عدد المسائل: خمس	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع: العلوم العامة 2022/2023	ثانوية برجا الرسمية 07/623581
المدة: ثلاث ساعات	مسابقة في مادة الرياضيات	اعداد وتأليف الأستاذ: أحمد دمج 70/773620

ملاحظات هامة - يستطيع الطالب الاجابة عن الأسئلة بالترتيب الذي يناسبه.
- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو إختزان المعلومات او رسم البيانات.

نموذج رقم : 7

I- (2 points)

Répondre, en justifiant, par **vrai** ou **faux**.

1) Pour tout entier naturel n, plus grand ou égale à 5, $C_n^4 < C_n^5$.

2) L'image de l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$ par la fonction f définie sur IR par $f(x) = 2 + e^x$ est l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$.

3) Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Si $\arg(z) = \arg(z')$ alors $z = z'$.

4) Si h(I ; -2) est l'homothétie de centre I et de rapport -2 alors $(h \circ h \circ h)$ est une homothétie de rapport -6.

II- (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

Pour tout point M d'affixe $z \neq -i$, on associe le point M′ d'affixe z′ tel que $z' = \frac{i}{1-iz}$.

Soit A le point d'affixe i.

1) Dans cette partie, soit $z = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

   a) Montrer que $z' = e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

   b) Montrer que OAM' est un triangle équilatéral.

2) a) Vérifier que $\frac{z'-i}{z'} = iz$.

   b) Montrer que $\frac{M'A}{M'O} = MO$ et déduire que si M varie sur le cercle (C) de centre O et de rayon 1, alors le point M′ varie sur une droite parallèle à l'axe de abscisses.

   c) Montrer que $\left(\overrightarrow{M'O}\,;\,\overrightarrow{M'A}\right) = \left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM}\right) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

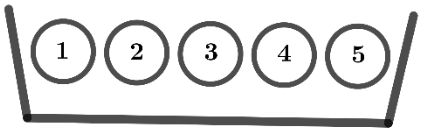
3) Dans cette partie, soit $z = a$ où a est un réel.

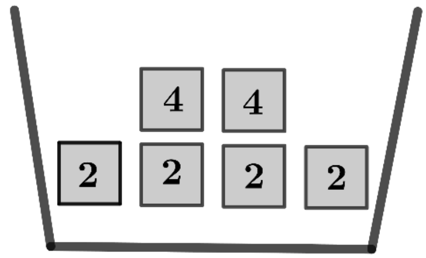
   a) Soit W le point d'affixe $\frac{i}{2}$. Vérifier que $z' - z_W = \frac{-a+i}{2-2a\,i}$.

   b) Montrer que le point M′ varie sur un cercle (C') dont on déterminera le centre et le rayon.

III- (6 points)

On dispose de deux urnes U et V :





- U contient cinq boules portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5.
- V contient quatre cartes portant chacune 2 points et deux cartes portant chacune 4 points.

Un jeu consiste à tirer au hasard une boule de l’urne U :

- Si la boule tirée porte un numéro **pair**, on tire simultanément et au hasard **deux** cartes de V.
- Si la boule tirée porte un numéro **impair**, on tire simultanément et au hasard **trois** cartes de V.

On considère les évènements suivants :

A : « La boule tirée de l’urne U porte un numéro pair »

H : « La somme des points portés par les cartes tirées de l’urne V est égale à 8 ».

1) a) Calculer $P(H/A)$ et en déduire $P(H \cap A)$.

   b) Calculer $P\left(H \cap \overline{A}\right)$ et vérifier que $P(H) = \frac{29}{75}$.

2) Soit l’événement : D « La somme des points portés par les cartes tirées de l’urne V est égale à 10 »

   Montrer que $P(D) = \frac{3}{25}$.

3) La somme des points portés par les cartes tirées de l’urne V est plus grande que 7.

   Calculer la probabilité que la boule tirée de l’urne U porte un numéro pair.

4) Trois joueurs participent à ce jeu. (Chaque fois en remettant la boule tirée à U et les cartes tirées à V).

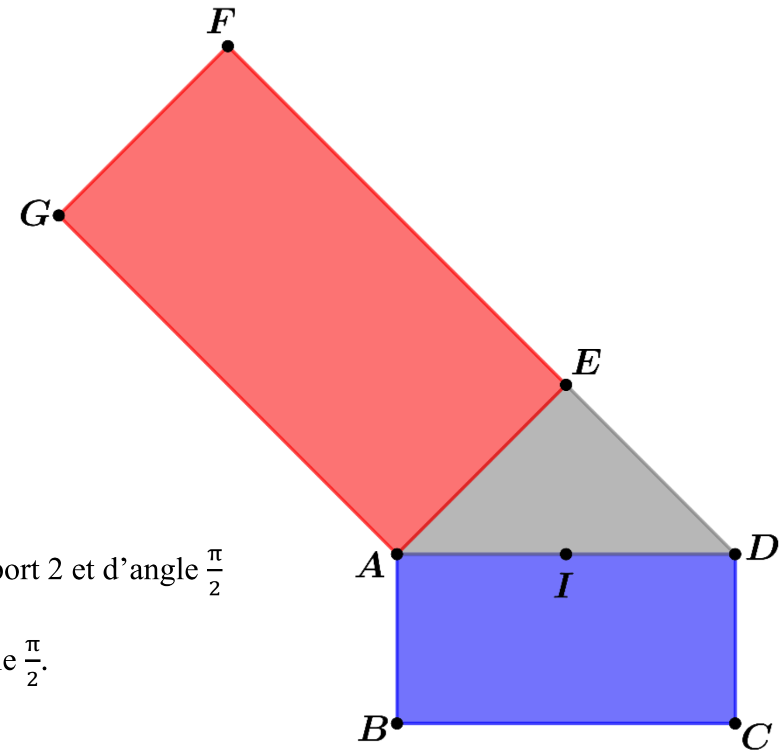
   Calculer la probabilité que le total des points obtenus par les trois joueurs est plus grand

   ou égal à 28.

IV- (6 points)

Dans la figure ci-dessous on donne :

- ABCD est un rectangle direct tel que $AB = 3$ et $AD = 6$.
- ADE est un triangle rectangle isocèle direct en E.
- AEFG est un rectangle direct tel que $AG = 2\ AE$.
- I est le milieu de [AD].



Soit S la similitude de centre A, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

et soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) a) Determiner S(B) et S(E).

   b) En déduire que les droites (BE) et (DG) sont perpendiculaires.

2) a) Determiner R(B) et R(E).

   b) En déduire que les droites (BE) et (AC) sont perpendiculaires.

   c) Montrer que les deux droites (DG) et (AC) sont parallèles.

3) On désigne par M le point d'intersection de droites (DG) et (BE) et par N le point d'intersection de droites (AC) et (BE).

   a) Montrer que (EB) est l'image de (DG) par R.

   b) Déterminer l'image de la droite (EB) par R.

   c) En déduire que R(M) = N et la nature du triangle IMN.

4) Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(I\ ;\ \overrightarrow{ID}\ ,\ \overrightarrow{IE}\right)$.

   a) Écrire la forme complexe de R.

   b) En admet que $z_N = -\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$. Calculer z_M.

   c) En utilisant l'égalité vectorielle $\overrightarrow{DF} = 3\overrightarrow{DE}$, calculer l'affixe du point F.

   d) Montrer que les trois points C, M et F sont alignés.

V- (10 points)

Partie A

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $h(x) = e^x - x$.

1) Dresser le tableau de variations de h.

2) En déduire que pour tout réel x, $e^x - x > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \frac{e^x+x}{e^x-x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un

repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (d) à (C).

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (D) à (C).

3) Vérifier que $f'(x) = \frac{(2-2x)e^x}{(e^x-x)^2}$.

4) Dresser le tableau de variations de f.

5) a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α.

   b) Vérifier que -0,6 < α < -0,5.

6) Écrire une équation de la tangente (t) à (C) au point A d'abscisse 0.

7) Tracer (d), (D) et (C).

Partie C

Soit g la fonction donnée par $g(x) = \ln\left[(f(x))^2 - f(x)\right]$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de g.

2) Déterminer le nombre de racines de l'équation $g(x) = \ln 2$.