Fonctions rationnelles

Étudier une fonction revient à :

1. **Déterminer son domaine de définition.**
2. **Étudier sa parité.**
3. **Étudier sa périodicité. (Surtout pour les fonctions trigonométriques).**
4. **Calculer les limites ou les valeurs limites aux bornes de son domaine de définition et déterminer ses éventuelles asymptotes.**
5. **Calculer sa dérivée.**
6. **Dresser son tableau de variations.**
7. **Dresser un tableau de valeurs.**
8. **Tracer ses éventuelles asymptotes.**
9. **Tracer sa courbe représentative.**

N°1

a. Étudier la fonction f donnée par $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-2}$.

b. Soit $g(x) = f(|x|)$. Comment déduire C_g à partir de C_f ? La tracer.

N°2

a. Étudier la fonction h donnée par $h(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

b. Soit $i(x) = \frac{(x+1)|x-1|}{x^2+1}$. Comment déduire C_i à partir de C_h ? La tracer.

N°3

Étudier la fonction j donnée par $j(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$,

N°4

a. Étudier la fonction k donnée par $k(x) = \frac{x^2+2x-1}{x+2}$.

b. Soit $l(x) = \frac{x^2+2|x|-1}{|x|+2}$.Comment déduire C_l à partir de C_k ? La tracer.

N°5

Étudier la fonction m donnée par $m(x) = x + \frac{x-2}{x^2+1}$.

N°1

a. Étudier la fonction f donnée par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x}$.
b. Déterminer l'ensemble image par f de D_f.
c. Soit $g(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}$. Comment déduire C_g à partir de C_f ?
d. Soit $h(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-|x|}{x}$. Comment déduire C_h à partir de C_f ?
e. Soit $i(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-|x|}{|x|}$. Comment déduire C_i à partir de C_f ?

N°2

Étudier la fonction f donnée par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

N°3

Étudier la fonction f donnée par $f(x) = x - \sqrt{4 - x^2}$.

N°4

Étudier la fonction f donnée par $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4}$.

N°5

Étudier la fonction f donnée par $f(x) = x - \sqrt{x - 2}$.

N°6

Étudier la fonction f donnée par $f(x) = |x| + \sqrt{4 + x^2}$.

Fonctions réciproques

Pour chacune des fonctions suivantes répondre aux questions suivantes :

a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.
b. Donner l'expression de f^{-1}.
c. Déterminer les éventuels points d'intersections de (C_f) et(C_{f-1}).
d. Tracer (C_f) et(C_{f-1}) dans un même repère othonormé.

a) $\boldsymbol{f}$ est la fonction définie sur $[\mathbf{0};+\infty[$ à valeurs dans $[\mathbf{1};+\infty[$ et donnée par $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\sqrt{\boldsymbol{x}}+\mathbf{1}$

b) $\boldsymbol{f}$ est la fonction définie sur $[\mathbf{1};+\infty[$ à valeurs dans $\boldsymbol{f}([\mathbf{1};+\infty[)$ et donnée par $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=-\mathbf{1}-\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}$

c) $\boldsymbol{f}$ est la fonction définie sur $[-\mathbf{2};\mathbf{0}]$ à valeurs dans $\boldsymbol{f}([-\mathbf{2};\mathbf{0}])$ et donnée par $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}^{2}+\boldsymbol{x}+\mathbf{2}$

Fonctions logarithme népérien : Exercices (1)

1) Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = ln(x-1)$ $\quad g(x) = ln(-x)$ $\quad h(x) = ln(x^2)$

$i(x) = ln^2(x)$ $\quad j(x) = ln(sin(x))$

2) Après avoir déterminé le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes, donner l'expression de sa dérivée.

$f(x) = ln(\cos(x))$ $\quad g(x) = ln(\ln(x))$ $\quad h(x) = xln(x) - x$

$$i(x) = \ln\left(\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}\right)$$

3) Simplifier l'expression de $f(x) = ln\left(\frac{(x+2)^{30}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

4) Résoudre l'équation suivante : $\ln(3-x) + \ln(4+x) = \ln(10)$.

5) Calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx$.

6) Résoudre l'inéquation suivante :

$\ln(1-x) + \ln(2-x) < \frac{1}{2}\ln(9)$.

7) Résoudre l'inéquation suivante : $ln(1-x)(2-x) < ln(3)$.

8) Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x)dx}{\cos(x)+\sin(x)}$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)dx}{\cos(x)+\sin(x)}$

a. Calculer $I - J$ et $I + J$.

b. En déduire les valeurs exactes de I et J.

9) Simplifier l'expression suivante :

$$A = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + ln\left(\frac{2}{3}\right) + ln\left(\frac{3}{4}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{99}{100}\right)$$

10) Résoudre l'équation : $\ln(4x+2) - \ln(x-1) = \ln(x)$.

11) Ecrire plus simplement : $\ln(21) + 2\ln(14) - 3\ln(0\ 875)$.

12) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_n = 0\ 3^n$.

À partir de quel rang n, u_n devient-elle plus petite que 10^{-10} ?

13) Écrire plus simplement $a = 2^{\frac{-1}{ln2}}$.

14) Résoudre l'inéquation : $2\ln^2(x) + 5\ln(x) - 7 \geq 0$,

15) Calculer les intégrales suivantes :

$$L = \int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}dx \qquad M = \int_1^4 \frac{1-\ln^2(x)}{x}dx$$

16) Résoudre les inéquations suivantes :

$\ln^2(x) + 2\ln|x| - 8 \geq 0$,

$\ln|x-2| \leq 2\ln(x)$

17) Quel est le domaine de définition de la fonction f donnée par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$?

Fonctions logarithme népérien : Exercices (2)

Pour chacun des exercices 1) à 3) suivants, calculer la limite de chacune des fonctions suivantes aux bornes ouvertes de leur domaine de définition :

1)

a) $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$

b) $f(x) = x(1 - \ln(x))$

c) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$

d) $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln(x)$

2)

a) $f(x) = \frac{x - \ln(x)}{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$

c) $f(x) = x + \frac{\ln(x)}{x}$

d) $f(x) = \ln(2 + e^x)$

3) $a)$ $f(x) = x ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$b)$ $f(x) = x + x, \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

4) Vrai ou Faux ?

f est la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln(x^2+x+1)-2\ln(x+1)$$

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

Justifiez votre réponse :

a) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$,

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$,

c) f est croissante sur $[1;+\infty[$.

d) L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-1;+\infty[$.

e) L'équation $f(x)=1$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-1;+\infty[$.

5)

a. Résoudre, dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)^n \leq 10^{-10}$.

b. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $\ln(7-\mathrm{x})+\ln(x-2)=\ln(-4x^2+20x)$.

c. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\dfrac{\ln x}{1-\ln x} \geq \dfrac{1-\ln x}{\ln x}$.

6) Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$J=\int_{-1}^{1} \frac{e^x-e^{-x}}{e^{x^2}}dx \qquad I=\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{(e^x+5)^2}dx \qquad K=\int_{-2}^{2} \frac{x^7+e^x}{e^x+e^{-x}}dx$$

7) Résoudre, dans R, l'équation et les inéquations suivantes :

a. $\dfrac{1}{1-ln|x|} \leq 1-ln|x|$.

b. $e^{2\ln(x+1)} \geq \ln\left(e^{2x+5}\right)$.

c. $\ln(7-x)-\ln(x+2) \leq \ln\left(x-\dfrac{7}{2}\right)$.

8) f est une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b + \frac{\ln(x)}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres,}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. i. Sachant que le point $A(1;0)$ est le point de (C_f) en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 2$, écrire un système d'équations que vérifient a et b,

   ii. Résoudre ce système et déterminer les valeurs de a et b,

2. On note g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln(x)$

   i. Démontrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, $g(x) > 0$,

   ii. Déduisez-en que f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

9) f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) =$

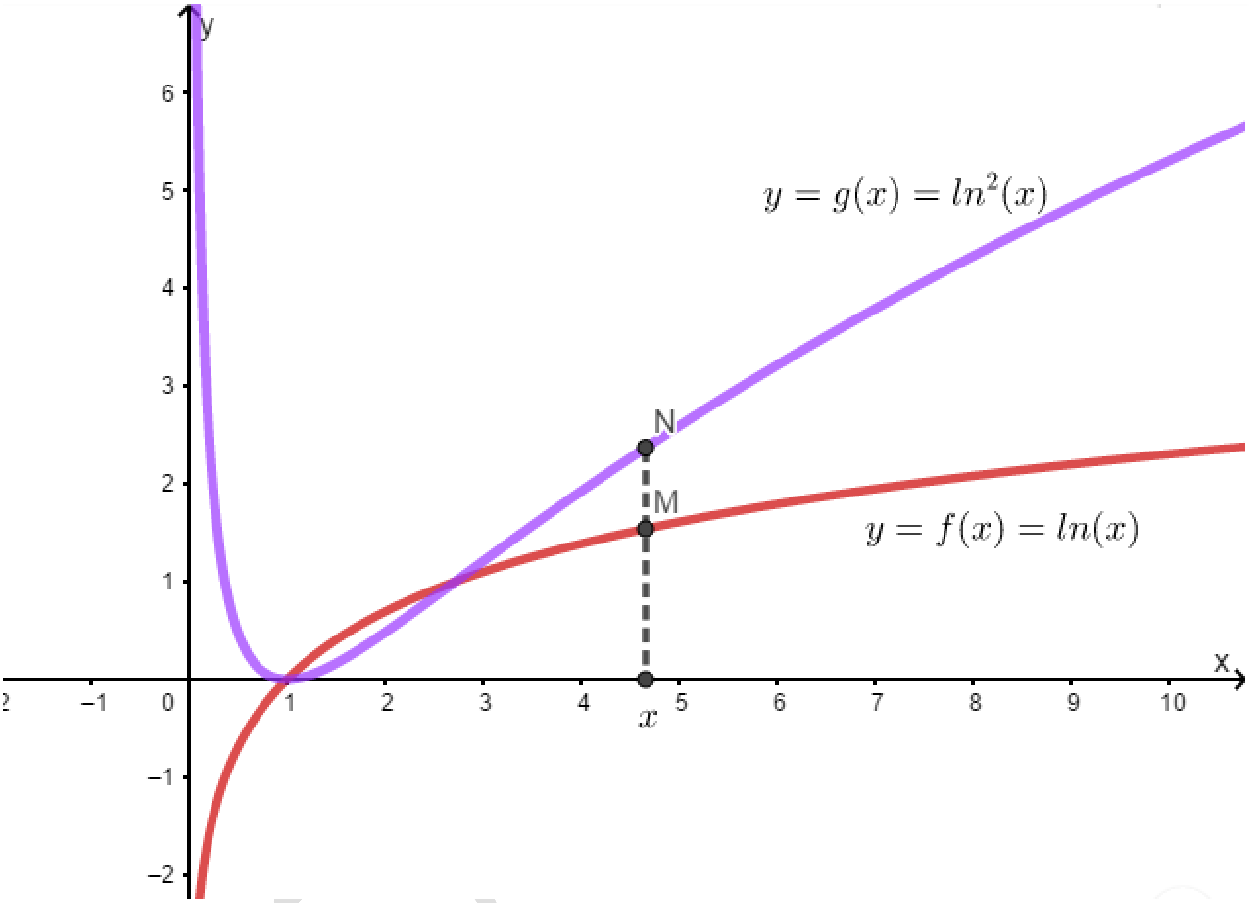
$$\begin{cases} g(x) = x^2, \ln(x) \; si \; x > 0 \\ 0 \; si \; x = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue et dérivable en 0,
2. On a appelle (C_f) la courbe représentative de f,

   a) En A, la courbe (C_f) admet un minimum. Quelles sont ses coordonnées ?

   b) Démontrer qu'il existe deux tangentes à (C_f) passant par O. Précisez une équation de chacune de ces tangentes.

10) Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}\, \vec{\jmath})$, on a tracé les courbes (C_f) et (C_g) représentatives, respectivement des fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \ln^2(x) = \ln(x) * \ln(x)$ *pas* $\ln(x^2)$.



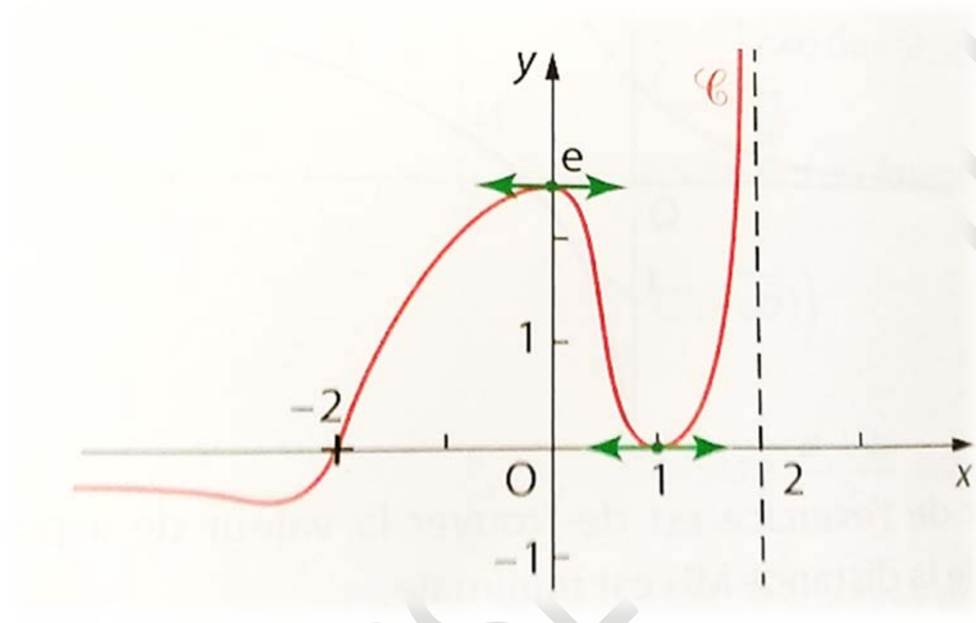
1. Etudiez la position relative de ces deux courbes.
2. Pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, M *et* N sont des points de (C_f) et (C_g) de même abscisse x.
   a) h est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.
   Etudier les variations de h sur $]0; +\infty[$.
   b) Sur l'intervalle $[1; e]$, pour quelle valeur de x la distance MN est-elle maximale ? Déduisez-en alors la valeur maximale de MN.
   c) Démontrer que sur $]0; 1[\cup]e; +\infty[$, il existe deux nombres a et b $(a < b)$ pour lesquels la distance MN est égale à 1.
   Précisez les valeurs de a et b à 10^{-1} près.

11) Vrai ou Faux

La courbe (C_f) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $]-\infty; 2[$.

La droite d'équation $x = 2$ et l'axe des abscisses sont asymptotes à (C_f).

On note g la fonction donnée par : $g(x) = \ln(f(x))$.



1. g est définie sur $]-2; 2[$.
2. g est dérivable en 0 et $g'(0) = \frac{1}{e}$.
3. L'équation $g(x) = 1$ a exactement deux solutions dans l'intervalle $[-2; 2]$.
4. $\lim_{x \to 0} g(g(x)) = -\infty$.

12) Logarithme et suite

f est la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

La courbe (C) représentative de f et la droite (Δ) d'équation $y = x$ sont données ci-dessous :

A. <u>Étude de certaines propriétés de (C) :</u>

1. Calculez $f'(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$.
2. Pour tout $x \in]-1;+\infty[$, on pose :
$$N(x) = (1+x)^2 + \ln(x+1) - 1$$
   a) Vérifiez que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.
   b) Calculez $N(0)$ et déduisez-en les variations de f.
3. Calculez les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C) et de la droite (Δ).

B. <u>Étude d'une suite convergente.</u>

1. Démontrez que si $x \in [0;4]$ alors $f(x) \in [0;4]$.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Tracez, à l'aide d'une calculatrice, la courbe (C) et la droite (Δ). Conjecturez les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son éventuelle limite.
   b) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;4]$.
   c) Étudiez le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   d) Démontrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculez sa limite ℓ.

13) Logarithme et suite

On considère la fonction (E): $x + \ln(x) = 0$.

Le but de cet exercice est de prouver que l'équation (E) a une unique solution α dans $I =]0; +\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour obtenir un encadrement de α.

A. <u>Existence et unicité de la solution :</u>

f est la fonction définie sur I par $f(x) = x + \ln(x)$.

Etudiez les variations de la fonction f sur I et déduisez l'existence d'un nombre α unique de I tel que $f(\alpha) = 0$.

Vérifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

B. <u>Encadrement de α :</u>

1. g est la fonction définie sur I par $g(x) = \frac{4x - \ln(x)}{5}$,
   a) Démontrez qu'un nombre x est solution de l'équation (E) si et seulement si, $g(x) = x$.
   b) Étudiez les variations de g sur I et démontrez que pour tout x de l'intervalle $J = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $g(x)$ appartient à J.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = g(u_n)$.
   a) Démontrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$
   b) Déduisez-en que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

3. On donne $u_{10} \simeq 0\ 5671236$,
   On admet que u_{10} est une valeur approchée de α.
   Déduisez-en un encadrement de α sous la forme $u \leq \alpha \leq v$ où u et v sont des nombres décimaux écrits avec 3 décimales.

Fonctions logarithme népérien : Étude de fonctions

N°1

a. Étudier la fonction f donnée par $f(x) = x, ln(x)$.
b. Soit $g(x) = x, ln(|x|)$. Comment déduire C_g à partir de C_f ? La tracer.
c. Soit $h(x) = |x|, \ln(|x|)$. Comment déduire C_h à partir de C_f ? La tracer.

N°2

a. Étudier la fonction i donnée par $\mathrm{i}(x) = \frac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$.
b. Soit $j(x) = \frac{1+\ln(x)}{|1-\ln(x)|}$. Comment déduire C_j à partir de C_i ? La tracer.

N°3

a. Étudier la fonction k donnée par $k(x) = \frac{\ln(x)}{x}$,
b. Soit $l(x) = \frac{|\ln(x)|}{x}$. Comment déduire C_l à partir de C_k ?
c. Calculer l'aire du domaine délimité par C_k, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$.

N°4

a. Étudier la fonction m donnée par $m(x) = \ln(\cos(x))$.
b. Soit $n(x) = \ln(\sin(x))$. Comment déduire C_n à partir de C_l ?

N°5

Étudier la fonction o donnée par $o(x) = \sqrt{1 - \ln(x)}$.

N°6

Étudier la fonction p donnée par $p(x) = \sqrt{1 - \ln^2(x)}$.

N°7

Étudier la fonction q donnée par $q(x) = x - \ln(x^2)$.

Fonctions exponentielles : Exercices

1) Résoudre les équations suivantes:

   $a)\ 5e^{x} + 4 = e^{-x}$

   $b)\ 6e^{x} + e^{-x} = 7$

   $c)\ 2e^{-x} = \dfrac{1}{e^{x} + 3}$

   $d)\ e^{2x+3} = e^{\frac{5}{x}}$

   $e)\ e^{x^{2}} = (e^{-x})^{2}.e^{3}$

   $f)\ e^{2x+3} \leq e^{\frac{3}{x}}$

   $g)\ \dfrac{e^{x^{2}}}{e^{5}} \leq e^{-4x}$

   $h)\ e^{x} + e^{-x} - 2 \geq 0$

   $i)\ 7e^{x} + 1 < 8e^{-x}$

2) Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de définition, puis calculer sa limite aux bornes ouvertes de son domaine de définition :

   a) $f(x) = e^{-x^{2}-1}$

   b) $f(x) = e^{2x} - e^{-x}$

   c) $f(x) = e^{3x} - e^{2x} + 2$

   d) $f(x) = \frac{e^{2x}+e^{x}+1}{e^{x}+2}$

   e) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

f) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

$g)\ f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$

$h)\ f(x) = x^2 \cdot e^{-2x}$

3) Calculer la limite de chacune des fonctions suivantes en 0^+ :

$a)\ f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2x}$

$b)\ f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x}$

$c)\ f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{4x}$

4) $f\ et\ g$ sont deux fonctions définies sur IR par :

$f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Et soit $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$

Montrer que $h'(x) = \dfrac{1}{f^2(x)}$.

5) On donne ci-dessous la courbe (C) représentative d'une fonction f définie sur IR par $f(x) = ax + b + x \cdot e^x$ où a et b sont deux nombres.

1. Déterminer les valeurs de a et b sachant que la tangente (C) en $A(0;2)$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2.
2. a) Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.

b) Déduisez-en que f' a pour tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'	-2	$\searrow$	$-2-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

6) On a tracé ci-dessous la courbe (C) représentative d'une fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^2}$

1. Démontrer que f a pour tableau de variation :

x	-1		-2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{e}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. M est un point de (C) d'abscisse a.
   Démontrer qu'il existe deux valeurs de a, que l'on calculera, pour lesquelles la tangente en M passe par l'origine O du repère.

7)

1. Justifiez que pour tout nombre x, $e^x \geq x + 1$.

2. Déduisez-en que :

a) $e^{-x} + x - 1 \geq 0$ $\qquad$ $b)$ $(x-1) \cdot e^x + 1 \geq 0$.

3. Exploitez les résultats précédents pour démontrer que la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ est strictement croissante.

N°1

Étudier la fonction f donnée par $f(x) = x + \frac{1}{e^x - 1}$.

N°2

Étudier la fonction g donnée par $g(x) = \frac{e^x}{x}$.

N°3

a. Étudier la fonction h donnée par $h(x) = e^x - x$.
b. Calculer l'aire du domaine délimité par C_f, la 2ème bissectrice et les droites d'équations $x = ln10^{-2}$ et $x = 0$.

N°4

a. Étudier la fonction i donnée par $i(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
b. Montrer que i est impaire. En déduire que C_i admet un centre de symétrie.
c. Soit $j(x) = \frac{2}{e^x + 1}$. Comment déduire C_j à partir de C_i ?
d. Montrer que i admet une fonction réciproque qu'on déterminera.
e. Calculer l'aire du domaine délimité par C_i, l'axe x'Ox et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

N°5

Étudier la fonction k donnée par $k(x) = \ln(e^x + 1)$.

N°6

Étudier la fonction l donnée par $l(x) = e^{2x} - x$.

N°7

Étudier la fonction m donnée par $m(x) = x, e^x$.

N°8

Étudier la fonction n donnée par $n(x) = x - 1 + \frac{1}{e^x}$.