Ecoles Al-Mabarrat Direction générale		En son nom	
Code : EDD-F49	Ed : 01	Fiche de révision 01 / 2022	

Année scolaire : 2021 – 2022 **Date :** 16 / 04 /2022
Nom : **Classe :** 3ème année secondaire – S. V. T et S.G.

Probabilités

Problème I

Une urne contient 10 boules identiques indiscernables au toucher, telles que :

- 6 boules sont rouges et portent les numéros 7, 7, 7, 7, 7 et 9 ;
- 4 boules sont vertes et porte les numéros 7, 7, 7, et 9.

1) On tire au hasard et **simultanément** deux boules de l'urne.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « Les deux boules tirées sont rouges » ;
B : « Les deux boules tirées portent le numéro 7 » ;
C : « Les deux boules tirées sont rouges ou portent le numéro 7 » ;
D : « On obtient au moins une boule rouge » ;
E : « On obtient au plus une boule qui porte le numéro 7 ».
F : « Après le tirage de deux boules, il reste 4 boules rouges dans l'urne » ;
G : « Après le tirage de deux boules, il reste 6 boules rouges dans l'urne ».

2) Dans, cette partie, on tire deux boules **successivement et sans remise** de l'urne.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
H : « Les deux boules tirées ont la même couleur » ;
I : « Les deux boules tirées ont de couleurs différentes » ;
J : « Les deux boules tirées portent deux numéros différents ».
K : « Après le tirage de deux boules, il reste 5 boules rouges dans l'urne » ;

3) Dans, cette partie, on tire deux boules **successivement et avec remise** de l'urne.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
L : « Les deux boules tirées ont la même couleur » ;
M : « Les deux boules tirées ont de couleurs différentes » ;
N : « Les deux boules tirées portent deux numéros différents ».
O : « Après le tirage de deux boules, il reste 6 boules rouges dans l'urne » ;

4) Dans cette partie, un jeu se déroule de la manière suivante :
On lance un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 :

- Si on obtient une face numérotée 2 ou 4, on tire au hasard et successivement avec remise deux boules de l'urne ;
- Sinon, on tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

On considère les événements suivants :
D_1 : « On obtient une face numérotée 2 ou 4 lorsqu'on lance le dé » ;
C_1 : « On tire deux boules de même couleur de l'urne » ;
N_1 : « On tire deux boules de l'urne qui portent des numéros différents ».

a. Calculer $p(D_1)$, $P(C_1 / D_1)$ et déduire que $P\left(C_1 \cap D_1\right) = \frac{13}{75}$.

b. Calculer $P\left(C_1 \cap \overline{D_1}\right)$ et déduire que $P(C_1) = \frac{109}{225}$.

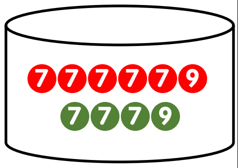
c. Justifier que $P(N_1) = \frac{232}{675}$.

5) Soit n un entier naturel non nul. On ajoute à l'urne n boules rouges portant le numéro 7.
On tire au hasard et **simultanément** deux boules de l'urne.

a. Calculer p_n la probabilité de l'événement : « On obtient deux boules rouges ».

b. Calculer q_n la probabilité de l'événement : « On obtient deux boules portant de numéros différents ».

c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$ et interpréter chaque résultat.

QI	Réponses
1.	 • $P(A) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}$; • $P(B) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}$; • $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{28}{45} - \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{11}{15}$; • $P(D) = 1 - P(\text{aucune boule rouge}) = 1 - \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{13}{15}$; • $P(E) = P(\text{aucune boule portant 7}) + P(\text{1 boule portant 7}) = \frac{C_2^2 + C_8^1 \times C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{17}{45}$; • $P(F) = P(\text{tirer 2 rouges}) = P(A) = \frac{1}{3}$; • $P(G) = P(\text{tirer 0 rouge}) = P(\text{2 vertes}) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}$.
2.	• $P(H) = P(\text{2 rouges}) + P(\text{2 vertes}) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$; • $P(I) = P(\text{1 rouge et 1 verte avec ordre}) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{2!}{1! \times 1!} = \frac{8}{15}$; • $P(J) = P(\text{1 boule 7 et une boule 9 avec ordre}) = \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{2!}{1! \times 1!} = \frac{16}{45}$; • $P(K) = P(\text{tirer 1 rouge}) = P(I) = \frac{8}{15}$.
3.	• $P(L) = P(\text{2 rouges}) + P(\text{2 vertes}) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{52}{100} = \frac{13}{25}$; • $P(M) = P(\text{1 rouge et 1 verte avec ordre}) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{2!}{1! \times 1!} = \frac{12}{25}$; • $P(N) = P(\text{1 boule 7 et une boule 9 avec ordre}) = \frac{8}{10} \times \frac{2}{10} \times \frac{2!}{1! \times 1!} = \frac{8}{25}$; • $P(O) = P(\text{tirer 0 rouge}) = P(\text{2 vertes}) = \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{4}{25}$.
4.a	• $P(D_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; • $P(C_1 / D_1) = P(\text{tirer successivement et avec remise 2 boules de même couleur}) = P(L) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{13}{25}$; • $P(C_1 \cap D_1) = P(C_1 / D_1) \times P(D_1) = \frac{13}{25} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{75}$.

4.b	• $P\left(C_1 \cap \overline{D_1}\right) = P\left(C_1 / \overline{D_1}\right) \times P\left(\overline{D_1}\right) = \dfrac{C_6^2 + C_4^2}{C_{10}^2} \times \dfrac{4}{6} = \dfrac{14}{45}$; • D'après la formule des probabilités totales : $P(C_1) = P\left(C_1 \cap D_1\right) + P\left(C_1 \cap \overline{D_1}\right) = \dfrac{13}{75} + \dfrac{14}{45} = \dfrac{109}{225}$.
4.c	$P\left(N_1\right) = P\left(N_1 \cap D_1\right) + P\left(N_1 \cap \overline{D_1}\right) = P\left(N_1 / D_1\right) \times P\left(D_1\right) + P\left(N_1 / \overline{D_1}\right) \times P\left(\overline{D_1}\right)$; $P\left(N_1\right) = \dfrac{8}{10} \times \dfrac{2}{10} \times \dfrac{2!}{1! \times 1!} \times \dfrac{2}{6} + \dfrac{C_8^1 \times C_2^1}{C_{10}^2} \times \dfrac{4}{6} = \dfrac{232}{675}$.
5.a.	$p_n = \dfrac{C_{n+6}^2}{C_{n+10}^2} = \dfrac{\dfrac{(n+6)!}{(n+4)! \times 2!}}{\dfrac{(n+10)!}{(n+8)! \times 2!}} = \dfrac{\dfrac{(n+6)(n+5) \times (n+4)!}{(n+4)! \times 2!}}{\dfrac{(n+10)(n+9) \times (n+8)!}{(n+8)! \times 2!}} = \dfrac{(n+6)(n+5)}{(n+10)(n+9)}$.
5.b.	$q_n = \dfrac{C_{n+8}^1 \times C_2^1}{C_{n+10}^2} = \dfrac{\dfrac{(n+8)!}{(n+7)! \times 1!} \times 2}{\dfrac{(n+10)!}{(n+8)! \times 2!}} = \dfrac{\dfrac{(n+8) \times (n+7)!}{(n+7)! \times 1!} \times 2}{\dfrac{(n+10)(n+9) \times (n+8)!}{(n+8)! \times 2!}} = \dfrac{4(n+8)}{(n+10)(n+9)}$.
5.c.	$\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(n+6)(n+5)}{(n+10)(n+9)} = 1$; $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4(n+8)}{(n+10)(n+9)} = 0$; **Interprétation** : • Lorsque n augmente indéfiniment, p_n tend vers 1 c-à-d l'événement « obtenir deux boules rouges » devient l'événement **certain**. • Lorsque n augmente indéfiniment, q_n tend vers 0 c-à-d l'événement « obtenir deux boules portant de numéros différents » devient l'événement **impossible**.

Problème II

Un enfant joue avec 20 boules parmi lesquelles 13 sont rouges et 7 sont vertes.
Il place 10 boules rouges et 3 boules vertes dans une urne A et il place les boules restantes dans une autre urne B.

1) Dans un premier jeu l'enfant tire au hasard et **simultanément** 3 boules de l'urne A.
On considère les évènements :
R_1 : « L'enfant a tiré exactement une boule rouge » ;
R_2 : « L'enfant a tiré au moins une boule rouge ».
Calculer $P(R_1)$ et montrer que $P(R_2) = \dfrac{285}{286}$.

2) Dans un autre jeu, l'enfant tire au hasard et **successivement sans remise** deux boules de l'urne B.
Calculer la probabilité des événements suivants :
D : « L'enfant a tiré deux boules vertes » ;
E : « L'enfant a tiré une boule rouge et une boule verte dans cet ordre » ;
F : « L'enfant a tiré une boule de chaque couleur ».

3) Dans un autre jeu, l'enfant tire au hasard une boule de l'urne A et une boule de l'urne B.

a. Déterminer le nombre de tirages possibles.

b. Calculer la probabilité des événements suivants :

G : « L'enfant a tiré deux boules vertes »

H : « L'enfant a tiré deux boules de couleurs différentes ».

4) Dans un autre jeu, l'enfant choisit au hasard l'une des urnes A ou B et tire ensuite une boule de l'urne choisie.

On considère les événements :

A : « L'enfant a choisi l'urne A » ;

R : « L'enfant a tiré une boule rouge ».

a. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b. Montrer que $P(R) = \frac{109}{182}$.

c. L'enfant a tiré une boule rouge. Calculer la probabilité qu'elle soit tirée de l'urne A.

5) Dans un autre jeu, l'enfant tire une boule de l'urne A :

- Si elle est rouge, il tire au hasard et successivement et avec remise deux boules de l'urne B ;
- Sinon, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne B.

On considère les événements suivants :

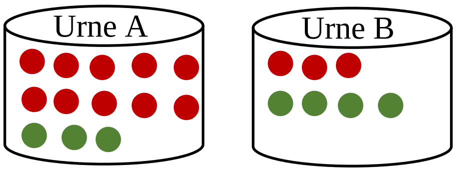
K : « L'enfant a tiré une boule rouge de l'urne A » ;

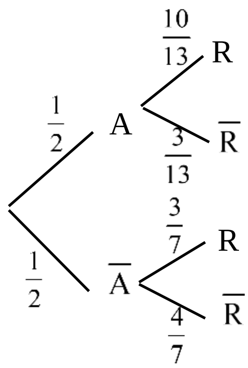
V : « L'enfant a tiré exactement une boule verte de l'urne B ».

a. Calculer $P(V / K)$ et montrer que $P(V \cap K) = \frac{240}{637}$.

b. Montrer que $P\left(V \cap \overline{K}\right) = \frac{12}{91}$ et en déduire $P(V)$.

c. L'enfant a tiré exactement une boule verte de l'urne B, calculer la probabilité qu'il a tiré une boule verte de l'urne A.

QII	Réponses
1.	 $P(R_1) = \frac{C_{10}^1 \times C_3^2}{C_{13}^3} = \frac{15}{143}$; $P(R_2) = 1 - P(\text{aucune boule rouge}) = 1 - \frac{C_3^3}{C_{13}^3} = \frac{285}{286}$.
2.	$P(D) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$; $P(E) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$; $P(F) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \boxed{\frac{2!}{1! \times 1!}} = \frac{4}{7}$ (on tient compte de l'ordre).
3.a.	Le nombre de tirages possibles est $13 \times 7 = 91$.
3.b.	$P(G) = \frac{3}{13} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{91}$;

	P(H) = P(une rouge de A et une verte de B) + P(une verte de A et une rouge de B) $P(H) = \frac{10}{13}\times\frac{4}{7}+\frac{3}{13}\times\frac{3}{7}=\frac{40+9}{91}=\frac{49}{91}=\frac{7}{13}$.
4.a.	**Arbre de probabilités :** 
4.b.	D'après la formule des probabilités totales : $P(R) = P(R\cap A)+P(R\cap\overline{A}) = P(R / A) \times P(A) + P(R / \overline{A}) \times P(\overline{A})$ $P(R) = \frac{10}{13}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{13}+\frac{3}{14}=\frac{109}{182}$.
4.c.	$P(A / R) = \frac{P(A\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{5}{13}}{\frac{109}{182}}=\frac{70}{109}$.
5.a.	$P(V / K) = \frac{4}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{2!}{1!\times 1!}=\frac{24}{49}$; $P(V\cap K)=P(V / K)\times P(K)=\frac{24}{49}\times\frac{10}{13}=\frac{240}{637}$.
5.b.	$P(V\cap\overline{K})=P(V / \overline{K})\times P(\overline{K})=\frac{C_4^1\times C_3^1}{C_7^2}\times\frac{3}{13}=\frac{12}{91}$; D'après la formule des probabilités totales : $P(V) = P(V\cap K)+P(V\cap\overline{K})=\frac{240}{637}+\frac{12}{91}=\frac{324}{637}$.
5.c.	$P(\overline{K} / V) = \frac{P(\overline{K}\cap V)}{P(V)}=\frac{\frac{12}{91}}{\frac{324}{637}}=\frac{7}{27}$.

Bon travail