ثانوية برجا الرسمية 07/623581	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع: العلوم العامة 2022/2023	عدد المسائل: خمس
اعداد وتأليف الأستاذ: أحمد دمج 70/773620	مسابقة في مادة الرياضيات	المدة: ثلاث ساعات

ملاحظات هامة - يستطيع الطالب الاجابة عن الأسئلة بالترتيب الذي يناسبه.
- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو إختزان المعلومات او رسم البيانات.

نموذج رقم : 5

I- (2 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant,** la réponse qui lui correspond.

N^0	Questions	Réponses (a)	(b)	(c)
1)	L'équation $z^4 - 4 = 0$ admet dans $\mathbb{C}$	une seule racine	deux racines distinctes	quatre racines distinctes
2)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-1)e^x \ln x}{x^2} =$	0	$+\infty$	e
3)	Soit R la rotation de centre $I(2\,;0)$ et d'angle π. Le forme complexe de R est	$z' = -z + 4$	$z' = z - 4$	$z' = iz + 4$
4)	$(A_n^2)^2 =$	A_n^4	$(n^2 - n)^2$	$(2n)!$

II- (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

Pour tout point M d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe z′ tel que $z' = 2i\bar{z} + 2 - 4i$.

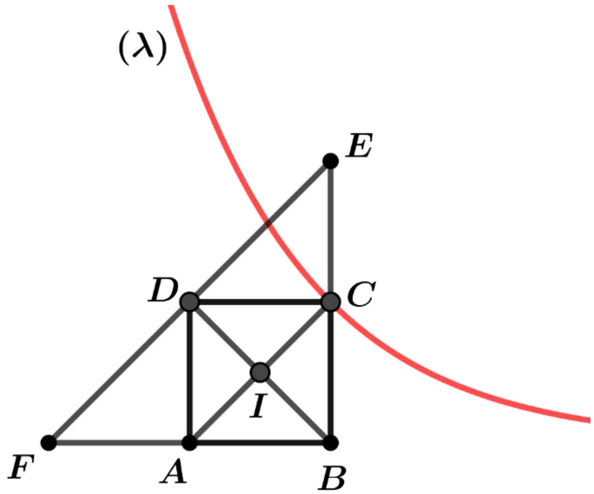
Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des nombres réels.

1) Résoudre l'équation $z' = z$.
2) Soit W le point d'affixe $z_W = 2$.
   a) Vérifier que pour tout $z \neq 2$, $\frac{\overline{z'-2}}{\overline{z-2}} = 2i$.
   b) Montrer que $WM' = 2 \times WM$ et que $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{WM'}\right) + \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{WM}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
3) Montrer que lorsque M varie sur le cercle de centre W et de rayon 1, le point M′ varie sur un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon
4) a) Exprimer x et y en fonction de x' et y'.
   b) Montrer que si M varie sur la droite (d) d'équation $y = x - 2$, alors M' varie aussi sur cette droite.

III- (6 points)

Dans la figure ci-dessous on donne :

- ABCD est un carré direct de centre I et de côté 4.
- C est le milieu de [BE] et A est le milieu de [BF].



Soit S la similitude plane directe qui transforme E en D et F en B.

1) Calculer un angle et le rapport de S.

2) Déterminer S(D) et montrer que S(B) = C.

3) Soit $h = S \circ S$ et soit W le centre de S.

a) Déterminer la nature de h et trouver $h(E)$ et $h(F)$.

b) En déduire que W est le point d'intersection de droites (EI) et (FC).

4) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(A; \vec{u}; \vec{v})$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Soit M un point quelconque et soit et M'son image par S.

Soient z et z' les affixes respectives de M et M' avec $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

a) Ecrire la forme complexe de S.

b) Calculer l'affixe du point W.

c) Montrer que $y = 2 - 2x'$ et $x = 2y' - 1$.

d) Soit (λ) la courbe représentative de la fonction f définie sur IR par $f(x) = e^{-x+1}$

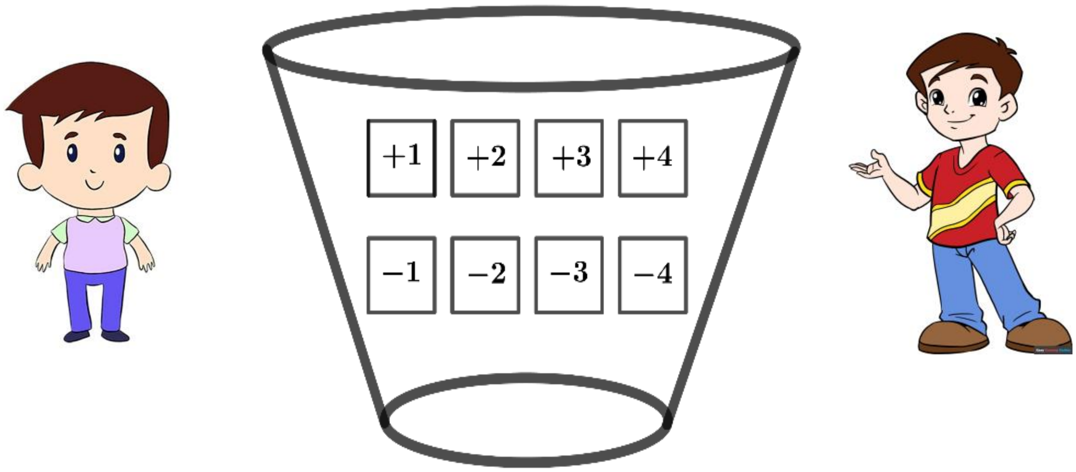
et soit (λ') l'image de (λ) par S. Montrer que (λ') est la courbe représentative

de la fonction g définie sur $]-\infty\,; 1[$ par $g(x) = \frac{2-\ln(2-2x)}{2}$.

IV- (6 points)

Une urne U contient huit cartes :

quatre cartes numérotées +1, +2, +3 et +4 et quatre cartes numérotées -1, -2, -3 et -4.



Anas tire simultanément et au hasard deux cartes de (U) puis **Bilal** tire simultanément et au hasard deux cartes parmi les six cartes restantes dans (U).

On considère les événements suivants :

A « La somme de numéros portés par les cartes tirées par **Anas** est nulle »

B « La somme de numéros portés par les cartes tirées par **Bilal** est nulle »

1) Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{1}{7}$.
2) a) Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \frac{1}{5}$ et en déduire $\mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A})$.

   b) Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{B}/\overline{\mathrm{A}}) = \frac{2}{15}$.

   c) Vérifier que $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})$.

3) Calculer la probabilité qu'exactement une seule personne a obtenu une somme nulle.

4) Calculer la probabilité de l'événement :

   L « La somme de numéros portés par les cartes tirées par **Anas** est strictement positif »

V- (10 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x + 1 - \ln(e^x + e)$ et soit (C) sa courbe représentative

dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$.

1) a) Montrer que $f(x) = 1 + \ln\left(\frac{e^x}{e^x+e}\right)$.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (Δ) à (C).

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C).

   b) Montrer que, pour tout réel x, (C) est au-dessous de (d).

3) a) Vérifier que $f'(x) = \frac{e}{e^x+e}$ et dresser le tableau de variations de f.

   b) Ecrire une équation de la tangente (t) à (C) au point A d'abscisse 1.

   c) Montrer que, pour tout réel x, la fonction f est concave.

4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

   b) Vérifier que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

   c) Montrer que $\alpha = \ln\left(\frac{e}{e-1}\right)$.

5) Tracer (Δ), (d) et (C).

6) Soient M et N deux points de (C) d'abscisses respectives β et $\beta + 1$ où β est un réel.

   Soit E le point tel que MEN est un triangle rectangle direct en E et (ME) est parallèle à (x'x).

   Montrer que pour tout réel β, l'aire du triangle MEN est strictement inferieur à $\frac{1}{2}$.