VI- (7 points)

Soit f la fonction définie sur $I =]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + \ln x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

A- 1) Calculer f '(x) et déterminer le sens de variations de f sur $]0;+\infty[$.

2) a- Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).

b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c- Dresser le tableau de variations de f.

d- Déduire que l'équation $x^2 + \ln x = 0$, admet une solution unique α et que $0,6 < \alpha < 0,7$. Etudier le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

3) a- Démontrer que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera l'abscisse.
b- Tracer (C).

4) a- Démontrer que f admet sur I, une fonction réciproque f^{-1} dont on déterminera le domaine de définition.

b- Soit (C') la courbe représentative de f^{-1}. Prouver que le point A(1;1) est commun à (C) et (C') et tracer (C') dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

c- Ecrire une équation de la tangente en A à (C').

d- Soit $S(\alpha)$ l'aire du domaine limité par (C), (C'), l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. Calculer $S(\alpha)$.

B- Soit (T) la courbe représentative de la fonction h définie sur $I =]0;+\infty[$ par $h(x) = \ln x$.

1) Etudier la position relative de (C) et (T) et tracer (T) dans le même repère que (C).

2) Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$.

a- Calculer g'(x) et vérifier que $g'(x) = \frac{2}{x} f(x)$.

b- En déduire le sens de variations de g sur I.

3) Soit M_0 le point de (T) d'abscisse α et M un point quelconque de (T) d'abscisse x.

a- Calculer OM_0^2 en fonction de α et OM^2 en fonction de x.

b- Prouver que $OM_0 \leq OM$ pour tout x de I.

c- Démontrer que la tangente en M_0 à (T) est perpendiculaire à (OM_0).

On considère la fonction h définie sur IR par : $h(x) = e^{2x} + 2e^{x} - 2$.

A –

1) a- Résoudre l'équation $h(x) = 0$.

b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$.

2) a- Dresser le tableau de variations de h.

b- Tracer la courbe représentative (H) de h dans un repère orthonormé.

c- Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (H), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

B –

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = \dfrac{e^{2x}+2}{e^{x}+1}$ et f la fonction donnée par $f(x) = \ln(g(x))$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un nouveau repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$. (unité graphique : 2 cm)

1) a-Montrer que f est définie pour tout réel x.

b- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et en déduire une asymptote (d) à (C).

2) a- Montrer que $f(x) = x + \ln\left(\dfrac{1+2e^{-2x}}{1+e^{-x}}\right)$.

b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et démontrer que la droite (d') d'équation $y = x$ est asymptote à (C).

c- Etudier suivant les valeurs de x la position relative de (C) et (d').

3) a- Montrer que $g'(x) = \dfrac{e^{x}\left(h(x)\right)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$.

b- Montrer que $f'(x)$ et $h(x)$ ont même signe et dresser le tableau de variations de f.

c- Trouver l'abscisse du point de la courbe (C) où la tangente à (C) est parallèle à (d').

4) Tracer (d), (d') et (C).

C –

On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f sur l'intervalle $[0\,; +\infty[$;
(C') est la courbe représentative de f^{-1}.

1) Tracer (C') dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

2) Ecrire une équation de la tangente à (C') au point d'abscisse ln2.