Collège de La Sagesse
Section Saint Jean
Brasilia - Baabda

aefe
Agence pour l'enseignement français à l'étranger

# Supplément de mathématiques

# Classe de SG


**Réalisé par le département de mathématiques**

Abi Abdallah Thérèse

Bou Fadel El Helou Jalkh Marie

Couverture réalisée par :
Lameh José


Année scolaire 2023-2024

# Table des matières

## Rappel fonctions

**I.** **Limites par comparaison**

a, b, c et L sont des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

**a)** Si $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.

**b)** Si $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

**c)** Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = c$ alors $b \leq \lim\limits_{x \to a} f(x) \leq c$.

**d)** **Théorème des gendarmes :**

Si pour tout $x$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

**II.** **Limites par composée:**

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c$

**III.** **Propriétés des fonctions :**

**1)** Soit $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et soit $f'$ sa fonction dérivée.

- Si $f'$ est **strictement positive sur $I$**, sauf peut-être pour quelques valeurs où elle s'annule, alors $f$ est strictement croissante sur $I$,
- Si $f'$ est **strictement négative sur $I$**, sauf peut- être pour quelques valeurs où elle s'annule, alors $f$ est strictement décroissante sur $I$,
- Si $f'$ est **nulle sur $I$**, alors $f$ est constante sur $I$.

**2)** $f$ est une fonction définie sur un intervalle $I$ et $c$ un nombre de $I$, Dire que $f(c)$ est un **maximum** ( resp. minimum) local signifie qu'il existe un intervalle **ouvert** $J$ contenant $c$ et inclus dans $I$ tel que pour tout $x$ de $J$, $f(x) \leq f(c)$ (resp.$f(x) \geq f(c)$),

Un extremum local est soit un maximum local, soit un minimum local.

**3)** Pour une fonction **dérivable** $f$ si $f$ admet un extremum local au point d'abscisse $c$ alors $f'(c) = 0$ et $C_f$ admet en ce point une tangente parallèle à $(x'Ox)$.

**4)** Si sur un intervalle [a ;b] la dérivée d'une fonction $f$ s'annule en un point d'abscisse $c \in [a; b]$ et change de signes avant et après cette valeur, alors la fonction admet en ce point un extremum local, c'est un maximum local si $f'$ passe du positif au négatif et un minimum local si elle passe du négatif au positif.

**5)** La dérivée peut s'annuler en un point sans changer de signe, dans ce cas la fonction n'admet pas en ce point un extremum, mais un point d'inflexion (la courbe change de concavité en ce point) et $C_f$ admet en ce point une tangente parallèle à $(x'Ox)$.

**6)** Mais si une fonction $f$ admet au point d'abscisse c un point d'inflexion on n'a pas nécessairement que $f'(c) = 0$.

**7)** Si sur un intervalle [a ;b] la fonction $f$ est deux fois dérivable et si $f''(x) < 0$ alors $f$ admet sa concavité orientée vers les ordonnées négatives.

<u>Exemple :</u> $f(x) = -2x^2 - 3x + 5$

$f'(x) = -4x - 3$

$f''(x) = -4 < 0$

**8)** Si sur un intervalle [a ;b] la fonction $f$ est deux fois dérivable et si $f''(x) > 0$ alors $f$ admet sa concavité orientée vers les ordonnées positives.

<u>Exemple :</u> $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$f'(x) = 6x - 2$

$f''(x) = 6 > 0$

**9)** Si sur un intervalle [a ;b] la fonction $f$ est deux fois dérivables et si pour $c \in [a; b]$, $f''(c) = 0$ et si $f''$ change de signe avant et après $c$ alors le point A(c ;f(c)) est un point d'inflexion pour $f$ sinon c'est un point ordinaire.

## IV. **Symétrie :**

a. Un intervalle est dit centré en 0 s'il est symétrique par rapport à O.

b. Soit $f$ une fonction et $D_f$ son ensemble de définition.
Si $D_f$ est centré en 0 et si pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$ alors $f$ est une fonction paire et sa courbe représentative est symétrique d'elle-même par rapport à y'Oy. (Si $f$ admet un certain sens de variations sur un intervalle $J \subset D_f$
alors $f$ change de variations sur l'intervalle symétrique de $J$ par rapport à O.

c. Soit $f$ une fonction et $D_f$ son ensemble de définition.
Si $D_f$ est centré en 0 et si pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$ alors $f$ est une fonction impaire et sa courbe représentative est symétrique d'elle-même par rapport à O. (Si $f$ admet un certain sens de variations sur un intervalle $J \subset D_f$
alors $f$ garde le même sens de variations sur l'intervalle symétrique de $J$ par rapport à O.

**Remarques :**

- La dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire. Et la primitive d'une fonction impaire est une fonction paire.
- La dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire. Mais la primitive d'une fonction paire n'est pas nécessairement une fonction impaire.

**d. Centre de symétrie :**

On dit qu'un point W (a ; b) est centre de symétrie d'une fonction $f$ si :

- $D_f$ est centré en $a$.
- Et $f(a-x) + f(a+x) = 2b$ (ou $f(2a-x) + f(x) = 2b$)

**e. Axe de symétrie :**

On dit que la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie d'une fonction $f$ si :

- $D_f$ est centré en $a$.
- Et $f(a-x) = f(a+x)$ (ou bien $f(2a-x) = f(x)$).

## III. Lien entre les coordonnées des points particuliers

Soit $(O\,;\vec{\imath}\ \overrightarrow{\jmath})$ repère orthonormé et soit $\mathrm{M}(x\,;\,y)$ , Si

- $\mathrm{M}' = \mathrm{S}_{(\mathrm{x}'\mathrm{Ox})}(\mathrm{M})$ alors $M'(\,x\,;\,-y)$,
- $\mathrm{M}' = \mathrm{S}_{(\mathrm{y}'\mathrm{Oy})}(\mathrm{M})$ alors $M'(-x\,;\,y)$,
- $\mathrm{M}' = \mathrm{S}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M})$ alors $M'(-x\,;\,-y)$,
- $\mathrm{M}' = \mathrm{t}_{a\vec{\imath}}(\mathrm{M})$ alors $M'(\,x + a\,;\,y)$.
- $\mathrm{M}' = \mathrm{t}_{a\vec{\jmath}}(\mathrm{M})$ alors $M'(\,x\,;\,y + a)$,
- $M$ et $M'$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$, alors $M'(\,y\,;\,x)$,
- $M$ et $M'$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = -x$, alors $M'(-y\,;\,-x)$,

## IV. Passage d'une courbe à l'autre

$f$ et $g$ sont deux fonctions et $C_f$ et $C_g$ leurs courbes représentatives

- Si $g(x) = -f(x)$ alors $(C_g) = S_{x'Ox}(C_f)$.
- Si $g(x) = f(-x)$ alors $\left(C_g\right) = S_{y'Oy}(C_f)$.
- Si $g(x) = f(x) + a$ alors $\left(C_g\right) = t_{a\vec{\jmath}}(C_f)$.
- Si $g(x) = f(x + a)$ alors $\left(C_g\right) = t_{-a\vec{\imath}}(C_f)$.
- Si $g(x) = f(x + a) + b$ alors $\left(C_g\right) = t_{-a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}}(C_f)$.
- Si $g(x) = |f(x)|$ alors $\left(C_g\right) = \begin{cases} (C_f) \text{ si } f(x) > 0 \\ (C_g) = S_{x'Ox}(C_f)\ si\ f(x) \leq 0 \end{cases}$
- Si $g(x) = f(|x|)$ alors $\left(C_g\right) = (C_f)$ si $x > 0$ et comme $g$ est une fonction paire alors $(y'y)$ est un axe de symétrie de $\left(C_g\right)$.

# Exercices sur l'ensemble image d'une fonction

## PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONTINUES

### 1. Connaître le cours

**49** **VRAI-FAUX.** Justifier la réponse.

1° L'équation $(x^3+1)x^2 = 1$ admet au moins une solution réelle.

2° L'image de l'intervalle $[-1\,;\,2]$ par la fonction *carré* est l'intervalle $[1\,;\,4]$.

3° La fonction $f : x \mapsto 2(x-2)\sqrt{x}+1$ s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

4° L'image de l'intervalle $[1\,;\,2[$ par la fonction $g$ :

$$x \mapsto \frac{x+1}{x}$$

est un intervalle de la forme $[a\,;\,b[$, où $a$ et $b$ sont deux réels.

**50** **VRAI-FAUX.** Justifier la réponse.

Soit $f$ une fonction d'ensemble de définition $[a\,;\,b]$, où $a$ et $b$ sont deux réels tels que :

$$f(a) = 2 \quad \text{et} \quad f(b) = -1\,.$$

1° L'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[a\,;\,b]$.

2° Si $f$ est continue sur $I$, alors l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[a\,;\,b]$.

3° Si $f$ est strictement décroissante sur $I$, alors l'équation $f(x) = 1$ admet au plus une solution dans $[a\,;\,b]$.

4° Si $f$ est strictement monotone sur $I$ et s'annule pour un réel $\alpha$ appartenant à $[a\,;\,b[$, alors l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est l'intervalle $]\alpha\,;\,b]$.

### 2. Applications directes

**Démontrer qu'une équation admet au moins une solution - Application E, page 19**

**51** Démontrer que les équations suivantes ont au moins une solution dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

a) $x^3+3x = 1$ ; b) $x^2 = \dfrac{1}{x+1}$ ; c) $x-2\cos x = 1$.

**52** Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'équation proposée a au moins une solution dans l'intervalle $I$.

1° $x^5-5x+2 = 0$ ; $I = [0\,;\,2]$.

2° $x\sqrt{x+2} = 2$ ; $I = [-2\,;\,2]$.

3° $x\sin x = 1$ ; $I = \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

**53** Soit $f$ une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution.

**Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction Application F, page 19**

**54** Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[-3\,;\,2]$ dont on connaît le tableau des variations.

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

Déterminer les images par la fonction $f$ des intervalles :

$[-2\,;\,1]$ ; $[-2\,;\,2]$ ; $[-3\,;\,0]$.

**55** Soit $f$ une fonction dont le tableau des variations est :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ |

Déterminer les images par $f$ des intervalles :

$]-\infty\,;\,0[$ ; $[0\,;\,2[$ ; $]-\infty\,;\,2[$ ; $]2\,;\,+\infty[$.

**56** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x-2}{x^2+3}$.

Déterminer les images par $f$ des intervalles :

$[-4\,;\,4]$ ; $[-1\,;\,3]$ ; $[0\,;\,4]$ ; $[0\,;\,+\infty[$.

**57** Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[-5\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x-3\sqrt{x+5}\,.$$

Déterminer les images par $f$ des intervalles :

$[-4\,;\,3]$ ; $[-1\,;\,3]$ ; $[0\,;\,4]$ ; $[-5\,;\,0]$.

# Continuité

## 1) Continuité en un point :

**Définition:** Soit $f$ une fonction et $D_f$ son domaine de définition et soit $a$ est un réel de $D_f$,

$f$ est continue en $a$ si : $f$ est définie dans un voisinage de $a$ et si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

- Si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, on dit que $f$ est continue à droite de $a$,
- Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, on dit que $f$ est continue à gauche de $a$,

**Remarque** : Graphiquement, une fonction est continue en un point si sa courbe représentative ne présente pas de coupure en ce point.

## 2) Continuité sur un intervalle

**Définition :** $f$ est continue sur un intervalle $I$ lorsqu'elle est continue en tout réel $a$ de cet intervalle.

### 1) Propriétés des fonctions continues

- Les fonctions polynômes, $sinx \;\; cosx \;\; tanx$ et $|x|$sont continues sur $\mathbb{R}$,
- Toute fonction construite par somme, produit, quotient et composée des fonctions polynômes, $sinx \;\; cosx \;\; tanx$ , $\sqrt{x}$ et $|x|$ est continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie .

**Exemple** :

- $g(x) = \dfrac{3x^5 - 2x^3 + 4x^2 + 1}{x^2 - 5x + 4}$ $D_f = \mathbb{R} - \{1 \;\; 4\}$ $g$ est continue sur $\mathbb{R} - \{1 \;\; 4\}$ comme étant le quotient de 2 fonctions polynômes continues où la deuxième ne s'annule pas
- $h(x) = |1 + x - 2x^2|$ , $D_h = \mathbb{R}$ $h$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme étant la composée de 2 fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (une polynôme et l'autre valeur absolue).
- $u(x) = \sqrt{-(x-2)^2}$ est-elle continue en 2 ?
- $D_f = \{2\}$, $g$ n'est pas définie dans un voisinage de 2 donc je ne peux pas étudier la continuité de $g$ en 2.
- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x + 3}{x + 1} & si \;\; x \geq 0 \\ \dfrac{\alpha}{x - 1} & si \;\; x < 0 \end{cases}$

  a) Quel est le domaine de définition de $f$,
  b) Pour quelle valeur de $\alpha$ $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ ?

a) Sur $[0\,;\,+\infty[$ $f$ est définie pour $x \neq -1$, or $-1 \notin [0\,;\,+\infty[$ ,donc $f$ est définie sur $[0\,;\,+\infty[$,
De même sur $]-\infty\,;0[$, Alors $D_f = ]-\infty\,;0[ \cup [0\,;\,+\infty[ = \mathbb{R}$,

b) Sur $[0\,;\,+\infty[$ $f$ est le quotient de 2 fonctions polynômes continues où la deuxième ne s'annule pas donc $f$ est continue sur $[0\,;\,+\infty[$.De même Sur $]-\infty\,;0[$ ,

- Pour que $f$ soit continue sur $\mathbb{R}$ , il faut que $f$ soit de plus continue en 0,
$D_f = \mathbb{R}$ donc $f$ est definie au voisinage de 0 et de plus
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+x+3}{x+1} = 3$ ,$f(0) = 3$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\alpha}{x-1} = -\alpha$ . Pour que $f$ soit continue en 0, on doit avoir $\alpha = -3$,

# Dérivabilité et fonction dérivée

## I. Taux d'accroissement

**Définition 1** : Soit $f$ une fonction et $D_f$ son domaine de définition.
Soit $a \in D_f$.

Le nombre $t(h) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est appelé **taux d'accroissement de $f$ entre $a$ et $x$ pour $x \neq a$**.

## II. Nombre dérivé

**Définition 2 :** Soit $f$ une fonction et $D_f$ son domaine de définition. Soit $a \in D_f$.

$f$ est dérivable au point d'abscisse $a$ si : $f$ est définie au voisinage de $a$ $f$ est continue en $a$ et $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ou

$$\left( \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$$

Et si ces deux limites existent, sont finies, uniques et égales.

**Remarque :**

- Si $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe, est finie et unique on la note $f'_d(a)$ et on dira que $f$ est dérivable à droite de $a$.
- Si $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe, est finie et unique on la note $f'_g(a)$ et on dira que $f$ est dérivable à gauche de $a$.
- Si $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, $f$ est alors dérivable à gauche et à droite de $a$ mais pas en $a$,

## III. Tangente à une courbe en un point de la courbe :

Une équation de la tangente à $C_f$ au point $A(a\,;f(a))$ $(A \in C_f)$ est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

# IV. Tableau des dérivées:

| Fonction | Fonction dérivée |
|---|---|
| $k$ (constante) | 0 |
| $mx+p$ | $m$ |
| $ax^2+bx+c$ | $2ax+b$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ |
| $\sqrt{x}\ (x \geq 0)$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}\ (x>0)$ |
| $\frac{1}{x}\ (x \neq 0)$ | $-\frac{1}{x^2}\ (x \neq 0)$ |
| $\sin(x)\quad (x \in \mathbb{R})$ | $\cos(x)$ |
| $\cos(x)\quad (x \in \mathbb{R})$ | $-\sin(x)$ |
| $\tan(x)\ (x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi)$ | $\frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$ |
| $\sin(ax+b)$ | $\mathrm{a}.\cos(ax+b)$ |
| $\cos(ax+b)$ | $-\mathrm{a}.\sin(ax+b)$ |
| $lnx\quad (x>0)$ | $\frac{1}{x}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $f \circ g(x)$ | $f'(g(x)).g'(x)$ |
| Soient $u$ et $v$ deux fonctions de $x$ et $\alpha$ un réel :<br>$u = u(x)$ et $v = v(x)$ | |
| $u+v$ | $u'$+$v$' |
| $u-v$ | $u'-v'$ |
| $\alpha, u$ | $\alpha, u'$ |
| $u.v$ | $u'.v+v'.u$ |
| $\frac{u}{v}\quad (v(x) \neq 0)$ | $\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$ |
| $\frac{1}{v}\quad (v(x) \neq 0)$ | $-\frac{v'}{v^2}$ |
| $u^n$ | $n.u^{n-1}.u'$ |
| $\sqrt{u}$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $\sin(u)$ | $u'\cos(u)$ |

| | |
|---|---|
| $\cos(u)$ | $-u'\sin(u)$ |
| $\tan(u)$ | $\frac{u'}{cos^2(u)} = (1 + tan^2(u)) \times u'$ |
| $\ln(u) \quad (u > 0)$ | $\frac{u'}{u}$ |
| $e^{u(x)}$ | $u'e^{u(x)}$ |



**Remarques** :

**1)** Si la **limite du taux d'accroissement de $f$ en $a$ est égale à** $+\infty$ **ou à** $-\infty$, alors $f$ n'est pas dérivable en $a$ ( car la limite n'est pas finie) ; mais la courbe $C_f$ admet au point $A(a\,;f(a))$ une **tangente parallèle à l'axe $(y'y)$ ou verticale, d'équation $x = x_A$,**

**2)** Si $f$ est **dérivable à droite et à gauche de $a$** avec $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, alors $f$ n'est pas **dérivable en $a$** $C_f$ admet alors au point $A(a\,;f(a))$ **deux demi-tangentes , et** $C_f$ admet au point $A(a\,;f(a))$ un **point anguleux.**

**3)** Graphiquement pour savoir si une fonction est dérivable au point d'abscisse $a$. Il suffit de voir si en ce point on a une seule tangente à $C_f$ non parallèle à $(y'oy)$,

**Théorème :** 1) Si $f$ est dérivable en $a$, alors $f$ est continue en $a$.

2) Si $f$ est dérivable sur un intervalle $I$, alors $f$ est continue sur I.

**Remarque :** La réciproque de ce théorème **n'est pas vraie** ; il arrive parfois qu'une fonction $f$ soit continue en $a$ sans être dérivable en ce point.

## V. Fonctions dérivées

**Définition :** $f$ est une fonction définie sur un intervalle $I$.
On dit que $f$ est dérivable sur $I$ si elle est dérivable en tout nombre $x$ de $I$, on la note $f'$,

# Exercices d'application sur la continuité et la dérivabilité

**N°1**

La fonction $f(x) = sin\left(\frac{\pi}{4}E(x)\right)$ est-elle continue en 0 ? en 1 ? en 2 ? en p ($p \in \mathbb{Z}$) ?

**N°2**

La fonction $f(x) = x, E(x)$ est-elle continue en 0 ? en 1 ?

**N°3**

Calculer la valeur de $\alpha$ pour que $f$ soit continue en 2.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{18}{x+4} & si\ x > 2 \\ 3 & si\ x = 2 \\ x^2 + \alpha & si\ x < 2 \end{cases}$$

**N°4**

Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x+3}{x+1} & si\ x > -1 \\ -5x - 3 & si\ x \leq -1 \end{cases}$

a. Déterminer l'ensemble de définition de $f$,
b. La fonction $f$ est-elle continue en -1 ?

**N°5**

Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{5x^2-8x-4}{x-2} & si\ x > 2 \\ \frac{\alpha}{x-3} & si\ x \leq 2 \end{cases}$

a. Déterminer l'ensemble de définition de $f$,
b. Déterminer, si possible, la valeur de $\alpha$ pour que $f$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

**N°6**

a. Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction $f$ donnée par : $f(x) = |x^2 - 1|$.

b. Étudier la dérivabilité de $f$ au point A d'abscisse -1 et au point B d'abscisse 1.

**<u>N°7</u> Vrai ou Faux ?**

Soit I un intervalle et a un nombre réel appartenant à I.

Dans chacun des cas suivants, indiquer s'il existe une fonction f définie sur I et vérifiant simultanément les deux propriétés données.

Si la réponse est OUI, donner un exemple (un graphique sera accepté).

Si la réponse est NON, la justifier à l'aide d'un théorème de cours.

a. f est continue en a et f est dérivable en a,
b. f est continue en a et f n'est pas dérivable en a,
c. f n'est pas continue en a et f est dérivable en a,
d. f n'est pas continue en a et f n'est pas dérivable en a,

**<u>N°8</u>**
Étudier la dérivabilité de $f(x) = x|x-2|$ au point d'abscisse 2.

**<u>N°9</u>**
Étudier la dérivabilité de $f(x) = \sqrt{|x-3|} + 4$ au point d'abscisse 3.

**<u>N°10</u>**

Soit $f(x) = \begin{cases} ax+3 & si\ x > -1 \\ b & si\ x = -1 \\ cx^2+1 & si\ x < -1 \end{cases}$

Comment choisir $a\ b\ et\ c$ pour que $f$ soit dérivable au point d'abscisse

-1 ?

**<u>N°11</u>**

Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x+1}{x-1} & si\ x \geq 2 \\ \frac{(x-3)^3-6}{x-3} & si\ x < 2 \end{cases}$

1. Vérifier que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ?

**<u>N°12</u>** Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2+x-2}{x-1}$.

**N°13**

Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-8}{\sqrt{x+1}-3} & si\ x > 8 \\ \dfrac{-x+2}{x-9} & si\ x \leq 8 \end{cases}$

Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**N°14** **Questionnaire à choix multiples : Q.C.M**

Dans ce Q.C.M, une ou plusieurs réponses peuvent être exactes.

$f$ est une fonction dérivable sur l'intervalle [-2 ;2]. Le tableau de variations de sa fonction dérivée $f'$ est :

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 1 | 0 | -2 | -1 | 0 |

***Conseil :*** **Avant de répondre aux questions suivantes, lire bien le tableau de variations de $f'$ et dresser celui de $f$.**

1. On a alors :
   A) $f(-2) < f(-1)$ B) $f(-1) < f(0)$ C) $f(0) < f(1)$

2. Dans un repère du plan, la courbe représentative (C) de la fonction $f$ admet exactement deux tangentes parallèles à la droite d'équation :
   A) $y = -\frac{1}{2}$ B) $y = \frac{1}{2}x$ C) $y = -\frac{1}{2}x$
3. Si $f(-2) > f(2)$, alors, pour tout réel $k$ appartenant à l'intervalle $]f(2); f(-2)[$, l'équation $f(x) = k$ admet dans l'intervalle $[-2; 2]$:

   A) exactement une solution B) exactement deux solutions. C) Pas de solution.

4. Si $f(1) = 0$, alors sur l'intervalle $[0; 2]$ :
   A) $f(x) \leq -2x$ B) $f(x) \geq -2x$ C) $f(x) \geq 0$

## Rappel dérivation

**Exercice 1 :**

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{2x-7}{4-6x}$$

$$g(x) = \cos(x)\,, \sin\,(x)$$

$$h(x) = (8-5x)^6$$

$$i(x) = \cos^7(2x)$$

$$j(x) = \tan^3(5x-1)$$

**Exercice 2 :**

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = (4-\sin\,(x))^7$$

$$g(x) = \sin^9(4-9x)$$

$$h(x) = \tan^2(5x+3\pi)$$

$$i(x) = x\left(\sqrt{x}+1\right)^3$$

$$j(x) = \sqrt{\cos\,(x)}$$

$$k(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

$$l(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$$

**Exercice 3 :**

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ et $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$

Sur l'écran d'une calculatrice graphique, les représentations graphiques des fonctions $f$ et $g$ semblent avoir la même tangente au point d'abscisse 1.

Qu'en est-il exactement ?

**Exercice 4 :**

Soit $f(x) = (\ 1 + \sin(x)\ )^3$

1) Montrer que $f$ est périodique de plus petite période $2\pi$.
2) Etudier les variations de $f$ sur $[-\pi; \pi]$.
3) En déduire son signe sur $[-\pi; \pi]$.

## Théorème des valeurs intermédiaires

**Activité de découverte :**

Soit la fonction $f$ donnée par : $f(x) = x - \cos(x)$

a. Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$,
b. Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = m$ ou $m \in IR$

### Comment penser à appliquer le théorème des valeurs intermédiaires ?

- Dans la question on doit voir « admet au moins » ou bien « admet un(e) unique ».
- On peut aussi utiliser le théorème des valeurs intermédiaires dans un tableau de variations d'une fonction afin de pouvoir étudier son signe.
- Et des fois on n'arrive pas à comparer deux fonctions $f$ et $g$, alors on pose

$h = f - g$, on dérive $h$ et on dresse son tableau de variations et à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires on dénombre ses racines (on pourra utiliser une calculatrice pour les encadrer). On pourra ainsi étudier le signe de $h$ et comparer alors $f$ et $g$.

### Plusieurs façons de poser une question qui se ramène à l'application du théorème des valeurs intermédiaires :

1) Montrer que l'équation $x^7 = 8x^6 - 4$ admet au moins une solution sur $[-\frac{1}{2}\ ; 1]$.
2) Montrer que l'équation $x^3 - 5x^2 - 7x = 2$ admet une unique solution sur $[0; 1]$.
3) Soit $f(x) = x^3 - 5x^2 \; et \; g(x) = 7x + 2$
   Déterminer le nombre de points d'intersection des courbes $(C_f)$ et $(C_g)$ sur $IR$.
4) Soit $f(x) = g(x) - h(x)$

La fonction $f$ est donnée par son tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $3$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $\frac{1}{5}$ |

Etudier la position relative de $(C_g)$ et $(C_h)$ courbes représentatives respectives de $g$ et $h$ sur $IR$.

**Application :**

Soit $f$ une fonction définie sur IR de tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $-1$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $-1$ |

Montrer que $C_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ coupe l'axe des abscisses en exactement deux points.

**Exercice 1**

Soit $f(x) = \frac{x^2}{2}$ et $g(x) = \frac{x^3}{3} + x$

1) Montrer que $(C_f)$ et $(C_g)$ ont un unique point d'intersection d'abscisse $\alpha$.
2) Vérifier que $\alpha^3 = \frac{3}{2}\alpha^2 - 3\alpha$.

**Exercice 2**

Montrer que l'équation : $x^3 + 4x = \sin(\pi, x)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 3**

Démontrer que les équations suivantes ont au moins une solution dans l'intervalle $[0\,;1]$.

a) $x^2 + 3x = 1$ b) $x^2 = \frac{1}{x+1}$ c) $x - 2\cos x = -1$

**Exercice 4**

Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'équation possède au moins une solution dans l'intervalle $I$ ,

a) $x^5 - 5x + 2 = 0$ ; $I = [0; 2]$

b) $x\sqrt{x+2} = 2$ ; $I = [-2; 2]$

c) $x sin\, x = 1$ ; $I = \left[0\,; \frac{\pi}{2}\right]$

**Exercice 5**

Soit $f$ une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0\,;1]$ qui prends ses valeurs dans l'intervalle $[0; 1]$ .

Démontrer que l'équation la courbe représentative de la fonction $f$ et la droite d'équation $y = x$ ont au moins un point de rencontre sur l'intervalle $[\,0\,;1]$ .

**Exercice 6**

Montrer que l'équation : $x^3 + 4x = \sin\,(\pi, x)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

## Calcul de primitives (1)

Déterminer une primitive de chacune des fonctions $f$ suivantes :

a) $f(x) = x^7 - x^{-3} + 5x + 2017$

b) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + 3\sqrt{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

d) $f(x) = \frac{1}{(3x-5)^2}$

e) $f(x) = \cos(3x) + \sin(2x) + \frac{4}{cos^2(x)}$

f) $f(x) = \frac{5+x}{3\sqrt{x}}$

g) $f(x) = cos^4 x \cdot sinx$

h) $f(x) = (12x - 2)\sqrt{3x^2 - x}$

i) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{7x+1}}$

j) $f(x) = \frac{10x+3}{(5x^2+3x+1)^{10}}$

k) $f(x) = \frac{2{,}5-3x}{(3x^2-5x)^{2017}}$

l) $f(x) = (2x + 3)^7$

m) $f(x) = cos^2(x)$

n) $f(x) = \frac{2x^5+4x^3-2x^2+1}{3x^2}$

o) $f(x) = \frac{2}{(7x-5)^2}$

p) $f(x) = \frac{5}{(3x-9)^{2016}}$

q) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$

r) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{(2x-1)^9} \quad -\sqrt{2}$

s) $f(x) = \frac{2\sqrt{x}+3x^{16}}{x}$

t) $f(x) = 2\sqrt{1 - x} + 4$

u) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2-1}}$

v) $f(x) = sin^2(x)$

w) $f(x) = \left(x - 3\sqrt{x}\right)^2$.

x) $f(x) = \cos(x).\sin^{2013}(x)$.

y) $f(x) = (x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 17}$.

z) $f(x) = \frac{\sin x}{(1+\cos x)^7}$

z') $f(x) = \frac{\cos x-\sin x}{(\cos x+\sin x)^3}$

## Calcul de primitives (2)

**N°1**

Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \left(2 - \sqrt{x}\right)^3$.
2. $f(x) = \tan(x), \cos^{2019}(x)$.
3. $f(x) = (16 - 12x)\sqrt{3x^2 - 8x + 19}$.
4. $f(x) = \frac{\sin x}{(1+\cos x)^7}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{\frac{\cos(x)}{\cos(x)+sin(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos(x)-\sin(x)}}$
6. $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$.
7. $f(x) = 3 + \cos(10x)$.
8. $f(x) = \sin^2(x)$.
9. $f(x) = \frac{\sqrt{3+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
10. $f(x) = \sin^3(x)$
11. $f(x) = (1 - \cos x)^2 + (1 + \cos x)^2$.

**N°2**

Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes (penser à faire un changement de variables) :

1. $f(x) = x\sqrt{x+2}$ sur $[-2; +\infty[$. (on posera $u = x + 2$, alors u'=1 et on exprimera le tout en fonction de $u$).
2. $f(x) = (x^2 + 3x - 7)\sqrt{x+3}$ sur $[-3; +\infty[$.
3. $f(x) = \sin(2x)\sqrt{3 - \sin(x)}$ sur $\mathbb{R}$.

# Recherche d'une primitive en décomposant en éléments simples

1) $Soit\ f(x) = \dfrac{-23x^2 + 28x + 2}{(x-3)^2(4-5x)^2}$

a) Déterminer la valeur des réels a et b tels que:

$$f(x) = \frac{a}{(x-3)^2} + \frac{b}{(4-5x)^2}$$

b) En déduire une primitive F de f.

c) Déterminer la primitive de f dont la courbe représentative passe par le point $\mathrm{A}(1;-1)$,

2) $Soit\ g(x) = \dfrac{3x^4 + 36x^3 - 6x^2 + x + 3}{(1+x^2)^2(1-6x)^2}$

a) Déterminer les réels a et b tels que $g(x) = \frac{a,x}{(1+x^2)^2} + \frac{b}{(1-6x)^2}$

b) En déduire une primitive G de g.

c) En déduire la primitive de g dont la courbe représentative passe par le point $\mathrm{B}(1;\frac{3}{20})$,

Remarques :
Si $f$ est une fonction de $x$ : $f(x)$ alors toute autre lettre présente dans l'expression de $f$ est considérée comme un paramètre.
Si on dérive $f$ ce paramètre sera considéré comme une constante :

Exemples : Dériver chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \cos(y).x^n$
$f'(x) = \cos(y).n.x^{n-1}$

2) $f(x) = t^4 \cdot \sin(t) \cdot \cos(x)$
$f'(x) = \mathrm{t}^4 \cdot \sin(t) \cdot (-\sin(x))$

3) $f(t) = x^3 \cdot \sqrt{t} \cdot \tan(y)$
$$f'(t) = x^3 \cdot \tan(y) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

De même si on veut déterminer une primitive $F$de $f$, alors ce paramètre sera considéré comme une constante :

Exemples : Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

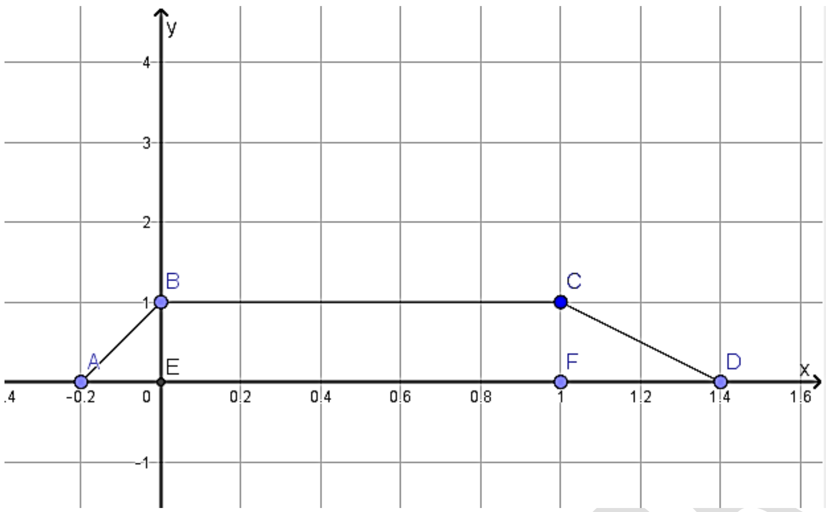
1) $f(x) = \cos(y) \cdot x^n$

2) $f(x) = t^4 \cdot \sin(t) \cdot \cos(x)$

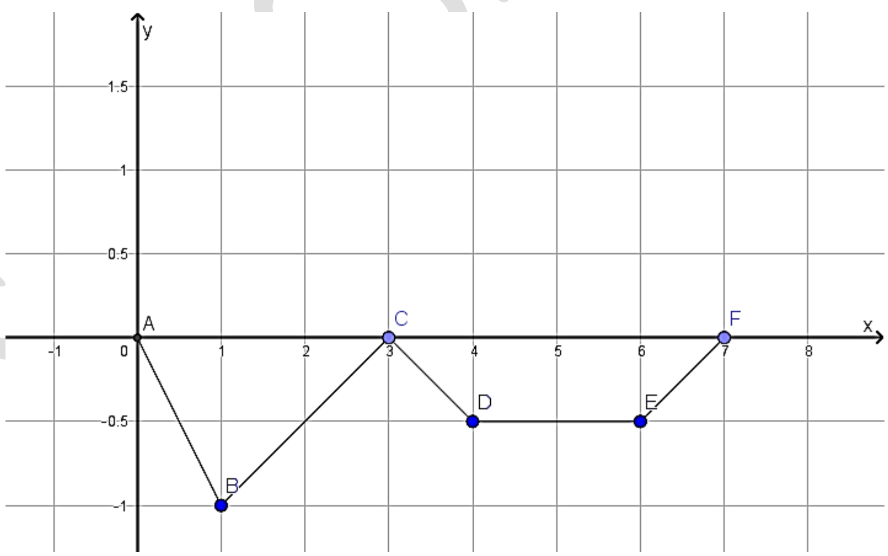
3) $f(t) = x^3 \cdot \sqrt{t}.\tan(y)$

# Intégrales : exercices supplémentaires

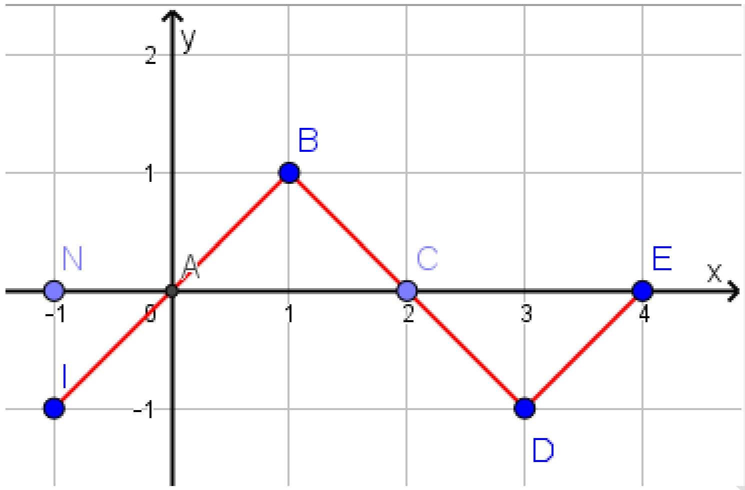
1) Soit $f$ une fonction définie et continue sur $IR$ donnée par sa courbe représentative ci-dessous, calculer $\int_{-0\,2}^{1\,4} f(x)dx$




2) Soit $f$ une fonction définie et continue sur $IR$ donnée par sa courbe représentative ci-dessous, calculer $\int_0^7 f(x)dx$.



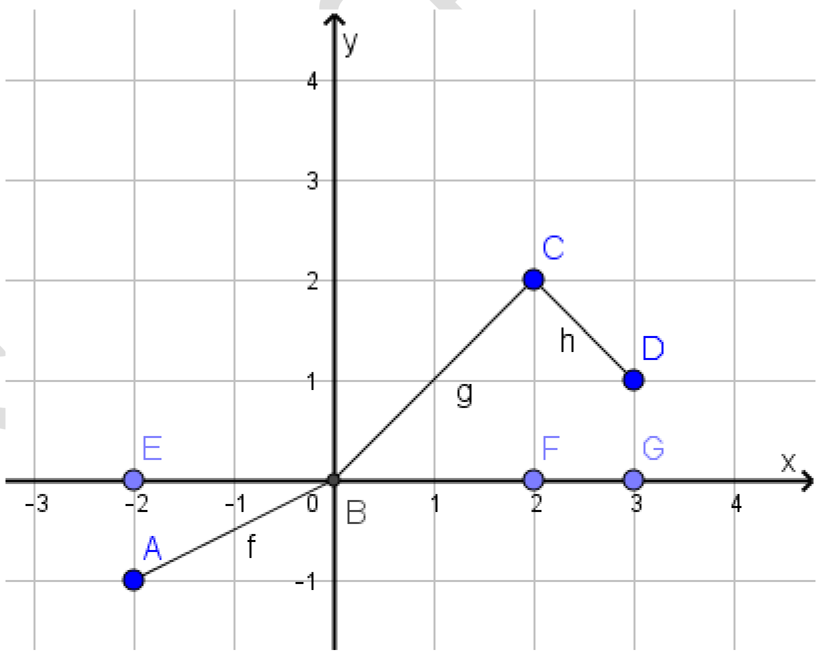
3) Soit $f$ une fonction définie et continue sur $IR$ donnée par sa courbe représentative ci-dessous, calculer $\int_{-1}^{4} f(x)dx$



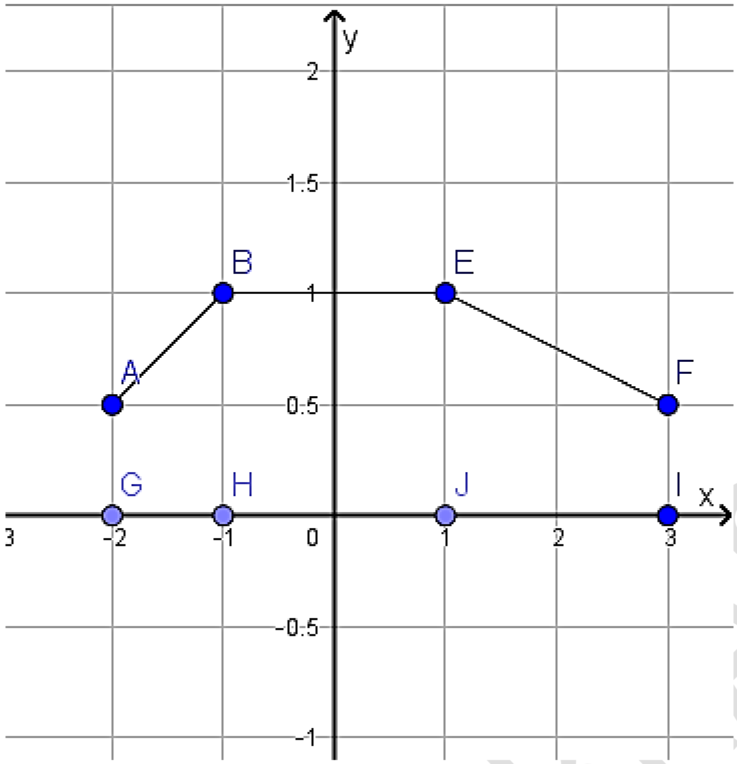

4) Dans chacun des cas suivants, $f$ est une fonction donnée par sa courbe représentative :

$$\textit{Quelle est la valeur de l'intégrale } \int_{-2}^{3} f(t)dt \textit{ dans chacun des cas suivants ?}$$

<u>1$^{er}$ cas :</u>



2ème cas :




5) Calculer $I = \int_{-7}^{-2} x^2 + 6x + 5\, dx$.
Donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

6) Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_{4}^{1} x^2 \sqrt{y}\, dy = x^2 \left[\frac{2}{3}\, y\sqrt{y}\right]_4^1 = \frac{2}{3} x^2 (1-8) = -\frac{14}{3} x^2$$

$$B = \int_{-2}^{1} sin(x), cos(y), t^2 dt = \left[sin(x), cos(y), \frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{1}$$

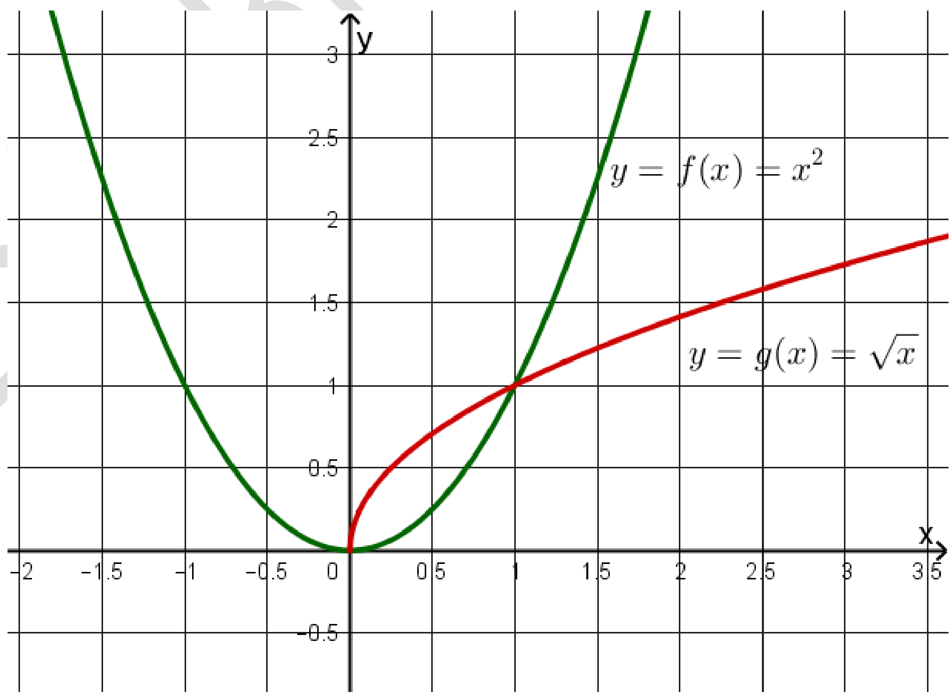
7) Calculer, lorsque cela est possible, chacune des intégrales suivantes :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3} \qquad J = \int_{1}^{2} \frac{dx}{x^3}$$

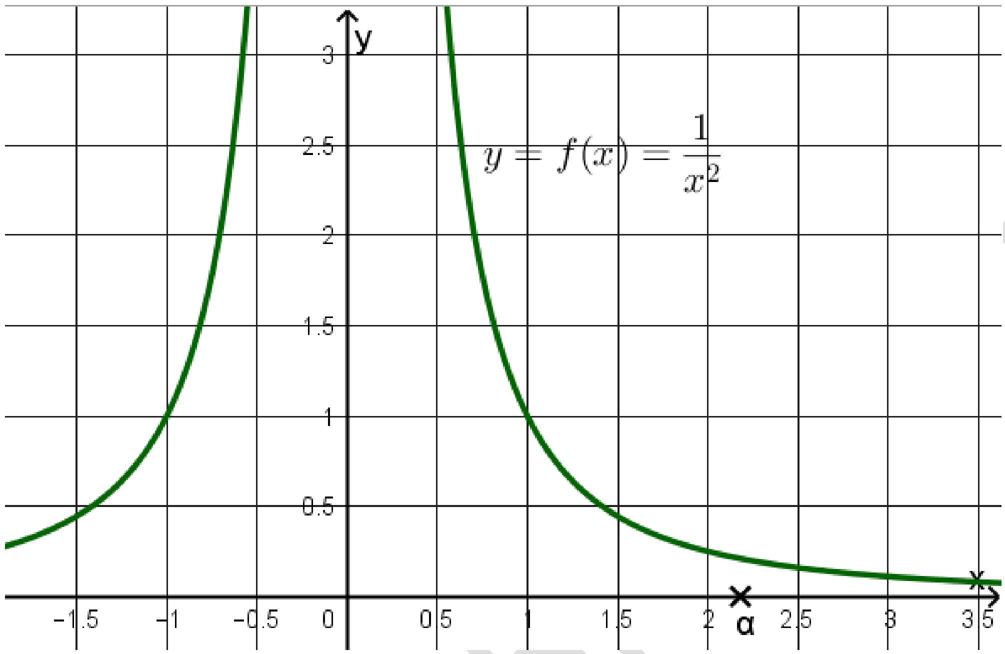
$$L = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(x)\, dx \qquad M = \int_{1}^{2} \frac{x|x|dx}{2019\, x^{2020}}$$

$$N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) + |\sin(x)|}{(1+\cos(x))^2} dx$$

8) Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives de $f$ et de $g$ et des droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.



9) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.




Que vaut cette aire lorsque $\alpha$ tend vers $+\infty$ ?

10) Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx$.

1) Calculer $I + J$.
2) Calculer $I - J$.
3) En déduire les valeurs exactes de $I$ et $J$.

11) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $u_n = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^n}{1+x^2}dx$.

Calculer $u_{2018} + u_{2020}$.

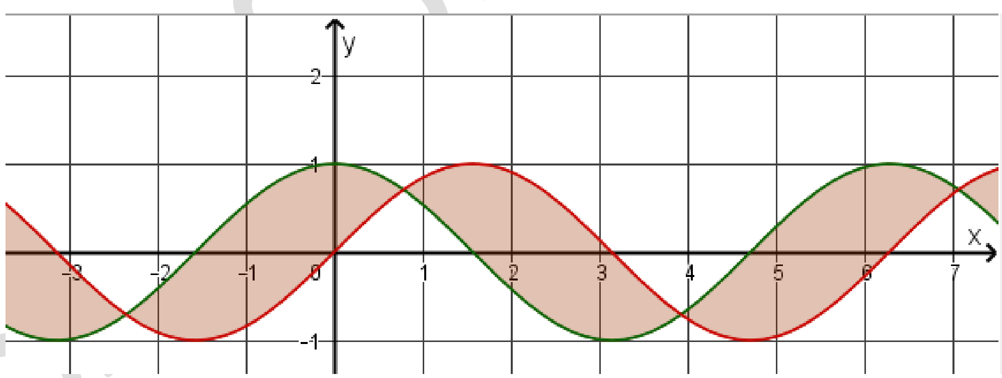
12) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $v_n = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,,\cos^n(x)\,dx$.

a) Calculer $v_0$ $v_1$ et $v_2$.
b) Sans avoir à expliciter $v_n$, conjecturer le sens de variations de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que sa limite.
c) Prouver le sens de variations de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
d) Expliciter $v_n$ et vérifier les résultats du b).

13) Soit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $w_n = \int_0^n \frac{x^{2019}}{\sqrt{1+x^{2020}}}\,dx$

Sans avoir à expliciter $w_n$, étudier son sens de variations.

14) Les courbes des fonctions sinus et cosinus sont représentées dans le repère orthonormé ci-dessous.




Sur une période, quelle est l'aire du domaine coloré ?

15) Calculer chacune des intégrales ci-dessous :

$$I = \int_{-1}^{4} (2x-3)^2 dx \qquad J = \int_{-2}^{1} (x-4)^3 dx$$

$$K = \int_{2}^{1} 2t(t^2+1)^4 dt \qquad L = \int_{0}^{1} (2x+1), (x^2+x) dx$$

$$M = \int_{0}^{2} \frac{3t}{(t^2+1)^2} dt \qquad N = \int_{0}^{3} \frac{1}{(2u+1)^2} du$$

$$O = \int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx \qquad P = \int_{0}^{-1} \frac{2}{\sqrt{1-3x}} dx$$

$$Q = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} dx \qquad R = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \frac{\sin(t) - t, \cos(t)}{t^2} dx \qquad T = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} x^3 \cos(x), \sqrt{x}, y^3 \, dy$$

16) Calculer les intégrales suivantes:

$$A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \frac{sin(t) - t, \cos(t)}{t^2} dt \qquad B = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) dt$$

$$C = \int_{1}^{2} \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) dt$$

# Rappel sur l’ordre

$$Si\ 0 \leq a < b\ \ alors\ a^2 < b^2$$

$$Si\ 0 \leq a < b\ \ alors\ a^2 > b^2$$

$$Si\ a < b\ \ alors\ a + c < b + c$$

$$Si\ a < b\ \ alors\ a - c < b - c$$

$$Si\ a < b\ et\ c > 0\ alors\ a, c < b, c$$

$$Si\ a < b\ et\ c < 0\ alors\ a, c > b, c$$

$$Si\ a < b\ et\ c > 0\ alors \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

$$Si\ a < b\ et\ c < 0\ alors \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

$$Si\ 0 < a < b\ \ alors\ \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$Si\ a < b < 0\ \ alors\ \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$Si\ a < 0\ \ et\ \ \ b > 0\ \ alors \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$Si\ a < b\ \ et\ c < d\ \ \ alors\ \ a + c < b + d$$

$$Si\ \ 0 \leq\ \ a < b\ \ et\ 0 \leq c < d\ \ \ alors\ \ a \times c < b \times d$$

Attention ! $Si\ \ a < b\ \ et\ \ c < d\ \ \ on\ n'a\ pas\ que\ \ a - c < b - d$

On ne peut pas soustraire membres à membres deux inégalités de même sens et obtenir toujours une inégalité de même sens.

Contre-exemple : $2 < 5$

$1 < 6$

$mais\ 1 > -1$

$2 - 1 = 1\ \ \ et\ \ \ 5 - 6 = -1$

Attention ! $Si\ \ a < b\ \ et\ \ c < d\ \ \ on\ n'a\ pas\ que\ \frac{a}{c} < \frac{b}{d}$

On ne peut pas diviser membres à membres deux inégalités de même sens et obtenir toujours une inégalité de même sens.

Contre-exemple : $3 < 4$

$1 < 2$

$mais\ 3 > 2$

$3 \div 1 = 3\ \ \ et\ \ \ 4 \div 2 = 2$

$$Si\ 0 \leq a < b \quad alors \quad a^2 < b^2$$

$$Si\ a < b \leq 0 \quad alors \quad a^2 > b^2$$

$Si\ a < b\ \ alors: si\ f\ est\ croissante \quad f(a) < f(b)$

$et\ si\ f\ est\ décroissante\ f(a) > f(b)$

Si on a besoin d'encadrer une différence : $A - B = A + (-B)$

Je peux encadrer A puis encadrer $-B$ et ensuite ajouter membres à membres.

Si on a besoin d'encadrer un quotient: $\frac{A}{B} = A \times \frac{1}{B}$

Je peux encadrer A puis encadrer $\frac{1}{B}$ et ensuite je m'assure que tous les termes sont positifs puis je multiplie membres à membres.

**Des fois nous sommes face à des intégrales qu'on ne sait pas calculer, on peut quand même les encadrer pour avoir une idée de leur valeur.**

17) Démontrer les encadrements suivants :

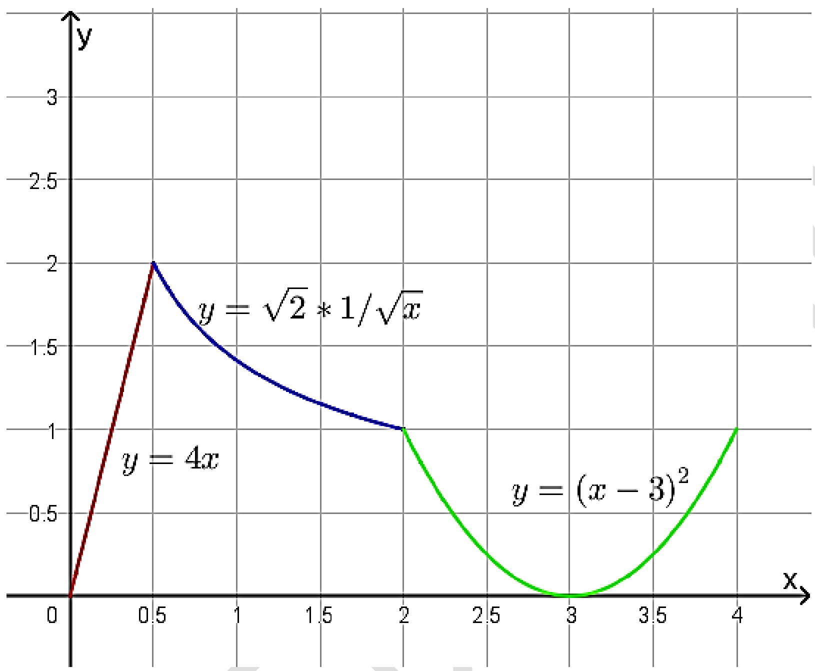
$$a) \frac{1}{5} \leq \int_1^3 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 1$$

$$b) -\frac{\pi}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t^2+1)\, dt \leq \frac{\pi}{2}$$

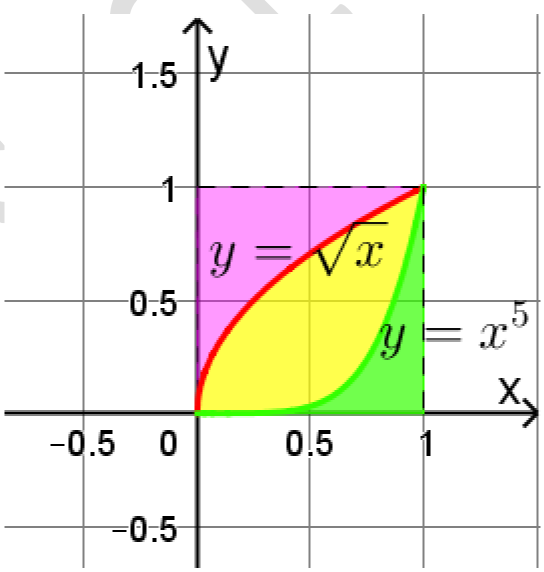
$$c) \frac{1}{\sqrt{5}} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \frac{1}{2}$$

18) La courbe ci-dessous représente une fonction $f$ définie par intervalles.

Calculer $\int_0^4 f(x)dx$.

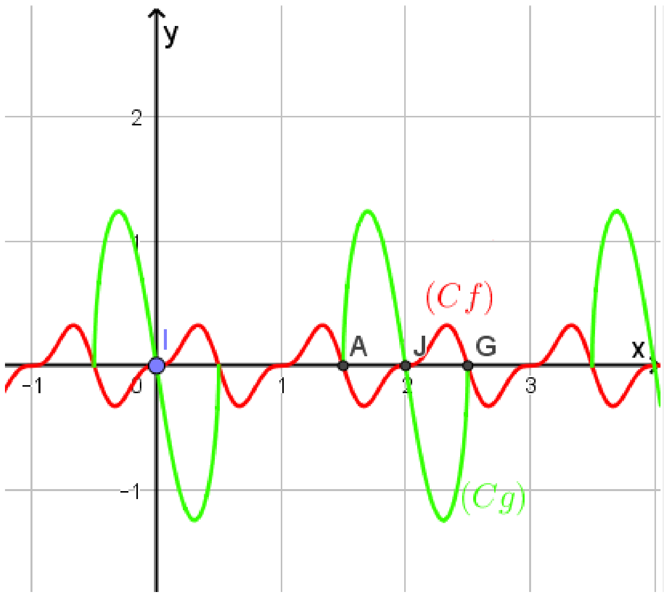



19) Les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$ et $y = x^5$ déterminent à l'intérieur du carré unité, trois domaines $D_1(en\ vert)$ $D_2(en\ rose)$ et $D_3(en\ jaune)$. Calculer, en unités d'aires, l'aire de chacun d'eux.

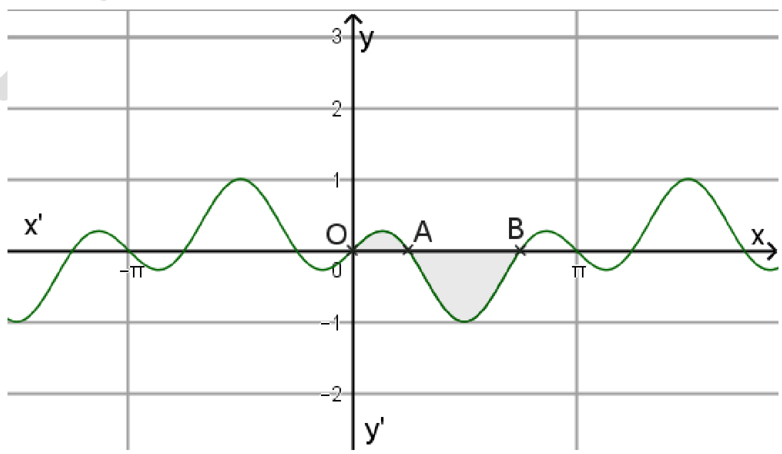


20) Calculer, en unités d'aires, l'aire du domaine délimité par $(C_f)$ $(C_g)$ et les droites d'équations $x = \frac{3}{2}$ et $x = \frac{5}{2}$.

Soit $f(x) = \cos(\pi x)\,, \sin^3(\pi x)$ $\qquad$ $g(x) = -2\sin(\pi x)\,, \sqrt{\cos\,(\pi x)}$




21) Dans le repère orthogonal ci-contre, d'unité graphique 4 cm en abscisse et 1,5 cm en ordonnée, on a représenté la fonction $f$ définie sur $IR$ par :
$f(x) = \sin(x)\,, \cos\,(2x)$.

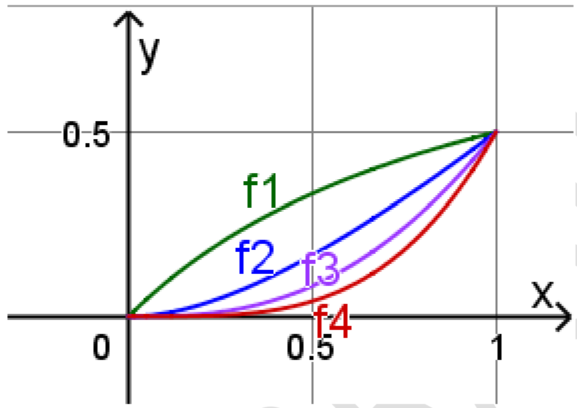



1. Déterminer une primitive de $f(x) = \sin(x)\,, \cos\,(2x)$.
2. Résoudre, dans $IR$, l'équation $\sin(x)\,, \cos(2x) = 0$.
3. En déduire les abscisses des points $A$ et $B$.
4. Calculer alors, en unités d'aire puis en $cm^2$, l'aire du domaine grisé.

22) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$$

1. Les fonctions notées $f_n : x \to \frac{x^n}{1+x}$ sont continues et positives sur [0 ;1].




Conjecturer alors le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
b. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est elle convergente ?
2. a. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$,

$$0 \leq f_n(x) \leq x^n$$

c. Déduisez-en que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{1+n}$

3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

## Intégration par parties

Comment calculer chacune des intégrales suivantes ?

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x, \cos(x)\, dx \;? \qquad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x, \sin(x)\, dx \;? \qquad C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2, \sin(x)\, dx \;?$$

$u = u(x)\ et\ v = v(x)$

$$(u, v)' = u', v + v', u$$

Alors $u', v =?$

$$u', v = (u, v)' - v', u$$

$$D'où \int_a^b u', v\, dx = \int_a^b (u, v)'\, dx - \int_a^b v', u\, dx = [u, v]_a^b - \int_a^b v', u\, dx$$

On utilise cette formule si on n'arrive pas à déterminer une primitive de $u', v$ alors que la recherche d'une primitive de $v', u$ est facile.

$De\ même$:

$$\int_a^b v', u\, dx = \int_a^b (u, v)'\, dx - \int_a^b u', v\, dx = [u, v]_a^b - \int_a^b u', v\, dx$$

**Comment calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties ?**

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x, \cos(x)\, dx \qquad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x, \sin(x)\, dx \qquad C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2, \sin(x)\, dx$$

## Intégrale fonction de sa borne supérieure

**Exercice 1 :**

Étudier le sens de variations de la fonction f définie sur IR par:

$$f(x) = \int_{-5}^{x} (t^2 + 2t - 5)dt$$

**Exercice 2 :**

Écrire l'équation de la tangente à $(C_g)$ au point d'abscisse 1 où $g$ est donnée par :

$$g(x) = \int_{1}^{x} \frac{\sqrt{3+t^3}, (1-2t)^{2020}}{2+t^2} dt$$

**Exercice 3 :**

$$Soit\ F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{\sin(\pi t)\, dt}{\left(1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)^2}.$$

1. Déterminer les valeurs de $F(-1)$ et de $F(1)$.
2. Calculer $F(0)$,
3. Montrer que $F$ admet un seul extrémum sur [-1 ;1].
4. Montrer que l'équation $F(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur [-1 ;1].

**Exercice 4 :**

$$Soit\ F(x) = \int_{2}^{x} (t^4 - 3t^2 - 4)dt$$

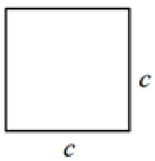
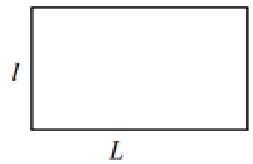
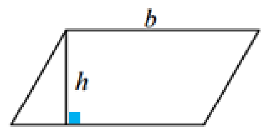
1. Déterminer les extrémums de la fonction $F$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les abscisses des points d'inflexions de $F$ sur $\mathbb{R}$.

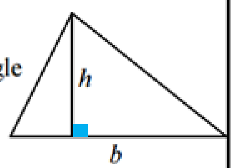
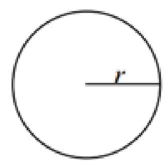
# Rappel sur les formules d'aires et de volume

## <u>Formules *Aire et Volume* ( Figures Connus ) :</u>

### <u>Formules d' Aires :</u>

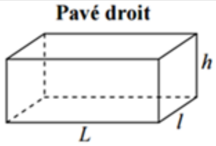
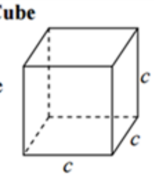
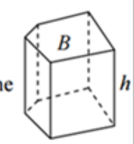
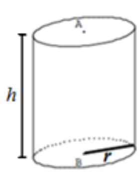
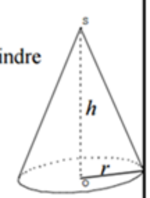
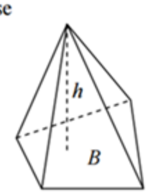
**A désigne l'Aire de la figure.**

| Carré | Rectangle | Parallélogramme |
|---|---|---|
|  <br>$c$ : côté du carré<br>$A = c \times c$ |  <br>$l$ : largeur et $L$ : longueur<br>$A = l \times L$ |  <br>$b$ : longueur d'un côté<br>$h$ : hauteur associée<br>$A = b \times h$ |

| Triangle | Disque |
|---|---|
| $b$ : longueur d'un côté du triangle<br>$h$ : hauteur associée<br>$A = \dfrac{b \times h}{2}$   | $r$ : rayon du disque<br>$A = \pi \times r \times r = \pi r^2$<br>$\pi$ désigne un nombre. $\pi \approx 3{,}141592$   |

### <u>Formules de Volumes :</u>

**V désigne le Volume de la figure.**

| Pavé droit | Cube | Prisme droit |
|---|---|---|
|  <br>$L$ : Longueur<br>$l$ : largeur<br>$h$ : hauteur<br>$V = L \times l \times h$ | $c$ : côté du cube<br>$V = c \times c \times c = c^3$   | $B$ : aire de la base<br>$h$ : hauteur du prisme<br>$V = B \times h$  <br>$p$ : périmètre de la base<br>$Aire\ \ latérale = p \times h$ |
| **Cylindre de révolution** | **Cône** | **Pyramide** |
| La formule est la même que pour le prisme droit. Comme la base est un disque de rayon $r$, on a :  <br>$V = \pi \times r \times r \times h = \pi r^2 h$<br>$Aire\ \ latérale = 2\pi rh$ | $r$ : rayon du disque de base<br>$h$ : hauteur du cylindre<br>$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$   | $B$ : aire de la base de la pyramide<br>$h$ : hauteur de la pyramide<br>$V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$   |

<u>Remarque :</u> **Pavé droit est aussi appelé Parallélépipède rectangle.**

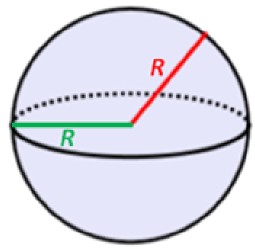
## Boule et Sphère : Aire et Volume

**Boule**

$R$ : rayon de la boule

$$\text{Volume} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\text{Aire} = 4\pi R^2$$




**Remarque :**

**La formule de l'Aire ci-dessus, représente l'Aire de la Sphère qui est l'extérieur ou la surface de la Boule. Autrement dit, on calcule l'Aire d'une sphère, mais le Volume d'une Boule.**

**On prenons l'exemple d'une balle de tennis qui est sous forme d' une coquille vide, donc une Sphère, et l' intérieur représente la Boule.**



Remarque :

Le cercle de centre $I$ et de rayon $R$ est l'ensemble des points $M$ tels que

$IM^2 = R^2$

$(x_M - x_I)^2 + (y_M - y_I)^2 = R^2$

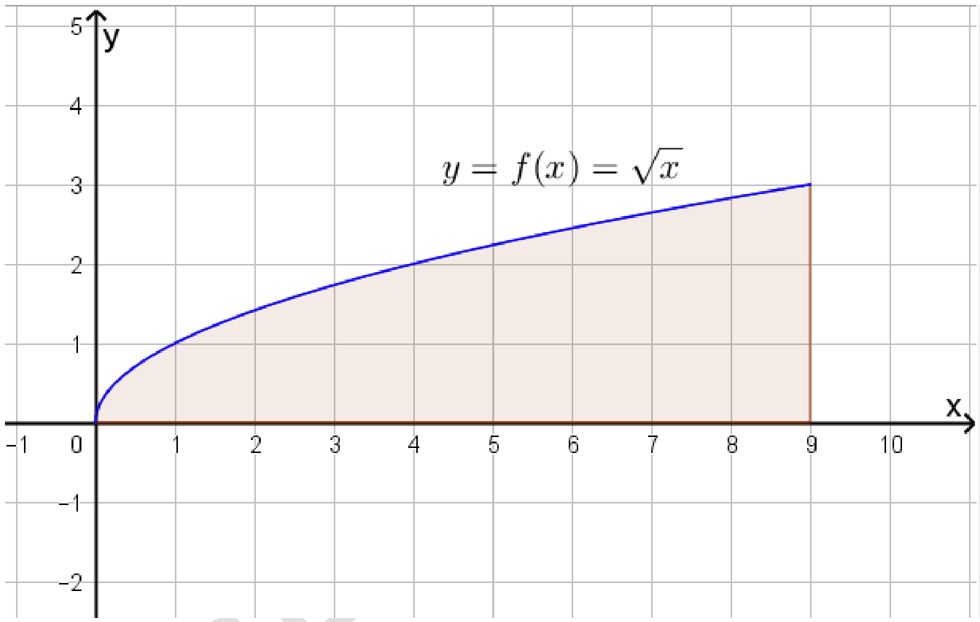
Si $I = O$, $x^2 + y^2 = R^2$

Un cercle n'est pas une fonction(car un réel a deux images) , par exemple le cercle de centre O et de rayon $R$ c'est la réunion des deux fonctions :

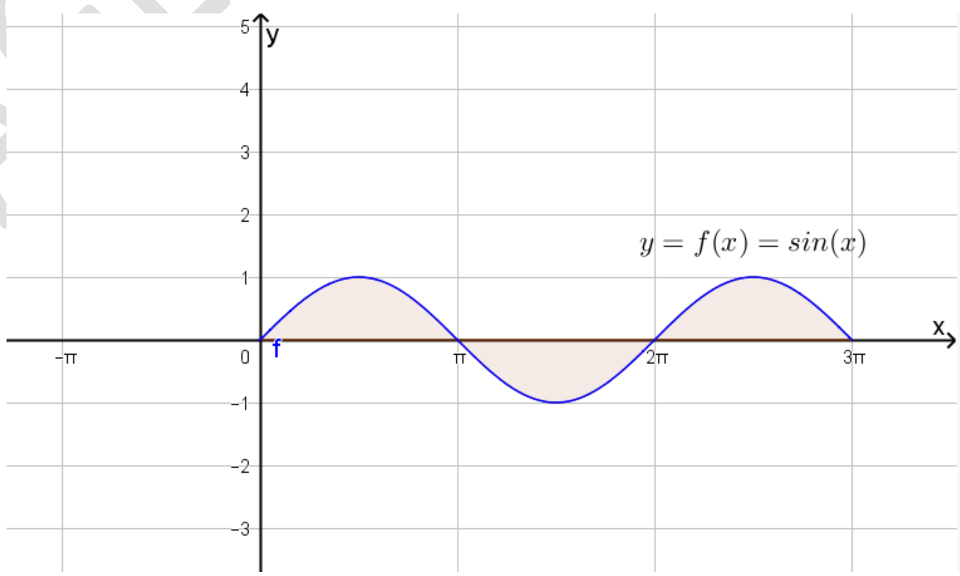
$$f(x) = +\sqrt{R^2 - x^2} \quad et \quad g(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$$

# Exercices sur la révolution et volume

1) Calculer le volume engendré par la rotation du domaine D **autour de l'axe des abscisses $x'Ox$.**
   D étant l'aire du domaine délimité par $(C_f)$, l'axe des abscisses $x'Ox$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 9$ où $f(x) = \sqrt{x}$,

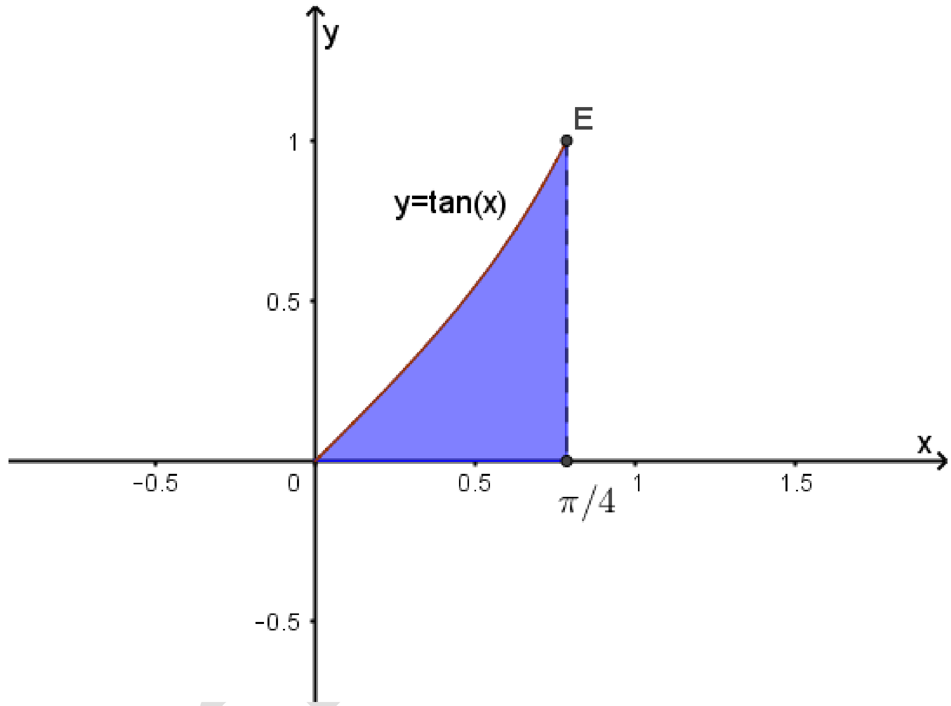



2) Calculer le volume engendré par la rotation du domaine D **autour de l'axe des abscisses $x'Ox$.**
   D étant l'aire du domaine délimité par $(C_f)$, l'axe des abscisses $x'Ox$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3\pi$ où $f(x) = \sin(x)$,



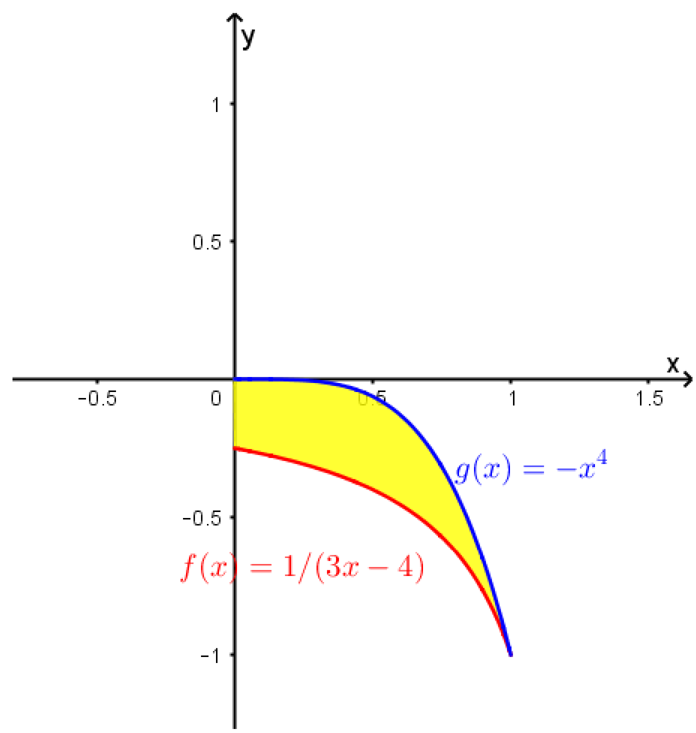
3) Calculer le volume engendré par la rotation du domaine D **autour de l'axe des abscisses $x'Ox$.**

D étant l'aire du domaine délimité par $(C_f)$, l'axe des abscisses $x'Ox$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$ où $f(x) = \tan(x)$,



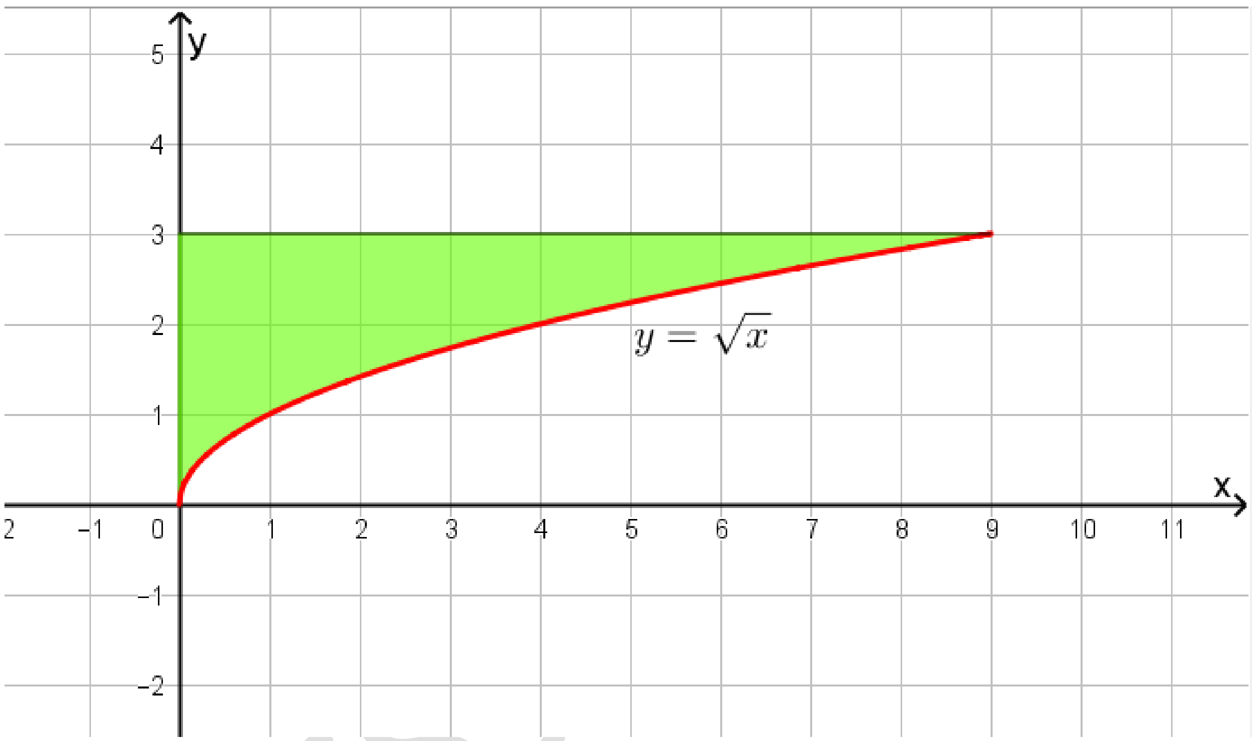

4) Calculer le volume engendré par la rotation du domaine D **autour de l'axe des abscisses $x'Ox$.**

D étant l'aire du domaine délimité par $(C_g)$, $(C_f)$, et des droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ où $f(x) = \frac{1}{3x-4}$ et $g(x) = -x^4$.



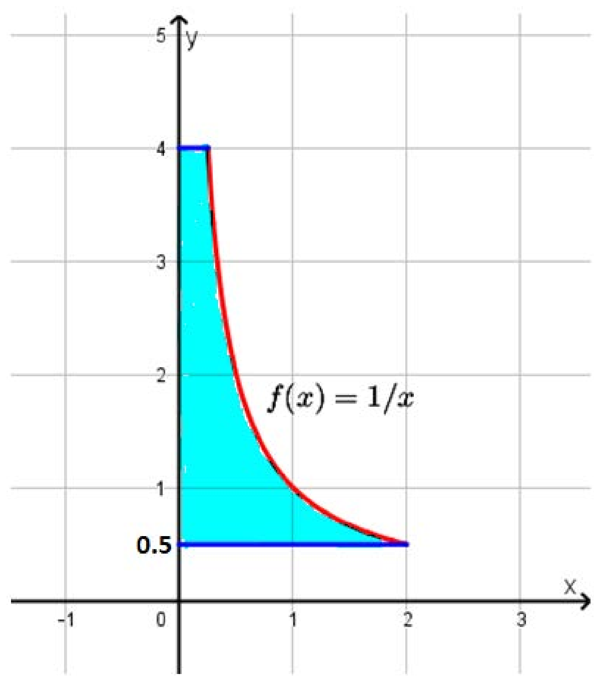
5) Calculer le volume engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des **ordonnées y′$\boldsymbol{Oy}$.**

D étant l'aire du domaine délimité par $(C_f)$, l'axe des ordonnées $y'Oy$ et les droites d'équations $y = 0$ et $y = 3$ avec $f(x) = y = \sqrt{x}$



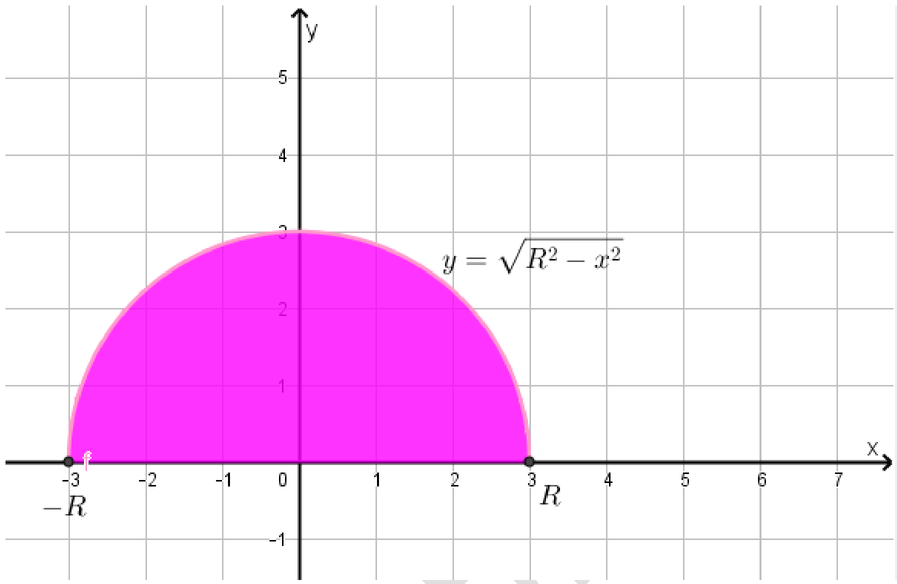

6) Calculer le volume engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des **ordonnées y′$\boldsymbol{Oy}$.**

D étant l'aire du domaine délimité par $(C_f)$, l'axe des ordonnées $y'Oy$ et les droites d'équations $y = \frac{1}{2}$ et $y = 4$ avec $f(x) = y = \frac{1}{x}$.

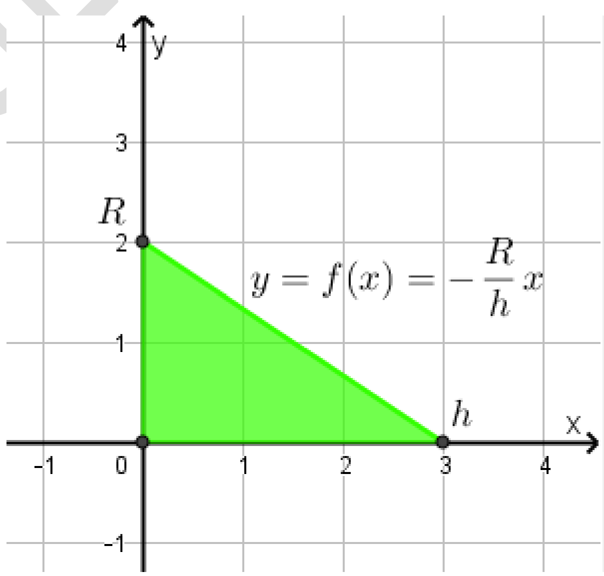


7) Calculer le volume engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des **abscisses $x'Ox$.**

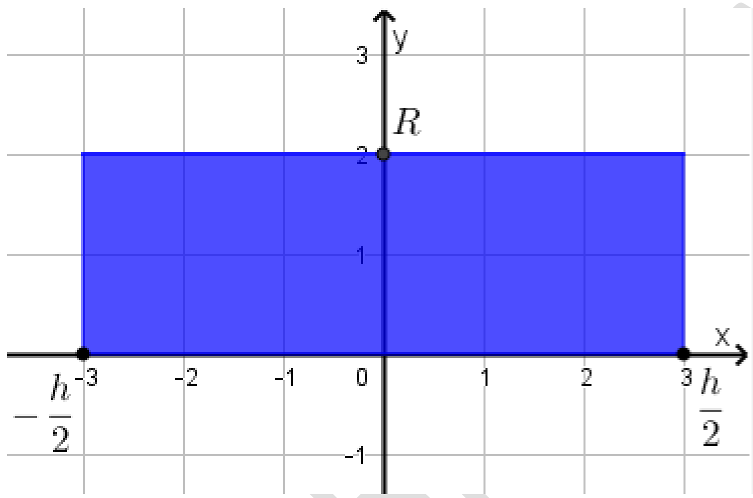
D étant l'aire du domaine délimité par $\left(C_f\right)$, l'axe des abscisses $x'Ox$ et les droites d'équations $x = -R$ et $y = R$ avec $f(x) = y = \sqrt{R^2 - x^2}$.




8) Calculer le volume engendré par la rotation du domaine D où D est l'aire du domaine délimité par $\left(C_f\right)$, l'axe des abscisses $x'Ox$ et les droites d'équations $x = 0$ et $y = h$ avec $f(x) = y = -\frac{R}{h}x$.



9) Calculer le volume engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des abscisses où D est l'aire du domaine délimité par $(C_f)$, l'axe des abscisses $x'Ox$ et les droites d'équations $x = -\frac{h}{2}$ et $y = \frac{h}{2}$ avec $f(x) = y = R$.



# Fonctions rationnelles

**Étudier une fonction revient à :**

1- **Déterminer son domaine de définition.**
2- **Étudier sa parité.**
3- **Étudier sa périodicité. (Surtout pour les fonctions trigonométriques).**
4- **Calculer les limites ou les valeurs limites aux bornes de son domaine de définition et déterminer ses éventuelles asymptotes.**
5- **Calculer sa dérivée.**
6- **Dresser son tableau de variations.**
7- **Dresser un tableau de valeurs.**
8- **Tracer ses éventuelles asymptotes.**
9- **Tracer sa courbe représentative.**

**N°1**

a. Étudier la fonction $f$ donnée par $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-2}$.
b. Soit $g(x) = f(|x|)$. Comment déduire $C_g$ à partir de $C_f$ ? La tracer.

**N°2**

a. Étudier la fonction $h$ donnée par $h(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.
b. Soit $i(x) = \frac{(x+1)|x-1|}{x^2+1}$. Comment déduire $C_i$ à partir de $C_h$ ? La tracer.

**N°3**

Étudier la fonction $j$ donnée par $j(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$,

**N°4**

a. Étudier la fonction $k$ donnée par $k(x) = \frac{x^2+2x-1}{x+2}$.
b. Soit $l(x) = \frac{x^2+2|x|-1}{|x|+2}$.Comment déduire $C_l$ à partir de $C_k$ ? La tracer.

**N°5**

Étudier la fonction $m$ donnée par $m(x) = x + \frac{x-2}{x^2+1}$.

**N°1**

a. Étudier la fonction $f$ donnée par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x}$.
b. Déterminer l'ensemble image par $f$ de $D_f$.
c. Soit $g(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}$. Comment déduire $C_g$ à partir de $C_f$ ?
d. Soit $h(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-|x|}{x}$. Comment déduire $C_h$ à partir de $C_f$ ?
e. Soit $i(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-|x|}{|x|}$. Comment déduire $C_i$ à partir de $C_f$ ?

**N°2**

Étudier la fonction $f$ donnée par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

**N°3**

Étudier la fonction $f$ donnée par $f(x) = x - \sqrt{4 - x^2}$.

**N°4**

Étudier la fonction $f$ donnée par $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4}$.

**N°5**

Étudier la fonction $f$ donnée par $f(x) = x - \sqrt{x - 2}$.

**N°6**

Étudier la fonction $f$ donnée par $f(x) = |x| + \sqrt{4 + x^2}$.

# Fonctions réciproques

**Pour chacune des fonctions suivantes répondre aux questions suivantes :**

a. **Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$.**
b. **Donner l'expression de $f^{-1}$.**
c. **Déterminer les éventuels points d'intersections de $(C_f)$ et$(C_{f-1})$.**
d. **Tracer $(C_f)$ et$(C_{f-1})$ dans un même repère othonormé.**

a) $\boldsymbol{f}$ est la fonction définie sur $[\mathbf{0};+\infty[$ à valeurs dans $[\mathbf{1};+\infty[$ et donnée par $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\sqrt{\boldsymbol{x}}+\mathbf{1}$

b) $\boldsymbol{f}$ est la fonction définie sur $[\mathbf{1};+\infty[$ à valeurs dans $\boldsymbol{f}([\mathbf{1};+\infty[)$ et donnée par $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=-\mathbf{1}-\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}$

c) $\boldsymbol{f}$ est la fonction définie sur $[-\mathbf{2};\mathbf{0}]$ à valeurs dans $\boldsymbol{f}([-\mathbf{2};\mathbf{0}])$ et donnée par $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}^{2}+\boldsymbol{x}+\mathbf{2}$

# Fonctions logarithme népérien : Exercices (1)

**1)** Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :
$f(x) = ln(x-1)$  $g(x) = ln(-x)$  $h(x) = ln(x^2)$
$i(x) = ln^2(x)$  $j(x) = ln(sin(x))$

**2)** Après avoir déterminé le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes, donner l'expression de sa dérivée.
$f(x) = ln(\cos(x))$  $g(x) = ln(\ln(x))$  $h(x) = xln(x) - x$

$i(x) = \ln\left(\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}\right)$

3) Simplifier l'expression de $f(x) = ln\left(\frac{(x+2)^{30}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

4) Résoudre l'équation suivante : $\ln(3-x) + \ln(4+x) = \ln(10)$.

5) Calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\, dx$.

6) Résoudre l'inéquation suivante :
$\ln(1-x) + \ln(2-x) < \frac{1}{2}\ln(9)$.

7) Résoudre l'inéquation suivante : $ln(1-x)(2-x) < ln(3)$.

8) Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x)dx}{\cos(x)+\sin(x)}$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)dx}{\cos(x)+\sin(x)}$

a. Calculer $I - J$ et $I + J$.
b. En déduire les valeurs exactes de $I$ et $J$.

9) Simplifier l'expression suivante :
$A = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + ln\left(\frac{2}{3}\right) + ln\left(\frac{3}{4}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{99}{100}\right)$

10) Résoudre l'équation : $\ln(4x+2) - \ln(x-1) = \ln(x)$.

11) Ecrire plus simplement : $\ln(21) + 2\ln(14) - 3\ln(0\ 875)$.

12) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_n = 0\ 3^n$.

À partir de quel rang $n$, $u_n$ devient-elle plus petite que $10^{-10}$ ?

13) Écrire plus simplement $a = 2^{\frac{-1}{ln2}}$.

14) Résoudre l'inéquation : $2\ln^2(x) + 5\ln(x) - 7 \geq 0$,

15) Calculer les intégrales suivantes :

$$L = \int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}dx \qquad M = \int_1^4 \frac{1-\ln^2(x)}{x}dx$$

16) Résoudre les inéquations suivantes :

$\ln^2(x) + 2\ln|x| - 8 \geq 0$,

$\ln|x-2| \leq 2\ln(x)$

17) Quel est le domaine de définition de la fonction $f$ donnée par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ ?

## Fonctions logarithme népérien : Exercices (2)

Pour chacun des exercices 1) à 3) suivants, calculer la limite de chacune des fonctions suivantes aux bornes ouvertes de leur domaine de définition :

1)

a) $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$

b) $f(x) = x(1 - \ln(x))$

c) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$

d) $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln(x)$

2)

a) $f(x) = \dfrac{x - \ln(x)}{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$

c) $f(x) = x + \dfrac{\ln(x)}{x}$

d) $f(x) = \ln(2 + e^x)$

3) $a)$ $f(x) = xln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$b)$ $f(x) = x + x, \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

4) Vrai ou Faux ?

$f$ est la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln(x^2+x+1)-2\ln(x+1)$$

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
Justifiez votre réponse :

a) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$,
b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$,
c) $f$ est croissante sur $[1;+\infty[$.
d) L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-1;+\infty[$.
e) L'équation $f(x)=1$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-1;+\infty[$.

5)

a. Résoudre, dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)^n \leq 10^{-10}$.

b. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $\ln(7-\mathrm{x})+\ln(x-2)=\ln(-4x^2+20x)$.

c. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\dfrac{\ln x}{1-\ln x} \geq \dfrac{1-\ln x}{\ln x}$.

6) Calculer chacune des intégrales suivantes :

$\mathrm{J}=\int_{-1}^{1} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}^2}}\mathrm{dx}$ $\qquad$ $\mathrm{I}=\int_{-1}^{1} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{(\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+5)^2}\mathrm{dx}$ $\qquad$ $\mathrm{K}=\int_{-2}^{2} \dfrac{\mathrm{x}^7+\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}\mathrm{dx}$

7) Résoudre, dans R, l'équation et les inéquations suivantes :

a. $\dfrac{1}{1-ln|x|} \leq 1-ln|x|$.

b. $e^{2\ln(x+1)} \geq \ln\left(e^{2x+5}\right)$.

c. $\ln(7-\mathrm{x})-\ln(\mathrm{x}+2) \leq \ln\left(\mathrm{x}-\dfrac{7}{2}\right)$.

8) $f$ est une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b + \frac{\ln(x)}{x} \text{ où } a \textit{ et } b \textit{ sont deux nombres,}$$

On note $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. i. Sachant que le point $A(1;0)$ est le point de $(C_f)$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 2$, écrire un système d'équations que vérifient $a$ et $b$,
   ii. Résoudre ce système et déterminer les valeurs de $a$ et $b$,

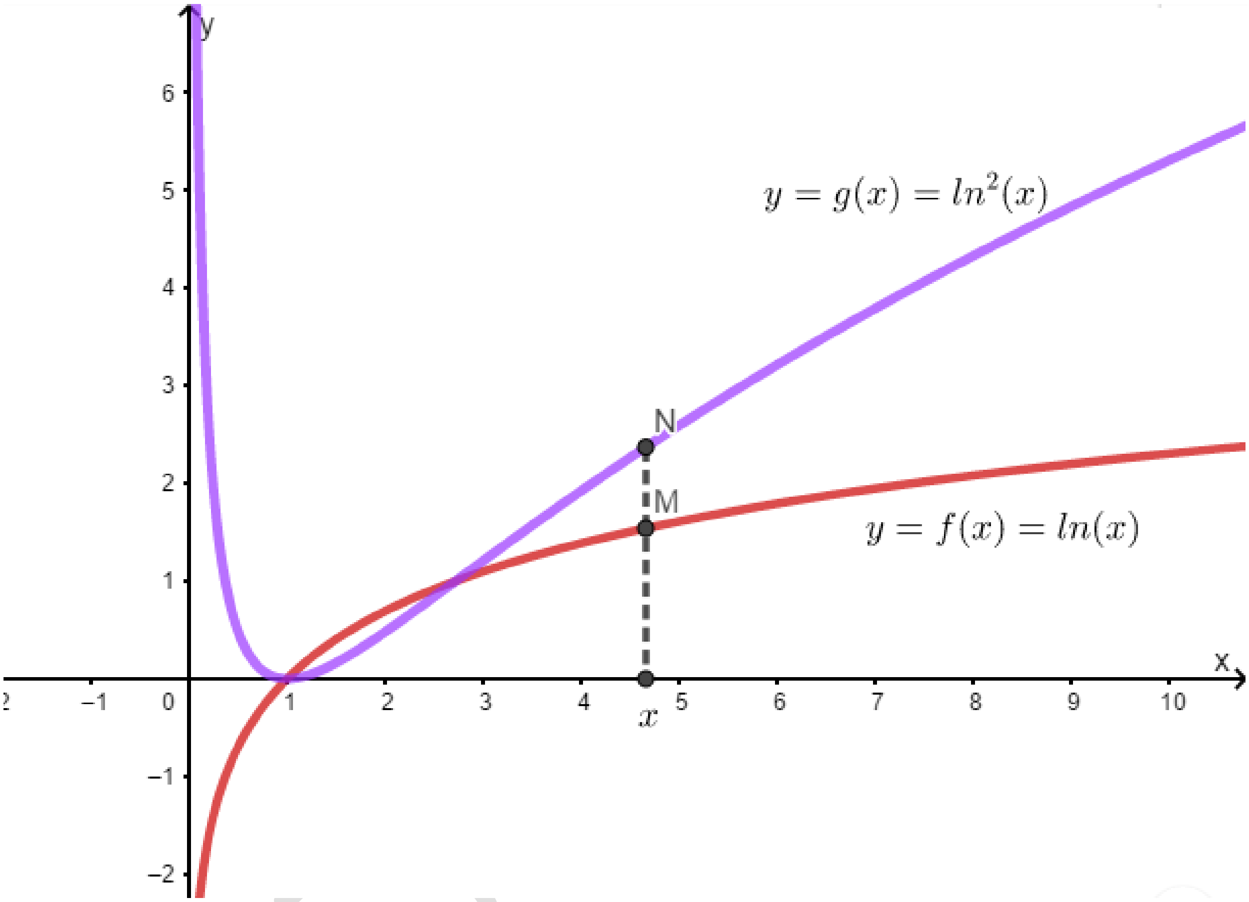
2. On note $g$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln(x)$
   i. Démontrer que pour tout $x$ de $]0;+\infty[$, $g(x) > 0$,
   ii. Déduisez-en que $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$ .

9) $f$ est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) =$

$$\begin{cases} g(x) = x^2, \ln(x) \; si \; x > 0 \\ \quad 0 \; si \; x = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que $f$ est continue et dérivable en 0,
2. On a appelle $(C_f)$ la courbe représentative de $f$,
   a) En A, la courbe $(C_f)$ admet un minimum. Quelles sont ses coordonnées ?
   b) Démontrer qu'il existe deux tangentes à $(C_f)$ passant par $O$. Précisez une équation de chacune de ces tangentes.

10) Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}\, \vec{\jmath})$, on a tracé les courbes $(C_f)$ et $(C_g)$ représentatives, respectivement des fonctions $f$ et $g$ définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \ln^2(x) = \ln(x) * \ln(x)$ *pas* $\ln(x^2)$.





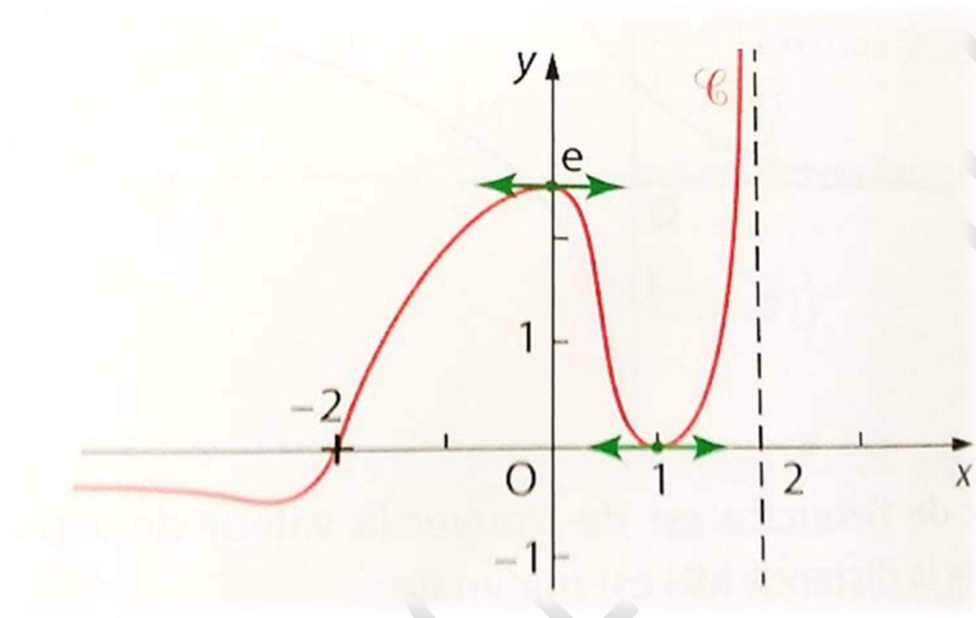

1. Etudiez la position relative de ces deux courbes.
2. Pour $x$ appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $M$ *et* $N$ sont des points de $(C_f)$ et $(C_g)$ de même abscisse $x$.
   a) $h$ est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$. Etudier les variations de $h$ sur $]0;+\infty[$.
   b) Sur l'intervalle $[1;e]$, pour quelle valeur de $x$ la distance $MN$ est-elle maximale ? Déduisez-en alors la valeur maximale de $MN$.
   c) Démontrer que sur $]0;1[\cup]e;+\infty[$, il existe deux nombres $a$ et $b$ $(a < b)$ pour lesquels la distance $MN$ est égale à 1.
   Précisez les valeurs de $a$ et $b$ à $10^{-1}$ près.

11) Vrai ou Faux

La courbe $(C_f)$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction $f$ définie sur $]-\infty;2[$.

La droite d'équation $x = 2$ et l'axe des abscisses sont asymptotes à $(C_f)$.

On note $g$ la fonction donnée par : $g(x) = \ln(f(x))$.




1. $g$ est définie sur $]-2;2[$.
2. $g$ est dérivable en 0 et $g'(0) = \frac{1}{e}$.
3. L'équation $g(x) = 1$ a exactement deux solutions dans l'intervalle $[-2;2]$.
4. $\lim_{x \to 0} g(g(x)) = -\infty$.

## 12) Logarithme et suite

$f$ est la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

La courbe $(C)$ représentative de $f$ et la droite $(\Delta)$ d'équation $y = x$ sont données ci-dessous :

**A. <u>Étude de certaines propriétés de $(C)$ :</u>**

1. Calculez $f'(x)$ pour tout $x \in ]-1;+\infty[$.
2. Pour tout $x \in ]-1;+\infty[$, on pose :

$$N(x) = (1+x)^2 + \ln(x+1) - 1$$

   a) Vérifiez que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.
   b) Calculez $N(0)$ et déduisez-en les variations de $f$.
3. Calculez les coordonnées du point d'intersection de la courbe $(C)$ et de la droite $(\Delta)$.

**B. <u>Étude d'une suite convergente.</u>**

1. Démontrez que si $x \in [0;4]$ alors $f(x) \in [0;4]$.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Tracez, à l'aide d'une calculatrice, la courbe $(C)$ et la droite $(\Delta)$. Conjecturez les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son éventuelle limite.
   b) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;4]$.
   c) Étudiez le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   d) Démontrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculez sa limite $\ell$.

## 13) Logarithme et suite

On considère la fonction $(E): x + \ln(x) = 0$.
Le but de cet exercice est de prouver que l'équation $(E)$ a une unique solution $\alpha$ dans $I = ]0; +\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour obtenir un encadrement de $\alpha$.

**A. <u>Existence et unicité de la solution :</u>**

$f$ est la fonction définie sur $I$ par $f(x) = x + \ln(x)$.
Etudiez les variations de la fonction $f$ sur $I$ et déduisez l'existence d'un nombre $\alpha$ unique de $I$ tel que $f(\alpha) = 0$.
Vérifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

**B. <u>Encadrement de $\alpha$ :</u>**

1. $g$ est la fonction définie sur $I$ par $g(x) = \frac{4x - \ln(x)}{5}$,
   a) Démontrez qu'un nombre $x$ est solution de l'équation $(E)$ si et seulement si, $g(x) = x$.
   b) Étudiez les variations de $g$ sur $I$ et démontrez que pour tout $x$ de l'intervalle $J = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $g(x)$ appartient à $J$.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = g(u_n)$.
   a) Démontrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
   $$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$
   b) Déduisez-en que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$.

3. On donne $u_{10} \simeq 0\ 5671236$,
   On admet que $u_{10}$ est une valeur approchée de $\alpha$.
   Déduisez-en un encadrement de $\alpha$ sous la forme $u \leq \alpha \leq v$ où $u$ et $v$ sont des nombres décimaux écrits avec 3 décimales.

## Fonctions logarithme népérien : Étude de fonctions

**N°1**

a. Étudier la fonction $f$ donnée par $f(x) = x, ln(x)$.
b. Soit $g(x) = x, ln(|x|)$. Comment déduire $C_g$ à partir de $C_f$ ? La tracer.
c. Soit $h(x) = |x|, \ln(|x|)$. Comment déduire $C_h$ à partir de $C_f$ ? La tracer.

**N°2**

a. Étudier la fonction $i$ donnée par $\mathrm{i}(x) = \frac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$.
b. Soit $j(x) = \frac{1+\ln(x)}{|1-\ln(x)|}$. Comment déduire $C_j$ à partir de $C_i$ ? La tracer.

**N°3**

a. Étudier la fonction $k$ donnée par $k(x) = \frac{\ln(x)}{x}$,
b. Soit $l(x) = \frac{|\ln(x)|}{x}$. Comment déduire $C_l$ à partir de $C_k$ ?
c. Calculer l'aire du domaine délimité par $C_k$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$.

**N°4**

a. Étudier la fonction $m$ donnée par $m(x) = \ln(\cos(x))$.
b. Soit $n(x) = \ln(\sin(x))$. Comment déduire $C_n$ à partir de $C_l$ ?

**N°5**

Étudier la fonction $o$ donnée par $o(x) = \sqrt{1 - \ln(x)}$.

**N°6**

Étudier la fonction $p$ donnée par $p(x) = \sqrt{1 - \ln^2(x)}$.

**N°7**

Étudier la fonction $q$ donnée par $q(x) = x - \ln(x^2)$.

# Fonctions exponentielles : Exercices

1) Résoudre les équations suivantes:

$a)\ 5e^{x} + 4 = e^{-x}$

$b)\ 6e^{x} + e^{-x} = 7$

$c)\ 2e^{-x} = \dfrac{1}{e^{x} + 3}$

$d)\ e^{2x+3} = e^{\frac{5}{x}}$

$e)\ e^{x^2} = (e^{-x})^2 . e^{3}$

$f)\ e^{2x+3} \leq e^{\frac{3}{x}}$

$g)\ \dfrac{e^{x^2}}{e^{5}} \leq e^{-4x}$

$h)\ e^{x} + e^{-x} - 2 \geq 0$

$i)\ 7e^{x} + 1 < 8e^{-x}$

2) Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de définition, puis calculer sa limite aux bornes ouvertes de son domaine de définition :
   a) $f(x) = e^{-x^2-1}$
   b) $f(x) = e^{2x} - e^{-x}$
   c) $f(x) = e^{3x} - e^{2x} + 2$
   d) $f(x) = \dfrac{e^{2x}+e^{x}+1}{e^{x}+2}$
   e) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

f) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

$g)$ $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$

$h)$ $f(x) = x^2 \cdot e^{-2x}$

3) Calculer la limite de chacune des fonctions suivantes en $0^+$ :

$a)$ $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2x}$

$b)$ $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x}$

$c)$ $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{4x}$

4) $f$ $et$ $g$ sont deux fonctions définies sur $IR$ par :

$f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Et soir $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$

Montrer que $h'(x) = \dfrac{1}{f^2(x)}$.

5) On donne ci-dessous la courbe $(C)$ représentative d'une fonction $f$ définie sur $IR$ par $f(x) = ax + b + x \cdot e^{x}$ où $a$ $et$ $b$ sont deux nombres.

1. Déterminer les valeurs de $a$ et $b$ sachant que la tangente $(C)$ en $A(0;2)$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2.
2. a) Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.

b) Déduisez-en que $f'$ a pour tableau de variation :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'$ | $-2$ | $\searrow$ | $-2-e^{-2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

6) On a tracé ci-dessous la courbe $(C)$ représentative d'une fonction $f$ définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^2}$

1. Démontrer que $f$ a pour tableau de variation :

| $x$ | $-1$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\dfrac{e}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2. $M$ est un point de $(C)$ d'abscisse $a$.
   Démontrer qu'il existe deux valeurs de $a$, que l'on calculera, pour lesquelles la tangente en $M$ passe par l'origine $O$ du repère.



7)

1. Justifiez que pour tout nombre $x$, $e^x \geq x + 1$.
2. Déduisez-en que :

a) $e^{-x} + x - 1 \geq 0$ $\qquad$ $b)$ $(x-1) \cdot e^x + 1 \geq 0$.

3. Exploitez les résultats précédents pour démontrer que la fonction $g$ définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ est strictement croissante.

**N°1**

Étudier la fonction $f$ donnée par $f(x) = x + \frac{1}{e^x-1}$.

**N°2**

Étudier la fonction $g$ donnée par $g(x) = \frac{e^x}{x}$.

**N°3**

a. Étudier la fonction $h$ donnée par $h(x) = e^x - x$.
b. Calculer l'aire du domaine délimité par $C_f$, la 2ème bissectrice et les droites d'équations $x = ln10^{-2}$ et $x = 0$.

**N°4**

a. Étudier la fonction $i$ donnée par $i(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$.
b. Montrer que $i$ est impaire. En déduire que $C_i$ admet un centre de symétrie.
c. Soit $j(x) = \frac{2}{e^x+1}$. Comment déduire $C_j$ à partir de $C_i$ ?
d. Montrer que $i$ admet une fonction réciproque qu'on déterminera.
e. Calculer l'aire du domaine délimité par $C_i$, l'axe x'Ox et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

**N°5**

Étudier la fonction $k$ donnée par $k(x) = \ln(e^x + 1)$.

**N°6**

Étudier la fonction $l$ donnée par $l(x) = e^{2x} - x$.

**N°7**

Étudier la fonction $m$ donnée par $m(x) = x, e^x$.

**N°8**

Étudier la fonction $n$ donnée par $n(x) = x - 1 + \frac{1}{e^x}$.

## Exercices sur les nombres complexes : Partie 1

1- Soit $z = x + iy$ où $(x; y) \in IR^2$.
$Soit\ Z = z + 1 - 3i$

Quel est l'ensemble des points $M(z)$ tel que :

a. $Z$ est un réel ?
b. $Z$ est un imaginaire pur ?
c. $z \cdot \overline{z} = 16$.

2- Soit $z = x + iy$ où $(x; y) \in IR^2$.
$On\ pose\ Z = \dfrac{z-1}{z+1}\ avec\ z \neq -1$

1. Montrer que $Z$ a pour forme algébrique :
$Z = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2} + i\dfrac{2y}{(x+1)^2 + y^2}$
2. Quel est l'ensemble des points $M(z)$ tels que $Z$ est :
   a. Réel.
   b. Imaginaire pur.

3- Donner la forme algébrique de $(1 + i)^{2021}$.

4- On donne les nombres complexes suivants :
$z_1 = -1 + 2i$ et $z_2 = 3 - 4i$

Déterminer la forme algébrique de :

a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 - 3z_2$ d) $z_1 \cdot z_2$

5- Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :
a) $(2 + i)^2(1 - 3i)$
b) $(5 - 2i)(1 + 4i)(2 - i)$

6- $x$ et $y$ sont deux nombres réels.
Quelle est la forme algébrique de $(x - 2 + iy)(x + 2 - iy)$ ?

7- Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$a)\ i(1-i)$ $b)\ (2-3i)(4+i)$ c) $\frac{-1}{i}$ d) $\frac{1}{i}$

e) $\frac{3+2i}{4-i}$ f) $\frac{1}{5-3i}$ g) $\frac{2}{1+i}-\frac{3}{1-i}$ h) $\frac{2+4i}{5-2i}$

8- On donne les nombres complexes suivants :

$z_1 = 1-2i$ $z_2 = 3+2i$ $z_3 = 7-2i$

Calculer :

a) $Re(z_1+z_2+z_3)$
b) $Im(iz_1)$
c) $Im(z_1z_2)$
d) $Re(2z_1-3z_2+z_3)$

9- Placer dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives :
$z_A = -3+i$ ; $z_B = 1+3i$ ; $z_C = 3+i$ ; $z_D = -3-2i$

Montrer que $ABCD$ est un trapèze.

10- Placer dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives :
$z_A = \frac{3}{2}i$, $z_B = \frac{7}{2}+i$, $z_C = 1-\frac{3}{2}i$ et $z_D = -\frac{5}{2}-i$

Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$ ? Justifier.

11- Placer dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives :
$z_A = -4+2i$, $z_B = -3-i$, $z_C = 3+i$ et $z_D = 2+4i$

Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$ ? Justifier.

12- Exprimer dans chacun des cas suivants $\overline{Z}$ en fonction de $\overline{z}$.

a) $Z = -2 + iz$
b) $Z = (i + z)(2 - iz)$
c) $Z = (2iz + 3)^2$
d) $Z = \frac{1+iz}{2z-i}$

13- Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x; y) \in IR^2$.
Répondre par Vrai ou Faux en justifiant :

a) Si $Z = 3 + z + \overline{z} + i(1 + i)^2 + i(z - \overline{z}) + 4z\overline{z}$
Alors $Z$ est un réel.

b) Si $Z = 4i^9 - 5i + z - \overline{z} + 3i(z + \overline{z})$
Alors $Z$ est un imaginaire pur.

14- Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x; y) \in IR^2$.
Préciser dans chacun des cas suivants si $Z$ est réel ou imaginaire pur ou ni l'un ni l'autre.
a) $Z = z + \overline{z} - 4i$
b) $Z = z - \overline{z} + 6i$
c) $Z = z\overline{z} - z + \overline{z}$
d) $Z = \overline{z}(z + i) + i(7i - z)$

15- $Soit\ z_1 = \frac{3-i}{4+i}\ et\ z_2 = \frac{3+i}{4-i}$
Sans avoir à passer aux formes algébriques de $z_1\ et\ z_2$, peut-on affirmer que $z_1 + z_2$ est un réel ?

16- Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
$(3 - i)z = 4 + 2i$ $\qquad$ $(5 + i)\overline{z} = 3 - 7i$

17- Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $3iz - 4 + 5i = (1 - 4i)z + 9$
b) $(3 + 2i)z = 4iz - 5$
c) $z^2 - (5 + 7i)^2 = 0$

d) $z^2 + 8 = 0$
e) $iz^2 + (4 - 7i)z = 0$
f) $\frac{z+3}{z-3} = 2i$

18- Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $2i(z + 4) - 3\overline{z} = 6 - 4i$
b) $4(z + 3i) = 5i\overline{z}$
c) $-4iz + 5\overline{z} + 2i = 2 - 5i$

19- Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

a. $-3 + 4i$
b. $7 - 24i$
c. $-21 + 20i$

20- Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 + 3z - 4 = 0$ b) $z^2 + z + 1 = 0$ c) $z^2 + 4z + 4 = 0$

d) $z^2 - 2z + 2 = 0$ e) $3z^2 + 2z + 1 = 0$ f) $z^2 + 5z + 7 = 0$

g) $z^2 + 2z - 3 = 0$ h) $z^4 + 4z^2 + 4 = 0$ i) $\bar{z} - 3z - 13 = 5 - 9i$

j) $\frac{z^2-z}{z^2+4} = 2$

21- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.

22- Pour quelle valeur de $a$ le nombre complexe $3 - i$ est-il une solution de l'équation $z^2 - 6z + a = 0$ ?
Donner alors l'autre solution de cette équation.

23- On donne l'équation $(E)$: $z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = 0$

1. Vérifier que 8 est une solution particulière de $(E)$.
2. a) Déterminer les réels $a, b$ et $c$ tels que pour tout $z$ de $\mathbb{C}$ :

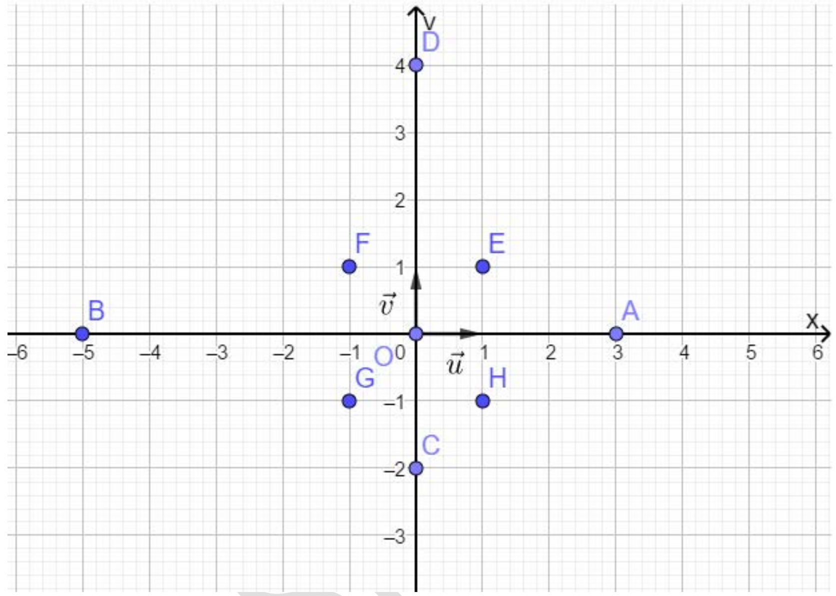
$$z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = (z - 8)(az^2 + bz + c)$$

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$.

**Activité de découverte :**

Placer les points suivants dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ :

$A(3), B(-5), C(-2i), D(4i),$
$E(1+i), F(-1+i),$
$G(-1-i)$ *et* $H(1-i)$




Puis compléter le tableau suivant :

| Nombre complexe $z$ | $\lvert z\rvert = OM$ | $\arg(z) = \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)\ (2\pi)$ |
|---|---|---|
| $z_A = 3$ | | |
| $z_B = -5$ | | |
| $z_C = -2i$ | | |
| $z_D = 4i$ | | |
| $z_E = 1+i$ | | |
| $z_F = -1+i$ | | |
| $z_G = -1-i$ | | |
| $z_H = 1-i$ | | |
| $z_I = -4-4i$ | | |
| $z_J = -5+5i$ | | |

24- Déterminer :

$\arg(4-4i)$ $\arg\left(\frac{-2}{1-i}\right)$ $\arg\left(\frac{-1-i}{1+i}\right)$ $\arg((-3i)^{24})$

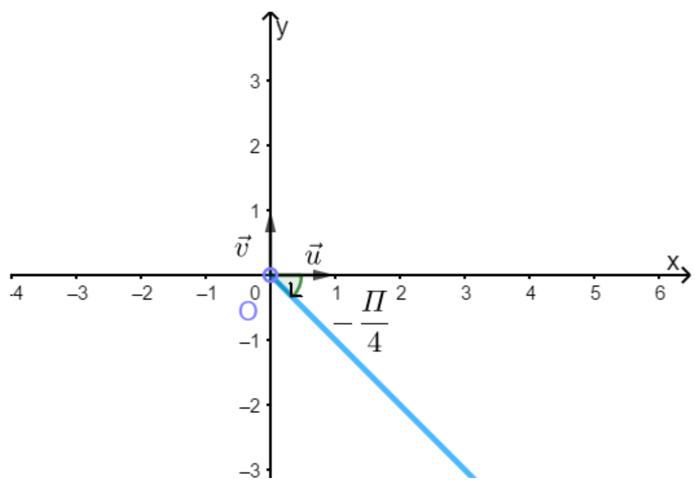
19-Déterminer :

$\arg\left(\frac{1+5i}{2-3i}\right)$ $\arg\left(\frac{4-8i}{-4-2i}\right)$ $\arg\big((1-2i)(-2-4i)\big)$

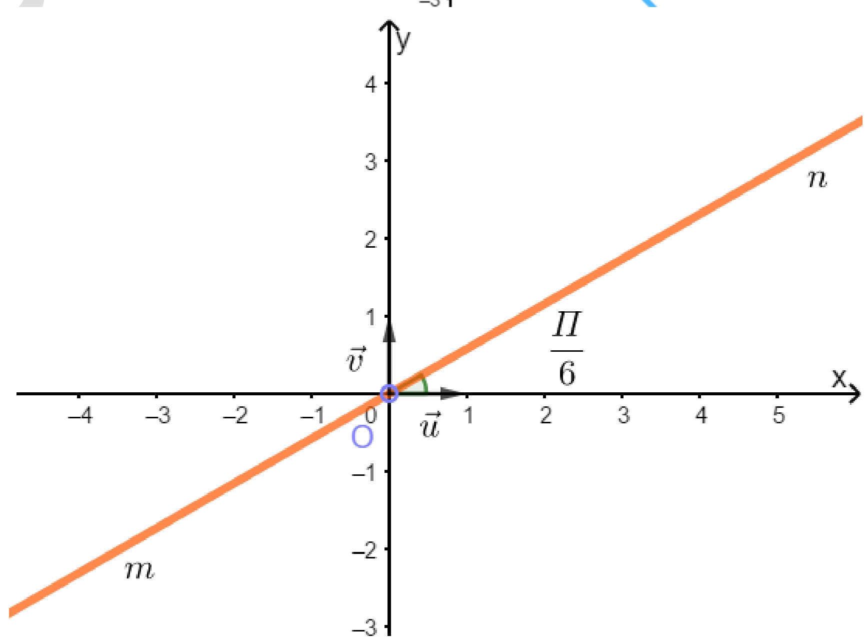
$\arg\big(2i(-3+3i)\big)$.

20- $z$ est un nombre complexe non nul.

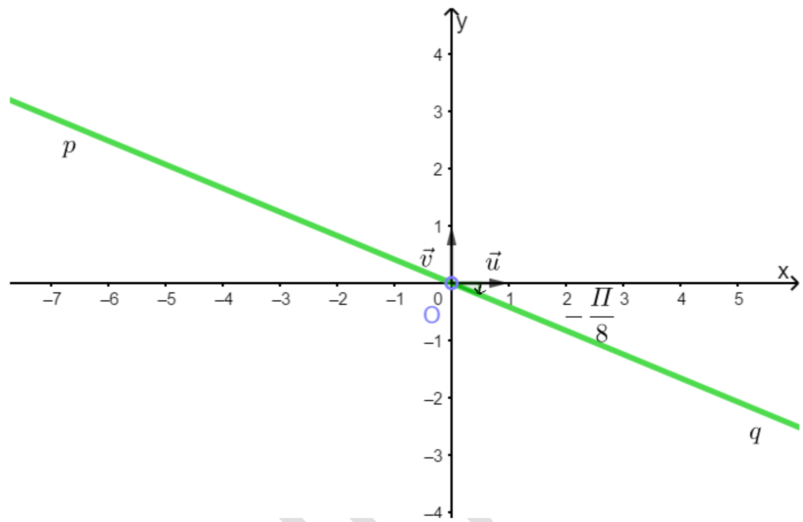
a. Quel est l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg(z)=\frac{-\pi}{4}\ (2\pi)$ ? Le tracer.




b. Quel est l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg(z)=\frac{\pi}{6}\ (\pi)$ ? Le tracer.



c. Quel est l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg(z) = -\frac{\pi}{8}\ (\pi)$ ? Le tracer.




21-Dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ :

Faire une figure dans chacun des cas suivants puis répondre aux questions suivantes :

1) Soient $A(1 + 5i)$, $B(1 + 2i)$

Que vaut $\left(\vec{u}\ \overrightarrow{AB}\right)$ ?

2) Soient $C(2)$, $D(-8)$

Que vaut $\left(\vec{u}\ \overrightarrow{CD}\right)$ ?

3) Soient $E(4 - 6i)$, $F(2 - 8i)$

Que vaut $\left(\vec{u}\ \overrightarrow{EF}\right)$ ?

4) Soient $G(-7)$, $H(2)$

Que vaut $\left(\vec{u}\ \overrightarrow{GH}\right)$ ?

5) Soient $I(-3+2i)$, $J(-3+7i)$

Que vaut $(\vec{u}\ \overrightarrow{IJ})$ ?

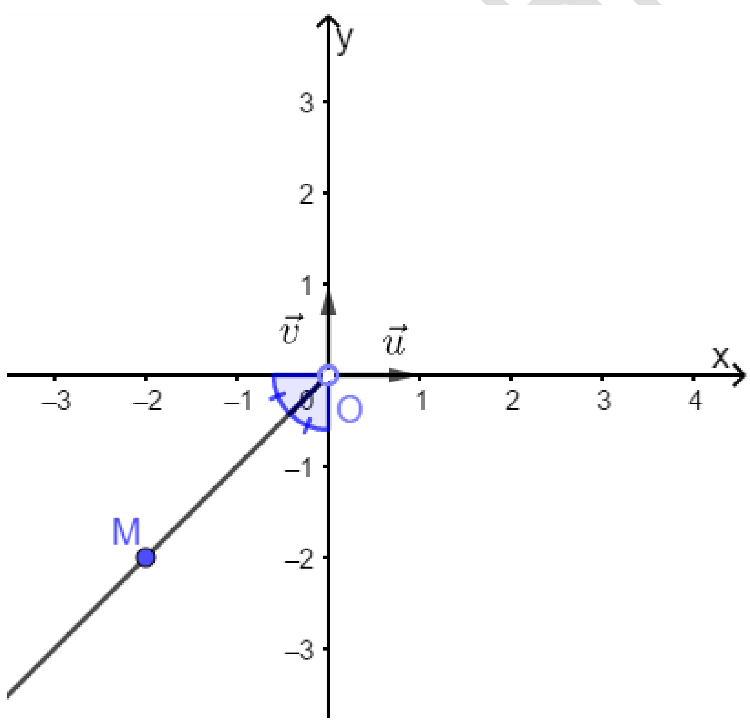
6) Soient $K(4+2i)$, $L(1+5i)$

Que vaut $(\vec{u}\ \overrightarrow{KL})$ ?

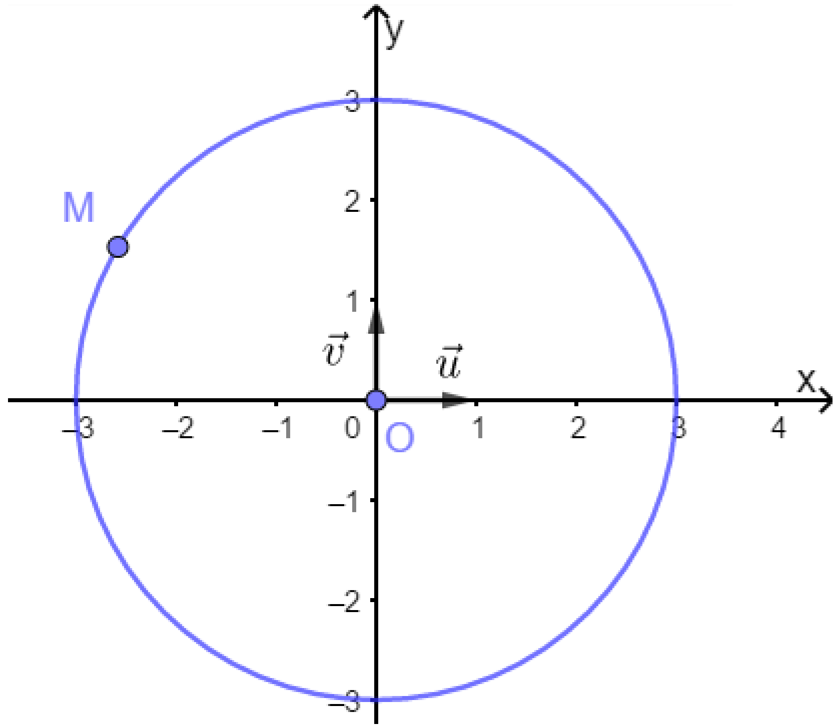
22-Dans chacun des cas suivants, on a **représenté un ensemble (E) des points $M$ du plan d'affixe $z$.**

Caractériser l'ensemble $(E)$ à l'aide de $|z|$ ou de $\arg(z)$.

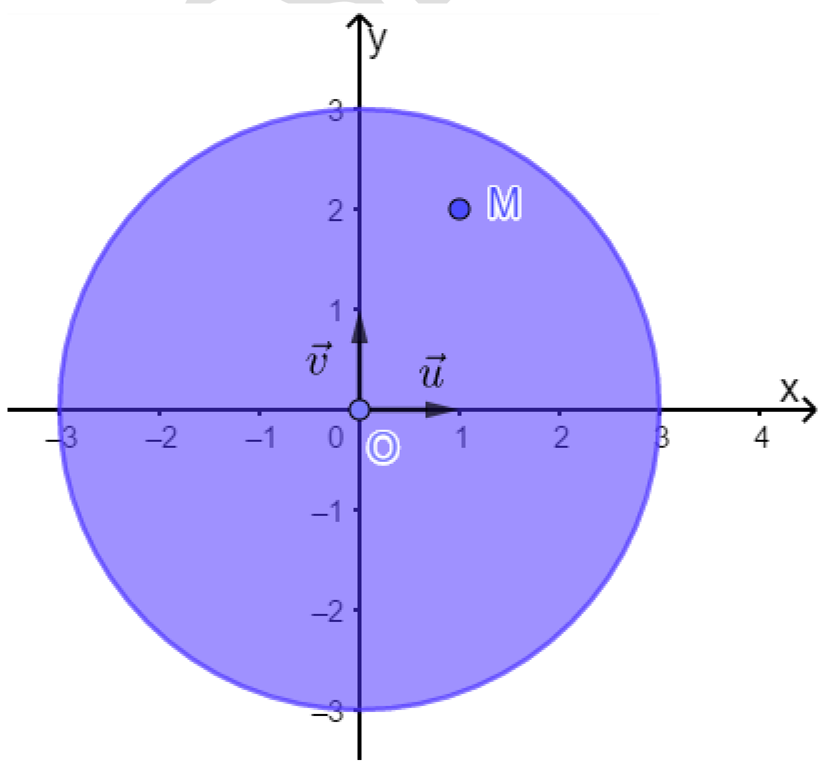
1)



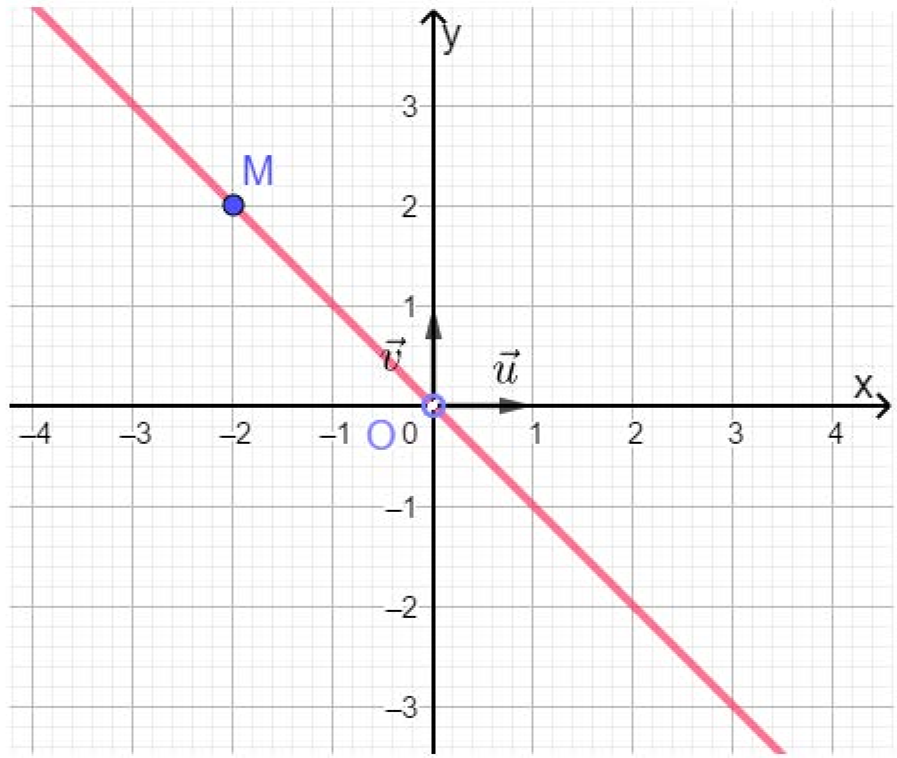
2)


y
x
M
O
3
2
1
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
$\vec{v}$
$\vec{u}$

3)


y
x
M
O
3
2
1
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
$\vec{v}$
$\vec{u}$

4)




23-On donne dans un repère orthonormé les points suivants :

$A(2-3i)$ $B(-1+4i)$ et $C(-5+2i)$

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points $M(z)$, puis le tracer :

a. $|z-2+3i| = 2$
b. $|z-2+3i| = |z+1-4i|$
c. $|z-2+3i| = |z+1-4i| = |z+5-2i|$

24-On donne dans un repère orthonormé les points suivants :

$A(-4i), B(-1+3i)$, $C(-2)$ et $D(4i)$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points $M(z)$, puis le tracer :

a. $|iz-4|=2$
b. $|\overline{z}+1+3i|=|z+2|$
c. $|\overline{z}-4i|=3$
d. $\arg(z+4i)=\frac{\pi}{3}(2\pi)$
e. $\arg(iz+3+i)=-\frac{\pi}{6}(\pi)$ $\quad et \quad$ $|z+1-3i|>2$
f. $\arg(2\overline{z}+8i)=\frac{3\pi}{4}(2\pi)$ $\quad et \quad$ $|2iz+8|\leq 6$

25-Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points $M(z)$ et le représenter.

a. $6<|-2i\overline{z}+8|\leq 10$.
b. $-\frac{\pi}{4}<\arg(-3i\overline{z}-9)\leq\frac{\pi}{3}\quad(2\pi)$
c. $-\frac{\pi}{4}<\arg(-3i\overline{z}-9)\leq\frac{\pi}{3}\quad(\pi)$

## Exercices sur les nombres complexes : Partie 2

**Exercice 1 :**

Dans chacun des cas suivants, donner une forme trigonométrique et une forme exponentielle de $z$.

a) $z$ est un nombre complexe tel que $\begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{7}\,(2\pi) \end{cases}$

b) $z$ est un nombre complexe tel que $\begin{cases} |z| = 3 \\ \arg(z) = -\frac{\pi}{5}\,(2\pi) \end{cases}$

c) $z = 1 + i$

d) $z = -1 + i$

e) $z = 5i$

f) $z = -1 - i$

g) $z = -7i$

h) $z = 1 - i$

i) $z = -2 + 2i$

j) $z = 4 - 4i$

k) $z = 8$

l) $z = -6$

m)$z = x$ avec $x$ un réel strictement positif

n) $z = x$ avec $x$ un réel strictement négatif

o) $z = iy$ avec $y$ un réel strictement positif

p) $z = iy$ avec $y$ un réel strictement négatif

**Exercice 2 :**

Dans chacun des cas suivants dire s'il s'agit d'une forme trigonométrique.

Sinon donner une forme trigonométrique et une forme exponentielle de $z$.

a) $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + isin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$

b) $z = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + isin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$

c) $z = 4\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

d) $z = 7\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

e) $z = 6\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + icos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

**Exercice 3 :**

Donner une forme trigonométrique et une forme exponentielle de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - isin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_2 = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_3 = -\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - isin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

$$z_4 = -7\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$$

$$z_5 = -\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) + icos\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

**Exercice 4 :**

Donner une forme trigonométrique et exponentielle de chacun des nombres suivants :

$$z_1 = \sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

$$z_2 = 2i$$

$$z_3 = \frac{1}{1+i}$$

**Exercice 5 :**

Donner une forme trigonométrique et exponentielle de chacun des nombres suivants :

$$z_1 = -2\big(\cos(\theta) + isin(\theta)\big) \qquad z_2 = 3\big(\sin(\theta) + icos(\theta)\big)$$

**Exercice 6 :**

1. Donner une forme exponentielle de $z = \left(-1 - i\sqrt{3}\right)(-1 + i)$
2. Donner une forme algébrique de $z = \left(-1 - i\sqrt{3}\right)(-1 + i)$
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

**Exercice 7 :**

Donner une forme trigonométrique et exponentielle de chacun des nombres suivants :

$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$

$z_2 = (2 - 2i)\left(3 + i\sqrt{3}\right)$

$z_3 = \dfrac{\sqrt{3} - 3i}{1 - i}$

**Exercice 8 :**

Donner le module et un argument de chacun des nombres suivants :

$z_1 = \sqrt{2}e^{i2\theta}$

$z_2 = -e^{-i\theta}$

$z_3 = -2ie^{i\theta}$

**Exercice 9 :**

On donne les nombres complexes $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

a. Donner une forme exponentielle de $\frac{z_1}{z_2}$.
b. Donner la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
c. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

**Exercice 10 :**

Ecrire sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^{12}$$

$$z_2 = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})\left(-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + isin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$$

$$z_3 = (1+i)^{2020}(1-i)^{2021}$$

**Exercice 11 :**

Ecrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = -4ie^{i\frac{\pi}{3}}$ $\qquad z_2 = (-1-i)e^{i\frac{\pi}{5}}$ $\qquad z_3 = \left(-4e^{-i\frac{\pi}{9}}\right)^3$

$z_4 = \dfrac{6}{e^{i\frac{\pi}{8}}}$ $\qquad z_5 = \left(\dfrac{-2}{3e^{-i\frac{\pi}{7}}}\right)^{14}$ $\qquad z_6 = \dfrac{4i}{-8e^{i\frac{\pi}{3}}}$

**Exercice 12 :**

Soient les points $A(2+3i)\ B(4-5i)\ et\ C(10+5i)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ du plan alors :

a) Ecrire sous forme exponentielle $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

b) En déduire $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right|$ et $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

c) En déduire la nature du triangle $ABC$.

**Exercice 13 :**

Soient les points $A(-2i)\ B\left(-\sqrt{3}+i\right)\ et\ C(\sqrt{3}+i)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ du plan alors :

a) Ecrire sous forme exponentielle $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

b) En déduire $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right|$ et $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\ (2\pi)$

c) En déduire la nature du triangle $ABC$.

**Exercice 14 :**

1. Placer les points $A\ B\ et\ C$ d'affixes respectives : $z_A = -\frac{1}{3} - 2i$ et $z_B = 1 + 2i$ et $z_C = \frac{7}{3} + 6i$.

2. Les points $A, B$ et $C$ sont-ils alignés ?

**Exercice 15 :**

On donne dans le plan complexe les points $A$ $B$ et $C$ d'affixes respectives $z_A = -2$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = -1 - 3i$.

1. Placer les points $A$ $B$ et $C$.
2. Quelle est la nature du triangle $ABC$ ?

**Exercice 16 :** Vrai ou Faux ?

Pour chacune des propositions suivantes, indiquez si elle est vraie ou fausse et donnez une démonstration de la réponse choisie.

Le plan complexe est ramené à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. $A$ est le point d'affixe $2 - 5i$ et $B$ est le point d'affixe $7 - 3i$.
Proposition 1 : Le triangle $OAB$ est rectangle isocèle.

2. On note $(\Delta)$ l'ensemble des points $M(z)$ tel que :
$$|z - i| = |z + 2i|$$
Proposition 2 : $(\Delta)$ est une droite parallèle à l'axe des réels.

3. $z$ est un nombre complexe non nul.

Proposition 3 : Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de $z$, alors $|i + z| = 1 + |z|$

4. Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.

Proposition 4 : Pour tout entier naturel $n$ non nul, $z^{3n}$ est imaginaire pur.

5. $z$ est un nombre complexe non nul.

Proposition 5 : Si $|z| = 1$, alors $z^2 + \frac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

**Exercice 17 :**

Déterminer la nature des ensembles de points suivants :

1) $|z - 3 + i| \geq 2$.
2) $z = 2 + 5i + 4e^{i\theta}$ avec $\theta \in ]-\pi; \pi]$.
3) $\arg(z - 2 + 3i) = \frac{\pi}{4} (\pi)$
4) $z = 3 - 4i + 2ie^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$ .
5) $z = -1 + 4i - 3e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]-\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right]$.

# Rappel statistiques

1- **Vocabulaire statistique :**

Soit $x_1\ x_2\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots x_n$ une série statistique.

- L'effectif $n_i$ d'une valeur $x_i$ est le nombre de fois où on a obtenu cette valeur.
- L'effectif total est $N = \sum n_i$ .
- La fréquence $f_i$ d'une valeur $x_i$ est $f_i = \dfrac{n_i}{N}$ .(La fréquence est souvent donnée en pourcentage).
- Le mode de la série est la valeur de $x_i$ ayant le plus grand effectif.
- L'étendue d'une série est $x_{max} - x_{min}$,
- La moyenne d'une série statistique est donnée par : $\bar{x} = \dfrac{\sum n_i x_i}{N} = \sum f_i x_i$ .
- La variance d'une série statistique c'est la moyenne des carrés des écarts entre la moyenne et les valeurs de la série, elle est donnée par :

  $$V = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \sum f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum f_i {x_i}^2 - \bar{x}^2.$$

  - Si $\bar{x}$ est la moyenne de $x_1\ x_2\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots x_n$ alors $a\bar{x} + b$ est la moyenne de $ax_1 + b, ax_2 + b\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots ax_n + b,$
  - $V(ax + b) = a^2V(x)$.
- L'écart-type de la série statistique c'est $\sigma = \sqrt{V}$ .
- L'écart moyen est $e_m = \dfrac{\sum n_i |x_i - \bar{x}|}{N} = \sum f_i |x_i - \bar{x}|$ .
  - On montre que la majorité des valeurs de la série statistique sont dans l'intervalle $[\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma]$.
  - La variance et l'écart-type caractérisent la dispersion des valeurs autour de la moyenne.
- La médiane est la valeur qui partage la série en 2 séries de même effectif (cette valeur peut ne pas être une valeur de la série).
  - Si $N$ est paire $N = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors $M_e = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$
  - Si $N$ est impaire $N = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors $M_e = x_{k+1}$,
  - La médiane, la moyenne et le mode sont des caractère de position.

**Série à variable discrète.**

Sur un devoir de maths, voici les résultats des 20 élèves :

| Valeurs ($x_i$) | 10 | 13 | 15 | 17 | 18 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs ($n_i$) | 10 | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 |
| Effectifs cumulés croissants | | | | | | |
| Fréquence ($f_i$) | | | | | | |

Calculer l'étendue, la médiane la moyenne, les fréquences de ces notes ,la variance et l'écart type de cette série statistique.

**Série à variable continue.**

Mêmes formules mais on remplace les $x_i$ par les $c_i$ (centre de l'intervalle) et pour le mode et la médiane

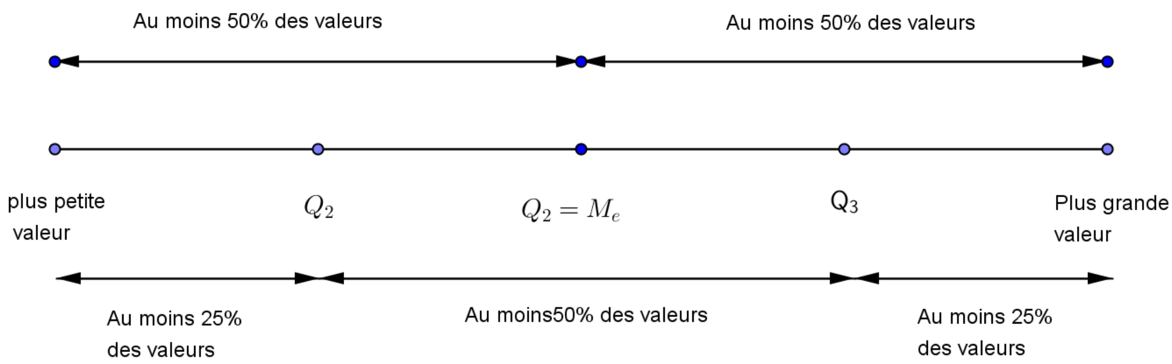
on parle de classe médiane et classe modale.

La répartition de 500 élèves d'une classe suivant leur taille

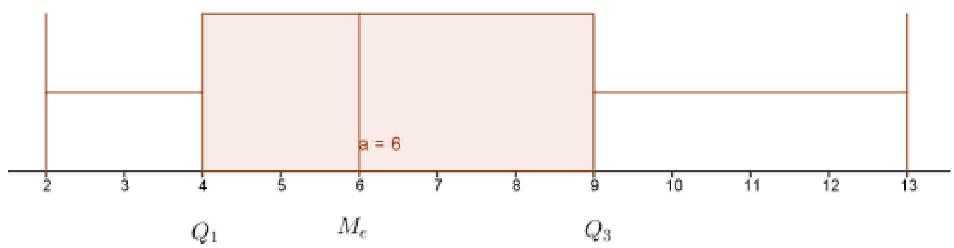
| Taille en cm ($x_i$) | ]150 ; 154[ | ]154 ; 158[ | ]158 ; 162[ | ]162 ; 166[ | ]166 ; 170[ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs ($n_i$) | 25 | 50 | 200 | 175 | 50 |
| Centre de la classe $c_i$ | | | | | |
| Effectifs cumulés croissants | | | | | |

Calculer l'étendue, la classe médiane, la moyenne, les fréquences de ces notes ,la variance et l'écart-type de cette série statistique.

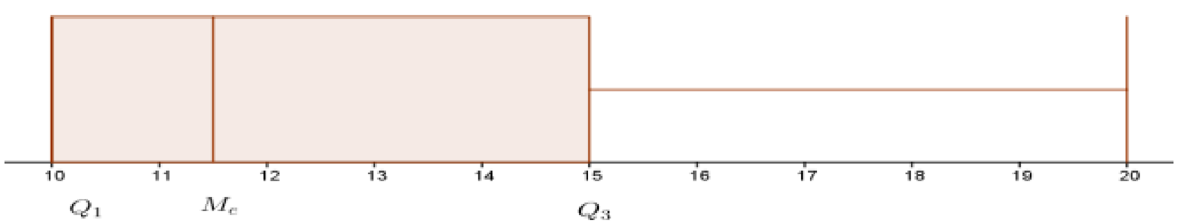
- Quartiles : un quartile est chacune des 3 valeurs qui divisent la série en 4 parts égales, de sorte que chaque partie représente le $\frac{1}{4}$ de l'échantillon.
  - 1er quartile $Q_1$ sépare les 25% inferieurs des données .
  - 2ème quartile $Q_2$ est la médiane de la série.
  - 3ème quartile $Q_3$ sépare les 25% supérieurs des données.
  - $Q_3 - Q_1$ est l'écart interquartile.




- $\frac{3N}{4}$=15 alors $Q_3 = x_{15} = 15$




**Boite à moustaches**



# Probabilité

## Vocabulaire probabiliste :

- Une épreuve (expérience) aléatoire est une épreuve dont on connait les résultats possibles (les issues, les éventualités) mais dont on ignore lequel va être réalisé.
- L'univers E (ou Ω) d'une expérience aléatoire est l'ensemble de tous les résultats possibles.
- L'espérance d'une expérience aléatoire est la valeur qu'on espère obtenir en répétant l'expérience aléatoire un très grand nombre de fois.
- Un événement A est une partie (ou sous-ensemble) de E.
- L'événement A est réalisé si l'un de ses résultats est réalisé.
- $\overline{A}$ est l'événement contraire de A.

  $\overline{\phi} = E,\ \overline{E} = \phi,\ \overline{\overline{E}} = E \ et\ \overline{\overline{\phi}} = \phi.$

  $A \cup \overline{A} = E \ \ et \ \ A \cap \overline{A} = \phi\,.$

  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \ \ et \ \ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

## Lois de probabilité :

Soit E l'univers d'une expérience aléatoire. Définir une loi de probabilité sur E revient à associer à chaque résultat $x_i$ un nombre positif $p_i$ tel que $\sum p_i = 1$.

**Remarque :**

Lorsque tous les $p_i$ sont égaux, la loi est dite équirépartie ou on dit qu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

Dans le cas d'une loi équirépartie, la probabilité d'un événement A est donnée par :

$$P(A) = \frac{Nombre\ d'éléments\ de\ A}{Nombre\ total\ d'éléments} = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ de\ cas\ possibles}$$

**Exemple :**

On lance un dé cubique équilibré (ou non truqué) et on s'intéresse au nombre obtenu.

L'univers E de cette expérience est : E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.

La probabilité de chacun des résultats de cette expérience est $\frac{1}{6}$.

| Valeur ($x_i$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité ($p_i$) | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Dans ce cas tous les sont $p_i$ égaux, donc la loi est équirépartie.

Soit A l'événement « Obtenir un résultat pair » et B l'événement « Obtenir un chiffre supérieur ou égal à 4 »

A={2 ;4 ;6} et B={4 ;5 ;6}

P(A)=P({2})+P({4})+P({6}) = $3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Ou $P(A) = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ de\ cas\ possibles} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

De même on calcule P(B) = $\frac{1}{2}$.

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de chacun de ses résultats : $P(A) = \sum_{x_i \in A} P(\{x_i\})$

$\phi$ est l'événement impossible, P($\phi$)=0.

E est l'événement certain, P(E)=1.

Si $A \subset B, P(A) \leq P(B)$.

<u>$P(A \cup B)$ :</u>

Si $A \cap B = \phi$ *alors* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Si $A \cap B \neq \phi$ *alors* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

**<u>Remarque :</u>**

Quand on répète une expérience aléatoire un grand nombre de fois, la distribution des fréquences observées tend vers la loi de probabilité (vers les valeurs théoriques).

Et la moyenne observée tend vers l'espérance.

L'espérance est donnée par $\mu = \sum p_i x_i$

Quand on lance une pièce de monnaie un très grand nombre de fois, on remarque que les fréquences de Pile (respectivement de Face) ne sont pas exactement 50% mais qu'elles fluctuent tout autour de la probabilité de Pile (respectivement de Face) (valeur théorique 50%).

$$A \cup \overline{A} = E \quad et \quad A \cap \overline{A} = \phi, \quad donc \quad P(A \cup \overline{A}) = P(E) = 1 = P(A) + P(\overline{A})$$
$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$
$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

**<u>Principe multiplicatif :</u>**
Quand on réalise plusieurs expériences aléatoires indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.
**<u>Exemple :</u>**

Je tire une boule dans une urne contenant 3 boules rouges et 2 boules bleues, puis on lance une pièce de monnaie.

Déterminer l'univers E de cette expérience aléatoire.

Définir une loi de probabilité sur E.

## Définition d'une variable aléatoire:

Soit E l'univers associé à une expérience aléatoire.

Définir une variable aléatoire X sur E, c'est associer à chaque issue de E un nombre x.

X est une fonction définie sur E et à valeurs dans ℝ.

L'événement « X=$x_i$ » est l'ensemble de toutes les issues qui ont pour image $x_i$ par X.

## Loi de probabilité d'une variable aléatoire

X est une variable aléatoire sur un univers E muni d'une loi de probabilité P.

On note $x_i$ $(1 \leq i \leq p)$ les différentes valeurs prises par X.

Définir la loi de probabilité de X consiste à associer à chaque valeur $x_i$ la probabilité de l'événement « X= $x_i$ ».

Remarque : $\sum_{1}^{p} p(X = x_i) = 1$.

# Exercices : Epreuve de Bernoulli et Loi binomiale

**39.** On prend une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la carte est un cœur et 1 dans les autres cas.

1. Quelle loi suit X ?
2. Donner le paramètre de cette loi.

**41.** Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{5}$.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?
2. Donner la loi de probabilité de X.

**42.** Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{6}{7}$.

Calculer E(X), V(X) et $\sigma$(X).

**43.** Dans une urne contenant 4 boules rouges et 8 boules noires, toutes indiscernables au toucher, on tire au hasard une boule. Si la boule est rouge, le joueur gagne ; sinon, il perd.

Modéliser ce jeu à l'aide d'une variable aléatoire de Bernoulli.

**44.** Une entreprise fabrique des assiettes. On sait que 6 % des assiettes produites présentent un défaut. On choisit une assiette au hasard. Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'assiette ne présente pas de défaut et 0 sinon.

1. Quelle loi suit X ?
2. Donner le paramètre de cette loi.
3. Calculer E(X), V(X) et $\sigma$(X).

**46.** On lance 8 fois de suite un dé à six faces parfaitement équilibré. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de fois où on a obtenu un nombre supérieur ou égal à 5.

1. Quelle loi suit X ? Justifier votre réponse.
2. Donner les paramètres de cette loi.

**47.** **corrigé** Soit Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres 9 et $\frac{1}{3}$.

Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de Y.

**48.** Dans le métro, il y a 9 % des voyageurs qui fraudent. Chaque jour, à la station Àlésia, on contrôle 200 personnes.

Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de fraudeurs sur ces 200 personnes. On admet que X suit une loi binomiale.

1. Déterminer les paramètres de la loi que suit X.
2. Combien de personnes, en moyenne, vont être signalées en fraude lors de ce contrôle ?
3. Si le prix du ticket est 1,70 €, quel doit être le prix de l'amende pour, qu'en moyenne, l'établissement régissant le métro ne perde pas d'argent avec les fraudeurs de la station Alésia, sachant qu'il y a 5 000 voyageurs chaque jour dans cette station.

**49.** Lorsqu'on plante une marguerite il y a 12 % de chance qu'elle fane au bout d'un mois. Un jardinier plante 250 marguerites.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de marguerites qui n'ont pas fané au bout d'un mois.

1. Quelle loi suit X ?
2. Donner les paramètres de cette loi.

## Exercices sur les combinaisons (1)

1) Dans une urne il y a 9 boules rouges et 8 boules bleues.
   On tire simultanément 5 boules de l'urne.
   a) De combien de façons peut-on tirer 5 boules de cette urne ?

   b) Soit A "Tirer 2 boules rouges et 3 boules bleues " Calculer p(A).

2) Dans le jeu de loto, Il faut choisir 6 boules parmi 42.
   Quelle est la probabilité de gagner le gros lot ?

3) Dans une urne il y a 4 boules blanches et 28 boules rouges.
   On tire simultanément 3 boules de l'urne (ou l'une après l'autre sans remise).
   Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

   A :" Tirer 3 boules blanches ".
   B :" Tirer 3 boules rouges".
   C :" Tirer 1 boule rouge et 2 blanches".

4) Dans un jeu de 52 cartes, une main est composée de 13 cartes.

   Combien de mains possibles y a-t-il ?

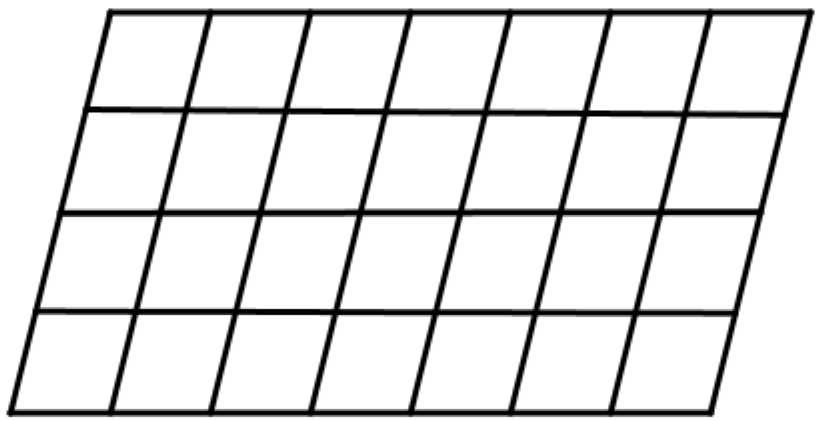
5) Dans un jeu de 52 cartes, on distribue 13 cartes à chacun des joueurs, calculer la probabilité d'avoir :

   A :" Des cartes noires ".
   B :" Des cartes de la même couleur".
   C :" Des cartes cœurs".
   D :" Au moins une carte carreau".
   E :" Au moins un as".
   F :" L'as de pique figure".
   G :" Les as rouges figurent".
   H :" Les 4 as figurent".
   I : " Il y a exactement 5 cartes trèfles et 2 cartes cœurs".
   J : "Il y a au plus 2 cartes piques".
   K : " Il y a au moins 10 cartes carreau".

6) Comparer $C_{25}^{20}$ et $25 \times 24 \times 24 \times 22 \times 21$.

7) Calculer $\frac{C_{50}^{40}}{C_{49}^{39}}$.

8) Combien de parallélogrammes y a-t-il dans la figure ci-dessous ?



9) Soient $p$ et $n$ deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq n$.
Démontrer que $p.C_n^p = n.C_{n-1}^{p-1}$.

10) Démontrer la relation de Pascal :

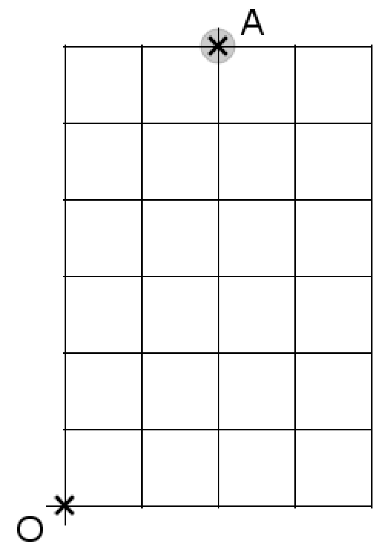
$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

11) Un parlement est composé de 128 députés.
Son bureau est constitué d'un président élu au préalable et de 9 membres élus ensuite.
De combien de manières ce bureau peut-il être constitué ?

12) Trouver le nombre qui constitue le coefficient de $a^7, b^8$ dans le développement de $(a+b)^{15}$.
Quel est alors celui de $a^8, b^7$ ?

13) Que vaut $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n$ ?

14) Une tortue est placée à l'origine O d'un quadrillage.
Elle peut se déplacer, en un pas, soit d'une case vers le haut soit d'une case vers la droite.
Par combien de chemins peut-elle atteindre le point A(2 ;6) ?




15) On distribue au hasard 4 cartes d'un jeu de 32 cartes.
Quel est le nombre de distributions contenant :

a) exactement trois cartes noires ?
b) exactement deux cartes noires et une carte carreau ?
c) exactement 3 cartes noires dont une carte pique ?
d) uniquement du cœur et du carreau ?
e) uniquement des cartes rouges ?

16) On forme des nombres à trois chiffres avec les chiffres 1,3, 5 et 7.

a) Combien de nombres peut-on écrire ?
b) Combien de nombres peut-on écrire si chaque chiffre est utilisé une seule fois ?
c) Combien peut-on écrire de nombres qui commencent par 1 ?
d) Combien peut-on écrire de nombres tels qu'un seul chiffre soit répété 2 fois ?

17) Une urne contient 7 boules jaunes, 7 boules bleues et 7 boules rouges. Les boules de chaque couleur sont numérotées de 1 à 7. On tire simultanément trois boules de cette urne :

a) De combien de façons obtient-on des boules de la même couleur ?
b) De combien de façons obtient-on des boules numérotées 1, 2, 3 ?
c) De combien de façons obtient-on une et une seule boule numérotée 2 ?

18) On donne $n$ points, $n > 2$, du plan tels que trois quelconques ne soient pas alignés et quatre quelconques ne soient pas cocycliques.
Quel est le nombre de cercles passant par trois de ces points ?

19) Un jeu de cartes est formé de 52 cartes de quatre couleurs : cœur, carreau, trèfle et pique.
Une main est formée de 13 cartes.
Un atout est formé d'une carte parmi les suivantes : as, valet, dame ou roi.

a) Quel est le nombre de mains possibles ?
b) Quel est le nombre de mains comportant un atout ?
c) Quel est le nombre de mains ne comportant que des atouts ?
d) Quel est le nombre de mains comportant 4 as ?

## Exercices sur les combinaisons (2)

I) Une boîte contient 8 cubes : $\begin{cases} \text{1 gros rouge et 3 petits rouges} \\ \text{2 gros verts et 1 petit vert} \\ \text{1 petit jaune} \end{cases}$

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte *(on admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur).*

*Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.*

1. On note **A** l'événement : "obtenir des cubes de couleurs différentes", **B** l'événement : "obtenir au plus un petit cube". **C** l'événement :"obtenir 3 gros cubes".
   a) Calculer la probabilité de **A**.
   b) Vérifier que la probabilité de **B** est égale à $\frac{2}{7}$.
   c) Calculer la probabilité d'avoir 3 gros cubes sachant qu'au moins deux le sont.

2. Soit $X$ la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.
   a) Déterminer la loi de probabilité de $X$ .
   b) Calculer l'espérance mathématique de $X$ .
   c) Combien de fois faut-il tirer avec remise pour espérer avoir 900 petits cubes rouges ?

3. L'enfant répète $n$ fois l'épreuve "tirer simultanément trois cubes de la boîte", en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants.
   On note $P_n$ la probabilité que l'événement **B** soit réalisé au moins une fois.

   a) Déterminer $P_n$ en fonction de $n$.
   b) Déterminer le plus petit entier $n$ tel que $P_n \geq 0{,}99$ .

II) Déterminer le(s) naturel(s) $n$ dans l'égalité suivante : $C_{38}^{n^2} = C_{38}^{2n+3}$.

III) Une urne contient $n$ boules, une bleue, deux rouges et les autres noires. $(n \geq 5)$. On tire simultanément deux boules de l'urne et on définit les événements suivants :

A : "Les deux boules tirées ont la même couleur".

B : "Au plus une des boules est rouge".

C : "La boule bleue est tirée".

1) Vérifier que $P(A) = \dfrac{n^2 - 7n + 14}{n(n-1)}$.

   Calculer $P(B)$ et $P(C)$.

2) Montrer que, pour tout $n$, $P(C) \leq 0{,}4$.
3) Calculer $P\left(A/B\right)$ et $P\left(A/\overline{B}\right)$.
4) Désormais on suppose que $n = 6$ et un jeu consiste à tirer 3 boules simultanément. Un joueur pratique ce jeu.
   Si les 3 boules tirées contiennent la boule bleue il ne gagne rien, si les 3 boules ont la même couleur il perd $d$ \$ et sinon il gagne 2 \$ pour chaque boule rouge tirée et perd 1 \$ pour chaque noire.

   $X$ est la variable aléatoire égale au gain algébrique de ce jeu.

   Prouver que $X$ prend 3 valeurs.

   Donner sa loi de probabilité ainsi que son espérance $E(X)$ en fonction de $d$ .

   Comment choisir $d$ pour que ce jeu soit équitable ?

   Quelle est la situation d'un joueur qui fera 200 essais quand $d = 10$ \$ ?

IV) On dispose d'un dé et de deux urnes $A$ et $B$.

L'urne $A$ contient 6 boules blanches et 4 noires et $B$ contient 4 boules blanches et 2 noires.

A) On lance le dé, si le résultat est multiple de 3, on tire 3 boules simultanément de $A$ sinon, on tire 3 boules de $B$.

1) Calculer la probabilité d'avoir 3 boules noires. En déduire celle de l'événement E : "au plus 2 boules sont noires".
2) Sachant que 2 boules noires au plus ont été tirées, calculer la probabilité qu'elles proviennent de $A$.

B) Dans cette partie, on utilise seulement l'urne $A$.

On tire simultanément 3 boules de cette urne. Une boule blanche en main fait gagner 2 \$ et chaque noire en fait perdre $n$ \$. $X$ est la variable aléatoire égale au gain algébrique relatif à la sortie des 3 boules.

Comment choisir $n$ pour que ce jeu soit équitable ?

V) Un sac contient 5 jetons, chacun des jetons porte l'un des chiffres de 1 à 5.

Une urne $A$ contient 3 boules noires et $n$ blanches $(n \geq 2)$.

Une urne $B$ contient 2 boules noires et $n+1$ blanches.

1) Un premier jeu consiste à tirer deux boules simultanément de $A$. Pour chaque boule noire tirée le joueur gagne 4 \$ et perd 1 \$ pour chaque boule blanche.

On note $X$ la variable aléatoire égale au gain algébrique relatif à ce jeu.

a) Prouver que $X$ prend 3 valeurs et déterminer sa loi de probabilité.

b) Calculer son espérance $E(X)$ et déterminer les valeurs de $n$ rendant le jeu favorable au joueur.

2) Dans cette partie on suppose que $n=3$, ainsi chaque urne contient 6 boules. Un nouveau jeu consiste à tirer du sac un jeton au hasard et de noter sa parité. Si le jeton tiré porte un numéro pair le joueur tire 2 boules de $A$ simultanément ; sinon il tire les 2 boules de $B$.

On note par $I$ et $N$ les événements suivants :

$I$ : "Le jeton tiré porte un numéro impair".

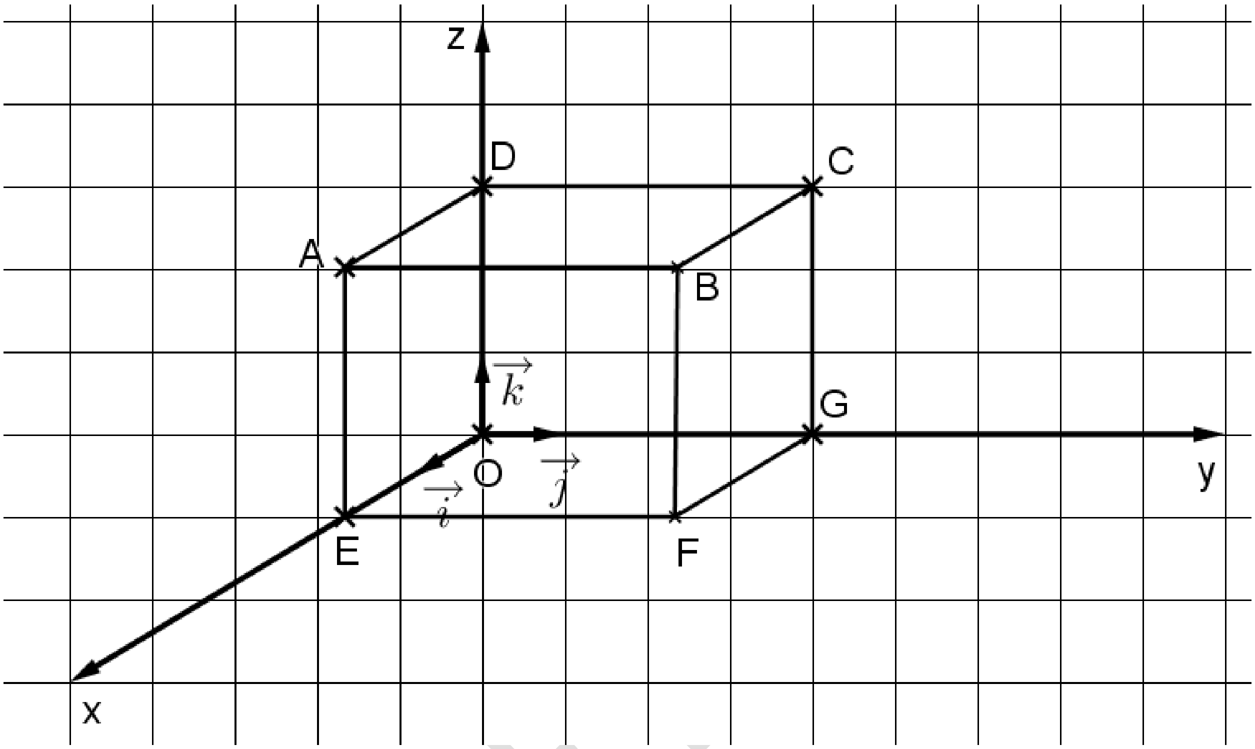
$N$ : "Les deux boules tirées sont noires".

a) Calculer les probabilités $P(I)$, $P\left(N/I\right)$ et $P(N)$.

b) Que vaut la probabilité $P\left(\bar{I}/\overline{N}\right)$ ?

## Lectures dans l'espace

Dans le repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath}\ \vec{\jmath}\ \vec{k})$, on donne le pavé ci-dessous :




1. Déterminer l'équation de chacun des plans suivants :

   $(ABF)$, $(ABC)$, $(BCG)$ $(ODC)$.

2. Déterminer l'équation de chacune des faces suivantes :

   $(ABFE)$, $(BCGF)$.

3. Déterminer l'équation de chacune des droites ou des segments suivants :

   $(FG)$, $[FG]$, $(AB)$ $[AB]$.

# Exercices : Géométrie dans l'espace

## Équation cartésienne d'un plan :

1. Écrire une équation cartésienne du plan $(P)$ qui passe par le point $A$ et de vecteur normal $\vec{n}$ dans chacun des cas suivants :
   a. $A(1\,;4\,;5)$ et $\vec{n}(2;-3;4)$.
   b. $A(2\,;\,0\,;\,-3)$ et $\vec{n}(0;1;-4)$.

2. Écrire une équation cartésienne du plan $(P)$ parallèle aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et passant par le point $A$ dans chacun des cas suivants :
   a) $A(2;-1;1)$, $\vec{u}(2;1;3)$ et $\vec{v}(3;-2;4)$.
   b) $A(-1;-2;3)$, $\vec{u}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ et $\vec{v}=3\vec{k}$.

3. Écrire une équation cartésienne du plan $(P)$ passant par les points $A$ $B$ et $C$ dans chacun des cas suivants :
   a. $A(3;2;2)$, $B(1;-1;2)$ et $C(0;3;-1)$.
   b. $A(4;-1;3)$, $B(2;0;1)$ et $C(-2;0;3)$.

4. Soit le plan $(P)$ d'équation cartésienne $x-2y+3z+1=0$.
   a. Trouver deux vecteurs normaux à $(P)$.
   b. Déterminer trois points $A$ $B$ et $C$ de $(P)$.
   c. Le point $I(1;-2;3)$ est-il un point de $(P)$ ?

5. Déterminer les points d'intersection du plan $(P)$ d'équation cartésienne $2x-y+3z-6=0$ avec les axes de coordonnées.

## Équation d'une droite :

1) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite $(d)$ passant par le point $A$ et de vecteur directeur $\vec{v}$ dans chacun des cas suivants :
   a. $A(1;-2;3)$ et $\vec{v}(2;3;1)$.
   b. $A(0;-4;5)$ et $\vec{v}(0;-3;7)$,
2) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite $(AB)$ dans chacun des cas suivants :
   a. $A(-2;5;1)$ et $B(3;2;-1)$.
   b. $A(0;2;0)$ et $B(0;3;0)$.
3) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite $(d)$ passant par le point $A$ et parallèle à la droite $(BC)$ dans chacun des cas suivants :
   a. $A(-2;1;3)$ , $B(1;-1;2)$ et $C(0;2;4)$.
   b. $A(2;0;0)$ , $B(0;2;0)$ et $C(0;0;2)$.

4) Soit $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = 3t \end{cases}$ avec $t \in IR$ une représentation paramétrique d'une droite $(d)$.
   a) Donner deux vecteurs directeurs de $(d)$.
   b) Déterminer deux points $A$ et $B$ de $(d)$.
   c) Le point $I(2;1;-2)$ est-il un point de $(d)$ ?

5) Déterminer les points d'intersection de la droite $(d)$ définie par :
$\begin{cases} x = 4m - 3 \\ y = -m + 1 \\ z = m \end{cases}$ avec $m \in IR$ une représentation
avec les plans $(xOy)$, $(xOz)$ et $(yOz)$.

## Positions relatives de deux droites :

1. Dites, dans chacun des cas suivants, si les droites $(d)$ et $(d')$ sont concourantes, parallèles ou non coplanaires. ($t$ et $m$ sont des réels).

a.

$$(d):\begin{cases} x = t-2 \\ y = 2t+1 \\ z = -3t+3 \end{cases} \qquad (d'):\begin{cases} x = \frac{\lambda}{2}+1 \\ y = \lambda - 2 \\ z = -\frac{3}{2}\lambda \end{cases}$$

b.

$$(d):\begin{cases} x = t+1 \\ y = -2t \\ z = 3t+2 \end{cases} \qquad (d'):\begin{cases} x = 2m \\ y = m-1 \\ z = 2m-1 \end{cases}$$

c.

$$(d):\begin{cases} x = 3t-1 \\ y = t+2 \\ z = -2t+3 \end{cases} \qquad (d'):\begin{cases} x = m \\ y = -m+2 \\ z = 3m+2 \end{cases}$$

d.

$$(d):\begin{cases} x = 2 \\ y = t+2 \\ z = 3 \end{cases} \qquad (d'):\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 2m+1 \end{cases}$$

2. Écrire un système d'équations paramétriques de la droite $(d')$ passant par le point $A(2;-1;1)$ et parallèle à la droite $(d)$ dans chacun des cas suivants :

a) $(d):\begin{cases} x = 3m+2 \\ y = -m+3 \\ z = -2m+1 \end{cases}$

b) $(d):\begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$

c) $(d): \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{4}$

## Droites orthogonales :

1. Dire, dans chacun des cas, si les droites $(d)$ et $(d')$ sont orthogonales ou non.

a)

$(d)$: $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3 \\ z = -t \end{cases}$ $(d')$: $\begin{cases} x = m + 5 \\ y = -3m \\ z = m + 2 \end{cases}$

b)

$(d)$: $\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = t + 3 \end{cases}$ $(d')$: $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z+1}{-3}$

2. Écrire un système d'équations paramétriques d'une droite $(d)$ passant par le point $A$ et orthogonale à la droite $(d')$ dans chacun des cas suivants :

   a. $A(2;-1;3)$ $(d')$: $\begin{cases} x = u - 1 \\ y = 2u \\ z = -3u + 2 \end{cases}$

   b. $A(-1;2;1)$ $(d')$: $\begin{cases} x = 3 \\ y = t - 1 \\ z = 2 \end{cases}$

   c. $A(0;0;1)$ $(d')$: $x = y = z$

## Positions relatives d'une droite et d'un plan :

1) Déterminer la position relative de la droite $(d')$ et du plan $(P)$ dans chacun des cas suivants et déterminer les coordonnées de leur éventuel point d'intersection.

   a) $(d):\begin{cases} x = 2k + 3 \\ y = -k + 1 \\ z = 3k + 2 \end{cases}$ $\qquad (P): 2x - y - z + 2 = 0$

   b) $(d):\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t + 3 \end{cases}$ $\qquad (P): 3x - y + z - 8 = 0$

   c) $(d):\begin{cases} x = 3u - 1 \\ y = u + 1 \\ z = -u + 2 \end{cases}$ $\qquad (P): z = 0$

2) Soit les plans $(P)$: $x - 3y - 2z + 1 = 0$
   et $(Q)$: $2x + y + 3z + 1 = 0$ et le point $A(2; 1; -2)$.

   1) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite $(d)$ passant par $A$ et parallèle à $(P)$ et à $(Q)$.
   2) Trouver une équation du plan $(R)$ passant par $O$ et parallèle à $(P)$ et une équation du plan du plan $(T)$ passant par $O$ et parallèle à $(Q)$ et vérifier par le calcul que la droite d'intersection de $(R)$ et $(T)$ est parallèle à $(P)$ et à $(Q)$.

3) Soit le plan $(P)$: $2x + y - 3z + 1 = 0$, la droite

$(d)$: $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = -t + 1 \end{cases}$ et le point $A(1; -1; 2)$.

Trouver un système d'équations paramétriques de la droite $(\Delta)$ dans chacun des cas suivants :

a) $(\Delta)$ passe par $A$, est parallèle à $(P)$ et rencontre $(d)$.
b) $(\Delta)$ passe par $A$, est parallèle à $(P)$ et rencontre $(z'Oz)$.
c) $(\Delta)$ passe par $A$, est parallèle à $(xOy)$ et rencontre $(d)$.

### Droite perpendiculaire à un plan :

1) Dire si la droite $(d)$ est perpendiculaire au plan $(P)$ dans chacun des cas suivants :

a) $(d)$: $\begin{cases} x = m - 2 \\ y = -m \\ z = 3m \end{cases}$ $(P)$: $x - 2y + z - 5 = 0$,

b) $(d)$: $\begin{cases} x = 2 \\ y = t - 1 \\ z = 2t \end{cases}$ $(P)$: $2y + 4z - 5 = 0$,

2) Écrire une équation du plan $(P)$ passant par le point $A$ et perpendiculaire à la droite $(d)$ dans chacun des cas suivants :

a) $(d)$: $\begin{cases} x = 3t \\ y = -t + 2 \\ z = t - 1 \end{cases}$ $A(0; -1; 2)$

b) $(d)$: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t + 1 \end{cases}$ $A(2; 1; -1)$

## Distance d'un point à un plan :

Calculer la distance du point $A$ au plan $(P)$ dans chacun des cas suivants :

1) $A(3;1;-2)$ $\quad$ $(P)$: $x+2y-z+1=0$.
2) $A(2;-3;4)$ $\quad$ $(P)$: $z+1=0$.

## Distance d'un point à une droite :

1) Calculer la distance du point $A$ à la droite $(d)$ dans chacun des cas suivants :

   a) $A(3;2;4)$ et $(d)\colon \begin{cases} x=2t-1 \\ y=t-2 \\ z=3t \end{cases}$

   b) $A(1;-1;2)$ et $(d)\colon \frac{x-2}{3}=y=\frac{z+1}{-2}$

2) Soit la droite $(d)\colon \begin{cases} x=t+1 \\ y=-t+2 \\ z=2t \end{cases}$ et le point $A(2;0;3)$.

   a) Ecrire une équation du plan $(P)$ passant par le point $A$ et perpendiculaire à $(d)$.
   b) Déterminer les coordonnées de $H$ projeté orthogonal de $A$ sur $(d)$ et en déduire la distance de $A$ à $(d)$.

**Problèmes :**

1) Soit le plan $(P): 2x+y-z=0$,
   la droite $(d): \begin{cases} x=2t \\ y=-t+1 \\ z=t-2 \end{cases}$ et le point $A(2;1;-2)$.

   a) Trouver les coordonnées de $I$ intersection de $(d)$ et $(P)$.
   b) Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite $(\Delta)$ passant par $A$, parallèle à $(P)$ et rencontrant $(d)$.
   c) Trouver une équation du plan $(Q)$ passant par $A$ et contenant $(d)$.
   d) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite $(d')$, intersection de $(P)$ et $(Q)$.
   e) Trouver les coordonnées de $B$ projeté de $A$ sur $(P)$ parallèlement à $(d)$.
   f) La droite $(\Delta)$ se projette sur $(P)$ parallèlement à $(d)$ suivant une droite $(\Delta')$.
   Trouver un système d'équations paramétriques de $(\Delta')$.

2) Soit les points $A(1;2;-3)$ $B(4;5;-1)$ et $C(3;-1;0)$.
   a) Montrer que les points $A$ $B$ et $C$ déterminent un plan $(P)$.
   Écrire une équation cartésienne de $(P)$.
   b) Trouver un système d'équations paramétriques de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
   c) Écrire une équation du plan contenant $A$ et $B$ et parallèle à la droite $(d): \begin{cases} x=2t-1 \\ y=-t+2 \\ z=3t \end{cases}$
   d) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite $(\Delta)$ intersection de $(P)$ avec le plan $(xOz)$.

3) Soit la famille de plan $(P_m)$:
   $(m+2)x-2(m-1)y+(3-m)z+m+3=0$
   où $m$ est un paramètre réel et le point $A(1;2;-1)$.

   a) Montrer que, quel que soit $m$, le plan $(P_m)$ contient une droite fixe $(d)$.
   b) Trouver un système d'équations paramétriques de $(d)$.

c) Trouver un point $B$ sur $(z'Oz)$ tel que $(AB)$ soit parallèle à $(P_0)$.
d) Existe-t-il une droite passant par $A$ et qui reste parallèle à $(P_m)$ lorsque $m$ varie ?
Si oui, trouver un système d'équations paramétriques de cette droite.

4) Soit la droite $(d)$ définie par : $\frac{x+1}{2} = y - 1 = \frac{z}{3}$

et le plan $(P)$ d'équation $2x + y - z + 1 = 0$.

a) Calculer le cosinus de l'angle aigu que fait $(d)$ avec $(P)$.
b) Écrire une équation du plan $(Q)$ déterminé par $(d)$ et $O$ l'origine du repère.
c) Trouver des équations paramétriques de l'intersection des plans $(P)$ et $(Q)$.

5) On donne les points $A(1;2;3)$ et $B(3;2;1)$ et la droite $(d)$ définie par : $(d)$: $\begin{cases} x = k + 1 \\ y = k - 1 \\ z = -k + 2 \end{cases}$

On considère le point $C(1;-1;2)$.

a) Écrire l'équation du plan $(P)$ passant par $A$, $B$et $C$.
b) Écrire l'équation du plan $(Q)$ contenant $(d)$ et parallèle à $(AB)$.
c) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite $(\Delta)$, intersection de $(P)$ et $(Q)$.
d) Calculer le cosinus de l'angle aigu que fait $(P)$ avec $(Q)$.
e) On suppose que $N$ est un point variable de $(d)$.
Soit $I$ le milieu de $[AB]$.
On pose $s = \overline{NA}^2 + \overline{NB}^2$.
Démontrer que $s = 2\overline{NI}^2 + 4 = 6k^2 - 16k + 24$.
Déterminer la valeur de $k$ pour laquelle $s$ est minimum et trouver les coordonnées du point $N$ correspondant.
f) Que représente géométriquement le point $N$ ainsi trouvé pour le point $I$ ? En déduire la distance de $I$ à $(d)$.

6) Soit $(d_m)$ la famille de droites définies par les équations :
$\frac{x}{m} = \frac{y}{m+1} = z - 1$,

a) Montrer que les droites $(d_m)$ passent par un point fixe $A$ dont on déterminera les coordonnées.

b) Calculer en fonction de $m$ les coordonnées du point $B$ intersection de $(d_m)$ avec le plan $(xOy)$.
En déduire que $(d_m)$ reste dans un plan fixe $(P)$.
Trouver une équation cartésienne de $(P)$.

7)

a. Déterminer un vecteur directeur de $(d)$ et un vecteur directeur de $(d')$.
Quelle est la position relative de $(d)$ et $(d')$ ?

b. Trouver un point $A$ de $(d)$ et deux points $B$ et $C$ de $(d')$.
c. Écrire une équation cartésienne du plan $(P)$ déterminé par $A$ $B$ et $C$.
d. Vérifier par le calcul que $(d)$ et $(d')$ sont incluses dans $(P)$.
e. Trouver un vecteur $\vec{v}$ normal à $(P)$ et écrire un système d'équations paramétriques de la droite $(\Delta)$ passant par $A$ et de vecteur directeur $\vec{v}$.
f. Quelle est la position relative de $(\Delta)$ et $(d)$ ?
g. Quelle est la position relative de $(\Delta)$ et $(d')$ ?

8)

Le point $A(1;-2;3)$ se projette orthogonalement sur un plan $(P)$ en l'origine $O$ du repère.
a. Écrire une équation cartésienne du plan $(P)$.
b. Calculer la distance de $A$ à $(P)$.
c. Trouver les coordonnées de $B$ symétrique de $A$ par rapport à $(P)$.
d. Trouver une équation du plan $(Q)$ passant par $B$ et de vecteur normal $\overrightarrow{OA}$.
e. Calculer la distance de $A$ à $(Q)$.

# Droites et plans de l'espace

## Position de deux droites

- Deux droites $(d_1)$ et $(d_2)$ sont coplanaires (dans le même plan) ou non coplanaires.
- Si elles sont coplanaires elles peuvent être :
  - ❖ Confondues $(d_1)=(d_2)$
  - ❖ parallèles $(d_1)//(d_2)$
  - ❖ sécantes $(d_1)\cap(d_2)=\{A\}$.
- Si elles sont non coplanaires $(d_1)\cap(d_2)=\phi$.

## Position d'une droite et d'un plan.

Une droite $(d)$ et un plan $(P)$ peuvent être :

- ❖ parallèles $(d)//(P)$
- ❖ sécants la droite coupe le plan en un point $(d)\cap(P)=\{A\}$
- ❖ la droite est contenue dans le plan $(d)\subset(P)$.

## Position de deux plans

Deux plans $(P)$et $(Q)$ peuvent être :

- ❖ confondus $(P)=(Q)$ .
- ❖ parallèles $(P)//(Q)$ $(P)\cap(Q)=\phi$
- ❖ sécants les deux plans se coupent suivant une droite $(P)\cap(Q)=(D)$.

**Par convention**, on dit que deux droites confondues ou deux plans confondus sont parallèles et qu'une droite contenue dans un plan est parallèle à ce plan.

**Propriétés**

- Trois points non alignés déterminent un plan et un seul
- Une droite et un point n'appartenant pas à cette droite déterminent un plan et un seul.
- Deux droites parallèles déterminent un plan et un seul.
- Deux droites sécantes déterminent un plan et un seul.
- Si une droite a deux de ses points dans un plan alors elle contenue dans ce plan.

**Droites parallèles**

- Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.
- Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.
- Si une droite $(d)$ est parallèle à un plan $(P)$, alors elle est parallèle à l'intersection de $(P)$ avec tout plan qui contient $(d)$ et coupant $(P)$ .
- Toute droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur intersection.
- Si deux droites sont parallèles ,et contenues respectivement dans deux plans sécants, alors elles sont parallèles à l'intersection de ces deux plans.

**Plans parallèles**

- Deux plans sont parallèles, si deux droites sécantes de l'un sont respectivement parallèles à deux droites sécantes de l'autre.
- Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles alors toute droite contenue dans l'un est parallèle à l'autre.

**Droites et plans parallèles**

Une droite $(d)$ est parallèle à un plan $(P)$, si et seulement si, elle est parallèle à une droite de ce plan.

**N.B.**

Si une droite est parallèle à un plan ceci n'implique pas qu'elle est parallèle à toutes les droites du plan, mais à plusieurs droites parallèles de ce plan.

## Point méthode

- **Pour prouver que deux plans sont sécants il suffit de prouver qu'ils ont un point en commun et qu'un point de l'un n'appartient pas à l'autre.**
- **Pour démontrer que trois points sont alignés il suffit de démontrer qu'elles appartiennent à deux plans distincts.**
- **Pour trouver la droite d'intersection de deux plans il suffit**
    - ❖ **soit de trouver deux points communs aux deux plans.**
    - ❖ **Soit de trouver un point commun et une droite parallèle à ces deux plans.**
- **Pour démontrer que deux droites sont parallèles, on peut démontrer qu'elles sont coplanaires et situées dans deux plans parallèles.**

## Produit vectoriel et produit mixte

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\;\vec{j}\;\vec{k}\,)$.

1) Soit les vecteurs $\vec{u}(2\;\;-3\;\;4\,)$, $\vec{v}(1\;\;2\;\;3\,)$ et $\vec{w}(2\;\;0\;\;1\,)$ .
   Calculer les composantes de :
   $\vec{u} \wedge \vec{w}$ ; $\vec{w} \wedge (2\vec{u} - 3\vec{v})$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$

2) Soit les points $A(1\;\;-1\;\;2)$, $B(3\;\;1\;\;3)$ et $C(2\;\;-3\;\;1)$

   a) Calculer les composantes de :
      $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ , $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{k}$
   b) Montrer que les points $A\;B$ et $C$ déterminent un plan $(P)$.
   c) Déterminer les composantes d'un vecteur normal à $(P)$.
   d) Déterminer une équation cartésienne de $(P)$.

3) Soit les vecteurs $\vec{u}(1\;\;2\;\;-3\,)$ et $\vec{v}(2\;\;4\;\;-6\,)$.
   a) Calculer les composantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et interpréter le résultat.
   b) Retrouver cette conclusion par une autre méthode.

4) On donne les vecteurs $\vec{u}(2\;\;-1\;\;4\,)$ et $\vec{v}(3\;\;1\;\;2\,)$.
   Déterminer les vecteurs $\vec{w}(a\;\;b\;\;c\,)$ orthogonaux à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

5) Soit un parallélogramme $ABCD$ avec $A(3\;\;-2\;\;-1)$, $B(2\;\;1\;\;3)$ et $C(0\;\;4\;\;1)$.
   a) Trouver les coordonnées de $D$.
   b) Calculer l'aire de ce parallélogramme .
   c) Calculer l'aire du triangle $ABD$ et celle de $ABC$.
   d) Calculer $cos\widehat{BAC}$ et $sin\widehat{BAC}$ .

6) Soit les points $A(3\;\;-1\;\;2)$, $B(2\;\;-2\;\;1)$ , $C(0\;\;2\;\;3)$ et $M(\alpha\;\;\beta\;\;\gamma)$.
   Trouver une relation entre $\alpha\;\;\beta$ et $\gamma$ pour que $M$ soit dans le plan $(ABC)$ .

7) Soit les points $A(3\;\;2\;\;-3)$, $B(2\;\;1\;\;-1)$ et $C(4\;\;0\;\;1)$ .
   a) Montrer que les points $O$, $A\;\;B$ et $C$ sont non coplanaires.
   b) Calculer le volume du parallélépipède de côtés $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$.
   c) Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.

8) On donne les points $A(-1\ \ 2\ \ 1)$, $B(-2\ \ 1\ \ 0)$ , $C(-1\ \ 1\ \ -1)$ et $E(-2\ \ 3\ \ -2)$.
   a) Montrer que les points $A$ $B$ et $C$ déterminent un plan $(P)$.
   b) Montrer que $(EC)$ est perpendiculaire à $(P)$.
   c) Montrer que les plans $(OEC)$ et $(P)$ sont perpendiculaires.
   d) Calculer l'aire du triangle $ABC$.
   e) Calculer selon deux méthodes le volume du tétraèdre $EABC$.

9) On donne les points $A\left(\frac{1}{3}\ \ -\frac{2}{3}\ \ \frac{2}{3}\right)$ et $B\left(\frac{2}{3}\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{1}{3}\right)$.
   a) Monter que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux et unitaires.
   b) Trouver un point $C$ tel que le repère soit orthonormé et direct $(O\ ;\ \overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}\ \overrightarrow{OC}\ )$

10) On donne les points $A2\ \ 1\ \ -2)$, $B(3\ \ 2\ \ 0)$ , $C(-1\ \ 2\ \ -3)$ et $M(x\ \ y\ \ z)$.
   a) Déterminer un vecteur normal au plan $(ABC)$.
   b) Trouver une relation entre $x$ $y$ et $z$ dans chacun des cas suivants :
      - $M$ est dans le plan $(ABC)$.
      - $M$ est dans le plan médiateur de $[AC]$.
      - $M$ est sur la sphère de diamètre [BC].
   c) Trouver une relation entre $x$ $y$ et $z$ si $M$se trouve sur la droite $(AB)$.

# Orthogonalité dans l'espace

## Angle de deux droites.

$(d)$ et $(d')$ sont deux droites de l'espace on appelle angles de $(d)$ et $(d')$ l'angle formé par deux parallèles à ces deux droites passant par un même point à $k\pi$ près.

## Droites orthogonales (perpendiculaires)

- Deux droites $(d)$ et $(d')$ de l'espace sont orthogonales si leur angle est droit.
- Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

**N.B.** Deux droites sont orthogonales à une même troisième ne sont parallèles que si elles sont coplanaires.

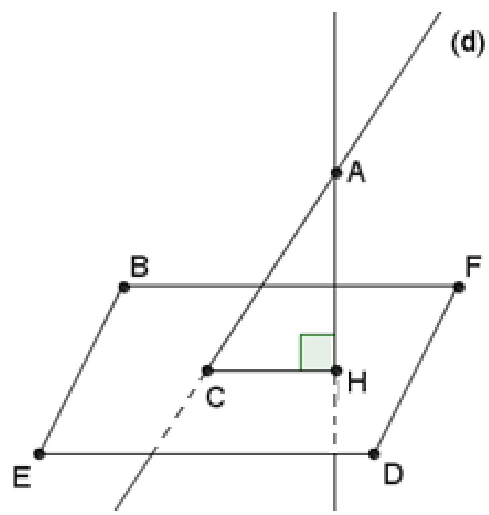
## Angle d'une droite et d'un plan.

$(d)$ non perpendiculaire à $(P)$ / $(d)$ coupe $(P)$ en $C$.

$A \in (d)$ et $A \notin (P)$ $(AH) \perp (P)$.

$\widehat{ACH}$ est l'angle de la droite $(d)$ et du plan $(P)$.

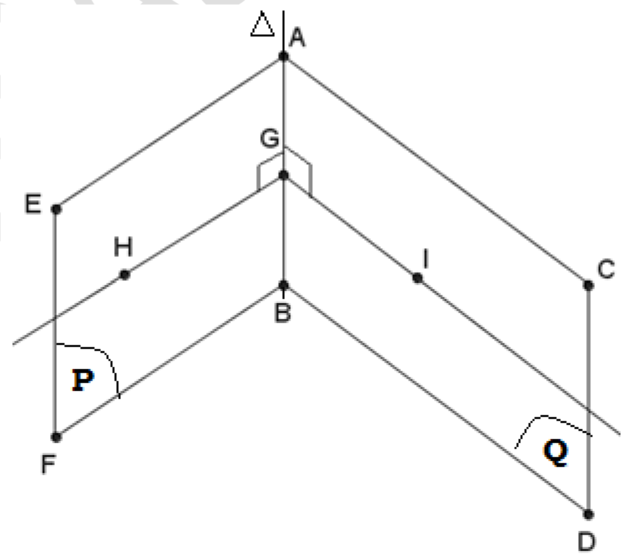
L'angle de la droite (d) et du plan (P) est aussi le complément de l'angle formé par (d) et par un vecteur normal au plan (P).



## Droites perpendiculaires à un plan

- Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.
- Si une droite est perpendiculaire à un plan alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
- Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan elles sont parallèles entre elles.
- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si un plan $(P)$ est perpendiculaire à une droite $(D)$en un point $A$, alors toute droite passant par $A$ et perpendiculaire à $(D)$, est contenue dans $(P)$.

## Angle de deux plans.




$(P)\cap(Q)=(\Delta),\ G\in(\Delta)$

(HGI) $\perp$ $(\Delta)$ avec $(GH)\subset(P)\, et\, (GI)\subset(Q)$

D'où $(GI)\perp(\Delta)$ *et* $(GH)\perp(\Delta)$

L'angle $H\widehat{G}I$ est l'angle

des deux plans $(P)$ et $(Q)$.

On dit l'appelle aussi l'angle du dièdre $((P),(\Delta),(Q))$.

## Plans perpendiculaires.

- Deux plans sont perpendiculaires lorsque leur angle est droit.
- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si l'un deux contient une droite perpendiculaire à l'autre.
- Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre eux.
- Si deux plans sécants sont perpendiculaires à un même troisième plan alors leur intersection est perpendiculaire à ce plan.

## Plan médiateur.

- Le plan médiateur d'un segment est le plan perpendiculaire à ce segment en son milieu.
- Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants des points $A$ et $B$.
- Dire qu'un point $M$ de l'espace appartient au plan médiateur d'un segment $[AB]$ équivaut à dire que $MA = MB$.

## Point méthode

- Pour démontrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan il suffit :
  - ❖ Soit de prouver que la droite est orthogonale à deux droites sécantes du plan.
  - ❖ Soit de prouver que le plan est le plan médiateur d'un segment de la droite.
- Pour démontrer deux plans sont perpendiculaires on démontre que l'un deux contient une droite perpendiculaire à l'autre.

- Pour montrer que deux droites sont orthogonales, il suffit de démontrer que l'une d'elles est perpendiculaire à un plan contenant l'autre.

# Rappel Produit scalaire et applications

## I. Les expressions du produit scalaire dans le plan

**a.** $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,,\vec{v})$

**b.** $\vec{u},\vec{v} = \overrightarrow{u'},\vec{v}$ où $\overrightarrow{u'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$,

**c.** Dans un repère orthonormal (orthonormé) : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u},\vec{v} = xx' + yy'$.

## II. Cas particuliers :

1. $\vec{u}.\vec{v} = 0 \iff \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,,\vec{v}) \iff$

$$\|\vec{u}\| = 0 \Longrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

et /ou

$$\|\vec{v}\| = 0 \Longrightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

et /ou

$$\cos(\vec{u}\ \ \vec{v}) = 0 \Longrightarrow (\vec{u}\ \ \vec{v}) = \frac{\pi}{2} mod(\pi)\ (\frac{\pi}{2} mod(2\pi) \text{ ou } -\frac{\pi}{2} mod(2\pi))$$

2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens
   $(\vec{u}\,,\vec{v}) = 0\ (2\pi) \Longrightarrow cos(\vec{u}\,,\vec{v}) = 1 \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
3. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires
   $(\vec{u}\,,\vec{v}) = \pi\ (2\pi) \Longrightarrow cos(\vec{u}\,,\vec{v}) = -1 \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
4. $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$ $\qquad AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$
5. $\vec{u}.\vec{0} = 0\ \ (\vec{u}\,,\vec{0})$ est indéterminé.

## III. Règles de calcul :

1. $\vec{u},\vec{v} = \vec{v},\vec{u}$ ( le produit scalaire est commutatif)
2. $\vec{u},(\vec{v} \pm \vec{w}\,) = \vec{u},\vec{v} \pm \vec{u},\vec{w}$ (le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition)
3. $(\alpha\vec{u}).(\beta\vec{v}) = (\propto.\beta)\vec{u}.\vec{v},\quad \propto \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}$
4. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$
5. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
6. $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

# IV. Relations métriques dans un triangle

## a. Théorème d'Alkashi :

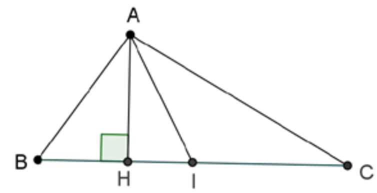
Dans le triangle $ABC$ ona : $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \times cos\hat{A}$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times cos\hat{B}$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times cos\hat{C}$$

## b. Théorèmes de la médiane

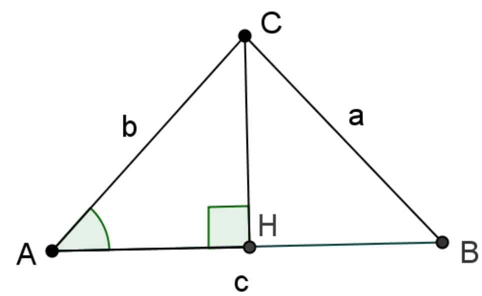
$ABC$ est un triangle, $[AI]$ et $[AH]$ sont respectivement la médiane et la hauteur relative à $[BC]$,




$AC^2 + AB^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$

$AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{HI}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AI}$ sur $\overrightarrow{CB}$,

## c. Aire d'un triangle




$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\ AB \times AC \times sin\hat{A}$. Donc $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\ bcsin\hat{A}$.

De même : $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\ acsin\hat{B}$ et $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\ absin\hat{C}$.

**Conséquence** On a $2\mathcal{A}_{ABC} = bcsin\hat{A} = acsin\hat{B} = absin\hat{C}$, En divisant par $abc$, On obtient

$\frac{2\mathcal{A}_{ABC}}{abc} = \frac{bcsin\hat{A}}{abc} = \frac{acsin\hat{B}}{abc} = \frac{absin\hat{C}}{abc}$ alors $\frac{2\mathcal{A}_{ABC}}{abc} = \frac{sin\hat{A}}{a} = \frac{sin\hat{B}}{b} = \frac{sin\hat{C}}{c}$.

## V. Lieux géométriques

- $MA = MB \Leftrightarrow$ l'ensemble des points $M$ du plan est la médiatrice de $[AB]$,
- $MA = r$ (constante) $\Longleftrightarrow$ l'ensemble des points $M$ du plan est le cercle de centre $A$ et de rayon $r$,
- $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$=0 $\Leftrightarrow$ l'ensemble des points $M$ du plan est le cercle de diamètre $[AB]$,
- $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB}$=0 $\Leftrightarrow$ l'ensemble des points $M$ du plan est la droite $(D)$ perpendiculaire à $(AB)$ passant par $A$,
- $\overrightarrow{MG}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$ l'ensemble des points $M$ du plan est la droite $(D')$ parallèle à (AB) passant par $G$,

## VI. Distance d'un point à une droite : (dans le plan)

Soit dans un repère orthonormal la droite $(D)$ dont $ux + vy + w = 0$ est une équation cartésienne et $A$ est un point tel que $A(x_A\ ;\ y_A)$. La distance du point $A$ à la droite $(D)$ est donnée par : $d(A;(D)) = \dfrac{|ux_A + vx_A + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.

# Consolidation 1 : Primitives

## Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\dfrac{8x^5-3x^4+1}{x^8}$ sur $\mathbb{R}^*$.

b) $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{4x^3-6x+1}}$ sur $[0;+\infty[$.

c) $f(x)=(4x^4+1)\sqrt{4x^5+5x+9}$ sur $[0;+\infty[$.

d) $f(x)=\dfrac{7\sin(2x)}{(\cos^2 x+3)^8}$ sur $\mathbb{R}$.

e) $f(x)=\dfrac{\tan(x)}{\cos^7(x)}$ sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$.

f) $f(x)=\cos^3(x)$ sur $\mathbb{R}$.

g) $f(x)=\cos(x).\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

h) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}+x}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$.

i) $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$.

j) $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right).\sqrt{\cos(x)+\sqrt{3}.\sin(x)}$ sur $\mathbb{R}$.

k) $f(x)=x.\cos(x)$

l) $f(x)=x^2.\sin(x)$

## Consolidation 2 : Partie entière, domaine de définition et théorème des valeurs intermédiaires

I) Déterminer l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions :

$$f(x) = \frac{2x-9}{\sqrt{7-E(1-3x)}} \qquad g(x) = \frac{\sqrt{E^2(x)-1}}{\sqrt{E\left(sin(x)\right)+1}}$$

II) Résoudre, dans R, l'inéquation : $E\left(\sqrt{2x-3}\right) \leq 8$ où $E(x)$ représente la "partie entière" du réel $x$.

III)

a) Tracer dans un repère orthonormal la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0;9]$ par $f(x) = E\left(\frac{x}{3}-1\right)$.

b) Dire en quels points $f$ est discontinue.

IV) Soit la fonction $h$ définie sur $[0;2]$ par $f(x) = sin\left(E(x)\frac{\pi}{2}\right)+1$.

1) Tracer $f$ dans un repère orthonormal.
2) Prouver que $f$ présente deux discontinuités.

V) Expliciter et tracer sur $[-\pi;\pi]$ la fonction $f$ définie par $f(x) = E(\cos(x))$.

VI) Résoudre dans R chacune des relations suivantes :

a) $(E(x))^2 \leq 2$ b) $E\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = E(\tan x)$.

VII) Donner le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{5x-4\sqrt{12-2x}}{\sqrt{2x-1}-3} \quad , \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos(2011x)-1}}$$

$$h(x) = \frac{x-3}{|x^2-3|+2x} \quad \text{et} \quad l(x) = \frac{8x-7}{\sqrt{E(\sin x)+2}}$$

VIII) *a. Montrer que l'équation* $\cos(2x) = -x - 1$ *admet une unique solution* $\alpha$ sur $]-\frac{\pi}{2}; 0[$,

b. *À* l'aide de la calculatrice, on a calculé $\alpha$ et on a trouvé :

$\alpha \approx -0\ 857095747$ .

Donner un encadrement de $\alpha$ au centième près.

c. Montrer que : $sin^2(\alpha) = 1 + \frac{\alpha}{2}$.

IX) Prouver que l'équation $(E)$ ci-dessous admet dans R une unique racine $\alpha$. Donner un encadrement de $\alpha$ par deux entiers consécutifs $(E)$: $3x - 1 = sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

X) Soit (E) l'équation $tan\, x = x + 1$.

a) Calculer les limites de $\tan x$ aux bornes de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$ .

b) Démontrer alors que l'équation (E) admet une unique solution dans l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$ .

XI) Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

1. a. En étudiant les variations de f , montrer que l'équation (E) : $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions réelles appartenant à l'intervalle [-2 ; 2].

   On vérifie que des valeurs approchées de ces solutions à $10^{-2}$ près sont : $a \approx -1\ 53$ $b \approx -0\ 34$ *et* $c \approx 1\ 87$.
2. Montrer, que pour tout réel $\lambda$ : $\cos(3\lambda) = 4\cos^3(\lambda) - 3\cos(\lambda)$ .
3. a. Montrer que $x = 2\cos(\lambda)$ est solution de l'équation (E) si, et seulement si, $\cos(3\lambda) = \frac{1}{2}$ .

   b. En déduire les valeurs exactes des solutions de l'équation (E).

XII) Soit $f$ une fonction définie et continue sur $I = [0; 1]$ tel que pour tout $x \in I$ $f(x) \in I$.
Démontrer qu'il existe au moins un réel $a$ tel que $f(a) = a$.

## Consolidation 3 : Limites, suites et étude de fonctions

I) Sans avoir recours à la règle de l'hôpital, calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3-\sqrt{4x+1}}{\sqrt{3x^2-11}-1}$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan^2(x)-1}{2\pi-8x}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} -7x-\sqrt{49x^2+5x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cos\left(\frac{4}{x}\right)-1}{x.\sin^3\left(\frac{1}{x}\right)}$

II) **Partie A :**

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{x^2+2}{2x}$,

Vérifier que $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$,

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction $f$.
b) Calculer la limite de $f$ aux bornes de son domaine et déterminer les éventuelles asymptotes à la courbe représentative de $f$.
c) Étudier les variations de la fonction $f$.
d) Tracer la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath}\,\vec{\jmath})$.

**Partie B :**Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, $u_n \geq \sqrt{2}$.
b) Montrer que, pour tout $x \geq \sqrt{2}$, $f(x) \leq x$.
c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1.
d) Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
e) Calculer sa limite.

III) On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-x^3+x}{x^2+1}$

a. Étudier la parité de $f$.
b. Calculer les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition.
c. Déterminer l'équation de la droite $(\Delta)$ asymptote oblique à la courbe représentative de $(C_f)$ à $+\infty$ et à $-\infty$.
d. Étudier les variations de $f$.
e. Représenter graphiquement $(C_f)$ et $(\Delta)$ dans un repère orthogonal sur le papier quadrillé donné.
**On prendra 2 cm pour unité graphique en abscisse et 1 cm pour unité graphique en ordonnée.**
f. Calculer, **en unités d'aires, puis en $cm^2$,** l'aire du domaine délimité par $(C_f)$, $(\Delta)$ et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 2$.

IV) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1) Étudier sa parité. Puis calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, que vaut celle en $-\infty$.
2) Prouver qu'au voisinage de $+\infty$ la droite $(d)$ dont une équation est $y = x-1$ est asymptote à $(C_f)$ courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal.
Déduire l'équation de celle de $(d')$ asymptote à $(C_f)$ à $-\infty$.

3) Calculer l'expression $f'(x)$ de la dérivée de $f$.
4) Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ s'annule pour une seule valeur de $x$ et garde un signe constant pour les autres valeurs.

5) Justifier que $(C_f)$ admet alors un point d'inflexion qu'on déterminera.
6) Dresser le tableau de variations de $f$ sur $[0;+\infty[$ et tracer $(C_f)$ sur $\mathbb{R}$.
7) On considère la suite $(U_n)$ définie sur $\mathrm{N}^*$ par
$$U_n = \int_n^{n+1} f(x)-(x-1)dx.$$

Donner une signification géométrique de $U_1$ puis de $U_1 + U_2$.

Quelle est la valeur de $\sum_{i=1}^{10} U_i$ ?

## Consolidation 4: Logarithme népérien

**Exercice 1**

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.

$a)\ \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)} = \ln(2) - \ln(3)$

$b)\ \dfrac{\ln(27^3)}{\ln\,(9^2)} = 2\ln(\mathrm{e}) + \dfrac{1}{4}$

$c)$ Pour tout $x$ de IR , on a $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ .

**Exercice 2**

Résoudre :

a) $\ln(3x+1) = 0$ b) $2\ln(\,x+2) - \ln(2x^2+x) = 0$ c) $\dfrac{\ln(2x-1)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \geq 2$

**Exercice 3**

Soit l'équation :

$$\ln(4x-3) = \frac{1}{x} + 2$$

a) Montrer que cette équation admet une unique solution $\alpha$ sur $I =$ [ 1 ; +∞[,
b) Vérifier que $3\,2 < \alpha < 3\,3$ .

**Exercice 4**

Soit la fonction $f$ donnée par :

$$f(x) = x, \ln(3x-2)$$

Soit $C_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

Montrer que la tangente à $C_f$ au point d'abscisse 1 est perpendiculaire à la droite (d) d'équation $y = -\frac{1}{3}x + 5$.

**Exercice 5**

Étudier le signe de chacune de ces fonctions :

$$f(x) = 1 - \frac{x^2 \ln(x) - \ln e^4}{x^2 - 4} \qquad g(x) = \frac{(\ln(x))^2 - 2\ln(x)}{x - 7}$$

$$h(x) = \frac{\ln(x+2)}{x+2} \qquad k(x) = \frac{\ln(1\ 3)\,(x-2)}{-\ln(x)}$$

**Exercice 6**

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x-1}{\ln(x)} + \frac{3}{(\ln(x))^2}$ $\qquad$ $b)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right) \times \ln\left(\frac{e\,.\,x}{x+1}\right)$ $\qquad$ $c)$ $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{2}{\ln(x^2-3)}$

**Exercice 7**

Soit $f$ la fonction donnée par $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) Déterminer le domaine de la fonction $f$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.

**Exercice 8**

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^e (x-2)\ln(x)\,dx \qquad J = \int_0^{e-1} \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx$$

**Exercice 9**

A- Soit $g$ la fonction sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$$

Montrer que pour tout $x$ de $[\,1\,;+\infty\,[$, $g$ est positive.

B - Soit la fonction $f$ définie sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$$

a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .

b) Dresser le tableau de variation de la fonction $f$,

c) Montrer que $f(x) = 2$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

d) Vérifier que $\alpha \in [\,2\,;e\,]$.

e) Montrer que $\ln(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha$ .

# Consolidation 5 : Complexes

I) Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}\ \vec{v})$.
L'unité graphique est de 1 cm.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2 - 3i$, $z_B = i$ et $z_C = 6 - i$.
On réalisera une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

**Partie A :**

1. Calculer $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$,
2. En déduire la nature du triangle $ABC$.

**Partie B :**

On considère l'application $f$ qui, à tout point M d'affixe $z$ distincte de $i$, associe le point M' d'affixe $z$' telle que :

$$z' = \frac{i(z - 2 + 3i)}{z - i}$$

1. Soit D le point d'affixe $z_D = 1 - i$.
   Déterminer l'affixe du point D' image du point D par $f$.
2. a. Montrer qu'il existe un unique point E, dont l'image par l'application $f$ est le point d'affixe $2i$.
   b. Démontrer que E est un point de la droite (AB).
3. Démontrer que, pour tout point M distinct du point B, $OM' = \frac{AM}{BM}$.
4. Démontrer que, pour tout point M distinct du point A et du point B, on a l'égalité : $\left(\vec{u}\ \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{BM}\ \overrightarrow{AM}\right) + \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$
5. Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
6. Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

II) Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.
Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$ :

a. Si $|z| = |z'|$ alors $z = z'$ ou $z = -z'$.

b. Si $z' \neq 0$ et $\frac{|z|}{|z'|} = 1$ alors il existe un réel $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}, z'$,

c. Si $z = z'$ alors $z, \overline{z'} + \overline{z}, z' = 2|z|$.

d. L'ensemble des points M d'affixe $z$ vérifiant $(z + 1 - 2i)(\overline{z} + 1 + 2i) = 4$ est un cercle.

III) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}\ \vec{\jmath})$ **d'unité graphique 2 cm.**
On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives 1 et -1.
On considère l'application $f$ qui à tout point M du plan, différent du point B, d'affixe $z$, fait correspondre le point M' d'affixe $z'$ tel que

$$z' = \frac{z-1}{z+1}.$$

*On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.*

1) Déterminer les points invariants par $f$.
2) a) Montrer que pour tout nombre complexe différent de -1,
$$(z' - 1)(z + 1) = -2.$$
b) En déduire une relation entre $|z' - 1|$ et $|z + 1|$, puis entre $\arg(z' - 1)$ et $\arg(z + 1)$.
c) Traduire ces relations en termes de distances et d'angles.
3) Montrer que si $M$ appartient au cercle $(C)$ de centre $B$ et de rayon 2 alors $M'$ appartient au cercle $(C')$ de centre $A$ et de rayon 1.
4) Soit $P$ le point d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.
a) Déterminer la forme exponentielle de $p + 1$.
b) Montrer que le point $P$ appartient au cercle $(C)$.
c) Soit $Q$ le point d'affixe $q = -\bar{p}$ où $\bar{p}$ est le conjugué de $p$,
On note $P'$ l'image de $P$ par $f$.
Montrer que les points $A$, $P'$ et $Q$ sont alignés dans cet ordre.
d) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction
de $P'$.

# Consolidation 6 : Probabilité conditionnelle

## Exercice 1:

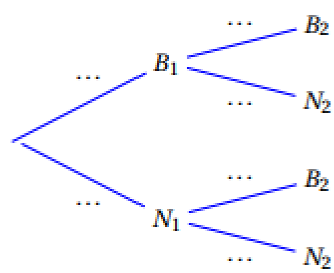
On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$ contenant des boules indiscernables au toucher.

$U_1$ contient $k$ boules blanches ($k$ entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.
$U_2$ contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard dans $U_1$ et on la place dans $U_2$. On tire ensuite, au hasard, une boule dans $U_2$. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

On note $B_1$ (respectivement $N_1$) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne $U_1$ ».
On note $B_2$ (respectivement $N_2$) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne $U_2$ ».

1. a. Recopier et compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-dessous :




Montrer que la probabilité de l'évènement $B_2$ est égale à $\dfrac{3k+6}{4k+12}$.

**Dans la suite on considère que $k = 12$.**
**Les questions 2 et 3 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.**

2. Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve.
Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros.
Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise. Soit $X$ la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.

   a. Montrer que les valeurs possibles de $X$ sont 4 et $-8$.
   b. Déterminer la loi de probabilité de la variable $X$.
   c. Calculer l'espérance mathématique de $X$.
   d. Le jeu est-il favorable au joueur?

3. Un joueur participe $n$ fois de suite à ce jeu.
Au début de chaque épreuve, l'urne $U_1$ contient 12 boules blanches et 3 noires, et l'urne $U_2$ contient 2 boules blanches et 1 noire.
Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.
Déterminer le plus petit entier $n$ pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'évènement $B_2$ soit supérieure ou égale à 0,99.

## Exercice 2:

On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$.
L'urne $U_1$ contient 2 billes vertes et 8 billes rouges toutes indiscernables au toucher.
L'urne $U_2$ contient 3 billes vertes et 7 billes rouges toutes indiscernables au toucher.

Une partie consiste, pour un joueur, à tirer au hasard une bille de l'urne $U_1$, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne $U_1$ puis de tirer au hasard une bille de l'urne $U_2$, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne $U_2$.
À la fin de la partie, si le joueur a tiré deux billes vertes il gagne un lecteur MP3. S'il a tiré une bille verte, il gagne un ours en peluche. Sinon il ne gagne rien.
On note

$V_1$ l'évènement : « le joueur tire une boule verte dans $U_1$ »
$V_2$ l'évènement : « le joueur tire une boule verte dans $U_2$ ».

Les évènements $V_1$ et $V_2$ sont indépendants.

1. Montrer, à l'aide d'un arbre pondéré, que la probabilité de gagner un lecteur MP3 est $p = 0,06$.
2. Quelle est la probabilité de gagner un ours en peluche?
3. Vingt personnes jouent chacune une partie. Déterminer la probabilité que deux d'entre elles exactement gagnent un lecteur MP3.
   On justifiera la réponse et on donnera une valeur approchée du résultat à $10^{-4}$ près.
4. On appelle $n$ le nombre de personnes participant à la loterie un jour donné et jouant une seule fois.
   On note $p_n$ la probabilité que l'une au moins de ces personnes gagne un lecteur MP3.
   Déterminer la plus petite valeur de $n$ vérifiant $p_n \geqslant 0,99$.

## Exercice 3:

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$.

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel $n$ non nul :

- $A_n$ l'évènement : « la $n$-ième cible est atteinte ».
- $\overline{A_n}$ l'évènement : « la $n$-ième cible n'est pas atteinte ».
- $a_n$ la probabilité de l'évènement $A_n$
- $b_n$ la probabilité de l'évènement $\overline{A_n}$.

1. Donner $a_1$ et $b_1$.
   Calculer $a_2$ et $b_2$. On pourra utiliser un arbre pondéré.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ : $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$,
   puis : $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$
3. Soit $(U_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ non nul, par $U_n = a_n - \frac{2}{3}$.
   a. Montrer que la suite $(U_n)$ est une suite géométrique.
   On précisera la raison et le premier terme $U_1$.
   b. En déduire l'expression de $U_n$ en fonction de $n$, puis l'expression de $a_n$ en fonction de $n$.
   c. Déterminer la limite de la suite $(a_n)$.
   d. Déterminer le plus petit entier naturel $n$ tel que : $a_n \geqslant 0{,}6665$.

## Exercice 4:

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes :
40 % sont de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.
On admet qu'au début de chaque année :

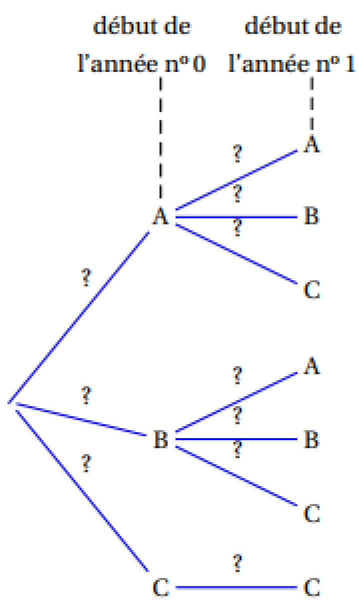
- chaque plante de type A disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type B disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type C disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type B est 0,3.
La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type A est 0,3.
Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.
Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note :

- $A_n$ l'évènement « la plante choisie la $n$-ième année est de type A »,
- $B_n$ l'évènement « la plante choisie la $n$-ième année est de type B »,
- $C_n$ l'évènement « la plante choisie la $n$-ième année est de type C ».

On désigne par $p_n$, $q_n$ et $r_n$ les probabilités respectives des évènements $A_n$, $B_n$ et $C_n$.
Compte tenu de la composition initiale de la végétation (début de l'année $n°0$) on pose : $p_0 = 0,40$, $q_0 = 0,41$ et $r_0 = 0,19$.

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.




2. **a.** Montrer que $p_1 = 0,363$ puis calculer $q_1$ et $r_1$.

   **b.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul,
$$\begin{cases} p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} = 0,3p_n + 0,6q_n \end{cases}$$

3. On définit les suites $(S_n)$ et $(D_n)$ sur $\mathbb{N}$ par $S_n = q_n + p_n$ et $D_n = q_n - p_n$.

   **a.** Montrer que $(S_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. On admet que $(D_n)$ est une suite géométrique de raison 0,3.

   **b.** Déterminer les limites des suites $(S_n)$ et $(D_n)$.

   **c.** En déduire les limites des suites $(p_n)$, $(q_n)$ et $(r_n)$.
   Interpréter le résultat.

## Exercice 5:

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris.
- pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.

1. Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.
   a. Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de $0,92$.
   b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.
   c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage?
2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie? On donnera une valeur approchée à $10^{-2}$ près.
3. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, $0,25$ euro s'il est gris et perd $0,10$ euro s'il ne survit pas.
   Soit $X$ la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté. Déterminer la loi de probabilité de $X$ et son espérance mathématique, arrondie au centime.

## Exercice 6:

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.

Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92 % des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- $F$ l'évènement : « *le jouet est sans défaut de finition* » ;
- $S$ l'évènement : « *le jouet réussit le test de solidité* ».

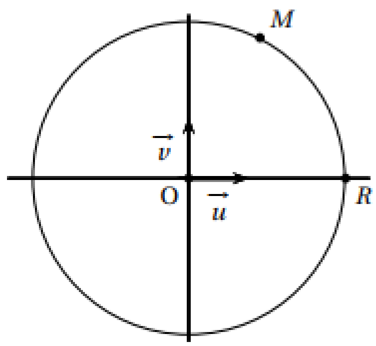
1. Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.
   a. Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.
   b. Démontrer que $p_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right) = \frac{1}{4}$.
   c. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.
2. Calcul de probabilités.
   a. Démontrer que $p(S) = 0,934$.
   b. Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième,)
3. Étude d'une variable aléatoire $B$.
   Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 €, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 €.
   On désigne par $B$ la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.
   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $B$.
   b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $B$.
4. Étude d'une nouvelle variable aléatoire. On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets.
   On désigne par $X$ la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.
   Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.

# Consolidation 7 : Complexes

## Exercice 1:

**Partie A**

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ on a placé un point $M$ d'affixe $z$ appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point $R$ intersection du cercle de centre O passant par $M$ et du demi-axe $\left[O\ ;\ \vec{u}\right)$.




1. Exprimer l'affixe du point $R$ en fonction de $z$.

2. Soit le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par

$$z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z+|z|}{2}\right).$$

Reproduire la figure sur la copie et construire le point $M'$.

**Partie B**

On définit la suite de nombres complexes $(z_n)$ par un premier terme $z_0$ appartenant à $\mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel $n$, par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de $z_0$.

1. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand $z_0$ est un nombre réel négatif?
2. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand $z_0$ est un nombre réel positif?
3. On suppose désormais que $z_0$n'est pas un nombre réel.
   a. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ ?
   b. Démontrer cette conjecture, puis conclure.

## Exercice 2:

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

**Partie A : propriétés du nombre j**

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

   **b.** Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.
2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.
3. Démontrer les égalités suivantes :
   **a.** $j^3 = 1$ ;
   **b.** $j^2 = -1 - j$.
4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et $j^2$ dans le plan.
   Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

**Partie B**

Soit $a$, $b$, $c$ trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres $a$, $b$, $c$ dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = j(c - b)$.
2. En déduire que AC = BC .
3. Démontrer l'égalité : $a - b = j^2(b - c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.*

## Exercice 3 :

**Les questions 1. et 2. de cet exercice pourront être traitées de manière indépendante.**

On considère la suite des nombres complexes $(z_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par

$$z_n = \frac{1+i}{(1-i)^n}.$$

On se place dans le plan complexe d'origine O.

1. Pour tout entier naturel $n$, on note $A_n$ le point d'affixe $z_n$.
   **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $\frac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.
   **b.** Démontrer alors que, pour tout entier naturel $n$, les points O, $A_n$ et $A_{n+4}$ sont alignés.
2. Pour quelles valeurs de $n$ le nombre $z_n$ est-il réel?

## Consolidation 8 : Combinaisons

**Exercice 1**

Une urne A contient trois boules : une rouge, une bleue et une noire.
Une urne B contient trois boules : une rouge et deux noires.
Une urne C contient trois boules : deux bleues et une noire.
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
On tire une boule, au hasard, de chaque urne.

1. a) Quelle est la probabilité $p_0$ de n'obtenir aucune boule noire ?
   b) Quelle est la probabilité $p_1$ d'obtenir exactement une boule noire ?
   c) Quelle est la probabilité $p_2$ d'obtenir exactement deux boules noires ?
   d) Quelle est la probabilité $p_3$ d'obtenir trois boules noires ?

2. Si on tire exactement une boule noire, on perd un point.
   Si on tire zéro ou deux boules noires, on gagne zéro point.
   Si on tire trois boules noires, on gagne trois points.
   a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui à tout tirage associe le gain réalisé ?
   b) Calculer l'espérance mathématique de X.
   La règle du jeu est-elle favorable au joueur ?

**Exercice 2**

On considère un jeu de 32 cartes. On tire simultanément 8 huit cartes du jeu.
Déterminer la probabilité des évènements suivants :

A : « obtenir exactement un valet » ;
B : « obtenir exactement trois cœurs » ;
C : « obtenir exactement 8 cartes rouges » ;
D : « obtenir au plus trois dames » ;
E : « obtenir au moins un as » ;
F : « obtenir au moins 6 cœurs » ;
G : « obtenir deux valets, trois dames, un roi et deux as ».
H : « obtenir exactement un valet et trois cœurs ».

## Exercice 3

Une urne contient trois boules vertes portant le numéro 0, deux boules rouges portant le numéro 5 et une boule noire portant la lettre « **a** ».
(« **a** » est un entier naturel non nul, différent de 5 et de 10).
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
Un joueur tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il tire :
   a) trois boules de la même couleur ;
   b) trois boules de couleurs différentes ;
   c) deux boules et deux seulement de la même couleur.
2. Le joueur reçoit, en \$, la somme des numéros marqués sur les boules tirées.
   Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de a.
   c) Calculer a pour que l'espérance de gain du joueur soit de 20 \$.

## Exercice 4

Un jeu consiste à tirer simultanément trois boules d'une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

- Si les trois boules tirées sont rouges, le joueur gagne 100 € ;
- Si exactement deux boules tirées sont rouges, il gagne 15 € ;
- Si une seule boule est rouge il gagne 4 €.
- Dans tous les autre cas, il ne gagne rien.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le gain en euros du joueur lors d'un jeu.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b) Pour un jeu, la mise est de 10 €. Le jeu est−il favorable au joueur ?
c) Pour l'organisateur, le jeu ne s'avérant pas suffisamment rentable, celui−ci envisage deux solutions :
   - Soit augmenter la mise de 1 €, donc passer à 11 € ;
   - Soit diminuer chaque gain de 1 €, c'est-à-dire ne gagner que 99 €, 14 € ou 3€.

   Quelle est la solution la plus rentable pour l'organisateur ?

**Exercice 5**

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes.

Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1. Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisi.

On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie. On considère les événements suivants :

C1 : « L'enfant choisit la boîte cubique »,
C2 : « L'enfant choisit la boîte cylindrique »,
R : « L'enfant prend une bille rouge »,
V : « L'enfant prend une bille verte ».

a) Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.
b) Calculer la probabilité de l'événement R.
c) Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?

## Contrôle 13 Octobre 2016 (20 pts)

**I.** Déterminer le domaine de définition de chacune de ces fonctions :

$f(x) = \frac{\sqrt{-5-E(3x-10)}}{E^2(x)-1}$ $\qquad\qquad$ $g(x) = \frac{1}{\sqrt{E(\sin(x))-0{,}5}}$

**(3 pts)**

**II.** Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :

Pour tout entier naturel $n$, $T_n = 3^{6n+2} - 2$ est divisible par 7.

**(3 pts)**

**III.** Soit $a$ un réel et $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 3x^4$ et $g(x) = 4x^3 - a$
On note $C_f$ et $C_g$ les courbes représentatives respectives de $f$ et $g$.

1. Démontrer que l'équation $3x^4 - 4x^3 + 1 = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer, selon les valeurs du réel $a$, le nombre de points d'intersection des courbes $C_f$ et $C_g$.

**(5 pts)**

**IV.** Soit $F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{\sin(\pi t)\, dt}{\left(1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)^2}$.

5. Déterminer les valeurs de $F(-1)$ et de $F(1)$.
6. Calculer $F(0)$,
7. Montrer que $F$ admet un seul extrémum sur [-1 ;1].
8. Montrer que l'équation $F(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur [-1 ;1].

**(4 pts)**

**V.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n(x) = x, cos(x), \sin^n(x)$ et la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par $I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$.

1.
   a. Étudier le sens de variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*,}$
   b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$ .
   c. En déduire que la suite $(I_n)$ converge.
2. a. Montrer que, sur [0 ;1], $0 \leq f_n(x) \leq \cos(x), sin^n(x)$.
   b. En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{sin^{n+1}(1)}{n+1}$.
   c. En déduire la limite de la suite $(I_n)$.
3. Calculer $I_1$. (On donnera sa valeur exacte). **(5 pts)**

**Bonus :** **(+1pt) Problème ouvert**

Trouver le réel $b$ tel que l'aire comprise entre les paraboles d'équations respectives $y = b - \frac{1}{2}x^2$ et $y = \frac{1}{2}x^2$ dans un repère orthonormé soit égale à $\frac{32}{3}$ unités d'aire de ce repère.

## Contrôle 3 Novembre 2016 (20 pts)

I) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\sqrt{(8-x)(2x-4)} + 2 - \sqrt{x^2} = 0.$

***(2 pts)***

II) Sans avoir recours à la règle de l'hôpital, calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin(2x) - \sqrt{3}}{\pi - 6x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{81x^2 - 42x + 7} + 9x$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{-51x - 2} - 7}{2 - \sqrt{3x^2 + 1}}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - \cos(x)}}{\sin(x).\cos(x) + \left(\dfrac{1}{\cos^2(x)} - 1\right)}$

***(7 pts)***

III) **Partie A :**

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{5x-4}{2x-1}$,

e) Déterminer le domaine de définition de la fonction $f$.
f) Calculer la limite de $f$ aux bornes de son domaine et déterminer les éventuelles asymptotes à la courbe représentative de $f$.
g) Étudier les variations de la fonction $f$.
h) Tracer la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\ \vec{j})$.

**Partie B :** Soit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ donnée par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{5}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{2u_n - 1} \quad pour\ n \geq 1 \end{cases}$$

a) Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul , $u_n \geq 2$.
b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

c) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.
d) Calculer sa limite.
e) Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul,
$u_n = 2 + \frac{1}{3^n - 1}$. ***(8 pts)***

IV) Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ donnée par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) u_n \quad pour \;\; n \geq 2 \end{cases}$$

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
2. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est Vraie ou Fausse.
   Justifier quand c'est vrai et donner un contre-exemple quand c'est faux.

   a. Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{n}{(n-1)!}$
   b. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$.
   c. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est minorée par 0.
   d. La suite $(u_n)$ est décroissante à partir du rang $n = 2$.
   e. Soit la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ donnée par $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.
   La suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

***(7 pts)***

**<u>Bonus :</u>(+1 pt) Problème ouvert**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$u_0 = 0$, $u_1 = 0\ 72$, $u_2 = 0\ 7272$, $u_n = 0\ 7272 \ldots 72$ (où le nombre 72 est écrit $n$ fois consécutivement après la virgule).

Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ pour $n \geq 1$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui déterminer sa limite.

# <u>Examen de Mathématiques Décembre 2016 :</u> (20 pts)

**<u>Exercice 1 :</u> (4 pts) Complexes et ensemble de points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}\ \vec{v})$.

L'unité graphique est 1 cm.

On considère les points $A$ $B$ et $C$ d'affixes respectives

$z_A = 2 - 3i$  $z_B = i$  $et$  $z_C = 6 - i$.

On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

**<u>Partie A :</u>**

1. Donner la forme algébrique de $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.
2. En déduire la nature du triangle $ABC$.

**<u>Partie B :</u>** On considère la fonction $f$ qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ distincte de $i$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que $z' = \frac{i(z-2+3i)}{z-i}$,

1. Soit $D$ le point d'affixe $z_D = 1 - i$.
   Déterminer l'affixe du point $D'$ image de $D$ par $f$.
2. a. Montrer qu'il existe un unique point, noté $E$, dont l'image par $f$ est le point d'affixe $2i$. On déterminera l'affixe de $E$.
   b. Démontrer que le point $E$ appartient à la droite $(AB)$,
3. Démontrer que, pour tout point $M$ distinct du point $B$, $OM' = \frac{AM}{BM}$ .
4. Démontrer que pour tout point $M$ distinct du point $B$, on a :
   $\left(\vec{u}\ \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{BM}\ \overrightarrow{AM}\right) + \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.
5. Démontrer que, si le point $M$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$, alors le point $M'$ appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
6. Démontrer que, si le point $M'$ appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point $B$, alors le point $M$ appartient à la droite $(AB)$.

**<u>Exercice 2 :</u> (5 pts) Exponentielle et réciproque**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{1+4e^{-\frac{x^2}{2}}}$

On notera $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath}\ \vec{\jmath})$.

1. Étudier la parité de $f$.
2. Calculer la limite de $f$ au voisinage de $+\infty$.
3. a. Montrer que $f(x) - x = \dfrac{-4x{,}e^{-\frac{x^2}{2}}}{1+4{,}e^{-\frac{x^2}{2}}}$

   b. En déduire la position relative de $(C_f)$ et de la droite (d) d'équation $y = x$.
4. a. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $0 < \dfrac{x}{2}, e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \dfrac{x^2}{2}, e^{-\frac{x^2}{2}}$

   b. En déduire la limite à $+\infty$ de $\dfrac{x}{2}, e^{-\frac{x^2}{2}}$.

   c. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique à $(C_f)$ au voisinage de $+\infty$. (On pensera à utiliser le résultat de la question 4.b.)
5. Étudier le sens de variations de la fonction $f$ sur $[0;+\infty[$ en déduire le tableau de variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.
6. Écrire l'équation de la tangente $(T)$ à $(C_f)$ au point d'abscisse 0.
7. Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$. (On ne demandera pas son expression)
8. Tracer $(C_f)$, $(d)$, $(T)$ et $(C_{f^{-1}})$ dans un même repère orthonormé. (on repassera $(C_f)$ en gris et $(C_{f^{-1}})$ en bleu.
9. Calculer $= \displaystyle\int_0^3 \frac{x}{1+4e^{-\frac{x^2}{2}}}\,dx$ . (Vérifier que $I \approx 2\ 93$)
10. Donner une interprétation géométrique de $I$.
11. En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimité par $(C_f)$, $(C_{f^{-1}})$ et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 3$.
12. Calculer $\mathcal{A}$ autrement, sans avoir à utiliser la valeur de $I$.

**<u>Exercice 3 :</u> (4 pts) Intégrale fonction de sa borne supérieure et intégration par partie.**

On considère une fonction $f$ dérivable sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.

On donne son tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1+e^{-2}$ | $\searrow$ | $1$ |

Soit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_0^x f(t)dt$.

**<u>Partie A :</u>**

1. En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variations de la fonction $f$, tracer une courbe (C) susceptible de représenter $f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm sur l'axe des abscisses et de 2 cm sur l'axe des ordonnées.
2. Interpréter graphiquement le nombre $g(2)$.
3. Montrer que $0 \leq g(2) \leq 2\ 5$.
4. Soit $x$ un réel supérieur ou égal à 2.
   a. Encadrer $f(t)$ pour $t \in [2;+\infty[$.
   b. En déduire que $\int_2^x f(t)dt \geq x-2$.
   c. En déduire que $g(x) \geq x-2$.
   d. En déduire la limite de la fonction $g$ en $+\infty$.
5. Etudier le sens de variations de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$. (On ne demandera pas son tableau de variations).

**<u>Partie B :</u>** On admet que $f(t) = (t-1)e^{-t} + 1$

1. Exprimer, en fonction de $x$, l'intégrale : $\int_0^x (t-1)\, e^{-t} dt$
2. En déduire, que pour tout réel $x$, $g(x) = x(1-e^{-x})$.
3. En déduire la limite de la fonction $g$ à $-\infty$.

**<u>Exercice 4 :</u> (5 pts) Logarithme népérien et suite.**

1.a) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ on a : $\ln(1+x) \leq x$,

b) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ on a : $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x)$.

c) En déduire que, pour tout réel $x \geq 0$ on a : $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$

2. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier $n \geq 1$ :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right),\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right),\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

On pose, pour tout entier $n \geq 1$ : $v_n = ln\,(u_n)$.

En utilisant les questions 1.c) et 2), montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$ :

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

4. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**<u>Exercice 5 :</u> (2 pts) Prise d'initiative**

On note $j$ le nombre complexe de module 1 et dont $\frac{2\pi}{3}$ est un argument.

1) a. Donner une forme exponentielle de $j$.
   b. Vérifier que $j^2 = \overline{j}$
   c. En déduire que $1 + j + j^2 = 0$.
   d. Calculer $j^3$.

*2) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit trois points $A$ $B$ et $C$ deux à deux distincts, d'affixes respectives $a$ $b$ et $c$.

Montrer que le triangle $ABC$ est équilatéral direct si, et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.

## Contrôle 2 Février 2017 (20 pts)

**Exercice 1 : (3.5 pts)**

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, un test de dépistage est mis au point.

Les essais sur un échantillon d'animaux dont 1% est porteur de la maladie ont permis d'établir les probabilités suivantes sur la population entière :

- si un animal est porteur de la maladie, la probabilité que le test soit positif est 0,85.
- Si un animal est sain, la probabilité que le test soit négatif est 0,95.

On note les événements :

$M$ : « L'animal est porteur de la maladie ».

$T$ : « Le test est positif ».

1. Un animal est choisi au hasard.
   a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
   b) Montrer que la probabilité pour que ce soit un test positif est 0,058.
   c) Le test d'un animal est positif, quelle est la probabilité pour qu'il soit effectivement porteur de la maladie ?

2. On choisit dix animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer ces choix comme indépendants.
   Soit $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre d'animaux ayant un test positif parmi les dix animaux choisis.
   a) Quelle est la loi de probabilité de $X$ ?
   b) Quelle est la probabilité d'avoir exactement 3 bovins à test positif ?
   c) Quelle est la probabilité d'avoir au moins 4 bovins à test positif ?

**<u>Exercice 2 :</u> (3.5 pts)**

Dans un lycée, toutes les semaines, on fait appel à un technicien pour l'entretien de la photocopieuse.

On a pu constater que :

- le technicien vient la première semaine.
- s'il intervient la semaine $n$, alors la probabilité qu'il intervienne la semaine $n+1$ est 0,85.
- s'il n'intervient pas la semaine $n$, la probabilite qu'il intervienne la semaine $n+1$ est 0,1.

On note :

- $A_n$ l'événement « Le technicien intervient la semaine $n$ ».
- $p_n$ la probabilité de $A_n$.

a) Quelle est la valeur de $p_1$ ?

b) Exprimer $P(A_{n+1} \cap A_n)$ puis $P(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$ en fonction de $p_n$.

c) En déduire l'expression de $p_{n+1}$ en fonction de $p_n$.

d) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ non nul par :

$u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

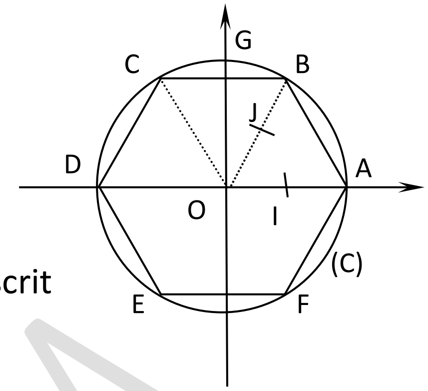
Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et préciser sa raison.

En déduire l'expression de $u_n$ puis de $p_n$ en fonction de $n$.

e) Calculer la limite de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'interpréter.

f) Au bout de combien de semaines la probabilité que le technicien intervienne deviendra-t-elle strictement inférieure à $\frac{1}{2}$ ?

**Exercice 3: (8 pts)**




Dans un plan orienté on donne un hexagone régulier direct

ABCDEF de centre O, tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}$ (2π).

On appelle qu'un hexagone régulier est un polygone à 6 côtés inscrit

dans un cercle dont tous les côtés sont égaux et tous

les angles au centre sont égaux.

(C) est le cercle circonscrit à cet hexagone.

I et J sont les milieux respectifs de [OA] et [OB].

Soit S la similitude qui transforme A en B et B en J.

1) a) Déterminer le rapport et un angle de S.
   b) Démontrer que S(D) = A. Trouver S(O) et vérifier que S(C) = I.
   c) Déterminer l'image de l'hexagone ABCDEF par S.

2) Le cercle (C') est l'image de (C) par S.

   a) Déterminer le cercle (C').
   b) Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie $h$ qui transforme (C) en (C').
   c) Déterminer le centre et le rapport d'une autre homothétie $h'$ qui transforme (C) en (C').

3) G est le milieu de l'arc BC sur le cercle (C).
   Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG})$.

   a) Trouver l'affixe de chacun des points B, C, E et F.
   b) Écrire la forme complexe de S et déduire l'affixe de son centre W.
   c) H est le point de rencontre de [AJ] et [BI].
      Déterminer le point H' image de H par S.

## <u>**Test de Mathématiques 10 Février (5 pts)**</u>

Une urne A contient 5 boules rouges, 2 boules bleues et 3 boules vertes.
Une urne B contient 6 boules rouges, 3 boules bleues et une boule verte.

A. Un jeu consiste à lancer un dé tétraédrique équilibré (dé équilibré à 4 faces numérotées de 1 à 4).
Si le joueur obtient un diviseur de 6, il tire 3 boules simultanément de l'urne B, sinon il tire 3 boules simultanément de l'urne A.

On considère les événements suivants :
$E$ « Obtenir des boules de la même couleur ».
$F$ « Obtenir au moins deux boules de couleurs différentes ».
$G$ « Obtenir au moins deux boules bleues ».

1. Calculer $P(E)$.
2. Calculer $P(F/G)$.
3. Calculer $P(\bar{G}/F)$.
4. On répète $n$ fois l'expérience « Lancer le dé et tirer 3 boules » et à chaque fois les deux urnes reprennent leurs configurations initiales avant de procéder au prochain tirage.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois « les 3 boules de la même couleur » ?
   b. Pour quelles valeurs de $n$ a-t-on cette probabilité strictement supérieure à 0,99 ?

B. Dans cette partie on tire 3 boules simultanément de l'urne B.
Un joueur pratique le jeu suivant : Il tire 3 boules simultanément de l'urne B ;
- Si la boule verte figure parmi les 3 boules tirées, il gagne $d$ \$.
- S'il obtient 3 boules de la même couleur il perd 10 \$.
- Sinon il gagne 3 \$ pour chaque boule bleue tirée et perd 2 \$ pour chaque boule rouge tirée.

Soit $X$ la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.
1. Déterminer la loi de probabilité de $X$.
2. Pour quelles valeurs de $d$ ce jeu favorise-t-il le joueur ?

# <u>Contrôle de Mathématiques</u> (10 Octobre 2017)

**<u>Exercice 1</u> : (6 pts)**
Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^3, (tan^2(x) + 1)dx \qquad J = \int_0^{\pi} sin(2x)\sqrt{1 + cos^2(x)}\ dx$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(x)dx \qquad L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{cos(2x)dx}{\left[\left(cos(x) + sin(x)\right)^2\right]^{17}}$$

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x, cos^2(x)dx$$

**<u>Exercice 2</u> : (3 pts)**
Soit $F(x) = \int_2^x (t^4 - 3t^2 - 4)dt$

3. Déterminer les extrémums de la fonction $F$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer les abscisses des points d'inflexions de $F$ sur $\mathbb{R}$.

**<u>Exercice 3</u> : (4 pts)**
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \cos^4(x) - \cos^2(x)$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer $f''(x)$ et l'exprimer en fonction de $\cos(x)$.
3. En déduire que $f''(x) + 16f(x) = -2$.
4. En déduire la valeur exacte de $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

**Exercice 4 : (6 pts)**

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ donnée par : $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

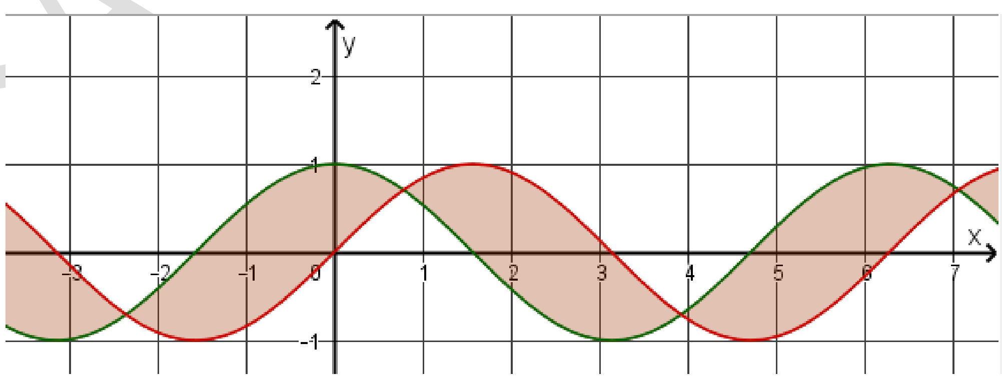
1) a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
   b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
   c. Montrer que pour tout $n \geq 1$ $\frac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$.
   d. En déduire un encadrement de $u_n$.
   e. Calculer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
2) Pour tout entier naturel $n \geq 3$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^{n-2},\sqrt{1+x^2}dx$$

   a. Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 3$ on a :
   $u_n + u_{n-2} = I_n$
   b. À l'aide d'une intégration par parties portant sur $I_n$, et en ayant recours à la question précédente, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$ on a : $n, u_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$.
   c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a :
   $(2n-1), u_n \leq \sqrt{2}$
   d. Soit $v_n = n, u_n$
   En utilisant les questions 1.d) et 2.c), encadrer la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ et calculer sa limite.

**Exercice 5 : (1 pt)**

Les courbes des fonctions sinus et cosinus sont représentées dans le repère orthonormé ci-dessous.




Sur une période, quelle est l'aire du domaine coloré ?

# <u>Contrôle de Mathématiques</u> (7 Novembre 2017)

## <u>Exercice 1</u> : (4 pts)

Sans avoir recours à la règle de l'Hôpital, calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{4\cos^2(x) - 1}{3x - \pi}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x.\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} 4x + \sqrt{16x^2 + 7x - 1}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{E}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)\right)}{E(\sin(x))}$

## <u>Exercice 2</u> : (4 pts)

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :

1) pour tout entier naturel $n$, $4^n + 6n - 1$ est un multiple de 9.
2) pour tout entier naturel $n \geq 1$ $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots, +(2n - 1) = n^2$

## <u>Exercice 3</u> : (5 pts)

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x}{x^2 - 4}$

g. Écrire $f$ sous la forme $f(x) = ax + \dfrac{bx}{x^2 - 4}$.
h. Calculer les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition.
i. Déterminer l'équation de la droite $(\Delta)$ asymptote oblique à la courbe représentative de $(C_f)$ à $+\infty$ et à $-\infty$.
j. Étudier les variations de $f$.
k. Montrer que $(C_f)$ rencontre $(\Delta)$ en un point dont on déterminera les coordonnées.
l. Représenter graphiquement $(C_f)$ et $(\Delta)$ dans un repère orthogonal **sur le papier quadrillé donné.**
**On prendra 2 cm pour unité graphique en abscisse et 1 cm pour unité graphique en ordonnée.**

**Exercice 4 : (3 pts)**

Soit $f(x) = sin(x), cos(x)$ et $g(x) = -\frac{\pi, x}{4}$

On note $(C_f)$ et $(C_g)$ leurs courbes représentatives respectives.

Montrer que $(C_f)$ et $(C_g)$ ont un unique point d'intersection sur $\left[\frac{-\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right]$.

**Exercice 5 : (4 pts)**

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}{u_n}^2 + 2 \end{cases}$$

1. Soit $(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$.
   Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.

2. a) Montrer que, pour tout réel $x$, $f(x) \geq x + 1$.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 1$.
   c) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 \geq n$.
   b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

## Examen de Mathématiques : (Décembre 2017)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision dans le raisonnement entreront pour une bonne part dans l'appréciation de la copie.

**Exercice 1 : (3 pts) Questions indépendantes**

1) Résoudre :

   a) $e^{2\ln(x-3)} = \ln\left(e^{x+17}\right)$.

   b) $e^{x} - 6e^{-x} \geq -1$.

   c) $\ln(2x+1) + \ln(x+4) \leq 2ln2$

   d) $3\ln^2(x-1) - 2\ln(x-1)^2 + 1 = 0$

2) Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$I = \int_{e}^{e^2} \frac{\ln x - 1}{x\ln x}dx \qquad J = \int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{\cos(\pi \ln x)}{x}dx$$

$$K = \int_{-\ln 4}^{-\ln 3} \frac{e^{2x}+2}{e^{2x}+1}dx$$

**Exercice 2 : (3,5 pts) Questions à Choix Multiples**

Pour chacune des questions suivantes, il y a **une seule** bonne réponse.
Indiquer-la, **en justifiant.**
**Toute réponse non justifiée ne sera pas notée.**
Soit $z$ un nombre complexe :

**1.** Si $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i\sqrt{3}}$ alors $\arg(z) =$

a) $\frac{13\pi}{12}\ (2\pi)$ b) $\frac{11\pi}{12}\ (2\pi)$ c) $\frac{5\pi}{12}\ (2\pi)$

**2.** Si $arg(z) = -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$ alors :

a) $|z| = Im(z)$ b) $\arg(i.\bar{z}) = 0\ (2\pi)$ c) $|z - i| = 1 + |z|$

**3.** On donne les points $A(-2 + 3i)$, $B(4 - i)$ et $C(8 + 5i)$. Alors le triangle $ABC$ est :

a) équilatéral. b) rectangle isocèle en $B$. c) semi-équilatéral.

**4.** Si $|z - 2 + i| = |8 - 6i|$ et soit $A(2 - i)$ et $B(8 - 6i)$ alors l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ est :

a) la médiatrice de $[AB]$.
b) le cercle d'équation $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 100$,
c) le cercle d'équation $z = 2 - i + 10e^{i\theta}$ avec $\theta \in IR$,

**5.** Si $|z + 1 - 2i| \leq 2$ et $|z + 1 - 4i| = |z - 1 - 2i|$ alors l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ est :

a) une demi-droite. b) une droite. c) un segment.

**__Exercice 3 :__ (3 pts)**

On désigne par $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par $f'$ sa fonction dérivée.

Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

(1) pour tout nombre réel $x$, $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$.
(2) $f'(0) = 1$.
(3) la fonction $f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. a. Démontrer que, pour tout nombre réel $x$, $f'(x) \neq 0$.
   b. Calculer $f(0)$.
2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que $f''(x) = f(x)$ où $f''$ désigne la dérivée seconde de la fonction $f$.
3. On désigne par $u = f' + f$ et $v = f' - f$.
   a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.
   b. Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$,
   c. En déduire les fonctions $u$ et $v$.
   d. En déduire que pour tout réel $x$, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
4. a. Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

5. Soit $m$ un nombre réel.
   a. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$,
   b. En déduire que $(e^2)^\alpha - 2m, e^\alpha - 1 = 0$.

**<u>Exercice 4 :</u> (7 pts)**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$

On note $(C_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

**<u>Partie A :</u>**

1. a. Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.
   b. Montrer que la droite $(D)$ d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe $(C_f)$.
   c. Étudier la position relative de $(D)$ et de $(C_f)$.
   d. Montrer que pour tout réel $x$, $f(x) = ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$.
   e. En déduire la limite de $f$ en $-\infty$.

2. a. On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction .
   Montrer que pour tout $x$ réel, $f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$.
   b. En déduire les variations de la fonction .

**<u>Partie B :</u>**

Soit $n$ un entier naturel non nul.

On appelle $d_n$ , l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $(C_f)$, la droite $(D)$ d'équation $y = \frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$,

1. Justifier que pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$d_n = \int_0^n ln(1 + e^{-x})dx$$

2. a. Montrer que pour tout réel $x$, $ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$ .
   b. Montrer que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, $d_n \leq 1$.
   c. Montrer que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, $d_n$ est croissante.
   d. En déduire que la suite $(d_n)$ est-elle convergente pour $n \geq 1$.

**Partie C :** Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe $(C_f)$.

On note $(T)$ la tangente à la courbe $(C_f)$ au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de $(T)$.
2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
   Soient $M$ et $N$ deux points de la courbe $(C_f)$ d'abscisses non nulles et opposées.
   Montrer que la droite $(MN)$ est parallèle à la droite $(T)$.

**Exercice 5 : (3,5 pts)**

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels (fractions) qui converge vers $e^2$.

On définit pour tout naturel $n \geq 1$, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n, e^x dx$$

1. Calculer $I_1$.
2. a. Pour $x \in [0;2]$ encadrer $(2-x)^n$.
   b. En déduire que pour $x \in [0;2]$ : $0 \leq \frac{1}{n!}(2-x)^n, e^x \leq \frac{2^n}{n!}, e^x$
   c. Établir alors que pour tout naturel $n \geq 1$, $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2 - 1)$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout naturel $n \geq 1$, $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$
4. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n$.

5. On pose, pour tout entier naturel $n$, $u_n = \frac{2^n}{n\,!}$
   a. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
   b. Prouver alors que pour tout naturel $n \geq 3$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.
   c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$,
   $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}, u_3$
   d. En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.
6. En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$.
7. Justifier alors que : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} = e^2$

**<u>Bonus :</u> (+ 2 pts)**

Soit $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = e^x$.

On note $(C_f)$ et $(C_g)$ les courbes représentatives respectives des fonctions $f$ et $g$ dans un repère orthonormé.

Existe-t-il des droites tangentes communes aux courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle ?

# <u>Contrôle de Mathématiques</u> (25 Janvier 2018)

## <u>Exercice 1</u> : (8 pts)

Les jeunes d'aujourd'hui sont ceux qu'on appelle les enfants de la net-génération. Ils maîtrisent quasiment tout sur internet et sont toujours "online" sur les réseaux sociaux qui se multiplient d'année en année.
Ils préfèrent passer leur temps sur les réseaux sociaux plutôt qu'à étudier.
Pour la plupart les réseaux sociaux occupent tout leur temps.

Les enfants et adolescents très souvent connectés sur Facebook sont moins bons à l'école.
64 % des jeunes se connectent quotidiennement pour de longues heures aux réseaux sociaux dont 95 % ont de mauvais résultats à l'école.

L'utilisation de Facebook entrave surtout la concentration.
Des heures perdues, à « scroller » à l'infini, à passer de profil en profil, de photo en photo. Pourtant, demain, ils feront exactement la même chose. Et le surlendemain aussi. En oubliant à chaque fois cette impression qu'on a perdu son temps pour rien.
Conséquence moins de temps pour les études et baisse du niveau à l'école.
27% des jeunes ne se connectent pas quotidiennement pour de longues heures aux réseaux sociaux et ont de bons résultats à l'école.

On choisit un jeune au hasard.

On considère les événements suivants :

C : « Le jeune est quotidiennement connecté pour de longues heures aux réseaux sociaux ».

B : « Le jeune a de bons résultats à l'école ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.

2. Le jeune choisi ne se connecte pas quotidiennement pour de longues heures aux réseaux sociaux. Quelle est la probabilité qu'il ait de bons résultats à l'école ?

3. Quel est la probabilité que le jeune choisi ait de mauvais résultats à l'école ?

4. Justifier par le calcul la phrase suivante :

   « Si le jeune choisi a de mauvais résultats à l'école, dans environ 87 % des cas il se connecte quotidiennement pour de longues heures aux réseaux sociaux ».

5. Dans la classe de SG à la Sagesse Brasilia, on choisit 10 élèves.
   On suppose que les choix sont indépendants.
   Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 3 d'entre eux qui se connectent pour de longues heures aux réseaux sociaux et qui ont de mauvais résultats à l'école ?

**Exercice 2 : : (4 pts)**

$\boldsymbol{f}$ est la fonction définie sur IR à valeurs dans $]0\,;+\infty[$ et donnée par

$f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{e^{x}+2}{e^{-x}}$.

d. Étudier les variations de la fonction $f$.
e. Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$.
f. On admet que $(C_f)$ et$(C_{f-1})$ n'ont aucun point d'intersection. Tracer $(C_f)$ et $(C_{f-1})$ dans un même repère othonormé.
g. Écrire l'équation de la tangente à $(C_f)$ au point d'abscisse 0.
h. En déduire l'équation de la tangente à $(C_{f-1})$ au point d'abscisse 3.
i. Déterminer l'expression de $f^{-1}$.

**<u>Exercice 3 :</u> (8 pts)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(0; \vec{u}\ \vec{v})$.

**L'unité graphique est de 2 cm.**

On considère les points $A$ $B$ et $C$ d'affixes respectives $z_A = i$ $z_B = 2i$ et $z_C = 1$.

On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

On considère la transformation $f$ qui, à tout point $M$ du plan d'affixe $z$, distinct de $A$, associe le point $M'$ du plan d'affixe $z' = \frac{2iz}{z-i}$.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par $f$.
2. Déterminer, sous forme algébrique, les affixes des points B' et $C'$, images respectives des points $B$ et $C$ par $f$.
3. a. Montrer que, pour tout point $M$ distinct de $A$, l'affixe z' de $M'$ vérifie l'égalité $z' - 2i = \frac{-2}{z-i}$.

   b. En déduire que si le point $M$ appartient au cercle $(C)$ de centre $A$ et de rayon 1, alors son image $M'$ appartient à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

   c. Exprimer une mesure de l'angle $\left(\vec{u}\ \overrightarrow{BM'}\right)$ en fonction d'une mesure de l'angle $(\vec{u}\ \overrightarrow{AM})$.

   d. En déduire que si le point $M$ appartient à la demi-droite d'origine $A$ (et privée de $A$) et faisant un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec $\vec{u}$ , alors son image $M'$ appartient à une demi-droite dont on déterminera l'origine et l'angle qu'elle fait avec $\vec{u}$.

   e. On considère le point $D$ d'affixe $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.
   Vérifier que $D$ appartient au cercle $(C)$,
   Sans avoir à calculer l'affixe de $D'$, construire à la règle et au compas le point $D$ et son image $D'$ par $f$.
   **On laissera apparents les traits de la construction.**

# <u>Contrôle de Mathématiques</u> (15 Février 2018)

**<u>Exercice 1</u> : (4,5 pts)**

Une nouvelle version du jeu UNO comporte 22 cartes réparties ainsi :

- 6 cartes bleues numérotées et 2 cartes actions bleues.
- 5 cartes rouges numérotées et 1 carte action rouge.
- 4 cartes jaunes numérotées.
- 3 cartes vertes numérotée et 1 carte action verte.

1. Un joueur tire simultanément 4 cartes.
   1. On note :
      A l'événement « Obtenir 4 cartes de la même couleur ».
      B l'événement « Obtenir 4 cartes de couleurs différentes ».
      C l'événement « Obtenir au moins 2 cartes actions. »

      a) Calculer P(A) et P(B).
         On donnera tous les résultats sous forme de fractions irréductibles.
      b) Montrer que P(C)= $\frac{991}{7315}$
      c) Calculer la probabilité d'obtenir « 4 cartes de la même couleur sachant qu'on a obtenu au plus 2 cartes numérotées ».
   2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de cartes actions tirées par le joueur.
      a. Déterminer la loi de probabilité de $X$.
      b. Calculer E(X).

**<u>Exercice 2 :</u> (5,5 pts)**

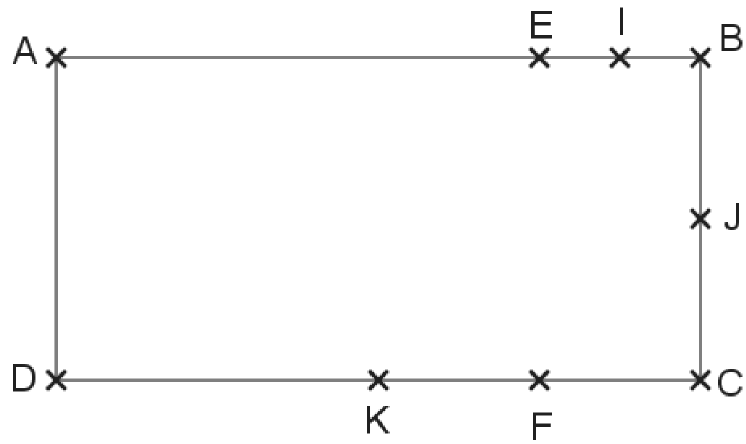
Soit $(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{\sin\ (\ \sin(x)\ )}$.

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction $f$.
2) Étudier sa périodicité et sa parité**.**
3) Montrer que $f'(x) = \dfrac{\boldsymbol{-cos(x)\ ,\ cos(\ sin(x)\ )}}{\boldsymbol{sin^2(\ sin(x)\ )}}$ **.**
4) Étudier les variations de la fonction $f$.
5) Tracer $(C_f)$ la courbe représentative de $f$ sur $[-3\pi\ ;3\pi]$ dans un repère orthogonal.
6) Soit $g(x) = \dfrac{1}{\sin\ (\ \cos(x)\ )}$, comment peut-on déduire $(C_g)$ la courbe représentative de $g$ à partir de celle de $f$ ?

**Exercice 3 :** **(10 pts)**

Dans la figure ci-contre :

- $DCBA$ est un rectangle direct.
- $DC = 4$ et $DA = 2$ .
- $E$ est un point de $[AB]$ tel que $EB = 1$ et $F$ est un point de $[DC]$ tel que $CF = 1$ .
- $I, J$ et $K$ sont les milieux respectifs de $[EB]$ $[BC]$ et $[DC]$.




Soit $S$ la similitude plane directe qui transforme $F$ en $A$ et $E$ en $B$.

1) a) Déterminer le rapport et un angle de $S$.
   b) Montrer que $S(C) = D$.
   c) En déduire $S(B)$.
   d) Déterminer alors $S(I)$.
2) Soit $W$ le centre de la similitude $S$ et soit $h$ la transformation définie par $h = S \circ S$.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h$.
   b) Trouver $h(E)$ et $h(B)$.
   c) Construire alors le point $W$.
   d) Montrer que les points $W$ $I$ et $K$ sont alignés.
   e) Exprimer $\overrightarrow{WK}$ en fonction de $\overrightarrow{WI}$.
3) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(D\ ;\ \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}\quad \frac{1}{2}\overrightarrow{DA})$
   a) Trouver la forme complexe de $S$.
   b) Déterminer l'affixe de $W$.
4) On définit la suite de points $B_n$ par :
   $B_0 = B$ et $B_{n+1} = S(B_n)$ pour tout naturel $n$.

   Soit $\ell_n$ la longueur définie par $\ell_n = B_nB_{n+1}$.
   a) Déterminer le point $B_1$ et calculer $\ell_0$.
   b) Démontrer que $\ell_{n+1} = 2\ell_n$.
   c) Exprimer $\ell_n$ en fonction de $n$ et calculer sa limite.
   d) Exprimer $(\overrightarrow{WB}\ \overrightarrow{WB_n})$ en fonction de $n$.
   Pour quelles valeurs de $n$ les points $W$ $B$ et $B_n$ sont-ils alignés ?

# <u>Contrôle de Mathématiques</u> (15 Mars 2018)

**<u>Exercice 1 :</u> (4 pts)**

Résoudre les équations suivantes :

1) $2\,arctan(x) = \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) - arccos\left(\frac{4}{5}\right)$

2) $arcsin(x) = arcsin\left(\frac{33}{65}\right) - arccos\left(\frac{12}{13}\right)$

3) $arctan(x) = \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) - \arccos\left(\frac{1}{2018}\right)$

**<u>Exercice 2</u> : (3 pts)**

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

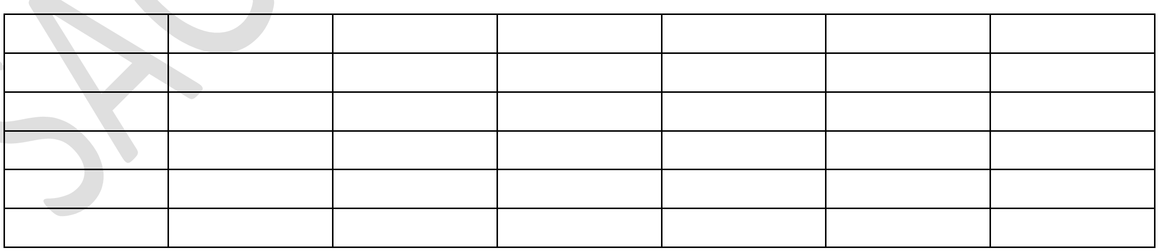
$f(x) = \dfrac{1}{x(9+\ln^2 x)}$ $\qquad g(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right),\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{25-\cos^2(x)}}$ $\qquad h(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}-e^x+\frac{5}{4}}$

**<u>Exercice 3 :</u> (3 pts) Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.**

1. Soit $\quad A = sin\left(15arcsin\left(cos\left(\frac{9\pi}{7}\right)\right) + 16arccos\left(cos\left(\frac{9\pi}{7}\right)\right)\right).$

   alors $A = -cos\left(\frac{9\pi}{7}\right)$

2. Dans la figure-ci-dessous, il y a en tout 587 rectangles.



3. $C_{2018}^{2017} - C_{2019}^{2017} = C_{2018}^{2016}.$

**<u>Exercice 4 :</u> (6 pts)**

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath}\,\vec{\jmath})$, on donne les points :
$F(3;0)$, $F'(-3;0)$ et $L\left(3;\frac{16}{5}\right)$.
On désigne par $(E)$ l'ellipse de foyers $F$ et $F'$ et passant par $L$.

1) a) Calculer $LF + LF'$.
   b) Déterminer les coordonnées des sommets de $(E)$.
   c) Déduire que $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ est une équation de $(E)$ et tracer $(E)$.
2) Soit $(d)$ la droite d'équation $= \frac{25}{3}$.
   a) Que représente la droite (d) pour l'ellipse (E) ?
   b) Ecrire une équation de la tangente $(T)$ à $(E)$ au point $L$.
   c) Démontrer que les droites $(d)$ et $(T)$ se coupent en un point $I$ sur l'axe des abscisses.
3) Calculer l'aire du domaine délimité par l'ellipse $(E)$, la tangente $(T)$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

**<u>Exercice 5 :</u> (4 pts)**
Une urne contient **10 boules** : **5** boules **blanches**, **2** boules **rouges** et **3** boules **vertes**.

1) On tire simultanément et au hasard **3 boules** de cette urne.
   Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   ***A*** : **« Tirer trois boules de la même couleur ».**
   ***B*** **: « Tirer au moins une boule rouge ».**

2) On tire au hasard et successivement **2 boules** de cette urne de la façon suivante :
   On tire une première boule, si elle est blanche on la remet dans l'urne et on en tire une seconde boule.
   Si elle n'est pas blanche, on la garde à l'extérieur de l'urne et on tire une seconde boule.
   On désigne par $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.
   a. Montrer que $(X = 1) = \frac{19}{36}$.
   **b.** Déterminer la loi de probabilité de $X$.

## <u>Contrôle de Mathématiques (11 Octobre 2018)</u>

**<u>Exercice 1</u> : (2,5 pts)**

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x, \tan^n(x)\, dx$

1. Déterminer le sens de variation de cette suite.
2. Montrer qu'elle converge.

**<u>Exercice 2</u> : (1,5 pt)**

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = \int_n^{n+1} (x+1)\sqrt{x}\, dx$

Calculer $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{80}$.

**<u>Exercice 3</u> : (2 pts)**

1. Montrer que l'équation $\tan(x) = -\frac{\pi}{8}\cos(2x)$ admet une unique solution $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.
2. Vérifier que $-\frac{\pi}{8} < \alpha < -\frac{\pi}{16}$.

**<u>Exercice 4</u> : (4 pts)**

Pour tout naturel $n$ non nul, on pose :

$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\, dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^n}\, dx$

a. Démontrer, que pour tout entier naturel $n$ non nul :

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{2n+1}$$

b. En déduire la limite de la suite $(J_n)$.

c. Calculer pour tout naturel $n$, $I_n - J_n$.

d. En déduire la limite de la suite $(I_n)$.

**Exercice 5 : (4 pts)** Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 (-3x^3 - 12x), \sqrt{x^4 + 8x^2 + 2}\, dx \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan(x) + \sin^2(2x)}{\cos^2(x)}\, dx$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5(x)dx$$

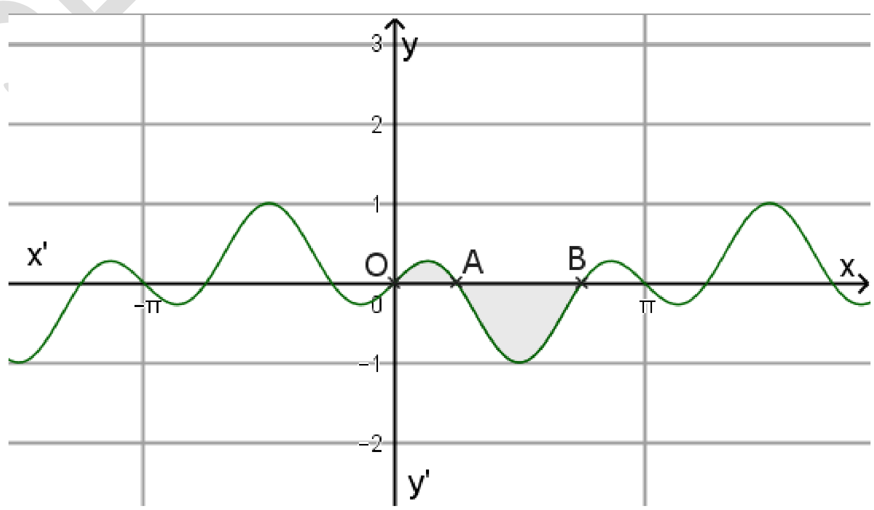
**Exercice 6 : (4 pts)**

Soit $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(x)\, dx$ et $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4(x)\, dx$

5. Montrer que $A - B = \frac{1}{2}$.
6. Soit $f(x) = \sin^4(x)$,
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Calculer $f''(x)$ et l'exprimer en fonction de $\sin(x)$.
   c) En déduire que $f''(x) + 16f(x) = 12\sin^2(x)$.
   d) Calculer alors la valeur exacte de $B$.
7. En déduire la valeur exacte de $A$.

**Exercice 7 : (2 pts)**

Dans le repère orthogonal ci-contre, d'unité graphique 4 cm en abscisse et 1,5 cm en ordonnée, on a représenté la fonction $f$ définie sur $IR$ par :
$f(x) = \sin(x), \cos(2x)$.




5. Déterminer une primitive de $f(x) = \sin(x), \cos(2x)$.
6. Résoudre, dans $IR$, l'équation $\sin(x), \cos(2x) = 0$.
7. En déduire les abscisses des points $A\ et\ B$.
8. Calculer alors, en unités d'aire puis en $cm^2$, l'aire du domaine grisé.

**Bonus : (+ 2 pts)**

Soit $f(t) = \sin(2t)\,,\cos\,(3t)$ et $F(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt$

1. Étudier le sens de variation de $F$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Sachant que :
   - Une valeur approchée de l'aire du domaine délimité par $(C_f)$, $x'Ox$ et les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{6}$ est 0 5.
   - Une valeur approchée de l'aire du domaine délimité par $(C_f)$, $x'Ox$ et les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{6}$ et $x = 0$ est 0 1.

   Dresser le tableau complet de variations de $F$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

   En déduire le signe de $F$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

## Contrôle de Mathématiques (6 Novembre 2018)

### Exercice 1 : (3 pts)

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{E^2(x) - 25} \qquad g(x) = \frac{1}{E\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)} \qquad h(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\sqrt{4 - E(\pi, \cos(\pi x))}}$$

### Exercice 2 : (2 pts)

Soit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

1) Quel est le plus petit terme de cette somme ?
2) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

### Exercice 3 : (5 pts)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{8} \\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n) \end{cases}$

1. Calculer $u_1$.
2. Etudier les variations de la fonction $f$ donnée par $f(x) = x(2 - x)$ sur $IR$.
3. Montrer par récurrence que $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = 1 - u_n$.
   a. Montrer que $v_{n+1} = {v_n}^2$.
   b. Montrer, par récurrence, que $v_n = {v_0}^{2^n}$.
   c. En déduire l'expression de $v_n$ puis celle de $u_n$ en fonction de $n$.
   d. Déterminer la limite de $v_n$ puis celle de $u_n$.

**<u>Exercice 4</u> : (2 pts)** Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x, sin^2(x)dx \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x, \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)} dx$$

**<u>Exercice 5</u> : (3 pts) Vrai ou Faux ?**

Pour chacune des questions suivantes, répondre par Vrai ou Faux en justifiant à chaque fois votre réponse.

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes sont strictement positifs.
Et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $v_n = -\frac{1}{1+u_n}$ pour tout $n$.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est également.

**<u>Exercice 6</u> : (5 pts)**

Soit la fonction $f$ donnée par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 7x - 13}{x - 3}$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f$.
2. Calculer les limites de $f$ aux bornes ouvertes de son domaine de définition.
3. En déduire les éventuelles asymptotes à $(Cf)$ la courbe représentative de $f$.
4. Étudier les variations de $f$.
5. Tracer, soigneusement, $(C_f)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.
6. Soit $g(x) = \frac{-x^2+7|x|-13}{|x|-3}$
   Comment peut-on déduire la courbe représentative de g à partir de celle de $f$ ?

**<u>Bonus</u> (+1 pt)**

Soit la suite $(u_n)_n$ définie, pour tout naturel non nul $n$, par $u_n = \frac{3^n}{n!}$.

En utilisant le théorème des gendarmes, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

# Examen de Mathématiques : (20 pts) (Durée 4 heures)

## Exercice 1 : (2,5 pts)

$g$ est la fonction définie sur $IR$ par $g(x) = x, e^x - 1$.

1. a) Étudier les variations de la fonction $g$.
   b) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha$ tel que $\alpha, e^\alpha = 1$.
   c) Vérifier que $0\ 56 < \alpha < 0\ 57$.
2. Soit $f$ est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^x - \ln(x)$.
   a) Vérifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.
   b) Étudier les variations de la fonction $f$.
   c) Tracer la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé sur le papier millimétré donné.

## Exercice 2 : (1,5 pt)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout naturel $n$ par :

$$u_n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \ldots \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Et soit $v_n = \ln(u_n)$ pour tout naturel $n$.

1) Donner la forme la plus simple de $v_n$ en fonction de $n$,
2) En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

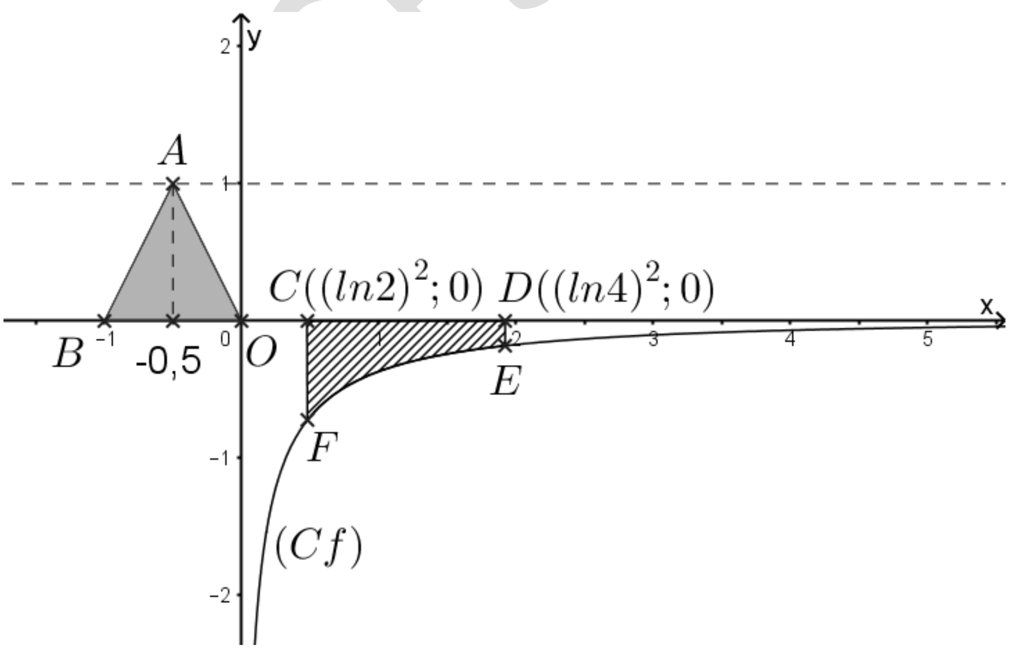
**<u>Exercice 3 :</u> (5 pts)**

Toutes les propositions suivantes **sont vraies**.

Justifier-les en rédigeant soigneusement votre raisonnement et en vous aidant d'un dessin lorsqu'il s'agit d'un ensemble de points.

1. Si $z = \dfrac{-\sqrt{3}-i}{2e^{i\frac{5\pi}{12}}}$ alors pour tout naturel $n$, $z^{4n}$ est un réel.
2. Dans un repère orthonormé, le triangle $ABC$ formé par les points $A(3+i)$, $B(5-2i)$ et $C(8)$ est rectangle isocèle.
3. L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z+1-3i| = 2$ est un cercle.
4. L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $\left|\dfrac{z}{1-z}\right| = 1$ est une droite parallèle à l'axe des imaginaires purs.
5. L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $\begin{cases} |z| \leq 2 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{4}(\pi) \end{cases}$ est un segment privé d'un point.
6. L'équation $z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)z + 1 = 0$ admet deux racines complexes chacune de module 1.
7. $f$ est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x},e^{\sqrt{x}}}$ .

   Si $x_F = x_C$ et $x_E = x_D$, alors l'aire du domaine hachuré est égale à l'aire du triangle $OAB$,



**<u>Exercice 4</u> : (5 pts)**

Pour chacune des questions suivantes, il y a **une seule bonne réponse**, indiquer-la et en donner une démonstration. **(On détaillera toutes les étapes de résolution).**

On écrira le numéro de la question et la lettre de la réponse qui lui convient.

*Une réponse non justifiée ne sera pas notée.*

| N° | Questions | Réponse A | Réponse B | Réponse C |
|---|---|---|---|---|
| 1 | L'ensemble solution de l'inéquation : $2e^{-x} \geq 6e^{x} + 1$ est : | $]-\infty; -\ln(2)]$ | $\left]-ln(2)\,;-ln\left(\frac{2}{3}\right)\right[$ | $[-\ln(2)\,;+\infty[$ |
| 2 | $A = \int_{\ln\left(\frac{1}{\pi}\right)}^{\ln(\pi)} (e^{x} - e^{-x}), \sin^2(\pi x)dx =$ | $2\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right)$ | $0$ | $\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{\pi}\right)$ |
| 3 | L'ensemble solution de l'inéquation : $\ln^2(x-4) + \ln(4-x)^2 - 8 \geq 0$ est : | $]4; 4+e^{-4}] \cup [4+e^{2}; +\infty[$ | $[4+e^{-4}\,;\ +\infty[$ | $]0; 4+e^{-4}] \cup [4+e^{2}; +\infty[$ |
| 4 | $B = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x,(\ln^2(x)+1)^3} dx =$ | $0$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{6^{-4}}{4e}$ |
| 5 | L'ensemble solution de l'équation : $e^{x} - e^{3} = 1 - e^{3-x}$ est : | $S = \{3\,; e^{3}\}$ | $S = \{0\,; e^{2}\}$ | $S = \{0\,; 3\}$ |
| 6 | $C = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)} dx =$ | $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)$ | $\frac{\pi^2}{8} + \ln(2)$ | $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$ |

**<u>Exercice 5 :</u> (6 pts)**

**<u>Partie A</u>**

Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f\,(x) = \frac{1+2lnx}{x^2}$.

Et soit $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$.
2. En déduire que $(C_f)$ a deux asymptotes que l'on déterminera.
3. Calculer la dérivée $f\,'$ de $f$ et étudier les variations de $f$.
4. Soit $I$ le point d'intersection de $(C_f)$ avec l'axe des abscisses.

   Déterminer les coordonnées de $I$.
5. Pour tout $x$ de $]0\,;\,+\infty[$, on pose $g\,(x) = 1 - x + 2ln\,x$.

   a. Étudier les variations de la fonction $g$.

   b. Calculer $g(1)$.

   c. Montrer que l'équation $g\,(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $]2;\,4[$. (On donne $\alpha \simeq 3\,51$).
6. Soit $(C_h)$ la courbe représentative de la fonction $h$ définie sur

   $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x}$.

   a. Vérifier que $f\,(x) - \frac{1}{x} = \frac{g\,(x)}{x^2}$.

   b. En déduire que $(C_f)$ et $(C_h)$ se coupent en deux points.

   c. Montrer que, pour tout réel $x \geq 4 \quad 0 < f\,(x) \leq \frac{1}{x}$.

   d. Tracer $(C_f)$ dans un repère orthonormé sur le papier millimétré donné.

**<u>Partie B</u>**

1. Soit $D$ la partie du plan délimitée par la courbe $\left(C_f\right)$ l'axe des abscisses et les droites d'équations $\boldsymbol{x = 1}$ **et** $\boldsymbol{x = \alpha}$ ($\alpha$ étant le réel défini dans la partie A).

Montrer en utilisant une intégration par parties que l'aire de $D$, notée $A(\alpha)$ en unités d'aire, est $A(\alpha) = \frac{-3+3\alpha-2\ln(\alpha)}{\alpha}$ .

2. Soit la suite $(I_n)$ définie pour $n \geq 1$ par : $I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.

   a. En exploitant la partie A, montrer que, pour tout $n \geq 4$ :

   $0 \leq I_n \leq ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ .

   b. En déduire que la suite $(I_n)$ converge et déterminer sa limite.

   c. Soit $S_n = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n$ .

      i. Calculer $S_n$.

      ii. En déduire la limite de la suite $(S_n)$.

**Partie C**

On considère, pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n$, définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$f_n(x) = \frac{1+2ln\,x}{x^{2n}}$ .

1. Calculer la dérivée $f_n'$ de la fonction $f_n$.
2. Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$. Soit $x_n$ la solution de cette équation.
3. Déterminer la limite de la suite $(x_n)$.

# <u>Contrôle de Mathématiques</u> (20 pts) (Février 2019)

## <u>Exercice 1</u> : (6 pts)

Dans la classe de SG, on communique aux élèves les statistiques suivantes après le premier examen de maths :

- 7 candidats sur 10 font leurs devoirs de maths régulièrement.
- 84 % des candidats qui font leurs devoirs de maths régulièrement ont réussi leur examen de maths.
- Seulement 5% de ceux qui ne font pas leurs devoirs de maths régulièrement ont réussi leur examen de maths.

**Le jour de la distribution des livrets, tous ceux qui ont réussi leur examen de maths sont fiers en prétendant qu'ils ne faisaient jamais leurs devoirs de maths, alors que tous ceux qui ont échoué protestent et prétendent faire tout le temps leurs devoirs de maths.**

On rencontre au hasard un candidat de SG le jour de la distribution des livrets. On note respectivement $D$, $R$ et $M$ les événements :
« Le candidat fait régulièrement ses devoirs de maths, « Le candidat a réussi son examen de maths» et « Le candidat est menteur ».
Arrondir les résultats au centième.

1) Quelle est la probabilité que le candidat rencontré ait réussi son examen de maths et ait fait régulièrement ses devoirs ?
2) Quelle est la probabilité que ce candidat ait réussi son examen de maths ?
3) Quelle est la probabilité d'avoir affaire à un menteur ?
4) Le candidat rencontré a réussi son examen de maths. Quelle est la probabilité qu'il soit un menteur ?
5) L'enseignante de maths de la classe de SG à la Sagesse Brasilia, rencontre ses 39 élèves le jour de la distribution des livrets. Elle les questionne sur leur préparation des devoirs de maths. On suppose que les réponses des élèves sont indépendantes. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de menteurs dans ce groupe de 39 élèves.
   a) Montrer que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
   b) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 3 menteurs dans ce groupe ?

**Exercice 2 : (2,5 pts)**

Soit $(E)$ l'équation différentielle $y'-y=-4x\ e^{-x}$ où $y$ est fonction du réel $x$ .

a. En posant $y=z+(2x+1)e^{-x}$ où $z$ est fonction de $x$, trouver l'équation $(E')$ satisfaite par $z$.
b. Résoudre l'équation $(E')$ et en déduire les solutions de l'équation $(E)$.
c. Trouver la solution particulière de $(E)$ qui passe par l'origine du repère.
d. Trouver la solution particulière de $(E)$ qui admet au point d'abscisse 0 une tangente perpendiculaire à la droite $(d)$ d'équation $y=-\frac{1}{4}x+5$.

**Exercice 3 : (6 pts)** Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{u}\ \vec{v})$.

On appelle $A$ le point d'affixe $-2i$.

Soit $f$ l'application définie sur le plan à valeurs dans le plan qui à tout point $M$ du plan d'affixe z, associe le point $M'$ d'affixe $z'=f(z)=-2\bar{z}+2i$.

1. On considère le point $B$ d'affixe $b=3-2i$.
   Déterminer la forme algébrique des affixes $a'$ et $b'$ des points respectifs $A'$ et $B'$ images par $f$ des points $A$ et $B$.
2. Déterminer les points invariants par $f$.
3. Montrer que si $M(z)$ appartient à la droite $(\Delta)$ d'équation $y=-2$ alors $M'$ appartient aussi à $(\Delta)$,
4. a) Démontrer que pour tout $M(z)$ : $|z'+2i|=2|z+2i|$.
   b) Interpréter géométriquement cette égalité.
5. Pour tout point $M$ distinct de $A$ :
   a) Démontrer que $(z+2i)(z'+2i)$ est un réel strictement négatif.
   b) En déduire une relation entre $(\vec{u}\ \overrightarrow{AM})$ et $(\vec{u}\ \overrightarrow{AM'})$.
   c) Que peut-on en déduire pour les demi-droites $[AM)$ et $[AM')$ ?
6. En utilisant les résultats précédents, proposez une méthode de construction géométrique du point $M'$ associé au point $M$.

**<u>Exercice 4</u> : (2,5 pts)**

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points $M(z)$ et représenter-le dans un repère orthonormé.

a) $\arg(-i\bar{z} + 2 - i) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$.

b) $|z - 3 + 2i| > 3$ et $\arg(-z + 3 - 2i) = \frac{\pi}{3}\ (\pi)$.

c) $z = 4 - i - i\sqrt{2}(1 - i)e^{i\theta}$ $\quad avec\ \frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{3\pi}{4}$.

**<u>Exercice 5</u> : (2 pts)**

Sur un site web on lit l'article suivant :

« Le téléphone portable ***Samsung Galaxy Note 8*** de l'entreprise Samsung est produit par deux sous-traitants $S1$ et $S2$.
Chez le sous-traitant $S1$, qui assure une partie de la production totale, 4% des téléphones sont défectueux.
Chez le sous-traitant $S2$, qui assure le reste de la production totale, 3% des téléphones sont défectueux.
3,4% des téléphones ***Samsung Galaxy Note 8*** sont défectueux. »

L'enseignante de SG propose le défi suivant à ses élèves :

« Un client achète un téléphone ***Samsung Galaxy Note 8*** choisi au hasard dans les stocks de l'entreprise Samsung et constate qu'il est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du sous-traitant $S1$ ? »

Andrew un élève de SG relève le défi et répond : c'est environ 47%.

A-t-il raison ? Expliquer sa démarche et commentez.

**<u>Exercice 6</u> : (1 pt)**

À tout point $M$ d'affixe $z$, on associe le point $N$ d'affixe $z^2$ et le point $P$ d'affixe $z^3$ avec $z$ différent de 0, 1 et $-1$.

Montrer que le triangle $MNP$ est rectangle en $P$ si, et seulement si, $M$ appartient au cercle de centre le point d'affixe $-\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$ .

## <u>Contrôle de Mathématiques</u> (20 pts) (Mars 2019)

**<u>Exercice 1 </u>: (6 pts)** Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath}\ \vec{\jmath}\ \vec{k}\right)$ :

$(P)$ et $(Q)$ sont les plans d'équations cartésiennes respectives :

$2x - 3y - 9z + 2 = 0$ et $x + 2y - z + 1 = 0.$

1) Montrer que les plans $(P)$ et $(Q)$ sont sécants suivant une droite $(d)$ dont on déterminera un système d'équations paramétriques.

2) On trouve : $(d)\ \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \quad t \in IR$

   Soit $(\Delta)$ la droite dont un système d'équations paramétriques est donné par :

   $(\Delta)\ \begin{cases} x = s + 1 \\ y = 2s - 3 \\ z = -s + 2 \end{cases} \quad t \in IR$

   Étudier la position relative de $(d)$ et $(\Delta)$.

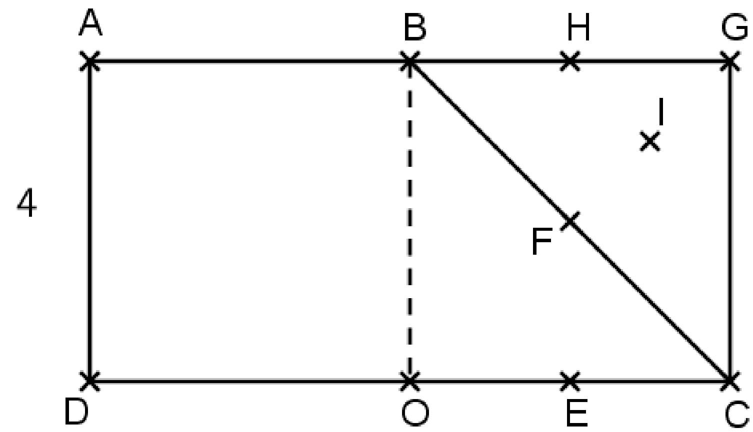
3) Écrire l'équation du plan $(R)$ contenant $(d)$ et $(\Delta)$,

4) Montrer que $(R)$ est perpendiculaire au plan $(Q)$.

**Exercice 2 : (6 pts)**

Dans la figure ci-contre :

- $ADOB$ et $BOCG$ sont deux carrés juxtaposés de côté 4.
- $E$, $F$  $I$ et $H$ sont les milieux respectifs de $[OC]$  $[OG]$  $[FG]$ et $[BG]$.




Soit $S$ la similitude plane directe qui transforme $A$ en $E$ et $B$ en $F$.

5) a) Déterminer le rapport et un angle de $S$.
   b) Montrer que $S(D) = C$.
   c) Déterminer $S((BC))$ et $S((DC))$.
   d) En déduire  $S(C)$.
   e) Déterminer alors $S(F)$.
   f) Déterminer $S(G)$.

6) Soit $W$ le centre de la similitude $S$ et soit $h$ la transformation définie par $h = S \circ S$.

   f) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h$.
   g) Trouver $h(D)$ et $h(B)$.
   h) Justifier alors la construction du point $W$.
   i) Montrer que les points $W$  $C$ et $H$ sont alignés.
   j) Exprimer $\overrightarrow{WH}$ en fonction de $\overrightarrow{WC}$.

7) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(D\,;\ \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}\quad \frac{1}{2}\overrightarrow{DA})$

   c) Trouver la forme complexe de $S$.
   d) Déterminer l'affixe de $W$.

**<u>Exercice 3</u> : (8 pts)**

Une urne contient trois boules rouges numérotées de 1 à 3, cinq boules bleues numérotées de 1 à 5 et deux boules vertes numérotées 1 et 2.
On tire simultanément 3 boules de l'urne et on note les événements suivants :

$A$ : « Obtenir des boules de couleurs différentes ».
$B$ : « Obtenir des boules dont les numéros ont la même parité ».
$C$ : « Obtenir au plus deux boules de numéro pair ».

**<u>Partie A :</u>**

1. Calculer la probabilité de l'événement A.
2. Montrer que $P(B) = \frac{1}{5}$.
3. Calculer $P(C)$  $P(A/\bar{C})$ et $P(B/\bar{C})$.

**<u>Partie B :</u>**

Un jeu consiste à tirer simultanément 3 boules de l'urne.
Si le tirage contient au moins une boule rouge le joueur ne gagne rien.
Sinon pour chaque boule bleue tirée le joueur perd 1 $ et pour chaque boule verte tirée il gagne 3 $.
Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

1. Montrer que X prend 4 valeurs.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer E(X) et interpréter ce résultat.
4. Combien de fois faut-il tirer avec remise pour espérer gagner en moyenne 100 $ ?

**<u>Partie C :</u>**

On répète n fois ce jeu ($n \geq 5$) en remettant à chaque fois les

boules dans l'urne avant de procéder à un nouveau tirage.

Ainsi deux tirages successifs sont indépendants.

Et on s'intéresse au nombre de fois où l'événement B s'est

réalisé.

1. Calculer la probabilité $p_n$ d'obtenir au moins une fois l'événement B.
2. Déterminer le plus petit nombre n tel que $p_n \geq 0\,97$.

## Fiche de révision 1 : Partie entière, domaine de définition et continuité

I) Résoudre, dans R, l'inéquation : $E\left(\sqrt{2x-3}\right) \leq 8$ où $E(x)$ représente la "partie entière" du réel $x$.

II)

a) Tracer dans un repère orthonormal la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0;9]$ par $f(x)=E\left(\frac{x}{3}-1\right)$.

b) Dire en quels points $f$ est discontinue.

III) Donner le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x)=\frac{5x-4\sqrt{12-2x}}{\sqrt{2x-1}-3} \quad , \quad g(x)=\frac{1}{\sqrt{\cos(2011x)-1}}$$

$$h(x)=\frac{x-3}{\left|x^2-3\right|+2x} \quad \text{et} \quad l(x)=\frac{8x-7}{\sqrt{E(\sin x)+2}}$$

IV) Résoudre, dans R, l'inéquation : $16-2x-\sqrt{x-3}>0$.

V) Expliciter et tracer sur $[-\pi;\pi]$ la fonction $f$ définie par $f(x)=E(\sin x)$.

VI) Soit la fonction $f$ donnée par :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} & si\ x>4 \\ a & si\ x=4 \\ b\,x+c & si\ x<4 \end{cases}$$

Comment choisir les réels $a$ , $b$ et $c$ pour que $f$ soit dérivable au point d'abscisse 4 ?

VII) Soit $f$ une fonction de $x$ exprimée par :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^2-x-2}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{3x^2+x-2}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Vérifier que $f$ est définie sur tout R et qu'elle est continue sur $R^*$.

# Fiche de révision 2 : Primitives, calcul intégral et calcul d'aire

I) Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{3x^4 - 2x^2 + 9}{x^9}$ sur $]-\infty; 0[$.

b) $f(x) = \dfrac{10x^2 - 5}{\sqrt{6x^3 - 9x + 1}}$ sur $[2; +\infty[$.

c) $f(x) = (7x^3 + 1)\sqrt{7x^4 + 4x + 9}$ sur $[0; +\infty[$.

d) $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \dfrac{\tan \mathrm{x}}{\cos \mathrm{x}}$ sur$]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

e) $f(x) = \sin^5(x)$ sur $\mathbb{R}$.

f) $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \sin^2(\mathrm{x})$ sur $\mathbb{R}$.

g) $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \sin(\mathrm{x}).\sin(2\mathrm{x})$ sur $\mathbb{R}$.

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}$ sur $]0; +\infty[$.

II) Soit les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1 + 2\sin\ x)^3}\,dx \qquad et \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{(1 + 2\sin\ x)^3}\,dx$$

a. Calculer $I$.
b. Calculer $I + J$.
c. En déduire la valeur de $J$.

III) Calculer chacune des intégrales suivantes :

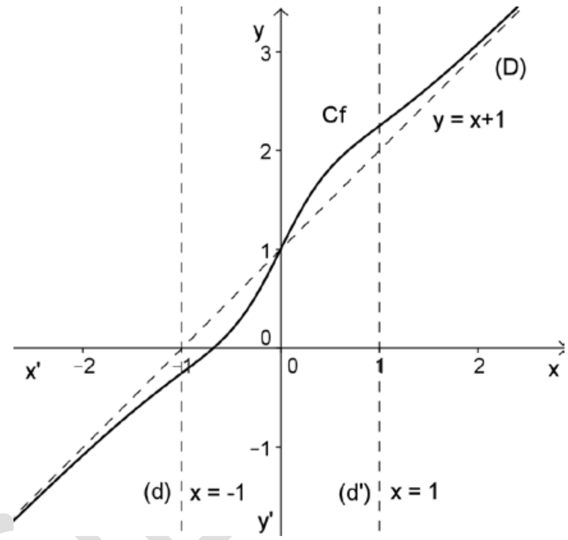
$$K = \int_{-1}^{1} \frac{x|x|}{(x^2 + 2)^2}\,dx \qquad\qquad L = \int_{-2}^{2} \frac{x + |x|}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$$

IV) Dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath}\ \vec{\jmath})$ où $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2\ cm$ ci-contre, on a représenté $(C_f)$ courbe représentative de la fonction $f$ donnée par :

$f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ ainsi que les droites

(d) : $x = -1$ $(d')$: $x = 1$

et (D) : $y = x + 1$.




a. Montrer que le point W(0 ;1) est un centre de symétrie de $f$.
b. Calculer, en $cm^2$, l'aire du domaine délimité par $(C_f)$, la droite (D) et les droites (d) et (d').

V) On définit :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\,dx \qquad et \quad pour\ n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin(3x)\,dx$$

1. a. Calculer $I_0$.
   b. Calculer $I_1$ à l'aide d'une intégration par parties.
   c. Vérifier que $I_0 > I_1$.
2. a. À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que, pour $n \geq 1$

$$I_{n+2} = \frac{n+2}{9}.\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} - \frac{(n+1)(n+2)}{9} I_n$$

   b. En déduire $I_3$.

3. a. Sans expliciter $I_n$, montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   b. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin(3x)\,dx \leq \left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}$$

   c. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

## Fiche de révision 3 : limites et dérivabilité

II) Sans avoir recours à la règle de l'Hôpital, calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2010}-2x+1\right)$

b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}$

c) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-7x+1}+2x+10$

d) $\lim_{x\to0}\frac{E(\sin x)}{x}$

e) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x^2+1}-3}{|x-2|}$

f) $\lim_{x\to1}\frac{1-E(x)}{x-1}$

g) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x-\sqrt{3}}{3x-\pi}$

h) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{E(\cos(x))}$

III) Soit la fonction $h$ définie sur $[0;2]$ par $f(x)=sin\left(E(x)\frac{\pi}{2}\right)+1$.

1) Tracer $f$ dans un repère orthonormal.
2) Prouver que $f$ présente deux discontinuités.

IV) Résoudre dans R chacune des relations suivantes :

a) $(E(x))^2\le2$

b) $E(\sin x)=E(\cos x)$.

V) Soit la fonction $f$ donnée par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos 2x-1}{x} & si\ x>0\\ a & si\ x=0\\ b\cos x+\dfrac{b}{2}x^2+bx+c & si\ x<0\end{cases}$$

Peut-on choisir des réels $a$, $b$ et $c$ pour que $f$ soit dérivable au point d'abscisse 0 ?

## Fiche de révision 4 : limites, continuité et dérivabilité

I) Sans avoir recours à la règle de l'hôpital, calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x.\sin(x)}{1-\cos(x)}$  b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$  c) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos(x)}{E(\sin(\pi-x))}$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{9x^2+x}+3x$  e) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-x-6}}$  f) $\lim\limits_{x\to +\infty} x.\left(\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-1\right)$

II) Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 cos\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

Étudier la dérivabilité de $f$ en 0.

*III)* a. Montrer que les courbes représentatives des fonctions $\mathrm{u}: \mathrm{x} \to \sin(\mathrm{x})$ *et* $\mathrm{v}: \mathrm{x} \to \frac{1}{2}\mathrm{x}$, admettent, sur l'intervalle $]0; \pi]$, un unique point d'intersection.

*b.* À l'aide de la calculatrice, on a calculé l'abscisse $\alpha$ de cet unique point d'intersection et on a trouvé $\alpha \approx 1\,895494267$ .

Donner un encadrement de l'abscisse $\alpha$ de ce point d'intersection.

c. Montrer que $\cos(2\alpha) = \dfrac{2-\alpha^2}{2}$.

IV) Résoudre, dans R, l'équation :

$$E\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = E(\tan x)$$

V) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :
a) Pour tout entier naturel, $x_n = 9^n - 2^n$ est un multiple de 7.
b) Tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 24 peut s'écrire de la forme $n = 5a + 7b$ où $a$ et $b$ sont des **entiers naturels**.

VI) Soit $f$ une fonction définie et continue sur $I = [0; 1]$ tel que pour tout $x \in I$ $f(x) \in I$.
Démontrer qu'il existe au moins un réel $a$ tel que $f(a) = a$.

# Fiche de révision 5 : Logarithme népérien et exponentielle

I) On définit sur l'intervalle $I = ]0;+\infty[$ les deux fonctions $f$ et $g$ définies respectivement par :

$$f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^2 - 1 + \ln x.$$

On appelle $(C_f)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal.

1) Calculer $g(1)$, prouver que $g$ est monotone sur $I$ et en déduire que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution. Quel est alors, suivant les valeurs de $x \in I$, le signe de $g(x)$ ?
2) Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de $I$ et prouver que l'une des asymptotes à $(C_f)$ est la droite $(d)$ dont une équation est $y = x + 1$. Quel en est l'autre?
3) Étudier, suivant $x$, les positions relatives de $(C_f)$ et $(d)$.
4) Calculer l'expression $f'(x)$ dérivée de $f(x)$ et prouver que $f'(x) \times g(x) \geq 0$. Dresser alors le tableau de variations de $f$.
   Tracer $(C_f)$ et $(d)$.
5) Déterminer une équation de la droite $(d')$ tangente à $(C_f)$ et parallèle à $(d)$.
6) Soit $\alpha > 1$, calculer l'aire A du domaine limité par $(d)$, $(C_f)$ et la droite $x = \alpha$.
   Que vaut $\alpha$ quand A = 1 unité d'aire ?

II) Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln(e^x - 1)$.

a) Trouver les limites de $f(x)$ aux bornes de $]0;+\infty[$ et trouver les asymptotes à sa courbe représentative $(C_f)$.
b) Étudier les variations de $f$ et tracer $(C_f)$.
c) Soit $g$ la fonction définie sur $]-\infty;0[$ par $g(x) = \ln\left(\frac{1-e^x}{e^{2x}}\right)$, on appelle $(C_g)$ sa courbe représentative.

Comparer $g(-x)$ et $f(x)$. Que peut-on conclure. Tracer alors $(C_g)$.

d) Soit $h$ définie sur R* par $h(x)=\begin{cases} f(x) \; si \; x>0 \\ g(x) \; si \; x<0 \end{cases}$

Vérifier que $h$ est paire.

Soit $\alpha>0$ et $A$ et $B$ les points d'abscisses respectives $\alpha$ et $-\alpha$. Que vaut $\alpha$ si les tangentes en $A$ et $B$ à $(C_h)$ forment un angle de $30^\circ$ ? On donne $tan\ 75^\circ = 2+\sqrt{3}$.

III) Résoudre, dans R, l'équation et les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{1}{1-ln|x|} \leq 1-ln|x|$.

b) $e^{2\ln(x+1)} \geq \ln\left(e^{2x+5}\right)$.

c) $\ln(7-x)-\ln(x+2) \leq \ln\left(x-\dfrac{7}{2}\right)$.

IV) a. Résoudre, dans ℕ, l'inéquation $\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)^n \leq 10^{-10}$.

b. Résoudre, dans ℝ, l'équation $\ln(7-x)+\ln(x-2)=\ln(-4x^2+20x)$.

c. Résoudre, dans ℝ, l'inéquation $\dfrac{\ln x}{1-\ln x} \geq \dfrac{1-\ln x}{\ln x}$.

V) Calculer chacune des intégrales suivantes :

$J=\int_{-1}^{1} \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^{x^2}}dx \qquad I=\int_{-1}^{1} \dfrac{e^x}{(e^x+5)^2}dx \quad K=\int_{-2}^{2}\dfrac{x^7+e^x}{e^x+e^{-x}}dx$

VI)

$f$ est la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=x-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

**Partie A :**

1. Calculer f ’(x).
2. Pour tout x de $]-1;+\infty[$, on pose :
   $g(x)=(1+x)^2+\ln(1+x)-1$.

a. Vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

b. Montrer que $g$ est une fonction strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.

c. Calculer $g(0)$ et déduisez-en les variations de la fonction $f$.

d. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C) et de la droite (Δ) d'équation y=x.

**Partie B :**

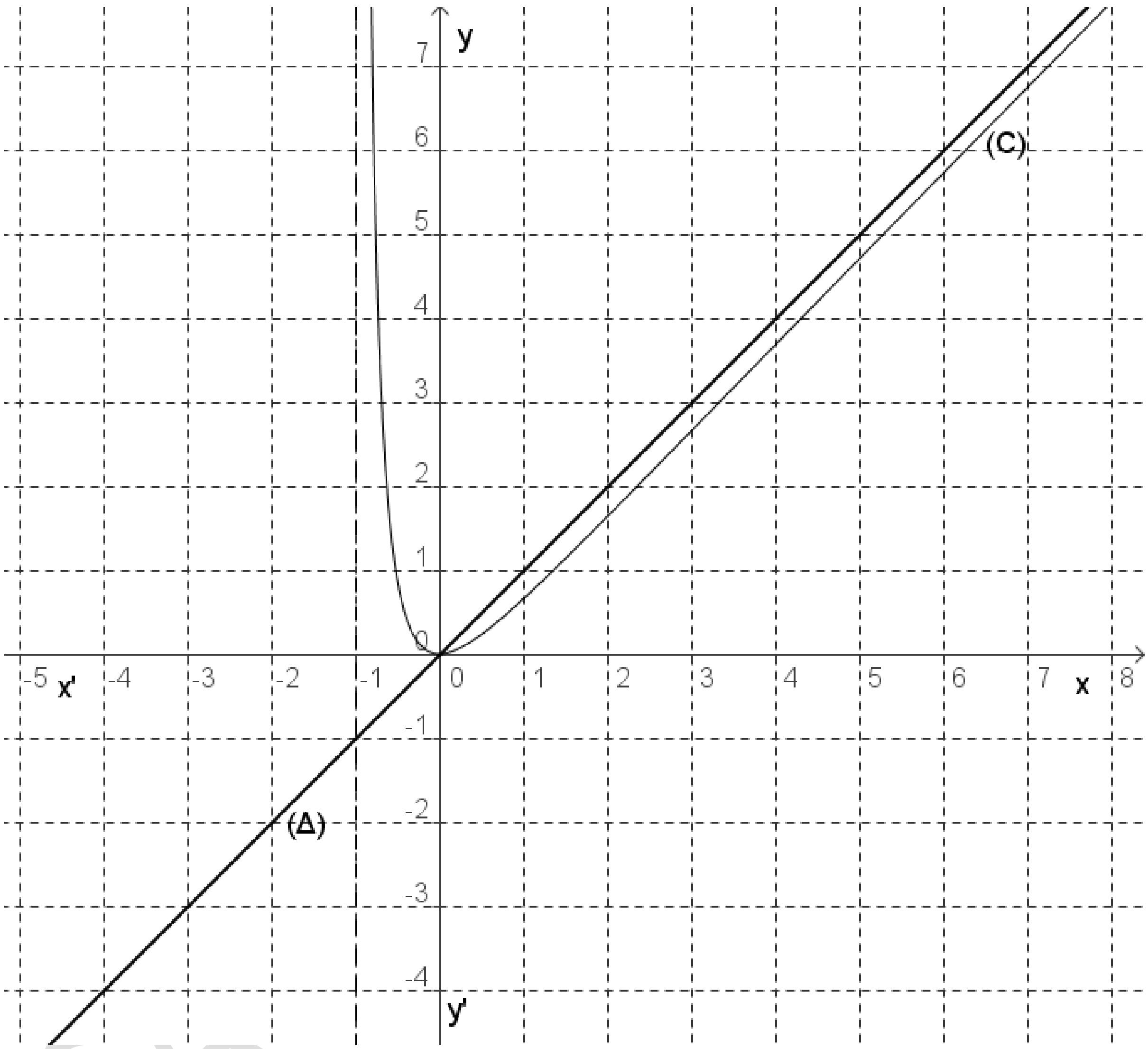
Démontrer l'implication suivante :

« Si $x \in [0\ ;4]$, alors $f(x) \in [0\ ;4]$ ».

1. On considère la suite (un) définie par $u_0=4$ et pour tout $n\in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a. La courbe (C) représentative de la fonction $f$ ainsi que la droite (Δ) d'équation y=x sont données dans l'annexe de la page 3.
   Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   b. Démontrer que pour tout $n\in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\ ;4]$.
   c. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et vérifier votre conjecture.
   d. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite l.

## Annexe




VII) a. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $[\ln(-x)]^2 - 3\ln(x^2) - 7 = 0$

c. En déduire les solutions de l'inéquation $[\ln(-x)]^2 - 3\ln(x^2) - 7 < 0$

d. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $\ln(\cos(x)) = 0$.

VIII) ***<u>Partie I :</u> Étude d'une fonction auxiliaire***

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par: $f(x)=ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$.

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers 0 et lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction $f$ et étudier les variations de $f$.
3. Tracer la courbe $(C_f)$ représentative de la fonction $f$ dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, où $\|\vec{\imath}\| = 4\ cm$ et $\|\vec{\jmath}\| = 5\ cm$.

***<u>Partie II</u> : Étude d'une fonction.***

On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par: $g(x)=x\,ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

1. Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ et que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.
2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de $g$.
   On vérifie que $g'(x)=f(x)$.
3. En déduire les variations de $g$ sur $]0;+\infty[$.
4. Calculer, en $cm^2$, l'aire du domaine délimité par $(C_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=e$.

***<u>Partie III :</u> Étude d'une suite***

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie sur N* par $u_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

Montrer, en remarquant que $ln(u_n)=g(n)$, que :

a) La suite $(u_n)$ est une suite croissante.
b) La suite $(u_n)$ est convergente et préciser sa limite.

## IX) La constante d'Euler

Le but de cet exercice est de montrer que la suite $(c_n)_{n\geq 1}$ définie par : $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - ln(n)$ est une suite convergente.

**Partie A :**

1. Soit $f(x) = ln(x+1) - ln(x) - \frac{1}{x+1}$
   a. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f$,
   b. Étudier les variations de la fonction $f$.
   c. En déduire le signe de $f(x)$.
2. Soit $g(x) = ln(x+1) - ln(x) - \frac{1}{x}$
   a. Déterminer le domaine de définition de la fonction $g$,
   b. Étudier les variations de la fonction $g$.
   c. En déduire le signe de $g(x)$.
3. En déduire que pour tout $x \geq 1$,
$$\frac{1}{x+1} \leq ln(x+1) - ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

**Partie B :** *Soit la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par* : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

a) Appliquer le résultat obtenu dans la **Partie A.3.** pour $x = 1$, $x = 2, \ldots, x = n-1$ et $x = n \quad (n \geq 1)$.
b) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

**Partie C :** Soit $f$ la fonction définie par $[0;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{x} - ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

a) En utilisant l'encadrement obtenu dans la **Partie A.3.** montrer que pour tout $n \geq 1$,
$$0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
b) Vérifier que pour tout $n \geq 2$, $c_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$.

c) En déduire que la suite $(c_n)_{n\geq 1}$ est croissante et que, pour tout $n \geq 2$,
$$f(1) \leq c_n \leq 1 - \frac{1}{n}$$
d) En déduire que la suite $(c_n)_{n\geq 1}$ converge.
***(La limite de la suite*** $(c_n)_{n\geq 1}$ ***est dite la constante d'Euler).***

## X) **Intégrale et intégration par parties**

Soit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout naturel $n$ par :

$$I_n = \int_1^e x.(ln(x))^n dx \quad si\ n \geq 1$$

$$et\ I_0 = \int_1^e x\,dx$$

1. Calculer $I_0$, puis $I_1$.

2. a. Au moyen d'une intégration par parties, exprimer $I_n$ en fonction de $n$ et de $I_{n-1}$.

   b. Vérifier que $2I_n + nI_{n-1} = e^2$.

   c. En déduire la valeur de $I_2$.

   d. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   e. En déduire que pour tout $n \geq 1$ :

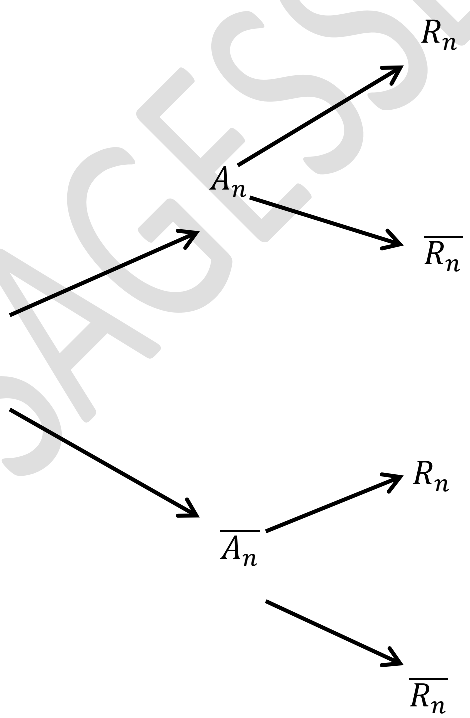
$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$$

   f. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

# Fiche de révision 6 : Probabilité conditionnelle, fonctions trigonométriques et complexes.

I) On considère deux dés notés A et B.
Le dé A comporte trois faces rouges et trois faces blanches.
Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches.
On choisit un dé au hasard et on le lance : Si on obtient rouge, on garde le même dé, si on obtient blanc on change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite.
On désigne par :
- $A_n$ l'événement « On utilise le dé A au n-ième lancer » ;
- $\overline{A_n}$ l'événement contraire de $A_n$.
- $R_n$ l'événement « On obtient rouge au n-ième lancer » ;
- $\overline{R_n}$ l'événement contraire de $R_n$.
- $a_n$ et $r_n$ les probabilités respectives de $A_n$ et $R_n$.

1. a. Déterminer $a_1$.
   b. Calculer $r_1$.
   c. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



d. *En déduire que* $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$.

e. Justifier, par une phrase, que pour tout $n \geq 1$,

$$A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$$

*f.* En déduire que, pour tout $n \geq 1, a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$.

2. Soit $v_n = a_n - \frac{2}{5}$.

a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. En déduire l'expression de $v_n$ et de $a_n$ en fonction de $n$.

c. Exprimer alors $r_n$ en fonction de $n$, puis calculer la limite quand $n$ *tend vers* $+\infty$ de $r_n$.

d. Interpréter ce dernier résultat.

II) On considère la fonction $f$ donnée par :

$$f(x) = \sqrt{cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$,
2. Étudier la périodicité et la parité de $f$,
4. Étudier les variations de $f$ sur un intervalle restreint.

5. Tracer la courbe représentative $(C_f)$ de $f$ sur $[-5\pi; 5\pi]$.

6. Soit D le domaine délimité par $(C_f)$, l'axe x'Ox et les droites d'équations $x = -\pi$ et $x = \pi$.

Calculer le volume du solide engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses.

6. Soit $g(x) = \sqrt{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$. Comment peut-on déduire $(C_g)$ à partir de $(C_f)$ ?

III) Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u}\ \vec{v})$, on donne les points A d'affixe $2i$, B d'affixe 2 et I le milieu de [AB].

On prendra 2 cm comme unité graphique.

On considère la fonctions $f$ qui, à tout point M distinct de A, d'affixe $z$, associe le point M' d'affixe $z'$ telle que :

$$z' = \frac{2z}{z-2i}$$

1. a. Montrer que $f$ admet deux points invariants dont on précisera les affixes.
   b. Déterminer les images par $f$ de B et I.

2. Soit M un point quelconque distinct de A et de O.
   Montrer que :
$$\begin{cases} \left(\vec{u},\overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}\right) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ OM' = 2\dfrac{MO}{MA} \end{cases}$$

3. Soit $(\Delta)$ la médiatrice de [OA].
   Montrer que les images par $f$ des points de $(\Delta)$ appartiennent à un cercle (C) que l'on précisera.

4. Soit $(\Gamma)$ le cercle de diamètre [OA], privé du point A.
   Montrer que les images par $f$ des points de $(\Gamma)$ appartiennent à une droite (D) que l'on précisera.

**<u>Devinette :</u>**

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

Soient trois points A, B et C deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c.

a) Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$

b) Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct si, et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$

IV) Une usine est dotée d'un système d'alarme qui se déclenche en principe lorsqu'un incident se produit sur une chaine de production.
Il peut arriver toutefois que le système d'alarme soit mis en défaut c'est-à-dire qu'il fonctionne mal.

Des études ont montré que, sur une journée :

- En l'absence de tout incident, l'alarme se déclenche avec une probabilité de $\frac{1}{50}$.
- La probabilité qu'un incident survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à $\frac{1}{500}$.
- La probabilité qu'un incident se produise est égale à $\frac{1}{100}$.

On note A l'événement « L'alarme se déclenche » et I l'événement « Un incident se produit ».

Les probabilités seront données sous forme de **fractions irréductibles.**

1. Construire un arbre pondéré schématisant la situation.
2. Calculer la probabilité que, dans une journée, un incident survienne et que l'alarme se déclenche.
   En déduire la probabilité que l'alarme se déclenche.
3. On note $D$ l'événement « L'alarme est mis en défaut ». Calculer $P(D)$.
4. L'alarme vient de se déclencher.
   Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un incident ?
5. On suppose que le fonctionnement de ce système d'alarme dans une journée est indépendant de celui de la journée précédente.
   Quelle est la probabilité que sur une semaine, l'alarme soit mis en défaut au moins une fois ? (On donnera une valeur arrondie au centième).

## Résolution d'équations et d'inéquations irrationnelles

**Pour résoudre une équation ou une inéquation irrationnelle :**

1. **On détermine son domaine de définition (Il faut d'abord que le radicande soit positif ou nul, on isole ensuite la racine carrée, il faut que la quantité qui est supérieure ou égale à la racine carrée soit positive).**
2. **On élève les deux membres au carré.**
3. **On résout l'équation ou l'inéquation obtenue.**
4. **On vérifie si les éventuelles solutions obtenues appartiennent au domaine de définition.**

**Résoudre les équations et les inéquations suivantes :**

a. $3x - \sqrt{x+8} = 0$.
b. $1 - x - \sqrt{x^2+7} = 0$.
c. $\sqrt{x+1} - 3 < 0$.
d. $\sqrt{2x+1} - 3x + 9 < 0$.

## Raisonnement par récurrence

**N°1**

Soit $f(x) = sin(x)$

Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout naturel $n$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f$, notée $f^{(n)}(x)$ est donnée par :

$f^{(n)}(x) = sin\left(\frac{n,\pi}{2} + x\right)$

**N°2**

Soit $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots \ldots + n^2$

Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :

$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

**N°3**

Soit $x_n = 7^{3n} - 1$

Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel $n$, $x_n$ est un multiple de 19.

**N°4**

Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel $n$,

$$\left(\frac{5}{4}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{4}$$

**N°5**

Soit $y_n = n^7 - n$

Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel $n$, $y_n$ est un multiple de 7.

**N°6**

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$

Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout naturel $n$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f$, notée $f^{(n)}(x)$ est donnée par :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

**N°7**

Soit $R_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots \ldots + n^3$

Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout naturel non nul $n$ :

$R_n = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

**N°8**

Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel $n$,

$$(1\ 1)^n \geq 1 + \frac{n}{10}$$

**N°9**

Soit $z_n = n^5 - n$

Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel $n$, $z_n$ est un multiple de 5.

**N°10**

Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel $n$,

$$\sqrt{1 + n} \leq 1 + \frac{n}{2}$$

## Exercices sur les suites

Exercice 1 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} = f(u_n) \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.
2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 2 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 4 \quad u_n \geq 2^n$.

Exercice 3 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$

1. Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Démontrer que pour tout naturel $n$, $u_n > n^2$.
3. Déduisez-en le comportement de la suite en $+\infty$.

Exercice 4 :

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$

1. Prouver que pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$,
2. Déduisez-en le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 5 :

On note $u_n$ le nombre de foyers, exprimé en millions, possédant un téléviseur à écran plat l'année $n$.

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$

et , pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{1}{10} u_{n,}(20 - u_n)$.

1. Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par :
$$f(x) = \frac{x}{10}, (20 - x)$$
   a) Étudiez les variations de la fonction $f$ sur $[0; 20]$.
   b) Déduisez-en que pour tout $x$ de $[0; 10]$, $f(x) \in [0; 10]$.
2. Prouver par récurrence que, pour tout naturel $n$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.
3. Prouvez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminez sa limite $\ell$,

Exercice 6 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout naturel non nul $n$, par : $u_n = \frac{n!}{n^n}$

1. Justifiez que pour tout naturel non nul $n$, $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$.
2. Quel est le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ?

Exercice 7 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout naturel $n$ $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$.

Exercice 8 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel $n$ par

$u_n = n + 1 - \cos(n)$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $n \leq u_n \leq n + 2$,
2. Quel est le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

Exercice 9 :

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3},$$

1. a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
   b. Montrer par récurrence que, pour tout naturel $n \geq 1$, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$,
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

Exercice 10 :

Soit $(e_n)_{n\geq 1}$la suite définie pour tout naturel $n \geq 1$ par :

$$e_n = \frac{11n^2}{4\sin(2n) - 7}$$

1. Montrer que pour tout naturel $n \geq 1$, $e_n \leq -n^2$.
2. En déduire la limite de la suite $(e_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 11 :

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = -\frac{2}{u_n}$,

Pour chaque proposition, indiquez si elle est vraie ou fausse et proposez une démonstration pour la réponse indiquée.

Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple :

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $-1$.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 12 :

On se propose d'étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$définie pour tout naturel non nul $n$ par :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

1. Quel est le plus petit des $n$ termes de la somme définissant $u_n$ ? le plus grand ?
2. Déduisez-en un encadrement de $u_n$.
3. Puis déterminer le comportement de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ à l'infini.

Exercice 13 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout naturel $n$ par :

$u_0 = 0 \quad et \quad u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$

1. a) Démontrer que pour tout naturel $n$
$$0 \leq u_n < 4$$
b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
c) Déduisez-en que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. a) Démontrez que pour tout naturel $n$
$$4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$$
b) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout naturel $n$ par :
$$v_n = 4 - u_n$$
Démontrer que pour tout naturel $n$
$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$$
c) Déduisez-en la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite puis la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 14 :

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2 \quad 3n^2 \geq (n+1)^2$

Exercice 15 :

On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes vérifient, pour tout entier naturel $n \geq 1$ : $\quad n, w_n = (n+1)w_{n-1} + 1$ et $w_0 = 1$.

Ce tableau donne les dix premiers termes de cette suite :

| $w_0$ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ | $w_7$ | $w_8$ | $w_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |

1. Détaillez le calcul permettant d'obtenir $w_{10}$.
2. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte.
   Donnez la nature de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Puis calculez $w_{2021}$,

Exercice 16 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$

1. Calculez $u_1$ $u_2$ et $u_3$.
2. a) Démontrez que pour tout naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.
   b) Déduisez-en que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.
   c) Déduisez-en la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$
   a) Démontrez que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et précisez sa limite.
   b) Déduisez-en que pour tout naturel $n$,
   $$u_n = \frac{25}{4}, \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$
   c) Soit la somme $S_n$ définie pour tout naturel $n$ par :
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
   Déterminez l'expression de $S_n$ en fonction de $n$.
   En déduire la limite de la suite$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

## Étude de fonctions trigonométriques

**N°1**Étudier la fonction $f$ donnée par $f(x) = \sqrt{2 - cosx}$.

**N°2**

a. Étudier la fonction $g$ donnée par $g(x) = \frac{1}{2-\sin x}$.
b. Montrer que $g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = g\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

**N°3**

a. Étudier la fonction $h$ donnée par $h(x) = \frac{1}{2-\cos x}$.
b. Comment déduire $C_h$ à partir de $C_g$ ?

**N°4**Étudier la fonction $i$ donnée par $i(x) = \frac{1}{1-\cos x}$.

**N°5**

a. Étudier la fonction $j$ donnée par $j(x) = \frac{2-\cos x}{2+\cos x}$.
b. Soit $k(x) = \frac{1}{j(x)}$. Comment déduire $C_k$ à partir de $C_j$ ?

**N°6**

a. Étudier la fonction $l$ donnée par $l(x) = \sqrt{2 + \cos 2x}$.
b. Soit $m(x) = \sqrt{2 + |\cos 2x|}$. Comment déduire $C_m$ à partir de $C_l$ ?

**N°7**

a. Étudier la fonction $m$ donnée par $m(x) = \frac{\cos x}{\cos x+1}$
b. Soit $n(x) = |m(x)|$. Comment déduire $C_n$ à partir de $C_m$ ? La tracer.

**N°8**

Étudier la fonction $o$ donnée par $o(x) = \frac{\sin x}{\cos x+1}$

**N°9**

Étudier la fonction $p$ donnée par $p(x) = \sqrt{1 - \cos x}$.

**N°10**

a. Étudier la fonction $q$ donnée par $q(x) = \sqrt{1 - \sin x}$.
b. Comment déduire $C_q$ à partir de $C_p$ ?

**N°11**Étudier la fonction $r$ donnée par $r(x) = \sqrt{1 - 2\cos x}$.

# Rappel sur les formules de trigonométrie

1. **<u>Propriétés :</u> Soit M un point du cercle trigonométrique associé au reel $\alpha$**

   Quand $M$ appartient au premier cadrant, $cos\alpha > 0$ $sin\alpha > 0$ et $tan\alpha > 0$,

   Quand $M$ appartient au deuxième cadrant, $cos\alpha < 0$ $sin\alpha > 0$ et $tan\alpha < 0$,

   Quand $M$ appartient au troisième cadrant, $cos\alpha < 0$ $sin\alpha < 0$ et $tan\alpha > 0$,

   Quand $M$ appartient au quatrième cadrant, $cos\alpha > 0$ $sin\alpha < 0$ et $tan\alpha < 0$,

$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ $\quad -1 \leq \sin\alpha \leq 1$ $\quad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\tan\alpha \in \left]-\infty\ ;+\infty\right[$ $\quad \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad \cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ;

2. **<u>Les lignes trigonométriques des arcs associés</u>**

$$\begin{cases} \cos(\alpha+2k\pi) = \cos(\alpha)\ \ La\ \ fonction\cos est\ periodique\ de\ plus\ petite\ periode\ 2\pi. \\ \sin(\alpha+2k\pi) = \sin(\alpha)\ La\ \ fonction\sin est\ periodique\ de\ plus\ petite\ periode\ 2\pi. \\ \tan(\alpha+k\pi) = \tan(\alpha)\ La\ \ fonction\tan est\ periodique\ de\ plus\ petite\ periode\ \pi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \tan(-\alpha) = -\tan\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \\ \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \\ \tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha \\ \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \\ \tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha \\ \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha \\ \tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha \end{cases}$$

3. **<u>Equations trigonométriques</u>**

   - $cos \propto = cosa$ donc $\propto = a + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}$ ou $\propto = -a + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}$ (Deux angles qui ont le même cosinus son égaux ou opposés).

- $sin \propto = sina$ donc $\propto = a + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ ou $\propto = \pi - a + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ (Deux angles qui ont le même sinus son égaux ou supplémentaires).
- $tan \propto = \tan a$ donc $\propto = a + k\pi \ / k \in \mathbb{Z}$ .

## 4. Formules d'addition

- $\cos(a-b) = cosa.cosb + sina.sinb$ $\quad$ $\cos(a+b) = cosa.cosb - sina.sinb$
- $\sin(a-b) = sina.cosb - sinb.cosa$ $\quad$ $\sin(a+b) = sina.cosb + sinb.cosa$
- $\tan(a+b) = \frac{tana+tanb}{1-tana.tanb}$ $\quad$ $\tan(a-b) = \frac{tana-tanb}{1+tana.tanb}$

## 5. Formules de duplication

- $\cos(2a) = cos^2a - sin^2a = 2cos^2a - 1 = 1 - 2sin^2a.$
- $\sin(2a) = 2sina.cosa.$
- $\tan(2a) = \frac{2tana}{1-tan^2a}.$
- $\cos(a) = \cos\left(2 \times \frac{a}{2}\right) = cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = 2cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - 1 = 1 - 2sin^2\left(\frac{a}{2}\right).$
- $\sin(a) = \sin\left(2 \times \frac{a}{2}\right) = 2sin\left(\frac{a}{2}\right).cos\left(\frac{a}{2}\right)$

## 6. Formules de linéarisation :

- $cos^2a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$ et $sin^2a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

## Fonctions trigonométriques réciproques : Exercices

1) Calculer $sin\left(2arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)$.

2) Calculer $cos\left(arcsin\left(\frac{12}{13}\right)+arcsin\left(\frac{5}{13}\right)\right)$.

3) Calculer :
$arcsin\left(sin\frac{\pi}{10}\right)$ ; $arcsin\left(sin\frac{4\pi}{5}\right)$ ; $arcsin\left(sin\frac{-11\pi}{6}\right)$

$arcsin\left(cos\frac{\pi}{7}\right)$ ; $arcsin\left(sin\frac{7\pi}{8}\right)$ ;

4) Calculer : $arccos\left(sin\frac{\pi}{40}\right)$.

5) Résoudre : $\arcsin(x)+arccos\left(\frac{3}{5}\right)=arccos\left(\frac{12}{13}\right)$

6) Calculer : $arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$; $arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

7) Effectuer le changement de variable $t=\arcsin\,(x)$ pour calculer :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\,(x)}{x}$$

8) Quelle relation existe-t-il entre $arcsin(-x)$ et $arcsin(x)$ pour $x\in[-1;1]$ ?

9) Simplifier :$arcsin\left(sin\frac{\pi}{6}\right)$ ; $arcsin\left(sin\frac{-\pi}{3}\right)$ ; $arcsin\left(sin\frac{5\pi}{4}\right)$

10) Calculer : $arccos(0)$; $arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

11) Quelle relation existe-t-il entre $arccos(-x)$ et $arccos(x)$ pour $x\in[-1;1]$ ?

12) Simplifier :

$arccos\left(cos\frac{\pi}{9}\right)$ ; $arccos\left(cos\frac{5\pi}{6}\right)$ ; $arccos\left(cos\frac{4\pi}{3}\right)$

13) Calculer : $arctan(0)$; $arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$; $arctan(\sqrt{3})$

14) Quelle relation existe-t-il entre $arctan(-x)$ et $arctan(x)$ pour $x \in IR$?

15) Calculer : $arcsin(1)$ $et$ $arccos(0)$,

16) Calculer : $arctan(1) + arctan(1)$.

17) Vrai ou Faux ?

a. $\arcsin(0) = 0$.
b. $arcsin\left(sin\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$.
c. $arccos(-1) = -\pi$,
d. $arccos\left(cos\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3}$,
e. $arctan\left(tan\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$,
f. $arcsin^2(x) + arccos^2(x) = 1$,

18) Résoudre : $2\arctan(x) = arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$.

19) Montrer que : $arctan\left(\frac{1}{2}\right) + arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$

20) Résoudre : $\arctan(x) = arcsin\left(\frac{3}{5}\right) - arccos\left(\frac{12}{13}\right)$.

21) Que vaut $\arcsin(x) + \arccos(x)$ pour $x \in [-1; 1]$ ?

22) Simplifier :

a) $\cos^2(\text{arctan}\,(2019))$.

b) $\cos^2\left(\frac{1}{2}\text{arccos}\,(x)\right)$.

c) $\cos\left(2018 arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + 2020 arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right)$

23) Résoudre : $2\text{arcsin}(x) = arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$.

24) Résoudre : $arccos(x) = arcsin\left(\frac{1}{3}\right) - arcsin\left(\frac{1}{9}\right)$.

25) Résoudre : $2arctan(x) = arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) - arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

26) Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ $h(x) = \dfrac{3x-2019}{\sqrt{25-9x^2}}$

$i(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+2x}}$ $j(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{4-sin^2(x)}}$

$k(x) = \dfrac{\cos\,(x)}{\sqrt{4-sin^2(x)}}$ $l(x) = \dfrac{10}{\sqrt{100-x^2}}$

$m(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{100-x^2}}$ $n(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+200}}$

$o(x) = \dfrac{4x+8}{\sqrt{-2x^2-8x}}$ $p(x) = \dfrac{1}{16+x^2}$

$q(x) = \dfrac{4}{\sqrt{-4x^2+16x}}$ $r(x) = \dfrac{\sin\,(x)}{81+\cos^2(x)}$

$s(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)\sqrt{1-\tan^2(x)}}$ $t(x) = \dfrac{\sin\,(x)}{\sqrt{4-\cos^2(x)}}$

$u(x) = \dfrac{\sin\,(2x)}{\sqrt{4-\cos^2(x)}}$ $v(x) = \dfrac{1}{(1+\tan^2(x))\cos^2(x)}$

## Consolidation: Raisonnement par récurrence et suite

I) Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour tout $x \neq 1$.
Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \geq 1$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f$ est donnée par $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

II) Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $4^n - 1 - 3n$ est un multiple de 9.

III) Soit $S_n = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \cdots. + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1}$.
Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n = \frac{n}{n+1}$

IV) Démontrer en utilisant le raisonnement par récurrence, la proposition $P_n$ suivante : $P_n$ " $3^{2n} - 1$ est, pour tout naturel $n$, multiple de 8 ".

V) Soit la suite d'entiers $(U_n)$ définie sur N par : $U_n = 4^n + 15n - 1$.

a. Démontrer par récurrence que tous les termes de cette suite sont des multiples de 9.
b. Prouver que : $\sum_{p=0}^{n} U_p = \frac{4^{n+1} - 1}{3} + \frac{1}{2}(n+1)(15n-2)$.

VI) a) Démontrer par récurrence que pour tout naturel $n$, le terme général
$U_n$ de la suite $(U_n)$ définie par $U_n = 9^n - 2^n$ est un multiple de 7.

b) Soit la suite $(V_n)$ définie sur N par $V_n = U_n + E\left(\frac{n}{10}\right)$.

Vérifier que le 1e et le 2e termes de cette suite sont des multiples de 7 et montrer qu'à partir d'un rang $n_0$, l'hérédité de cette propriété s'arrête.

VII) Soit la suite $(A_n)$ définie sur N par $A_n = 10^{-n} - 10^{-2}n + 4$.

Calculer à $10^{-2}$ près la somme de ses 20 premiers termes.

VIII) Soit la suite $(U_n)$ définie sur $N^*$ $(n \geq 1)$ par $U_n = 2n + 1 + \frac{(2)^{n+2}}{3^n}$.

Prouver que la somme de ses $n$ premiers termes est donnée par :

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = U_1 + U_2 + ... + U_n = n^2 + 2n + 8 - \frac{2^{n+3}}{3^n}.$$

IX) Soit la suite $(A_n)$ définie pour $n \geq 1$ par $A_n = \frac{2^{2n+1} - 3^{n+1}}{5^n}$.

Prouver que $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \frac{7}{2}$.

X)

a) En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver que pour tout naturel $n$ tous les termes de la suite $(U_n)$ définie par $U_n = 2^{2n+1} + 4$ est divisible par 6.

b) On donne la suite $(V_n)$ définie sur $N^*$ par $V_1 = 3$ et $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n + 1$.

Calculer $V_2$ et $V_3$ et prouver en utilisant un raisonnement par récurrence que la forme explicite de cette suite récurrente est $V_n = \frac{2^n + 1}{2^{n-1}}$.

Calculer alors son pas $d_n = V_{n+1} - V_n$ en fonction de $n$ et en déduire ses variations.

Que vaut $\lim\limits_{+\infty} V_n$ ?

XI) Soit la suite $(U_n)$ définie sur N par : $U_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$.

Donner la forme explicite de $(U_n)$ et calculer la somme des 80 premiers termes de cette suite.

**113.** BAC **Récurrence double au Bac**

On considère la suite de nombres réels $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}.$$

**1.** Calculer $u_2$ et en déduire que la suite $(u_n)$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.

**2.** On définit la suite $(v_n)$ en posant pour tout entier naturel $n$ :
$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

**a.** Calculer $v_0$.

**b.** Exprimer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$.

**c.** En déduire que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

**d.** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$ entier naturel.

**3.** On définit la suite $(w_n)$ en posant, pour tout entier naturel $n$ :
$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

**a.** Calculer $w_0$.

**b.** En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer $w_{n+1}$ en fonction de $u_n$ et de $v_n$.

**c.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

**d.** Exprimer $w_n$ en fonction de $n$ entier naturel.

**4.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$ :
$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

**5.** Pour tout entier naturel $n$, on pose :
$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + \ldots + u_n.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ :
$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

*D'après Bac, 2010*

**114. Dazibao**

Un sociologue étudie l'évolution de la population d'un pays du sud-est asiatique.

Depuis 1969 (cette année-là, ce pays comptait 44 500 000 habitants), il constate qu'en moyenne la population a un taux de natalité de 35 pour mille et un taux de mortalité de 17 pour mille.

À ces variations, il faut ajouter 25 000 nouveaux arrivants dans ce pays et retirer 9 000 citoyens qui partent définitivement.

On note $p_n$ la population en $1969 + n$, exprimée en milliers d'habitants.

**1.** Déterminer $p_0$.

**2.** Démonter que, pour tout entier naturel $n$ :
$$p_{n+1} = 1{,}018p_n + 16.$$

**3.** Déterminer le réel $l$ tel que la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_n = p_n - l$$
soit géométrique.

**4.** En déduire les expressions de $u_n$ et $p_n$ en fonction de $n$ entier naturel.

**5.** Combien d'habitants peut-on prévoir en 2012 ?

**6.** Au bout de combien d'années la population va-t-elle tripler, par rapport à celle de 1969 ?

**Le saviez-vous ?**

En 2011, les deux pays les plus peuplés sont :
- la Chine avec plus de 1,3 milliard d'habitants ;
- l'Inde avec 1,1 milliard d'habitants.

*Hong-Kong*

## 117. BAC Un peu de tout

*Certains résultats de la partie A pourront être utilisés dans la partie B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*

### Partie A

On définit :

- la suite $(u_n)$ par $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel $n$ :
$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} ;$$
- la suite $(S_n)$ pour tout entier naturel $n$ :
$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k.$$

**1.** Montrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel $n$ :
$$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}.$$
En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**2. a.** Déterminer le sens de variation de la suite $(S_n)$.

**b.** Calculer $S_n$ en fonction de $n$.

**c.** Déterminer la limite de la suite $(S_n)$.

### Partie B

Étant donnée une suite $(x_n)$, de nombres réels, définie pour tout entier naturel $n$, on considère la suite $(S_n)$ définie par :
$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} x_k.$$

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse ; justifier dans chaque cas.

**Proposition 1** : si la suite $(x_n)$ est convergente, alors la suite $(S_n)$ l'est aussi.

**Proposition 2** : les suites $(u_n)$ et $(S_n)$ ont le même sens de variation.

*D'après Bac, 2008*

## 118. Affectif et répulsif

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}u_n\right) \end{cases}.$$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

### Partie A : $u_0$ entier

**1.** Peut-on affirmer que, pour tout entier $n$, $u_n \in [-1 ; 1]$ ?

**2.** Montrer que si $u_0$ est un entier pair, alors la suite $(u_n)$ est constante à partir du rang 1.

**3.** Montrer que si $u_0$ est impair, alors la suite $(u_n)$ est à valeurs dans $\{-1 ; 1\}$ à partir du rang 1.

### Partie B : $u_0$ non entier

Dans cette partie, on suppose que $u_0$ n'est pas entier.

**1.** Établir le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.

**2. a.** En déduire que, pour tout entier supérieur ou égal à 1, $u_n \in [-1 ; 1]$.

**b.** En déduire que la suite $(u_n)$ est bornée.

**c.** Peut-on affirmer que la suite $(u_n)$ converge si, et seulement si, $(u_n)$ est monotone ?

**3. a.** Montrer que, si $x \in ]-1 ; 0[ \cup ]0 ; 1[$, alors :
$$f(x) \in ]-1 ; 0[ \cup ]0 ; 1[.$$

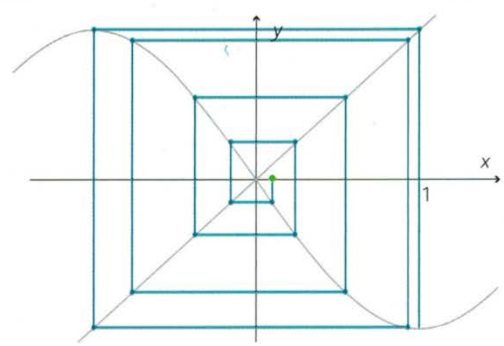
**b.** En déduire, pour tout entier naturel $n$, que si $u_0$ n'est pas entier, alors $u_n$ n'est pas entier.

**4. a.** Justifier que, l'image par $f$ de l'intervalle $]0 ; 1[$ est l'intervalle $]-1 ; 0[$, puis que l'image par $f$ de l'intervalle $]-1 ; 0[$ est l'intervalle $]0 ; 1[$.

**b.** En déduire que, quel que soit le rang, la suite $(u_n)$ ne peut être monotone.

**POUR ALLER PLUS LOIN**

Sur la représentation graphique ci-dessous, on a représenté graphiquement les courbes d'équations $y = f(x)$ et $y = x$ ainsi que les premiers termes de la suite $(u_n)$ avec $u_0 = 0,1$. On peut remarquer que, même si la suite reste bornée, elle ne peut converger. Pour cela, on pourrait montrer que les suites extraites de termes pairs et impairs convergent vers 1 et $-1$. Ce qui empêche la suite $(u_n)$ de converger. D'ailleurs la seule valeur théorique vers laquelle elle aurait pu converger est 0. Mais voilà, 0 est dit « **point répulsif** » pour la suite $\left(\text{car } |f'(0)| = \frac{2}{\pi} > 1\right)$ et c'est ce qui fait géométriquement que $u_n$ s'éloigne de plus en plus de 0.



## 119 « Suites imbriquées »

~~On~~ considère les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}.$$

**1.** Calculer les termes $u_1$, $v_1$, $u_2$ et $v_2$.

**2.** À l'aide d'un logiciel de type tableur, on calcule les premiers termes des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

**b.** Conjecturer le comportement des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

**c.** On définit alors les deux suites $(w_n)$ et $(t_n)$ sur $\mathbb{N}$ par :

$$w_n = v_n - u_n \quad \text{et} \quad t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Quelle formule peut-on écrire dans les cellules **D2** et **E2** afin d'obtenir, en recopiant vers le bas, les valeurs de $w_n$ et $t_n$ ?

**d.** Conjecturer une expression explicite pour chacune des suites $(w_n)$ et $(t_n)$.

**e.** Démontrer ces conjectures.

**3.** En déduire, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$.

**4.** Conclure sur la limite des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

> **INFO**
> Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont en fait adjacentes. On peut vérifier que :
> - la suite $(u_n)$ est croissante ;
> - la suite $(v_n)$ est décroissante ;
> - $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.
>
> On sait alors montrer dans ce cas que les deux suites admettent une même limite lorsque $n$ tend vers l'infini. (Voir exercice 144. page 51.)

# Linéarisation et calcul intégral :

Formules de linéarisation:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

Alors $e^{ix}+e^{-ix} = 2\cos(x)$ et $e^{ix}-e^{-ix} = 2i\,sin(x)$

Comment calculer une intégrale à l'aide des formules de linéarisation ?

$$A = \int_0^{\pi} \sin^7(x)\,dx = ?$$

On écrit $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ et on utilise la formule du binôme :

$$\begin{aligned}\sin^7(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^7 = \left(\frac{1}{2i}\right)^7 (e^{ix}-e^{-ix})^7\\ &= \frac{i}{i^8 \times 2^7}\left(\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}(e^{ix})^{7-k}(-e^{-ix})^k\right)\\ &= \frac{1}{2^7}i\left(\binom{7}{0}e^{i7x} - \binom{7}{1}e^{i6x}e^{-ix} + \binom{7}{2}e^{i5x}e^{-2ix} - \binom{7}{3}e^{i4x}e^{-3ix}\right.\\ &\quad \left. + \binom{7}{4}e^{i3x}e^{-i4x} - \binom{7}{5}e^{i2x}e^{-i5x} + \binom{7}{6}e^{ix}e^{-i6x} - \binom{7}{7}e^{-i7x}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^7}i(1e^{i7x} - 7e^{i6x}e^{-ix} + 21e^{i5x}e^{-2ix} - 35e^{i4x}e^{-3ix} + 35e^{i3x}e^{-i4x} - 21e^{i2x}e^{-i5x} + 7e^{ix}e^{-i6x} - 1e^{-i7x})$$

$$= \frac{1}{2^7}i(e^{i7x} - e^{-i7x} + 7e^{i5x} - 7e^{-i5x} + 21e^{i3x} - 21e^{-i3x} + 35e^{ix} - 35e^{-ix})$$

$$= \frac{1}{2^7} i(2i\sin(7x) + 7 \times 2i\sin(5x) + 21 \times 2i\sin(3x) + 35 \times 2i\, sin(x))$$

$$= \frac{2i^2}{2^7}(\sin(7x) + 7\sin(5x) + 21\sin(3x) + 35\, sin(x))$$

$$= -\frac{1}{2^6}(\sin(7x) + 7\sin(5x) + 21\sin(3x) + 35\, sin(x))$$

Alors

$$A = \int_0^\pi \sin^7(x)\, dx = \int_0^\pi -\frac{1}{2^6}(\sin(7x) + 7\sin(5x) + 21\sin(3x) + 35\, sin(x))\, dx =$$

$$A = -\frac{1}{2^6}\left[-\frac{1}{7}\cos(7x) - \frac{7}{5}\cos(5x) - \frac{21}{3}\cos(3x) - 35\cos(x)\right]_0^\pi$$

$$= -\frac{1}{2^6}\left[\left(-\frac{1}{7}\cos(7\pi) - \frac{7}{5}\cos(5\pi) - 7\cos(3\pi) - 35\cos(\pi)\right) - \left(-\frac{1}{7}\cos(0) - \frac{7}{5}\cos(0) - 7\cos(0) - 35\cos(0)\right)\right]$$

$$A = \frac{1}{2^6}\left[\left(\frac{1}{7}\cos(7\pi) + \frac{7}{5}\cos(5\pi) + 7\cos(3\pi) + 35\cos(\pi)\right) + \left(-\frac{1}{7}\cos(0) - \frac{7}{5}\cos(0) - 7\cos(0) - 35\cos(0)\right)\right]$$

$$A = \frac{1}{2^6}\left[-\frac{1}{7} - \frac{7}{5} - 7 - 35 - \frac{1}{7} - \frac{7}{5} - 7 - 35\right] = \frac{1}{2^6}\left[-14 - 70 - \frac{2}{7} - \frac{14}{5}\right]$$

$$A = \frac{1}{2^6}\left[-84 - \frac{10}{35} - \frac{98}{35}\right] = \frac{1}{2^6}\left[-84 - \frac{108}{35}\right]$$

Calculer les intégrales suivantes :

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\, dx \qquad C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(5x)\sin(3x)\, dx \qquad D = \int_0^\pi \sin(2x)\cos(3x)\, dx$$

# Intégration : décomposition en éléments simples

$Ex1 : Calculer : \ A = \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 1}$

$Ex2 : Calculer: \ B = \int_3^5 \frac{2x - 1}{x^2 + 3x - 4} dx$

$Ex3 : Calculer: \ C = \int_2^7 \frac{4x + 1}{3x^2 + 5x - 8} dx$

$Ex4 : Calculer:$

$D = \int_2^7 \frac{dx}{x^2 + 4x - 5} dx$ $\qquad E = \int_5^7 \frac{dx}{x^2 + 4x + 4} dx$ $\qquad F = \int_2^7 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} dx$

**Remarque :**

Si dans le dénominateur on a un trinôme du second degré alors on calcule Δ :

- Si $\Delta > 0$ alors on peut écrire ce trinôme comme produit de facteurs du premier degré c'est-à-dire on décompose en éléments simples.....
- Si $\Delta = 0$ alors on peut écrire ce trinôme comme un carré parfait et ca va donner la forme $\frac{u'}{u^2}$ dont la primitive est $-\frac{1}{u}$.
- Si $\Delta < 0$ alors on peut faire un début de carré parfait et ca va donner $\frac{u'}{1+u^2}$ dont la primitive est $arctan(u)$ (HORS PROGRAMME n'est pas demandée)

$Ex5 : Calculer \int_2^6 \frac{dx}{x^2 + x}$

$$Ex6 : Calculer \int_{2}^{3} \frac{u'}{u(u+1)} dx$$

$$Ex7 : Calculer \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x) + 3\cos(x) - 4} dx$$

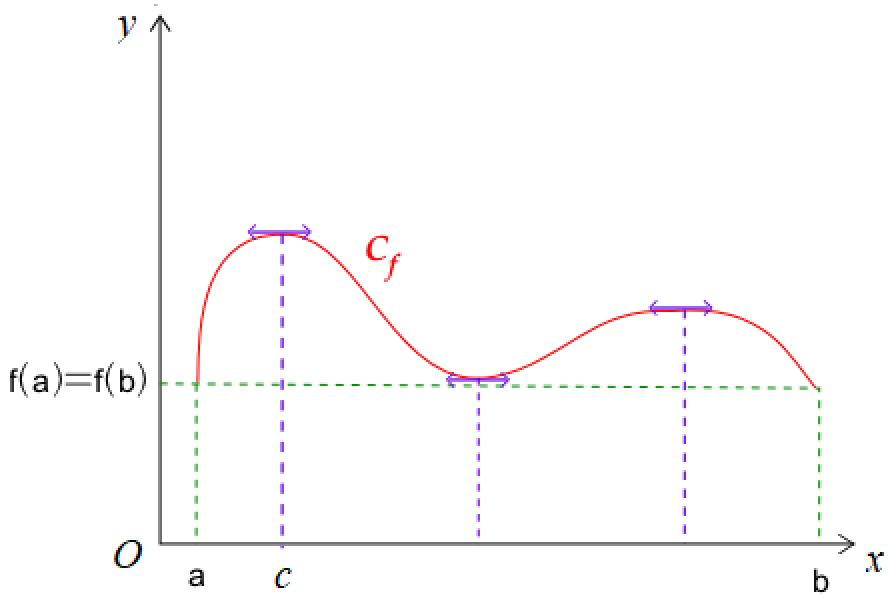
$$Ex8 : Calculer \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x(4 - \ln^2(x))} dx$$

# Théorème de Rolle -Théorème des accroissements finis

## Théorème de Rolle:

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$ et soit $f$ une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe au moins un réel $c \in ]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

C'est-à-dire il existe au moins un réel $c \in ]a; b[$ tel que la tangente à la courbe représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse $c$ soit parallèle à l'axe des abscisses.




## Théorème des accroissements finis :

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$ et soit $f$ une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$alors il existe au moins un réel $c \in ]a; b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

C'est-à-dire il existe au moins un réel $c \in ]a; b[$ tel que la tangente à la courbe représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse $c$ soit parallèle à la droite $(AB)$ où $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$.