Contrôle de Mathématiques (20 pts)

Exercice 1 : (8 pts) Un bouquet de questions indépendantes.

1) Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$J = \int_2^3 \frac{dx}{4x^2-3x-1} \qquad K = \int_1^2 \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}\,dx$$

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\ \vec{v})$, on considère, pour tout entier naturel n, le points M_n d'affixe $z_n = e^{\frac{2in\pi}{3}}$.
Les points $O,\ M_1$ et M_{20} sont-ils alignés ?

3) z est un nombre complexe différent de $-i$ tel que $\left|\frac{z-2i}{z+i}\right| = 1$.
Déterminer la partie imaginaire de z.

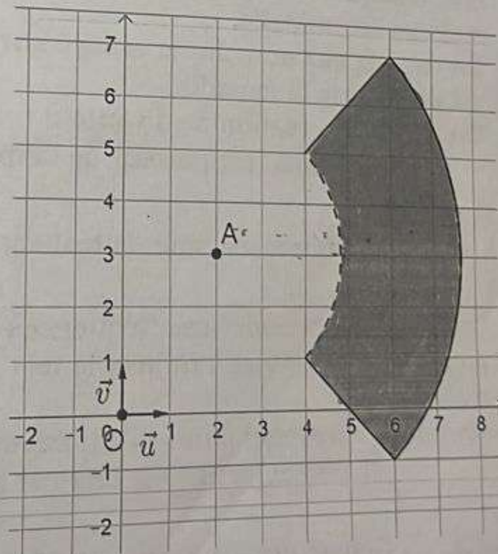
4) Choisir la bonne réponse.

Soit z un nombre complexe. Le nombre $|1+iz|^2 + |z+i|^2$ est alors égal à :

A $4-2|z|^2$ B $4-2|z|^2$ C $2|z|^2+2$ D $2|z|+2$ E $4|z|^2+4$

5) Si A et B sont deux événements d'un même univers tel que $P(A) = 0{,}3$ et $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}6$.
Calculer $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

6) Afin de vérifier la compréhension de la notion de lieux géométriques avec les nombres complexes, Tala envisage de concevoir une question pour Marney et Razane.
Elle souhaite que la réponse soit à cette question soit représentée par la figure ci-contre.
Aider-là à rédiger la question.



Exercice 2 : (6 pts)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x}(\ln(x) - 2)$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + x - 3$.

1) Etudier les variations de g.
2) On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $2{,}20 < \alpha < 2{,}21$.

   Etudier le signe de $g(x)$.

Partie B :

1) Calculer la limite de f en 0 et en $+\infty$.
2) a) Etudier les variations de f.

   b) Montrer que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. On admettra que $-0{,}67 \leq f(\alpha) \leq -0{,}65$.
3) a) Déterminer les abscisses des points d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses.

   b) Etudier alors le signe de $f(x)$.

Exercice 3 : (6 pts)

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.
On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note : M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;
T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
   a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?

b. Montrer que la probabilité que le test soit positif est 0,058.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie ?

4. Soit X la variable aléatoire donnant le cout à payer par animal subissant le test.
Le cout des soins à prodiguer (dépenser) à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le cout de l'abattage (le tuage) d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros.
On suppose que le test est gratuit.

a. Après avoir vérifié que X prend 3 valeurs, établir la loi de probabilité de X.
b. Calculer l'espérance mathématique de X.
Interpréter le résultat obtenu.
c. Un éleveur possède un troupeau de 200 bovins.
Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme devrait-il prévoir payer ?