Lebanese University
Faculty of Engineering
-Roumieh-

Concours d'Entrée ULFG2
Session 2020
Maths - Bac Libanais

Retirée Par: Social Club ULFG2

ULFGII
Social Club

Ce PDF contient les 4 sessions de Mathématique de l'année 2020

Retirées par: Social Club ULFG2

Test 1

GEOMETRIE ANALYTIQUE

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}\ , \vec{j}\ , \vec{k}\ )$.

On considère le point $A(1 ; 2 ; 3)$**, la droite** (d) : $(x = t - 1 \ ; \ y = t \ ; \ z = -t + 5)$ **où** $t \in IR$ **et les plans** (P) : $2x + y + 3z + 1 = 0$ **,** (Q) : $3x - 2y + z + 12 = 0$ **et** (R) : $x + 2y + 3z = 0$ **.**

1- Le projeté orthogonal de A sur le plan (P) est the point A_1 de coordonnées :

a) $(1 ; -2 ; -3)$.
b) $(-3 ; 0 ; -3)$.
c) $(3 ; -1 ; -2)$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

2- Le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses est le point A_2 de coordonnées :

a) $(1 ; 2 ; 0)$.
b) $(1 ; 0 ; 0)$.
c) $(-1 ; 0 ; 0)$.
d) $(0 ; 2 ; 3)$.

3- Les distances d_1 , d_2 , d_3 de A au plans (P), (Q), (R) respectivement sont telles que :

a) $d_1 = d_2 = 2d_3$.
b) $d_1 = d_2 = 14$ et $d_3 = \sqrt{14}$.
c) $d_1 = d_2 = d_3 = \sqrt{14}$.
d) $d_1 = d_3 = \sqrt{14}$ et $d_2 = \dfrac{22}{\sqrt{14}}$.

4- Un système d'équations paramétriques de la droite d'intersection des plans (Q) et (R) est :

a) $x = m \ ; \ y = 2m + 9 \ ; \ z = -m - 3$ où $m \in IR$.
b) $x = m \ ; \ y = -m + 4.5 \ ; \ z = -m + 3$ où $m \in IR$.
c) $x = m \ ; \ y = m + 4.5 \ ; \ z = -m - 3$ où $m \in IR$.
d) $x = m \ ; \ y = m + 4.5 \ ; \ z = m - 3$ où $m \in IR$.

5- Une équation du plan parallèle à (P) passant par le symétrique de A par rapport au point O est :

a) $2x + y + 3z + 13 = 0$.
b) $2x + y + 3z - 13 = 0$.
c) $2x + y + 3z + 26 = 0$.
d) $x + 2y + 3z - 13 = 0$.

NOMBRES COMPLEXES

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A , B et L d'affixes : $z_A = 5-4i$, $z_B = 6+3i$ et $z_L = 2$; et le cercle (γ) de centre L et de rayon 5 .

6- Une équation du second degré dont les racines sont les affixes de A and B est :

a) $z^2-(11-i)z+42-9i=0$.

b) $z^2+(11-i)z+42-9i=0$.

c) $z^2-(11-i)z+28-9i=0$.

d) $z^2-(11-i)z+42-9i=0$.

7- Le cercle (γ) est l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

a) $z\bar{z}+2z+2\bar{z}-25=0$.

b) $z\bar{z}+z+\bar{z}-21=0$.

c) $z\bar{z}-2z-2\bar{z}-21=0$.

d) $z\bar{z}+2z-2\bar{z}-25=0$.

8- Les points A et B sont tels que :

a) A appartient à (γ) et B est extérieur à (γ).

b) A est intérieur à (γ) et B est extérieur à (γ) .

c) A et B sont intérieurs à (γ).

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

9- Si C est le point d'affixe $1-2i\sqrt{6}$, alors :

a) le symétrique de C par rapport à l'axe des ordonnées appartient à (γ) .

b) le symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses appartient à (γ) .

c) le symétrique de C par rapport au point L appartient à (γ) .

d) le symétrique de C par rapport au point O appartient à (γ) .

10- La mesure de l'angle $(\overrightarrow{LA}\,;\overrightarrow{LB})$ dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ est :

a) $-\dfrac{\pi}{2}$.

b) $-\dfrac{\pi}{3}$.

c) $\dfrac{2\pi}{3}$.

d) $\dfrac{\pi}{2}$.

SUITES

(U_n) , $n \geq 1$, est une suite géométrique telle que $U_3 = -5$ et $U_6 = 40$.

11- $U_{10} =$.

a) 320 .
b) 640 .
c) -640 .
d) -320 .

12- La suite (U_n) est :

a) décroissante .
b) croissante .
c) périodique .
d) non monotone .

(V_n) est la suite de premier terme $V_0 = 2$ telle que , pour tout n dans IN , $V_{n+1} = 1 - \frac{1}{V_n}$.

13- La suite (V_n) est :

a) décroissante .
b) croissante .
c) périodique de période 3 .
d) périodique de période 4 .

14- La suite (V_n) :

a) a une borne supérieure et n'a pas de borne inférieure .
b) a une borne inférieure et n'a pas de borne supérieure
c) est bornée par -1 et 2 .
d) est bornée par $\frac{1}{2}$ et 2 .

15- $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$:

a) est un nombre réel .
b) est égale à $+\infty$.
c) est égale à $-\infty$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

PROBABILITE

Un dé truqué est tel que , quand il est lancé , la probabilité d'avoir un nombre pair est égale à $0{,}6$ **.**

Le dé est lancé 6 fois .

16- La probabilité que chacun des 6 nombres apparaisse une seule fois est égale à :

a) $(0,4)^3 + (0,6)^3$.

b) $20 \times (0,4)^3 \times (0,6)^3$.

c) $6 \times (0,4)^3 \times (0,6)^3$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

Le dé est lancé 5 fois .

17- La probabilité d'avoir exactement 3 nombres pairs est égale à :

a) $10 \times (0,4)^3 \times (0,6)^2$.

b) $(0,4)^2 \times (0,6)^3$.

c) $10 \times (0,5)^2 \times (0,6)^3$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

18- La probabilité d'avoir au moins un nombre impair est égale à :

a) $(0,4)^5$.

b) $1-(0,6)^5$.

c) $1-(0,4)^5$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

Le dé est lancé 3 fois .

19- La probabilité que la somme des trois nombres obtenus est impaire est égale à :

a) $(0,4)\times(0,6)^2$.

b) $(0,4)\times(0,6)^2 + (0,4)^3$.

c) $3\times(0,4)\times(0,6)^2 + 3\times(0,4)^3$.

d) $3\times(0,4)\times(0,6)^2 + (0,4)^3$.

20- La probabilité d'avoir le même nombre est égale à :

a) $(0,4)^3 + (0,6)^3$.

b) $(0,4)^3 \times (0,6)^3$.

c) $3(0,4)^3 + 3(0,6)^3$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

EQUATIONS ET INEQUATIONS

21- L'ensemble des solutions de l'équation $\ell n(x-1)+\ell n(x-3)=3\,\ell n\,2$ est :

a) $]3\,;+\infty[$.
b) $\{-1\,;5\}$.
c) $\{-5\}$.
d) $\{5\}$.

22- L'ensemble des solutions de l'inéquation $2\,\ell n(x-1)-\ell n(5-x)-\ell n\,2\leq 0$ est :

a) $[-3\,;3]$.
b) $[1\,;3]$.
c) $]1\,;\,5]$.
d) aucune des réponses ci-dessus n'est correcte.

23- L'ensemble des solutions de l'équation $\exp\left(\ell n(7-x^2)\right)=x^2-7$ est :

a) ϕ .
b) $\{\sqrt{7}\}$.
c) $\{-\sqrt{7}\,;\sqrt{7}\}$.
d) aucune des réponses ci-dessus n'est correcte.

24- L'ensemble des solutions de l'équation $(\ell n\,x)^2-\ell n\,x=12$ est :

a) $\{-3;4\}$.
b) $\{e^4\}$.
c) $\{e^{-3};e^4\}$.
d) $\{e^3;e^{-4}\}$.

25- L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{2x}-2e^x-3\leq 0$ est :

a) $[-1\,;3]$.
b) $[0\,;3]$.
c) $[1\,;\ell n 3]$.
d) $]1\,;\ell n 3[$.

INTEGRALES

26- $\displaystyle\int_0^{\ell n 2} \frac{e^x}{e^x - 4} dx$ est égale à :

a) $\ell n(1.5)$.

b) $\ell n 2 - \ell n 3$.

c) $\ell n 2 - \ell n 4$

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

27- $\displaystyle\int_e^{1} \frac{dx}{x(\ell n x - 2)}$ est égale à :

a) $\ell n 2$.

b) 2 .

c) $-\ell n 2$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

28- $\displaystyle\int_2^{-2} x e^{-x^4} dx$ est égale à :

a) $2e^{16}$.

b) 0 .

c) $-2e^{16}$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

La fonction f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_1^{x} (\ell n\, t)^6 dt$.

29- La fonction f est :

a) positive sur $]0\,;+\infty[$.

b) négative sur $]0\,;+\infty[$.

c) positive sur $]0\,;1[$ et négative sur $]1\,;+\infty[$.

d) négative sur $]0\,;1[$ et positive sur $]1\,;+\infty[$.

30- La fonction f est :

a) décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

b) croissante sur $]0\,;+\infty[$.

c) croissante sur $]0\,;1[$ et décroissante sur $]1\,;+\infty[$.

d) décroissante sur $]0\,;1[$ et croissante sur $]1\,;+\infty[$.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$

(E) **est l'équation différentielle** $3y'+2y-6=0$ **.**

31- Si f est une solution de (E) alors f' est une solution de l'équation différentielle :

a) $3y'-2y=0$.
b) $3y'+2y=0$.
c) $3y''+2y'-6=0$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

32- La solution y de (E) qui vérifie $y(0)=1$ est telle que :

a) $y(x)=3e^{-\frac{2}{3}x}+3$.
b) $y(x)=-2e^{\frac{2}{3}x}-3$.
c) $y(x)=-2e^{-\frac{2}{3}x}+3$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

33- La fonction g est la solution de (E) dont la courbe représentative (γ) passe par O .
Une équation de la tangente en O à (γ) est :

a) $y=x+1$.
b) $y=-2x$.
c) $y=2x$.
d) $y=2x+3$.

(F) **est l'équation différentielle** $(x^2+3)y'-xy=0$ **.**

34- La solution y de (F) qui vérifie $y(1)=4$ est telle que :

a) $y(x)=3\ell n\, x+2x+2$.
b) $y(x)=2\sqrt{x^2+3}$.
c) $y(x)=\sqrt{x^2+3}-3x$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

35- Soit (C) la courbe représentative de la solution générale de (F).
La pente de la tangent à (C) au point d'intersection avec l'axe des ordonnées est égale à :

a) 3 .
b) -3 .
c) 0 .
d) 1 .

FONCTIONS

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$

36- La fonction f définie sur IR par $f(x)=\begin{cases} x^2-x-1 & si \quad x\le 1 \\ \sqrt{2x-1}-2 & si \quad x>1 \end{cases}$ est :

a) dérivable et non continue en 1 .
b) continue et non dérivable en 1 .
c) continue et dérivable en 1 .
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

La fonction h est définie sur $IR-\{0\}$ par $h(x)=\dfrac{e^x-2}{e^x-1}$.

37- $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\ell_1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\ell_2$ où :

a) $\ell_1=-\infty$ et $\ell_2=+\infty$.
b) $\ell_1=2$ et $\ell_2=1$.
c) $\ell_1=1$ et $\ell_2=2$.
d) aucune des réponses ci-dessus n'est correcte.

38- $\lim\limits_{x\to0^-} h(x)=L_1$ et $\lim\limits_{x\to0^+} h(x)=L_2$ où :

a) $L_1=+\infty$ et $L_2=-\infty$.
b) $L_1=+\infty$ et $L_2=0$.
c) $L_1=0$ et $L_2=-\infty$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

Le tableau de variations ci-contre est celui d'une fonction dérivable u définie sur IR.
Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=u(x)\times e^x$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$u(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

39- f est dérivable et $f'(x)=$:

a) $u'(x)\times e^x$.
b) $\left(u'(x)-u(x)\right)e^x$.
c) $\left(u'(x)+u(x)\right)e^x$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

40- Le sens de variation de f dans les intervalles $I=]-\infty\,;\,0[$ et $J=]0\,;\,1[$ est tel que :

a) f est décroissante dans I et croissante dans J.
b) f est croissante dans I et décroissante dans J.
c) f est croissante dans chacun des intervalles I et J.
d) f est croissante dans I et son sens de variation dans J ne peut pas être déterminé .

La fonction f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x\left(\ell n^2 x+1\right)$.
Soit (C) la courbe représentative de f.

41- (C) est tangente à la droite (d) d'équation $y=x$ au point A de coordonnées :

a) $(e^{-1}\,;e^{-1})$.
b) $(1\,;1)$.
c) $(e^{-2}\,;e^{-2})$.
d) $(e\,;2e)$.

42- f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle :

a) $]0\,;+\infty[$.
b) $]-\infty\,;0[$.
c) $[0\,;+\infty[$.
d) $]-\infty\,;+\infty[$.

43- La fonction g est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Soit (γ) la courbe représentative de g.
Le point commun à (γ) et (C) a pour coordonnées :

a) $(e^{-1}\,;e^{-1})$.
b) $(1\,;1)$.
c) $(-1\,;-1)$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

La fonction F est définie sur IR par $F(x)=e^x-e^{-x}-2x$.
Soit (L) la courbe représentative de F.

44- La fonction F est dérivable et $F'(x)=$:

a) $e^x-e^{-x}-2$.
b) $2e^x-2$.
c) $e^{-x}(e^x-1)^2$.
d) $e^x(e^{-2x}-e^{-x}+1)$.

45- La droite (Δ) d'équation $y=-2x-4$ coupe (L) au(x) point(s) d'abscisse(s) :

a) $-2-\sqrt{5}$ et $-2+\sqrt{5}$.
b) $\ell n(-2+\sqrt{5})$ et $\ell n(-2-\sqrt{5})$.
c) $\ell n(\sqrt{5}-2)$ et $-\ell n(\sqrt{5}-2)$.
d) $\ell n(\sqrt{5}-2)$.

TRANSFORMATIONS

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

f est la transformation définie par la relation complexe $z' = -2z + 4 + i$;

g est la transformation définie par la relation complexe $z' = (1-i)z + 1 + 2i$.

46- L'image par f du cercle de centre O et de rayon 3 est :

a) Le cercle de centre $(-2\ ;\ 0)$ et de rayon 2 .

b) Le cercle de centre $(1\ ;\ 4)$ et de rayon 6 .

c) Le cercle de centre $(\frac{4}{3}\ ;\ \frac{1}{3})$ et de rayon 6 .

d) Le cercle de centre $(4\ ;\ 1)$ et de rayon 6 .

47- L'aire , en unités d'aire , de l'image par g d'un cercle de rayon 3 est égale à :

a) 9π .

b) 18π .

c) $9\sqrt{2}\,\pi$.

d) 81π .

48- $f \circ g$ est une similitude dont le rapport et l'angle sont respectivement égaux à :

a) $2\ ;\ -\frac{\pi}{4}\ rad$.

b) $2\sqrt{2}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\ rad$.

c) $-2\sqrt{2}\ ;\ -\frac{\pi}{4}\ rad$.

d) $2\sqrt{2}\ ;\ \frac{\pi}{4}\ rad$.

49- $g \circ f$ est une similitude dont le rapport et l'angle sont respectivement égaux à :

a) $2\sqrt{2}\ ;\ -\frac{3\pi}{4}\ rad$.

b) $2\sqrt{2}\ ;\ \frac{\pi}{4}\ rad$.

c) $2\sqrt{2}\ ;\ -\frac{\pi}{4}\ rad$.

d) $2\sqrt{2}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\ rad$.

50- $f \circ g(O) = A$ et $g \circ f(O) = B$ où :

a) $A(2\ ;-3)$ et $B(2\ ;-3)$.

b) $A(6\ ;-1)$ et $B(6\ ;-1)$.

c) $A(2\ ;-3)$ et $B(6\ ;-1)$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

Corrigé Maths 2020

Social Club ULFGII

Préparé par: Jason Abdallah
Gaëlle Ghanem

Test 1

Géométrie Analytique

$A(1;2;3)$

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \\ z = -t + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (P): 2x + y + 3z + 1 = 0 \\ (Q): 3x + 2y + z + 12 = 0 \\ (R): x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

1) Le vecteur $\vec{N} \perp$ à P est $\vec{N}(2;1;3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{A_1A}$ colinéaire avec $\vec{N}$ et $A_1 \in (P)$

Soit $A_1(x;y;z)$ $\quad \overrightarrow{AA_1}(x-1;y-2;z-3)$

$$\overrightarrow{AA_1} = K.\vec{N} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2K \\ y - 2 = K \\ z - 3 = 3K \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 2K + 1 \\ y = K + 2 \\ z = 3K + 3 \end{cases}$$

$$2(2K+1) + (K+2) + 3(3K+3) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{K = -1} \longrightarrow A_1(-1;1;0) \quad \text{(d)}$$

Autre méthode:

On essaie toutes les coordonnées.

On a $(1;-2;-3) \notin (P)$

et $(-3;0;-2)$

essayons $A_1(3;-1;-2)$

$\overrightarrow{AA_1}(2;-3;-5) \neq K\vec{N}$ alors (d).

2) Projection orthogonale sur l'axe des abscisses:

$\Rightarrow y = 0 \quad z = 0$ et $x_{A_2} = x_A = 1$

$\Rightarrow A_2(1;0;0)$ (b)

3) $d(A;P) = \dfrac{|2\times 1 + 1\times 2 + 3\times 3 + 1|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}} = \sqrt{14}$

de même $d(A;Q) = \sqrt{14}$ $\Rightarrow d_1 = d_2 = d_3 = \sqrt{14}$

$d(A;R) = \sqrt{14}$ c

4) $\begin{cases} (Q): 3x - 2y + z + 12 = 0 & [1] \\ (R): x + 2y + 3z = 0 & [2] \\ x = m \end{cases}$

$[1]+[2]: 4x + 4z + 12 = 0$

$x + z + 3 = 0$

dans [2]:

$m + 2y - 3m - 9 = 0$ $\begin{cases} x = m \\ y = m + 3/2 \\ z = -m - 3 \end{cases}$ c

5) Symétrique de A par rapport à O $\rightarrow A'(-1;-2;-3)$

$(P') \parallel (P) \Rightarrow$ m̂ vecteur $\perp$ $\vec{N}(2;1;3)$

$(P'), 2x + y + 3z + d = 0$ avec $A' \in (P')$

$\Rightarrow$ les coordonnées de A' vérifient l'équation de (P').

$\Rightarrow 2\times(-1) + (-2) + 3(-3) + d = 0$

$\Rightarrow \boxed{d = 13}$

$\Rightarrow 2x + y + 3z + 13 = 0$ a

Nombres complexes

$z_A = 5 - 4i$; $z_B = 6 + 3i$; $z_L = 2$

(γ) de centre L et de rayon 5

6) Les racines sont z_A et z_B

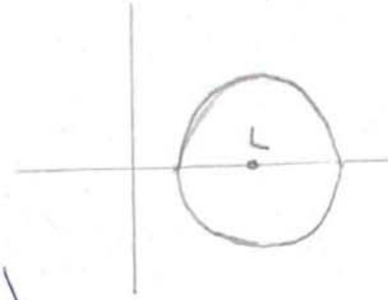
$\Rightarrow (z - z_A)(z - z_B) = 0 \rightarrow (z - 5 + 4i)(z - 6 - 3i) = 0$

$z^2 + (-5 + 4i - 6 - 3i)z + 30 + 15i - 24i + 12 = 0$

$z^2 - (11 - i)z + 42 - 9i = 0$ d

③

7) (γ) de centre L et de rayon 5



$$(x-2)^2 + y^2 - 25 = 0$$

$$x^2 + 4 - 4x + y^2 - 25 = 0$$

$$z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} - 21 = 0 \quad ©$$

$$\left(x^2+y^2 = z\bar{z} \text{ et } z+\bar{z} = x+iy+x-iy = 2x \right.$$
$$\left. \Rightarrow -4x = -2z - 2\bar{z} \right)$$

8) $z_A - z_L = 5-4i-2 = 3-4i \longrightarrow r = \sqrt{9+16} = 5$

donc A sur le cercle

$z_B - z_L = 6+3i-2 = 4+3i \longrightarrow r = \sqrt{16+9} = 5$

donc B sur le cercle

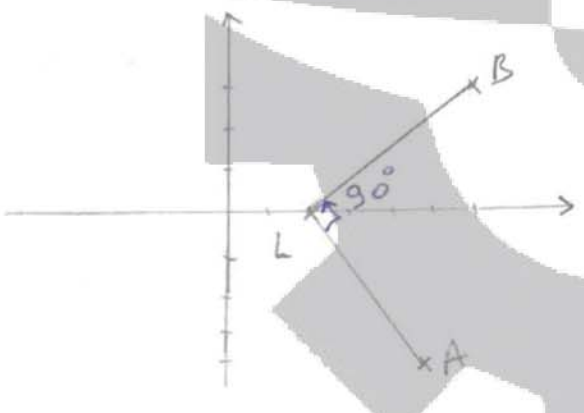
$\longrightarrow$ ⓓ

9) $z_C = 1-2i\sqrt{6}$

$z_C - z_L = -1-2i\sqrt{6}$ $\quad r = \sqrt{1+4\times 6} = 5 \Rightarrow C \in L$

$\Rightarrow$ le sym de C p/r à L $\in (\gamma)$ ©

10)



ⓓ $\frac{\pi}{2}$

Suites

$U_n : n \geq 1$ $\quad U_3 = -5$ et $U_6 = 40$

géométrique $\Rightarrow$ $U_6 = U_3 \times q^{6-3}$

$40 = -5 \times q^3 \Rightarrow q = \sqrt[3]{-8} = -2$

$$\Rightarrow U_n = (-5)(-2)^{n-3}$$

11) $U_{10} = (-5)(-2)^7 = 640$ ⓑ

12) $U_7 = 40 \times (-2) = -80$

$U_8 = -80 \times (-2) = 160$

$\Rightarrow$ non monotone ⓓ

* (V_n). $V_0 = 2$ et $V_{n+1} = 1 - \frac{1}{V_n}$

$$\begin{cases} V_1 = 1 - 1/2 = 1/2 \\ V_2 = 1 - 2 = -1 \\ V_3 = 1 + 1 = 2 \\ V_4 = 1 - 1/2 = 1/2 \end{cases}$$

13) $V_0 = V_3$ donc périodique de période 3
$V_1 = V_4$ ⓒ

14) bornée par -1 et 2 ⓒ

15) N'a pas de limite donc aucune des réponses proposés $\longrightarrow$ ⓓ

Probabilité

avoir un nombre pair $\rightarrow 0{,}6 \longrightarrow 0{,}2$ $(2, 4, 6)$
impair $\rightarrow 0{,}4 \longrightarrow 2/15$ $(1, 3, 5)$

* 6 fois

16) aucune des 3 propositions ⓓ
$6 \times (0{,}2)^3 \times \left(\frac{2}{15}\right)^3$

* 5 fois

17) $10 \times (0{,}4)^2 \times (0{,}6)^3$ ⓓ

18) $1 - (0{,}6)^5$ ⓑ

* 3 fois

19) Somme impaire $\Rightarrow$ 3 impairs ou 1 impair ⓓ
$(0{,}4)^3 + 0{,}4 \times (0{,}6)^2 \times 3$

20) $\left(\frac{2}{15}\right)^3 + (0{,}2)^3$ ⓓ

Equations et inéquations

21) $\ln(x-1)+\ln(x-3)=3\ln 2$

$\ln\left((x-1)(x-3)\right)=\ln 8$

$(x-1)(x-3)=8$

$x^2-4x+3=8 \longrightarrow x_1=5$ et $x_2=-1$

$\boxed{\begin{matrix} x\neq 1 \\ x\neq 3 \end{matrix}}$

b

22) $2\ln(x-1)-\ln(5-x)-\ln 2\leq 0$

$\ln\left(\dfrac{(x-1)^2}{5-x}\right)\leq \ln 2$ ln ↗ donc l'ordre ne change pas

$\dfrac{(x-1)^2}{5-x}-2\leq 0$

$\dfrac{(x-1)^2+2(x-5)}{(5-x)}\leq 0 \longrightarrow (x-1)^2+2x-10\leq 0$

$x^2-2x+1+2x-10\leq 0$

$x^2-9\leq 0 \quad \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-3 \end{cases}$

$\boxed{\begin{matrix} x\neq 5 \\ x\neq 1 \end{matrix}}$

$\Rightarrow [-3;3]-\{1\}$

donc d

23) $e^{\ln(7-x^2)}=x^2-7$ $\qquad 7-x^2\neq 0$

$x^2\neq 7 \longrightarrow x\neq -\sqrt{7}$, $x\neq\sqrt{7}$

$7-x^2=x^2-7$

$2x^2=14 \longrightarrow x=\pm\sqrt{7}$

$\mathbb{R}-\{-\sqrt{7};\sqrt{7}\}$ d

24) $(\ln x)^2-\ln x-12=0$ c

Soit $t^2-t-12=0$ avec $t\in\mathbb{R}$

$t=4$ et $t=-3 \longrightarrow \ln x=4$ et $\ln x=-3$

$x=e^4 \qquad x=e^{-3}$

25) $e^{2x}-2e^x-3\leq 0$ $\qquad e^x\geq 0$

$t^2-2t-3\leq 0$ $\qquad t>0$

t		-1		3	
	$+$	0	$-$	0	$+$

$-1\leq t\leq 3$

donc $0\leq e^x\leq 3$

$1\leq x\leq \ln 3$

c

Intégrales

26) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x-4}\,dx$ posons $u = e^x - 4 \rightarrow du = e^x dx$
$dx = e^{-x} du$

$$\int \frac{e^x}{e^x-4}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = [\ln(u)] = [\ln(|e^x-4|)]$$

bornes : $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x-4}\,dx = \left[\ln(|e^x-4|)\right]_0^{\ln 2} = \ln 2 - \ln 3$ (b)

27) $\int_e^1 \frac{dx}{x(\ln x - 2)}$ posons $u = \ln x - 2 \rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx$
$dx = x\,du$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x-2)} = \int \frac{1}{u}\,du = [\ln u] = [\ln(|\ln x - 2|)]$$

bornes : $\int_e^1 \frac{dx}{x(\ln x-2)} = \left[\ln(|\ln x - 2|)\right]_e^1 = \ln 2$ (a)

28) $\int_2^{-2} x e^{-x^4}\,dx$

Soit $f(x) = xe^{-x^4}$
$f(-x) = -xe^{-(-x)^4} = -xe^{-x^4} = -f(x)$ } f impaire $\Rightarrow \int_2^{-2} f(x)\,dx = 0$
centré en 0

(b)

$\star$ $]0;+\infty[$ / $f(x) = \int_1^x (\ln t)^6\,dt$

30) $f'(x) = (\ln t)^6 \geq 0 \longrightarrow$ fonction croissante $\rightarrow$ (b)

29) Pour $x = 1$ $f(x) = 0$
or fct croissante $\longrightarrow$ pour $x < 1$ $f(x) < 0$
et pour $x > 1$ $f(x) > 0$

$\rightarrow$ (d)

Equations différentielles

$(E) : 3y' + 2y - 6 = 0 \longrightarrow 3y' = 6 - 2y \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3}y = -\frac{2}{3}(y-3)$

$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}(y-3) \longrightarrow \int \frac{dy}{-2/3\,(y-3)} = \int dx$

$\longrightarrow -3/2 \int \frac{dy}{y-3} = -3/2 \ln(y-3) = x \ln C$

$\longrightarrow \ln(y-3) = -2/3\, x \ln C$

$\longrightarrow e^{\ln(y-3)} = y - 3 = e^{-2/3\, x \ln C} = C e^{-2/3 x}$

$\longrightarrow \boxed{y = C e^{-2/3 x} + 3}$

31) $f = C e^{-2/3 x} + 3$

$y = f' = -2/3\, C e^{-2/3 x}$ / $y' = f'' = 4/9\, C e^{-2/3 x}$ / $y'' = f''' = -8/27\, C e^{-2/3 x}$

essayons a, b et c :

ⓐ $3(4/9\, C e^{-2/3 x}) - 2(-2/3\, C e^{-2/3 x})$
$= 4/3\, C e^{-2/3 x} + 4/3\, C e^{-2/3 x} \neq 0$

ⓑ $4/3\, C e^{-2/3 x} - 4/3\, C e^{-2/3 x} = 0$

ⓒ $3\left(-\frac{8}{27} C e^{-2/3 x}\right) + 2\left(\frac{4}{9} C e^{-2/3 x}\right) - 6 \neq 0$

$\longrightarrow$ réponse ⓑ

32) pour $y(0) = 1$:

$C + 3 = 1$

$\boxed{C = -2}$: $y = -2 e^{-2/3 (x)} + 3$ ⓒ

33) (σ) passe par O

$\longrightarrow$ pour $x = 0$, $y = 0$

$\longrightarrow C e^{0} + 3 = 0 \longrightarrow \boxed{C = -3}$ donc $y = -3 e^{-2/3 x} + 3 = g$

l'équation de la tangente à (σ) en O. $y = g'(0)(x - 0) + g(0)$
$= g'(0)\, x$

$g'(x) = -3 \times -\frac{2}{3} e^{-2/3 x} = 2 e^{-2/3 x}$

$\longrightarrow g'(0) = 2 \longrightarrow \boxed{y = 2x}$ ⓒ

* (F) : $(x^2+3)y' - xy = 0 \rightarrow (x^2+3)y' = xy$

$\rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2+3}$

$\rightarrow \int \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \int \frac{x}{x^2+3}$

$\rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2+3}\,dx = \ln y$

$\rightarrow \ln y = \frac{1}{2} \ln(x^2+3) = \ln (x^2+3)^{1/2} \times C$

$\rightarrow e^{\ln y} = y = e^{\ln(\sqrt{x^2+3})} = C\sqrt{x^2+3}$

$\rightarrow \boxed{y = C\sqrt{x^2+3}}$

34) $y(1) = 4$

$C\sqrt{1+3} = 2C = 4$

$\rightarrow \boxed{C=2} \rightarrow y = 2\sqrt{x^2+3}$ (b)

35) ∩ avec l'axe des ordonnées $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = C\sqrt{3}$ ord du pt d'∩

$y' = C \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \rightarrow y'(0) = 0 \rightarrow$ pente nulle (c)

Fonctions

36) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{2x-1} - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

pour $x = 1$: $f(1) = 1^2 - 1 - 1 = -1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{2x-1} - 2 = \sqrt{2\times1-1} - 2 = -1$ } continue

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{2x-1} - 2 + 1}{x-1} = \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{x-1} = 1$ dérivable $\rightarrow$ (c)

* $\mathbb{R} - \{0\}$ $h(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$

37) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x-2}{e^x-1} = \frac{(e^x-1) - 1}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{\infty}^{0} = 1 = l_2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x - 2}{e^x - 1} = \frac{0-2}{0-1} = 2 = l_1$ $\rightarrow$ (b)

38) $L_1 = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x - 2}{e^x - 1} = \frac{1 - 2}{1^- - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

$L_2 = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 2}{e^x - 1} = \frac{1 - 2}{1^+ - 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ (a)

39)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$u(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$
u'		$-$	0	$+$			

$f(x) = u(x)e^x$

$f'(x) = u'(x)e^x + u(x)e^x$

$= e^x\left[u'(x) + u(x)\right]$

$\to$ (c)

40) e^x est ↗ le long de $]-\infty ; +\infty[$

$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

le sens de la dérivée dépend du signe de $u(x) + u'(x)$ car $e^x > 0 \ \forall x$.

	$-\infty$	0	1
$u(x)$	$-$		$-$
$u'(x)$	$-$		$+$
$u(x) + u'(x)$	$-$		$+$

(a)

$*$ $]0 ; +\infty[$ $f(x) = x(\ln^2 x + 1)$ (c)

41) $(d) : y = x$

$x = (\ln^2 x + 1)x \to x\ln^2 x = 0$ or $x \neq 0$

$\to \ln^2 x = 0 \to \boxed{x = 1}$

Donc $A(1 ; 1)$ (b)

42) $f(]0 ; +\infty[) = [f(0) ; f(+\infty)] =]0 ; +\infty[$

$f(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

$*$ $]0 ; +\infty[$ $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

43) $g(x) = \frac{1}{f(x)} = f(x) \to f^2(x) = 1 \to x^2(\ln^2 x + 1)^2 = 1$

$\to x = 1 \to y = 1 \to$ (b)

44) $\mathbb{R}$ / $f(x) = e^{x} - e^{-x} - 2x$ (L)

$f'(x) = e^{x} + e^{-x} - 2 = e^{-x}(e^{2x} + 1 - 2e^{x}) = e^{-x}(e^{x} - 1)^2$ (c)

45) $y = -2x - 4$ (Δ)

$(\Delta) \cap (L) : \cancel{-2x} - 4 = e^{x} - e^{-x} \cancel{-2x}$

$e^{x} - e^{-x} = -4 \to e^{x} - e^{-x} + 4 = 0$

$\to e^{-x}(e^{2x} - 1 + 4e^{x}) = 0$

$e^{-x} \neq 0$ et $t^2 + 4t - 1 = 0$ avec $t = e^{x} > 0$

$\begin{cases} t = -2 + \sqrt{5} & \text{acceptable} \\ t = \underbrace{-2 - \sqrt{5}}_{<0} & \text{inacceptable} \end{cases}$

$\to -2 + \sqrt{5} = e^{x}$

$x = \ln(-2 + \sqrt{5}) \to$ (d)

Transformations

f: $z' = \underbrace{-2}_{<0}z + 4 + i$ / homothétie de centre $\frac{b}{1-a} = \frac{4+i}{1+2} = \frac{4+i}{3}$

g: $z' = (1-i)z + 1 + 2i$ / rotat° de centre $\frac{b}{1-a} = \frac{1+2i}{1-1+i} = \frac{1+2i}{i}$

$= -i + 2$

46) $z = z_0$ et $z' = z_0'$

$z' = -2 \times 0 + 4 + i \longrightarrow (4; 1)$

$= 4 + i$

par homothétie $\longrightarrow$ $OM' = R' = |k| \times OM = \overset{2}{|k|} \times \overset{3}{R} = 6 =$ rayon

$\to$ (d)

47) C'est une rotation donc le rayon reste le m̂

$\longrightarrow A = \pi \times R^2 = \pi \times 3^2 = 9\pi \longrightarrow$ (a)

48) $f \circ g = f(g(z)) = -2\left[(1-i)z + 1 + 2i\right] + 4 + i$ ⑪

$= -2z + 2iz - 2 - 4i + 4 + i$

$= z(-2+2i) + 2 - 3i$

homothétie o rotation = similitude de rapport $= |-2+2i| = 2\sqrt{2}$

et d'angle : $\arg(-2+2i) = -\pi/4 = 3\pi/4 \ [2\pi]$ (b)

49) $g \circ f = g(f(z)) = (1-i)(-2z + 4 + i) + 1 + 2i$

$= (-2+2i)z - i + 6$

rotation o homothétie = similitude de rapport $= |-2+2i|$ module $= \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

et d'angle

$\arg(-2+2i) = \arctan\left(\frac{-2}{2}\right) = -\pi/4$

(c)

50) $f \circ g(O) = A$ avec $O : z = 0$

$g \circ f(O) = B$

$f \circ g(O) \longrightarrow 2 - 3i = A$

$g \circ f(O) \longrightarrow -i + 6 = B$

$\longrightarrow A(2 ; -3)$, $B(6 ; -1)$ (c)

Fin

Social Club ULFG II

Gaëlle Ghanem et Jason Abdallah

Test 2

GEOMETRIE ANALYTIQUE

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1; -2; -1)$, $B(0; -1; 0)$, $C(-2; -1; 1)$, $D(-3; 4; 5)$ **et les droites :**
(d) : $(x = 2t+1 \;;\; y = t-1 \;;\; z = -t)$ **où** $t \in IR$ **;**
(d') : $(x = -2m \;;\; y = -m+3 \;;\; z = m+1)$ **où** $m \in IR$**.**

1- Une équation du plan déterminé par A, B et C est :
- a) $x-2y+3z-2=0$.
- b) $x-y+1=0$.
- c) $x-y+2z-1=0$.
- d) $x+y+2z-1=0$.

2- Une équation du plan passant par D et perpendiculaire à (d) est :
- a) $2x+y-z-7=0$.
- b) $2x+y-z+7=0$.
- c) $x-y-z+6=0$.
- d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

3- Le volume, en *unités de volume*, du tétraèdre $ABCD$ est égal à :
- a) 2.
- b) 3.
- c) $\frac{2}{3}$.
- d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

4- Les droites (d) et (d') sont :
- a) sécantes.
- b) confondues.
- c) parallèles.
- d) non coplanaires.

5- Soit (S) le plan d'équation $x-y+2z+10=0$.
Un systeme d'équations paramétriques de la droite passant par D et parallèle aux plans (xOy) et (S) est :
- a) $(x = \lambda-3 \;;\; y = \lambda+4 \;;\; z = \lambda+5)$ où $\lambda \in IR$.
- b) $(x = \lambda \;;\; y = \lambda \;;\; z = 0)$ où $\lambda \in IR$.
- c) $(x = \lambda-3 \;;\; y = \lambda \;;\; z = 5)$ où $\lambda \in IR$.
- d) (($x = \lambda-3 \;;\; y = \lambda+4 \;;\; z = 5$) où $\lambda \in IR$.

NOMBRES COMPLEXES

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère le nombre complexe $a = e^{2\theta i} - 1$ **où** $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ **.**

6- Le conjugué de a est :

a) $e^{-2\theta i} + 1$.

b) $e^{2\theta i} + 1$.

c) $e^{-2\theta i} - 1$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

7- Le nombre complexe $z = a + a^2 + a^3 + \overline{a} + \overline{a}^2 + \overline{a}^3$ est :

a) un imaginaire pur.

b) un nombre réel .

c) un nombre réel négatif .

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

8- Le module de a est égal à :

a) $2i\sin\theta$.

b) $-2\sin\theta$.

c) $2\cos\theta$.

d) $2\sin\theta$.

Soit $b = a + 1$.

9- Si $\theta = -\frac{\pi}{6}$, alors :

a) Les arguments de $\overline{b}$, ib et $(ib)^3$ dans $[0 ; \pi]$ sont les mesures des angles d'un triangle semi équilatéral .

b) $(b)^{2022}$ est un nombre réel positif .

c) $ib \times b^2 \times \overline{b} = -b$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

10- Si $\theta = -\frac{\pi}{3}$, alors :

a) $b^3 = 1$ et $1 + b + b^2 = \overline{b}$

b) a est le second terme de la suite (z_n) de premier terme $z_0 = b$ telle que $z_{n+1} = z_n - |z_n|$.

c) La somme de trois termes consécutifs de la suite géométrique b^n est égale à 1 .

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

SUITES

On considère la suite (U_n) de premier terme $U_0 = a \neq -1$ telle que , pour tout $n \geq 0$, $U_{n+1} = \dfrac{4U_n}{U_n + 1}$.

11- La suite (U_n) est constante si et seulement si $a =$:

a) 2 .
b) 1 .
c) 3 .
d) 0 or 3 .

12- Si $a = 1$, la suite (U_n) est :

a) strictement croissante .
b) strictement décroissante .
c) périodique .
d) non monotone.

13- La suite (V_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $V_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$:

a) n'a pas une limite déterminée .
b) converge vers 1 .
c) converge vers 0 .
d) diverge vers $+\infty$.

14- Soit $S_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \cdots\cdots\cdots + \dfrac{n-1}{n^2} + \dfrac{n}{n^2}$. $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n =$

a) 0 .
b) $\dfrac{1}{2}$.
c) e^2 .
d) 1

La suite (W_n) est définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $W_n = \ell n(\dfrac{n}{n+1})$.

15- Soit $L_n = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots\cdots + W_n$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n =$

a) 0 .
b) -1 .
c) $-\infty$.
d) e .

PROBABILITE

Une urne contient 10 boules , indiscernables au toucher , dont 6 sont bleues et 4 sont rouges. On tire au hasard une boule de l'urne puis , *sans la replacer* , on tire une autre boule .

16- La probabilité que les deux boules soient de même couleur est égale à :

a) $(0{,}4)^2 + (0{,}6)^2$

b) $(0{,}4) \times (0{,}3) + (0{,}6) \times (0{,}5)$

c) $\frac{1}{3}$.

d) $\frac{7}{15}$.

17- La probabilité que la seconde boule soit bleue sachant que la première est rouge est égale à :

a) $(0,4) \times (0,6)$.

b) $\frac{2}{3}$.

c) $\left(\frac{4}{10}\right) \times \left(\frac{6}{9}\right)$

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

18- La probabilité que la première boule soit rouge et la seconde boule soit bleue est égale à :

a) $(0,4) \times (0,6)$.

b) $2 \times (0,4) \times (0,6)$.

c) $\frac{4}{15}$.

d) $0,5$.

19- La probabilité que la seconde boule soit rouge est égale à :

a) $0{,}4$.

b) $\frac{1}{3} + \frac{4}{9}$.

c) $\frac{1}{3}$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

20- La probabilité que la première boule soit rouge sachant que la seconde boule est rouge est égale à :

a) $\frac{1}{3}$.

b) $\frac{1}{3} + \frac{4}{9}$.

c) $0,5$.

d) $0,4$.

EQUATIONS ET INEQUATIONS

21- L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ell n(x-1)+\ell n(x-3)\leq 3\,\ell n 2$ est :

a) $]3\,;+\infty[$.

b) $[-1\,;5]$.

c) $]3\,;\,5]$.

d) $[3\,;5]$.

22- L'ensemble des solutions de l'équation $2\,\ell n(x-1)-\ell n(5-x)=\ell n 2$ est :

a) $\{-3\,;3\}$.

b) $\{3\}$.

c) $\{4\}$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

23- L'ensemble des solutions de l'équation $\exp\left(\ell n(4-x^2)\right)=3(x+2)$ est :

a) $\{-2\,;-1\}$.

b) $\{-2\}$.

c) $\{-1\}$.

d) aucune des réponses ci-dessus n'est correcte.

24- L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ell n(4-\sqrt{4-x})<\ell n 2$ est :

a) $[-12\,;4]$.

b) $]-12\,;4[$.

c) $]-12\,;0[$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

25- L'ensemble des solutions de l'inéquation $(\ell n x-1)(x+1)<0$ est :

a) $[-1\,;e]$.

b) $]-\infty\,;\,-1]\cup[e\,;+\infty[$.

c) $]-\infty\,;e[$.

d) $]0\,;e[$.

INTEGRALES

26- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx$ est égale à :

a) -0.5.
b) 1.
c) $\sqrt{3}$.
d) 0.5.

27- $\displaystyle\int_1^{e} \frac{1}{x(3-2\ell n x)^2} dx$ est égale à :

a) $\frac{1}{3}$.
b) $-\frac{1}{3}$.
c) $-\ell n 3$.
d) aucune des réponses ci-dessus n'est correcte.

28- $\displaystyle\int_2^{-2} x e^{x} dx$ est égale à :

a) 0.
b) $e^2 - 3e^{-2}$.
c) $-(e^2 + 3e^{-2})$.
d) $e^2 + 3e^{-2}$.

29- Les intégrales $I = \displaystyle\int_e^{1} x(\ell n x - 2)^5 dx$ et $J = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x \cos x}{x(2+\cos x)^2} dx$ sont telles que :

a) $J < 0 < I$.
b) $I < 0$ et $J < 0$.
c) $I > 0$ et $J > 0$.
d) $I < 0 < J$.

30- La fonction f est définie sur IR par $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2-1} \sqrt{1+t^2}\, dt$; $f'(x) =$

a) $\sqrt{1+(x^2-1)^2}$.
b) $2x\sqrt{1+(x^2-1)}$.
c) $2x\sqrt{1+(x^2-1)^2}$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$

(E) **est l'équation différentielle** $y' + y - 2x = 0$.

31- Si f est une solution de (E) alors :

a) $f'(0) = f(0)$.
b) $f(2) = 4 - f'(2)$.
c) $f'(-1) + 1 = f(-1)$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

32- La solution de (E) dont la courbe représentative passe par le point O est définie par :

c) $y = x - 2 + 2e^{-x}$.
b) $y = x - 2e^{x-1}$.
c) $y = 2x - 2 + 2e^{-x}$.
d) aucune des réponses ci-dessus n'est correcte.

33- La solution de (E) satisfaisant $y(0) \times y'(0) = -1$ est :

a) $y = x - 1 + 2e^{-x}$.
b) $y = 2x - 2e^{x}$.
c) $y = 2x - 2 + 3e^{-x}$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

(F) **est l'équation différentielle** $y'' + 4y = 0$.

34- La solution de (F) telle que $y(0) = 2$ et $y'(0) = -2$ est définie par :

a) $y = 2\cos(2x) - \sin(2x)$.
b) $y = 2\cos(x) - 2\sin(x)$.
c) $y = 2\cos(2x)$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

35- L'ensemble des solutions de (F) telles que $y(0) = 1$ est définie par :

a) $y = \cos(2x) - \sin(2x)$.
b) $y = k\cos(2x) + k\sin(2x)$; $k \in IR$.
c) $y = \cos(2x) - k\sin(2x)$; $k \in IR$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

FONCTIONS

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$

36- La fonction f définie sur IR par $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+2 & si \quad x<1 \\ \sqrt{x}-2 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$ est :

a) dérivable et non continue en 1 .
b) continue et non dérivable en 1 .
c) continue et dérivable en 1 .
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

La fonction h est définie sur $IR-\{0\}$ par $h(x)=\dfrac{2e^x}{e^x-1}$.

37- $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\ell_1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\ell_2$ où :

a) $\ell_1=-\infty$ et $\ell_2=+\infty$.
b) $\ell_1=+\infty$ et $\ell_2=2$.
c) $\ell_1=0$ et $\ell_2=2$.
d) $\ell_1=1$ et $\ell_2=2$.

38- $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=L_1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=L_2$ où :

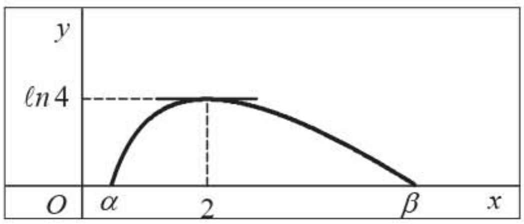
a) $L_1=-\infty$ et $L_2=+\infty$.
b) $L_1=+\infty$ et $L_2=-\infty$.
c) $L_1=0$ et $L_2=+\infty$.
d) $L_1=0$ et $L_2=2$.

La fonction g est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=2\ell n\,x+b\,x+c$ où b , c **sont des réels et** $b\neq 0$.

39- La fonction g admet :

a) un minimum pour tout $b\neq 0$.
b) un maximum pour tout $b\neq 0$.
c) un minimum pour quand $b>0$ et un maximum pour $b<0$.
d) un minimum pour $b<0$ et un maximum pour $b>0$.

40- La courbe ci-contre représente la fonction g dans l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$ lorsque :



a) $b=-1$ et $c=1$.
b) $b=-1$ et $c=2$.
c) $b=1$ et $c=1$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

La fonction f est définie sur $]-\infty\,;1]$ par $f(x)=(x-2)e^{x}+1$.

41- La courbe représentative (C) de f coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse α .
La pente de la tangente à (C) en A est égale à :

a) $\dfrac{\alpha-1}{\alpha-2}$.
b) $\dfrac{1-\alpha}{\alpha-2}$.
c) $\alpha-1$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

42- f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle :
a) $]-\infty\,;1]$.
b) $]1-e\,;1]$.
c) $[1-e\,;1[$.
d) $]1-e\,;1[$.

43- Soit (γ) la courbe représentative de f^{-1}.
(γ) admet un point d'inflexion I de coordonnées :
a) $(0\,;1)$.
b) $(1\,;0)$.
c) $(0;-1)$.
d) $(-1\,;0)$.

La fonction F est définie sur IR^{*} par $F(x)=x+1-\ell n|x|$.
Soit (L) la courbe représentative de F .

44- La tangente à (L) au point d'abscisse m coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée :
a) $2m-\ell n|m|$.
b) $2-\ell n|m|$.
c) $\ell n|m|-2$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

45- (L) coupe l'axe des abscisses au point P d'abscisse négative β .
Si la tangente à (L) en P coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2, alors $\beta=$:
a) -1 .
b) $-e$.
c) -2.
d) 1.

TRANSFORMATIONS

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

f est la transformation définie par la relation complexe $z' = (-\frac{1}{2} + m\frac{\sqrt{3}}{2}i)z + 2m + 3i$; $m \in]-\infty ; 0]$.

46- f est une rotation si et seulement si :

a) $m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

b) $m = -1$ or $m = 1$.

c) $m = 0$.

d) $m = -1$.

S est la similitude définie par la relation complexe $z' = (1 - \sqrt{3}i)z + 3i$ **.**

47- Le center de S est le point d'affixe :

a) $-3\sqrt{3} + 3i$.

b) $\sqrt{3}$.

c) $i\sqrt{3}$.

d) $-i\sqrt{3}$.

48- Soit (C) le cercle d'équation $(x-1)^2 + y^2 = 8$.

L'aire , en unités d'aire , de l'image par S de (C) est égale à :

a) 8π .

b) 16π .

c) 32π .

d) $8\sqrt{2}\pi$.

T est l'application qui , à tout point $M(x ; y)$ avec $x \neq 2$, associe le point $M'(x' ; y')$ tel que

$x' = \frac{x}{x-2}$ **et** $y' = \frac{y}{x-2}$.

49- Le(s) point(s) invariant(s) par T sont :

a) $A(3 ; 0)$

b) $O(0 ; 0)$ et $A(3 ; 0)$.

c) $O(0 ; 0)$ et tous les points d'abscisse 3 .

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

50- Pour tout point $M \neq O$:

a) $\overrightarrow{OM'} . \overrightarrow{OM} = 0$.

b) les points O , M et M' sont alignés .

c) $OM' = 2\,OM$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

Test 2

Préparé par:
Social Club ULFGII

Géométrie Analytique.

1- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$

non colinéaires $\longrightarrow$ déterminent un plan.

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \perp \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$

ou

$\boxed{-a+b+c=0}$

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \perp \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} \longrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$

ou

$\boxed{-3a+b+2c=0}$

$$\begin{cases} -a+b+c=0 \longrightarrow a=b+c \\ -3a+b+2c=0 \longrightarrow \end{cases}$$

$$-3b-3c+b+2c=0$$

$$-2b-c=0$$

$$\boxed{c=-2b}$$

$$\boxed{a=-b}$$

pour $a=1$
$b=-1$
$c=2$

$x-y+2z+k=0 \longrightarrow$ donc choix c

2- connaissant un point et la normale

$\hookrightarrow ux + vy + wz + r = 0$; $\vec{n}(u, v, w)$ normal au plan

$$\begin{cases} D(-3; 4; 5) \\ (d): (x = 2t+1;\ y = t-1;\ z = -t) \longrightarrow \vec{n}(2; 1; -1). \end{cases}$$

$2x + y - z + r = 0.$

pour $D \longrightarrow 2 \times -3 + 4 - 5 + r = 0.$

$r = 7.$

$\hookrightarrow 2x + y - z + 7 = 0$

donc choix b.

3- $\text{volume} = \frac{1}{6} |\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \wedge \vec{AD})|$

$= \frac{1}{6} |\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|.$

$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -4 & 6 & 6 \end{vmatrix}$

avec $\vec{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{6} \times [-1(6 - 2\times 6) - 1(-3\times 6 + 2\times 4) + 1(-3\times 6 + 4)]$

$= \frac{1}{6} \times [6 + 10 - 14]$

$= \frac{2}{6} \longrightarrow$ choix d.

4- $(d) \longrightarrow \vec{v}(2; 1; -1)$

$(d') \longrightarrow \vec{v}'(-2; -1; 1).$

$\vec{v}' = -1 \cdot \vec{v} \longrightarrow \vec{v}$ et $\vec{v}'$ colinéaires

ayant $L(1, -1, 0) \in (d) \longrightarrow \in ?$ à (d') ?

$$\left.\begin{cases} x = -2m = 1 \longrightarrow m = -\frac{1}{2} \\ y = -m + 3 = -1 \longrightarrow m = 4 \\ z = m + 1 = 0 \longrightarrow m = -1 \end{cases}\right\} \neq$$

contradiction !

donc $(d) \parallel (d')$

choix c

5- (S) $x - y + 2z + 10 = 0 \longrightarrow \vec{n}(1; -1; 2)$

$D(-3; 4; 5)$

- parallèle à $(xOy) \longrightarrow z = cte$
- droite passe par D et D a $z = 5$.

$\hookrightarrow \boxed{z = 5}$

soit (c) soit (d).

Tous les deux ont $\vec{v}(1,1,0)$

$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \longrightarrow 1 - 1 = 0$ ✓ vérifiée

laquelle ?

Voir pour le point D :

(c) $\begin{cases} x = \lambda - 3 = -3 \to \lambda = 0 \\ y = \lambda = 4 \to \lambda = 4 \\ z = 5 = 5 \checkmark \end{cases}$ $\underbrace{}_{\text{non!}}$

(d) $\begin{cases} x = \lambda - 3 = -3 \to \lambda = 0 \\ y = \lambda + 4 = 4 \to \lambda = 0 \\ z = 5 = 5 \checkmark \end{cases}$ oui

donc choix (d).

Nombres Complexes.

$a = e^{2\theta i} - 1 \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < 0$

6- $a = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) - 1$

$= [\cos(2\theta) - 1] + i\sin 2\theta$.

$\downarrow$

$\bar{a} = [\cos(2\theta) - 1] - i\sin 2\theta$

$= \cos 2\theta - i\sin 2\theta - 1$

donc $\bar{a} = e^{-2\theta i} - 1$ donc (c).

7- $z = a + a^2 + a^3 + \bar{a} + \bar{a}^2 + \bar{a}^3$.

nous savons que $a + \bar{a} = 2Re(a)$.

$a^2 = (e^{2\theta i} - 1)(e^{2\theta i} - 1)$

$= e^{4\theta i} - 2e^{2\theta i} + 1$

$$a^3 = (e^{2\theta i} - 1)(e^{4\theta i} - 2e^{2\theta i} + 1)$$
$$= e^{6\theta i} - 3e^{4\theta i} + 3e^{2\theta i} - 1.$$
$$\bar{a}^2 = (e^{-2\theta i} - 1)(e^{-2\theta i} - 1)$$
$$= e^{-4\theta i} - 2e^{-2\theta i} + 1.$$
$$\bar{a}^3 = (e^{-2\theta i} - 1)(e^{-4\theta i} - 2e^{-2\theta i} + 1)$$
$$= e^{-6\theta i} - 3e^{-4\theta i} + 3e^{2\theta i} - 1.$$

or $a^2 = \cos(4\theta) + i\sin(4\theta) - 2\cos(2\theta) - 2i\sin(2\theta) + 1.$

$$= [\cos(4\theta) - 2\cos(2\theta) + 1] + i[\sin(4\theta) - \sin(2\theta)].$$

et $\bar{a}^2 = \cos(4\theta) - i\sin(4\theta) - 2\cos(2\theta) + 2i\sin(2\theta) + 1$

$$= [\cos(4\theta) - 2\cos(2\theta) + 1] - i[\sin(4\theta) - \sin(2\theta)].$$

donc $\overline{a^2} = \bar{a}^2$.

de même pour $\overline{a^3} = \bar{a}^3$.

↳ donc $a^2 + \bar{a}^2 = 2\,\mathrm{Ré}(a^2)$

et $a^3 + \bar{a}^3 = 2\,\mathrm{Ré}(a^3)$.

$$z = 2\times[\cos(\cancel{2\theta}) \cancel{-1} + \cos(4\theta) - \cancel{2\cos(2\theta)} \cancel{+1} + \cos(6\theta) - 3\cos(4\theta) + \cancel{3\cos(2\theta)} - 1]$$
$$= 2\times[\cos(6\theta) - 2\cos(4\theta) + 2\cos 2\theta - 1]$$

$$z = 2\cos(6\theta) - 4\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) - 2$$

z sera réel.

$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$

↓

$-\pi < 6\theta < 0$

$-2\pi < 4\theta < 0 \rightarrow \cos 4\theta = 1$

$-\pi < 2\theta < 0$

$z = 2\cos(6\theta) + 4\cos(2\theta) - 6$

donc sera négatif.

c.

8- $|a| = \sqrt{(\cos(2\theta)-1)^2 + \sin^2(2\theta)}$

$= \sqrt{\cos^2(2\theta) - 2\cos(2\theta) + 1 + \sin^2(2\theta)}$

$= \sqrt{-2\cos 2\theta + 2}$

nous savons que

$$\frac{1-\cos 2\theta}{2} = \sin^2\theta .$$

$$2\times(1-\cos 2\theta) = 4\sin^2\theta .$$

donc

$$|a| = \sqrt{2(1-\cos 2\theta)} = \sqrt{4\sin^2\theta} .$$

$= 2\sin\theta .$ donc (d)

* $b = a+1$ $\quad b = e^{2\theta i}$

9- Si $\theta = \frac{-\pi}{6}$ rad :

$$\begin{cases} \bar{b} = e^{-2\theta i} = \arg(\bar{a}) \\ ib = e^{2\theta i} \times e^{i\pi/2} = e^{(2\theta + \frac{\pi}{2})i} \\ (ib)^3 = e^{(6\theta + \frac{3\pi}{2})i} = e^{(6\theta - \frac{\pi}{2})i} \end{cases}$$

triangle
Semi équilatéral : $90° \to 3\theta$
$30° \to \theta$
$60° \to 2\theta$

$-2\theta \to \pi/3$
$2\theta + \pi/2 \to \pi/6$
$6\theta - \pi/2 \to \pi/2$

- $(b)^{2022} = e^{4044\theta i} \notin \mathbb{R} \Rightarrow$ b est faux
- $ib \times b^2 \times \bar{b} = e^{(2\theta + \pi/2)i} \times e^{4\theta i} \times e^{-2\theta i} = e^{(4\theta + \frac{\pi}{2})i}$
$-b = -e^{2\theta i} = -e^{\pi/3 i}$ $\quad \neq$

(a)

10 - Si $\theta = -\pi/3$ rad :

$$\begin{cases} b = e^{-2\pi/3\, i} \\ 1 = e^{0} \\ b^2 = e^{-\frac{4\pi}{3} i} = e^{\frac{2\pi}{3} i} \\ \bar{b} = e^{2\pi/3\, i} \end{cases}$$

$$b^3 = e^{(2\pi) i} = 1$$

$$1 + b + b^2 = e^{0} + e^{-2\pi/3\, i} + e^{2\pi/3\, i} = \bar{b} = e^{2\pi/3\, i}$$

$$\rightarrow e^{0} + e^{-2\pi/3\, i} = 0 \quad \text{faux ! (par a)}$$

- $z_{n+1} = z_n - |z_n|$

$$a = e^{-\frac{2\pi}{3} i} - 1$$

$$z_0 = b = e^{-\frac{2\pi}{3} i} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = z_0 - |z_0|$$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = -1 - i\sqrt{3}$$

$$a = e^{-i\frac{2\pi}{3}} - 1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -3/2 - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\neq$ faux

- suite géométrique b^n soit $n=0 \quad b^0 = 1$
  $n = 1 \quad b^1 = e^{-2\pi/3\, i}$
  $n = 2 \quad b^2 = e^{2\pi/3\, i}$

$$\rightarrow b^0 + b^1 + b^2 = 1 + e^{-2\pi/3\, i} + e^{2\pi/3\, i} = 1$$

$$b^n + b^{n+1} + b^{n+2} = e^{-\frac{2n\pi}{3} i} + e^{-\frac{2(n+1)\pi}{3} i} + e^{-\frac{2(n+2)\pi}{3} i} = e^{-\frac{2n\pi}{3} i}\left(e^{0} + e^{-\frac{2\pi}{3} i} + e^{\frac{2\pi}{3} i}\right)$$

$$= e^{-\frac{2n\pi}{3} i} \neq 1 \quad \text{si } n \neq 0$$

$\rightarrow$ d

11- $u_0 = a \neq -1$ $\quad u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n+1}$

$u_1 = \frac{4a}{a+1}$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ pour qu'elle soit constante

$\hookrightarrow \frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{4a}{a+1}}{a} = \frac{4}{a+1} = 1$.

$a+1 = 4 \rightarrow \boxed{a=3}$ choix (c).

12- $a = 1$.

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{4}{2} = 2 \geq 1$ donc croissante

choix (a)

13- $V_n = \frac{\sin(n)}{n}$

nous savons que $\sin(n) \leq 1$.

$\frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$

- $\lim_{n \to \infty} \frac{\sin(n)}{n} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}$.

$= 0^+$

de même

$\sin(n) \geq -1$

$\frac{\sin(n)}{n} \geq -\frac{1}{n}$.

- $\lim_{n \to \infty} \frac{\sin(n)}{n} \geq \lim_{n \to \infty} -\frac{1}{n}$

$= 0^-$.

donc $0^- \leq \lim_{n \to \infty} \frac{\sin(n)}{n} \leq 0^-$

$\boxed{\lim_{n \to \infty} V_n = 0}$.

converge vers 0.

donc (c).

14 - $S_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2}$.

$S_n = \frac{1}{n^2}\left(\underbrace{1+2+\cdots+n}\right)$.

somme d'une suite arithmétique de raison $r=1$ et 1er terme $= 1$

$\hookrightarrow S' = \frac{n}{2}(1+n)$.

donc $S_n = \frac{1}{n^2} \times \frac{n}{2}(1+n) = \frac{1+n}{2n}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+n}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.

donc (b),

. $w_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

15 -

posons.

$O_n = \frac{n}{n+1}$.

$L_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$

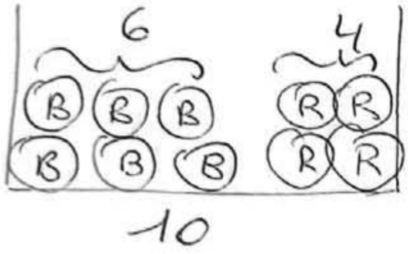
$= \ln(O_1) + \ln(O_2) + \cdots + \ln(O_n)$

$= \ln(O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n)$

$= \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n}{n+1}\right)$.

$= \ln\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

$\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \ln(0^+) = -\infty$. donc (c), 16-



$p(\text{même couleur})$

$= p(2R \text{ ou } 2B)$

$= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{7}{15}$

$\hookrightarrow$ (d).

17- $p(B_2/R_1) = \dfrac{p(B_2 \cap R_1)}{p(R_1)}$

$= \dfrac{\frac{4}{10} \times \frac{6}{9}}{\frac{6}{10}} = \frac{4}{9}.$

(d) <u>aucune</u>

18- $P(R_1 \cap B_2) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$ (c).

19- $P(R_2) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9}$

$= \frac{2}{5} = 0{,}4 \longrightarrow$ (a).

20- $P(R_1/R_2) = \dfrac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)}$

$= \dfrac{\frac{4}{10} \times \frac{3}{9}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{3} \longrightarrow$ (a)

21- $\ln(x-1) + \ln(x-3) \leq 3 \ln 2$

$x - 1 > 0 \to x > 1$
$x - 3 > 0 \to x > 3$

$\ln(x-1)(x-3) \leq 3 \ln 2$

$\ln(x-1)(x-3) \leq \ln 2^3$

$(x-1)(x-3) \leq 8.$

$x^2 - 4x + 3 \leq 8.$

$x^2 - 4x - 5 \leq 0.$

$(x-5)(x+1) \leq 0.$

$]3, 5] \to$ (c).

22 - $2\ln(x-1) - \ln(5-x) = \ln 2$

$\ln(x-1)^2 - \ln(5-x) = \ln 2$

$\ln \frac{(x-1)^2}{5-x} = \ln 2.$

$x-1>0$

$\boxed{x>1}$

et

$5-x>0.$

$\boxed{x<5}$

$\frac{(x-1)^2}{5-x} = 2.$

$x^2 - \cancel{2x} + 1 = 10 - \cancel{2x}.$

$x^2 - 9 = 0$

$(x-3)(x+3) = 0.$

or $-3 < 1$ inacceptable

$\hookrightarrow \{3\}.$ (b)

23 - $e^{\ln(4-x^2)} = 3(x+2)$

$4-x^2 = 3x+6.$

$4-x^2>0.$

$(2-x)(2+x)>0.$

$x>-2$ et

$x<2.$

$x^2+3x+2=0.$

$(x+1)(x+2)=0.$ $\{-2;-1\}.$

$\hookrightarrow$ (a).

24 - $\ln\left(4-\sqrt{4-x}\right) < \ln 2.$

$4-\sqrt{4-x} < 2$

$2-\sqrt{4-x} < 0.$

$\sqrt{4-x} > 2$

$4-x > 4.$

$-x>0$

$x<0.$

$4-\sqrt{4-x}>0.$

$4>\sqrt{4-x}$

$16>4-x.$

$x>-12$

$]-12;0[$ (c).

25- $(\ln x - 1)(x+1) < 0$ $\qquad x > 0$

$(\ln x - \ln e)(x+1) < 0.$

$(\ln \frac{x}{e})(x+1) < 0.$

$\ln \frac{x}{e} < 0$ ou $x + 1 < 0$

$x < -1$ inacceptable

$x < e.$

$x \in \,]0; e[$ (d)

26- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{2}[-1]$

$= \frac{1}{2} = 0{,}5$ (d)

27- $\int_1^e \frac{1}{x(3-2\ln x)^2} dx$

$\int_1^e \frac{(3-2\ln x)^{-2}}{x}$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2}{x}(3-2\ln x)^{-2}$

$= \frac{1}{2}\left[(3-2\ln x)^{-1}\right]_1^e$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3-2\ln e} - \frac{1}{3-2\ln 1}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right]$

$= \frac{1}{3}$ (a)

28- $\int_2^{-2} x e^x dx = \left[xe^x - e^x\right]_2^{-2} = -2e^{-2} - e^{-2} - (2e^2 - e^2) = -3e^{-2} - e^2$

$= -(e^2 + 3e^{-2})$

(c)

$x \qquad e^x$

$1 \xrightarrow{+} e^x$

$0 \xrightarrow{-} e^x$

29- $I = \int_e^1 x(\ln x - 2)^5 dx$

, $I < 0$

$\int_e^1 x(\ln x - 2)^5 dx$

$\ln(x) < 1$; $x \in [e;1]$

$(\ln x - 2)^5 < 0$

$\Rightarrow x(\ln x - 2)^5 < 0$; $x \in [e;1]$

$\Rightarrow \int_1^e x(\ln x - 2) < 0 \Rightarrow \boxed{I > 0}$

$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x \cos x}{x(2+\cos x)^2}$ car $x < 0$

$x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$ $\sin x > 0$; $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi] \Rightarrow \sin x \cos x < 0$

$x(2+\cos^2 x) > 0$

$\Rightarrow \boxed{J < 0} \to$ a

30- $f(x) = \int_0^{x^2-1} \sqrt{1+t^2}\, dt = F(x^2-1) - F(0)$

$f'(x) = (F(x^2-1))' - F(0)'$

$= (F(x^2-1))'$

$= 2x F'(x^2-1)$ (dérivée de $f(u) = u' f'(u)$)

$= 2x\sqrt{1+(x^2-1)^2}$

Donc c

31- $y' + y - 2x = 0$

$f' + f - 2x = 0$

a) $f'(0) + f(0) - 2\times 0 = 0 \Rightarrow f'(0) = -f(0)$ faux

b) $f'(2) + f(2) - 2\times 2 = 0 \Rightarrow f(2) = 4 - f'(2)$ Vrai

c) $f'(-1) + f(-1) + 2 = 0 \Rightarrow f'(-1) + 2 = -f(-1)$ Faux

Donc seulement b est correcte.

32-

a) On remplace x et y par 0

$\Rightarrow 0 = -2+2$

$0=0$ Vraie

$\Rightarrow y'+y-2x=0$ $\qquad y' = -2e^{-x}+1$

$-2x+1-2e^{-x}+x-2+2e^{-x}=0$

$-2x+1+x-2=0$

$-2x-1+x=0$ $\quad x=cte$

Faux

b) $0=-2e^{x-1}$ Faux

c) $0=0-2+2 \Rightarrow 0=0$ Vrai

$y'=2-2e^{-x}$

$\Rightarrow 2-2e^{-x}+2x-2+2e^{-x}-2x=0$ $\quad 0=0$ Toujours vraie

donc (c) correcte

33- $y(0)\times y'(0)=-1$

a) $y(0)\times y'(0)=-1$?

$y=x-1+2e^{-x}$

$y'=1-2e^{-x}$

$y(0)=-1+2=1$ et $y'(0)=-2$ $\quad =-1$ Vrai

$-1\times 1=-1$

Alors (a) est vraie

c) $y=2x-2+3e^{-x}$

$y'=2-3e^{-x}$

$y(0)=-2+3=1$

$y'(0)=2-3=-1$

$1\times -1=-1$

Alors (c) est vraie

34- $y(0)=2$ et $y'(0)=-2$

a) $y(0)=2-0$ $\quad 2=2$ Vrai

$y'=-4\sin(2x)-2\cos(2x) \Rightarrow y'(0)=-0-2$

$-2=-2$ Vrai

Alors (a) est vraie

b) $y=2\cos(x)-2\sin(x) \Rightarrow y(0)=2$

$y'=-2\sin(x)-2\cos(x) \Rightarrow y'(0)=-2$ donc (b) est vraie

35- $y(0)=1$

a) $y(0)=1$ (a) est vraie

b) $y(0)=2$ (b) Fausse

c) $y(0)=1$ (c) est vraie

Alors (a) et (c) vraies.

36 - $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2-4x+2) = -1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (\sqrt{x}-2) = -1$

Donc $f(x)$ est continue en 1 car $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-4x+2+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-3)(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} (x-3) = -2$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-3}{x-1} = \frac{-2}{0^+} = +\infty$$

Donc $f(x)$ dérivable en 1^- mais non dérivable en 1^+

(b) est correcte

37 - $h(x) = \dfrac{2e^x}{e^x-1}$

$$\lim_{x\to -\infty} h(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2e^x}{e^x-1} = \frac{0}{0-1} = 0.$$

$\boxed{l_1 = 0}$

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2e^x}{e^x-1} = \frac{+\infty}{+\infty} = l_2.$$

Hopital $\longrightarrow$ $l_2 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2e^x}{e^x} = 2.$

donc (c).

38 - $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2e^x}{e^x-1} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$ (a)

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2e^x}{e^x-1} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty.$

39. $g(x) = 2\ln x + bx + c.$ $\quad b \neq 0.$ $\quad g \to]0; +\infty[.$

$g'(x) = \dfrac{2}{x} + b = \dfrac{2+bx}{x}.$

$g'(x) = 0 \longrightarrow 2+bx = 0 \longrightarrow \boxed{x = -\dfrac{2}{b}.}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} g'(x) = b \qquad \lim\limits_{x\to +\infty} g'(x) = b.$

$b>0$: $b \searrow 0 \nearrow b$ ou $b<0$: $b \nearrow 0 \searrow b$

or b doit être <0 pour avoir $x = \frac{-2}{b} > 0$

$\hookrightarrow$ max (b)

40- $[\alpha ; \beta]$

max $\longrightarrow$ $\boxed{b<0}$.

$g(x) = 2\ln x + bx + c$

pour $x = 2 \longrightarrow \ln 4 = 2\ln 2 + 2b + c$.

$2b + c = 0$.

$\boxed{c = -2b}$.

$g'(2) = 0 \longrightarrow 2 = -\frac{2}{b} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} b = -1 \\ c = 2 \end{array}\right\}$ (b)

41- $]-\infty, 1]$ $\quad f(x) = (x-2)e^x + 1$.

$y_{tg} = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$.

pente $f'(\alpha)$: $f'(x) = (x-2)e^x + e^x$

$= (x-1)e^x$

$\hookrightarrow f'(\alpha) = (\alpha - 1)e^\alpha$. (d).

42- pour $x < 1$

$(x-1) \leq 0$.

$f'(x) \leq 0$ décroissante

f^{-1} définie sur : $f(-\infty) = 0 + 1 = 1$.

$[1-e ; 1[$ $\quad f(1) = -e + 1$.

(c)

43) $f(x) = (x-2)e^{x} + 1$

$f'(x) = e^{x} + (x-2)e^{x}$

$f''(x) = e^{x} + e^{x} + (x-2)e^{x} = e^{x}(x) = xe^{x}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow xe^{x} = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = -2+1 = -1$ $\rightarrow$ point d'inflection de $f(x)$ est $(0,-1)$

$\rightarrow$ // // // $f^{-1}(x)$ est $(-1,0)$

réponse d

44) $x = m$ $y = f(m)$

or Equ d'une tang: $y = f'(m)(x-m) + f(m)$

$y = m+1-\ln|m|$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$ $f'(m) = 1 - \frac{1}{|m|}$ $\Rightarrow y = \left(1-\frac{1}{|m|}\right)(x-m) + m + 1 - \ln|m|$

$\cap$

$x = 0$

$\Rightarrow y = \left(1-\frac{1}{|m|}\right)(-m) + m + 1 - \ln|m|$

$\Rightarrow y = \cancel{-m} + \frac{m}{|m|} + \cancel{m} + 1 - \ln|m|$

$y = \frac{m}{|m|} + 1 - \ln|m|$ réponse d

45)

$f(x) = x + 1 - \ln(x)$

or $P(\beta, 0)$

$\beta + 1 - \ln|\beta| = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta = -e & -e+1-\ln e = 0 \quad -e = 0 \text{ imp} \\ \beta = 1 & 1+1-\ln 1 = 0 \quad 2 = 0 \text{ imp} \\ \beta = -2 & -2+1-\ln 2 = 0 \quad -1-\ln 2 = 0 \text{ imp} \\ \beta = -1 & -1+1-\ln 1 = 0 \quad 0 = 0 \end{cases}$

réponse a

46)

$$\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3m^2}{4}}=1$$

$$\frac{3m^2}{4}=\frac{3}{4} \Rightarrow m^2=1 \quad \begin{cases} m=1 \\ m=-1 \end{cases}$$ réponse b

47) Centre → points invariant

$$z'=z$$

$$z(1-1+\sqrt{3}\,i)=3i \Rightarrow z=\sqrt{3}$$ $C(\sqrt{3},0)$ réponse b

48) $a=1-\sqrt{3}\,i=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$A_1=\pi r^2=\pi 8$ $\quad A_2=2\times 8\pi=16\pi$ reponse b

49)

$x'=x \quad y'=y$

$$x=\frac{x}{x-2} \rightarrow x\left(1-\frac{1}{x-2}\right)=0 \quad \boxed{x=0} \quad 1=\frac{1}{x-2} \rightarrow x-2=1 \rightarrow \boxed{x=3}$$

$$y=\frac{y}{x-2} \rightarrow x=0 \Rightarrow y=\frac{y}{-2} \rightarrow y\left(1+\frac{1}{2}\right)=0 \rightarrow y=0$$

$$x=3 \Rightarrow y=\frac{y}{1} \rightarrow \forall y$$

$O(0,0)$ $A(3,\forall y)$ reponse c

50)

$OM(x,y)$ $\quad OM'\left(\frac{x}{x-2},\frac{y}{x-2}\right)$

a) $\vec{OM'}\cdot\vec{OM}=\frac{x^2}{x-2}+\frac{y^2}{x-2}=\frac{x^2+y^2}{x-2}\neq 0$ Faux

b) $$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\frac{x}{x-2}}{x}=\dfrac{1}{x-2}\\[2ex]\dfrac{\frac{y}{x-2}}{y}=\dfrac{1}{x-2}\end{array}\right\}$$ aligné vrai réponse b

Test 3

GEOMETRIE ANALYTIQUE

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le plan $(P): x-y+z-3=0$ **et les droites :**

$(d):(x=2t+1\ ;\ y=t-1\ ;\ z=-t)$, $t\in IR$;

$(d'):(x=-2m\ ;\ y=-m+3\ ;\ z=m+1)$, $m\in IR$;

$(d''):(x=3\lambda+1\ ;\ y=5\ ;\ z=\lambda-2)$, $\lambda\in IR$.

1- La droite (d) coupe le plan (xOz) au point de coordonnées :

a) $(3\,;0\,;0)$.
b) $(-1\,;0\,;0)$.
c) $(3\,;0\,;-1)$.
d) $(3\,;0\,;1)$.

2- La droite (d) :

a) est incluse dans le plan (P).
b) est parallèle au plan (P).
c) coupe le plan (P) .
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

3- Les droites (d) et (d') sont :

a) confondues .
b) parallèles .
c) sécantes .
d) non coplanaires .

4- Un vecteur directeur de la perpendiculaire commune aux deux droites (d) et (d'') est :

a) $\vec{w}(1\,;5\,;-3)$.
b) $\vec{w}(2\,;-5\,;-3)$.
c) $\vec{w}(1\,;5\,;-1)$.
d) $\vec{w}(1\,;-5\,;-3)$.

5- Les coordonnées du symétrique du point $A(3\,;-5\,;1)$ par rapport au plan (P) sont :

a) $(-1\,;-1\,;-3)$.
b) $(1\,;1\,;3)$.
c) $(-1\,;-1\,;3)$.
d) $(-1\,;-3\,;-1)$.

NOMBRES COMPLEXES

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application f qui , a tout nombre complexe z , associe le nombre complexe $z' = i\bar{z}+1$.

6- Le conjugué de z' est :

a) $iz+1$.
b) $-iz-1$.
c) $-iz+1$.
d) $iz-1$.

7- Si la forme algébrique de z est $x+iy$, alors celle de z' est :

a) $x+1-iy$.
b) $-y+1+ix$.
c) $y+1-ix$.
d) $y+1+ix$.

8- L'image par f du nombre complexe $\frac{2i}{1+i}$ est :

a) $2+i$.
b) $2-i$.
c) $1+2i$.
d) $1-2i$.

9- Le nombre de points invariants par f est :

a) infini .
b) 0 .
c) 1 .
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

10- L'antécédent par f du nombre complex $2e^{\frac{2\pi}{3}i}+1$ est :

a) $e^{\frac{2\pi}{3}i}$.
b) $2e^{\frac{5\pi}{6}i}$.
c) $2e^{-\frac{\pi}{6}i}$.
d) $2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

SUITES

(U_n) , $n \geq 1$, **est une suite géométrique telle que** $U_3 = -5$ **et** $U_6 = 40$ **.**

11- $U_n = -5120$, lorsque $n =$:

a) 13 .
b) 12 .
c) 14 .
d) 15 .

12- Soit $S = U_3 + U_4 + \cdots\cdots\cdots + U_{n+1}$; $S =$

a) $-\frac{5}{3}\left(2^{n-3} - 1\right)$.

b) $\frac{5}{3}\left((-2)^{n-2} - 1\right)$.

c) $\frac{5}{3}\left(1 - 2^{n-2}\right)$

d) $-\frac{5}{3}\left(2^{n-3} + 1\right)$.

(V_n) **est la suite de premier terme** $V_0 = 2$ **telle que , pour tout** n **dans** IN **,** $V_{n+1} = -\frac{1}{2}V_n^2 + 3V_n - \frac{3}{2}$ **.**

13- Sachant que la suite (V_n) est monotone , alors elle est :

a) décroissante .
b) croissante .
c) périodique .
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

14- Soit $W_n = V_n - 3$; la suite (W_n) est telle que :

a) (W_n) est une suite géométrique .

b) pour tout entier naturel n , $W_{n+1} = \frac{1}{2}W_n^2$.

c) pour tout entier naturel n , $W_{n+1} = -\frac{1}{2}W_n^2$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

15- Soit (p_n) la suite numérique définie pour tout n dans IN par $p_{n+1} = p_n + 2n - 11$.

Si $p_0 = 0$, alors $p_4 =$:

a) -32 .
b) -6 .
c) 24 .
d) -28 .

PROBABILITE

Une boite B_1 contient 2 pièces d'or et 6 pièces d'argent et une boite B_2 contient 4 pièces d'or et 6 pièces d'argent .
Une boite est choisie au hasard de laquelle on tire une pièce au hasard .

16- La probabilité p_1 de tirer une pièce d'or de B_1 et la probabilité p_2 de tirer une pièce d'or de B_2 sont telles que :
a) $p_1 = 0{,}125$ et $p_2 = 0{,}2$.
b) $p_1 = 0{,}25$ et $p_2 = 0{,}4$.
c) $p_1 = 0{,}25$ et $p_2 = 0{,}6$.
d) $p_1 = 0{,}75$ et $p_2 = 0{,}4$.

17- La probabilité de tirer une pièce d'or est égale à :
a) $0{,}325$.
b) $0{,}375$.
c) $0{,}675$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

18- La probabilité que la pièce soit tirée de B_1 sachant qu'elle est en or est égale à :
a) $\frac{8}{13}$.
b) $\frac{5}{9}$.
c) $\frac{4}{9}$.
d) $\frac{5}{13}$.

***A* et *B* sont deux événements d'un univers Ω tells que $p(\overline{A}) = 0.625$, $p(B) = 0.5$ et $p(A \cap \overline{B}) = 0.25$.**

19- $p(A \cap B) =$:
a) $0{,}125$.
b) $0{,}75$.
c) $0{,}625$.
d) $0{,}375$.

20- $p(B / \overline{A}) =$:
a) 1.
b) $0{,}6$.
c) $0{,}75$.
d) $0{,}4$.

EQUATIONS ET INEQUATIONS

21- L'ensemble des solutions de l'inéquation $2\,\ell n(x-1)-\ell n(5-x)-\ell n 2 \geq 0$ est :

a) $]-\infty\,;-3]\cup[3\,;+\infty[$.

b) $[3\,;\,5[$.

c) $[-3\,;1[$.

d) $]3\,;\,5[$.

22- L'ensemble des solutions de l'inéquation $\exp\left(\ell n(4-x^2)\right)\leq 3(x+2)$ est :

a) $[-1\,;2]$.

b) $]-\infty\,;-2]\cup[-1\,;+\infty[$.

c) $[-1\,;2[$.

d) $\{-2\}\cup[-1\,;2[$.

23- L'ensemble des solutions de l'équation $\ell n|x|=1+\ell n 2$ est :

a) ϕ.

b) $\{e+2\}$.

c) $\{2e\}$.

d) $\{-2e\,;\,2e\}$.

24- L'ensemble des solutions de l'équation $\dfrac{\ell n\,x-2}{1-\ell n\,x}=-3$ est :

a) $\{\sqrt{e}\}$.

b) $\{\sqrt{2e}\}$.

c) $\{e\,;\sqrt{e}\}$.

d) ϕ.

25- L'ensemble des solutions de l'équation $e^{4x}+5e^{2x}-36=0$ est :

a) $\{-9\,;4\}$.

b) $\{\ell n 4\,;\ell n 9\}$.

c) $\{\ell n 2\}$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

INTEGRALES

26- $\int_{-1}^{1} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$ est égale à :

a) $2(e - e^{-1})$.
b) $2(e^{-1} - e)$.
c) 0 .
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

27- $\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x \ell n x} dx$ est égale à :

a) $1 - \ell n 2$.
b) $\ell n 2$.
c) $-\ell n 2$.
d) $\ell n 3$.

28- $\int_{e}^{1} \ell n x \, dx$ est égale à :

a) 1.
b) $e - 1$.
c) -1.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

29- f est une fonction paire définie sur IR telle que $\int_{0}^{\pi} f(x) \, dx = \pi$, alors $\int_{0}^{-\pi} (f(x) + \sin x) \, dx =$:

a) $2 - \pi$.
b) $1 + \pi$.
c) $\pi + 2$.
d) $\pi - 2$.

30- La fonction g définie sur IR par $g(x) = \int_{-x}^{x} \frac{t^2}{1 + t^2}$ est :

a) décroissante .
b) croissante .
c) non monotone .
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$

(E) **est l'équation différentielle** $y'+y=2e^{-x}$ **.**

31- La fonction $y=\lambda\,x\,e^{-x}$ est une solution de (E) si et seulement si $\lambda=$:

a) $\dfrac{1}{2}$.
b) 2 .
c) -2 .
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

32- Si f est une solution de (E), alors f' est une solution de l'équation différentielle :

a) $y''+y'=2e^{-x}$.
b) $y''+y'=-e^{-x}$.
c) $y''+y'=-2e^{-x}$.
d) $y''-y'=-2e^{-x}$.

33- Si f est une solution de (E), alors la fonction y telle que $f(x)=x\times y$ est une solution de l'équation différentielle :

a) $x\,y'+x\,y=2e^{-x}$.
b) $xy'+(x+1)y=2e^{-x}$.
c) $xy+(x-1)y'=2e^{-x}$.
d) $xy'+xy=2e^{-x}$.

(F) **est l'équation différentielle** $y''-2y'+y=0$ **.**

34- La solution de (F) telle que $y(0)=1$ et $y'(0)=-1$ est définie par :

a) $y=(-3x+1)e^{2x}$.
b) $y=(2x-1)e^{x}$.
c) $y=(2x+1)e^{x}$.
d) $y=(1-2x)e^{x}$.

35- Si g est une solution de (F)**,** alors the fonction y telle que $y(x)=g(x)+x^2e^x$ est une solution de l'équation différentielle :

a) $y''-2y'+y=2e^{x}$.
b) $y''-2y'+y=-2e^{x}$.
c) $y''-2y'+y=2xe^{x}$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

FONCTIONS

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$

36- La fonction f définie sur IR par $f(x)=\begin{cases}-(x+1)^2 & si\ \ x\in\ ]-\infty\ ;0] \\ x\ell n\,x-1 & si\ \ x\in\ ]0\ ;+\infty[\end{cases}$ est :

a) continue et non dérivable en 0 .
b) dérivable et non continue en 0 .
c) continue et dérivable en 0 .
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

La fonction h est définie sur $IR-\{0\}$ par $h(x)=\dfrac{e^{2x}-3}{e^{2x}-1}$**.**

37- $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\ell_1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\ell_2$ où :

a) $\ell_1=-\infty$ et $\ell_2=+\infty$.
b) $\ell_1=e^3$ et $\ell_2=e$.
c) $\ell_1=3$ et $\ell_2=1$.
d) $\ell_1=1$ et $\ell_2=3$.

38- $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=L_1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=L_2$ où :

a) $L_1=+\infty$ et $L_2=-\infty$.
b) $L_1=+\infty$ et $L_2=0$.
c) $L_1=0$ et $L_2=-\infty$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

Les fonctions ℓ et g sont définies sur $[0\ ;\ \pi]$ par $\ell(x)=e^{-x}$ et $g(x)=\sin 2x\ e^{-x}$.

39- Les courbes représentatives (C) et (C') de ℓ et g ont un point commun A d'abscisse :

a) 1 .
b) $\dfrac{\pi}{2}$.
c) $\dfrac{\pi}{4}$.
d) $\dfrac{\pi}{6}$.

40- Les tangentes en A à (C) et (C') :

a) ont des pentes opposées .
b) sont confondues .
c) sont perpendiculaires .
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

La fonction f est telle que $f(x) = \ell n(x+1) + \ell n|x-1|$.

41- Le plus large ensemble dans lequel f est définie est $D =$:

a) $]1\,;+\infty[$.

b) $]-1\,;+\infty[$.

c) $]-1\,;1[$.

d) $]-1\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

42- f est dérivable sur D et $f'(x) =$:

a) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{|x-1|}$.

b) $\dfrac{2x}{x^2-1}$.

c) $\dfrac{-2}{x^2-1}$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

43- Dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$, f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur IR par $f^{-1}(x) =$

a) $\sqrt{e^x - 1}$

b) $-\sqrt{e^x - 1}$

c) $\sqrt{e^x + 1}$.

d) $-\sqrt{e^x + 1}$

La fonction F est définie sur $IR - \{\ell n 2\}$ par $F(x) = x - \dfrac{e^x}{e^x - 2}$.

Soit (L) la courbe représentative de F et (δ) la droite d'équation $y = x + m$, $m \in IR$.

44- L'ensemble des valeurs de m pour lesquelles (δ) ne coupe pas (L) est :

a) $[-1\,;0]$.

b) $]-1\,;0]$.

c) $]-1\,;0[$.

d) $]-\infty\,;-1[\cup]0\,;+\infty[$.

45- La droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à (L) en $-\infty$.

L'aire , en unités d'aire , du domaine limité par (L) , (d) et les deux droites d'équations $x = \ell n 3$ et $x = \ell n 8$ est égale à :

a) $\ell n 8 - \ell n 3$.

b) $\ell n \sqrt{6}$.

c) $\ell n 6$.

d) $2\,\ell n 6$.

TRANSFORMATIONS

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

46- Les similitudes $S_1 = S(A\,;k\,;\alpha)$ et $S_2 = S(B\,;\lambda\,;\beta)$ commutent si et seulement si :

a) $k\lambda = 1$.

b) $A = B$ and $\alpha = \beta$.

c) $\alpha = \beta$.

d) $A = B$.

47- Un triangle de centre de gravité G a pour aire $5\ cm^2$.

Les homothéties qui transforment ce triangle en un triangle de centre de gravité G et d'aire $10\ cm^2$ sont :

a) toute homothétie de rapport $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$.

b) les homothéties $h(G\,;2)$ et $h(G\,;-2)$.

c) les homothéties $h(G\,;\sqrt{2})$ et $h(G\,;-\sqrt{2})$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

48- (C) est le cercle de centre $A(3\,;0)$ et de rayon $\frac{2}{3}$; (C') est le cercle de centre $B(-5\,;0)$ et de rayon 2.

Le centre I et le rapport k de l'homothétie positive qui transforme (C) en (C') sont :

a) $I(1\,;0)$; $k = 3$.

b) $I(7\,;0)$; $k = 3$.

c) $I(-1\,;0)$; $k = 3$.

d) $I(7\,;0)$; $k = \frac{1}{3}$.

49- La composée d'une rotation r d'angle α et d'une translation t est :

a) une rotation r' d'angle $-\alpha$.

b) une rotation r' d'angle $\pi - \alpha$.

c) une rotation r' d'angle α .

d) la rotation r elle même .

50- S est une symétrie centrale de centre E et S' est une symétrie centrale de centre F ; $S' \circ S$ est :

a) la symétrie centrale de centre ω, milieu de $[EF]$.

b) la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.

c) la translation de vecteur $\overrightarrow{FE}$.

d) la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{EF}$.

préparé par:
- Charbel-El-Ters
- Ghayath Nehra
- Carl Ghanem

Social club ULFG II

Test 3

Géométrie Analytique

$(P): x-y+z=0 \rightarrow \vec{n}=(1,-1,1)$

$(d): (x=2t+1;\ y=t-1;\ z=-t),\ t\in\mathbb{R} \rightarrow \vec{n}_d=(2,1,-1)$

$(d'): (x=-2m;\ y=-m+3;\ z=m+1),\ m\in\mathbb{R} \rightarrow \vec{n}_{d'}=(-2,-1,1)$

$(d''): (x=3\lambda+1;\ y=5;\ z=\lambda-2),\ \lambda\in\mathbb{R} \rightarrow \vec{n}_{d''}=(3,0,1)$

1) (d) coupe $(x \circ z)$ donc $y=0: t-1=0 \Rightarrow \boxed{t=1}$
on remplace 't' dans (d): $(x=3;\ y=0;\ z=-1)$
réponse c

2) $\vec{n}\cdot\vec{n}_d = 2\times1+(-1)\times1+(-1)\times1=0$
$(3,0,-1) \in (P)$? $3-0-1-3=-1\neq0$
Donc $(d)\,//\,(P)$ réponse b

3) $\vec{n}_{d'}=-\vec{n}_d$ Donc ils sont colinéaires
$(3,0,-1)\in(d')$? $y=-m+3=0 \Rightarrow \boxed{m=3}$
$x=-6$ et $z=4$ $\Rightarrow (-6,0,4)\neq(3,0,-1)$
Donc $(d)\,//\,(d')$ réponse b

4) $\vec{n}_d \wedge \vec{n}_{d''} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}-5\vec{j}-3\vec{k}$
$=(1;-5;-3)$

réponse d

5) (T) est la droite passant par A et $\perp$ (P) donc a ce vecteur directeur $\vec{n}(1;-1;1) \Rightarrow (T): (x = m+3; y = -m-5; z = m+1)$

(T) coupe (P) en S $\Rightarrow m+3+m+5+m+1-3=0$

$\Rightarrow 3m = -6 \Rightarrow \boxed{m=-2}$ Donc $S(1;-3;-1)$

S milieu de [AA'] car A' sym de A % à S.

$x_S = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = -1 \quad y_{A'} = -1 \quad z_{A'} = -3$

$A'(-1;-1;-3)$ réponse (a)

Nombres complexes

$Z' = i\bar{Z} + 1$

6) $\overline{Z'} = \overline{i\bar{Z}+1} = \bar{i}\,\bar{\bar{Z}} + \bar{1} = -iZ+1$ réponse (c)

7) $Z = x+iy \Rightarrow Z' = i(x-iy)+1 = ix+y+1$ réponse (d)

8) $Z' = i\overline{\left(\frac{2i}{1+i}\right)}+1 = i\left(\frac{-2i}{1-i}\right)+1 = 2+i$ réponse (a)

9) $x+iy = i(x-iy+1) \Rightarrow x+iy = 1+y+ix$

Donc $x = y$ et $x = 1+y$ n'existe pas réponse (d)

10) $Z = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}+1 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)+1 = i\sqrt{3}$

$\sqrt{3}i = ix+y+1 \Rightarrow x = \sqrt{3}$ et $y=-1 \longrightarrow r = 2$

$\theta = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{N}$

$Z = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$ réponse (c)

Suites

(U_n), $n \geq 1$ suite géométrique $U_3 = -5$ et $U_6 = 40$

11) $U_6 = U_3 \cdot q^{6-3} \Rightarrow \frac{40}{-5} = q^3 \Rightarrow \boxed{q = -2}$

$U_7 = 40 \times -2 = -80$; $U_8 = 160$; $U_9 = -320$
$U_{10} = 640$; $U_{11} = -1280$; $U_{12} = 2560$; $\boxed{U_{13} = -5120}$

Donc $\boxed{n = 13}$ réponse a

12) $S = U_4 + \cdots + U_{n+1}$;

(U_n) suite géométrique, $S = U_4 \times \frac{(-2)^{n+1-4+1} - 1}{-2-1} = \frac{10}{3}\left(1 - (-2)^{n-2}\right)$

$V_0 = 2$ et $V_{n+1} = \frac{-1}{2} V_n^2 + 3V_n - \frac{3}{2}$

13) $V_{n+1} - V_n = \frac{-1}{2} V_n^2 + 2V_n - \frac{3}{2}$

$V_1 = \frac{-1}{2} \times 4 + 3 \times 2 - 3/2 = 5/2$

$V_2 = 23/8$ $V_4 = \frac{383}{128}$ or $l = \lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} V_{n+1}$

$l = -\frac{1}{2} l^2 + 3l - \frac{3}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} l^2 + 2l - \frac{3}{2} = 0$

$l = 3$
et $l =$

or à partir d'un certain rg devient $V = 3$
donc croissante puis cte

donc c'est d

14) $w_m = v_m - 3$

$$\frac{w_{m+1}}{w_m} = \frac{v_{m+1}-3}{v_m-3} = \frac{1}{2}\left[\frac{-v_m^2+6v_m-\cancel{3}3}{v_m-3}\right]$$

$$\begin{array}{r|l} -v_m^2+6v_m-9 & v_m-3 \\ \cline{2-2} v_m^2-3v_m & -v_m+3 \\ \hline 3v_m-9 & \\ -3v_m+9 & \\ \hline 0\quad 0 & \end{array}$$

Donc $w_{m+1} = \frac{-1}{2}\, w_m^2$

réponse (c)

15) $P_{m+1} = P_m + 2m - 11$ $\quad P_0 = 0$

$m = 0 \rightarrow P_1 = 0 + 0 - 11 = -11$

$m = 1 \rightarrow P_2 = -11 + 2 - 11 = -20$

$m = 2 \rightarrow P_3 = -20 + 6 - 11 = -27$

$m = 3 \rightarrow P_4 = \boxed{-32}$ réponse (a)

16) $P_1 = \frac{2}{8} = 0,25$ $\quad P_2 = 0,4$ réponse (b)

17) $p = p(or_1/B_1)\times p(B_1) + p(or_2/B_2)\times p(B_2)$
$= 0,25\times 0,5 + 0,4\times 0,5 = 0,325$ réponse (a)

18) $p(B_1/or) = \frac{p(B_1\cap or)}{p(or)} = \frac{0,25\times 0,5}{0,325} = \frac{5}{13}$ réponse (d)

19) $p(\overline{B}/A) = \frac{P(A\cap\overline{B})}{P(A)} = \frac{0,25}{0,375} = \frac{2}{3}$ donc $p(B/A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$p(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow p(A\cap B) = p(B/A)\times p(A) = \frac{1}{3}\times 0,375$
$= \boxed{0,125}$ réponse (a)

20) $p(B/\bar{A}) = \dfrac{p(B\cap\bar{A})}{p(\bar{A})}$ or $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} = 0,25$

$p(\bar{A}/B) = 1-0,25 = 0,75$ Donc $p(B\cap\bar{A}) = p(\bar{A}/B)\times p(B)$
$= 0,375$

Alors $p(B/\bar{A}) = \dfrac{0,375}{0,625} = 0,6$ réponse (b)

Equations et Inequations

21) $2\ln(x-1) - \ln(5-x) - \ln 2 \geqslant 0$
Il faut que $5-x>0 \Rightarrow x<5$ et $x-1>0 \Rightarrow x>1$
$\ln\left[\dfrac{(x-1)^2}{10-2x}\right] \geqslant 0 \rightarrow \dfrac{x^2-2x+1}{10-2x} \geqslant 1 \Rightarrow x^2 - \cancel{2x} + 1 \geqslant 10 - \cancel{2x}$
$\Rightarrow x^2 \geqslant 9$

$x \geqslant 3$ ou $x \leqslant 3$ Donc $x \in [3,5[$ réponse (b)

22) $e^{\ln(4-x^2)} < 3(x+2) \Rightarrow 4-x^2 < 3x+6 \Rightarrow x^2+3x+2 \geqslant 0$
Il faut que $4-x^2>0 \rightarrow x^2<4 \rightarrow -2<x<2$
et $(x+1)(x+2) \geqslant 0$

x	-2		-1		2
$x+1$		$-$	0	$+$	
$x+2$	0	$+$		$+$	
$(x+1)(x+2)$	0	$-$	0	$+$	

Donc $x \in [-1,2[$

réponse (c)

23) $\ln|x| = 1+\ln 2 \Rightarrow \ln|x| = \ln e + \ln 2 \Rightarrow |x| = 2e$
$x = 2e$ ou $x = -2e$ $\Rightarrow \{-2e, 2e\}$ réponse (d)

24) $\dfrac{\ln x - 2}{1-\ln x} = -3$ $\Rightarrow \ln x - 2 = -3 + 3\ln x \Rightarrow 2\ln x = 1$
$\Rightarrow \ln x = 1/2 \Rightarrow x = \sqrt{e}$
réponse (a)

25) $e^{4x}+5e^{2x}-36=0$ posons $X=e^{2x}>0$ donc $X^2+5X-36=0$

$X=4$ acc $X=-9$ inacc $e^{2x}=4 \rightarrow 2x=\ln 4$

$\Rightarrow \boxed{x=\ln 2}$ réponse c

26) $\int_{-1}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx$ posons $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

$f(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}-e^x}=-\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)=-f(x)$ donc f impair

Alors $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=0$ réponse c

27) $\int_{e}^{e^2}\frac{1}{x\ln x}\,dx$ posons $u=\ln x$ $du=\frac{1}{x}\,dx$

$\int_1^2\frac{du}{u}=\ln u\Big]_1^2=\ln 2$ réponse b

28) $\int_e^1\ln x\,dx=\left[x\ln x-x\right]_e^1=0-1+e-e=-1$ réponse c

29) $\int_0^{\pi}(f(x)+\sin x)\,dx$ on a que $\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\pi$

$=-\int_{-\pi}^{0}(f(x)+\sin x)\,dx$ or f est pair $\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{0}f(x)\,dx$

$=-\pi-\int_{-\pi}^{0}\sin x\,dx=-\pi+2$ réponse a

30) $\int_{-x}^{x}\frac{r^2}{1+r^2}\,dr \rightarrow$ pair $=2\int_0^x\frac{r^2}{1+r^2}\,dr$

$g'(x)=2\times\frac{x^2}{1+x^2}>0$ donc g str ↗

réponse b

31- (E) : $y' + y = 2e^{-x}$

$e^{x}y' + e^{x}y = 2 \rightarrow e^{x}\frac{dy}{dx} + \frac{de^{x}}{dx} = 2$

$e^{x}dy + d(e^{x})\,y = 2dx = d(e^{x})\,dy = e^{x}dy$

or $uv' + vu' = (uv)'$

$\int e^{x}dy = \int 2dx = 2x + C \rightarrow y = \frac{2x+C}{e^{x}} = 2xe^{-x} + Ce^{-x}$

$y = \lambda x e^{-x}$

pour $C = 0$ $\lambda = 2$

(b) est correcte

32- $f = 2xe^{-x} + Ce^{-x}$

$y = f' = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - Ce^{-x}$

$y' = f'' = -2e^{-x} + 2xe^{-x} - 2e^{-x} + Ce^{-x} = 2xe^{-x} - 4e^{-x} + Ce^{-x}$

$y'' = f''' = -2xe^{-x} + 2e^{-x} + 4e^{-x} - Ce^{-x} = -2xe^{-x} + 6e^{-x} - Ce^{-x}$

a : $y'' + y' = 2e^{-x}$

$-2xe^{-x} + 6e^{-x} - Ce^{-x} + 2xe^{-x} - 4e^{-x} + Ce^{-x} = 2e^{-x}$

(a) est correcte

33- $f(x) = x \times y = 2xe^{-x} + Ce^{-x}$

$y = 2e^{-x} + \frac{C}{x}e^{-x}$

a. $xy' + xy = 2e^{-x}$?

$x\left(-2e^{-x} - \frac{C}{x}e^{-x} - \frac{C}{x^2}e^{-x}\right) + 2xe^{-x} + Ce^{-x}$

$= 2xe^{-x} - Ce^{-x} - \frac{C}{x}e^{-x} + 2xe^{-x} + Ce^{-x} + 2e^{-x}$

$f : xy' + (x+1)\,y = \underbrace{xy' + xy}_{a} + y = -\frac{C}{x}e^{-x} + 2e^{-x} + \frac{Ce^{-x}}{x}$

$= 2e^{-x}$

c : non

d : non

(a) est correcte

34- $\left.\begin{array}{l} y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{array}\right\}$ pour $y(0)=1$

$1 = c_1 + c_2 \times 0 \rightarrow \boxed{c_1 = 1}$

$y'(0) = 1$

$-1 = c_1 + c_2 + c_2 \times 0$

$c_2 = -1 - c_1 = \boxed{-2 - c_2}$

$y = e^x - 2xe^{-x} = e^x(1-2x)$ d

35- $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$

$y = g + x^2 e^x = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^2 e^x$

$y' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x + 2xe^x + 2e^x + 2xe^x + x^2 e^x$

$y'' = c_1 e^x + 2c_2 e^x + c_2 x e^x + 2e^x + 4xe^x + e^x$

a : $y'' - 2y' + y = 2e^x$

$c_1 e^x + 2c_2 e^x + c_2 x e^x + 2xe^x + 4xe^x + x^2 e^x - 2c_1 e^x - 2c_2 e^x - 2c_2 x e^x$
$-4xe^x - 2x^2 e^x + ce^x + c_2 x e^x + x^2 e^x = 2e^x$

$\rightarrow 2e^x = 2e^x$ a est correcte.

Fonctions

36) $f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ x\ln x - 1 & \text{si } x \in]0;+\infty[\end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -(x+1)^2 = -1$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x - 1 = -1$

$f(0) = -(0+1)^2 = -1$ donc continue en $x=0$

* $f'(x) = \begin{cases} -2(x+1) & \text{si } x \leq 0 \\ \ln x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $f'(0^-) = -2$

$f'(0^+) = -\infty$

donc non dérivable en $x=0$ réponse (a)

37) $h(x) = \dfrac{e^{2x} - 3}{e^{2x} - 1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \dfrac{-3}{-1} = 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$ réponse (c)

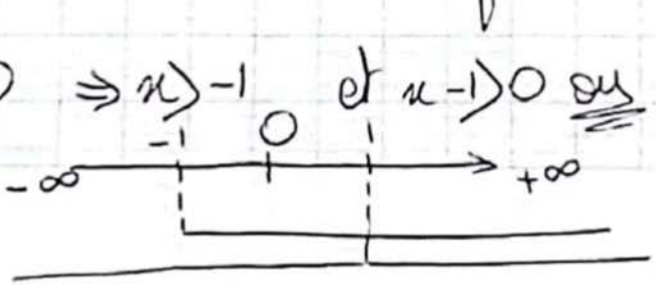
38) $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \dfrac{1-3}{0^-} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \dfrac{1-3}{0^+} = -\infty$ réponse (a)

39) $e^{-x} = \sin 2x \; e^{-x} \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = \pi/2 \Rightarrow \boxed{x = \pi/4}$ (c)

40) $f'(\pi/4) = e^{-\pi/4}$ $g'(\pi/4) = 2\cos\frac{\pi}{2} \times e^{-\pi/4} - \sin(2 \times \frac{\pi}{4})\, e^{-\pi/4} = e^{-\pi/4}$

et A commun donc confondu réponse (b)

41) $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$ et $x-1 > 0$ ou $x-1 < 0$



$x \in]1;+\infty[$ (a)

42) $f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1+x+1}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2-1}$ (b)

43) $f(x) = \ln(x+1) + \ln|x-1| \Rightarrow y = \ln(x^2-1)$ car $x>1$

$e^y = x^2-1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1+e^y}$ or $e^y > 0\ \forall y$

$x = \sqrt{1+e^y}$ donc $y = \sqrt{1+e^x}$ réponse (c)

44) $y = m + x$ (δ) $\quad x - \frac{e^x}{e^x-2} = x + m$

$m = \frac{-e^x}{e^x-2}$ $\quad e^x \neq 2$ donc $x \neq \ln 2$

$e^x m - 2m = -e^x \Rightarrow e^x = \frac{2}{1+m}$

$m = 0 \rightarrow e^x = 2$ (b) inclue

$m = -1 \rightarrow e^x = \frac{2}{0} = \infty$ $\rightarrow$ (a) inclue

$-\infty < x < +\infty \rightarrow 0 < e^x < +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} m = \frac{0}{2} = \boxed{0}$ $\quad \lim_{x\to+\infty} m = \boxed{-1} \rightarrow m \in]-1; 0[$

réponse (c)

45) $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \cancel{x} - \cancel{x} + \frac{e^x}{e^x-2}\,dx$ soit $u = e^x - 2$ $\quad du = e^x dx$

$\Rightarrow \int_1^6 \frac{du}{u} = \ln u\Big]_1^6 = \ln 6$ réponse (c)

Transformation

46) $S_1 = S(A, K, \alpha)$; $S_2 = S(B, \lambda, \beta)$

$S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1$

$S_1 : z' = Ke^{i\alpha} z + (1 - Ke^{i\alpha}) z_A$

$S_2 : z' = \lambda e^{i\beta} z + (1 - \lambda e^{i\beta}) z_B$

$S_1 \circ S_2 \Rightarrow z' = Ke^{i\alpha}\left(\lambda e^{i\beta} z + (1 - \lambda e^{i\beta}) z_B\right) + (1 - Ke^{i\alpha}) z_A$

$\Rightarrow S_1(S_2) = \lambda K e^{i(\alpha+\beta)} z + Ke^{i\alpha} z_B - \lambda K e^{i(\alpha+\beta)} z_B + z_A - Ke^{i\alpha} z_A$

$= \lambda K e^{i(\alpha+\beta)} z + \lambda e^{i\beta}(z_A - z_B) - \lambda K e^{i(\alpha+\beta)} z_B + z_A$

$\Rightarrow S_2 \circ S_1 \Rightarrow z' = K\lambda e^{i(\alpha+\beta)} z + \lambda e^{i\beta}(z_A - z_B) - K\lambda e^{i(\alpha+\beta)} z_A + z_B$

égalisons $Ke^{i\alpha}(z_B - z_A) - \lambda K e^{i(\alpha+\beta)} z_B + z_A = \lambda e^{i\beta}(z_A - z_B) - K\lambda e^{i(\alpha+\beta)} z_A + z_B$

$\Rightarrow (\lambda e^{i\beta} + Ke^{i\alpha})(z_A - z_B) + \lambda K e^{i(\alpha+\beta)}(z_B - z_A) + z_B - z_A = 0$

$\Rightarrow \underbrace{(z_B - z_A)}_{z_B = z_A}\underbrace{\left(-(\lambda e^{i\beta} + Ke^{i\alpha}) + \lambda K e^{i(\alpha+\beta)} + 1\right)}_{\lambda e^{i\beta} + Ke^{i\alpha} \neq \lambda K e^{i(\alpha+\beta)} + 1} = 0 \Rightarrow \boxed{A = B}$

réponse d

47) 

$S = 5\,cm^2$

$S' = 10\,cm^2$

$\frac{S'}{S} = 2$ rapport k

$\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} = k$ et $\frac{\overrightarrow{C'H'}}{\overrightarrow{CH}} = k$

Donc $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'H'} = k\,\overrightarrow{AB} \cdot k\,\overrightarrow{CH} = k^2\, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH}$

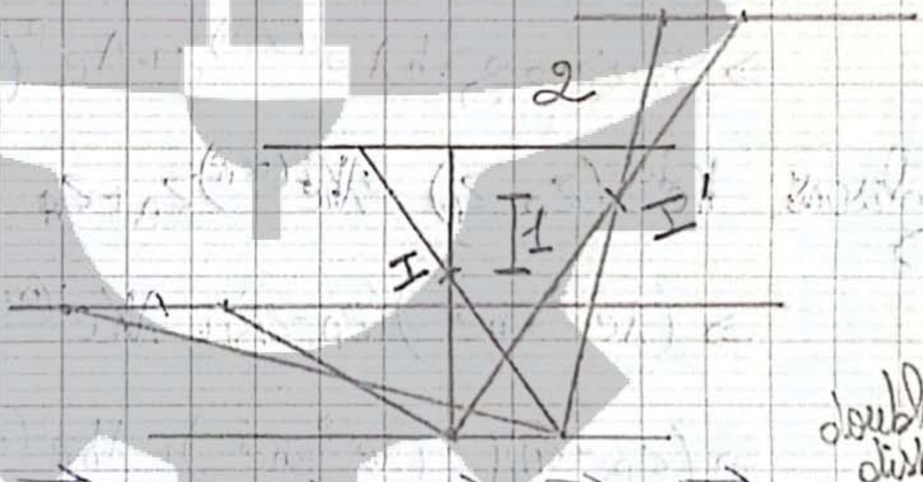
$k^2 = 2 \rightarrow k = \sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$ réponse a

48) $C(A, \frac{2}{3})$; $A(3;0)$; $I(x;y)$; $C'(B;2)$; $B(-5;0)$
avec $y=0$

$(C) \longrightarrow (C')$, K? I?
homothétie d'un cercle : $A \to B$
$\vec{IB} = K\vec{IA} \Rightarrow x+5 = k(x-3)$
or $K = \frac{R'}{R} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = \boxed{3}$ donc $x+5 = 3x-9$
$\Rightarrow \boxed{x=7}$ réponse b

49) $r \circ r = ?$
C'est une rotation d'angle α et de centre $\neq$
réponse C

50) $S \to E$
$S' \to F$
$S' \circ S = S'(S)$



$S : -\vec{EM'} = \vec{EM}$
$S' : -\vec{FM''} = \vec{FM'}$

double distance II'

$\vec{FM'} - \vec{EM'} = \vec{EM} - \vec{FM''} \Rightarrow \vec{FE} = \vec{EM} - \vec{FM} + \vec{MM''}$

$\vec{FE} = \vec{EF} + \vec{MM''} \Rightarrow \boxed{\vec{MM''} = 2\vec{EF}}$ réponse d

Test 4

GEOMETRIE ANALYTIQUE

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i}\ ,\vec{j}\ ,\vec{k}\ )$.

On considère le point $A(2\,;1\,;-1)$, **les plans** $(P)\ :\ 2x+y-2z-2=0$ **et** $(Q)\ :\ 4x-4y+2z-7=0$ **et la droite** $(d)\ :\ (\ x=\alpha-1\ \ ;\ \ y=-\alpha\ \ ;\ \ z=-4\alpha+10\ )$ **où** $\alpha\in IR$.

1- La mesure en radians de l'angle de la droite (d) et du plan (P) est :

a) $\dfrac{\pi}{3}$.

b) $\dfrac{3\pi}{4}$.

c) $\dfrac{\pi}{4}$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

2- Un système d'équations paramétriques de la projetée orthogonale de (d) sur le plan $(xO\,y)$ est

a) $(\ x=0\ \ ;\ \ y=0\ ;\ \ z=2t-5\ )$ où $t\in IR$.

b) $(\ x=-t-1\ \ ;\ \ y=-t\ \ ;\ \ z=0\ )$ où $t\in IR$.

c) $(\ x=t-1\ \ ;\ \ y=-t\ \ ;\ \ z=-4t)$ où $t\in IR$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

3- Le point $B(1\,;1\,;\dfrac{3}{2})$:

a) appartient au plan (P) et n'appartient pas au plan (Q).

b) appartient à un plan bissecteur du dièdre de faces (P) et (Q).

c) est équidistant de (P) et du plan (xOy).

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

4- Les points A and B :

a) se trouvent de part et d'autre du plan (P) .

b) se trouvent du même côté par rapport au plan (P) .

c) sont symétriques par rapport au plan (P) .

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

5- Une équation du plan médiateur du segment $[OA]$ est :

a) $2x+y-z-1=0$.

b) $x+y-z-2=0$

c) $2x+y-z-3=0$.

d) $x+y-z-3=0$.

NOMBRES COMPLEXES

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application f qui , à tout point M d'affixe $z \neq -2$, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-1}{z+2}$.

6- L'image du point M' par f est le point M'' d'affixe $z'' =$:

a) $\dfrac{-1}{z+2}$ où $z \neq -2$.

b) $\dfrac{-1}{z+1}$ où $z \neq -1$.

c) $\dfrac{-1}{z+1}$, $z \neq -2$ où $z \neq -1$.

d) $\dfrac{1}{z+2}$ où $z \neq -2$ et $z \neq -1$.

7- L'antécédent par f du point d'affixe $1+i$ est :

a) $2-3i$.

b) $-2+3i$.

c) $\overline{2-3i}$.

d) $3-2i$.

8- L'ensemble des points invariants par f est :

a) vide .

b) l'ensemble des points de l'axe des abscisses .

c) $\left\{ A(e^{2\frac{\pi}{3}i}) \, ; \, B(e^{-2\frac{\pi}{3}i}) \right\}$.

d) $\left\{ A(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}) \, ; \, B(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}) \right\}$.

9- L'ensemble des points M tels que $OM' = 1$ est :

a) une droite .

b) une droite dépourvue d'un point .

c) un cercle

d) un cercle dépourvu d'un point .

10- L'ensemble des points M tels que $\overline{z'} = -z'$ est :

a) une droite .

b) une droite dépourvue d'un point .

c) un cercle

d) un cercle dépourvu d'un point .

SUITES

Les suites (A_n) , (B_n) and (C_n) sont telles que , pour tout $n \geq 2020$, $A_n \leq B_n \leq C_n$.

11- Si (A_n) converge vers -2 et (C_n) converge vers 2 , alors :

a) (B_n) est bornée .

b) (B_n) converge vers une limite appartenant à l'intervalle $[-2\,;\,2]$.

c) (B_n) est divergente .

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

(U_n) is a sequence defined in IN such that $U_3 = -5$ and $U_6 = 40$

12- Si (U_n) est arithmétique , alors $U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 =$:

a) 210 .

b) $52,5$.

c) 105 .

d) 60 .

13- Si (U_n) est géométrique , alors $U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 =$:

a) -35 .

b) $-52,5$.

c) $27,5$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

(V_n) est une suite de premier terme $V_0 = -2$ telle que , pour tout n , $V_{n+1} = \frac{1}{4}V_n + 3$.

14- (V_n) est :

a) croissante .

b) décroissante .

c) périodique .

d) non monotone .

15- La suite (q_n) est telle que , pour tout n , $q_n = V_n - 4$; (q_n) est :

a) géométrique et décroissante .

b) géométrique et croissante .

c) géométrique et non monotone .

d) arithmétique et croissante .

PROBABILITE

Dans un certain collège , $60\ \%$ des étudiants sont des filles .
$1\ \%$ des filles et $4\ \%$ des garçons sont plus grands que $1,8$ *m* .
Un étudiant est choisi au hasard .

16- La probabilité que l'étudiant choisi soit plus grand que $1,8\ m$ est égale à :
- a) $0,05$.
- b) $0,28$.
- c) $0,22$
- d) $0,022$.

17- La probabilité que l'étudiant choisi soit une fille sachant qu'elle est plus grande que $1,8\ m$ est égale à :
- a) $\frac{8}{11}$.
- b) $\frac{3}{11}$.
- c) $\frac{2}{125}$
- d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

18- La probabilité que l'étudiant choisi soit un garçon sachant qu'il est plus petit que $1,8\ m$ est égale à :
- a) $\frac{8}{11}$.
- b) $\frac{64}{163}$.
- c) $\frac{99}{163}$.
- d) aucune des réponses ci-dessus n'est correcte.

***A* et *B* sont deux événements d'un univers Ω tels que $p(A)=0,375$, $p(B)=0,5$ et $p(A\cap B)=0,125$.**

19- $p(\overline{A}\cap\overline{B})=$
- a) $0,75$.
- b) $0,625\times 0,5$.
- c) $0,25$.
- d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

20- $p(B/\overline{A})=$
- a) $0,6$.
- b) $0,625$.
- c) $0,375$.
- d) $0,4$.

EQUATIONS ET INEQUATIONS

21- L'ensemble des solutions de l'équation $\ell n(e^{7-x^2}) = x^2 - 7$ est :

a) ϕ .
b) $\{\sqrt{7}\}$.
c) $\{-\sqrt{7}\,;\sqrt{7}\}$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

22- L'ensemble des solutions de l'équation $\exp(\ell n(4-x^2)) = 1-2x$ est :

a) $\{-1; 3\}$.
b) $\{-1\}$.
c) $\{3\}$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

23- L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ell n|x| < 0$ est :

a) $[-1\,;1]$.
b) $]-1\,;1[$.
c) $]-1\,;0[$.
d) $]-1\,;1[-\{0\}$.

24- L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{\ell n\,x+2}{1-\ell n\,x} \geq 2$ est :

a) $[1\,;e]$.
b) $[1\,;e[$.
c) $]0\,;1]\cup]e\,;+\infty[$.
d) $]0\,;1]\cup[e\,;+\infty[$.

25- L'ensemble des solutions de l'équation $x^2e^{-x} = -1$ est :

a) $\{e^{1-\ell n3}\}$.
b) $\{2e-5\}$.
c) ϕ.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

INTEGRALES

26- $\displaystyle\int_1^e \frac{\ell n\, x}{x}\,dx$ est égale à :

a) 1 .

b) $\frac{1}{2}$.

c) -1 .

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

27- $\displaystyle\int_0^{\ell n 2} \frac{e^x}{4-e^x}\,dx$ est égale à :

a) $\ell n(1,5)$.

b) $\ell n 2 - \ell n 3$.

c) $\ell n 2 - 1$.

d) $1 - \ell n 2$.

28- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\, dx$ est égale à :

a) 3 .

b) $1{,}5$.

c) $-\ell n 2$.

d) $\ell n 2$.

La fonction f est définie sur IR par $f(x) = \displaystyle\int_0^{4-2x} \sqrt{1+t^2}\,dt$.

29- La fonction f est :

a) croissante .

b) décroissante .

c) décroissante sur $]-\infty\,;2[$ et croissante sur $]2\,;+\infty[$.

d) croissante sur $]-\infty\,;2[$ et décroissante sur $]2\,;+\infty[$.

30- Une équation de la tangente a la courbe représentative de f au point d'abscisse 2 est :

a) $y = x-1$.

b) $y = 2x-4$.

c) $y = -2x+4$.

d) $y = -2x$.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$

On considère les équations différentielles (1) : $y' - 2y = 2e^{x}$ **et** (2) : $y' - y = e^{2x}$**.**

31- la solution de (1) telle que $y(0) = 2$ est définie par :

a) $y = e^{2x} + e^{x}$.

b) $y = 4e^{2x} - 2e^{x}$.

c) $y = 3x + 2$.

d) $y = (3x - 2)e^{x}$.

31- la solution de (2) telle que $y(0) = 2$ est définie par :

a) $y = e^{2x} + e^{x}$.

b) $y = -e^{2x} + 3e^{x}$.

c) $y = 3x + 2$.

d) $y = (3x - 2)e^{x}$.

33- La fonction f telle que $f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$ est :

a) une solution de (1) et n'est pas une solution de (2).

b) une solution de (2) et n'est pas une solution de (1).

c) une solution de (1) et de (2).

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

34- On considère l'équations différentielle (3) : $y'' + ay' + by = 0$.

La fonction f définie ci-dessus est une solution de (3) si et seulement si :

a) $a = 3$ et $b = 2$.

b) $a = -3$ et $b = 2$.

c) $a = -3$ et $b = -2$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

On considère l'équations différentielle (E) : $x\,y' + (1 - x)y + x = 0$.

35- La fonction h définie sur $IR - \{0\}$ par $h(x) = \dfrac{ax + b - e^{x}}{x}$ est une solution de (E) si et seulement si :

a) $a = b = 1$.

b) $a = -1$ et $b = 1$.

c) $a = 0$ et $b = -2$.

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

FONCTIONS

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$

36- La fonction f définie sur IR par $f(x)=\begin{cases}-e^{-x}-1 & si\ x\le 0\\ \ell n(x+1)-2 & si\ x>0\end{cases}$ est :

a) continue et non dérivable en 0 .
b) dérivable et non continue en 0 .
c) continue et dérivable en 0 .
d) non continue et non dérivable en 0 .

La fonction h est définie sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,2[$ par $h(x)=\dfrac{\ell n(2-x)}{e^x-1}$.

37- $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\ell_1$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)=\ell_2$ où :

a) $\ell_1=+\infty$ et $\ell_2=-\infty$.
b) $\ell_1=-\infty$ et $\ell_2=0$.
c) $\ell_1=-\infty$ et $\ell_2=-\infty$.
d) $\ell_1=+\infty$ et $\ell_2=+\infty$.

38- $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=L_1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=L_2$ où :

a) $L_1=-\infty$ et $L_2=-\infty$.
b) $L_1=-\infty$ et $L_2=+\infty$.
c) $L_1=-\infty$ et $L_2=0$.
d) $L_1=0$ et $L_2=+\infty$.

La fonction g est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=x-2-2\,\ell n\,x$.
Soit (γ) la courbe représentative de f et M un point de (γ) d'abscisse m.

39- La tangente en M à (γ) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée :

a) $4-2\,\ell n(m)$.
b) $2\,\ell n(m)$.
c) $-\,\ell n(m)$.
d) $-2\,\ell n(m)$.

40- La distance de M à la droite d'équation $y=x$ est égale à $\sqrt{2}$ si et seulement si :

a) $m=1$ ou $m=e^{-1}$
b) $m=1$.
c) $m=1$ ou $m=e^{-2}$.
d) $m=e^{-2}$.

Les fonctions f et g sont définies sur IR par $f(x) = e^x - x - 1$ et $g(x) = -e^x - x - 1$.
Soit (C) et (C') les courbes représentatives de f et g respectivement .

41- La droite (δ) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote :
a) à (C) en $-\infty$ et à (C') en $+\infty$.
b) à (C) en $+\infty$ et à (C') en $-\infty$.
c) à (C) et (C') en $-\infty$.
d) à (C) et (C') en $+\infty$.

42- La position relative de (C) , (C') et (δ) est telle que :
a) (C) et (C') sont situées au dessous de (δ) .
b) (C) et (C') sont situées au dessus de (δ) .
c) (C) est située au dessous de (δ) et (C') est située au dessus de (δ) .
d) (C) est située au dessus de (δ) et (C') est située au dessous de (δ) .

43- La droite (Δ) d'équation $y = -x - m$ coupe le deux courbes (C) et (C') si et seulement si :
a) $m > 1$.
b) $m < 1$.
c) $m > -1$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

44- Soit A un point de (C) et A' le point de (C') ayant la même abscisse a où $a > 0$.
Les tangentes à (C) et (C') en A et A' respectivement sont perpendiculaires si et seulement si :
a) $a = \ell n\sqrt{2}$.
b) $a = \ell n 2$.
c) $a = 2\ell n 2$.
d) $a = 2$.

45- Soit S la mesure de l'aire du domaine délimité par (C) , (δ) , $y'y$ et (AA');
Soit S' la mesure de l'aire du domaine délimité par (C') , (δ) , $y'y$ et (AA') .
Pour tout $a > 0$:
a) $S + S' = 2$.
b) $S = S'$.
c) $S = 2S'$.
d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

TRANSFORMATIONS

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

46- A étant un point donné , soit f l'homothétie $h(I\,;-3)$ et g la rotation $r(I\,;\alpha)$; $g\circ f$ est :

a) la similitude $S(I\,;-3\,;\alpha)$.

b) la similitude $S(I\,;3\,;\alpha)$.

c) la similitude $S(I\,;-3\,;\alpha+\pi)$.

d) la similitude $S(I\,;3\,;\alpha+\pi)$.

47- S_1 est la similitude $S(I\,;k\,;\alpha)$ et S_2 est la similitude $S(J\,;k\,;\pi-\alpha)$.

Les transformations $S_2\circ S_1$ et $S_1\circ S_2$ sont telles que :

a) $S_2\circ S_1=S(I\,;k\,;\pi)$ et $S_1\circ S_2=S(J\,;k\,;\pi)$.

b) $S_2\circ S_1=S(I\,;k^2\,;\alpha)$ et $S_1\circ S_2=S(J\,;k^2\,;\pi-\alpha)$.

c) $S_2\circ S_1$ et $S_1\circ S_2$ sont deux homothéties de rapport $-k^2$.

d) $S_2\circ S_1$ et $S_1\circ S_2$ sont deux homothéties de rapport k^2.

On considère les trois points $A(-1\,;1)$, $B(9\,;6)$ and $C(3\,;-2)$.

48- La similitude S de centre C qui transforme A en B a le rapport k et l'angle α tels que :

a) $k=\dfrac{1}{2}$; $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

b) $k=2$; $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

c) $k=2$; $\alpha=-\dfrac{\pi}{2}$.

d) $k=\dfrac{1}{2}$; $\alpha=-\dfrac{\pi}{2}$.

49- Soit T la transformation de relation complexe: $z'=\dfrac{1}{2}(1+i)z+\dfrac{1}{2}(1-5i)$ et f est l'homothétie définie ci-dessus ; alors :

a) $T\circ T=f$.

b) $T\circ T=f^{-1}$.

c) $T\circ f=f^{-1}$.

d) $T\circ f=T^{-1}$.

50- S est la similitude de relation complexe $z'=-z+4-2i$ et T est la translation de vecteur $\vec{V}(4\,;-2)$.

La transformation $S\circ T$:

a) a pour relation complexe $z'=-z+4$.

b) est la symétrie centrale de centre O .

c) est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses .

d) aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

Test 4:

Préparé par:
Social Club ULFG II

1- $\vec{v_d}\,(1;-1;-4)$

$\vec{N_P}\,(2;1;-2)$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v_d}\cdot\vec{N_P}}{\|\vec{v_d}\|\cdot\|\vec{N_P}\|} = \frac{2-1+8}{3\sqrt{2}\times 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

c)

2- $(xOy):\ z=0$

$\vec{N}_{(xOy)}\,(0,0;1)$

Le projeté orthogonale de (d) est colinéaire à $\vec{N}_{(xOy)}$.
vecteur directeur de la

Donc $x=0$; $y=0$

(d) a pour vecteur directeur $\vec{v}\,(1;-1;-4)$.

$$\vec{v}\cdot\vec{N}_{(xOy)} = 0+0-4 = -4 \neq 0.$$

d)

3- Plan bissecteur:

$$\frac{2x+y-2z-2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \pm\frac{4x-4y+2z-7}{\sqrt{4^2+4^2+2^2}}$$

$$\frac{2x+y-2z-2}{3} = \frac{4x-4y+2z-7}{6}$$

$$4x+2y-4z-4 = 4x-4y+2z-7$$

$$6y-6z+3=0.$$

$$2y-2z+1=0.$$

Remplaçons avec les coordonnées de B:

$2\times1 - 2\times\frac{3}{2}+1 = 0$ vérifiée.

b)

4- $$\overline{d(A,(P))} = \frac{2\times2+1+1\times2-2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{5}{3} > 0$$

$$\overline{d(B,(P))} = \frac{1\times2+1\times1+\frac{3}{2}\times2-2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{4}{3} > 0$$

b)

5. $\vec{OA}$ vecteur normal du plan médiateur.

$$2x + y - z + cst = 0.$$

milieu de $[OA]$: $M\left(1 ; \frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$

$$2 \times 1 + 1 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} + cst = 0$$

$$cst = -3.$$

$$2x + y - z - 3 = 0$$

c)

6. $z'' = \dfrac{z'-1}{z'+2} = \dfrac{\frac{z-1}{z+2} - 1}{\frac{z-1}{z+2} + 2} = \dfrac{z-1-z-2}{z-1+2z+4} = \dfrac{-1}{z+1}$ avec $z \neq -2$ et $z \neq -1$

c)

7. $1 + i = \dfrac{z-1}{z+2}$

$$z + 2 + iz + 2i = z - 1$$

$$iz = -3 - 2i$$

$$z = -2 + 3i$$

b)

8. $z = \dfrac{z-1}{z+2}$

$$z^2 + 2z = z - 1$$

$$z^2 + z + 1 = 0$$

$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = e^{2/3 \pi i}$ ou $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = e^{-2/3 \pi i}$

c)

9. $|z'| = 1$

$$\left| \frac{z-1}{z+2} \right| = 1$$

$$|z-1| = |z+2|$$

$$(x-1)^2 + y^2 = (x+2)^2 + y^2$$

$$x - 1 = -x - 2$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

a)

(3)

10- $z' = \dfrac{z-1}{z+2} = \dfrac{x-1+iy}{x+2+iy} = \dfrac{(x-1+iy)(x+2-iy)}{(x+2)^2+y^2}$

$z' = \dfrac{x^2+2x-ixy-x-2+iy+ixy+2iy+y^2}{(x+2)^2+y^2}$

$z' = \dfrac{x^2+y^2+x-2}{(x+2)^2+y^2} + \dfrac{3y}{(x+2)^2+y^2}i$

$\overline{z'} = -z'$

$Re(z') = 0.$

$x^2+y^2+x-2 = 0.$

$(x+\frac{1}{2})^2+y^2 = \frac{9}{4}$ avec $z \neq -2$; $x \neq -2$

d)

11- b)

12- $u_6 = u_3 + (6-3)r$

$r = \frac{45}{3} = 15$

$u_2 = u_3 - 15 = -20.$

$u_7 = u_6 + 15 = 55$

$u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+u_7 = \dfrac{(u_2+u_7)(7-2+1)}{2} = 105$

c)

13- $u_6 = u_3 \cdot q^{6-3}$

$q^3 = -8.$

$q = -2.$

$u_2 = \frac{u_3}{-2} = \frac{5}{2}.$

$u_7 = -2u_6 = -80.$

$u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+u_7 = u_2 \times \dfrac{1-(-2)^{7-2+1}}{1-(-2)} = -52,5$

b)

14- $V_0 = -2.$

$V_1 = \frac{1}{4}V_0 + 3 = \frac{5}{2} > V_0$

$V_2 = \frac{29}{8} > V_1$

$V_3 = \frac{125}{32} > V_2$

Supposons que $V_n > V_{n-1}$

Démontrons que $V_{n+1} > V_n$.

$\frac{1}{4}V_n > \frac{1}{4}V_{n-1}$

$\frac{1}{4}V_n + 3 > \frac{1}{4}V_{n-1} + 3$

$V_{n+1} > V_n$ suite croissante.

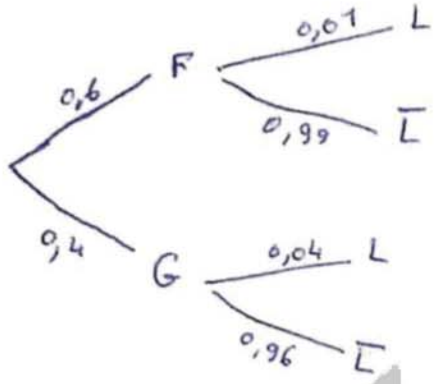
a)

15- $\dfrac{q_{n+1}}{q_n} = \dfrac{V_{n+1} - 4}{V_n - 4} = \dfrac{1/4\, V_n + 3 - 4}{V_n - 4} = \dfrac{1}{4} < 1$

géométrique et décroissante

a)

16-



$p(L) = 0,6 \times 0,01 + 0,4 \times 0,04 = 0,022.$

d)

17- $p(F/L) = \dfrac{0,6 \times 0,01}{0,022} = \dfrac{3}{11}.$

b)

18- $p(G/\bar{L}) = \dfrac{0,4 \times 0,96}{1 - 0,022} = \dfrac{64}{163}$

b)

19- $p(\bar{A}) = 0,625$

$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B)$

$= 1 - p(A) - p(B) + p(A \cap B)$

$= 1 - 0,375 - 0,5 + 0,125$

$= 0,25$

c)

20- $p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) - p(\bar{A} \cap \bar{B})$

$= 0,625 - 0,25$

$= 0,375$

$p(B/\bar{A}) = \dfrac{p(\bar{A} \cap B)}{p(\bar{A})} = 0,6.$

a)

21- $\ln e^{7-x^2} = x^2 - 7.$

$7 - x^2 = x^2 - 7$

$2x^2 = 14.$

$x^2 = 7$

$x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}.$

c)

22- $e^{\ln(4-x^2)} = 1 - 2x$.

$4 - x^2 = 1 - 2x$

$x^2 - 2x - 3 = 0$.

$x = 3$ ou $x = -1$.

a)

23- $\ln|x| < 0$.

$e^{\ln|x|} < e^0$.

$|x| < 1$.

$-1 < x < 1$ avec $x \neq 0$

d)

24- $\dfrac{\ln x + 2}{1 - \ln x} \geqslant 2$ et $1 - \ln x > 0$.

$\ln x + 2 \geqslant 2 - 2\ln x$ $\quad$ $\ln x < 1$.

$3\ln x \geqslant 0$. $\quad$ $x < e$.

$\ln x \geqslant 0$

$x \geqslant 1$ $\quad$ $x \in [1; e[$

b)

25- $x^2 e^{-x} = -1$

$x^2 \geqslant 0 \quad \forall x$

$e^{-x} \geqslant 0 \quad \forall x$

$x^2 e^{-x} \geqslant 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow \emptyset$.

c)

26- $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

$u' = \frac{1}{x}$; $u = \ln x$

$\left.\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^e = \frac{1}{2}\ln^2 e - \frac{1}{2}\ln^2 1 = \frac{1}{2}$.

b).

27- $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{4-e^x}\,dx$

$u = 4 - e^x$

$u' = -e^x$

$\left[-\ln(4-e^x)\right]_0^{\ln 2} = -\ln 2 + \ln 3 = \ln \frac{3}{2}$.

a)

28- $\int_0^{\pi/3} \tan x\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$ $\quad u = \cos x$

$u' = -\sin x$

$\left.-\ln \cos x\right]_0^{\pi/3} = -\ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] + \ln\left[\cos(0)\right] = -\ln\frac{1}{2} + \ln 1 = \ln 2$.

d)

29- $f(x) = \int_0^{4-2x} \sqrt{1+t^2}\,dt = F(4-2x) - F(0)$

$f'(x) = \left(F(4-2x)\right)' - \left(F(0)\right)'$

$= \left(F(4-2x)\right)'$

$= -2F'(4-2x)$

$= -2\sqrt{1+(4-2x)^2} < 0$

b)

30- Pente de la tangente à la courbe $\quad a = f'(x) = -2\sqrt{1+(4-2x)^2}$

en $x = 2$: $\quad a = -2\sqrt{1} = -2$.

$y = -2x + b$

Or $f(x) = 0$ si $x = 2$.

$0 = -4 + b \Rightarrow b = 4$.

$y = -2x + 4$

c)

31- $y' - 2y = 2e^x$.

$y = C e^{2x}$ + solution particulière

* $y = e^{2x} + e^x$

$y' = 2e^{2x} + e^x$

$y' - 2y = 2e^{2x} + e^x - 2e^{2x} - 2e^x = -e^x \neq 2e^x$

* $y = 4e^{2x} - 2e^x$.

$y' = 8e^{2x} - 2e^x$

$y' - 2y = 8e^{2x} - 2e^x - 8e^{2x} + 4e^x$

$= 2e^x$.

b)

32- $y(0)=2$

a) $y=e^{2x}+e^{x} \Rightarrow y(0)=1+1=2$

$y'=2e^{2x}+e^{x}$

$\Rightarrow 2e^{2x}+e^{x}-e^{2x}-e^{x}=e^{2x}$

$e^{2x}=e^{2x}$

donc (a) est vraie

b) $y(0)=-1+3=2$

$y'=-2e^{2x}+3e^{x} \Rightarrow -2e^{2x}+3e^{x}+e^{2x}-3e^{x}=e^{2x}$

$-e^{2x}=e^{2x}$ Faux

c) $y(0)=2 \Rightarrow y'=3 \rightarrow 3-3x+2=e^{2x}$ Faux

d) $y(0)=-2$ Faux

Seulement (a) est vraie

33-

Remplaçons dans l'équation (1) : $y'-2y=2e^{x}$

$f'(x)=2e^{2x}-2e^{x} \Rightarrow 2e^{2x}-2e^{x}-2e^{2x}+4e^{x}=2e^{x}$

$2e^{x}=2e^{x}$

Vrai

Alors $f(x)$ est une solution de (1)

Remplaçons dans (2) : $y'-y=e^{2x}$

$2e^{2x}-2e^{x}-e^{2x}+2e^{x}=e^{2x}$

$e^{2x}=e^{2x}$

Vrai

Alors $f(x)$ est une solution de (2)

$\Rightarrow$ (c) est correcte.

34- Si $a=3$ et $b=2$:

$4e^{2x}-2e^{x}+3(2e^{2x}-2e^{x})+2(e^{2x}-2e^{x})=0$

$4e^{2x}-2e^{x}+6e^{2x}-6e^{x}+2e^{2x}-4e^{x}=0$

$12e^{2x}-12e^{x}=0$

Faux

$f(x)=e^{2x}-2e^{x}$

$f'(x)=2e^{2x}-2e^{x}$

$f''(x)=4e^{2x}-2e^{x}$

Si $a=-3$ et $b=2$:

$4e^{2x}-2e^{x}-3(2e^{2x}-2e^{x})+2(e^{2x}-2e^{x})=0$

$4e^{2x}-2e^{x}-6e^{2x}+6e^{x}+2e^{2x}-4e^{x}=0$

$0=0$ Vrai

(b) est correcte

Si $a=-3$ et $b=-2$:

$4e^{2x}-2e^{x}-3(2e^{2x}-2e^{x})-2(e^{2x}-2e^{x})=0$

$4e^{2x}-2e^{x}-6e^{2x}+6e^{x}-2e^{2x}+4e^{x}=0$

$-4e^{2x}+8e^{x}=0$

Faux

35- $h(x)=\dfrac{ax+b-e^{x}}{x}$

$h'(x)=\dfrac{(a-e^{x})x-ax-b+e^{x}}{x^2}=\dfrac{ax-e^{x}x-ax-b+e^{x}}{x^2}=\dfrac{e^{x}(-x+1)-b}{x^2}$

Remplaçons dans (E) : $\dfrac{e^{x}(-x+1)-b}{x}+(1-x)\dfrac{(ax+b-e^{x})}{x}+x=0$

Si $a=b=1$: $\dfrac{e^{x}(-x+1)-1}{x}+\dfrac{(1-x)(x+1-e^{x})}{x}+x=0$

$\dfrac{-xe^{x}+e^{x}-1+x+1-e^{x}-x^2-x+xe^{x}}{x}+x=0$

$-x+x=0$

$0=0$ Vrai

donc (a) est corrate.

Si $a=-1$ et $b=1$: $\dfrac{e^{x}(-x+1)-2}{x}+\dfrac{(1-x)(-x+1-e^{x})}{x}+x=0$

$\dfrac{-e^{x}x+e^{x}-2-x+1-e^{x}+x^2-x+xe^{x}}{x}+x=0$

$\dfrac{-1-2x+x^2}{x}+x=0$ Faux

36- $\lim_{x \to 0^-} (-e^{-x}-1) = -2$

$\lim_{x \to 0^+} (\ln(x+1)-2) = -2$

Donc f est continue car $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$ en 0

$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-e^{-x}-1+2}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-e^{-x}+1}{x}$ Hopital: $\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{x}}{1} = 1$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)+2}{x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

Donc non dérivable en 0

(a) est correcte

37- $\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(2-x)}{e^{x}-1} = -\infty = l_1$ car $\lim_{x \to \infty} \ln(2-x) = -\infty$

et $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

$\lim_{x \to 2^-} h(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{\ln(2-x)}{e^{x}-1} \Rightarrow$ Hopital: $\frac{\frac{-1}{2-x}}{e^{x}}$ $\lim_{x \to 2^-} \frac{-1}{(2-x)e^{x}} = \frac{-1}{0^-} = -\infty = l_2$

donc (c) est correcte

38- $\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(2-x)}{e^{x}-1} = \frac{\ln(2)}{0^-} = -\infty = L_1$

$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(2-x)}{e^{x}-1} = \frac{\ln(2)}{0^+} = +\infty = L_2$

donc (b) est correcte

39- $g'(x) = 1 - \frac{2}{x}$ = pente de la tangente $g'(m) = 1 - \frac{2}{m}$

$g(m) = m-2-2\ln m \rightarrow M(m, m-2-2\ln m)$

$\rightarrow (T):$ $y = \left(1-\frac{2}{m}\right) \times 0 + b$

$m-2-2\ln m = \left(1-\frac{2}{m}\right)m + b$

$\Rightarrow b = -2+2-2\ln m$

$b = -2\ln m$

$\Rightarrow$ (d) est correcte

40- Distance d'un point à une droite :

$$d(M,(d)) = \frac{|m - m + 2 + 2\ln m|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

$2 + 2\ln m = 2$ ou $2 + 2\ln m = -2$.

$2\ln m = 0$ $\qquad$ $2\ln m = -4$

$\ln m = 0$ $\qquad$ $\ln m = -2$

$m = 1$ $\qquad$ $m = e^{-2}$.

c)

41- $f(x) - y = e^{x}$. $\qquad$ $g(x) - y = -e^{x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$. $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} -e^{x} = 0$.

c)

42- $f(x) - y = e^{x} > 0$ $\qquad$ $g(x) - y = -e^{x} < 0$

$f(x) > y$. $\qquad$ $g(x) < y$.

d)

43- $y = f(x)$ $\qquad$ $y = g(x)$

$-x - m = e^{x} - x - 1$. $\qquad$ $-x - m = -e^{x} - x - 1$.

$m = 1 - e^{x}$ $\qquad$ $m = 1 + e^{x}$.

$e^{x} > 0$ $\qquad$ $e^{x} > 0$.

$m < 1$. et $m > 1$.

impossible

d).

44- $x_A = x_{A'} = a$.

$f'(x) = e^{x} - 1$ $\qquad$ $g'(x) = -e^{x} - 1$.

$f'(\ln\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$. $\qquad$ $g'(\ln\sqrt{2}) = -\sqrt{2} - 1$

$f'(\ln\sqrt{2}) \cdot g'(\ln\sqrt{2}) = (\sqrt{2} - 1)(-\sqrt{2} - 1) = -2 + 1 = -1$

a).

$(e^{a} - 1)(-e^{a} - 1) = -1$

$(e^{a} - 1)(e^{a} + 1) = 1$.

$e^{2a} - 1 = 1$.

$e^{2a} = 2$.

$2a = \ln 2$.

$a = \frac{\ln 2}{2} = \ln 2^{1/2} = \ln\sqrt{2}$

a)

45- $y'y \longrightarrow x = 0$

$AA' \longrightarrow x = \ln\sqrt{2}$

$$A_f = \int_0^{\ln\sqrt{2}} |e^x|\,dx = \int_0^{\ln\sqrt{2}} e^x\,dx = e^{\ln\sqrt{2}} - e^0 = \sqrt{2} - 1.$$

$$A_g = \int_0^{\ln\sqrt{2}} |e^x|\,dx = \int_0^{\ln\sqrt{2}} e^x\,dx = \sqrt{2} - 1.$$

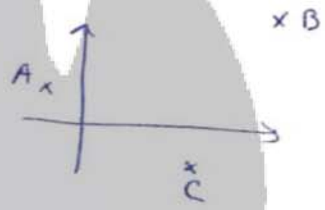
b)

46- d)

47- c)

48- $k = \frac{CB}{CA} = \frac{\sqrt{(3-9)^2 + (-2-6)^2}}{\sqrt{(3+1)^2 + (-2-1)^2}} = 2$

$\alpha = (\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{2}$



c)

49- Homothétie $f : h(I; -3)$: $z' = -3z + b$

Transformation T : $z' = \frac{1}{2}(1+i)z + \frac{1}{2}(1-5i)$

$T \circ T$: $z' = \frac{1}{2}(1+i)\left[\frac{1}{2}(1+i)z + \frac{1}{2}(1-5i)\right] + \frac{1}{2}(1-5i)$

$z' = \frac{1}{2} iz + 2 - \frac{7}{2} i$

$\neq z' = -3z + b.$

$T \circ T \neq f.$

$f^{-1} : h(I; -\frac{1}{3})$: $z' = -\frac{1}{3} z + \frac{b}{3}.$

$T \circ T \neq f^{-1}$

T^{-1} : $z = \frac{1}{2}(1+i)z' + \frac{1}{2}(1-5i).$

$\frac{1}{2}(1+i)z' = z - \frac{1}{2}(1-5i).$

$z' = (1-i)z + 2 + 3i.$

$T \circ f$:

$$z' = \frac{1}{2}(1+i)(-3z+b) + \frac{1}{2}(1-5i)$$

$$z' = -\frac{3}{2}(1+i)z + \frac{1}{2}b(1+i) + \frac{1}{2}(1-5i).$$

$T \circ f \neq f^{-1}$

$T \circ f \neq T^{-1}$

aucune des propositions n'est correcte.

50- S : $z' = -z + 4 - 2i$

T : $z' = z + 4 - 2i$

$S \circ T$:

$$z' = -(z + 4 - 2i) + 4 - 2i$$

$$z' = -z.$$

Symétrie centrale de centre O.

b)