Chapitre 2 : Quantité du mouvement

1) Quantité du mvt $\vec{P}$

1-1) d'une particule

$$\vec{P} = m\,\vec{V}$$

kg.m/s kg m/s

1-2) d'un système des particules

$$\vec{P}_{système} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \cdots = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + \cdots$$

1-3) du centre de masse d'un système

$$\vec{P}_{système} = M.\vec{V}_G$$

2) Deuxième loi de Newton

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \Sigma \vec{F}_{ext}$$

$$\frac{d(M\vec{V}_G)}{dt} = \Sigma \vec{F}_{ext}$$

$M = cte$: $M\dfrac{d\vec{V}_G}{dt} = M.\vec{a}_G = \Sigma \vec{F}_{ext}$: théorème du centre d'inertie

3) Loi de conservation de la quantité du mvt

3-1) système isolé mécaniquement : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

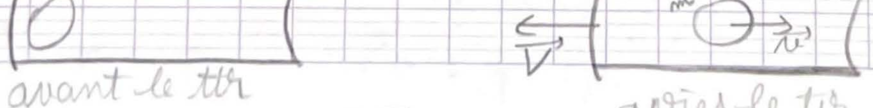
3-2) loi de conservation de la quantité du mvt :

si $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = cte$

Pour un système isolé mécaniquement ($\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0}$) la quantité du mvt est conservée.

3-3) Applications

3-3-1) Recul d'une arme à feu



avant le tir — après le tir

pour trouver une relation entre $\vec{V}$ et $\vec{v}$ utiliser la conservation de $\vec{P}$ (car $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R}_n = \vec{0}$)

d'où $\vec{V} = -\frac{m\vec{v}}{M}$: vitesse de recul du canon.

3.3.2) Explosion et choc

* explosion : durée courte ; $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P}$ conservée
* choc : durée courte ; $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P}$ conservée

types de choc :

- mou : E_C n'est pas conservée
- élastique : E_C conservée

$\}$ $\vec{P}$ conservée.

4) Choc élastique avec vitesses colinéaires

avant le choc : $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$; après le choc : $\vec{V'_1}$ et $\vec{V'_2}$

pour trouver une relation entre $\vec{V_1}$; $\vec{V_2}$; $\vec{V'_1}$; $\vec{V'_2}$; m_1 et m_2.

choc : $\vec{P}$ conservée. (1) avec projection sur l'axe du mvt avant de prendre m en facteur

choc élastique : E_C conservée. (2)

d'après (1) : $m_1(V_1 - V'_1) = m_2(V'_2 - V_2)$

d'après (2) : $m_1(V_1 - V'_1)(V_1 + V'_1) = m_2(V'_2 - V_2)(V'_2 + V_2)$

$\frac{(2)}{(1)}$: $V'_1 = V'_2 + V_2 - V_1$ (3)

(3) dans (1) : $V'_2 = \frac{2m_1V_1 + (m_2 - m_1)V_2}{m_1 + m_2}$; $V'_1 = \frac{2m_2V_2 + (m_1 - m_2)V_1}{m_1 + m_2}$

cas particuliers :

1er cas : $V_1 = 0$; $V'_1 = \frac{2m_2V_2}{m_1 + m_2}$; $V'_2 = \frac{(m_2 - m_1)V_2}{m_1 + m_2}$

2ème cas : si $m_1 = m_2$; $V'_1 = V_2$ et $V'_2 = V_1$.

⚠ Si les masses des solides sont égales, les solides échangent leurs vitesses

* repère galiléen : repère fixe par rapport à la Terre, MRU, on peut appliquer les lois de Newton.

N.B : Si la variation de $\vec{P} f(t)$ est une ligne droite

$\frac{dP}{dt}$ = pente de la droite

1) Cinématique

1-1) Coordonnées Cartésiennes (mvt dans un plan)

vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$; $\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$; $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

vecteur vitesse : $\vec{V} = \overrightarrow{OM}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$; $\vec{V} \begin{vmatrix} V_x = x' \\ V_y = y' \end{vmatrix}$; $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

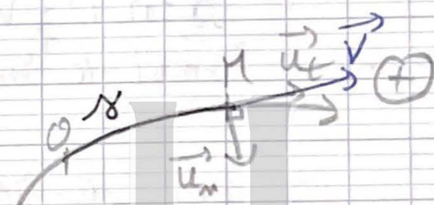
vecteur accélération $\vec{a} = \vec{V}' = \overrightarrow{OM}''$; $\vec{a} \begin{vmatrix} a_x = V_x' = x'' \\ a_y = V_y' = y'' \end{vmatrix}$

$= V_x'\vec{i} + V_y'\vec{j}$

$= x''\vec{i} + y''\vec{j}$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

1-2) Base de Frenet : $(\vec{u}_t ; \vec{u}_n)$



abscisse curviligne : $s = |\widehat{OM}|$

vitesse linéaire : $V = s'$

$\vec{V} = s' . \vec{u}_t$

accélération : $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

$a_t = V' = s''$

$a_n = \frac{V^2}{\rho}$

rayon de courbure ← ρ

$\rho = R$: mvt circulaire

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

(*) mvt rectiligne : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$; $OM = x$

$\vec{V} = x'\vec{i}$; $V = x'$

$\vec{a} = V'\vec{i}$; $a = V' = x''$

$a_n = 0$ car $\rho \longrightarrow \infty$

$\vec{a} = \vec{a}_t$

MRV : $\vec{a} = \vec{0}$

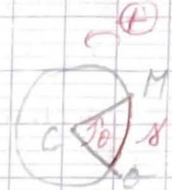
$\vec{V} = \vec{cte}$

$x = Vt + x_0$

MRUV : $\vec{a} = \vec{cte}$; $V = at + V_0$

$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$; $V^2 - V_0^2 = 2a(x - x_0)$

mvt circulaire :



- élongation (abscisse) angulaire ; $\theta = O\hat{C}M$

$s = R.\theta$

n : nb de tours effectués pendant un temps t ; $\theta = 2\pi n$

- vitesse angulaire : $\theta' = \omega$ (rd/s) ; $V = R.\theta'$

vitesse de rotation (t/s) N : nb de tours effectués pendant un temps t ; $\theta' = 2\pi N$

- accélération angulaire : θ'' (rd/s²)

$s = R.\theta$; $V = R.\theta'$; $V' = R.\theta''$; $a_t = R.\theta''$

mvt de rotation uniforme : $\theta'' = 0$; $\theta' = cte$;

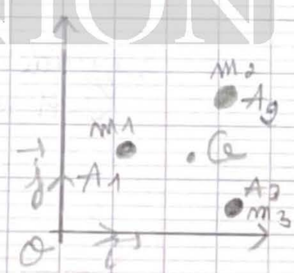
$\theta = \int \theta' dt = \theta' t + \theta_0$

mvt de rotation U.V : $\theta'' = cte$; $\theta' = \theta'' t + \theta'_0$

$\theta = \frac{1}{2}\theta'' t^2 + \theta'_0 t + \theta_0$

2) Dynamique de rotation

- centre de masse d'un système



$\vec{OG} = \frac{m_1 . \vec{OA_1} + m_2 \vec{OA_2} - - -}{m_1 + m_2 - - -}$

$x_G = \frac{m_1 . x_{A_1} + m_2 x_{A_2} - - -}{m_1 + m_2 - - -}$

$y_G = \frac{m_1 . y_{A_1} + m_2 y_{A_2} - - -}{m_1 + m_2 - - -}$

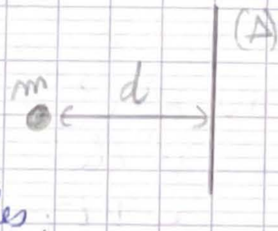
$OG = \sqrt{x_G^2 + y_G^2}$

- moment d'inertie ; I

- d'une particule :

$I_{m/\Delta} = m . d^2$

Kg.m² Kg m²



- d'un système des particules :

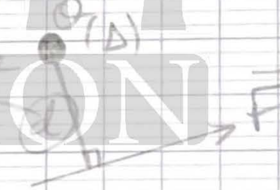
$I_{système/\Delta} = I_1 + I_2 + I_3 - - -$

moments d'inerties de qlq solides homogènes

Solide	Axe	Moment d'inertie
cerceau	axe du cerceau	$I = MR^2$
cerceau	diamètre	$I = \frac{MR^2}{2}$
cylindre creux	axe du cylindre	$I = MR^2$
disque	axe du disque	$I = \frac{MR^2}{2}$
cylindre plein	axe du cylindre	$I = \frac{MR^2}{2}$
tige de longueur L	⊥ à la tige en son milieu	$I = \frac{ML^2}{12}$
tige	⊥ à la tige en son extrémité	$I = \frac{ML^2}{3}$
sphère pleine	diamètre	$I = \frac{2MR^2}{5}$

- moment d'une force $\mathcal{M}_{\vec{F}}$

distance entre la force $\vec{F}$ et l'axe (Δ)



$\underset{N\cdot m}{\mathcal{M}_{\vec{F}/O}} = \pm \underset{N}{F} \cdot \underset{m}{d}$ (choisir un sens ⊕ et voir si la force a tendance de faire bouger le corps suivant ⊕ ou ⊖)

$\mathcal{M}_{\vec{F}\,//\,axe} = 0$

$\mathcal{M}_{\vec{F}\text{ qui rencontre l'axe}} = 0$

travail d'une force en rotation

$W_{\vec{F}} = \pm \mathcal{M}_{\vec{F}} \cdot \theta$

Chapitre 3 : Moment Cinétique

1) Moment cinétique σ

1-1) d'une particule tournant autour d'un axe fixe

$$\sigma = I \cdot \theta' \rightarrow rd/s$$

$kg\,m^2\,rd/s$ $\quad kg\,m^2$

$kg\,m^2/s$

1-2) d'un système des particules tournant autour d'un axe fixe

$$\sigma_{système} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \ldots$$
$$= I_1 \cdot \theta'_1 + I_2 \cdot \theta'_2 + I_3 \theta'_3 \ldots$$

1-3) d'un solide tournant autour d'un axe fixe

$$\sigma = I_{solide}\, \theta'$$

2) Théorème du moment cinétique

$$\boxed{\frac{d\sigma}{dt} = \Sigma \mathcal{M}_{\vec{F}ext}}$$

$$\frac{d(I \cdot \theta')}{dt} = \Sigma \mathcal{M}_{\vec{F}ext}$$

pour $I = cte$; $I \dfrac{d\theta'}{dt} = \Sigma \mathcal{M}_{\vec{F}ext}$

$$I\theta'' = \Sigma \mathcal{M}_{\vec{F}ext}$$

3) Conservation du moment cinétique

$$\frac{d\sigma}{dt} = \Sigma \mathcal{M}_{\vec{F}ext}$$

si $\Sigma \mathcal{M}_{\vec{F}ext} = 0 \Rightarrow \dfrac{d\sigma}{dt} = 0 \Rightarrow \sigma = cte$

Le moment cinétique d'un système est conservé si $\Sigma \mathcal{M}_{\vec{F}ext} = 0$.

4) Applications

I) Système déformable du moment d'inertie variable

S.E patineuse. $\sum \mathcal{M}_{\vec{F}ext} = \mathcal{M}_{\vec{P}} + \mathcal{M}_{\vec{R}n} = 0$

σ conservé

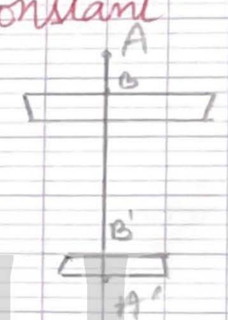
état 1: mains tendues: $\sigma_1 = I_1 . \theta'_1$

état 2: mains sur la poitrine. $\sigma_2 = I_2 . \theta'_2$.

σ conservé $\Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow \theta'_2 = \dfrac{I_1 \theta'_1}{I_2}$; $I_1 > I_2$

$\theta'_2 < \theta'_1$

II) Système déformable et moment d'inertie constant



SE: 2 tiges, $\sum \mathcal{M} = 0$, σ conservé

état 1: $\sigma_1 = 0$.

état 2: $\sigma_2 = I_1 . \theta'_1 + I_2 \theta'_2$

$\sigma_2 = \sigma_1$, $\theta'_2 = -\dfrac{I_1 \theta'_1}{I_2}$

mvt de translation	mvt de rotation
x, y V a	θ θ' θ''
masse: m	moment d'inertie: I
force $\vec{F}$	moment d'une force $\mathcal{M}$
$\vec{P} = m . \vec{V}$	moment cinétique: $\sigma = I . \theta'$
2ème loi: $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$	$\dfrac{d\sigma}{dt} = \sum \mathcal{M}_{\vec{F}ext}$
$\sum \vec{F}ext = \vec{0} \Rightarrow \vec{P}$ conservée	$\sum \mathcal{M}_{\vec{F}ext} = \vec{0} \Rightarrow \sigma$ conservé

N.B:

Un couple des forces est formé par 2 forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$: $\overline{m}$ module, $\overline{m}$ direction sens $\neq$, n'ont pas la $\overline{m}$ ligne d'action

moment du couple: $\mathcal{M}_{couple/\Delta} = F . d$

$F_1 = F_2 = F$; $d = d_1 + d_2$