Année académique : 2023-2024 **Date: 6/01/2024**
Classe: SG **Points: 40 pts.**
Sujet: Mathématiques **Durée: 240 min.**

I- (8 points)

Dans le tableau ci-dessous, pour chaque question une seule réponse est correcte.
Choisir la bonne réponse en justifiant chaque fois ta réponse.

N	Questions	Réponses		
		A	B	C
1)	Le Somme des solutions de l'équation : $e^x + e^{-x} - 3 = 0$ est	0	$\ln(2)$	$3\ln(2)$
2)	$\lim\limits_{x \to 0^-} xe^{-\frac{1}{x}} =$	$+\infty$	0	$-\infty$
3)	f(x) = $\ln\left((6x-12)e^{\frac{x}{2}} + 2 - x\right)$ Le domain de definition est :	]-2ln(6) ; +∞ [	]2 ; +∞ [	]−∞ ; -2ln(6)[U]2 ; +∞[
4)	A = $e^{\frac{5}{3}} + 3e^3 e^{-\frac{4}{3}}$ est égal à :	$\frac{1}{8}(2e^{\frac{1}{3}})^5$	$4 + e^{\frac{5}{3}}$	$e^{\frac{5}{3}} + 3e^{-4}$
5)	Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct soit le point A(2-i) alors l'affixe de B si OAB est un un triangle rectangle isocèle direct en A et l'affixe de C si OABC est un carré direct, est	$z_B = 3 + i$ et $z_C = 1 + 2i$	$z_B = 1 - 3i$ et $z_C = -1 - 2i$	$z_B = 2 + i$ et $z_C = 2i$
6)	f(x) = $x^2(lnx + e^x)$, donc f '(x) =	$x^2(\frac{1}{x} + e^x)$	$x(2lnx + (x + 2)e^x + 1)$	$2xlnx + x^2e^x$
7)	Soit M(z) , M'(z') , $\|z\| = 3$, alors $\|z - \frac{1}{\bar{z}}\|$	$\frac{8}{3}$	1	3
8)	Soit r la rotation de centre O et angle $-\frac{\pi}{2}$ et h l'homothetie de centre O et rapport $\frac{1}{2}$, S = r o h , et soit une fonction f(x) = e^{-x+1} et g(x) l'image de f(x) par S , g(x) =	$\frac{\ln(2x)+1}{2}$	$\frac{\ln(2x)-1}{2}$	$\frac{\ln(2x)}{2}$

II- (7 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. on donne les points A , B , C , D , E , M et M' d'affixes $z_A = 1$, $z_B = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_C = 3i$, $z_D = 1 + i$, $z_E = i$, z et z' telque $z' = \frac{iz+1-i}{z-3i}$ $(z \neq 3i)$.

1)
- **a) Ecrire $z_B - z_A$ sous forme exponential .**
- **b) Déterminer la nature du triangle OAB .**

2) Soit (C) un cercle de centre O et rayon 1
- **a) Montrer que $z' = i(\frac{z-1-i}{z-3i})$.**
- **b) Déduire le lieux géométrique de M , si M' décrit le cercle (C).**
- **c) Si M décrit la droite $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$, déduire le lieux géométrique de M' .**

3)
- **a) Montrer que $z' - i = \frac{-2-i}{z-3i}$.**
- **b) $|(z' - i)(z - 3i)| =$ à $une\ réel$ à déterminer .**
- **c) Si M décrit le Cercle de centre C et rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$. déduire le lieux géométrique de M'**

4) Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$.
- **a) Exprimer x' et y' en function de x et y**
- **b) Trouver l'ensemble des points M , si z' est réel .**
- **c) Démontrer que M' ∈ (D) d'une equation a determiner si z est reel .**
- **d) Trouver l'ensemble des points M , si z' est imaginaire pure .**

III - (7 points)

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -(ln(x))^2 + 2ln(x) + x^2 + 1$, On désigne par (G) sa courbe représentative dans un repére orthonormal.

1) Calculer g'(x) et justifier que g'(x) = 0 n'admet aucun solution , puis dresser le tableau de variations de g.

2) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α , vérifier que α ∈]0.58,0.59[.

3) Etudier le signe de g (x).

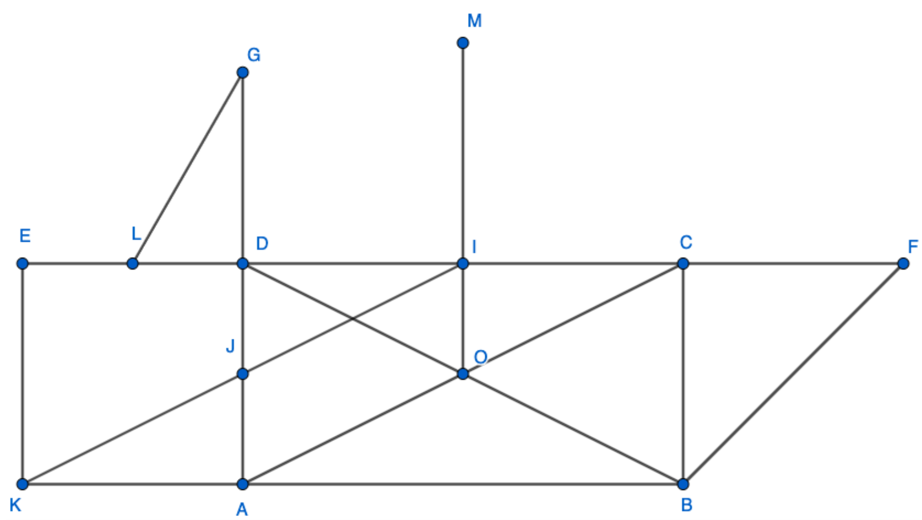
Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{(ln(x))^2-1}{x}+x$, On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repére orthonormal. $f(\alpha)<0$.

1) Soit (d) : y = x
   a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, puis déduire une asymptote a (C) .
   b) Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, puis déduire que (d) est une asymptote a (C)
   c) Etudier la position relative de (C) et (d).
2) Montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$, puis dresser le tableau de variations de f.
3) Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet 2 solutions unique β et 1 ,

   vérifier que $\beta \in]0.39,0.4[$.
4) vérifier que $f(\alpha)=\frac{2ln(\alpha)}{\alpha}+2\alpha$.
5) Tracer (d) et (C) (prenons
   $\alpha=0.59$, $\beta=0.4$).

IV- (8 points)



- Soit ABCD est un rectangle direct telle que AB = 2BC , I et J sont respectivement les milieux de [DC] et [AD]
- E le symétrique de I par rapport à D
- F le symétrique de I par rapport à C
- ADEK est un carré direct et L milieu de[DE]
- GLD est un triangle semi-équilatéral en D telle que GL = 2 DL
- $\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{AC}$

Partie A :

Soit h la homothetie qui transforme K en C et A en D

1) Calculer le rapport de h .

2) Trouver l'image de (AD) et (IK) par h .
3) Déterminer h(J) .
4) Calculer l'aire de l'image de triangle ACD (en utilisant seulement l'aire de JKA) .
5) Construire le centre de h .
6) Soit h' une transformation qui transforme O en M et C en E .
   a) Déterminer la nature et l'élément de h' (sans le centre) .
   b) Vérifier h'(D) = F .
   c) Déterminer le centre de h' .
7) soit r une transformation qui transforme I en A et A en E
   a) Déterminer la nature et l'élément de r (sans le centre) .
   b) soit r(G) = H , Justifier que H ∈ (ID) et Que représente H pour le triangle GIA ? justifier .
   c) Justifier que D est le centre de r .
   d) soit r(M) = N . Construire N (sans justification) .
8) soit f une transformation telle que f = h'oh .
   a) Déterminer la nature et l'élément de f (sans le centre).
   b) Calculer f(A) et f(K).
   c) Construire le centre de f.

Partie B :

On suppose que le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(A, \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$.

1) Donner la forme complexe de h et h' puis justifier l'affixe de centre de h'.
2) Déterminer l'affixe du W, le centre de h.
3) Donner la forme complexe de f et l'affixe de son centre.

V- (10 points)

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, +\infty[$ telle que $f(x) = (x-1)e^{3-x}$ Et désignons par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

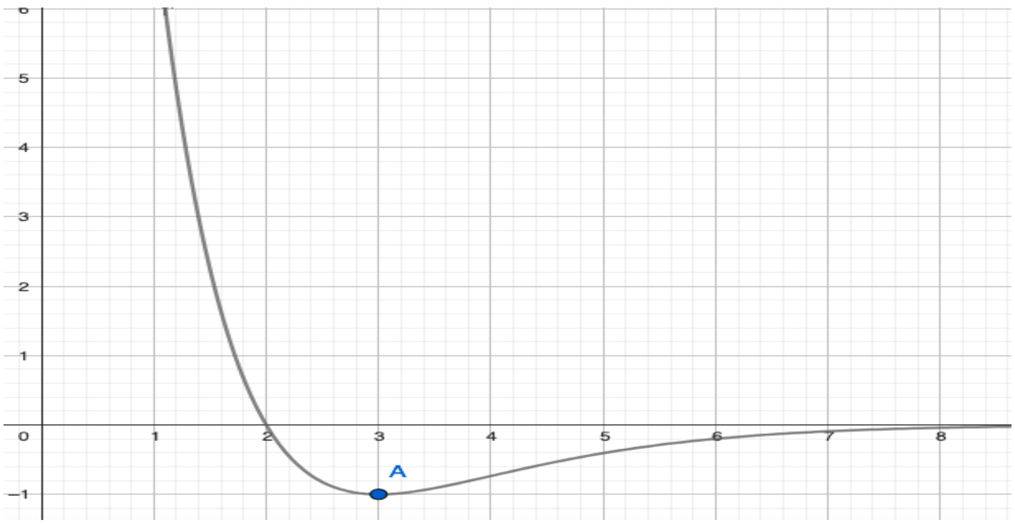
1)

a) **Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, puis déduire une asymptote (d) a $+\infty$.**

b) **Etudier la position relative de (C) et (d).**

2) **Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, puis calculer f(1) , f(0.6) à 10^{-2} prés .**

3) **Le courbe ci-contre est celle de la courbe représentative (G) d'une fonction g définie sur] − ∞, +∞[par g(x) = (2-x)e^{3-x} . et admet un minimum absolue A(3 , -1).**



a) **Démontrer que f '(x) = g(x).**

b) **Dresser le tableau de variations de f.**

c) **Démontrer que (C) admet un point d'inflexion de coordonnées à déterminer.**

4) **(C) et (G) se coupe en une point B de coordonnées a determiner .**

5) **Recopier (G), puis tracer (C) et (d) .**

6)

a) **Démontrer que $\int (x-1)e^{3-x}\, dx = -\, xe^{3-x} + c$, où c est une constante arbitraire.**

b) **Déduire l'aire du domaine limité par (C) et (G) .**

Partie B :

Soit f la fonction définie telle que h(x) = ln(f(x)) Et désignons par (H) sa courbe representative dans un repère orthonormal$(O\ ,\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath})$.

1) **Déterminer le domaine de définition de h.**

2) **Déterminer les limites de h sur les bornes ouverte de son domaine de définition. Déduire une asymptote à (H).**

3) **Démontrer que (H) admet une direction asymptotique parallèle à (D) : y = -x + 3.**

4) **Démontrer que h'(x) et f '(x) ont le même signe puis dresser le tableau de variation de h.**

5) **Montrer que l'équation h(x) = 0 admet 2 solutions sur D_h telle que $\alpha \in [1.15\ ;\ 1.16]$ et $\beta \in [4.14\ ;\ 4.15]$.**
6) **Vérifier que (T) tangent au courbe (H) a point d'absicce β est :**
   $y = \left(\frac{2-\beta}{\beta-1}\right)x + \left(\frac{\beta^2-2\beta}{\beta-1}\right)$.
7) **Tracer (H) , (T) , (D) (prenons β = 4.14)** .
8) **On admet que l'aire de la partie limitée par (H) , (T) , (x'x) et (y'y) est 3.915 u^2 et (T) coupe (y'y) en y = 2.82 .**

   Déduire une valeur approchée à 10^{-2} prés de A = $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx$.

Partie C :

Soit k la fonction définie par k(x) = ln(h(x)). On désigne par (K) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) **Déterminer le domaine de définition de k.**
2) **Démontrer que k'(x) et h'(x) ont le même signe , puis dresser le tableau de variation de k.**