عدد المسائل: خمس	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع: العلوم العامة 2020/2021	ثانوية برجا الرسمية 07/623581
المدة: ثلاث ساعات	مسابقة في مادة الرياضيات	اعداد وتأليف الأستاذ: أحمد دمج 70/773620

ملاحظات هامة - يستطيع الطالب الاجابة عن الأسئلة بالترتيب الذي يناسبه.
- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو إختزان المعلومات او رسم البيانات.

نموذج رقم : 2

I- (2 points)

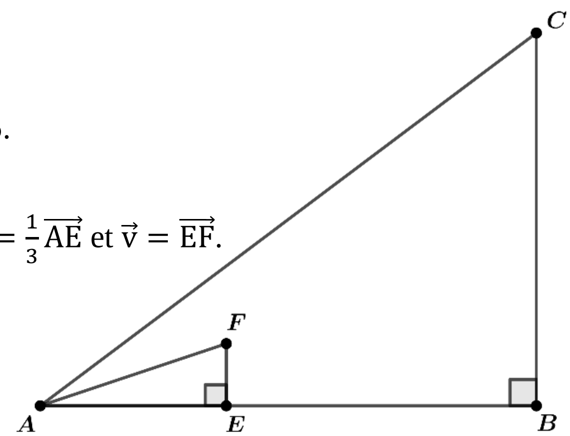
Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant,** la réponse qi lui correspond.

N^0	Questions	Réponses (a)	Réponses (b)	Réponses (c)
1)	$(2+3i)^{10}+(2-3i)^{10}$	est réel	est imaginaire pur	ni réel ni imaginaire pur
2)	L'équation $e^{2x}+3e^{x}=10$	admet deux racines	admet une seule racine	n'admet pas des racines
3)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}-\ln\left(\frac{2}{3}\right)x\right)=$	0	$+\infty$	$\frac{3}{2}$
4)	$\int_{-2}^{2} x^3\ln(x^2+1)\,dx=$	0	16 ln(5)	4

II- (3 points)

Dans la figure ci-contre on donne :

- ABC est un triangle rectangle en B tels que $AB=8$ et $BC=6$.
- AEF est un triangle rectangle en E tels que $AE=3$ et $EF=1$.



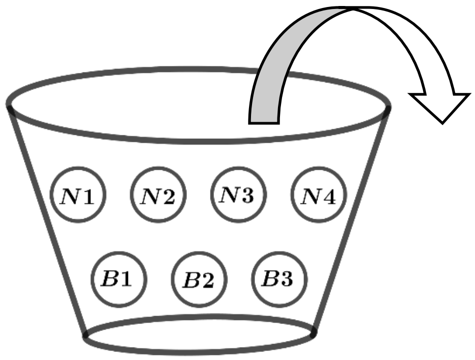
Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(A;\vec{u};\vec{v})$ tel que $\vec{u}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{EF}$.
A tout point M d'affixe $z\neq 0$, on associe le point
M' d'affixe z' tel que $z'=1-2\left(\frac{4+3i}{z}\right)$.

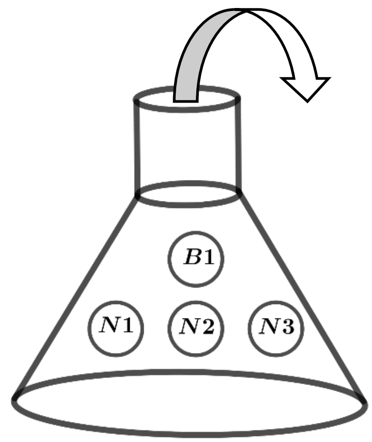
1) a) Déterminer les affixes des points A, F et C.
   b) Vérifier que $(z_F)^2=z_C$ et en déduire que [AF] est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
2) a) Montrer que $|z'-1|=\frac{10}{|z|}$.
   b) En déduire que si M décrit le cercle de centre A et de rayon 2 alors M' décrit un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
3) a) Montrer que $z'=\frac{z-z_C}{z-z_A}$.
   b) En déduire que si z' est imaginaire pur alors le point M décrit le cercle (C) de diamètre [AC].
4) La droite (AF) recoupe le cercle (C) en un point W. Montrer que $\frac{z_W-z_A}{z_W-z_C}=3i$ et déduire l'affixe de W.

III- (3 points)

Une urne U contient 7 boules : 4 noires numérotées de 1 à 4 et 3 blanches numérotées de 1 à 3.

Une autre urne V contient 4 boules : 3 noires numérotées de 1 à 3 et une blanche numérotée 1.





Partie A

On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne U.

On considère les évènements suivants :

A « La somme des nombres portés par les trois boules tirées est 4 »

B « Obtenir exactement deux boules noires »

C « Le plus grand nombre obtenu est 3 »

1) Vérifier que $P(A) = \frac{2}{35}$ et calculer P(B) et P(C).
2) Calculer $P(A \cup B)$.

Partie B

Dans cette partie, on lance un de parfait numéroté de 1 à 6.

- Si le nombre obtenu est pair, alors on tire au hasard et simultanément trois boules de U.
- Si le nombre obtenu est impair, alors on tire au hasard et successivement sans remise trois boules de V.

On considère les évènements suivants :

R « Le nombre obtenu est pair »

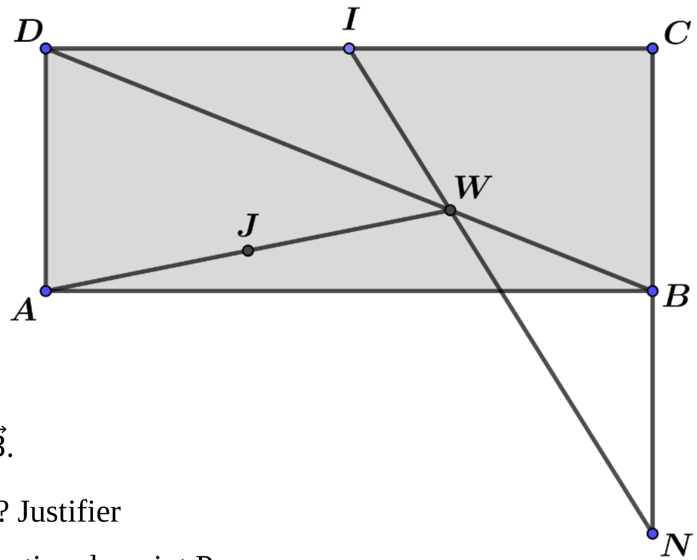
S « La somme des nombres portés par les trois boules tirées est 4 »

1) Montrer que $P(S \cap \overline{R}) = \frac{1}{8}$.
2) Calculer P(S).
3) La somme des nombres portés par les trois boules tirées est différente de 4, calculer la probabilité que le nombre obtenu soit impair.

IV- (4 points)

Dans la figure ci-contre on donne :

- ABCD est un rectangle direct tel que $AB = 10$ et $AD = 4$.
- N est le symétrique de C par rapport à B.
- I est le milieu du segment [CD].
- W est le point d'intersection des droites (IN) et (BD)
- J est le milieu du segment [AW].



Soit h_1 l'homothétie de centre A et de rapport 2

et soit h_2 l'homothétie de centre B et de rapport 3.

On pose $h = h_2 \circ h_1$

Partie A

1) Déterminer la nature et le rapport de h.
2) Soit P le centre de h. Montrer que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.
3) a) Que représente W pour le triangle CDN ? Justifier

   b) Déterminer h(J) et en déduire une construction du point P.

Partie B

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(A\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{10}\,\overrightarrow{AB}$.

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et soit $S = r \circ h$.

1) Déterminer la nature, le rapport et l'angle de S.
2) Déterminer S(P) et écrire la forme complexe de S.
3) En déduire l'affixe du point Ω, centre de S.

Partie C

Soit E le point tel que $\overrightarrow{PA} = 6\overrightarrow{PE}$ et soit (C) le cercle circonscrit au carré APLD.

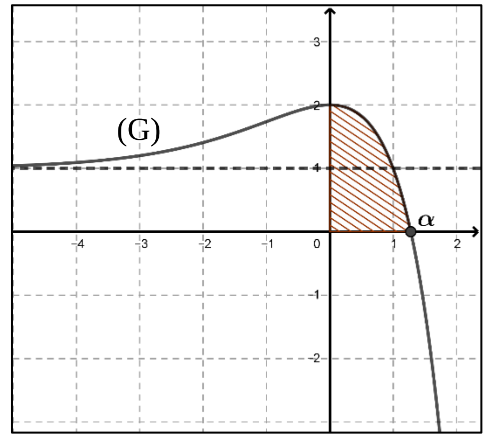
1) Déterminer S(E).
2) Montrer que les trois points L, E et Ω sont alignés.
3) En déduire une construction du point Ω.

V- (8 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = (1 - x)e^x + 1$.

La courbe (G) ci-contre est celle de g dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\,\vec{j})$.



1) Montrer que (G) admet un point d'inflexion W dont on déterminera ses coordonnées.
2) (G) coupe (x'x) en un point d'abscisse α. Vérifier que $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$.
3) a) Soit L la fonction définie sur IR par $L(x) = (2 - x)e^x + x$.
   Montrer que L est une primitive de g.

   b) Exprimer l'aire de la partie hachurée en fonction de α.

Partie B

Soit h la fonction définie sur IR par $h(x) = (\alpha x + 1)e^{-\alpha x} + 1$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$.
2) Reproduire et compléter le tableau suivant.
3) Montrer que $h(-1) = 0$ puis étudier suivant x, le signe de h(x).

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h'(x)	+	0	-
h(x)			

Partie C

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{-\alpha x}}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\,\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et en déduire une asymptote à (C).
2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C).

   b) Étudier suivant x, la position relative de (C) et (d).
3) a) Montrer que $f(-1) = \frac{1-\alpha}{\alpha}$.

   b) Vérifier que $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(1+e^{-\alpha x})^2}$ et dresser le tableau de variations de f.

4) Tracer (d) et (C). (Prendre $\alpha = 1{,}25$).