 autres membres quelconques .

Quel est le nombre de bureaux possibles ?

28 Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher : 3 noires , 5 vertes et 4 bleues . On tire simultanément 3 boules de l'urne . De combien de façons distinctes peut-on tirer :

1° 3 boules noires ? **2°** 3 boules vertes ?

3° 3 boules de même couleur ? **4°** une boule noire au moins ?

29 Une classe comporte 20 élèves : 12 filles et 8 garçons . On veut désigner trois élèves pour faire une enquête .

1° Combien peut-on former de groupes de 3 élèves ?

2° Combien y a-t-il de groupes constitués de 3 filles ?

3° Combien y a-t-il de groupes formés de 2 garçons et 1 fille ?

30 Dans un jeu de trente-deux cartes (toutes différentes) , on appelle «main» tout ensemble de quatre cartes .

1° Combien y a-t-il de mains possibles ?

2° Combien y a-t-il de mains contenant le valet de trèfle ?

3° Combien y a-t-il de mains contenant un seul as ?

4° Combien y a-t-il de mains contenant au moins une dame ?

31 On dispose de huit boules dans une urne , trois noires , deux blanches , trois rouges .

A) On tire simultanément trois boules de l'urne .

1° De combien de façons différentes peut-on faire ce tirage ?

2° De combien de façons différentes peut-on tirer trois boules dont deux et deux seulement sont noires ?

3° De combien de façons différentes peut-on tirer trois boules dont l'une au moins est noire ?

B) On tire simultanément deux boules de l'urne . De combien de façons différentes peut-on tirer deux boules de la même couleur ?

$\boxed{32}$ On dispose de six jetons noirs numérotés 1 , 2 , 3 , 4 , 5 et 6 et de trois jetons blancs numérotés 7 , 8 et 9 . On tire successivement trois jetons sans remise .

1° Combien d'ensembles différents de trois jetons peut-on former de cette manière ?

2° Combien de nombres différents de trois chiffres peut-on former ?

3° Même question qu'au 1° , mais chaque ensemble doit contenir deux jetons noirs et un jeton blanc .

$\boxed{33}$ Un conseil est formé de cinq hommes et huit femmes . Un bureau de quatre membres doit être désigné , et il doit comporter au moins une femme .

1° Combien de bureaux peut-on former , s'ils doivent comporter exactement un homme ?

2° Combien de bureaux peut-on former s'ils doivent comporter au moins un homme ?

3° Combien de bureaux peut-on former s'ils doivent comporter exactement deux femmes ?

$\boxed{34}$ Une enquête sur la lecture de trois revues A , B , C portant sur un échantillon de 1000 personnes donne les résultats suivants :

• 60% lisent A ; 50% lisent B et 50% lisent C .

• 20% lisent B et C ; 30% lisent A et C et 30% lisent A et B .

• 10% lisent A , B et C .

1° Traduire ces données par un diagramme .

2° Combien de personnes lisent exactement 2 de ces revues ?

3° Combien de personnes ne lisent aucune de ces revues ?

$\boxed{35}$ À l'aide des lettres du mot JACINTHE , combien peut-on former :

1° de mots de six lettres distinctes ?

2° de mots de six lettres distinctes dont la deuxième et la dernière sont des voyelles et les quatre autres des consonnes ?

3° de mots de six lettres distinctes comportant deux voyelles et quatre consonnes ?

36 On considère un clavier de téléphone à 10 chiffres $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$.
On veut former un numéro de téléphone de 8 chiffres .

1° Combien de numéros peut-on former ?

2° Combien de ces numéros sont constitués de 8 chiffres tous distincts ?

3° Combien de ces numéros ne comportent que des chiffres pairs ?

4° Combien de numéros se terminent par un chiffre pair ?

37 Une classe contient 30 élèves .

1° De combien de manières peut-on former de comités de 4 élèves ?

2° On suppose maintenant que sur les 30 élèves il y a 4 filles seulement . Combien peut-on former de comités de 4 élèves dans chacun des cas suivants :

a) les 4 membres sont 4 garçons .

b) 2 au moins des membres sont des filles .

c) au moins un membre est une fille .

38 Les élèves de troisième année secondaire d'une certaine école sont repartis suivant le tableau ci-dessous .
La direction choisit cinq élèves pour un concours .

	Garçons	**Filles**
S.V	22	20
S.G	24	10
S.E	34	8

1° Quel est le nombre de possibilités de choisir ces cinq élèves ?

2° Quel est le nombre de possibilités de choisir 3 garçons et 2 filles ?

3° Quel est le nombre de possibilités de choisir au moins un garçon de SV ?

4° Quel est le nombre de possibilités de choisir :

a) 5 filles de SV ?

b) 3 garçons de SE et 2 garçons de SG ?

39 Dans un club d'informatique d'une école il y a 4 garçons numérotés de 1 à 4 et 5 filles numérotées de 1 à 5 . La direction du club veut former un comité de 3 membres .

1° Combien y a-t-il de comités possibles ?

2° Combien y a-t-il de comités formés uniquement de garçons ? En déduire le nombre de comités contenant au moins une fille .

3° Combien y a-t-il de comités comportant uniquement un garçon et un membre numéroté 2 ?

13 PROBABILITÉS

Un peu d'histoire

Le but et l'ambition des probabilités est de prévoir et de calculer des résultats dus au hasard.
Selon ***Poisson****, «un problème relatif au jeu de hasard proposé à un austère janséniste par un homme du monde a été à l'origine du calcul des probabilités».*
Aristote *et son école se sont intéressés à la notion de hasard et aux jeux de dés.*
Les premières études sur les probabilités, comme calcul des chances, sont attribuées à des mathématiciens italiens comme ***Cardan (1501-1576)****,* ***Pacioli (1445-1514) et Tartaglia (1499-1557).***
Pascal, *en 1654, établit les bases du calcul des probabilités dans sa correspondance avec* ***Fermat*** *et le* ***Chevalier de Méré.*** *Il fait même un rapport à l'Académie Parisienne des Sciences : «Géométrie du hasard, joignant la rigueur des démonstrations de la science à l'incertitude du hasard et conciliant ces choses en apparence contraires».*
Jacques Bernoulli (1654-1705) *et* ***Leibniz (1646-1716)*** *voient, dans le calcul des probabilités, la possibilité d'une «nouvelle logique». Le premier exprime la loi des grands nombres : «Plus on fait d'expériences et plus on s'approche de la probabilité d'un événement donné».*
Condorcet (1742-1794), Laplace (1749-1827) *et* ***Poisson (1781-1841)*** *essaieront de donner, avec des outils mathématiques plus puissants, «une expression quantitative» aux façons de mener des débats ou d'organiser des procès.*
Le physicien ***Maxwell (1831 - 1879)*** *dit :*
«La vraie logique du monde est celle du calcul des probabilités».
C'est au XXe siècle que le calcul des probabilités devient une théorie mathématique, grâce surtout aux travaux de ***Kolmogorov (1903-1987)*** *dont les résultats ont été publiés en 1933.*

PLAN DU CHAPITRE

«Le hasard est le plus grand romancier du monde :
pour être fécond, il n'y a qu'à l'étudier» .

Honoré de BALZAC

Une urne contient trois boules rouges et deux boules vertes indiscernables au toucher .

On tire au hasard deux boules de cette urne successivement et sans remise .

On considère les événements suivants :

R_1 : «obtenir une boule rouge au premier tirage» .

R_2 : «obtenir une boule rouge au deuxième tirage» .

V_1 : «obtenir une boule verte au premier tirage» .

V_2 : «obtenir une boule verte au deuxième tirage» .

1° La réalisation de l'événement R_1 a-t-elle une influence sur celle de l'événement V_2 ?

2° a) Montrer que $P(R_1) = \frac{3}{5}$.

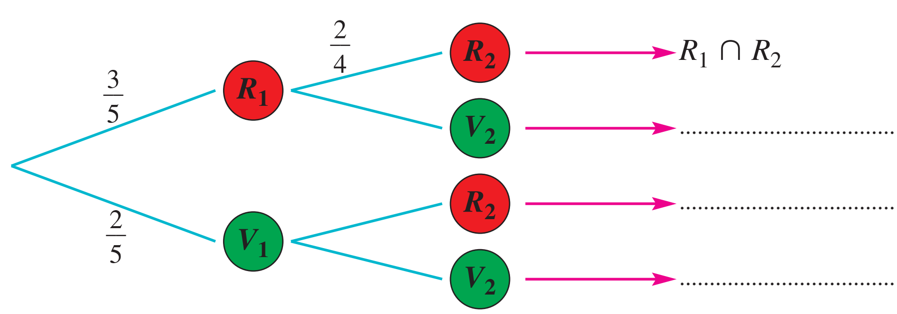
b) Justifier que la probabilité de **tirer une boule rouge au deuxième tirage sachant qu'on a tiré une boule rouge au premier tirage , événement qu'on note R_2/R_1 , est $P(R_2/R_1) = \frac{2}{4}$** .

c) Calculer $P(V_2/R_1)$.

3° a) Montrer que $P(V_1) = \frac{2}{5}$.

b) Calculer $P(R_2/V_1)$ et $P(V_2/V_1)$.

4° Compléter le schéma suivant appelé arbre pondéré :



RAPPEL

1° Définitions

- Un **univers** est un ensemble non vide et fini : $\Omega = \{a_1 ; a_2 ; ... ; a_n \}$.
- Les éléments de l'univers sont appelés **éventualités** .
- Les sous-ensembles de Ω sont appelés **événements** .
- Les événements formés d'un seul élément (les singletons) sont appelés **événements élémentaires .**

Soit A et B deux événements de l'univers Ω .

- L'événement **«*A* et *B*»** , noté $\boldsymbol{A \cap B}$ **,** est l'événement formé par les éventualités communes à A et à B .
- L'événement **«*A* ou *B*» ,** noté $\boldsymbol{A \cup B}$ **,** est l'événement formé par les éventualités qui sont dans A ou dans B .
- L'ensemble **vide , $\varnothing$,** est appelé **événement impossible .**
- **L'univers Ω** est appelé **événement certain** .
- L'ensemble des éventualités de Ω qui ne sont pas dans l'événement A , forment un événement appelé **événement contraire de *A*** et noté $\overline{A}$. A et $\overline{A}$ sont dits deux événements contraires : $\boldsymbol{A \cap \overline{A} = \varnothing}$ **et** $\boldsymbol{A \cup \overline{A} = \Omega}$.
- A et B sont dits **incompatibles** si leur intersection est vide : $\boldsymbol{A \cap B = \varnothing}$ **.**

EXEMPLE

Une urne contient trois boules rouges numérotées 1 , 2 , 3 et deux boules vertes numérotées 3 , 4 .

On tire une boule au hasard . Les événements élémentaires sont les suivants :

R_1 : la boule tirée est rouge et son numéro est 1 .

R_2 : la boule tirée est rouge et son numéro est 2 .

R_3 : la boule tirée est rouge et son numéro est 3 .

V_3 : la boule tirée est verte et son numéro est 3 .

V_4 : la boule tirée est verte et son numéro est 4 .

Soit les événements suivants : $A = \{R_1 ; R_2\}$, $B = \{V_3 ; V_4\}$ et $C = \{R_2 ; V_3\}$.

Les deux événements A et B sont incompatibles car $A \cap B = \varnothing$.

L'événement «A ou B» est $A \cup B = \{R_1 ; R_2 ; V_3 ; V_4\}$.

L'événement «A et C» est $A \cap C = \{R_2\}$.

L'événement contraire de A est $\overline{A} = \{R_3 ; V_3 ; V_4\}$.

2° Probabilité

Soit $\Omega = \{a_1 \, ; a_2 \, ; ... \, ; a_n\}$ un univers formé de n événements élémentaires , avec $n \geqslant 1$ et $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω .

Une probabilité P est une application de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans l'intervalle [0 ; 1] telle que :

- **la probabilité de chaque événement élémentaire $\{a_i\}$, avec $1 \leqslant i \leqslant n$, est un nombre p_i compris entre 0 et 1 . $P(\{a_i\}) = p_i$, $p_i \in [0;1]$.**
- **la somme des probabilités p_i de tous les événements élémentaires est égale à 1 : $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.**

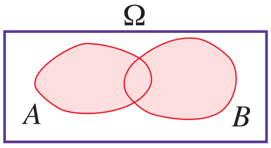
Remarque

La probabilité d'un événement A est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui forment A .

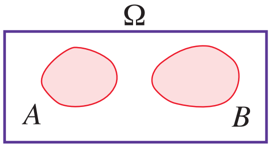
3° Propriétés

A et B sont deux événements quelconques de Ω .

- $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$



- **Si $A \cap B = \varnothing$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$**
  A et B sont dits incompatibles



- Soit A un événement de Ω et $\overline{A}$ son événement contraire

$\boxed{P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)}$ **ou** $\boxed{P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1}$

- Ω et $\varnothing$ sont deux événements contraires .

$\boxed{P(\Omega) = 1}$ $\boxed{P(\varnothing) = 0}$

EXEMPLE

On lance un dé parfait à six faces .

L'univers est formé des six événements élémentaires qui sont $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ et $\{6\}$.

La probabilité de chaque face est $\frac{1}{6}$.

Soit A l'événement «la face porte un numéro pair» .

Comme A est formé des événements élémentaires $\{2\}$, $\{4\}$ et $\{6\}$, alors $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Soit B l'événement «le numéro de la face apparue est au plus égal à 5» .

B est l'événement contraire de l'événement $\overline{B}$ qui est «le numéro de la face apparue est 6» .

$P\left(\overline{B}\right) = \frac{1}{6}$, par suite $P(B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

4° Équiprobabilité (loi uniforme ou loi équiprobable)

Lorsque tous les événements élémentaires de l'univers Ω ont la même probabilité d'être réalisés , la probabilité est dite **uniforme** .

Par conséquent , la probabilité d'un événement élémentaire $\{a_i\}$ de l'univers $\boldsymbol{\Omega = \{a_1 \,;\, a_2 \,;\, \dots \,;\, a_n\}}$ formé de n ($n \geqslant 1$) événements élémentaires est

$$\boxed{P\left(\{a_i\}\right) = \frac{1}{n}}$$

Si A est un événement de Ω et qui contient K événements élémenaires alors

$$\boxed{P(A) = \frac{K}{n} = \frac{\text{Card }(A)}{\text{Card }(\Omega)}}$$

Cette probabilité peut être exprimée par le rapport

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables pour la réalisation de } A}{\text{Nombre total de cas possibles}}}$$

Exemples

1. Lancer d'un dé parfait

Le sous-ensemble $A = \{2 ; 4 ; 6\}$ correspond à l'événement «le chiffre apparu est pair» .

Le dé a six faces qui ont la même probabilité d'apparition .

L'univers est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

La probabilité de A est donc donnée par : $P(A) = \dfrac{\text{card } (A)}{\text{card } (\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

2. Tirage simultané

Une urne contient dix boules rouges numérotées de 1 à 10 et cinq boules vertes numérotées de 1 à 5 . Toutes les boules sont indiscernables au toucher .

On tire , au hasard et simultanément deux boules dans l'urne .

Soit à calculer la probabilité de l'événement A «les deux boules tirées sont rouges» .

Pour savoir le nombre de cas favorables , il suffit de savoir le nombre de combinaisons de deux boules rouges parmi les dix boules rouges .

Soit C_{10}^{2} .

Le nombre total de cas possibles est celui des combinaisons de deux boules parmi les 15 boules de l'urne . Soit C_{15}^{2} .

D'où $P(A) = \dfrac{C_{10}^{2}}{C_{15}^{2}} = \dfrac{3}{7}$.

1. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

P désigne une probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et B un événement de Ω de probabilité non nulle : $P(B) \neq 0$.

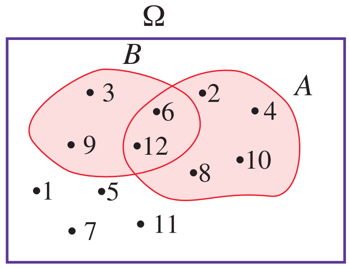
On appelle probabilité conditionnelle de l'événement A de Ω sachant que l'événement B est réalisé , le nombre $P(A/B)$, noté aussi $P_B(A)$ tel que :

$$\boxed{\boldsymbol{P_B(A) = P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}}$$

Remarque

- Si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$ et $P(A/B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$.
- L'événement $\overline{A}$ sachant B est l'événement contraire de A sachant B .
  D'où $P\left(\overline{A}/B\right) = 1 - P(A/B) = 1 - \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

EXEMPLE



Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 12 . On tire au hasard une boule .

Soit A l'événement «la boule tirée porte un numéro pair» et B l'événement «la boule tirée porte un numéro multiple de 3» .

Dans le calcul de $P(A/B)$, l'univers devient B et l'événement A devient la partie commune à A et à B .

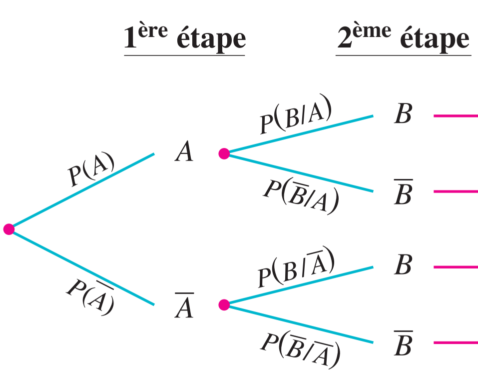
Le bon sens permet de dire que les cas favorables à B sont 3 , 6 , 9 et 12 et les cas favorables à A sachant B sont 6 et 12 . D'où $P(A/B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

En utilisant la formule dans le calcul de $P(A/B)$ on obtient :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{4}{12}} = \frac{1}{2} .$$

2 ARBRE PONDÉRÉ

On appelle arbre pondéré un arbre sur lequel on a placé les probabilités correspondant à chaque branche comme l'indique le schéma ci-dessous .



Résultat	Probabilité
$A \cap B$;	$P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A)$
$A \cap \overline{B}$;	$P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B}/A) \times P(A)$
$\overline{A} \cap B$;	$P(\overline{A} \cap B) = P(B/\overline{A}) \times P(\overline{A})$
$\overline{A} \cap \overline{B}$;	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B}/\overline{A}) \times P(\overline{A})$

RÈGLES
• Chaque nœud de l'arbre correspond à un état de l'expérience .
• Un **chemin complet** va du point de départ à une extrémité de l'arbre et représente **l'intersection** de tous les événements rencontrés sur ce chemin .
• La probabilité d'un chemin est égal au produit des probabilités inscrites sur chaque branche du chemin .
• La somme des probabilités portées par les branches issues d'un même nœud est égale à 1 .

EXEMPLE

Une usine fabrique des pièces dont 1,8% sont défectueuses . Le contrôle s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

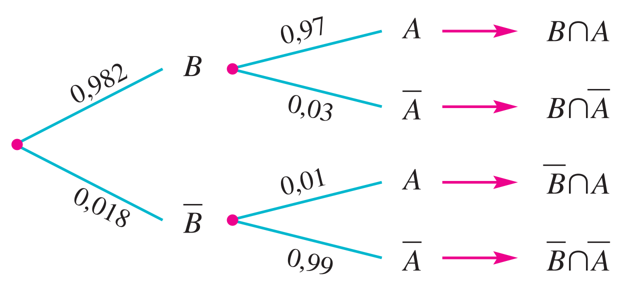
– sachant qu'une pièce est bonne , elle est acceptée avec une probabilité de 0,97 .

– sachant qu'une pièce est défectueuse , elle est refusée avec une probabilité de 0,99 .

On désigne par B l'événement «la pièce est bonne» et par A l'événement «la pièce est acceptée» .

On a : $P(\overline{B}) = 0{,}018$; $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0{,}982$; $P(A/B) = 0{,}97$ et $P(\overline{A}/\overline{B}) = 0{,}99$.

L'arbre pondéré ci-dessous est la traduction des données .



P(pièce bonne et acceptée) $= P(B \cap A) = P(B) \times P(A/B)$
$= 0{,}982 \times 0{,}97 \simeq 0{,}95254$

P(pièce bonne et refusée) $= P(B \cap \overline{A}) = P(B) \times P(\overline{A}/B)$
$= 0{,}982 \times 0{,}03 \simeq 0{,}02946$

P(pièce défectueuse et acceptée) $= P(\overline{B} \cap A) = P(\overline{B}) \times P(A/\overline{B})$
$= 0{,}018 \times 0{,}01 \simeq 0{,}00018$

P(pièce défectueuse et refusée) $= P(\overline{B} \cap \overline{A}) = P(\overline{B}) \times P(\overline{A}/\overline{B})$
$= 0{,}018 \times 0{,}99 \simeq 0{,}01782$

3 ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

Soit ***A* et *B* deux événements de l'univers Ω .**

A et *B* sont dits indépendants si $\boldsymbol{P(A/B) = P(A)}$.

Or $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$, d'où $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$.

***A* et *B* sont deux événements indépendants équivaut à** $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$

EXEMPLE

Une urne contient deux boules rouges numérotées 1 et 2 et trois boules bleues numérotées 1 , 2 et 3 .

On tire successivement et avec remise , deux boules de l'urne .

Soit A l'événement «la première boule tirée porte un numéro pair» et B l'événement «la deuxième boule tirée porte un numéro impair» .

Puisqu'on a remis dans l'urne la première boule tirée, le numéro de la boule obtenue au second tirage ne dépend pas de la boule obtenue au premier tirage .

Les événements A et B sont donc indépendants .

$P(A) = \dfrac{2}{5}$, $P(B) = \dfrac{3}{5}$.

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{25}$.

4 PROBABILITÉS TOTALES

1° Partition

Soit les événements B_1 , B_2 , ... , B_n de l'univers Ω , $n > 1$.

On dit que ces événements forment une partition de Ω si :

- $B_i \neq \varnothing$ pour tout i appartenant à l'ensemble $\{1 , 2 , ... , n\}$
- $B_i \cap B_j = \varnothing$ pour $i \neq j$
- $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$.

Remarque

Tout événement élémentaire de l'univers Ω appartient à un et un seul événement B_i .

EXEMPLE

Une urne contient neuf boules indiscernables au toucher dont trois sont rouges , deux sont vertes et quatre sont jaunes .

On tire une boule au hasard et on note sa couleur . Soit les événements :
R : «la boule tirée est rouge»
V : «la boule tirée est verte»
J : «la boule tirée est jaune» .

Ces événements déterminent une partition de l'univers .

2° Formule des probabilités totales

Soit B_1 , B_2 , ... , B_n des événements qui forment une partition de l'univers Ω , $n > 1$.

Pour tout événement A de Ω , on a :

$$\boldsymbol{P(A)= P(B_1) \times P(A/B_1) + P(B_2) \times P(A/B_2) + ... + P(B_n) \times P(A/B_n)}$$

En effet :

$A = A \cap \Omega = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n)$.

La distributivité de l'intersection par rapport à la réunion permet d'écrire :

$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ... \cup (A \cap B_n)$.

Comme B_1 , B_2 , ... B_n forment une partition de Ω , alors $(A \cap B_i)$ et $(A \cap B_j)$, $i \neq j$ sont incompatibles , par suite :

$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_n)$.

Comme $P(A \cap B_i) = P(B_i) \times P(A/B_i)$ pour tout i variant de 1 à n , alors

$P(A) = P(B_1) \times P(A/B_1) + P(B_2) \times P(A/B_2) + ... + P(B_n) \times P(A/B_n)$.

EXEMPLE

1. Une urne contient neuf boules indiscernables au toucher : trois rouges numérotées 1 , 2 , 3 , deux jaunes numérotées 1 , 2 et quatre noires numérotées 1 , 2 , 3 , 4 .
On tire une boule au hasard et on appelle *A* l'événement «la boule tirée porte un nombre impair» . Soit à calculer *P(A)* .

Les événements :
R : «la boule tirée est rouge»
J : «la boule tirée est jaune»
N : «la boule tirée est noire»
déterminent une partition de l'univers .

	Ω	
R	• 2	•1 •3
J	•2	•1
N	•2 •4	•1 •3

$P(R) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$,

$P(J) = \frac{2}{9}$ et $P(N) = \frac{4}{9}$.

$A = (A \cap R) \cup (A \cap J) \cup (A \cap N)$

$$\begin{aligned} \bullet\ P(A) &= P(A \cap R) + P(A \cap J) + P(A \cap N) \\ &= P(R) \times P(A/R) + P(J) \times P(A/J) + P(N) \times P(A/N) \\ &= \frac{3}{9} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \times \frac{2}{4} = \frac{5}{9} . \end{aligned}$$

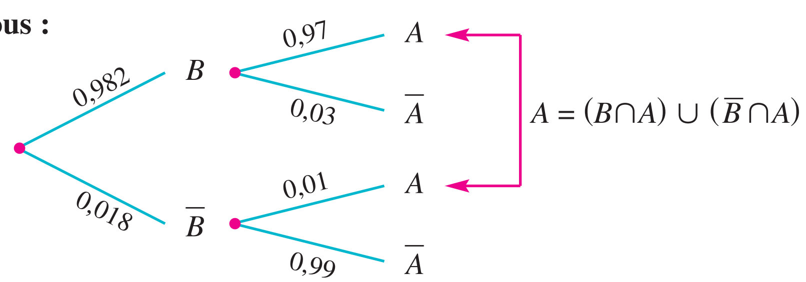
Remarque

Le bon sens permet de calculer directement *P(A)* .

D'après le dessin ci-dessus , il y a cinq cas favorables pour la boule qui porte un numéro impair .

D'où $P(A) = \frac{5}{9}$.

2. Dans l'exemple de la page 320 , on a obtenu l'arbre pondéré ci-dessous :



L'événement *A* «acceptée une pièce» est ici représenté par la réunion des deux chemins rouges .

$P(A)$ est la somme des probabilités de ces deux chemins .
$P(A/B) \times P(B) + P(A/\overline{B}) \times P(\overline{B}) = 0,95254 + 0,00018 = 0,95272$.

5 VARIABLE ALÉATOIRE

1° Définition

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher , deux sont rouges et les trois autres sont blanches . On extrait au hasard et simultanément deux boules de l'urne . On perçoit 1 000 L.L. par boule rouge tirée . Notons X la somme ainsi gagnée .

Lors du tirage , on peut obtenir 0 , une ou 2 boules rouges , le gain peut donc prendre les valeurs 0 , 1 000 ou 2 000 L.L.

On définit ainsi une **variable aléatoire** notée X qui peut prendre les valeurs 0 , 1 000 ou 2 000 .

Par exemple (X = 2 000) désigne l'événement «deux boules rouges sont tirées» .

Plus généralement ,

lorsqu'à chaque éventualité d'une expérience «aléatoire» on associe un nombre réel , on dit que l'on a défini une variable aléatoire

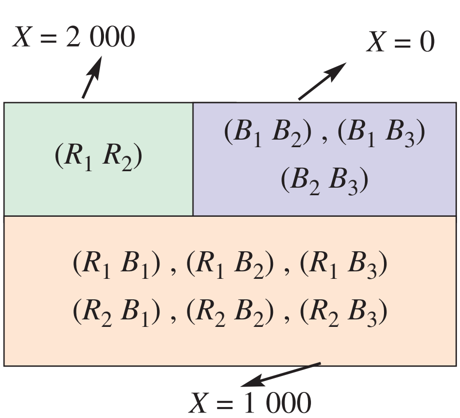
Une variable aléatoire est notée par une lettre majuscule , X par exemple . Lorsque x_1 , x_2 , ... , x_n sont les valeurs prises par une variable aléatoire X , on note $(X = x_i)$ l'événement «X prend la valeur x_i» avec $1 \leqslant i \leqslant n$.

2° Loi de probabilité

Dans l'exemple du paragraphe précédent , cherchons l'univers Ω et les probabilités qui correspondent aux valeurs prises par la variable aléatoire X .

On désigne par R_1 et R_2 les deux boules rouges et par B_1 , B_2 et B_3 les trois boules blanches .

L'univers Ω correspondant au tirage de deux boules est donné par le schéma ci-contre . L'événement (R_1 B_2) , par exemple , correspond au tirage de la boule rouge R_1 et de la boule blanche B_2 .



Les tirages sont équiprobables . Soit P la probabilité définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$.

On a alors :

$P\,(X = 0) = \dfrac{3}{10}$, $P\,(X = 1\,000) = \dfrac{6}{10}$ et $P\,(X = 2\,000) = \dfrac{1}{10}$.

Les résultats trouvés peuvent être représentés par le tableau suivant :

$X = x_i$	0	1 000	2 000
$P(X = x_i)$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{6}{10}$	$\dfrac{1}{10}$

Les résultats donnés par ce tableau définissent la **loi de probabilité de la variable aléatoire X .**

Plus généralement ,

lorsqu'à chaque valeur x_i , avec $1 \leqslant i \leqslant n$, prise par une variable aléatoire X , on associe la probabilité p_i de l'événement $(X = x_i)$, on dit que l'on a défini la loi de probabilité de X

Dans la suite , on désigne par $\Omega = \{a_1 , a_2 , \dots , a_n\}$ un univers , par P une probabilité définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$, par X une variable aléatoire .

On appelle **univers image** de la variable aléatoire X , l'ensemble des nombres pris par X et noté $X(\Omega) = \{x_1 , x_2 , \dots , x_n\}$ et on suppose que $\boldsymbol{x_1 < x_2 < \dots < x_n}$ **.**

On note $\boldsymbol{(X < x)}$ l'événement «X est strictement inférieure à x» .

3° Fonction de répartition

Dans l'exemple du paragraphe précédent , on peut se poser la question suivante :

quelle est la probabilité de **gagner au plus** 1 000 L.L. , au plus 2 000 L.L. ?

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et P la probabilité définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$. La fonction de répartition F de la variable aléatoire X est la fonction définie de $\mathbb{R}$ sur [0 ; 1] , qui , à tout réel x , associe la probabilité que X soit inférieure ou égale à x : $F(x) = P(X \leqslant x)$

Dans l'exemple précédent , on peut présenter la fonction de répartition comme suit :

Intervalle	$]-\infty\ ;\ 0[$	$[0\ ;\ 1\,000[$	$[1\,000\ ;\ 2\,000[$	$[2\,000\ ;\ +\infty[$
$F(x)$	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}+\frac{6}{10}=\frac{9}{10}$	$\frac{3}{10}+\frac{6}{10}+\frac{1}{10}=1$

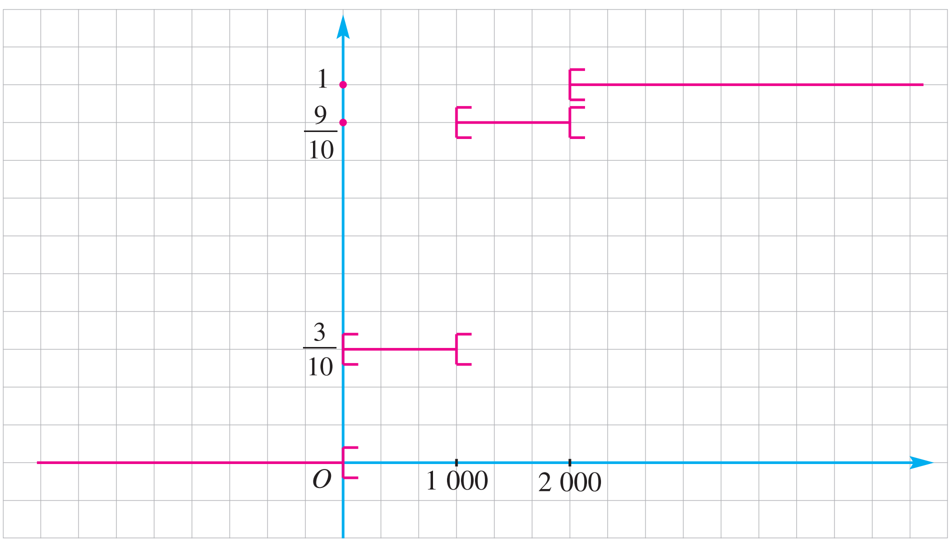
Ce tableau permet de répondre aux questions précédentes

P(gagner au plus 1 000 L.L) $= P\,(X \leqslant 1\,000) = \dfrac{9}{10}$ et

P(gagner au plus 2 000 L.L) $= P\,(X \leqslant 2\,000) = 1$.

On peut interpréter graphiquement la fonction de répartition F par une représentation graphique sur chacun des intervalles donnés .

Cette représentation illustre l'exemple précédent .



4° Caractéristiques d'une variable aléatoire

Soit $\Omega = \{a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_n\}$ un univers , P une probabilité , X une variable aléatoire et $X\,(\Omega) = \{x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n\}$ son univers image .

On note $P\,(X = x_i) = p_i$.

a) Espérance mathématique

On appelle **espérance mathématique** de la variable aléatoire X , le nombre réel noté ***E(X)*** défini par :

$$\boldsymbol{E(X) = x_1\, p_1 + x_2\, p_2 + ... + x_n\, p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i}$$

Comme la somme des probabilités p_i est égale à 1 , $(p_1 + p_2 + ... + p_n = 1)$, alors

$\dfrac{x_1\, p_1 + x_2\, p_2 + x_n\, p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n} = x_1\, p_1 + x_2\, p_2 + ... + x_n\, p_n = E(X)$. Par suite , l'espérance mathématique $E(X)$

de la variable aléatoire X est le barycentre des points pondérés (x_1 , p_1) , (x_2 , p_2) , ... , (x_n , p_n) .

EXEMPLE

Une urne contient quatre boules rouges , cinq boules noires et trois boules blanches indiscernables au toucher .

On tire au hasard une boule de l'urne et on note sa couleur .

On définit la variable aléatoire X de la façon suivante :

«la boule tirée est rouge» fait gagner quatre points ; X prend la valeur 4 ,

«la boule tirée est noire» fait perdre trois points ; X prend la valeur – 3 ,

«la boule tirée est blanche» fait gagner zéro point ; X prend la valeur 0 .

Voici un tableau représentant la loi de probabilité de X :

$X = x_i$	-3	0	4
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$

L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = -3 \times \frac{5}{12} + 0 \times \frac{3}{12} + 4 \times \frac{4}{12} = \frac{1}{12} .$$

Ceci permet d'espérer un gain moyen de $\frac{1}{12}$ de point .

b) Variance et écart-type

On appelle **Variance** de la variable aléatoire X , le nombre réel noté $\boldsymbol{V(X)}$, défini par :

$$\boxed{\boldsymbol{V(X) = \left[x_1 - E(X)\right]^2 p_1 + \left[x_2 - E(X)\right]^2 p_2 + \ldots + \left[x_n - E(X)\right]^2 p_n}}$$

La variance est la moyenne (barycentre) des carrés des écarts entre l'espérance mathématique (gain) et les diverses valeurs de la variable aléatoire (gain algébrique) .

c) Formule de la variance

Lorsqu'on effectue le développement dans $V(X)$ on obtient :

$$\begin{aligned} V(X) &= \left[x_1 - E(X)\right]^2 p_1 + \left[x_2 - E(X)\right]^2 p_2 + \ldots + \left[x_n - E(X)\right]^2 p_n \\ &= p_1\, x_1^2 + p_2\, x_2^2 + \ldots + p_n\, x_n^2 - 2E(X)\,[p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n] + \\ &\quad (p_1 + p_2 + \ldots + p_n)\left[E(X)\right]^2 \\ &= p_1\, x_1^2 + p_2\, x_2^2 + \ldots + p_n\, x_n^2 - 2E(X).E(X) + \left[E(X)\right]^2 \text{, car} \\ &\quad p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 \text{ .} \end{aligned}$$

$$\boxed{\boldsymbol{V(X) = p_1\, x_1^2 + p_2\, x_2^2 + \ldots + p_n\, x_n^2 - \left[E(X)\right]^2 \text{ ou } V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2}}$$

On appelle **écart-type** de la variable aléatoire X , le nombre réel noté $\sigma(X)$, défini par :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}}$$

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent , trouvons $V(X)$ et $\sigma(X)$.

$$\begin{aligned} V(X) &= \left[-3 - \frac{1}{12}\right]^2 . \frac{5}{12} + \left[0 - \frac{1}{12}\right]^2 . \frac{3}{12} + \left[4 - \frac{1}{12}\right]^2 . \frac{4}{12} = \frac{15\,684}{12^3} \\ &\simeq 9{,}076 \text{ .} \end{aligned}$$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 3{,}01264$.

6 LOI DE BERNOULLI (LOI BINÔMIALE)

Une expérience ne comportant que deux issues est appelée **épreuve de Bernoulli .** Lancer une pièce de monnaie , par exemple , ne comporte que deux issues : «pile» et «face» .

Soit une épreuve de Bernoulli qui se répète plusieurs fois . Le résultat d'une épreuve ne dépend pas du résultat des épreuves précédentes ; on dit alors qu'on a un **schéma de Bernoulli ,** c'est-à-dire que la succession des épreuves forme des événements indépendants . Lancer une pièce de monnaie dix fois est un schéma de Bernoulli .

On appelle **«succès»** (S) la première issue et **«échec»** (E) la deuxième issue d'une épreuve de Bernoulli .

Si p est la probabilité de (S) : $P(S) = p$, alors $P(E) = 1 - p = q$.

Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de succès lors de n épreuves ($n > 1$) .

Si $X = k$, c'est-à-dire il y a k succès et $n - k$ échecs , alors il y a C_n^k éventualités correspondant à $X = k$ et la probabilité de chaque éventualité est $p^k . q^{n-k}$ car les épreuves sont indépendantes .

D'où : $\boxed{P(X = k)= C_n^k\, p^k\, q^{n-k}}$

Cette loi est dite loi binômiale de paramètres n et p .
$E(X) = np$; $V(X) = npq$ et $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

EXEMPLE

Une urne contient quatre boules blanches et six boules noires indiscernables au toucher . On tire une boule et on note sa couleur .

On répète l'épreuve six fois avec remise de la boule tirée . On appelle succès (S) le tirage d'une boule blanche et échec (E) le tirage de la boule noire : $P(S) = p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, par suite $P(E) = q = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

La probabilité d'avoir quatre boules blanches pour les six tirages est :
$P(X = 4) = C_6^4 \left(\frac{2}{5}\right)^4 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 0{,}6912$.

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Soit Ω un univers , P une probabilité , A et B deux événements de Ω tels que $P(A) = 0{,}6$ et $P(B) = 0{,}3$.

Déterminer $P(A \cup B)$ sachant que :

1° A et B sont incompatibles **2°** $B \subset A$ **3°** $P(A \cap B) = 0{,}2$.

2 On tire au hasard une carte d'un jeu de 52 cartes . On note A l'événement «obtenir un roi» et B l'événement «obtenir un cœur» .

Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

3 Un sac contient deux jetons bleus , trois jetons rouges et quatre jetons verts .

On tire au hasard et simultanément deux jetons . Calculer la probabilité d'obtenir :

1° deux jetons bleus **2°** un jeton bleu et un jeton vert **3°** aucun jeton bleu .

4 On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 52 cartes .

Quelle est la probabilité d'obtenir :

1° deux piques ?

2° exactement une carte pique ?

3° aucune carte pique ?

5 Un joueur tire au hasard et simultanément huit cartes dans un jeu de 52 cartes .

Calculer la probabilité pour que la «main» de huit cartes contienne :

1° un carré as (4 as) . **2°** au moins un as . **3°** au plus trois as .

6 On tire au hasard et simultanément , quatre cartes dans un jeu de 52 cartes .

Quelle est la probabilité d'avoir :

1° quatre as ?

2° quatre cœurs ?

3° quatre cartes de couleurs différentes ? (les couleurs des cartes sont : trèfle , carreau , cœur , pique) .

4° quatre cartes de même couleur ?

5° deux as et deux rois ?

7 On tire au hasard et simultanément 13 cartes d'un jeu de 52 cartes .

Quelle est la probabilité d'avoir :

1° deux as exactement ?

2° au moins un as ?

3° deux piques seulement ?

4° au moins dix piques ?

5° au plus 4 piques ?

6° 5 trèfles et 4 cœurs ?

8 On lance deux dés parfaits . Calculer la probabilité d'avoir :

1° au moins un 6 .

2° un double 6 .

9 Dans une loterie de 100 billets , il y a trois billets gagnants .

1° Quelle est la probabilité de gagner un lot en achetant :

a) un billet ? **b)** deux billets ?

2° Quelle est la probabilité de gagner deux lots en achetant :

a) deux billets ? **b)** quatre billets ?

3° Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot en achetant :

a) deux billets ? **b)** quatre billets ?

10 Le programme d'une épreuve d'examen comporte cent sujets , trois d'entre eux , tirés au sort et simultanément , sont proposés à chaque candidat .

Un candidat n'ayant étudié que le quart des sujets du programme subit l'épreuve .

Quelle est la probabilité que ce candidat ait étudié .

1° les trois sujets proposés ?

2° deux de ces sujets proposés ?

3° aucun des trois sujets proposés ?

4° au moins l'un de ces sujets proposés ?

11 A et B sont deux événements indépendants .

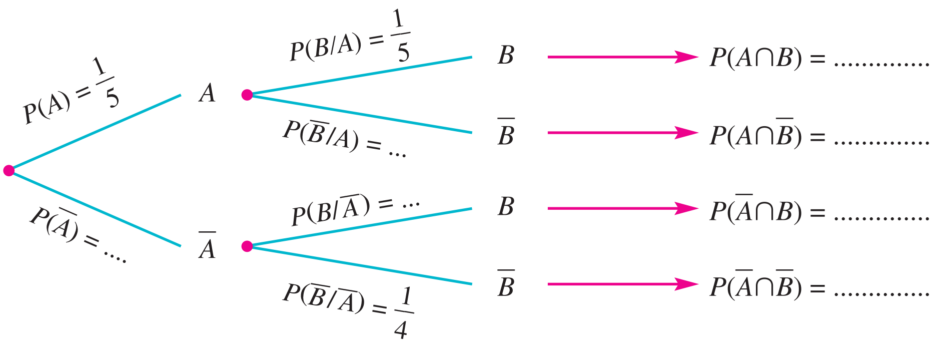
1° On donne $P(A) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}5$. Déterminer $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

2° On donne $P(A \cap B) = 0{,}1$, $P(A \cup B) = 0{,}6$. Déterminer $P\left(A\right)$ et $P(B)$.

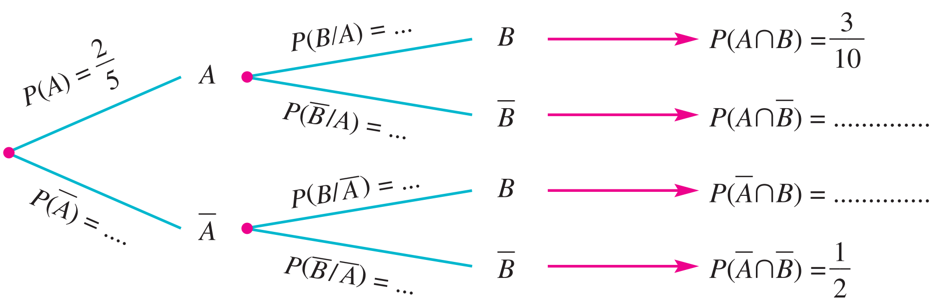
3° On donne $P(\overline{A}) = 0{,}2$, $P(A \cap B) = 0{,}16$. Déterminer $P(B)$ et $P(A \cup B)$.

12 Compléter les arbres suivants de probabilités .

1°

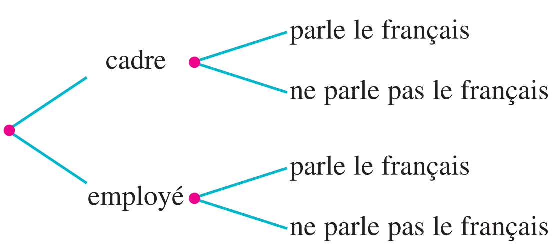


2°



13 Un sondage est effectué dans une entreprise comprenant 20% de cadres et 80% d'employés . On sait que 40% des cadres et 15% des employés parlent le français .

1° Recopier l'arbre pondéré ci-dessous et inscrire sur chaque branche la probabilité convenable .



2° On choisit au hasard une personne de l'entreprise .

On appelle C l'événement «être cadre»

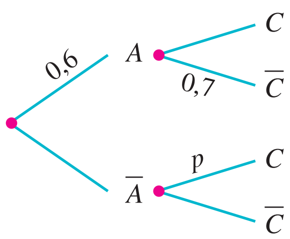
E l'événement «être employé»

et F l'événement «parler le français» .

a) Calculer $P(C \cap F)$ et $P(E \cap F)$.

b) Déduire $P(F)$ puis $P(C/F)$.

14 Voici des informations données par un arbre pondéré de probabilités pour deux événements A et C .



où p est inconnue .

1° Compléter l'arbre précédent .

2° Calculer p pour que A et C soient indépendants .

15 A et B sont deux événements et P une probabilité .

On donne $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}5$, $P(A \cup B) = 0{,}65$.

1° Calculer $P(A/B)$.

2° A et B sont-ils indépendants ? En déduire $P(B/A)$.

16 A et B sont deux événements et P une probabilité .

On donne $P(A) = \dfrac{3}{8}$, $P(B) = \dfrac{5}{8}$, $P(A \cup B) = \dfrac{3}{4}$.

1° Calculer $P(A/B)$ et $P(B/A)$.

2° Les événements A et B sont-ils indépendants ?

17 On lance un dé parfait . Quelle est la probabilité d'obtenir le chiffre 6 sachant :

1° que l'on a obtenu un résultat pair ?

2° que l'on a obtenu un résultat multiple de 3 ?

18 On donne la loi de probabilité de la variable X par le tableau ci-dessous .

x_i	-5	-4	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

19 On donne la fonction de répartition de la variable aléatoire X par le tableau ci-contre .

1° Déterminer la loi de probabilité de X .

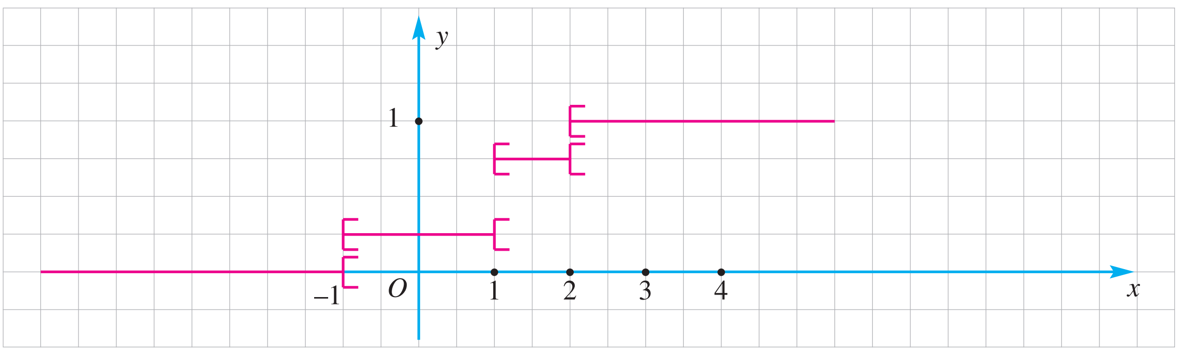
$x_i \in$	$]-\infty ; -3[$	$[-3 ; -1[$	$[-1 ; 1[$	$[1 ; 3[$	$[3 ; 5[$	$[5 ; +\infty[$
$F(x_i)$	0	0,1	0,2	0,4	0,9	1

2° Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

20 Soit X la variable aléatoire dont la fonction de répartition est représentée ci-dessous .

1° Déterminer la loi de probabilité de X .

2° Calculer son espérance mathématique , sa variance et son écart-type .



21 Un joueur lance deux pièces de monnaie parfaitement équilibrées .

Il gagne 1 point à chaque face obtenue et perd 5 points s'il n'obtient aucune face .

X est la variable aléatoire du gain algébrique du joueur .

1° Donner le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

2° Calculer l'espérance mathématique du gain du joueur . Ce jeu est-il favorable au joueur ?

22 Dans un jeu de 32 cartes (As , Roi , Dame , Valet , 10 , 9 , 8 et 7 de chaque couleur) on tire trois cartes , simultanément et au hasard .

On appelle X la variable aléatoire réelle qui , à chaque tirage , associe le nombre de cœurs qu'il contient .

1° Quelles sont les valeurs prises par X ?

2° Déterminer la loi de probabilité de X puis $E(X)$ et $\sigma(X)$.

23 À l'occasion d'une tombola , soixante billets sont vendus . Parmi ceux-ci , il y a deux billets gagnants . Une personne achète deux billets . Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de billets gagnants que détient cette personne .

1° Déterminer la loi de probabilité de X .

2° Calculer $E(X)$.

24 Les cinquante élèves du club d'informatique d'une école sont répartis selon le tableau suivant :

	Garçons	**Filles**
1ère année secondaire	20	10
2ème année secondaire	12	8

1° Un élève de ce club est choisi au hasard . Quelle est la probabilité de l'événement A :
«L'élève choisi est un garçon sachant qu'il est en 2ème année secondaire» ?

2° Deux élèves de ce club sont choisis au hasard pour représenter leur école à un concours national .

a) Combien y a-t-il de choix possibles ?

b) Quelle est la probabilité de l'événement B :
«Les deux élèves choisis sont des garçons» ?

c) Quelle est la probabilité de l'événement C :
«Les deux élèves choisis sont en 1ère année secondaire sachant que ce sont des garçons» ?

25 Le tableau suivant représente la répartition des élèves d'une école secondaire :

	Filles	**Garçons**
Première année	86	120
Deuxième année	32	102
Troisième année	72	88

1° Trois élèves sont choisis au hasard pour représenter leur école à un concours national de sport .
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : Les élèves choisis sont tous en troisième année .
B : Les élèves choisis sont dans une même année .
C : Les élèves choisis sont trois filles , une de chaque année .

2° On choisit un élève au hasard pour représenter son école à l'étranger . Calculer la probabilité qu'il soit un garçon sachant qu'il est en deuxième année .

$\boxed{26}$ Deux ateliers A et B fabriquent des pièces électroniques .

Pour une commande de 2000 pièces , A en a produit 1200 et B en a produit 800 .

L'atelier A produit 4% de pièces défectueuses et B en produit 3% . On prend une pièce au hasard dans la commande .

On appelle A l'événement «la pièce provient de l'atelier A» et B l'événement «la pièce provient de l'atelier B» et D l'événement «elle est défectueuse» .

1° Compléter le tableau qui décrit la composition de la commande .

	Nombre de pièces défectueuses	**Nombre de pièces non défectueuses**	**Total**
Nombre de pièces produites par A			
Nombre de pièces produites par B			

2° Calculer les probabilités suivantes :

a) $P(D)$, $P(A \cap D)$ et $P(A/D)$.

b) $P(\overline{D})$, $P(\overline{D} \cap B)$ et $P(B/\overline{D})$

$\boxed{27}$ Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse *(GR)* . Au cours d'une épidémie , on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés ; on sait de plus qu'au cours de cette épidémie , il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés .

1° Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu vacciné ?

2° Quelle est la probabilité de tomber malade ?

3° Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné ?

$\boxed{28}$ Une urne contient trois boules vertes et quatre boules bleues . On tire au hasard une boule que l'on ne remet pas dans l'urne , puis on tire une seconde .

1° Quelle est la probabilité pour que la seconde boule soit bleue sachant que la première est :
a) verte ? **b)** bleue ?

2° Quelle est la probabilité pour que la première boule soit bleue sachant que la seconde est :
a) verte ? **b)** bleue ?

29 Dans une classe de terminale , 60% des élèves ont déclaré aimer l'étude des mathématiques , 40% des sciences de la vie et de la terre et 30% des mathématiques et des sciences de la vie et de la terre .

Quelle est la probabilité de choisir un élève de cette classe qui aime :

1° les sciences de la vie et de la terre mais pas les mathématiques ?

2° les mathématiques mais pas les sciences de la vie et de la terre ?

30 Deux lignes téléphoniques L_1 et L_2 aboutissent au même standard . On désigne par A l'événement : L_1 est occupée , par B l'événement : L_2 est occupée .

On donne $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}3$.

Déterminer les probabilités des événements suivants :

1° une ligne au moins est occupée .

2° les deux lignes L_1 et L_2 sont libres .

3° une seule ligne est occupée .

4° une ligne au moins est libre .

31 Dans une ville , 40% des hommes sont des fumeurs . On signale que 6% des hommes de cette ville ont une maladie pulmonaire et que 85% de ces malades sont des fumeurs .

On choisit au hasard un homme de cette ville .

Soit les événements suivants :

M : «l'homme choisi a une maladie pulmonaire»

F : «l'homme choisi est un fumeur» .

1° Déterminer les probabilités suivantes : $p(M)$, $p(F)$ et $p(F/M)$.

2° Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

a) L'homme choisi est un fumeur et a une maladie pulmonaire .

b) L'homme choisi est un non-fumeur et a une maladie pulmonaire .

c) L'homme choisi a une maladie pulmonaire sachant qu'il est fumeur .

32 Une société d'élevage de poissons dispose de deux bassins B_1 et B_2 . Le bassin B_1 contient 70 truites et 30 carpes , et B_2 contient 50 truites et 20 carpes .

On choisit au hasard un des deux bassins et on extrait au hasard un poisson . Soit les événements :
A : «Le poisson provient du bassin B_1»
T : «Le poisson est une truite»
C : «Le poisson est une carpe»

1° a) Montrer que la probabilité de A est $p(A) = \dfrac{1}{2}$.

b) Montrer que $P(T/A) = \dfrac{7}{10}$. En déduire $P(A \cap T)$.

2° Calculer $P(C/A)$. En déduire $P(A \cap C)$.

3° Calculer la probabilité de l'événement :
B : «Le poisson est une carpe et provient de B_2» .

4° En déduire la probabilité d'extraire une carpe .

5° Sachant qu'on a tiré une carpe , quelle est la probabilité qu'elle soit de B_2 ?

33 Un standard téléphonique arrive à répondre à 90% des appels . On appelle 10 fois , au hasard , ce standard .
Calculer la probabilité de le contacter :

1° 10 fois **2°** exactement 5 fois **3°** au moins une fois .

34 Une urne u_1 contient 24 boules blanches et 9 boules noires .
Une urne u_2 contient 9 boules blanches et une boule noire .
On choisit au hasard une urne et on tire une boule .
Quelle est la probabilité de :

1° tirer une boule blanche ?

2° tirer une boule de u_1 sachant que l'on a tiré une boule blanche ?

35 Trois machines A , B et C produisent respectivement 60% , 30% et 10% des pièces fabriquées dans une usine .
La machine A produit 2% de pièces défectueuses , la machine B 3% et la machine C 4% .
On choisit au hasard une pièce à la sortie de l'usine .
Quelle est la probabilité :

1° qu'elle soit défectueuse ?

2° qu'elle soit produite par la machine C sachant qu'elle est défectueuse ?

36 Dans une certaine ville , 40% de la population ont les cheveux blonds , 50% ont les yeux bleus et 35% ont à la fois les cheveux blonds et les yeux bleus . On choisit au hasard une personne de cette population . Quelle est la probabilité :

1° pour qu'elle ait les yeux bleus sachant qu'elle a les cheveux blonds ?

2° pour qu'elle ait les cheveux blonds sachant qu'elle a les yeux bleus ?

37 Dans une population donnée , 15% des individus ont une maladie M_a . Parmi les individus atteints par la maladie M_a , 20% ont une maladie M_b et parmi les individus non atteints par la maladie M_a , 4% ont la maladie M_b .

On choisit au hasard un individu et on considère les événements :

«A : l'individu est atteint par la maladie M_a»

«B : l'individu est atteint par la maladie M_b»

1° Donner les valeurs de $P(A)$, $P(B/A)$, $P(B/\overline{A})$.

2° Calculer $P(B)$ et $P(A/B)$.

38 Trois dés cubiques sont placés dans un sac . Deux de ces dés sont normaux ; leurs faces sont numérotées de 1 à 6 . Le troisième dé est spécial : trois de ses faces sont numérotées 6 et les trois autres sont numérotées 1 . On tire du sac , simultanément et au hasard , deux dés parmi les trois et on les lance .

On note A l'événement «les deux dés tirés sont normaux»

et on note B l'événement «les deux faces supérieures sont numérotées 6» .

1° Définir l'événement contraire de A , qu'on notera $\overline{A}$, puis calculer les probabilités $P(A)$ et $P\left(\overline{A}\right)$.

2° Calculer $P(B/A)$, $P(B \cap A)$ et $P(B)$.

3° Calculer $P(A/B)$.

39 Pour prévenir deux défectuosités $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ des pièces fabriquées par une usine , on décide de soumettre l'ensemble des pièces à des tests .

Les études statistiques menées sur un effectif assez grand ont montré que :

1° 8% des pièces présentent le défaut $\mathscr{A}$.

2° Parmi les pièces atteintes du défaut $\mathscr{A}$, 15% ont le défaut $\mathscr{B}$.

3° Parmi les pièces non atteintes du défaut $\mathscr{A}$, 5% ont le défaut $\mathscr{B}$.

On prend au hasard une pièce produite et on considère les événements suivants :

A : «La pièce présente le défaut $\mathscr{A}$ »

B : «La pièce présente le défaut $\mathscr{B}$» .

1° a) Calculer la probabilité pour qu'une pièce prise au hasard présente les deux défauts $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$.

b) Calculer la probabilité pour qu'une pièce prise au hasard présente le défaut $\mathscr{B}$ et ne présente pas le défaut $\mathscr{A}$.

c) En déduire que la probabilité de $\mathscr{B}$ est égale à 0,058 .

2° Démontrer que la probabilité d'obtenir une bonne pièce (c'est-à-dire ne présente ni le défaut $\mathscr{A}$, ni le défaut $\mathscr{B}$) est 0,874 .

3° Au cours de la fabrication , on prélève , au hasard , successivement , 12 pièces .

Déterminer la probabilité de l'événement «11 pièces au moins sont bonnes» .

On donnera une valeur décimale approchée à 10^{-3} près du résultat .

40 Un joueur de tennis effectue une mise en jeu . Pour cela , il a droit à deux tentatives : un premier service , suivi , s'il n'est pas réussi , d'un deuxième service .

La probabilité pour que le premier service réussisse est $\frac{2}{3}$; s'il a échoué , la probabilité pour que le deuxième service réussisse est $\frac{4}{5}$.

Lorsque les deux services échouent , on dit qu'il y a «double faute» ; sinon la mise en jeu est réussie .

1° a) Déterminer la probabilité pour que , sur une mise en jeu , ce joueur fasse une double faute .

b) Déterminer la probabilité pour que la mise en jeu soit réussie .

2° Ce joueur participe à un entraînement publicitaire organisé par son club et patronné par un magasin de sport . Il s'agit pour lui , d'effectuer dix mises en jeu successives (dont les résultats sont indépendants les uns des autres) . Chaque mise en jeu réussie lui permet de gagner une balle . Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de balles gagnées .

a) Exprimer $P(X=k)$ en fonction de k entier naturel entre 0 et 10 . Donner $P(X = 9)$ et $P(X = 10)$.

b) Déterminer la probabilité pour que ce joueur gagne au moins 9 balles .

Pour chercher

41 Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 5 .

1° On tire simultanément deux boules de l'urne .

Soit X la variable aléatoire correspondant à la valeur absolue , de la différence des deux numéros tirés .

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

2° On tire maintenant successivement et avec remise deux boules de l'urne . Soit Y la variable aléatoire correspondant à la valeur absolue de la différence des deux numéros tirés .

a) Déterminer la loi de probabilité de Y .

b) Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.

42 Un homme , en possession de dix clés dont une seule est la bonne , essaie d'ouvrir une porte . On suppose les clés indiscernables et les essais indépendants et aléatoires .

1° Il essaie les clés en remettant à chaque fois la clé essayée dans le trousseau .

Calculer les probabilités des événements suivants :

A : «Il ouvre la porte du premier coup»

B : «Il ouvre la porte au deuxième essai seulement»

C : «Il ouvre la porte au quatrième essai seulement»

D : «Il ouvre la porte en moins de cinq essais» .

2° Il pratique maintenant une autre méthode qui consiste à mettre de côté la clé essayée et à continuer les essais avec les clés restantes .

Calculer la probabilité des événements A , B , C et D .

43 On utilise un dé pipé (non parfait) à six faces numérotées de 1 à 6 . Lorsqu'on lance le dé :

• les faces portant un chiffre pair ont la même probabilité d'apparition ;

• les faces portant un chiffre impair ont la même probabilité d'apparition ;

• la probabilité d'apparition d'un chiffre impair est le double de la probabilité d'apparition d'un chiffre pair .

1° Déterminer la probabilité de voir apparaître chaque face .

2° Déterminer la probabilité de voir apparaître un chiffre pair ; un chiffre impair .

3° On lance le dé trois fois de suite ; calculer :

a) la probabilité d'obtenir exactement deux fois un chiffre impair .

b) la probabilité d'obtenir trois chiffres consécutifs dans un ordre quelconque .

c) la probabilité de ne pas obtenir trois chiffres consécutifs , dans un ordre quelconque .

44 Une première urne renferme huit boules blanches . Une de ces boules porte le nombre 1 , trois portent le nombre 2 et quatre le nombre 4 .

Une deuxième urne renferme six boules noires . Une de ces boules porte le nombre 3 , deux portent le nombre 5 et trois portent le nombre 6 .

1° On extrait au hasard une boule de chaque urne . On désigne par X le nombre porté par la boule blanche et par Y le nombre porté par la boule noire .

a) Calculer la probabilité de l'événement $\{X = 2 \text{ et } Y = 6\}$.

b) Montrer que la probabilité de l'événement $\{X+Y \geqslant 8\}$ est égale à $p = \dfrac{29}{48}$.

2° On appelle A l'événement $\{X+Y \geqslant 8\}$. On effectue dix fois de suite le tirage décrit au 1° en replaçant les boules extraites dans leur urne respective avant chaque tirage .

Les tirages sont indépendants .

On désigne par Z la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de réalisations de l'événement A au cours de ces dix tirages .

Déterminer la probabilité de l'événement $Z = 3$ et $Z = 5$.

45 Un test consiste à répondre à cinq questions par «vrai» ou par «faux» . Chaque réponse juste est notée quatre points et chaque réponse fausse est notée –2 points . Un candidat répond au hasard à chacune de ces questions , c'est-à-dire que la réponse «vrai» et la réponse «faux» ont la même probabilité . Soient X et Y les variables aléatoires suivantes :

X : nombre de réponses exactes .

Y : note obtenue , c'est-à-dire des deux nombres 0 et S , S désignant la somme algébrique des cinq notes obtenues par le candidat .

1° a) Donner la loi de probabilité de X . Calculer son espérance mathématique et sa variance .

b) Calculer $P\ (X \geqslant 4)$.

2° Donner les valeurs prises par Y et déterminer sa loi de probabilité . Calculer son espérance mathématique et sa variance .

46 On dispose d'un dé cubique dont chaque face a la même probabilité d'apparaître . Le dé possède trois faces rouges , une face orange et deux faces vertes .

Un jeu consiste à lancer une fois le dé . La règle du jeu est la suivante : le joueur mise 10 \$;

- si la face supérieure du dé est rouge , il ne reçoit rien ;

- si la face supérieure du dé est orange , il reçoit 10 *\$* ;

- si la face supérieure du dé est verte , il reçoit m dollars (m est un entier strictement supérieur à 10) .

On appelle gain algébrique du joueur la différence entre ce qu'il reçoit à l'issue d'une partie et sa mise ; on désigne par X la variable aléatoire associant à chaque lancer le gain algébrique .

1° Quelles sont les valeurs prises par X ?

Déterminer la loi de probabilité de X .

2° Déterminer en fonction de m , l'espérance mathématique de X . Le jeu est dit «équitable» si l'espérance mathématique est nulle . Déterminer m pour qu'il en soit ainsi .

3° L'entier naturel n étant supérieur ou égal à 2 , un joueur effectue n lancers consécutifs indépendants .

a) Pour un lancer donné , montrer que la probabilité d'obtenir un gain algébrique strictement positif est $p = \dfrac{1}{3}$.

b) Déterminer en fonction de n , la probabilité p_n pour que ce joueur obtienne au moins une fois un gain algébrique strictement positif à l'issue des n lancers .

c) Déterminer le plus petit entier naturel N tel que $P_n \geqslant 0{,}44$.

$\boxed{47}$ Dans une bibliothèque publique , chaque visiteur doit choisir un livre ou bien utiliser un ordinateur .

70% des visiteurs utilisent l'ordinateur .

Parmi ceux qui utilisent l'ordinateur 45% font des recherches .

Parmi les visiteurs qui choisissent un livre 80% font des recherches .

1° On rencontre , au hasard , un visiteur de la bibliothèque .

On considère les événements suivant :

O : «le visiteur utilise l'ordinateur» .

L : «le visiteur choisit un livre» .

R : «le visiteur fait des recherches» .

a) Vérifier que la probabilité $P(O \cap R)$ est égale à 0,315 .

b) Calculer $P(L \cap R)$ puis $P(R)$.

c) Le visiteur a fait des recherches , calculer la probabilité qu'il ait utilisé l'ordinateur .

2° Un lundi matin , 30 personnes ont visité la bibliothèque . On choisit , simultanément et au hasard , trois de ces visiteurs . Soit X la variable aléatoire égale au nombre de visiteurs qui ont utilisé l'ordinateur parmi les trois visiteurs choisis .

a) Déterminer les valeurs de X .

b) Déterminer la loi de probabilité de X .

Bac.

48 Dans une entreprise il y a 20 employés répartis dans deux départements selon le tableau suivant :

	Département technique	**Département administratif**
Femmes	3	5
Hommes	10	2

1° Le directeur de l'entreprise veut offrir un cadeau à l'un des employés ; pour cela il choisit au hasard un employé de cette entreprise .

On considère les événements suivants :

F : «l'employé choisi est une famme» .

H : «l'employé choisi est un homme» .

T : «l'employé choisi est du département technique» .

A : «l'employé choisi est du département administratif» .

a) Calculer les probabilités suivantes :

$P(F / T)$, $P(F / A)$, $P(F \cap T)$ et $P(F)$.

b) Sachant que l'employé choisi est un homme , quelle est la probabilité qu'il soit du département technique ?

2° Dans une autre occasion , le directeur de l'entreprise choisit au hasard et simultanément **deux** employés du département technique et il choisit aussi au hasard **un** employé du département administratif .

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de femmes choisies .

a) Vérifier que $P(X = 1) = \dfrac{95}{182}$.

b) Déterminer la loi de probabilité de X .

Bac.

49 Pour encourager le tourisme intérieur, une agence de tourisme propose à ses clients des week-ends de 2 jours avec trois options :

• Pension complète .
• Demi-pension .
• Pension de luxe .

L'agence publie l'annonce publicitaire suivante :

Option Destination	Pension complète	Demi-pension	Pension de luxe
Montagne	150 000 LL	100 000 LL	200 000 LL
Plage	100 000 LL	75 000 LL	150 000 LL

Cette agence estime que 65% de ses clients choisissent la montagne , et le reste la plage et que parmi les clients de chaque destination , 55% choisissent la pension complète , 30% choisissent la demi-pension , et le reste la pension de luxe .

On interroge au hasard un client .

Soit les événements suivants :

A : «le client interrogé a choisi la montagne» .

B : «le client interrogé a choisi la plage» .

C : «le client interrogé a choisi la pension complète» .

D : «le client interrogé a choisi la demi-pension» .

S : «le client interrogé a choisi la pension de luxe» .

1° a) Calculer les probabilités suivantes : $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$ et $P(C)$.

b) Le client interrogé a choisi la pension complète , quelle est la probabilité qu'il ait choisi la plage ?

2° Soit X la variable aléatoire égale à la somme payée à l'agence par un client .

a) Montrer que $P(X = 150\ 000) = 0{,}41$ et déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Que représente le nombre ainsi trouvé ?

c) Estimer la somme reçue par l'agence lorsqu'elle sert 200 clients .

Bac.

50 Pour maintenir en bon état de fonctionnement les voitures dans une ville donnée , une société fait contrôler toutes les voitures de cette ville .

On sait que 20% des voitures sont sous garantie .

Parmi les voitures qui sont sous garantie , la probabilité qu'une voiture ait un défaut est $\frac{1}{100}$.

Parmi les voitures qui ne sont pas sous garantie , la probabilité qu'une voiture ait un défaut est $\frac{1}{10}$.

1° Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : «La voiture contrôlée est sous garantie et a un défaut» .

D : «La voiture contrôlée a un défaut» .

2° Montrer que la probabilité d'une voiture contrôlée soit sous garantie sachant qu'elle a un défaut est $\frac{1}{41}$.

3° Le contrôle est gratuit si la voiture est sous garantie :

il coûte 50 000 LL si la voiture n'est pas sous garantie et n'a pas un défaut ;

il coûte 150 000 LL si la voiture n'est pas sous garantie et a un défaut .

On note X la variable aléatoire égale au coût de contrôle d'une voiture .

a) Quelles sont les valeurs possibles de X ?

b) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique de X .

4° La société fait contrôler en moyenne 50 voitures par jour . Estimer son coût de contrôle journalier .

Bac.

51 **A -** Deux dés parfaits ayant chacun six faces numérotées de 1 à 6 sont lancés .

On désigne par S la somme des numéros des deux faces apparues et on considère les événements suivants :

• H : «la somme S est plus grande ou égale à 8» .

• C : «la somme S est plus petite ou égale à 5» .

• E : «la somme S est égale à 6 ou 7» .

Montrer que la probabilité $P(H) = \dfrac{5}{12}$ et calculer $P(C)$ et $P(E)$.

B - 1° Dans une «Kermesse» organisée à la fin de l'année scolaire, un étudiant prend en charge un «stand» dans lequel il propose le jeu suivant :

Le joueur lance deux dés parfaits ayant chacun six faces numérotées de 1 à 6 .

• S'il obtient une somme supérieure ou égale à 8 , il tire au hasard un billet d'un sac R qui contient 30 billets dont 20 sont gagnants .

• S'il obtient une somme inférieure ou égale à 5 , il tire au hasard un billet d'un sac T qui contient 30 billets dont 10 sont gagnants .

• S'il obtient une somme S égale à 6 ou 7 , il choisit au hasard l'un des deux sacs R ou T et tire au hasard un billet de ce sac .

On désigne par G l'événement : «Le joueur tire un billet gagnant» .

a) Calculer la probabilité que le joueur tire un billet gagnant sachant qu'il a eu une somme plus grande ou égale à 8 . En déduire $P(H \cap G)$.

b) Montrer que $P(E \cap G) = \dfrac{11}{72}$ et calculer $P(C \cap G)$.

c) Déduire la probabilité $P(G)$ que le joueur tire un billet gagnant .

2° La direction de l'école veut que «tout le monde gagne» . Pour cela , elle donne à chaque joueur qui tire un billet gagnant une somme de 5000 LL et à chaque joueur qui tire un billet non gagnant une somme de :

• 3 000 LL s'il réalise l'événement H et ne gange pas .

• 2 000 LL s'il réalise l'événement C et ne gange pas .

• 1 000 LL s'il réalise l'événement E et ne gange pas .

On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme donnée par la direction à un joueur .

Vérifier que $P(X = 3000) = \dfrac{5}{36}$ et déterminer la loi de probabilité de X .

Bac.

52 Une urne contient $(n + 10)$ boules $(n \geqslant 2)$: n boules blanches , 6 boules rouges et 4 boules noires .

A - On tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne .

1° Calculer la probabilité $q(n)$ de tirer deux boules blanches .

2° On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur .

a) Montrer que $p(n) = \dfrac{n^2 - n + 42}{(n + 10)\,(n + 9)}$.

b) Vérifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} p(n) = \lim\limits_{n \to +\infty} q(n)$. Interpréter ce résultat .

c) Existe-t-il un cas où $p(n) = \dfrac{31}{105}$?

B - On suppose dans cette partie que $n = 3$.
Un jeu consiste à tirer simultanément et au hasard 2 boules de l'urne .
Si les 2 boules tirées sont de même couleur, le joueur marque +4 points ; sinon, il marque –1 point .
Le joueur répète le jeu deux fois en remettant , après le premier jeu , les boules tirées dans l'urne .
Soit X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués par le joueur .

1° Justifier que les valeurs de X sont : –2 ; 3 et 8 .

2° Déterminer la loi de probabilité de X .

3° Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Bac.

53 Monsieur Khalil a trois fils : Sami , Farid et Zahi mariés et pères de familles .
Les enfants de ces trois familles sont répartis selon le tableau suivant :

	Famille de Sami	**Famille de Farid**	**Famille de Zahi**
Filles	2	1	3
Garçons	2	3	1

Le grand père Khalil décide de choisir au hasard **un enfant de chaque famille** pour l'accompagner à son village .

1° Quelle est la probabilité qu'il choisisse trois filles ?

2° Soit les événements suivants :
F : «L'enfant choisi de la famille de Sami est une fille» .
G : «L'enfant choisi de la famille de Sami est un garçon» .
A : «Les trois enfants choisis sont deux filles et un garçon» .

a) Démontrer que la probabilité $p(A/F)$ est égale à $\dfrac{5}{8}$.

b) Calculer $p(A/G)$ et $p(A)$.

3° Soit X la variable aléatoire égale au nombre de filles choisies par le grand père .
Déterminer la loi de probabilité de X .

Bac.

54 Le tableau suivant représente la distribution des âges de 26 hommes et 24 femmes.

Age en années	[20 ; 25[	[25 ; 30[	[30 ; 35]
Nombre d'hommes	8	8	10
Nombre de femmes	5	9	10

On choisit au hasard , 3 personnes parmi ces 50 personnes pour former un comité .
Soit les événements suivants :
M : «le comité est formé de trois hommes» .
F : «le comité est formé de trois femmes» .
A : «le comité est mixte (formé d'hommes et de femmes)» .
B : «l'âge de chaque membre du comité est inférieur à 30 ans» .

1° Calculer chacune des probabilités $p(M)$, $p(F)$ et $p(A)$.

2° a) Calculer $p(B)$ et montrer que $p(B \cap \overline{A}) = \dfrac{33}{700}$. En déduire $p(B \cap A)$.

b) Calculer $p(B/A)$.

3° On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre des femmes d'un comité dont l'âge est inféfieur à 25 ans .
Déterminer la loi de probabilité de X . **Bac.**

55 Une urne contient **trois** boules blanches et **deux** boules noires .
Un joueur tire **successivement** et **au hasard** trois boules de l'urne en respectant la règle suivante :
Pour chaque tirage : • si la boule tirée est noire , il la remet dans l'urne ;
• si la boule est blanche , il ne la remet pas dans l'urne .

1° a) Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre : une boule noire , une boule noire et une boule blanche .
b) Montrer que la probabilité qu'il y ait une seule boule blanche parmi les trois boules tirées est égale à $\dfrac{183}{500}$.
2° Lors du tirage des trois boules , le joueur marque trois points pour chaque boule blanche tirée et marque deux points pour chaque boule noire tirée .
On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués par le joueur .
a) Montrer que les valeurs possibles de X sont : 6 , 7 , 8 et 9 .
b) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique .
3° Le joueur tire maintenant **successivement** et **au hasard** n boules de l'urne ($n > 3$) en respectant la même règle .
a) Calculer , en fonction de n , la probabilité de l'événement : «le joueur tire n boules noires» .
b) Calculer , en fonction de n , la probabilité P_n de l'événement :
«le joueur tire au moins une boule blanche» .
c) Quel est le nombre minimal de boules que le joueur doit tirer pour que $P_n \geqslant 0,99$? **Bac.**

56 On considère deux sacs $\boldsymbol{S_1}$ et $\boldsymbol{S_2}$ tels que :

$\boldsymbol{S_1}$ contient **six** cartes numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$\boldsymbol{S_2}$ contient **cinq** cartes numérotées 0, 1, 2, 4, 5.

A - Une carte est tirée au hasard du sac $\boldsymbol{S_1}$:

• Si elle porte l'un des numéros 1 ou 2 , on tire simultanément et au hasard **trois** cartes du sac $\boldsymbol{S_2}$.

• Si elle porte l'un des numéros 3 , 4 , 5 ou 6 , on tire simultanément et au hasard **deux** cartes du sac $\boldsymbol{S_2}$.

On considère les événements suivants :

K : «la carte tirée du sac $\boldsymbol{S_1}$ porte l'un des numéros 1 ou 2» .

L : «la carte tirée du sac $\boldsymbol{S_1}$ porte l'un des numéros 3 , 4 , 5 ou 6» .

E : «le produit des numéros portés par les cartes tirées du sac $\boldsymbol{S_2}$ est zéro» .

1° a) Calculer les probabilités $p(K)$ et $p(L)$.

b) Montrer que $p(E \cap K) = \dfrac{1}{5}$.

c) Calculer $p(E \cap L)$ et déduire $p(E)$.

2° Sachant que le produit des numéros portés par les cartes tirées du sac $\boldsymbol{S_2}$ est zéros , calculer la probabilité que l'on ait tiré trois cartes de $\boldsymbol{S_2}$.

B - Dans cette partie , on utilise **seulement** le sac $\boldsymbol{S_2}$.

On tire simultanément et au hasard **trois** cartes de ce sac .

Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros portés par les trois cartes tirées , ainsi les valeurs possibles de X sont 2 , 4 et 5 .

Démontrer que $p(X = 4) = \dfrac{3}{10}$ et déterminer la loi de probabilité de X .

Bac.

57 Une équipe de football propose , à ses supporters, des abonnements saisonniers pour 6, 8 ou 10 matchs.

Parmi les supporters qui ont pris un abonnement, on constate que :

• 45% ont choisi l'abonnement pour 6 matchs ,

• 35% ont choisi l'abonnement pour 8 matchs ,

• le reste a choisi l'abonnement pour 10 matchs ,

On interroge au hasard un supporter ayant pris un abonnement .

1° L'abonnement pour 6 matchs coûte n LL , celui pour 8 matchs coûte (n + 4 000) LL , et celui pour 10 matchs coûte (n + 6 000) LL .

On désigne par Y la variable aléatoire égale à la somme dépensée par le supporter interrogé .

a) Calculer n pour que l'espérance mathématique de Y soit égale à 22 600 LL .

b) Pour la valeur trouvée de n , représenter graphiquement la fonction de répartition de Y .

2° On sait que 85% des supporters qui ont pris un abonnement sont des garçons , et parmi ces garçons 40% ont choisi l'abonnement pour 6 matchs .

On considère les événements suivants :

G : «Le supporter interrogé est un garçon» .

A : «Le supporter interrogé a choisi l'abonnement pour 6 matchs» .

a) Vérifier que la probabilité $P(G \cap A)$ est égale à 0,34 puis calculer la probabilité $P(G \cap \overline{A})$.

b) Calculer $P(G/A)$.

Bac.

58 Dans une boutique il y a deux tiroirs T_1 et T_2 contenant des cravates .

Le tiroir T_1 contient 15 cravates en soie : 3 rouges , 5 vertes et 7 bleues .

Le tiroir T_2 contient 10 cravates en polyester : 2 rouges , 5 vertes et 3 bleues .

A - On choisit au hasard , une cravate de T_1 et une de T_2 . On désigne par E et F les deux événements suivants :

E : «les deux cravates choisies sont de même couleur» .

F : «les deux cravates choisies sont l'une rouge et l'autre bleue» .

1° Démontrer que la probabilité $P(E)$ est égale à $\frac{26}{75}$.

2° Calculer $P(F)$.

B - Dans cette partie , on choisit au hasard un des deux tiroirs et de ce tiroir on choisit au hasard une cravate .

On considère les événements suivants :

R : «la cravate choisie est rouge»

T_1 : «la cravate choisie provient du tiroir T_1» .

1° Calculer $P(R/T_1)$ et $P(R \cap T_1)$.

2° Calculer $P(R)$.

C - On suppose que les 25 cravates sont placées dans un même tiroir T et on choisit simultanément et au hasard trois cravates de T .

Le prix d'une cravate en soie est 50 000 LL et celui d'une cravate en polyester est 10 000 LL .

On désigne par X la somme des prix des trois cravates choisies . Calculer $P(X < 100\,000 \text{ LL})$.

Bac.

59 L’équipe d’une grande usine est répartie en trois catégories :

les ingénieurs , les techniciens et les ouvriers .

• 6% de l’équipe sont des ingénieurs .

• 74% de l’équipe sont des ouvriers .

• 80% des ouvriers sont des hommes .

• 10% des ingénieurs sont des femmes .

On interroge au hasard une personne de l’équipe de cette usine .

Soit les événements :

I : «La personne interrogée est de la catégorie des ingénieurs» .

O : «La personne interrogée est de la catégorie des ouvriers» .

T : «La personne interrogée est de la catégorie des techniciens» .

H : «La personne interrogée est un homme» .

1° a) Quelle est la probabilité d’interroger un homme ouvrier ?

b) Quelle est la probabilité d’interroger un homme ingénieur ?

2° On sait que 80% de l’équipe sont des hommes .

a) Démontrer que la probabilité d’interroger un homme technicien est 0,154 .

b) La personne interrogée est une femme , quelle est la probabilité qu’elle soit une technicienne ?

3° Dans cette question , on suppose que l’équipe de cette usine compte 500 personnes .

On choisit au hasard et simultanément trois personnes de cette équipe .

a) Calculer la probabilité de choisir trois personnes de trois catégories différentes .

b) Calculer la probabilité de choisir au plus une personne de la catégorie des ingénieurs .

Bac.

60 On dispose de deux urnes U et V .

L'urne U contient trois boules portant chacune le nombre **1** et deux boules portant chacune le nombre **3** .

L'urne V contient deux boules portant chacune le nombre **1** et trois boules portant chacune le nombre **3** .

A - On tire , au hasard , une boule de U et une boule de V .

1° Quelle est la probabilité que les deux boules tirées portent le même nombre ?

2° Quelle est la probabilité que les deux boules tirées portent deux nombres dont la somme est 4 ?

B - Dans cette partie , on tire au hasard et simultanément deux boules de U et une boule de V .

On désigne par E l'événement : «La somme des nombres portés par les trois boules tirées est 7» .

Montrer que la probabilité de l'événement E est égale à $\frac{2}{5}$.

C - On place les 10 boules des deux urnes dans une même urne W et on tire au hasard et simultanément trois boules de W . On désigne par X la variable aléatoire égale au produit des nombres portés par les trois boules tirées .

1° Trouver les quatre valeurs possibles de X .

2° Déterminer la loi de probabilité de X .

Bac.

61 Une urne contient 5 boules noires , 4 boules blanches et 1 boule verte .
On tire , au hasard et simultanément , 5 boules de cette urne .

1° Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2° Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
E : «parmi les cinq boules tirées il n'y a aucune boule noire»
F : «parmi les cinq boules tirées il y a au moins une boule noire»
G : «parmi les cinq boules tirées il y a exactement une boule noire et une boule verte» .

3° Calculer la probabilité de l'événement suivant :
H : «les boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur et il y a autant de boules blanches que de boules vertes» .

4° On considère les événements suivants :
A : «parmi les 5 boules tirées il y a exactement 4 boules de même couleur»
B : «la boule verte est parmi les 5 boules tirées» .
Vérifier que $P(A) = \frac{31}{252}$ et calculer $P(B/A)$.

Bac.

62 Une urne contient 4 boules noires , 3 boules blanches et n boules rouges . ($n \geqslant 2$)

A - Dans cette partie on prend $\boldsymbol{n = 2}$.
On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne .

1° Calculer la probabilité de tirer trois boules de même couleur .

2° On désigne par E l'événement :
«Parmi les trois boules tirées il y a exactement 2 boules de même couleur» .
Montrer que la probabilité $P(E)$ est égale à $\frac{55}{84}$.

B - Dans cette partie on tire simultanément et au hasard 2 boules parmi les $\boldsymbol{n + 7}$ boules de l'urne .
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées .
1° Démontrer que $P(X = 2) = \dfrac{n(n-1)}{(n+6)(n+7)}$.
2° Déterminer la loi de probabilité de X .

3° Calculer n pour que l'espérance mathématique $E(X)$ soit égale à 1 .

Bac.

63 Une urne contient 8 boules :
- 4 boules blanches portant chacune le nombre 0 ;
- 3 boules rouges portant chacune le nombre 5 ;
- 1 boule blanche portant le nombre 2 .

On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne .

Soit les événements suivants :
A : «les trois boules tirées portent des nombres pouvant former le nombre 200» .
B : «les trois boules tirées portent des nombres identiques» .
C : «les trois boules tirées sont blanches» .
D : «les trois boules tirées sont de même couleur» .

1° Montrer que la probabilité $p(A)$ est égale à $\frac{3}{28}$ et calculer $p(B)$, $p(C)$ et $p(D)$.

2° Déterminer la probabilité pour que parmi les trois boules tirées une seule porte le nombre 0 .

3° Les trois boules tirées sont blanches ; calculer la probabilité que les nombres portés par ces boules peuvent former le nombre 200 .

4° Soit X la variable aléatoire égale au produit des trois nombres portés par les trois boules tirées .
a) Donner les trois valeurs possibles de X .
b) Déterminer la loi de probabilité de X .

Bac.

64 On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .
U_1 contient quatre boules rouges et trois boules vertes .
U_2 contient deux boules rouges et une boule verte .

A - On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2 , puis on tire au hasard une boule de U_2 .

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges de l'urne U_2 après les deux tirages précédents .

1° Démontrer que la probabilité $P(X = 2)$ est égale à $\frac{9}{14}$.

2° Donner les trois valeurs de X et déterminer la loi de probabilité de X .

B - Dans cette partie les boules rouges portent chacune le nombre 1 et les boules vertes portent chacune le nombre –1 .

On choisit une urne au hasard puis on tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne choisie .

On considère les événements suivants :
E : «L'urne choisie est l'urne U_1»
F : «La somme des nombres portés par les deux boules tirées est égale à 0» .

1° a) Calculer les probabilités $P(F/E)$ et $P(F/\overline{E})$.
b) Déduire que $P(F) = \frac{13}{21}$.

2° On désigne par G l'événement «La somme des nombres portés par les deux boules tirées est égale à –2» .
Calculer $P(G)$.

Bac.

65 Dans une école , chaque élève des deux sections SG et SV pratique un seul sport .
Les élèves sont distribués comme l'indique le tableau suivant .

	Football	**Basketball**	**Tennis**
SV	1	6	3
SG	4	4	2

On prend 20 cartons identiques . Sur chaque carton on écrit le nom d'un élève .

A - Les cartons portant les noms des élèves de la section SV sont placés dans une boîte B_1 et ceux portant les noms des élèves de la section SG sont placés dans une autre boîte B_2 .
Le directeur de l'école choisit au hasard une boîte puis tire au hasard et simultanément deux cartons de cette boîte . On considère les événements suivants :
E : «la boîte choisie est B_1»
S : «les deux cartons tirés portent les noms de deux élèves qui pratiquent le même sport»

1° a) Montrer que la probabilité $p(S/E)$ est égale à $\frac{2}{5}$ et déduire $p(E \cap S)$.

b) Prouver que $p(S) = \frac{31}{90}$.

2° Sachant que les deux cartons tirés portent les noms de deux élèves pratiquant des sports différents , quelle est la probabilité que les noms soient ceux de deux élèves de la section SV ?

B - On suppose dans cette partie que les 20 cartons portant les noms des élèves sont tous placés dans une même boîte B .
On tire simultanément et au hasard trois cartons de cette boîte .
Prouver que la probabilité que les trois cartons tirés portent les noms de trois élèves pratiquant le même sport , est égale à $\frac{7}{57}$.

Bac.

66 En 2011 , un club sportif propose à ses membres trois types d'activités : le volley-ball , le basket-ball et le tennis .
Chaque membre ne peut pratiquer qu'une seule des trois activités .
• 30% des membres du club pratiquent le volley-ball ;
• 20% des membres du club pratiquent le basket-ball ;
• les membres restants pratiquent le tennis .
Le club propose une journée de rencontre entre tous ses membres .
• 20% des membres qui pratiquent le volley-ball participent à cette rencontre ;
• 25% des membres qui pratiquent le basket-ball participent à cette rencontre ;
• 70% des membres qui pratiquent le tennis participent à cette rencontre .
On choisit au hasard un membre de ce club et on considère les événements suivants :
V : «Le membre choisi pratique le volley-ball» ;
B : «Le membre choisi pratique le basket-ball» ;
T : «Le membre choisi pratique le tennis» ;
R : «Le membre choisi participe à la rencontre» .
1° Vérifier que la probabilité $p(T \cap R)$ est égale à 0,35 et , calculer $p(B \cap R)$ et $p(V \cap R)$.
2° Le président du club affirme : plus que la moitié des membres ne participent pas à la rencontre .
Justifier son affirmation par un calcul .
3° Les tarifs du club pour cette année sont les suivants :
• 100 000 LL pour la pratique du tennis ,
• 60 000 LL pour la pratique du volley-ball ou du basket-ball .
De plus , une somme supplémentaire de 15 000 LL est demandée à chaque membre qui participe à la rencontre .
Soit X la variable aléatoire égale à la somme totale payée par un membre de ce club .
a) Donner les 4 valeurs possibles de X et démontrer que $p(X = 75\,000)$ est égale à 0,11 .
b) Déterminer la loi de probabilité de X .
c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.
d) Le club compte 200 membres . Estimer son revenu pour cette année . **Bac.**

67 **A -** Une urne U contient : cinq boules rouges portant chacune le nombre 2 et trois boules blanches portant chacune le nombre -3 .
On tire simultanément et au hasard 4 boules de l'urne U .
Soit X la variable aléatoire égale à la somme des nombres portés par les 4 boules tirées .
1° Déterminer les 4 valeurs possibles de X .
2° Déterminer la loi de probabilité de X .

B - Dans cette partie on suppose que l'urne U contient 5 boules rouges et n boules blanches ($n > 1$) .
On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne .
1° Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
E : «Les deux boules tirées sont rouges»
F : «Les deux boules tirées sont de la même couleur» .
2° **a)** Sachant que les deux boules tirées sont de la même couleur , montrer que la probabilité p qu'elles soient toutes les deux rouges , est $p = \dfrac{20}{n^2 - n + 20}$.
b) Combien de boules blanches l'urne doit-elle contenir pour que l'on ait $p > \dfrac{10}{13}$? **Bac.**

68 Un magasin vend des écouteurs de deux genres différents E_1 et E_2 et des batteries de trois genres différents B_1 , B_2 et B_3 .
Pendant la période des soldes , certains articles sont placés dans deux paniers U et V .
Le panier U contient 15 écouteurs E_1 et 5 écouteurs E_2 ;
le panier V contient 8 batteries B_1 , 10 batteries B_2 et 7 batteries B_3 .

A- Un client choisit au hasard un article de chaque panier .
1° Démontrer que la probabilité de choisir un écouteur E_1 et une batterie B_1 est égale à $\dfrac{6}{25}$.
2° Calculer la probabilité qu'un écouteur E_1 soit parmi les deux articles choisis .
3° Le magasin affiche les prix suivants :

Article	Ecouteur E_1	Ecouteur E_1	Batterie B_1	Batterie B_2	Batterie B_3
Prix en LL	**40 000**	**15 000**	**30 000**	**25 000**	**50 000**

Soit X la variable aléatoire égale à la somme payée par le client pour l'achat des deux articles choisis .
a) Démontrer que la probabilité $P(X = 65\ 000)$ est égale à $\dfrac{37}{100}$.
b) Déterminer la loi de probabilité de X .

B- Dans cette question , un client choisit au hasard un écouteur du panier U et choisit simultanément et au hasard deux batteries du panier V . Calculer la probabilité qu'il paie une somme inférieure ou égale à 70 000 LL . **Bac.**

69 On considère deux urnes U et V .
L'urne U contient huit boules : quatre boules portant le nombre 1 , trois boules portant le nombre 2 et une boule portant le nombre 4 .
L'urne V contient huit boules : trois boules portant le nombre 1 et cinq boules portant le nombre 2 .

1° On tire simultanément et au hasard deux boules de U .
On considère les événements suivants :
• A : «les deux boules tirées portent le même nombre»
• B : «le produit des nombres portés par les deux boules tirées est égal à 4» .
Calculer la probabilité $P(A)$ de l'événement A et montrer que $P(B) = \dfrac{1}{4}$.

2° On choisit au hasard une des deux urnes U et V puis on tire simultanément et au hasard deux boules de cette urne .
On considère les événements suivants :
• E : «l'urne choisie est V»
• F : «le produit des nombres portés par les deux boules tirées est égal à 4» .
a) Vérifier que $P(F \cap E) = \dfrac{5}{28}$ et calculer $P(F \cap \overline{E})$.
b) Déduire $P(F)$.

3° On tire au hasard une boule de U et on tire simultanément et au hasard deux boules de V .
Calculer la probabilité de l'événement H : «le produit des 3 nombres portés par les trois boules tirées soit égal à 8» . **Bac.**

14 SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Un peu d'histoire

Au début du XIXe siècle , les recherches relatives aux équations et l'étude des problèmes linéaires restent fondamentales .
Les travaux des mathématiciens ***Gauss (1777-1855) , Abel (1802-1829) , Galois (1811-1832) , Jordan (1838-1922) , Hamilton (1805-1865) , Sylvester ,*** *contribuent à l'essor de l'algèbre en ce domaine .*
Dès le début du XIXe siècle (1820 environ) Carl Frédéric Gauss s'est attaqué au problème de la résolution de systèmes linéaires comportant une dizaine d'inconnues . Son nom reste attaché à la méthode utilisée dans les exercices qui suivent , dite du ***«pivot de Gauss»*** *.*
Bien qu'éloignées dans le temps , les découvertes de Gauss sont encore , à l'heure actuelle , d'un intérêt certain .

PLAN DU CHAPITRE

«Tout système est une entreprise de l'esprit contre soi-même» .

Paul Valéry

Activité 1

Soit l'équation (L) : $ax + by + cz = d$ où x , y et z sont des inconnues .

1° Former l'équation (αL) obtenue en multipliant les deux membres de (L) par le réel non nul α .

2° Vérifier que si (x_0 , y_0 , z_0) est une solution de (L) , alors (x_0 , y_0 , z_0) est aussi une solution de (αL) .

Activité 2

Résoudre , en utilisant la méthode du "pivot de Gauss" , le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x - 2y + z = 1 \\ x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$$

Activité 3

1° Trouver la solution de l'équation $3x = 6$.

2° Trouver les solutions de l'équation $3x + 0y = 6$.

3° Soit (S) le système de trois équations à quatre inconnues :

$$(S) \begin{cases} x + y + z + t = 7 \\ y - z + 2t = -1 \\ z + t = 4 \end{cases}$$

Un tel système est appelé **système échelonné** (le nombre des inconnues est plus grand que le nombre des équations) .
Poser $t = \alpha$ (α est un réel non nul) , puis trouver en fonction de α la valeur de z , de y et de x .

1 DÉFINITIONS

1° Équation linéaire

L'équation $3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 9$ est dite équation linéaire à quatre inconnues x_1 , x_2 , x_3 et x_4 . Les réels 3 , –5 , –2 et 1 sont les coefficients respectifs des inconnues ; le réel 9 est le terme du second membre de l'équation .

Si , dans cette équation , on remplace x_1 par 5 , x_2 par 0 , x_3 par 1 et x_4 par –4 , on obtient l'égalité :

$3\,(5) - 0 - 2\,(1) + (-4) = 9$.

On dit que le quatre-uplet (5 , 0 , 1 , – 4) vérifie l'équation ou bien ce quatre-uplet est une solution de l'équation .

Plus généralement , on appelle équation linéaire à n inconnues ($n \in \mathbb{N}^*$) toute équation de la forme : $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, où x_1 , x_2 , ... , x_n sont les inconnues , a_1 , a_2 , ... , a_n sont des réels donnés appelés coefficients des inconnues , et b est un réel donné appelé terme du second membre de l'équation .

L'équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ n'est pas une équation linéaire .

2° Systèmes d'équations linéaires

Voici quelques exemples

a) Un système de **deux équations** à **deux inconnues** :

$$(S_1)\begin{cases} 5x - y = 4 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$$

b) Un système de **trois équations** à **trois inconnues** :

$$(S_2)\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

c) Un système de **trois équations** à **deux inconnues** :

$$(S_3)\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

d) Un système de **deux équations** à **trois inconnues** :

$$(S_4)\begin{cases} x + 2y + z = -5 \\ 3x - y - 3z = 4 \end{cases}$$

Plus généralement , on peut avoir un système de m équations linéaires à n inconnues , où m et n sont deux entiers naturels plus grands que 1 .

• Résoudre un système d'équations linéaires (S) de n inconnues , c'est chercher l'ensemble des n-uplets , appelés solutions , qui vérifient chacune des équations de (S) .

• Un système d'équations linéaires peut avoir :

- zéro solution : le système est dit impossible et ses équations sont incompatibles ,
- une solution unique ,
- une infinité de solutions .

3° Systèmes équivalents

Deux systèmes d'équations linéaires sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions .

EXEMPLE

Les trois systèmes suivants sont équivalents :

$$(S_1)\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=0 \\ 2x+y=4 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Des systèmes équivalents ont le même nombre d'inconnues , par contre le nombre de leurs équations peut être différent .

2 OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES ÉQUATIONS D'UN SYSTÈME

Une opération élémentaire permet de transformer un système (S) en un système (S_1) équivalent .

On désigne par (L_i) , la i$^{\text{ème}}$ équation d'un système d'équations (S) formé de n équations : $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

1° L'opération élémentaire $(L_i) \leftrightarrow (L_j)$

Pour $i \neq j$, $(L_i) \longleftrightarrow (L_j)$ signifie que l'on permute la i$^{\text{ème}}$ et la j$^{\text{ème}}$ équation du système .

EXEMPLE

Pour le système $(S)\begin{cases} 4x-y+z=2 & (L_1) \\ x+3y-2z=1 & (L_2) \\ 2x+2y+5z=7 & (L_3) \end{cases}$, l'opération élémentaire

$(L_1) \leftrightarrow (L_2)$ conduit au système (S_1) équivalent à (S) :

$$(S_1)\begin{cases} x+3y-2z=1 & (L_1) \\ 4x-y+z=2 & (L_2) \\ 2x+2y+5z=7 & (L_3) \end{cases}$$

Propriété

Quand on échange deux équations d'un système , on obtient un système équivalent au premier

2° L'opération élémentaire $(L_i) \leftarrow (\alpha L_i)$

Pour tout réel α non nul , l'opération $(L_i) \leftarrow (\alpha L_i)$ signifie que l'on remplace la i$^{\text{ème}}$ équation par (αL_i) .

EXEMPLE

Pour le système $(S)\begin{cases} -x+y-3z=1 & (L_1) \\ \frac{1}{5}x+2y-z=0 & (L_2) \end{cases}$

les opérations : $(L_1) \leftarrow (-L_1)$ et $(L_2) \leftarrow (5L_2)$ conduisent au système équivalent

$(S_1)\begin{cases} x-y+3z=-1 & (L_1) \\ x+10y-5z=0 & (L_2) \end{cases}$

Propriété

Les équations (L_i) et (αL_i) sont équivalentes pour tout α réel non nul .

Quand , dans un système , on remplace la i$^{\text{ème}}$ équation (L_i) par l'équation (αL_i) , où α est un réel non nul , on obtient un système équivalent au premier

3° L'opération élémentaire $(L_i) \leftarrow (\alpha L_i) + (\beta L_j)$

Pour $i \neq j$, l'opération élémentaire $(L_i) \leftarrow (\alpha L_i) + (\beta L_j)$ signifie que l'on remplace la i$^{\text{ème}}$ équation (L_i) du système par la somme de cette équation multipliée par α et de la j$^{\text{ème}}$ équation multipliée par β $(\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0)$.

EXEMPLE

Pour le système $(S)\begin{cases} x-3y+2z=7 & (L_1) \\ 2x+y+3z=1 & (L_2) \\ -4x+y+3z=-2 & (L_3) \end{cases}$

l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow (L_2) - (2L_1)$ conduit au système équivalent

$(S_1)\begin{cases} x-3y+2z=7 & (L_1) \\ 7y-z=-13 & (L_2) \\ -4x+y+3z=-2 & (L_3) \end{cases}$

Propriété

Les systèmes $\begin{cases}(L_i)\\(L_j)\end{cases}$ et $\begin{cases}(L_i)\\(\alpha L_i)+(\beta L_j)\end{cases}$ sont équivalents ($\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$) .

> **Quand , dans un système , on remplace la i^ème équation (L_i) par l'équation (αL_i) + (βL_j) , où $i \neq j$, $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, on obtient un système équivalent au premier**

3 RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS

Cette méthode utilise les opérations élémentaires pour transformer un système d'équations linéaires (S) à un système triangulaire équivalent dont la résolution est simple .

1. Soit à résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système (S) suivant , en utilisant la méthode du pivot de Gauss .

$$(S)\begin{cases}5x+3y-8z+4t=3 & L_1\\ -x+2y+2t=9 & L_2\\ 3x-4y+2z-4t=-11 & L_3\\ 2x+3y+z+3t=20 & L_4\end{cases}$$

L'opération $L_1 \leftrightarrow L_2$ conduit au système (S_1)

(–1) est le pivot

$$\begin{cases}-x+2y+2t=9 & L_1\\ 5x+3y-8z+4t=3 & L_2\\ 3x-4y+2z-4t=-11 & L_3\\ 2x+3y+z+3t=20 & L_4\end{cases}$$

Les opérations $\begin{cases}\text{conservation de } L_1\\ L_2 \leftarrow L_2+5L_1\\ L_3 \leftarrow L_3+3L_1\\ L_4 \leftarrow L_4+2L_1\end{cases}$

effectuées sur (S_1) , conduisent au système équivalent (S_2) suivant :

$$(S_2)\begin{cases}-x+2y+2t=9 & L_1\\ 13y-8z+14t=48 & L_2\\ 2y+2z+t=8 & L_3\\ 7y+z+7t=38 & L_4\end{cases}$$

Méthode

• Choisir une ligne L_i , dont le **coefficient** de la **1ère inconnue** x ne soit pas nul . Ce coefficient est le **pivot** . Il est conseillé que le pivot soit 1 ou (–1) .

• Annuler tous les coefficients de x dans les lignes L_2 , L_3 , L_4 .

• Choisir parmi L_2 , L_3 , L_4 une ligne L_i dont le coefficient de la deuxième inconnue y ne soit pas nul ; échanger L_i avec L_2 .

Il est conseillé que le pivot soit 1 ou (–1) .

Les opérations $\begin{cases} \text{conservation de } L_1 \text{ , } L_4 \\ L_3 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_3 \end{cases}$

effectuées sur (S_2) , conduisent au système équivalent (S_3)

1 est le pivot

$$\begin{cases} -x + 2y \qquad + 2t = 9 & L_1 \\ y + z + t = 8 & L_2 \\ 13y - 8z + 14t = 48 & L_3 \\ 7y + z + 7t = 38 & L_4 \end{cases}$$

Les opérations $\begin{cases} \text{conservation de } L_1 \text{ , } L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 13L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2 \end{cases}$

• Annuler tous les coefficients de y dans L_3 , L_4 .

effectuées sur (S_3) , conduisent au système équivalent (S_4) :

$$\begin{cases} -x + 2y \qquad + 2t = 9 & L_1 \\ y + z + t = 8 & L_2 \\ -21z + t = -55 & L_3 \\ -6z = -18 & L_4 \end{cases}$$

• Répéter le même principe .

(S_4) est triangulaire et se résout facilement : la quatrième équation donne $z = 3$ et les autres équations donnent alors $t = 7$, $y = -2$ et $x = 1$.

Le système a pour solution unique le quatre-uplet $(1 ; -2 ; 3 ; 7)$.

Remarques

• Si l'une au moins des équations est du type $0x = a$, où x est l'inconnue et a un réel non nul , le système n'a pas de solution .

• Si l'une au moins des équations est du type $0x = 0$, le système admet une infinité de solutions .

2. Soit à résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système linéaire (S) de trois équations à quatre inconnues : $(S)\begin{cases} x+2y-z=4 & L_1\\ 2x+y+z+t=5 & L_2\\ -5x+2z+3t=-3 & L_3\end{cases}$

Les opérations $\begin{cases}\text{conservation de } L_1\\ L_2 \leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3+5L_1\end{cases}$ effectuées sur (S) , conduisent au système équivalent (S_1) suivant : $(S_1)\begin{cases} x+2y-z=4 & L_1\\ -3y+3z+t=-3 & L_2\\ 10y-3z+3t=17 & L_3\end{cases}$

Les opérations $\begin{cases}\text{conservation de } L_1 \text{ et } L_2\\ L_3\leftarrow 3L_3+10L_2\end{cases}$ effectuées sur (S_1) , conduisent au système équivalent (S_2) suivant : $(S_2)\begin{cases} x+2y-z=4\\ -3y+3z+t=-3\\ 21z+19t=21\end{cases}$

Pour $t=\alpha$, α réel , on obtient :

$z=1-\dfrac{19}{21}\alpha$ puis $y=2-\dfrac{12}{21}\alpha$, enfin $x=1+\dfrac{5}{21}\alpha$.

Le système (S) a une infinité de solutions du type :

$(1+5\beta\,;\,2-12\beta\,;\,1-19\beta\,;\,21\beta)$, avec $\beta=\dfrac{\alpha}{21}$.

3. Soit à résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S) de quatre équations à trois inconnues :

$$(S)\begin{cases} x-2y=2 & L_1\\ -x+y+z=1 & L_2\\ 3x-y+2z=0 & L_3\\ y-z=2 & L_4\end{cases}$$

On applique sur (S) les opérations suivantes : $\begin{cases}\text{conservation de } L_1 \text{ et } L_4\\ L_2\leftarrow L_2+L_1\\ L_3\leftarrow L_3-3L_1\end{cases}$,

on obtient le système équivalent (S_1) : $\begin{cases} x-2y=2 & L_1\\ -y+z=3 & L_2\\ 5y+2z=-6 & L_3\\ y-z=2 & L_4\end{cases}$

On applique sur (S_1) les opérations suivantes : $\begin{cases}\text{conservation de } L_1 \text{ et } L_2\\ L_3\leftarrow L_3+5L_2\\ L_4\leftarrow L_4+L_2\end{cases}$,

on obtient le système équivalent (S_2) suivant : $(S_2)\begin{cases} x-2y=2\\ -y+z=3\\ 7z=9\\ 0=5\end{cases}$

L'ensemble des solutions est le vide .

4 APPLICATIONS

1° Soit à déterminer un polynôme P de degré 3 , vérifiant les conditions suivantes : $P(1) = -9$; $P(2) = -9$; $P(3) = 5$ et $P(4) = 45$.
Comme P est du troisième degré , alors :
$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, et le problème revient à résoudre le système (S) suivant :

$$\begin{cases} a + b + c + d = -9 \\ 8a + 4b + 2c + d = -9 \\ 27a + 9b + 3c + d = 5 \\ 64a + 16b + 4c + d = 45 \end{cases}$$

On remarque que le coefficient de d est 1 ; on considère donc le système suivant :

$$\begin{cases} d + c + b + a = -9 & L_1 \\ d + 2c + 4b + 8a = -9 & L_2 \\ d + 3c + 9b + 27a = 5 & L_3 \\ d + 4c + 16b + 64a = 45 & L_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d + c + b + a = -9 & L_1 & \\ c + 3b + 7a = 0 & L_2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ c + 5b + 19a = 14 & L_3 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ c + 7b + 37a = 40 & L_4 & L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d + c + b + a = -9 & L_1 & \\ c + 3b + 7a = 0 & L_2 & \\ 2b + 12a = 14 & L_3 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ 2b + 18a = 26 & L_4 & L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d + c + b + a = -9 & L_1 & \\ c + 3b + 7a = 0 & L_2 & \\ 2b + 12a = 14 & L_3 & \\ 6a = 12 & L_4 & L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{cases}$$

On trouve $a = 2$, $b = -5$, $c = 1$ et $d = -7$, d'où $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 7$.

2° Soit à démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ (1 ; 0 ; 2) , $\vec{v}$ (– 1 ; 1 ; 3) et $\vec{w}$ (5 ; –3 ; –5) sont coplanaires .

En effet : s'il en est ainsi , il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\,\vec{v}$,

soit : $\begin{cases} \alpha - \beta = 5 \\ \beta = -3 \\ 2\alpha + 3\beta = -5 \end{cases}$, ce système a pour solution $\alpha = 2$ et $\beta = -3$.

Par suite $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$ et les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires .

Exercices et problèmes

Pour tester les connaissances

1 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivants :

1° $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 3 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ **2°** $\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ 2x + y = 5 \\ x - y = 4 \end{cases}$ **3°** $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + y = 5 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$ **4°** $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 5x + 4y = 13 \\ -3x + y = 9 \end{cases}$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes d'équations suivants par la méthode du pivot de Gauss .

1° $\begin{cases} 3x + y - 3z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 3 \\ 4x - 3y + z = 7 \end{cases}$ **2°** $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ -x + 3y - 5z = 1 \\ 8x - 9y + 13z = 2 \end{cases}$ **3°** $\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$

4° $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 30 \\ -x + 2y - z = -16 \\ 2x - 6y + 21z = 47 \\ 4x - 8y + 3z = 57 \end{cases}$ **5°** $\begin{cases} y + z = 1 \\ 2x + 2y - z = -2 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$ **6°** $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \end{cases}$

7° $\begin{cases} \frac{5}{6}x - y + z = -2 \\ x - \frac{6}{5}y - z = 2 \\ 3x - 4y - \frac{5}{2}z = 3 \end{cases}$ **8°** $\begin{cases} \frac{3}{2}x + 2y - z = 4 \\ x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = 7 \\ 5x + y + 2z = 1 \end{cases}$ **9°** $\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$

10° $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$ **11°** $\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = -1 \end{cases}$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, les systèmes suivants :

1° $\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z} = 6 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = 3 \\ \frac{4}{x} - \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = 7 \end{cases}$ **2°** $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = -11 \\ \frac{7}{x} - \frac{3}{y} - \frac{2}{z} = -4 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = -7 \end{cases}$ **3°** $\begin{cases} 5\sqrt{x+1} + 2\sqrt{y+2} - 4\sqrt{z-1} = 1 \\ -\sqrt{x+1} - 2\sqrt{y+2} + 2\sqrt{z-1} = 3 \\ \sqrt{x+1} + 3\sqrt{y+2} - 3\sqrt{z-1} = -6 \end{cases}$

4 Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ les systèmes d'équations suivants :

1° $\begin{cases} 2x - y + z - t = -1 \\ 2x - y - 3t = 2 \\ 3x - z + t = -3 \\ 2x + 2y - 2z + 5t = -6 \end{cases}$

2° $\begin{cases} 8x + 6y + 5z + 2t = 21 \\ 3x + 3y + 2z + t = 10 \\ 4x + 2y + 3z + t = 8 \\ 7x + 4y + 5z + 2t = 18 \end{cases}$

3° $\begin{cases} x - y + 2z - 3t = 1 \\ y - z + t = -3 \\ x + 3y - 3t = 1 \\ x - 4y + 3z - 2t = -2 \end{cases}$

4° $\begin{cases} x + 2y + 3z - t = 5 \\ x + z - 2t = 0 \\ 2x + 6y + 8z - t = 15 \\ -x + 4y + 3z + 4t = 10 \end{cases}$

5° $\begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ x + y - z + t = 2 \\ x - 11y + 11z + t = -4 \end{cases}$

6° $\begin{cases} x + 5y + 4z - 13t = 3 \\ 4x + 4y + 6z - 8t = 5 \\ 2x + 2y + 3z - 4t = 1 \end{cases}$

Pour chercher

5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Sachant que la représentation graphique (C) de la fonction f passe par les points A (1 ; 0) , B (2 ; 0) , C (3 ; 0) et admet au point C une tangente dont le coefficient directeur est 4 , déterminer les coefficients a , b , c et d .

6 Démontrer qu'il existe , dans chacun des cas suivants , une fonction polynôme f du troisième degré telle que pour tout réel x :

1° $(x^2 - x - 2) f''(x) - (1 - 3x) f'(x) + f(x) = -4x^3 - 6x^2 - 22x + 1$.

2° $f''(x) + 3f'(x) - 4f(x) = 8x^3 - 2x^2 + 4x - 6$.

7 Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O , \vec{i} , \vec{j})$. Déterminer , dans chacun des cas suivants, une équation du cercle circonscrit au triangle ABC .

1° A (–3 ; 3) , B (1 ; –2) et C (4 ; 2) .

2° A (3 ; 1) , B (2 ; –3) et C (–1 ; 2) .

8 Soit f la fonction définie par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Déterminer a , b , c et d sachant que $f(1) = -4$; $f(-1) = 4$; $f(2) = 1$ et que f admet un minimum pour $x = 1$.

9 Pour sa maison , Hadi calcule qu'il aurait à payer les sommes suivantes :
1100 \$ pour le tapissier et le peintre ,
1700 \$ pour le peintre et le plombier ,
1100 \$ pour le plombier et l'électricien ,
3300 \$ pour l'électricien et le menuisier ,
5300 \$ pour le menuisier et le maçon ,
2500 \$ pour le maçon et le tapissier .
Combien chaque ouvrier a-t-il été payé sachant que les rémunérations du peintre ont été le triple de celles de l'électricien ?

10 Deux pantalons , cinq cravattes et quatre chemises coûtent 740 \$; trois pantalons , cinq cravattes et une chemise coûtent 660 \$. combien coûtent deux pantalons , sept cravattes et huit chemises ?

11 Montrer que les droites (D_1) , (D_2) et (D_3) d'équations respectives :
$7x - 2y = 0$; $3x - y = -1$ et $8x - 3y + 5 = 0$, sont concourantes .

12 Dans un repère $(O , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}$ $(1 ; 2 ; 0)$, $\vec{v}$ $(1 ; 1 ; 1)$ et $\vec{w}$ $(3 ; 0 ; -1)$.

1° Montrer que $(\vec{u} , \vec{v} , \vec{w})$ est une base de l'espace .

2° Les coordonnées d'un point A dans $(O , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ sont 3 , 4 et 5 . Trouver les coordonnées de A dans $(O , \vec{u} , \vec{v} , \vec{w})$.

13 $ABCD$ est un tétraèdre .

Montrer que si les quatre faces ont le même périmètre , alors les arêtes opposées ont même longueur .

14 Trouver les réels a , b , c et d de façon que la dérivée de la fonction $x \mapsto (ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x$ soit la fonction $x \mapsto (2x + 3) \sin x$.

15 LOI DE COMPOSITION INTERNE STRUCTURE DE GROUPE

Un peu d'histoire

Après ***Karl Friedrick Gauss (1777-1855)****, mathématicien allemand et ses travaux sur les équations et l'introduction des déterminants,* ***Evariste Galois (1911-1832)****, mathématicien français et* ***Niels-Henrich Abel (1802-1829)****, mathématicien norvégien, mettent en place simultanément la théorie des groupes. Abel utilisa l'expression groupe abélien comme synonyme du groupe commutatif.*
Galois résuma, en une soixantaine de pages impérissables, ses découvertes sur la théorie des équations entières, découvertes qui dégageaient les grandes idées de la théorie des groupes. En un certain sens, il est le fondateur de l'Algèbre moderne.
L'Algèbre moderne se développe au milieu du XIX^e siècle, grâce aux travaux de mathématiciens anglais : ***Arthur Cayley (1821-1895), James Joseph Sylvester (1814-1897)*** *et surtout* ***Sir William Rowan Hamilton (1805-1865)****, qui ouvrent la voie vers la création des algèbres vectorielles et des algèbres de dimension finie.*

PLAN DU CHAPITRE

«Faire de l'algèbre , ce n'est pas faire du sport en spectateur» .

John Wiley

Activité 1

On considère l'application f de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (x\,;y) & \longmapsto & f(x\,;y) = x + y + 2x.y \end{array}$$

On note $f(x\,;y)$ par $x * y$.

1° Calculer $1 * 5$, $(-2) * 3$, $3 * (-2)$, $4 * 0$ et $0 * 4$.

Les résultats obtenus sont-ils des éléments de $\mathbb{Z}$?

2° Comparer $(2 * 5) * 3$ et $2 * (5 * 3)$.

3° Pour tout x de $\mathbb{Z}$, déterminer $x * 0$ et $0 * x$.

Activité 2

Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace :

$\mathcal{V} = \left\{ \vec{u} \;/\; \vec{u} \text{ est un vecteur de l'espace} \right\}$.

1° Si $\vec{u} \in \mathcal{V}$ et $\vec{v} \in \mathcal{V}$ peut-on dire que $\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{V}$?

2° Pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathcal{V}^2$, comparer $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{v} + \vec{u}$.

3° Pour tout triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de $\mathcal{V}^3$ comparer $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ et $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

4° Comparer $\vec{u}$, $\vec{u} + \vec{0}$ et $\vec{0} + \vec{u}$.

5° Déterminer $\vec{u} + (-\vec{u})$ et $(-\vec{u}) + \vec{u}$.

A Loi de composition interne

1 DÉFINITION ET NOTATIONS

Soit E un ensemble donné .

On appelle loi de composition interne $\top$ définie sur E , toute application de $E \times E$ dans E .

L'image par $\top$ d'un couple $(x\,;\,y)$ de $E \times E$ est notée $\boldsymbol{x \top y}$.

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x\,;\,y) & \longmapsto & x \top y \end{array}$$

Soit $z = x \top y$, z **est le composé de x et y par la loi $\top$.**

L'écriture (E , $\top$) signifie que E est muni **d'une loi de composition interne notée $\top$.**

Les signes (ou les symboles) les plus fréquemment utilisés pour noter une loi de composition interne dans un ensemble E sont : $+$, $\bullet$, $\times$, $*$, $\top$, $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\circ$, $\cap$, $\cup$.

EXEMPLES

1. L'addition , la multiplication dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sont des lois de composition interne .

2. La soustraction est une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas une loi de composition interne dans $\mathbb{N}$.

3. La division n'est pas une loi de composition interne dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, mais elle l'est dans $\mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{R}^*$.

4. Dans l'ensemble des parties de E , $\mathscr{P}(E)$, l'intersection $\cap$ et la réunion $\cup$ sont des lois de composition interne .

2 PROPRIÉTÉS

Soit E un ensemble et $\top$ une loi de composition interne définie sur E .

1° Commutativité

La loi $\top$ est dite commutative dans E si , et seulement si :
pour tout $(x\,,y)$ de E^2 , $x \top y = y \top x$

EXEMPLES

1. L'addition dans $\mathbb{N}$ est commutative . En effet pour tout $(x\ ;\ y)$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $x + y = y + x$.
2. La réunion dans $\mathscr{P}(E)$ est commutative . En effet pour tout $(A\ ;\ B)$ de $\mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E)$, $A \cup B = B \cup A$.
3. La soustraction dans $\mathbb{Z}$ n'est pas commutative , par exemple $3 - 5 \neq 5 - 3$.

Remarque

Lorsque la loi $\top$ n'est pas commutative , il peut exister des éléments a et b tels que $a \top b = b \top a$.

Ces deux éléments sont dits **commutables** pour la loi $\top$ donnée .

Par exemple , la loi $\top$ définie dans $\mathbb{N}^*$ par $a \top b = a^b$, n'est pas commutative , pourtant $2 \top 4 = 4 \top 2$ car $2 \top 4 = 2^4 = 16$ et $4 \top 2 = 4^2 = 16$.

2 et 4 sont dits commutables pour la loi $\top$.

2° Associativité

La loi $\top$ est dite associative dans E si , et seulement si :
pour tout (x , y , z) de E^3 , $(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$

EXEMPLES

1. L'addition et la multiplication , dans $\mathbb{R}$, sont associatives .
2. La réunion et l'intersection , dans $\mathscr{P}(E)$, sont associatives .
3. La division dans $\mathbb{R}^*$ n'est pas associative .

3° Distributivité d'une loi par rapport à une autre

Soit E un ensemble muni de deux lois de composition interne $*$ et $\top$.

La loi $*$ est dite distributive par rapport à la loi $\top$ si , et seulement si :
pour tout (x , y , z) de E^3

$x * (y \top z) = (x * y) \top (x * z)$ **(distributivité à gauche)**

et

$(x \top y) * z = (x * z) \top (y * z)$ **(distributivité à droite)**

Si la loi $*$ est commutative il suffit de prouver la distributivité d'un seul côté .

EXEMPLES

1. Dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ la multiplication est distributive par rapport à l'addition .
2. Dans l'ensemble $\mathscr{P}(E)$, chacune des deux lois internes $\cap$ et $\cup$ est distributive par rapport à l'autre .

Remarque

Pour démontrer qu'une loi n'est pas interne , commutative , associative ou distributive il suffit de donner un contre-exemple .

3 ÉLÉMENTS REMARQUABLES

1° Élément neutre

Soit $\top$ une loi interne définie dans un ensemble E .

Un élément e de cet ensemble est dit neutre si , et seulement si :
$x \top e = e \top x = x$ pour tout x de E

Si la loi $\top$ est commutative , il suffit de trouver l'élément neutre d'un seul côté .

Si une loi interne $\top$ admet un élément neutre e , cet élément est unique .

En effet , si e et e' sont deux éléments neutres pour $\top$, alors $e \top e' = e$ car e' est neutre
et $e \top e' = e'$ car e est neutre ;
par suite $e = e'$.

Remarque

Si on devine l'élément neutre pour une loi donnée , il suffit alors de le vérifier .

EXEMPLES

1. 0 est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
2. 1 est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble ϕ est l'élément neutre pour la réunion dans $\mathscr{P}(E)$.

Remarque

L'élément e de l'ensemble E est dit neutre à gauche (respectivement à droite) pour la loi interne $\top$ si pour tout x de E , $e \top x = x$ (respectivement $x \top e = x$) .

2° Élément symétrique

Si E est un ensemble muni d'une loi de composition interne $\top$, et si E possède un élément neutre e , on dit que **x' est le symétrique** d'un élément x de E si , et seulement si :

x' appartient à E et $x \top x' = x' \top x = e$; x est dit alors symétrisable

Si la loi $\top$ est commutative , il suffit de trouver le symétrique d'un élément x d'un seul côté .

Si tout élément de E est symétrisable pour la loi $\top$, on dit que E est symétrisable pour cette loi .

Remarque

• Si la loi $\top$ est associative , le symétrique d'un élément x , s'il existe , est unique .

En effet : soit x' et x'' deux symétriques de x ;

$x' \top (x \top x'') = x' \top e = x'$ et

$(x' \top x) \top x'' = e \top x'' = x''$.

Comme $x' \top (x \top x'') = (x' \top x) \top x''$, alors $x' = x''$.

• Soit E un ensemble muni d'une loi interne $\top$, e l'élément neutre et x un élément de E .
L'élément x' de l'ensemble E est dit le **symétrique à gauche** (respectivement **à droite**) de x pour la loi interne $\top$ si $x' \top x = e$ (respectivement $x \top x' = e$) .

Exercice commenté

E est l'ensemble $\mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$. Pour tout couple (x , y) de E^2 , on pose $x * y = 2xy - 5x - 5y + 15$.

1° Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur E .

2° La loi $*$ est-elle commutative ? associative ?

3° Existe-t-il un élément neutre pour la loi $*$?

4° E est-il symétrisable pour la loi $*$?

Solution

1° Pour tout couple (x , y) de E^2 , $x * y$ existe dans $\mathbb{R}$ et est unique. Montrons que $x * y$ appartient à E , c'est-à-dire que $x * y \neq \frac{5}{2}$.

$$\begin{aligned} x * y - \frac{5}{2} &= 2xy - 5x - 5y + 15 - \frac{5}{2} \\ &= \frac{1}{2}(4xy - 10x - 10y + 25) \\ &= \frac{1}{2}\left[2x(2y-5) - 5(2y-5)\right] \\ &= \frac{1}{2}(2x-5)(2y-5) . \end{aligned}$$

Comme $x \neq \frac{5}{2}$ et $y \neq \frac{5}{2}$, $2x - 5 \neq 0$ et $2y - 5 \neq 0$, d'où $x * y - \frac{5}{2} \neq 0$ et $x * y \in E$. La loi $*$ est donc une loi de composition interne dans E.

2° • Pour tout (x, y) de E^2, $x * y = 2xy - 5x - 5y + 15$

$$= 2yx - 5y - 5x + 15 = y * x.$$

La loi $*$ est donc commutative.

• Pour tout (x, y, z) de E^3,

$$\begin{aligned}
(x * y) * z &= (2xy - 5x - 5y + 15) * z \\
&= 2\,(2xy - 5x - 5y + 15).z - 5\,(2xy - 5x - 5y + 15) - 5z + 15 \\
&= 4xyz - 10xz - 10yz - 10xy + 25x + 25y + 25z - 60 \\
x * (y * z) &= x * (2yz - 5y - 5z + 15) \\
&= 2x\,(2yz - 5y - 5z + 15) - 5x - 5(2yz - 5y - 5z + 15) + 15 \\
&= 4xyz - 10xz - 10yz - 10xy + 25x + 25y + 25z - 60
\end{aligned}$$

Il en résulte que $(x * y) * z = x * (y * z)$.

La loi $*$ est donc associative.

3° Un élément e de E est neutre pour la loi $*$ s'il vérifie $x * e = e * x = x$ pour tout x de E.

Comme $*$ est commutative il suffit d'avoir $x * e = x$, pour tout x de E.

$2xe - 5x - 5e + 15 = x$ équivaut à $(2e - 6)\,x - 5\,(e - 3) = 0$ pour tout x de E

$2e - 6 = 0$ et $e - 3 = 0$ soit $e = 3$ et $3 \in E$.

La loi $*$ admet donc un élément neutre, $e = 3$.

4° Soit x un élément de E. Si x' est l'élément symétrique de x, alors $x * x' = 3$ (car $*$ est commutative)

$2xx' - 5x - 5x' + 15 = 3$

$(2x - 5)\,x' = 5x - 12$. Comme $x \neq \frac{5}{2}$ alors $2x - 5 \neq 0$ et $x' = \frac{5x - 12}{2x - 5}$.

x' est différent de $\frac{5}{2}$. En effet :

si $x' = \frac{5}{2}$, alors $\frac{5x - 12}{2x - 5} = \frac{5}{2}$ qui donne $24 = 25$, ce qui est impossible.

Par suite x' existe et appartient à E.

E est donc symétrisable pour la loi $*$.

B Structure de groupe

1 DÉFINITION

Soit G un ensemble et $*$ une loi de composition interne définie sur G .

On dit que $(G , *)$ est un groupe ou G est muni d'une structure de groupe pour la loi $*$ si :
• la loi $*$ est associative .
• l'ensemble G admet un élément neutre pour la loi $*$.
• G est symétrisable pour la loi $*$.
Si de plus la loi $*$ est commutative , on dit que $(G , *)$ est un groupe abélien ou un groupe commutatif .

Exemple

L'ensemble $(\mathbb{Z} , +)$ est un groupe commutatif . En effet :

1. pour tout (a , b , c) de $\mathbb{Z}^3$
$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$ et la loi $*$ est associative .

2. pour tout a de $\mathbb{Z}$, $0 \in \mathbb{Z}$ et $a + 0 = 0 + a = a$
0 est donc l'élément neutre de $\mathbb{Z}$ pour la loi + .

3. pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $-a \in \mathbb{Z}$ et $a + (-a) = (-a) + a = 0$ et $\mathbb{Z}$ est symétrisable pour la loi + .

4. pour tout (a , b) de $\mathbb{Z}^2$, $a + b = b + a$ et la loi + est commutative .

5. $(\mathbb{N} , +)$ n'est pas un groupe car , par exemple :
2 est un élément de $\mathbb{N}$ et 2 n'est pas symétrisable dans $\mathbb{N}$ pour la loi + .

2 GROUPE ADDITIF $(G , +)$

Un **groupe additif** est un groupe abélien dans lequel :

- la loi de composition interne est notée +
- l'élément neutre est souvent noté 0 et appelé **élément nul**
- le symétrique d'un élément x est noté $-x$ et appelé **opposé** de x
- la différence $x - y$ de deux éléments est définie par $x + (-y)$.

Exemples

1. $(\mathbb{Z} , +)$, $(\mathbb{Q} , +)$ et $(\mathbb{R} , +)$ sont des groupes additifs .

2. Si $\mathcal{V}$ est l'ensemble des vecteurs de l'espace , $(\mathcal{V} , +)$ est un groupe additif .

3 GROUPE MULTIPLICATIF $(G\ ,\bullet)$

Un **groupe multiplicatif *G*** est un groupe dans lequel :

- la loi de composition interne est notée $\bullet$ ou $\times$
- un tel groupe n'est pas nécessairement commutatif
- l'élément neutre est parfois noté 1
- le symétrique d'un élément x , noté x^{-1} , est appelé **inverse** de x .

EXEMPLE

$(\mathbb{Q}^*\ ,\times)$ et $(\mathbb{R}^*\ ,\times)$ sont des groupes multiplicatifs .

EXERCICES ET PROBLÈMES

Pour tester les connaissances

1 Répondre par vrai ou faux .

1° E est un ensemble . Si la loi $*$ est interne dans E , alors pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in E$, $x * y \in E$.

2° La soustraction dans $\mathbb{R}$ est commutative .

3° 1 est l'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{Q}$.

4° Dans $(\mathscr{P}(E)\ ,\cap\ ,\cup)$ la réunion est distributive par rapport à l'intersection .

5° Si $(E\ ,\top)$ admet un élément neutre e , alors cet élément est unique .

6° Tout groupe multiplicatif est abélien .

7° Tout groupe additif n'est pas abélien .

8° Dans un groupe le symétrique d'un élément est unique .

9° $(\mathbb{Z}^*\ ,\bullet)$ est un groupe .

10° $(\mathbb{Q}^*\ ,\bullet)$ est un groupe abélien .

2 Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs , on considère la loi $*$ définie par :
pour tout (x , y) de $\mathbb{Z}^2$, $x * y = x + y - x \cdot y$

1° Calculer : $1 * (-2)$; $0 * 2$; $-2 * 1$; $(-2 * 4) * 7$; $-2 * (4 * 7)$.

2° La loi $*$ est-elle une loi de composition interne ? est-elle associative ? commutative ?

3° Existe-t-il un élément neutre pour cette loi ?

4° Existe-t-il dans $\mathbb{Z}$ des éléments symétrisables pour la loi $*$?

5° Etudier la distributivité de la loi $*$ par rapport à l'addition dans $\mathbb{Z}$.

3 Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels on définit la loi $\top$ par : $a \top b = a^2 + b^2$.

1° Calculer $3 \top 2$; $2 \top 5$; $(3 \top 2) \top 5$; $3 \top (2 \top 5)$.

2° Quelles sont les propriétés de la loi $\top$?

3° Existe-t-il un élément neutre pour la loi $\top$?

4 Dans l'ensemble $\mathbb{N}^*$ on définit la loi $*$ par : $x * y = x^y$.

1° Calculer $5 * 1$; $2 * 4$; $4 * 2$; $(2 * 1) * 3$; $2 * (1 * 3)$.

2° Quelles sont les propriétés de cette loi ?

3° Existe-t-il un élément neutre pour la loi $*$?

4° Etudier la distributivité de la loi $*$ par rapport à la multiplication dans $\mathbb{N}^*$.

5 On définit dans $\mathbb{R}$ les deux lois de composition interne $\top$ et $*$ en posant :
$x \top y = x + y - \frac{2}{3}$; $x * y = 3xy + 2$.

1° Etudier les propriétés de la loi $\top$.

2° Etudier les propriétés de la loi $*$.

3° Montrer que la loi $*$ est distributive par rapport à la loi $\top$.

6 On définit dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels , la loi $*$ par $a * b = \dfrac{2a + 3b}{5}$.

1° Cette loi est-elle interne dans $\mathbb{Q}$?

2° La loi est-elle commutative ? associative ?

7 Soit l'ensemble $E = \{0 ; 1\}$.

1° On définit dans E la loi $*$ par la table suivante appelée table de Pythagore.

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

Cette loi est-elle associative ? commutative ?

Admet-elle un élément neutre ?

L'ensemble E est-il symétrisable pour la loi $*$?

2° Dans le même ensemble , on définit la loi $\top$ par la table suivante .

$\top$	0	1
0	0	0
1	0	1

La loi $\top$ est-elle associative ? commutative ? Admet-elle un élément neutre ?

8 Dans l'ensemble $\mathbb{R}$, on définit la loi de composition interne $*$ par : $x * y = x + y + 3xy$

1° Démontrer que $*$ est commutative , associative et admet un élément neutre .

2° Quels sont les éléments symétrisables de $\mathbb{R}$ pour cette loi ?

9 Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on définit la loi de composition $\top$ par : pour tout (a , b) de $\mathbb{R}^2$ et pour tout (c , d) de $\mathbb{R}^2$, $(a , b) \top (c , d) = (ac , ad + b)$.

1° Etudier les propriétés de la loi $\top$.

2° Démontrer que $\top$ admet un élément neutre .

10 On définit dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la loi de composition interne commutative $*$ suivante :
pour tout $(x , y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x' , y') \in \mathbb{R}^2$

$(x , y) * (x' , y') = (xx' + 3yy' , xy' + yx')$.

1° Démontrer que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera .

2° Déterminer les éléments de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas symétrisables pour la loi $*$.

3° Mêmes questions pour la loi $\top$ définie par $(x , y) \top (x' , y') = (xx' - yy' , xy' + yx')$.

11 On définit sur $\mathbb{R}$ la loi $*$ par : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$.

1° Montrer que la loi $*$ est interne dans $\mathbb{R}$.

2° Vérifier que la loi $*$ est commutative .

3° Etudier l'associativité de la loi $*$.

4° La loi $*$ admet-elle un élément neutre e ?

12 On définit sur $E = \mathbb{R} - \{-1\}$ la loi $*$ par : $x * y = x + y + xy$.

1° Montrer que $*$ est interne dans E .

2° Montrer que $(E , *)$ est un groupe abélien .

13 Dans l'ensemble $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on définit la loi de composition interne par :
$(a , b) * (a' , b') = (aa' , ab' + a'b)$.

1° Démontrer que la loi $*$ est commutative et associative .

2° Démontrer que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera .

3° $(E , *)$ est-il un groupe abélien ?

Pour chercher

14 Soit f l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x , y) \longmapsto f(x , y) = x$$ (f est dite le premier projecteur) .

On pose $f(x , y) = x \top y$.

1° Pour tout (x , y) de $\mathbb{R}^2$, peut-on affirmer que $x \top y$ est un élément de $\mathbb{R}$?

2° Montrer que la loi $\top$ est associative dans $\mathbb{R}$.

3° Montrer que $\top$ n'est pas commutative .

15 Soit un ensemble E muni d'une loi de composition interne , associative et commutative notée $*$ telle que : pour tout $x \in E$, $x * x = x$.

On définit dans E la relation R par $x \, R \, y$ équivaut à $x * y = y$.

Montrer que R est une relation d'ordre .

16 On considère dans $\mathbb{R}$ la loi de composition interne $*$ définie par $x * y = ax + by$ où a et b sont deux réels non nuls donnés .

Comment faut-il choisir a et b pour que la loi $*$ soit associative ?

17 On considère , dans $\mathbb{R}$, la loi interne $\top$ commutative et associative définie par $a \top b = a \, . \, b - 2 \, (a + b) + 6$.

1° Montrer que la loi $\top$ admet un élément neutre .

2° Déterminer les nombres de $\mathbb{R}$ égaux à leurs symétriques pour la loi $\top$.

18 Dans l'ensemble $F = \mathbb{R} - \{3\}$ on définit la loi $*$ par $x * y = xy - 3x - 3y + 12$.

1° Vérifier que pour tout $(x \, , \, y) \in F^2$: $x * y - 3 = (x - 3)\,(y - 3)$.

En déduire que $*$ est une loi de composition interne sur F .

2° La loi $*$ est-elle commutative ? associative ?

3° Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre dans F .

4° Quels sont les éléments de F symétrisables pour la loi $*$?

19 On définit sur $\mathbb{R}^+ = [0 \, ; +\infty[$ la loi interne $\top$ par $x \top y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$

1° Cette loi est-elle commutative ? associative ?

2° Montrer que $\top$ admet un élément neutre .

3° Quels sont les éléments symétrisables pour cette loi ?

20 Soit , dans un ensemble E , une loi $*$ interne et associative et a un élément donné de E . On définit dans E une autre loi $\top$ par $x \top y = x * a * y$.

1° Montrer que la loi $\top$ est associative .

2° Montrer que $\top$ est commutative si la loi $*$ est commutative .

3° On suppose de plus que la loi $*$ est commutative , qu'elle admet un élément neutre et que tout élément x de E est symétrisable pour cette loi .

Montrer que la loi $\top$ admet un élément neutre et que tout élément de E possède un symétrique (pour la loi $\top$) que l'on déterminera .

21 Soit $(E , *)$ un groupe commutatif d'élément neutre e . On définit sur E une nouvelle loi interne $\top$ par $a \top b = a * b * k$ où k est un élément donné de E distinct de e .

Montrer que $(E , \top)$ est un groupe commutatif .

22 Soit $(G , *)$ un groupe d'élément neutre e avec $x * x = e$ pour tout x de G .

Montrer que $x * y$ et $y * x$ sont inverses et en déduire que $(G , *)$ est commutatif .

23 Soit $(G , *)$ un groupe . a , b , c et e sont des éléments de G . On suppose que e est l'élément neutre et que $a * a = b * b = c * c = e$.

Montrer que $a * b = c$.

24 Soit $(G , *)$ un groupe d'élément neutre e , x et y deux éléments quelconques de G et x' , y' leurs symétriques .

Montrer que $(x * y)' = y' * x'$.

25 On définit sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ une loi de composition interne commutative et associative $*$ par $z * z' = z \, . \, z' + i\,(z + z') - 1 - i$.

1° Démontrer que la loi $*$ admet un élément neutre .

2° $(\mathbb{C} , *)$ est-il un groupe ?

26 Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\top$.

Un élément a de E est dit régulier pour la loi $\top$ si pour tout couple (x , y) de E^2 :

$\begin{cases} a \top x = a \top y \\ x \top a = y \top a \end{cases}$, alors $x = y$.

1° Montrer que tout élément de $\mathbb{Z}$ est régulier pour l'addition .

2° Montrer que tout élément de $\mathbb{R}^*$ est régulier pour la multiplication .

3° Si $(E , \top)$ est un groupe , démontrer que tout élément de E est régulier pour la loi $\top$.

27 Soit un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$.

Démontrer que , s'il existe un élément neutre e et si la loi $*$ est associative , alors tout élément symétrisable est régulier .

28 Deux droites (D_1) et (D_2) du plan sont perpendiculaires en un point O .

On note par I l'application identique du plan et par S_1 , S_2 et S_3 les symétries par rapport à D_1 , D_2 et O respectivement .

On note $E = \{I ; S_1 ; S_2 ; S_3\}$.

1° Montrer que la composition des applications $\circ$ est une loi de composition interne dans E et dresser la table de Pythagore relative à cette loi .

2° $(E , \circ)$ est-il un groupe abélien ?

29 Soit $\mathscr{B}$ l'ensemble des bijections f d'un ensemble E sur lui-même , muni de la loi de composition des applications notée $\circ$.

Montrer que $(\mathscr{B} , \circ)$ est un groupe .

30 E désigne l'intervalle réel $[-1\ ,\ +1]$.

Soit la loi de composition définie dans E par : pour tout (x,y) de E^2, $x*y=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$.

1° Montrer que $*$ est une loi de composition interne définie sur E (on pourra utiliser : pour tout $u \in E$, il existe $\theta \in [0,\pi]$ tel que $u=\cos\theta$).

2° Calculer $1 * \left(1 * (-1)\right)$ et $\left(1 * 1\right) * (-1)$.

La loi $*$ est-elle associative ? $(E\ ,\ *)$ est-il un groupe ?

31 Soit $E=\left\{ (x;y)\,/\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } x^2-y^2=1\right\}$.

On définit sur E la loi $*$ par :

pour tout $(x\ ,\ y)$ de E^2 , pour tout $(x'\ ,\ y')$ de E^2 ,

$(x\ ,\ y) * (x'\ ,\ y') = (xx' + yy'\ ,\ xy' + yx')$.

1° Montrer que la loi $*$ est interne dans E .

2° Montrer que $(E\ ,\ *)$ est un groupe abélien .

32 Sous-groupe

Soit $(G\ ,\ *)$ un groupe , H une partie non vide de G . On dit que H est un sous-groupe de G , si $(H\ ,\ *)$ lui-même est un groupe .

On considère un groupe multiplicatif $(G\ ,\ \bullet)$ d'élément neutre e et on considère l'ensemble H inclus dans G et dont les éléments commutent avec tous les éléments de G , c'est-à-dire : $H = \{x\,/\,x \in G$ et pour tout $a \in G\ ,\ a\,.\,x = x\,.\,a\}$.

1° Montrer que $e \in H$. En conclure que H est non vide .

2° Montrer que la loi $\bullet$ est interne dans H , c'est-à-dire que pour tout (x,y) de H^2, $x\,.\,y \in H$.

3° Montrer que si $x \in H$ alors $x^{-1} \in H$ (x^{-1} est le symétrique de x pour la loi $\bullet$) .

4° Montrer que H est un sous-groupe de G pour la loi $\bullet$.

5° Montrer que pour tout $(x\ ,\ y) \in H^2$, $x\ .\ y^{-1} \in H$.

Problèmes

généraux

Chapitre 1

Fonctions : Limites - Continuité - Dérivée - Plan d'étude

1 Etudier la continuité de chacune des fonctions f définies comme suit :

1° $f(x) = x - E(x)$ où E désigne la partie entière.

2° $f(x) = E(2x) - x$, définie de $[0\ ;\ 1]$ dans $\mathbb{R}$.

2 Parmi tous les cylindres de révolution qui ont la même aire totale , quelles sont les dimensions de ceux qui ont le volume maximal ?

3 Soit λ un nombre réel . On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x + \lambda}{x^2 + 1}$.

1° Montrer que cette fonction est dérivable et calculer sa dérivée f' .

2° **a)** Montrer que f' s'annule en deux points a et b (on suppose $a < b$) . Etudier le signe de f' .

b) Montrer que $f(a) = \dfrac{1}{2a}$ et $f(b) = \dfrac{1}{2b}$.

3° Dresser le tableau de variation de f .

4° **a)** On appelle m_λ le minimum de f et M_λ le maximum de f . Exprimer m_λ et M_λ en fonction de λ .

b) On peut considérer m_λ et M_λ comme des fonctions de λ . Quelles sont leurs limites lorsque λ devient très grand ?

4 Soit a_1 , a_2 , ..., a_n n réels distincts rangés dans l'ordre strictement croissant et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x - a_1} + \dfrac{1}{x - a_2} + ... + \dfrac{1}{x - a_n}$.

1° Donner le domaine de définition de f .

2° **a)** Calculer la dérivée de f .

b) Tracer le tableau de variation de f .

3° Soit $y \in \mathbb{R}$. Combien de solutions l'équation $f(x) = y$ possède-t-elle ?

$\boxed{5}$ Soit , dans le plan euclidien , les courbes (C_m) d'équation : $y = f_m(x) = \dfrac{mx^2 - mx - 1}{x^2 + mx + 1}$.

1° Donner une valeur de m pour laquelle (C_m) est une droite .

On suppose dans la suite : $m \in \mathbb{R} - \{-1 ; 0\}$.

2° Démontrer que $A\ (0 ; -1)$ est le seul point commun à toutes les courbes (C_m) , et qu'elles sont tangentes en A .

3° Déterminer les valeurs de m telles que (C_m) ait trois asymptotes .

4° Calculer $\alpha \neq 0$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

$\boxed{6}$ **1°** Etudier les variations de la fonction f définie par $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x}$ et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

2° On désigne par T le point de (C) d'abscisse λ, par P et Q les points d'intersection de la tangente en T à (C) avec les asymptotes de cette courbe .

Montrer que T est le milieu de $[PQ]$.

3° Soient p l'abscisse et q l'ordonnée d'un point M du plan $(x'x , y'y)$ telles que $q \neq 2p$.

a) Quelle relation doivent vérifier p et q pour que la fonction g définie par

$y = g(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{px^2 + qx}$ soit monotone sur tout intervalle où elle est définie ?

b) Indiquer les régions du plan où doit se trouver M pour que la relation précédente soit satisfaite .

Chapitre 2 Fonctions réciproques

1 Dans le plan d'un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, on considère la famille de courbes (C_m) définies par l'équation : $f_m(x) = m\sqrt{1+x^2} + x \text{ Arctg } x$ où m est un paramètre réel .

1° Montrer que $y'y$ est un axe de symétrie de (C_m) .

2° Montrer que les deux courbes correspondant à deux valeurs distinctes m' et m'' de m ne se coupent pas .

3° On suppose dans cette partie que $m = 0$. Soit (C_0) la courbe correspondante .

a) Montrer que si x tend vers $+\infty$, alors $\dfrac{\text{Arctg } x - \dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{x}}$ tend vers -1 .

b) Déduire que (C_0) admet deux asymptotes obliques dont on déterminera les équations .

c) Etudier les variations de la fonction f_0 définie par $y = f_0(x) = x \text{ Arctg } x$ et construire (C_0) .

d) Calculer l'aire du domaine limité par (C_0) , $x'x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ (on pourrait utiliser la dérivée de $g(x) = x^2 \text{ Arctg } x$) .

2 On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

1° Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) .

2° Calculer l'aire limitée par (C) , l'axe $x'Ox$ et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

3° La fonction f admet sur $[0 ; +\infty[$ une fonction réciproque f^{-1} .

Dire pourquoi .

Donner l'expression de f^{-1} et tracer sa courbe représentative (C_1) dans le même repère que (C).

$\boxed{3}$ Etablir.

1° Pour $0 < x < 1$, $\text{Arctg}\,\dfrac{1+x}{1-x} - \text{Arctg}\,x = \dfrac{\pi}{4}$.

2° **a)** $\text{Arccotg}\,(2n-1) - \text{Arccotg}\,(2\,n+1) = \text{Arccotg}\,(2n^2)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire une expression simple de la somme :

$S_n = \text{Arccotg}\,(2.1^2) + \text{Arccotg}\,(2.2^2) + \ldots + \text{Arccotg}\,(2.n^2) = \sum_{i=1}^{n} \text{Arccotg}\,(2.i^2)$.

c) Trouver la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Chapitre 5 Droites et plan de l'espace

1 On considère le plan *(P)* : $2x+y-z-1=0$, la droite *(D)* définie par $x=t-1$, $y=-t$, $z=-t+1$ avec $t \in \mathbb{R}$ et le point $A(1,2,-1)$.

1° Trouver les coordonnées du point I intersection de *(P)* et *(D)* .

2° Trouver une équation du plan *(Q)* passant par *(D)* et perpendiculaire au plan (xOz) .

3° Calculer le cosinus de l'angle que forme (Oy) avec *(P)* .

4° Trouver des équations paramétriques de la droite $(A'I')$ projeté de (AI) sur le plan *(R)* : $x + y + 2z + 2 = 0$ parallèlement à *(D)* .

5° Calculer la longueur de $[AA'']$, où A'' est le symétrique de A par rapport à *(P)*.

2 On considère la droite *(D)* définie par les équations paramétriques :

$x = -t + 2$, $y = t + 1$, $z = t - 1$ avec $t \in \mathbb{R}$.

1° Calculer les coordonnées du point d'intersection A de *(D)* avec le plan (xOy) .

2° a) Trouver une équation du plan *(P)* contenant (Ox) et parallèle à *(D)* .

b) Calculer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur *(P)* .

c) Déterminer un système d'équations paramétriques du projeté orthogonal de *(D)* sur *(P)* .

3 On considère la droite *(D)* définie par les équations :

$x = t + 1$; $y = -t + 2$; $z = 2t - 1$ avec $t \in \mathbb{R}$.

1° Calculer le cosinus de l'angle aigu que forme *(D)* avec $(y'Oy)$.

2° Calculer la distance du point O à la droite *(D)* .

3° a) Montrer que , quel que soit le paramètre réel m , le plan *(P)* d'équation :

$(2m + 1)\,x + y - mz - 3(m + 1) = 0$ contient la droite *(D)* .

b) Déterminer m pour que la distance du point $A(2 , 1 , -1)$ au plan *(P)* soit égale à 1 .

4 Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(Oxyz)$, on considère le point $A(1\ ,\ 1\ ,\ 1)$ et les trois droites (d_1) , (d_2) et (d_3) définies par :

$$(d_1) : \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 1 \\ z = t + 1 \end{cases} \quad , \quad (d_2) : \begin{cases} x = -m + 1 \\ y = m + 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad , \quad (d_3) : \begin{cases} x = -1 \\ y = -\lambda + 1 \\ z = \lambda + 3 \end{cases} \quad \text{avec } t\ ,\ m \text{ et } \lambda \text{ des réels .}$$

1° a) Démontrer que (d_1) et (d_2) se coupent en A et calculer l'angle aigu de (d_1) et (d_2) .

b) Écrire une équation du plan formé par (d_1) et (d_2) .

c) Démontrer que (d_3) coupe (d_1) et (d_2) en B et C et que le triangle ABC est équilatéral .

2° Le plan (P) d'équation $x + y + z = 3$ coupe les axes de coordonnées en S , T et U .

a) Démontrer que (OA) est perpendiculaire à (P) . Calculer les coordonnées de S , T et U .

b) Soit $M(\alpha\ ,\ \alpha,\ \alpha)$ un point de $[OA]$. Déterminer α pour que M soit équidistant des 4 faces du tétraèdre $OSTU$.

5 Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $Oxyz$, on considère le plan (P) d'équation $2x + 2y + z = 0$, le plan (Q) d'équation $x + 2y + 2z = 5$ et l'on désigne par (Δ) leur intersection .

1° Calculer le cosinus de l'angle aigu que fait (P) avec (Q) .

2° Déterminer un système d'équations paramétriques de (Δ) .

3° Déterminer le réel a pour que le point $M(a\ ,\ 0\ ,\ 0)$ soit équidistant des deux plans (P) et (Q) . En déduire des équations des plans bissecteurs des dièdres formés par (P) et (Q) .

4° Soit (D) la droite définie par $x = m - 1$, $y = m + 1$ et $z = -m$. Déterminer les coordonnées des points de (D) équidistants de (P) et (Q) .

6 Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $Oxyz$, on donne le plan (P) d'équation $x + 2y + 3z = 10$, le plan (Q) d'équation $3x + 2y + z = 2$ et la droite (D) définie par $x = \lambda + 1$, $y = \lambda$ et $z = \lambda - 1$. (D) coupe (P) en A et (Q) en B .

1° Calculer les coordonnées de A et B .

2° Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) intersection de (P) et (Q) .

3° Calculer le cosinus de l'angle aigu β que fait (P) avec (Q) .

4° On désigne par (R) le plan passant par A et perpendiculaire à (Δ) en H .

a) Ecrire une équation de (R) et calculer les coordonnées de H .

b) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{HB}$ et en déduire le cosinus de l'angle aigu θ que font les droites (HA) et (HB) entre elles .

7 Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $Oxyz$, on considère le point $A(1 , 0 , 4)$ et le plan (P_m) d'équation $(m + 3)x + (m - 3)y + (1 - m)z - 1 - m = 0$ où m est un paramètre réel .

1° Montrer que , quel que soit m , le plan (P_m) contient une droite fixe (D) dont on déterminera un système d'équations paramétriques .

2° Pour $m = -1$, on a le plan (P_{-1}) d'équation $2x - 4y + 2z = 0$ et pour $m = 5$, on a le plan (P_5) d'équation $8x + 2y - 4z - 6 = 0$. Montrer que (P_{-1}) et (P_5) sont perpendiculaires . Calculer la distance d_1 de A à (P_{-1}) , la distance d_2 de A à (P_5) et la distance d de A à (D) .

3° Soit L le projeté orthogonal de A sur (P_m) .

a) Démontrer que , lorsque m varie , L décrit un cercle fixe (C) dont on déterminera le rayon r , les coordonnées de son centre I et une équation de son plan .

b) Ecrire une équation du plan (P_m) qui correspond à la plus grande valeur de AL .

Chapitre 6 Nombres complexes

1 A tout complexe $z \neq -i$ on associe le nombre complexe : $f(z) = \dfrac{iz}{z+i}$.

On note M le point d'affixe z.

1° Trouver les coordonnées du point B dont l'affixe z_0 est telle que $f(z_0) = 1 + 2i$.

2° On note r le module de $z + i$ et α l'un de ses arguments .

Donner une forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et de α .

3° A est le point d'affixe $-i$.

a) Trouver l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$, et l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M tels que $\dfrac{\pi}{4}$ soit un argument de $f(z) - i$.

b) Montrer que B appartient à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ puis construire $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

2 A et B sont les points d'affixes respectives : $z_0 = i$ et $z_1 = -1 - 2i$.

1° a) Trouver l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que $|z - i| = \sqrt{10}$.

b) Prouver que B appartient à (Γ) . Placer A , B et (Γ) sur une figure .

c) Trouver les points d'intersection de (Γ) avec l'axe des abscisses .

2° a) Calculer le module et un argument de $z_0 + z_1$.

b) Calculer $z_0 z_1$. En déduire que le point C d'affixe $2 - i$ est l'image de B par une rotation de centre O dont on précisera l'angle .

$\boxed{3}$ Pour tout nombre complexe z avec $z \neq i$, et $z \neq -i$, on pose : $Z = \dfrac{2z}{z^2+1}$.

1° Lorsque z est un réel , montrer que $|Z| \leqslant 1$.

2° Soit θ un réel différent de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $z = e^{i\theta}$. Montrer que $Z = \dfrac{1}{\cos\theta}$.

En déduire que si z est différent de i et de $-i$ et de module 1 , alors Z est un réel et $|Z| \geqslant 1$.

3° On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec x , y , X , Y réels .

a) Calculer X et Y en fonction de x et y .

b) Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormal $(O , \vec{u} , \vec{v})$, trouver la courbe E ensemble des points M , d'affixe z tels que Z soit un réel .

$\boxed{4}$ On considère l'application φ de $\mathbb{C} - \{1\}$ dans $\mathbb{C}$, définie par :

$\varphi(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$. On note $\varphi(z) = Z$.

m désigne le point d'affixe z , M celui d'affixe Z , A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 . On pose $z = x + iy$, $Z = X + iY$ avec x , y , X , Y réels .

1° Déterminer par le calcul :

a) l'ensemble des points m tels que Z soit réel ,

b) l'ensemble des points m tels que Z soit imaginaire pur .

2° a) Quelles distances représentent $|1 - z|$ et $|1 + z|$?

Déterminer l'ensemble des points m tels que $|Z| = 1$.

b) Démontrer que l'ensemble (C_k) des points m tels que $|Z| = k$, où k est un réel strictement positif et différent de 1 , est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon .

Chapitre 8 Logarithmes

$\boxed{1}$ Soit g la fonction définie sur $I =]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - \ell n\, x$.

1° Calculer $g'(x)$ où g' désigne la fonction dérivée de g . Etudier son signe (on ne demande pas le calcul des limites aux bornes de I) .

2° Dresser le tableau de variations de g . En déduire le signe de $g(x)$ sur I .

3° Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = 2x - 1 + 2\,\dfrac{\ell n\, x}{x}$.

a) Déterminer les limites de f aux bornes de I , calculer $f'(x)$ et , en utilisant la question précédente , étudier son signe .

b) Dresser le tableau de variation de f sur I .

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 sur l'intervalle $J = \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$.

4° On désigne par (C) la courbe représentative de (C) dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ (on prendra comme unités graphiques : 5 cm sur l'axe des x et 2 cm sur l'axe des y) .

a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à (C) . En déduire la position relative de (D) et (C) .

b) Construire (D) sur la figure .

Hachurer la partie du plan définie par $\begin{cases} x_0 \leqslant x \leqslant 1 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 2x - 1 \end{cases}$ et exprimer l'aire $\mathscr{A}$ de cette partie à l'aide d'une intégrale .

c) On pose $\varphi(x) = \dfrac{2\ell n\, x}{x}$ et $u(x) = \ell n\, x$.

Calculer $u'(x)$ et exprimer φ en fonction de u et u' .

En déduire une primitive de φ puis l'expression de $\mathscr{A}$ en fonction de x_0 . En remarquant que $f(x_0) = 0$, montrer que :

$\mathscr{A} = \dfrac{1}{4}x_0^2(1 - 2x_0)^2$ unités d'aire .

2 **1°** Déterminer la plus grande partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ sur laquelle l'expression

$x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{9}{8}\,\ell n\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$ est définie .

2° On considère la fonction f définie par :

$$f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x + \frac{1}{x} + \frac{9}{8}\,\ell n\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

et on désigne par *(C)* sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ (unité graphique 1 cm) .

a) La fonction f est-elle continue et dérivable sur $\mathscr{D}$? Justifier .

b) Etudier la parité de f .

3° On réduit l'ensemble d'étude de f et on se place sur $\mathscr{D} \cap \mathbb{R}^+$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que quand x tend vers $+\infty$, *(C)* admet une asymptote oblique dont on déterminera l'équation .

c) Calculer $f'(x)$ et factoriser $4x^4 - 17x^2 + 4$.

d) Etudier , sur $\mathscr{D} \cap \mathbb{R}^+$, le signe de $f'(x)$ et donner les variations de f .

e) Calculer $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ et $f(8)$ et donner des valeurs approchées à 10^{-1} près .

4° a) Combien cette courbe a-t-elle d'asymptotes ? Donner leurs équations .

b) Construire *(C)* .

5° a) Soit λ un réel strictement inférieur à 2 . En utilisant une intégration par parties , calculer

$$T_\lambda = \int_2^3 \ell n\,(x - \lambda)\,dx\ .$$

b) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan définie par $2 \leqslant x \leqslant 3$ et $x \leqslant y \leqslant f(x)$.

Donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$ à 10^{-3} près .

$\boxed{3}$ Soit f la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = x - 2 - \ell n\, x$.

A. 1° Etudier les variations de f et tracer sa courbe (C) dans un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$.

2° Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions a et b telles que : $e^{-2} < a < e^{-1}$ et $3 < b < 4$.

3° Soit (D) la droite d'équation $y = x$. Montrer que (D) coupe (C) en un point unique et qu'il en est de même pour toute droite parallèle à (D) .

4° À tout réel x strictement positif , on associe le point M de (C) d'abscisse x et le point N de (C) d'abscisse $\dfrac{1}{x}$.

Déterminer en fonction de x les coordonnées du milieu I du segment $[MN]$. En déduire que I est situé sur une droite fixe parallèle à (D) .

B. Dans cette partie , on se propose de trouver une valeur approchée de b .

1° Soit φ la fonction de l'intervalle $[3\ ;4]$ vers $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = x - f(x)$, soit $\varphi(x) = 2 + \ell n\, x$.

Etudier les variations de φ sur $[3\ ;4]$. Montrer que $\varphi(b) = b$.

2° a) Montrer que si $3 \leqslant x < b$ alors :

$x \leqslant \varphi(x)$ et $3 \leqslant \varphi(x) \leqslant b$ et $0 < \varphi'(x) \leqslant \dfrac{1}{3}$.

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis montrer que si $3 \leqslant x \leqslant b$ alors :

$$0 \leqslant \varphi(b) - \varphi(x) \leqslant \frac{1}{3}(b - x) \leqslant \frac{1}{3} .$$

3° (Pour la série sciences générales seulement)

Soit la suite (u_0) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2 + \ell n\, u_n = \varphi(u_n) \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} .$$

a) Montrer que cette suite (u_n) est croissante et majorée par b .

b) Montrer que pout tout entier n ;

$0 \leqslant b - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Application : • Déterminer un entier n_0 tel que $b - u_{n_0} \leqslant 10^{-3}$.

• En utilisant la calculatrice donner une valeur approchée de u_{n_0} à 10^{-4} près et un encadrement de b à 10^{-4} près .

$\boxed{4}$ **A.** On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x + \dfrac{\ell n\, x}{x}$ et $g(x) = x^2 + 1 - \ell n\, x$.

1° **a)** Déterminer les ensembles de définition de f et g .

b) Etudier les variations de g .

c) Montrer que g est strictement positive sur son ensemble de définition .

2° **a)** Exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$.

b) Etudier les variations de f et ses limites en 0 et en $+\infty$.

3° Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

4° Montrer que la courbe représentative (Γ) de f admet une asymptote (D) , dont on donnera l'équation .

5° Déterminer l'équation de la tangente à (Γ) au point d'intersection I de (P) et (D) .

6° Déterminer les coordonnées du point J de (Γ) oà la tangente est parallèle à (D) .

7° Tracer la courbe (Γ) , ainsi que les tangentes étudiées .

8° Soit α un nombre réel , $\alpha > 1$. Calculer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre (D) , (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

B. Pour tout nombre réel k non nul , soit f_k la fonction définie par $f_k(x) = x + k\,\dfrac{\ell n\, x}{x}$ et (Γ_K) sa courbe représentative .

1° Montrer que :

a) les courbes (Γ_k) ont un unique point commun.

b) elles ont la même asymptote oblique .

c) les points J_k où elles admettent une tangente parallèle à l'asymptote sont alignés .

2° Tracer la courbe (Γ_{-1}) obtenue pour $k = -1$.

3° Calculer l'aire $\mathscr{B}_k(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre (D) , (Γ_k) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$. Quelle relation lie $\mathscr{A}(\alpha)$ et $\mathscr{B}_k(\alpha)$?

$\boxed{5}$ **1°** Etudier les variations de la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 - 6x + 5$.

2° Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$f(x) = (\ell n\, x)^2 - 6\, \ell n\, x + 5$.

a) Etudier f (sens de variation et limites) .

b) Calculer la dérivée f'' de f . Pour quelle valeur x_0 , on a $f''(x) = 0$?

Déterminer l'équation de la tangente (D) à la courbe (C) de f au point M_0 d'abscisse x_0 .

3° Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = (\ell n\, x)^2 - 6\, \ell n\, x + 5 - \dfrac{2}{e^4}\, x + 5$.

a) Calculer g' et g'' .

b) Etudier le sens de variation de g' et en déduire le signe de $g'(x)$.

c) Etudier le sens de variation de g et en déduire le signe de $g(x)$.

d) En déduire la position relative de (C) et (D) .

4° Construire la courbe (C) lorsque x varie sur $]0\,;\,150[$.

(On prendra un repère orthogonal : unités 1 mm sur $x'x$ et 1 cm sur $y'y$) .

On construira les points d'abscisses e^n pour n entier .

Construire dans le même repère la droite (D) et préciser son point d'intersection T sur l'axe des ordonnées .

5° a) Résoudre algébriquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > 0$.

b) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leqslant -3$.

6° a) Par des intégrations par parties , déterminer une primitive de $\ell n\, x$ puis de $(\ell n\, x)^2$. En déduire une primitive de f .

b) Calculer l'aire (en cm^2) de la portion du plan définie par :

$e \leqslant x \leqslant e^5$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 0$.

$\boxed{6}$ **A.** Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x\,\ell n\, x}{x+1}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1° Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 .

2° a) Soit φ la fonction de définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $\varphi(x) = \ell n\, x + x + 1$.

Etudier les variations de φ . Etablir que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution β et une seule , et que $0{,}27 \leqslant \beta \leqslant 0{,}28$.

(On ne demande pas de construire la courbe représentative de φ) .

b) Pour $x > 0$, exprimer $f'(x)$ à l'aide de $\varphi(x)$. En déduire les variations de f .

3° Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis la limite de $\ell n\, x - f(x)$ en $+\infty$.

4° Construire les courbes représentatives (C) de f et (Γ) de $x \mapsto \ell n\, x$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$ (unité 4 cm) .

B. On se propose d'étudier l'équation $f(x) = 1$.

À cet effet on introduit la fonction g définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $g(x) = e\ .\ e^{\frac{1}{x}}$.

1° Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α et une seule , et que $3{,}5 \leqslant \alpha \leqslant 3{,}7$. Placer le point de (C) d'abscisse α .

2° a) Prouver que l'équation $f(x) = 1$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.

b) Etudier la monotonie de g .

c) Prouver que pour tout élément de $[3{,}5\ ;3{,}7]$, $g(x)$ appartient aussi à $[3{,}5\ ;3{,}7]$.

d) Etablir que pour tout élément x de $[3{,}5\ ;3{,}7]$, $\left|g'(x)\right| \leqslant \left|g'(3{,}5)\right| \leqslant \dfrac{1}{3}$. En déduire que :

$$\left|g(x) - \alpha\right| \leqslant \frac{1}{3}\left|x - \alpha\right| .$$

3° Soit (u_n) la suite d'éléments de $[3{,}5\ ;3{,}7]$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = 3{,}5$.

a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $\left|u_n - \alpha\right| \leqslant \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{3^n}$. En déduire la limite de (u_n) .

b) Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-3} près .

Chapitre 9

Exponentielles

1 Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} -\ell n\,(x+1) & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^{-x} - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1° Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 .

2° Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

3° Calculer l'aire du domaine plan limité par (C) , l'axe des x et les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$.

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\,e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

Partie A

1° a) Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

c) Préciser la position de (C) par rapport à son asymptote en $+\infty$.

2° Construire la courbe (C) .

3° Pour tout réel λ positif , on note $A\,(\lambda)$ l'aire du domaine plan formé par les points $M\,(x\,,\,y)$ tels que: $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \lambda$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

Calculer $A\,(\lambda)$ et sa limite quand λ tend vers $+\infty$.

Partie B

1° a) Interpréter graphiquement l'équation $f(x)=x$ et vérifier sur ce graphique qu'elle admet une solution unique α dans $I = \left[1\,;\dfrac{5}{4}\right]$.

b) Calculer $f\,(1)$ et $f\left(\dfrac{5}{4}\right)$, puis , en utilisant le sens de variation de f , montrer que , pour tout élément x de I , $f(x)$ appartient à I .

2° a) Montrer que , pour tout élément x de I , $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Pour obtenir ce résultat , on étudiera les variations de f' sur I .

b) En déduire que , pour tout élément x de I , $\left|f(x)-\alpha\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left|x-\alpha\right|$.

3° Pour la série sciences générales seulement .

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Prouver que , pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $\left|u_{n+1}-\alpha\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left|u_n-\alpha\right|$.

b) Montrer que $\left|u_n-\alpha\right| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+2}}$. En déduire la convergence de (u_n) et indiquer sa limite .

c) En utilisant l'inégalité précédente , déterminer un entier p tel que $\left|u_p-\alpha\right| \leqslant 10^{-4}$ et donner la valeur de u_p .

$\boxed{3}$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

Partie A

Dans cette partie on étudie les fonctions f_m définies sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = f(mx)$ où m est un paramètre réel et $m \neq 0$. On désigne par (C_m) la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$.

1° Etudier le sens de variations de f et les limites respectives de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2° Soit A le point de coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$. Prouver que A est centre de symétrie de la courbe (C_1) représentant la fonction f .

3° **a)** Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_1) au point A .

b) Préciser la position de (C_1) par rapport à (T) . Pour cela , on pourra étudier le signe de la fonction φ définie par $\varphi(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} - f(x)$ en prouvant que $\varphi'(x) = \dfrac{(e^x - 1)^2}{4(1 + e^x)^2}$.

4° Tracer la courbe (C_1) (unité graphique : 4 cm) .

5° **a)** Calculer l'intégrale $I_m(\lambda) = \displaystyle\int_{-\lambda}^{\lambda} f_m(x)\,dx$ où λ est un réel .

b) Prouver que $I_m(\lambda)$ est indépendant de m .

Partie B

1° Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - f(x)$.

a) Etudier le sens de variation de g .

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution α et une seule et que $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

2° **a)** Prouver que pour tout élément x de $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$, $f(x)$ appartient à $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.

b) Calculer $f''(x)$. En déduire que , pour tout x de $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant k$, où $k = \dfrac{\sqrt{e}}{(\sqrt{e} + 1)^2}$.

c) En déduire que , dans ces conditions , $|f(x) - \alpha| \leqslant k\,|x - \alpha|$.

d) Vérifier que $k \leqslant \dfrac{1}{4}$.

3° Pour la série sciences générales seulement .

Soit (u_n) la suite d'éléments de $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et la condition $u_0 = \frac{1}{2}$.

a) Montrer que , pour tout entier $n \geqslant 0$, $\left|u_n - \alpha\right| \leqslant \frac{1}{2} k^n$.

b) En déduire la limite de (u_n) .

c) Déterminer un entier p tel que $\left|u_p - \alpha\right| \leqslant 10^{-4}$. Calculer u_p .

$\boxed{4}$ On désigne par f_1 la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$ par : $f_1\ (x) = \ell n\ (e^x + 1)$.

Partie A

1° Préciser les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$. Etudier les variations de f_1 et dresser son tableau de variation .

2° a) Montrer que , pour tout réel x , $f_1(x) = x + \ell n\ (e^{-x} + 1)$. Déduire de ce qui précède que la courbe (C_1) représentative de la fonction f_1 , admet deux droites asymptotes dont l'une est la droite (Δ) d'équation $y = x$.

b) Déterminer la position de (C_1) par rapport à chacune d'elles .

3° Construire la droite (Δ) et la courbe (C_1) dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ (unité : 2 cm) .

Partie B

Le but de cette partie est de trouver un encadrement de l'intégrale $I = \int_0^1 f_1(t)\ dt$.
On considère alors la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + \ell n\ 2 - f_1(x)$.

1° a) Etudier les variations de la fonction g' sur $[0\ ;\ 1]$ et en déduire le signe de $g'(x)$.

b) Etudier les variations de la fonction g sur $[0\ ;\ 1]$ et en déduire le signe de $g(x)$.

2° Démontrer que , pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$, $0 \leqslant g(x) \leqslant 5.10^{-3}$.

3° En déduire un encadrement de l'intégrale I .
Donner pour I une valeur décimale approchée en précisant l'approximation obtenue .

$\boxed{5}$ Soit f la fonction définie par

$f(x) = (x + m - 1)e^x$, où m est un paramètre réel . On désigne par (C_m) la courbe représentant f dans un repère orthonormal d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

1° Soit T le point d'intersection de (C_m) avec $y'Oy$.

a) Déterminer l'équation de la tangente (D_m) en T à (C_m) .

b) Montrer que , pour tout m , (D_m) passe par un point fixe que l'on déterminera .

2° a) Vérifier que $f(x) = f'(x) - e^x$.

b) Démontrer que la dérivée d'ordre n de f satisfait la relation $f(x) = f^{(n)}(x) - ne^x$.

3° On suppose dans cette partie que $m = 0$.

a) Etudier les variations de la fonction g définie par $g(x) = (x - 1)e^x$ et tracer sa courbe (C_0) correspondante .

b) Calculer l'aire du domaine plan limité par (C_0) , $x'x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

4° On considère la fonction h définie par $h(x) = \left| x - 1 \right| e^x$.

a) Construire la courbe (C') représentant h .

b) Démontrer que h n'est pas dérivable en $x_0 = 1$.

Chapitre 11 Statistiques

1 Dans deux groupes , l'un de dix élèves et l'autre de huit élèves , les notes obtenues à un même devoir sont les suivantes :

Premier groupe	1	1	1	2	3	17	20	20	20	20
Deuxième groupe		8	10	10	11	11	11	11	12	

1° Présenter ces renseignements dans deux tableaux d'effectifs .

2° Calculer la moyenne des notes de chaque groupe . Peut-on en déduire le meilleur des deux groupes ?

3° Calculer l'écart-type des notes de chaque groupe .

Peut-on , à présent , dire quel est le meilleur groupe ?

2 On a goûté des bonbons et apprécié leur goût par une note de 0 à 5 . On a obtenu les résultats suivants :

Note	1	2	3	4	5
Effectif	11	24	9	4	2

1° Calculer les fréquences des notes et les représenter par un polygone.

2° Calculer la médiane et la moyenne des notes attribuées aux bonbons.

3° S'il y a 21,9% de ces bonbons qui ont un goût de citron, 72,6% d'orange, 2,5% de fraise et 3% de miel , représenter cette répartition par un diagramme circulaire.

4° On fabrique deux genres de bonbons : GENRE A et GENRE B. Le coût de production journalier d'un kilo de A est de 2$, celui d'un kilo de B est de 3$. On sait également que le coût moyen journalier de production d'un kilo est de 2,40$. On fabrique chaque jour 600kg. Quel est le nombre de kilos de bonbons du genre A et du genre B fabriqués quotidiennement ?

Chapitre 13 Probabilités

1 On lance deux dés parfaits , puis on totalise les points marqués . On suppose que les résultats des dés sont indépendants .

1° Quelle est la probabilité d'avoir un total supérieur ou égal à 8 ?

2° Au bout de 20 lancers des deux dés , quelle est la probabilité d'avoir obtenu dix fois exactement un total supérieur ou égal à 8 ?

2 Une urne contient deux boules blanches et n boules noires , indiscernables au toucher .

Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note A_2 l'événement «le joueur a tiré deux boules blanches» .

1° Déterminer n pour que la probabilité $P(A_2)$ de l'événement A_2 soit égale à $\frac{1}{15}$.

2° Dans toute la suite du problème , on prend $n = 4$.

Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note :

A_0 l'événement «le joueur a tiré deux boules noires»

A_1 l'événement «le joueur a tiré une boule blanche et une boule noire»

A_2 l'événement «le joueur a tiré deux boules blanches» .

Calculer la probabilité $P(A_0)$ de l'événement A_0 et celle $P(A_1)$ de l'événement A_1 .

3° Après ce premier tirage , le joueur remet les boules noires tirées dans l'urne et laisse les boules blanches tirées de côté , puis effectue un nouveau tirage de deux boules .

Soit B_i l'événement «le joueur a tiré i boule(s) blanche(s) lors des deux tirages» ($i = 0$; 1 ; 2) .

a) Calculer $P(B_0/A_2)$ et $P(B_0 \cap A_2)$.

b) Calculer $P(B_0/A_1)$ et $P(B_0 \cap A_1)$.

c) Déduire que $P(B_0) = \frac{41}{75}$.

d) Montrer que $P(B_2) = \frac{2}{75}$. Déduire $P(B_1)$.

$\boxed{3}$ Un représentant de commerce doit visiter cinq clients . Chacune de ces visites est indépendante des autres .

La probabilité qu'il rencontre effectivement le client est $p = 0{,}6$.

1° On note X le nombre de clients effectivement rencontrés .

Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique .

2° Donner la probabilité des événements suivants :

a) le représentant rencontre au moins un client .

b) le représentant rencontre au moins quatre clients .

$\boxed{4}$ On lance trois fois de suite un dé pipé . Le résultat de chaque lancer ne dépend pas des lancers précédents . On appelle succès l'événement S «sortie du 6» et on sait que pour ce dé la probabilité de S est $P(S) = \frac{2}{9}$.

1° Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) exactement deux succès ?

b) trois succès ?

c) aucun succès ?

d) au moins un succès ?

5 Le sang humain est classé en quatre groupes distincts : A ; B ; AB et O .
Indépendamment du groupe sanguin , le sang peut posséder le facteur Rhésus . Si le sang d'un individu possède ce facteur , il est dit de Rhésus positif (noté Rh^+) ; s'il ne possède pas ce facteur , il est dit de Rhésus négatif (noté Rh^-) .
Sur une population P les groupes sanguins se répartissent d'après le tableau suivant :

A	B	AB	O
40%	10%	5%	45%

Pour chaque groupe , la proportion d'individus possédant ou non le facteur Rhésus se répartit d'après le tableau suivant :

groupe	A	B	AB	O
Rh^+	82%	81%	83%	80%
Rh^-	18%	19%	17%	20%

Un individu ayant un sang du groupe O et de Rhésus négatif est appelé donneur universel .

1° a) Quelle est la probabilité qu'un individu pris au hasard dans la population P ait un sang du groupe O ?

b) Quelle est la probabilité qu'un individu pris au hasard dans la population P soit un donneur universel ?

c) Quelle est la probabilité qu'un individu pris au hasard dans la population P ait un sang de Rhésus négatif ?

2° Quelle est la probabilité qu'un individu pris au hasard parmi ceux de facteur Rhésus négatif soit du groupe O ?

6 Une usine est dotée d'un système d'alarme qui se déclenche en principe lorsqu'un incident se produit sur une chaine de production .
Il peut arriver toutefois que le système soit mis en erreur . En effet des études statistiques ont montré que sur une journée :

• la probabilité que l'alarme se déclenche par erreur , c'est-à-dire sans qu'il ait eu un incident , est égale à $\frac{1}{50}$.

• la probabilité qu'un incident survienne sans que l'alarme se déclenche est égale à $\frac{1}{500}$

• la probabilité qu'un incident se produise est égale à $\frac{1}{100}$.

On pourra noter :
A l'événement «l'alarme se déclenche»
I l'événement «un incident se produit» .

1° Calculer la probabilité que , sur une journée , un incident survienne et que l'alarme se déclenche . Déduire la probabilité que l'alarme se déclenche .

2° Quelle est la probabilité que , sur une journée , le système d'alarme soit mis en défaut ?

3° L'alarme vient se déclencher , quelle est la probabilité qu'il ait réellement un incident ?

7 L'éclairage d'une chambre nécessite l'emploi de deux lampes A et B différentes . Les probabilités de défaillance de ces lampes pour un laps de temps déterminé sont respectivement 0,12 pour A et 0,18 pour B . On admet que ces événements sont indépendants .

1° Calculer la probabilité pour que les deux lampes tombent en panne toutes les deux . En déduire la probabilité pour avoir au moins une lampe qui fonctionne .

2° Quelle est la probabilité pour qu'une lampe , et une seule , tombe en panne ?

8 Une enquête est faite auprès de la population étudiante d'un campus universitaire . On note F la population féminine , I l'ensemble des étudiants , garçons et filles , sachant jouer d'un instrument de musique .

L'enquête révèle que :

• F représente 48% de la population étudiante ;

• I représente 40% de la population étudiante ;

• chez les étudiants du groupe I , 45% sont des filles .

1° Quelle est la probabilité pour qu'un étudiant interrogé au hasard appartienne au groupe I ?

2° **a)** On interroge un étudiant au hasard . Quelle est la probabilité pour qu'il soit une fille sachant jouer d'un instrument de musique ?

b) On interroge une fille du campus . Quelle est la probabilité pour que cette fille sache jouer d'un instrument de musique ?

3° On interroge 15 étudiants au hasard . On suppose que le nombre d'étudiants du campus est suffisamment grand pour que la probabilité de rencontrer un étudiant du type donné reste constante au fur et à mesure du sondage . Quelle est la probabilité pour que , sur ces 15 étudiants , 8 appartiennent au groupe I ? (on donnera le résultat sous forme exacte , puis sous forme décimale approchée à 10^{-3} près).

$\boxed{9}$ Un même individu peut être atteint de surdité unilatérale (portant sur une seule oreille) ou bilatérale (portant sur les deux oreilles) . On admet que , dans une population donnée , les deux événements suivants :

D : “être atteint de surdité à l’oreille droite”

G : “être atteint de surdité à l’oreille gauche” ,

sont indépendants et tous les deux ont la même probabilité 0,05 . On note $P(D) = P(G) = 0{,}05$.

On considère les événements suivants :

B : “être atteint de surdité bilatérale”

U : “être atteint de surdité unilatérale”

S : “être atteint de surdité (sur une oreille au moins) .

N.B. On donnera les valeurs numériques des probabilités sous forme décimale approchée à 10^{-4} près .

1° Exprimer les événements B et S à l’aide de G et de D , puis calculer les probabilités $P(B)$ de B et $P(S)$ de S . En déduire la probabilité $P(U)$ de U .

2° Sachant qu’un sujet pris au hasard dans la population considérée est atteint de surdité , quelle est la probabilité pour qu’il soit :

a) atteint de surdité à droite ?

b) atteint de surdité bilatérale ?

Les deux événements «D sachant S» et «G sachant S» sont-ils indépendants ?

3° On considère un échantillon de 10 personnes prises au hasard dans la population considérée , qui est suffisamment grande pour que les choix puissent être assimilés à des choix successifs indépendants .

a) Quelle est la probabilité pour qu’il y ait exactement k personnes atteintes de surdité dans l’échantillon?

b) Calculer la probabilité pour qu’il n’y ait aucun sujet atteint de surdité dans l’échantillon .

$\boxed{10}$ Une usine fabrique des pièces dont 1,8% sont défectueuses . Le contrôle s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

- sachant qu'une pièce est bonne , elle est acceptée avec une probabilité de 0,97 .

- sachant qu'une pièce est mauvaise , elle est refusée avec une probabilité de 0,99 .

1° Quelle est la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse ?

2° **a)** Montrer que la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse et acceptée est 0,00018 .

b) Montrer que la probabilité pour qu'une pièce soit bonne et refusée est 0,02946 .

c) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur dans le contrôle .

3° Si on effectue cinq contrôles de suite , quelle est la probabilité pour qu'il y ait exactement deux erreurs de contrôle ?

$\boxed{11}$ Pour attirer la clientèle , un grand magasin décide que tout client ayant fait un minimum d'achats aura droit à tirer simultanément trois jetons d'une urne . Cette urne contient six jetons indiscernables au toucher : trois jetons portent le nombre 0 , deux portent le nombre 50 et un jeton porte le nombre 100 .

Le client qui a tiré les trois jetons reçoit en dollars la somme des nombres indiqués sur ces trois jetons .

Un client a tiré trois jetons .

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme reçue par le client .

1° Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X puis la loi de probabilité de X .

2° Déterminer , par un tableau , la fonction de répartition F de X .

$\boxed{12}$ Un cirque possède dix fauves dont quatre lions . Pour chaque représentation , le dompteur choisit cinq fauves au hasard .

Soit X la variable aléatoire qui décompte le nombre de lions présentés au cours d'une représentation .

1° Déterminer la loi de probabilité de X . On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

2° Calculer l'espérance mathématique de X .

Chapitre 15 Lois de composition

1 Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels on définit une loi de composition interne $*$ par :

$x * y = 2x + 2y - xy - 2$.

1° Montrer que cette loi est commutative et associative .

2° Montrer que la loi $*$ possède un élément neutre e .

3° Démontrer que tous les éléments de $\mathbb{R}$, sauf un seul que l'on déterminera , sont symétrisables pour la loi $*$.

4° Démontrer que pour tout $(x , y) \in \mathbb{R}^2$, $x * y = 2$ équivaut à $x = 2$ ou $y = 2$.

En déduire que la loi $*$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{R} - \{2\}$.

5° $(\mathbb{R} - \{2\} , *)$ est-il un groupe abélien ?

2 Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels on définit la loi de composition interne $\top$ par :

$x \top y = axy + b(x + y) + c$ où a , b et c sont des réels donnés avec $a \bullet b \neq 0$.

1° Montrer que la loi $\top$ est commutative .

2° Quelle relation doivent vérifier a , b , c pour que la loi $\top$ soit associative ?

3° On suppose dans la suite que $c = \dfrac{b^2 - b}{a}$.

Montrer que $\top$ admet un élément neutre et que tout élément de $\mathbb{R}$, à l'exception d'un seul noté α que l'on précisera , est symétrisable pour la loi $\top$.

4° L'ensemble $E = \mathbb{R} - \{\alpha\}$ est-il un groupe abélien pour la loi $\top$?

$\boxed{3}$ On rappelle que , si z est un nombre complexe , le module de ce nombre , noté $|z|$, est défini par $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ où $\bar{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z .

Soit U l'ensemble des nombres complexes de module 1 .

1° Montrer qu'un nombre complexe z appartient à U si , et seulement si $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

2° En utilisant les propriétés des nombres complexes conjugués , démontrer que , dans l'ensemble U , on a : $a + b - ab + 1 = 0$ équivaut à $a + b + ab - 1 = 0$.

En déduire tous les couples (a , b) de nombres complexes appartenant à U qui satisfont à l'équation $a + b - ab + 1 = 0$.

3° Dans l'ensemble U , on définit la loi $\top$ par $i \top (-i) = (-i) \top i = 1$ et pour (a , b) distinct de $(i , -i)$ et $(-i , i)$. $a \top b = \dfrac{a + b + ab - 1}{a + b - ab + 1}$.

Montrer que $\top$ est une loi de composition interne dans U et que $(U , \top)$ est un groupe abélien .

$\boxed{4}$ On définit sur l'ensemble $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ une loi de composition interne $*$ par

$(x , y) * (x' , y') = (x + yx' , yy')$.

1° Montrer que $(G , *)$ est un groupe d'élément neutre e .

2° Soit $H = \mathbb{R} \times \{1\}$.

a) Montrer que $e \in H$.

b) Montrer que la loi $*$ est interne dans H .

c) Montrer que si $x \in H$, alors le symétrique x' de x appartient à H .

d) Montrer que H est un sous-groupe de G pour la loi $*$.

e) Démontrer que , pour tout $(x , y) \in H^2$, $x * y' \in H$ où y' est le symétrique de y pour la loi $*$.