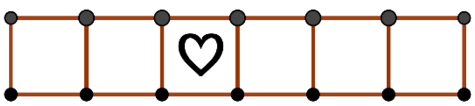
ثانوية برجا الرسمية **07/623581**	**امتحانات الشهادة الثانوية العامة** **فرع: العلوم العامة** **2022/2023**	**عدد المسائل: خمس**
اعداد وتأليف الأستاذ: أحمد دمج **70/773620**	**مسابقة في مادة الرياضيات**	**المدة: ثلاث ساعات**

ملاحظات هامة - يستطيع الطالب الاجابة عن الأسئلة بالترتيب الذي يناسبه.
- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو إختزان المعلومات او رسم البيانات.

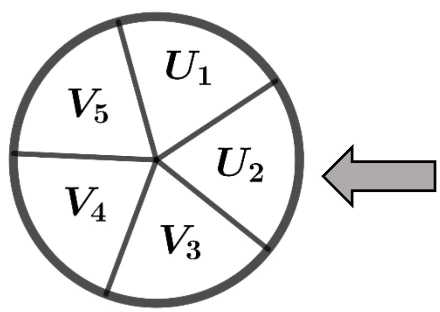
نموذج رقم : 6

I- (2 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant,** la réponse qui lui correspond.

N⁰	**Questions**	**Réponses**		
		(a)	**(b)**	**(c)**
1)	$e^{3\ln 2} \times e^{-\ln 4} =$	2	4	8
2)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x-1)}{\ln(4x+3)} =$	1	$\frac{1}{2}$	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$
3)	L'équation $(\ln x)^2 + 3\ln x + 2 = 0$	n'admet pas des racines	admet une seule racine	admet deux racines distinctes
4)	 Dans cette figure le nombre de rectangles contenant le cœur est	C_7^2	6!	12

II- (5 points)



- Une roulette est formée de cinq secteurs circulaires égaux :

  deux secteurs portent chacun la lettre U, numérotés de 1 à 2
  et trois secteurs portent chacun la lettre V, numérotés de 3 à 5.

- Une urne U contient 6 boules : 2 noires et 4 blanches.
- Une urne V contient 9 boules : 3 noires et 6 blanches.

On tourne la roulette une seule fois :
Si elle s'arrête sur un secteur portant la lettre U alors on tire au hasard et simultanément deux boules de U.
Si elle s'arrête sur un secteur portant la lettre V alors on tire au hasard et simultanément deux boules de V.
On considère les événements suivants :
U « La roulette s'arrête sur un secteur portant la lettre U »
V « La roulette s'arrête sur un secteur portant la lettre V »
M « Les deux boules tirées sont de même couleur »

1) Calculer P(U) et P(V).
2) Montrer que $P(M/U) = \frac{7}{15}$ et $P(M/V) = \frac{1}{2}$.
3) Calculer P(M).
4) Les deux boules tirées sont de couleurs différentes.

   Calculer la probabilité que la roulette s'arrête sur un secteur portant la lettre U.

5) Les deux boules tirées sont de même couleur.

   Calculer la probabilité que la roulette s'arrête sur un secteur portant un nombre impair.

III- (7 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$, à tout point M d'affixe $z \neq 2i$,

on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{5z-8i}{z-2i}$.

On considère les points A, B et W d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = 4$ et $z_W = 5$.

Remarque : Les parties A, B et C de cet exercice sont indépendantes
et pour chacune de ces parties, on fera une figure indépendante.

<u>Partie A</u>

1) Montrer que $z' - 5 = \frac{2i}{z-2i}$.
2) En déduire que $M'W \times MA = 2$ et que $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{WM'}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}\right)\ [2\pi]$.
3) Montrer que si M décrit la droite $(\delta): y = x + 2$ privée de A alors M' décrit une droite (δ') parallèle à (δ).

<u>Partie B</u>

Dans cette partie M décrit la droite $(d): y = 1$.

1) Montrer que $z' - 4 = \frac{z}{z-2i}$.
2) En déduire que M' décrit un cercle (C_1) dont on déterminera le centre et le rayon.
3) Puisque M appartient à (d), on pose $z = a + i$ avec $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{z'-z_W}{z} = \frac{2i}{a^2+1}$.
4) En déduire que (WM') et (OM) sont perpendiculaires.
5) Déduire une construction de M' à partir de M.

<u>Partie C</u>

Dans cette partie, M décrit le cercle (C_2) de centre O et de rayon 2, privé du point A.

On pose alors $z = 2e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0\,;2\pi[$ et $\theta \neq \frac{\pi}{2}$.

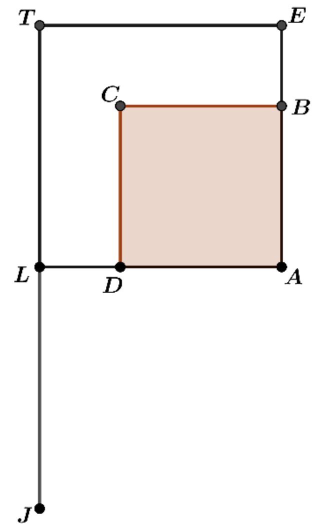
1) Montrer que $\frac{z}{2i} = \frac{z'-4}{z'-5}$.
2) En déduire que M' décrit une droite (Δ) à déterminer.
3) Pour quelles valeurs de θ, le triangle M'BW est-il équilatéral ?
4) a) Soit $w = \frac{z}{(z-2i)^2}$. Montrer que w est imaginaire pur.

   b) Vérifier que $\frac{z'-4}{z-2i} = w$ et en deduire que (BM') et (AM) sont perpendiculaires.

   c) Déduire une construction de M' à partir de M.

IV- (6 points)

Dans la figure ci-contre on donne :



- ABCD est un carré direct de côté 4 cm.
- AETL est un carré direct de côté 6 cm, tel que B est un point du segment [AE].
- J est le symétrique de T par rapport à L.

Soit S la similitude plane directe qui transforme C en E et B en A.

1) Calculer un angle et le rapport de S.

2) a) Montrer que le centre P de S appartient au cercle (C) de diamètre [AB].

b) Déterminer S(A) et S(D).

c) Déterminer $S \circ S(B)$ et montrer que P appartient à la droite (BL).

d) En déduire une construction du point P.

3) Soit $f = \underbrace{S \circ S \circ \ldots \circ S}_{n-\text{fois}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) On désigne par $A_nB_nC_nD_n$ l'image de ABCD par f. Trouver le plus petit entier naturel n pour lequel l'aire de $A_nB_nC_nD_n$ est supérieur à 2023 cm^2.

4) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et soit $h = R \circ S$.

a) Déterminer la nature de h, et donner son rapport.

b) Déterminer h(C) et h(B) et en déduire une construction du point I, centre de h.

c) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{ID}$.

5) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(D; \vec{u}; \vec{v})$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{DA}$.

a) Ecrire la forme complexe de S.

b) Déduire l'affixe du point P.

V- (10 points)

Partie A

On donne le tableau de variations d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = 1 - (x^2 + 2x)\, e^{x-1}$.

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(x)$	1	↘	0,94	↗	1,16	↘	$-\infty$

1) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α.
2) Vérifier que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.
3) Étudier suivant x, le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x - x^2\, e^{x-1}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\, \vec{i}\,,\ \vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.
2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C).

   b) Étudier suivant x, la position relative de (C) et (d).
3) a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha+\alpha^2}{\alpha+2}$.

   b) Vérifier que $f'(x) = g(x)$ et dresser le tableau de variations de f (prendre $\alpha = 0{,}55$).

   c) Montrer que 0 et 1 sont **les seules** racines de l'équation $f(x) = 0$.

   d) Montrer que (d) est la tangente à (C) en O.

   e) Trouver les coordonnées du point E de (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (d).
4) Tracer (d), (T) et (C).
5) Montrer que (C) admet deux points d'inflexions.

Partie C

Soient h et φ les fonctions définies sur IR par $h(x) = x^2\, e^{x-1}$ et $\varphi(x) = (x^2 - 2x)\, e^{x-1}$.

1) Vérifier que $h(x) = \varphi'(x) + 2e^{x-1}$.
2) En déduire une primitive H de h.
3) Soit m un réel strictement négatif. On désigne par $S(m)$ l'aire du domaine limité par (C), (d), $(y'y)$ et la droite d'équation $x = m$. Montrer que $\lim\limits_{m\to-\infty} S(m) = \frac{2}{e}$.