# TOGETHER WE CAN

*an educational and social initiative committed to helping individuals learn and grow together to pursue their passions and make a positive impact.*


@wecantogether

https://linktr.ee/together_we_can

@wecantogether0

wecantogether70@gmail.com

+961-76 096391

These files have been meticulously arranged by the 'Together We Can' team,
as we wish you the best of luck on your academic journey,
filled with happiness and success

Join us in creating a better tomorrow,
hand in hand!

@wecantogether
https://linktr.ee/together_we_can
@wecantogether0
wecantogether70@gmail.com
+961-76 096391

وزارة التربية والتعليم العالي
المديريّة العامّة للتربية
دائرة الامتحانات الرسميّة

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع: علوم الحياة

دورة العام 2023 العاديّة
الاثنين 10 تموز 2023

| | | |
|---|---|---|
| عدد المسائل: ثلاث | مسابقة في مادة الرياضيات | الاسم: |
| | المدة: ساعة ونصف | الرقم: |

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة)

**I- (4 points)**

In the table below, only one among the proposed answers to each question is correct.

Write the number of each question and give, **with justification**, the answer that corresponds to it.

| Nº | Questions | Proposed answers | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **a** | **b** | **c** |
| **1** | The solution of the equation $2\ln(x) = \ln(25)$ is | 5 | $\frac{25}{2}$ | $-5$ |
| **2** | Consider the function f defined over $]e , +\infty[$ as $f(x) = x - 3 - \frac{3\ln x}{1 - \ln x}$ and denote by (C) its curve in an orthonormal system $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.<br>(C) admits two asymptotes with equations | $x = 1$ and $y = x - 3$ | $x = e$ and $y = x$ | $x = -e$ and $y = x - 3$ |
| **3** | The table below is the table of variations of a continuous function f over $[0 , +\infty[$.<br>$\begin{array}{c\|ccccccc} x & 0 & & 1 & & e & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & 5 & \searrow & -2 & \nearrow & 3 & \searrow & -1 \end{array}$<br>The image of the interval $I = [1 , +\infty[$ by f is | $[-2 , 3]$ | $[-2 , -1[$ | $]-1 , 3]$ |
| **4** | A code is a number formed of three digits using the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 and 9.<br>The number of possible even codes greater than or equal to 300 is | 280 | 350 | 500 |

**II- (6 points)**

During the financial crisis in Lebanon, a study on a group of teachers showed that:

- 30% currently work abroad out of which:
  - 40% teach at private schools only.
  - 20% teach at public schools only.
  - The remaining teachers started working in another domain.
- Out of those who stayed in Lebanon:
  - 50% teach at private schools only.
  - 40% teach at public schools only.
  - The remaining teachers retired and stopped working.

A member from the group is randomly interviewed. Consider the following events:

A: “The interviewed member currently work abroad”

R: “The interviewed member teaches at private schools only”

U: “The interviewed member teaches at public schools only”

D: “The interviewed member works in another domain”

N: “The interviewed member is retired and stopped working”.

1) **a)** Calculate the probabilities $P(A \cap R)$ and $P(\overline{A} \cap R)$.

**b)** Verify that $P(R) = 0.47$.

2) Calculate $P(U)$.

3) Show that the probability that the interviewed member is still teaching or is working in another domain is 0.93.

4) The interviewed member does not teach at private schools.
Calculate the probability that the member stayed in Lebanon.

5) The group consists of 500 teachers.

**a)** Show that the number of teachers that teach at private schools is 235.

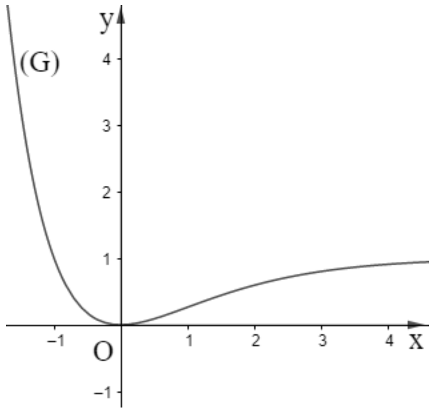
**b)** Three members are interviewed from this group.
Calculate the probability of interviewing at least two members who teach at private schools.

**III- (10 points)**

The plane is referred to an orthonormal system $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

**Part A**

The adjacent curve (G) is the representative curve of a differentiable function g over $]-\infty; +\infty[$.




(G) is tangent to the x-axis at O.

1) Using the curve (G):

**a)** Verify that $g(x) \geq 0$ for all real numbers x.

**b)** The function g' is the derivative of g.
Study, according to the values of x, the sign of g'.

2) Knowing that $g(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$ where a and b are two real numbers, show that $a = b = -1$.

**Part B**

Consider the function f defined, on $\mathbb{R}$, as $f(x) = (x + 2)e^{-x} + x$.
Denote by (C) the representative curve of f.
Let (D) be the line with equation $y = x$.

1) Determine $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ and calculate $f(-2.5)$.

2) **a)** Determine $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

**b)** Show that the line (D) is an asymptote to (C).

**c)** Study, according to the values of x, the position of (C) with respect to (D).

3) Show that $f'(x) = g(x)$ then set up the table of variations of f.

4) **a)** Show that the equation $f(x) = 0$ has, on $\mathbb{R}$, a unique root $\alpha$.

**b)** Verify that $-1.7 < \alpha < -1.6$.

5) **a)** Prove that (C) has an inflection point W whose coordinates are to be determined.

**b)** Show that the line (T) with equation $y = 2$ is tangent to (C) at W.

6) Draw (T), (D) and (C).

7) Consider the function h defined over $]-2 , 0[$ as $h(x) = \dfrac{\ln(x + 2) - \ln(-x)}{x}$.

Prove that $h(\alpha)$ is a natural number to be determined.

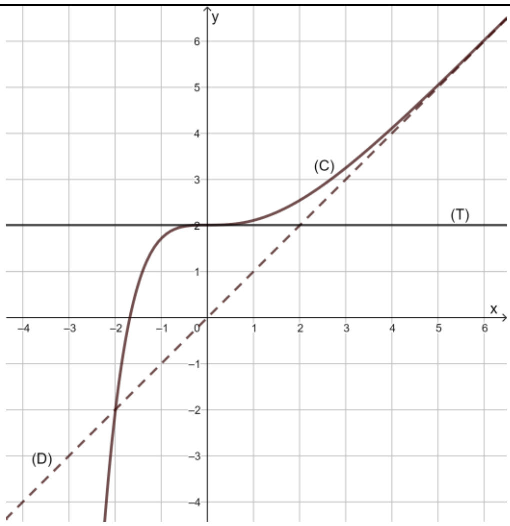
عدد المسائل: ثلاث

اسس تصحيح مادة الرياضيات

| I | Answers | | | Answers | 6 pts |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\ln x^2 = \ln 25$ ; $x > 0$<br>$x^2 = 25$<br>then $x = 5$<br>Answer : a | 1.5 | 2 | $\lim\limits_{x \to e^+} f(x) = e - 3 - \frac{3}{0^-} = +\infty$, so $x = e$ is a vertical asymptote.<br>OR:<br>$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = -3 + 3 = 0$, so $y = x$ is an oblique asymptote at $+\infty$.<br>Answer: b | 1.5 |
| 3 | f changes variation over $I = [1; +\infty[$, so $f(I) = [\min(f); \max(f)] = [-2; 3]$.<br>Answer: a | 1.5 | 4 | Number of possible even codes greater or equal to 300 is: $7 \times 10 \times 5 = 350$.<br>Answer: b | 1.5 |

| II | Answers | 9 pts |
|---|---|---|
| 1a | $P(A \cap R) = P(A) \times P(R/A) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$<br>$P(\overline{A} \cap R) = P(\overline{A}) \times P(R/\overline{A}) = 0.7 \times 0.5 = 0.35$ | 0.75<br>0.75 |
| 1b | $P(R) = P(A \cap R) + P(\overline{A} \cap R) = 0.12 + 0.35 = 0.47$ | 0.75 |
| 2 | $P(U) = P(A \cap U) + P(\overline{A} \cap U) = 0.3 \times 0.2 + 0.7 \times 0.4 = 0.34$ | 1.5 |
| 3 | $P(\text{still working in teaching or other domains}) = 0.3 + 0.7 \times 0.5 + 0.7 \times 0.4 = 0.93$<br>**Or**<br>$P(\overline{N}) = 1 - P(N) = 1 - 0.7 \times 0.1 = 0.93$ | 1.5 |
| 4 | $P(\overline{A}/\overline{R}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \dfrac{P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap R)}{1 - P(R)} = \dfrac{0.7 - 0.35}{1 - 0.47} = \dfrac{35}{53}$ | 1.5 |
| 5a | Number of teachers that teach in private schools $= P(R) \times 500 = 0.47 \times 500 = 235$ | 0.75 |
| 5b | $P(\text{at least 2 teachers who teach at private schools}) = \dfrac{235C2 \times 265C1 + 235C3}{500C3} \approx 0.455$ | 1.5 |

| III | Answers | 15 pts |
|---|---|---|
| A1a | Over $]-\infty; +\infty[$ , (G) is above the x-axis and intersects it at O, so $g(x) \geq 0$ for all values of x.. | 0.75 |
| A1b | If $x \in ]-\infty; 0[$ , (G) is strictly decreasing, so $g'(x) < 0$.<br>If $x \in ]0; +\infty[$ , (G) is strictly increasing, so $g'(x) > 0$.<br>If $x = 0$ , $g'(x) = 0$. | 0.75 |
| A2 | $g(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$<br>$g(0) = 0$, gives $b + 1 = 0$, so $b = -1$<br>$g'(x) = (a - ax + 1)e^{-x}$<br>$g'(0) = 0$, gives $a + 1 = 0$, so $a = -1$ | 0.75 |
| B1 | $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \times +\infty - \infty = -\infty - \infty = -\infty$<br>$f(-2.5) \approx -8.59$ | 0.75<br>0.5 |
| B2a | $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x+2}{e^x} + x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{e^x} + x\right) = 0 + \infty = +\infty$ (Règle de l'Hôpital ) | 0.75 |
| B2b | $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+2}{e^x} = 0$ (proved).<br>Thus (d): $y = x$ is an asymptote to (C). | 0.75 |

<table>
<tr><td>B2c</td><td colspan="4">$f(x) - y_D = (x+2)e^{-x}$<br>If $x \in \,]-\infty; -2[$ , (C) is below (D).<br>If $x \in \,]-2; +\infty[$ , (C) is above (D).<br>(C) and (D) intersect at the point $(-2; -2)$.</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>B3</td><td colspan="4">$f'(x) = (1 - x - 2)e^{-x} + 1 = (-x-1)e^{-x} + 1 = g(x)$<br>So $f'$ and g have the same sign and roots, so $f'(x) \geq 0$.<br>$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & + & \\ \hline f(x) & -\infty & & \nearrow & & +\infty \end{array}$$</td><td>1<br>1</td></tr>
<tr><td>B4a</td><td colspan="4">Over $]-\infty; +\infty[$ : f is continuous and strictly increasing from $-\infty$ to $+\infty$, so (C) cuts the x-axis at one point only, then the equation $f(x) = 0$ has a unique root $\alpha$.</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>B4b</td><td colspan="4">$f(-1.7) \approx -0.05 < 0$ and $f(-1.6) \approx 0.38 > 0$.<br>Thus, $-1.7 < \alpha < -1.6$</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>B5a</td><td colspan="4">$f''(x) = g'(x) = xe^{-x}$.<br>Thus, $f''(x)$ vanishes at $x = 0$ and changes sign from negative to positive, so (C) admits at $x = 0$ a point of inflection W of coordinates $(0; 2)$.</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>B5b</td><td colspan="4">$f'(0) = g(0) = 0$, so the tangent to (C) at $x = 0$ is parallel to the x-axis.<br>Also, $f(0) = 2$ so the equation of this tangent is $y = 2$.<br>Thus (T): $y = 2$ is tangent to (C) at W(0 , 2).</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>B6</td><td>
</td><td>1.75</td><td>B7b</td><td>$f(\alpha) = 0$ gives $(\alpha+2)e^{-\alpha} + \alpha = 0$, then $e^{-\alpha} = \frac{-\alpha}{\alpha+2}$ , then $-\alpha = \ln(\frac{-\alpha}{\alpha+2})$,<br>then $\ln(\alpha+2) - \ln(-\alpha) = \alpha$.<br>Therefore, $h(\alpha) = \frac{\ln(\alpha+2) - \ln(-\alpha)}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$.</td><td>1.5</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| عدد المسائل: ثلاث | مسابقة في مادة الرياضيات | الاسم: |
| | المدة: ساعة ونصف | الرقم: |

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

**I- (4 points)**

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

| Nº | Questions | Réponses proposées | | |
|---|---|---|---|---|
| | | a | b | c |
| 1 | $= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)e^x}{x}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 |
| 2 | x est un nombre réel. Le nombre de solutions de l'équation = 0 est $e^{2x}-2e^x-3$ | 0 | 1 | 2 |
| 3 | Pour tout réel $a > 0$. $ln\, ln\,(a\sqrt{e})\ + 2\, ln\, ln\,(e\sqrt{a})\ + ln\, ln\,\left(\frac{1}{a^2}\right)\ =$ | $\frac{5}{2}$ | 4ln(a) | ln(a) |
| 4 | Soit f la fonction définie et continue sur $R$ par f(x) = $e^{-2x}$ . L'image de l'intervalle [0 ; +∞[ par $f$ est | [0 ; 1] | ]0 ; 1] | ]0 ; +∞[ |

**II- (6 points)**

Une compagnie d'assurance médicale propose à ses clients trois types de contrat interne :
Contrat A, contrat B et contrat C.
Chaque client choisit seulement un contrat interne et il peut ajouter un contrat externe E.

Une étude statistique a montré que :

- 30 % ont choisi le contrat A et parmi eux 30 % ont ajouté le contrat externe E.
- 45 % ont choisi le contrat B et parmi eux 25 % ont ajouté le contrat externe E.
- Le reste a choisi le contrat C et parmi eux 10 % ont ajouté le contrat externe E.

On choisit au hasard un client de cette compagnie. On considère les événements suivants :

A : « le client a choisi le contrat interne A ».
B : « le client a choisi le contrat interne B ».
C : « Le client a choisi le contrat interne C ».
E : « Le client a ajouté le contrat externe E ».

**a)** Calculer les probabilités suivantes P(A ∩ E), P(B ∩ E) et P(C ∩ E). (1

**b)** Vérifier que P(E) = $\frac{91}{400}$ .

**2)** Le client choisi n'a pas ajouté le contrat externe E. Calculer qu'il a choisi le contrat A.

**3)** Montrer que la probabilité que le client choisi a ajouté le contrat externe E sachant qu'il a choisi un des deux contrats A ou B, est égale à 0,27.

**4)** Le nombre de clients de cette compagnie est 2000 et ils sont représentés dans le tableau suivant :

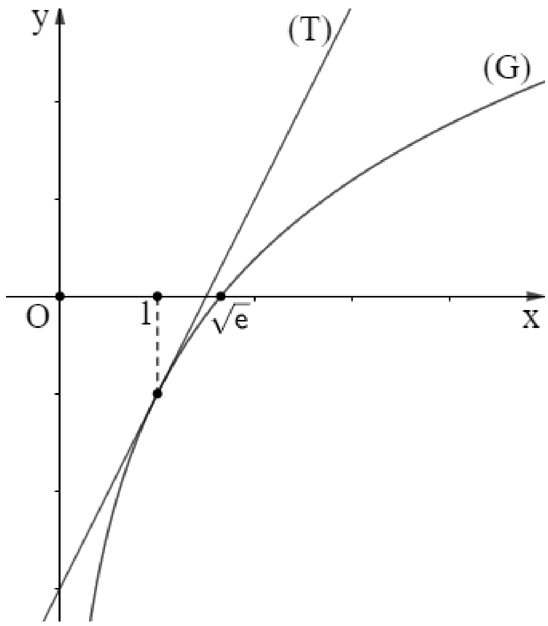
| | A | B | C | Total |
|---|---|---|---|---|
| E | 180 | 225 | 50 | 455 |
| $\underline{E}$ | 420 | 675 | 450 | 1545 |
| Total | 600 | 900 | 500 | 2000 |

On choisit au hasard trois clients de cette compagnie.
Calculer la probabilité que les trois clients choisis ont ajouté chacun le contrat externe E. (**a**
Les trois clients choisis ont ajouté chacun le contrat externe E. Calculer la probabilité qu'au (**b**
moins un d'eux a choisi le contrat A.

**III- (10 points)**

**Partie A**

Dans la figure ci-contre :




- (G) est la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i},\vec{j})$ d'une fonction g définie sur $]0\ ;+\infty[$.
- La droite (T) d'équation y = 2x – 3 est tangente à (G) au point d'abscisse 1.
- La courbe (G) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\sqrt{e}$.

**1)** Déterminer g($\sqrt{e}$) et g'(1).

**2)** **a)** Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (G) et l'axe des abscisses.

**b)** En déduire le signe de g(x) pour tout x ∈ $]0\ ;+\infty[$.

**Partie B**

Soit $f$ la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = (ln\ ln\ x\ )^2 - ln\ ln\ x$ .

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i},\vec{j})$.

**1)** Montrer que l'axe des ordonnées est asymptote à (C).

**2)** **a)** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}$ f(x).

**b)** Calculer $f(6)$ à $10^{-1}$ près.

**3)** On sait que $f\ '(x) = \frac{1}{x}\,g(x)$.

Dresser le tableau de variations de $f$.

**4)** Déterminer les points d'intersection de $(C)$ et l'axe des abscisses.

**5)** Tracer $(C)$.

**Partie C**

Soit h la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par h(x) = $e^{-f(x)}$.

**1)** Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+}$ h(x) et $\lim\limits_{x\to+\infty}$ h(x).

**2)** Dresser le tableau de variations de h.

وزارة التربية والتعليم العالي
المديرية العامة للتربية
دائرة الامتحانات الرسمية

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع: علوم الحياة

دورة العام ٢٠٢٢ العادية
الأربعاء في ٢٩ حزيران ٢٠٢٢

[redacted]

عدد المسائل: ثلاث

مسابقة في مادة الرياضيات
المدة: ساعة ونصف

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

## I- (5 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

| N° | Questions | Réponses proposées | | |
|---|---|---|---|---|
| | | a | b | c |
| 1 | Pour $x > 2$, la solution de l'équation $\ln(x-2) = 2$ est | 4 | $e^2 + 2$ | $e^4$ |
| 2 | Le domaine de définition de la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{\ln(x+2)}{x-1}$ est | $[-2\,;+\infty[$ | $]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ | $]-2\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ |
| 3 | $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x}{x+e} =$ | $+\infty$ | 1 | $\dfrac{1}{e}$ |
| 4 | Si A et B sont deux événements indépendants d'un même univers tel que $P(A \cap B) = 0{,}32$ et $P(B) = 2 \times P(A)$, alors la probabilité $P(A)$ est égale à | 0,4 | 0,08 | 0,8 |
| 5 | Une boîte contient 2 boules rouges, 4 boules vertes et 5 boules bleues. Trois boules sont tirées simultanément et au hasard de cette boîte. Quelle est le nombre de tirages possibles contenant trois boules de même couleur ? | 40 | 84 | 14 |

## II- (5 points)

Un sondage réalisé auprès des étudiants de la troisième année secondaire d'une certaine ville au Liban montre les résultats suivants :

- 80 % veulent continuer leurs études universitaires au Liban, parmi eux 5 % ont l'intention de se spécialiser en médecine.
- Le reste veulent continuer leurs études universitaires à l'étranger, parmi eux 10 % ont l'intention de se spécialiser en médecine.

On choisit au hasard un étudiant ayant répondu au sondage.
On considère les événements suivants :

L : « L'étudiant veut continuer ses études universitaires au Liban »
M : « L'étudiant a l'intention de se spécialiser en médecine ».

1) a) Calculer la probabilité $P(M \cap L)$ et vérifier que $P(M \cap \overline{L}) = 0{,}02$.
b) En déduire $P(M)$.
c) Est-il vrai que plus que 90 % des étudiants n'ont pas l'intention de se spécialiser en médecine ? Justifier votre réponse.

2) L'étudiant choisi n'a pas l'intention de se spécialiser en médecine. Quelle est la probabilité que cet étudiant ait voulu continuer ses études universitaires au Liban ?

## III- (10 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

### Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 - xe^{-x+1}$.

1) Vérifier que $g'(x) = (x-1)e^{-x+1}$.

2) Copier puis compléter le tableau de variations de g suivant.

| x | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | | 2 |

3) En déduire sur $\mathbb{R}$ le signe de $g(x)$.

### Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + (x+1)e^{-x+1}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative.

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et calculer $f(-1,5)$.

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   b) Montrer que la droite (d) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à (C).

   c) Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).

3) a) Sachant que $f'(x) = g(x)$, montrer que f est strictement croissante pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   b) Dresser le tableau de variations de f.

4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique $\alpha$.

   b) Vérifier que $-0,8 < \alpha < -0,7$.

5) Tracer (d) et (C).

### Partie C

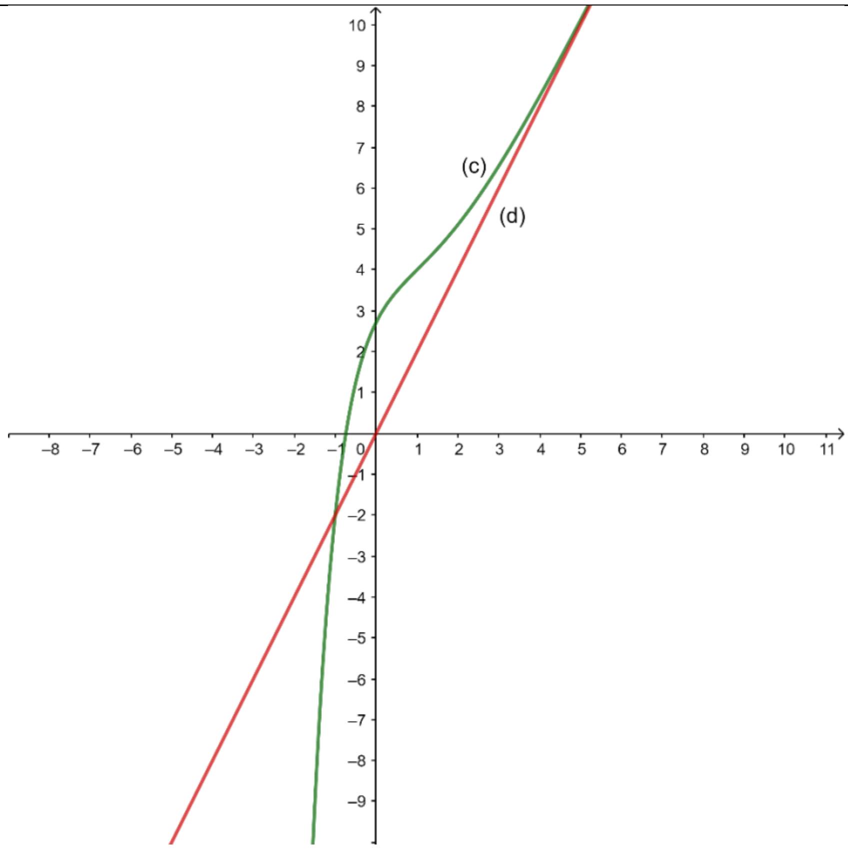
On considère la fonction h définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $h(x) = \ln[f(x) - 2x]$ et on désigne par (H) sa courbe représentative.

Trouver l'abscisse du point A de (H) où la tangente à (H) est parallèle à l'axe des abscisses.

m pente

## أسس تصحيح مسابقة الرياضيات

| Q.I | Answer key | 4 pts |
|---|---|---|
| 1 | $ln\ ln\ (x-2) = ln\ ln\ e^2$<br>$x-2=e^2$<br>$x=e^2+2$<br>Answer: b | 1 |
| 2 | $x+2>0\ and\ x-1\neq 0$<br>$x>-2\ and\ x\neq 1$<br>$D=]-2\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$<br>Answer: c | 1 |
| 3 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xlnln\,x}{x+e}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+e}\right)(ln\ ln\ x)\ =+\infty$<br>Answer: a | 1 |
| 4 | $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0.32$<br>$P(A)\times 2P(A)=0.32$<br>$2[P(A)]^2=0.32$, then $[P(A)]^2=0.16$<br>Then $P(A)=0.4$.<br>Answer a. | 1 |
| 5 | $4C3+5C3=14$<br>Answer c. | 1 |
| **Q.II** | **Answer key** | **6 pts** |
| 1a | $P(M\cap L)\ =P(L)\times P(M/L)=0.8\times 0.05=0.04$<br>$P(M\cap \underline{L})\ =P(\underline{L})\times P(M/\underline{L})=0.1\times 0.2=0.02$ | 1<br>1 |
| 1b | $P(M)=P(M\cap L)+P(M\cap\underline{L})=0.04+0.02=0.06$ | 1 |
| 1c | $P(\underline{M})=0.94=94\%>90\%$, so true | 1 |
| 2 | $P(L/\underline{M})=\frac{P(L\cap\underline{M})}{P(\underline{M})}=\frac{0.8\times 0.95}{0.94}=\frac{38}{47}$ | 0.5 |
| **Q.III** | **Answer key** | **10 pts** |
| A1 | $g'(x)=-e^{-x+1}+xe^{-x+1}=(x-1)e^{-x+1}$. | 0.5 |
| A2 | $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 1 & & +\infty \\ \hline g'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline g(x) & +\infty & \searrow & 1 & \nearrow & 2 \end{array}$ | 0.5 |
| A3 | g is continuous on $R$ and admits an absolute minimum equal 1 at $x=1$.<br>Therefore, $g(x)\geq 1$ for all x, so $g(x)>0$ for all x. | 0.5 |
| B1 | $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$<br>$f(-1.5)\approx -9.1$ | 0.5<br>0.5 |
| B2a | $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\cdots=+\infty+0=+\infty$ | 0.5 |
| B2b | $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=\cdots=0$ | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| **B2c** | If $x < -1$, (C) is below (d)<br>If $x > -1$, (C) is above (d)<br>(C) cuts (d) at $(-1;-2)$. | **1** |
| **B3a** | $f'(x)$ = g(x) and g(x) > 0, then f '(x) > 0, then f is strictly increasing over $R$. | **0.5** |
| **B3b** | $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & +\infty \end{array}$ | **1** |
| **B4a** | f is continuous and strictly increasing over $R$ and y increases from $-\infty$ to $+\infty$, so (C) cuts the x'x at only one point, so f(x) = 0 has a unique solution $\alpha$. | **1** |
| **B4b** | $f(-0.8) \times f(-0.7) = -0.39 \times 0.42 = -0.16 < 0$<br>So $-0.8 < \alpha < -0.7$. | **0.5** |
| **B5** |  | **1.5** |
| **C** | $h'(x) = \frac{-x}{x+1}$<br>$\frac{-x_A}{x_A+1} = 0$, then $x_A = 0$ | **1** |

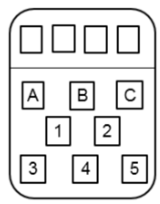
| وزارة التربية والتعليم العالي | امتحانات الشهادة الثانوية العامة | دورة العام 2021 الاستثنائية |
|---|---|---|
| المديريّة العامّة للتربية | فرع: علوم الحياة | السبت في 4 أيلول 2021 |
| دائرة الامتحانات الرسميّة | | |

| عدد المسائل: ثلاث | مسابقة في مادة الرياضيات | الاسم: |
|---|---|---|
| | المدة: ساعة ونصف | الرقم: |

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة)

**I- (4 points)**

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

| **N°** | **Questions** | **Réponses proposées** | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **a** | **b** | **c** |
| **1** | L'inéquation $\ln x < 1$ est vérifiée pour | $x < 0$ | $0 < x < e$ | $x > e$ |
| **2** | L'équation $\ln^2 x + \ln x - 6 = 0$ admet deux solutions $x_1$ et $x_2$.<br>Le produit $x_1.x_2$ est égal à | $-6$ | $e^{-1}$ | $e^{30}$ |
| **3** | $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\ln x}{x}+1\right) =$ | $+\infty$ | 1 | 2 |
| **4** | Le clavier d'entrée d'un immeuble est formé de trois lettres A, B et C et de cinq chiffres 1, 2, 3, 4 et 5.<br>Le code d'entrée est formé d'une lettre suivie d'un nombre de trois chiffres distincts.<br>Le nombre de tous les codes possibles est  | 15 | 180 | 375 |



**II- (6 points)**

Une urne U contient des boules rouges et des boules noires numérotées par des entiers naturels distincts.

- 60 % des boules sont rouges, parmi lesquelles 80 % portent des entiers impairs.
- 70 % des boules noires portent des entiers impairs.

**Partie A**

On tire au hasard une boule de l'urne U. On considère les événements suivants :

R : « la boule tirée est rouge » et I : « la boule tirée porte un nombre impair ».

1) Montrer que la probabilité $P(I \cap R)$ est égale à 0,48 et calculer $P(I \cap \overline{R})$.
2) En déduire que $P(I) = 0{,}76$.
3) Les événements R et I sont-ils indépendants ? Justifier.

**Partie B**

Dans cette partie on suppose que le nombre des boules dans l'urne U est 50.

1) Montrer que le nombre des boules rouges portant des nombres impairs est 24.
2) Copier et compléter le tableau suivant :

| | Rouge | Noire | Total |
|---|---|---|---|
| Impair | | | 38 |
| Pair | | | |
| Total | 30 | | 50 |

3) On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne U.
   **a-** Calculer la probabilité de tirer au moins une boule rouge portant un nombre impair.
   **b-** Les boules portant des nombres pairs sont numérotées 2, 4, 6, …, 24.
   Sachant que les 3 boules tirées portent des nombres pairs, calculer la probabilité que chacune de ces boules porte un nombre plus grand que 15.

**III- (10 points)**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On considère la fonction f définie, sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = 2xe^{-x+1} + 1$ et on désigne par (C) sa courbe représentative.

1) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. En déduire une asymptote (d) à (C).

3) Montrer que $f'(x) = 2(1-x)e^{-x+1}$.

4) Copier et compléter le tableau de variations de f suivant.

| x | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | 0 | |
| f(x) | | | |

5) **a-** Montrer que l'équation f(x) = 0 admet, sur $\mathbb{R}$, une solution unique $\alpha$.

**b-** Vérifier que $-0{,}16 < \alpha < -0{,}15$.

6) Calculer f(–0,5) et f(0) puis tracer (C) et (d).

7) **a-** Montrer que $\int xe^{-x+1}dx = (-x-1)e^{-x+1} + K$ où K est un réel.

**b-** En déduire l'aire du domaine limité par (C), la droite d'équation y = 3 et les deux droites d'équations x = 0 et x = 4.

عدد المسائل: ثلاث

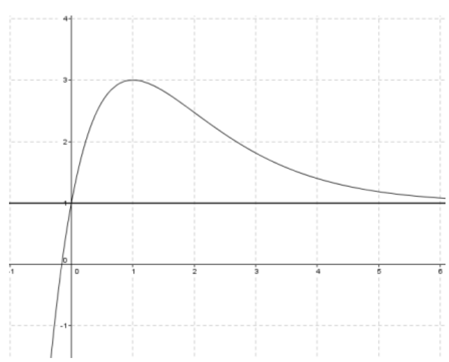
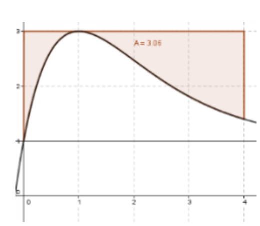
**اسس تصحيح مادة الرياضيات**

| I | Answers | | Grade 4 pts |
|---|---|---|---|
| 1 | $\ln x < 1$ . So, $x < e$ but $x > 0$ . Thus , $0 < x < e$ | (b) | 1 |
| 2 | The roots of the equation : $\ln^2 x+\ln x-6=0$ are $x_1=e^{-3}$ et $x_2=e^2$. then $x_1.x_2=e^{-1}$ | (b) | 1 |
| 3 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\ln x}{x}+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{\ln x}{x}+1\right)=1+0+1=2$ since $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=0$ | (c) | 1 |
| 4 | The number of all codes is : $3\times A_5^3=180$ | (b) | 1 |

| II | Answers | Grade 6 pts |
|---|---|---|
| A1 | $P(O\cap R)=P(O/R)\times P(R)=0.8\times 0.6=0.48$<br>$P(O\cap \overline{R})=P(O/\overline{R})\times P(\overline{R})=0.7\times 0.4=0.28$ | 1 |
| A2 | $P(O)=P(O\cap R)+P(O\cap \overline{R})=0.48+0.28=0.76$ | 0.5 |
| A3 | Since $P(O\cap R)=0.48\neq P(O)\times P(R)=0.76\times 0.6=0.456$<br>Then, the events R and O are not independent. | 0.5 |
| B1 | The number of red balls holding odd numbers is $50\times 0.48=24$ | 1 |
| B2 | (see table below) | 1 |
| B3.a | P (selecting at least one red ball holding an odd number) $=1-\frac{C_{26}^3}{C_{50}^3}=\frac{85}{98}$ | 1 |
| B3.b | 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; <u>16</u> ; <u>18</u> ; <u>20</u> ; <u>22</u> ; <u>24</u><br>P (each of the balls holds a number greater than 15/ knowing that the numbers on the balls are even) $=\frac{C_5^3}{C_{12}^3}=\frac{1}{22}$ | 1 |

B2:

| | Red | Black | Total |
|---|---|---|---|
| Odd | 24 | 14 | 38 |
| Even | 6 | 6 | 12 |
| Total | 30 | 20 | 50 |

<table>
<tr><th>III</th><th>Answers</th><th>Grade<br>10 pts</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)(+\infty)+1 = -\infty$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} (2x)e^{-x+1} = +\infty \,.\, 0$ Indeterminate form ;<br><br>$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} = \frac{0}{0}$ I.F. then $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{x-1}}$ Using HR $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = 0$.<br>Thus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0+1 = 1$<br><br>(d) : $y = 1$ is an asymptote to (C).</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$f'(x) = (2x)'.\, e^{-x+1} + (-e^{-x+1})\,.2x + 0 = 2(1-x)e^{-x+1}$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>4</td><td><table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>–</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>$\nearrow$</td><td>3</td><td>$\searrow$</td><td>1</td></tr>
</table></td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>5.a</td><td>• Over ] $-\infty$ ; 1 [ : f is continuous , strictly increasing from $-\infty$ to 3 then the equation f(x) = 0 has one solution $\alpha$<br>• Over [ 1 ; $+\infty$ [ : f is continuousstrictly decreasing from 3 to 1 then , the equation f(x) = 0 has no solution.<br><br>Therefore, the equation f(x) = 0 has, on $\mathbb{R}$, a uniques solution $\alpha$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5.b</td><td>$f(-0.16) \approx -0.02 < 0$<br>$f(-0.15) \approx +0.05 > 0$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$f(-0.5) = -e^{1.5} + 1 \approx -3.481$<br>$f(0) = 1$<br></td><td>2</td></tr>
<tr><td>7.a</td><td>$(-x-1)'e^{-x+1} + (-x-1)(e^{-x+1})' = (-1+x+1)\, e^{-x+1} = xe^{-x+1}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7.b</td><td>$A = \int_0^4 [3-f(x)]dx = \int_0^4 [2-2xe^{-x+1}]dx$<br>$= [\, 2x + 2(x+1)e^{-x+1}]_0^4 = 8 + 10\, e^{-3} - 2\, e \approx 3.06$ (units)$^2$.<br></td><td>1.5</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| عدد المسائل: ثلاث | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة: ساعة ونصف الساعة | الاسم:<br>الرقم: |

**ملاحظة:** - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه ( دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

**I- (4 points)**

Dans le tableau suivant une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Écrire le numéro de chaque question et donner, en **justifiant**, la réponse qui lui correspond.

| № | Questions | Réponses a | Réponses b | Réponses c |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Soit f la fonction donnée par $f(x) = \dfrac{\ln(x-2)}{x}$ Le domaine de définition de f est | $[0 ; +\infty[$ | $]2 ; +\infty[$ | $]0 ; 2[ \cup ]2 ; +\infty[$ |
| 2 | La solution de l'équation $\ln(x-2) = \ln(-x+4)$ est | 1 | 2 | 3 |
| 3 | Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. Une primitive de f est | $(\ln(x))^2$ | $\dfrac{(\ln(x))^2}{2}$ | $2(\ln(x))^2$ |
| 4 | $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln(x)}{\ln(x)}$ est égale à | 0 | 1 | $+\infty$ |

**II- (6 points)**

On dispose de deux urnes U et V :

- U contient 3 boules rouges et 5 boules bleues.
- V contient 4 boules rouges et 3 boules bleues.

**Partie A**

On tire au hasard une boule de l'urne U et une boule de l'urne V.

1) Montrer que la probabilité de tirer deux boules rouges est $\frac{3}{14}$.
2) Calculer la probabilité de tirer deux boules de même couleur.
3) Calculer la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes.

**Partie B**

Dans cette partie, on tire au hasard une boule de l'urne U :

- si la boule tirée de l'urne U est rouge, alors on tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne V.
- si la boule tirée de l'urne U est bleue, alors on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne V.

On considère les évènements suivants :

R : « la boule tirée de l'urne U est rouge »

S : « les boules tirées de l'urne V sont de même couleur ».

1) Déterminer la probabilité P(R).
2) Montrer que $P(S / R) = \frac{3}{7}$ et en déduire $P(S \cap R)$.
3) La probabilité $P\left(S \cap \overline{R}\right) = \frac{5}{56}$, calculer P(S).

**III- (10 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 2$.

On désigne par $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $(d)$ la droite d'équation $y = -x - 2$.

1) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Calculer $f(2)$.

2) **a-** Déterminer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

   **b-** Démontrer que $(d)$ est une asymptote à $(C)$ en $-\infty$.

   **c-** Démontrer que $(C)$ est au-dessus de $(d)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Déterminer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f.

4) L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions $\alpha > 0$ et $\beta < 0$.

   Vérifier que $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$.

5) Sachant que $-1{,}9 < \beta < -1{,}8$ , tracer $(d)$ et $(C)$.

6) Soit $A(\alpha)$ l'aire de la partie délimitée par la courbe $(C)$, la droite $(d)$ et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$ .

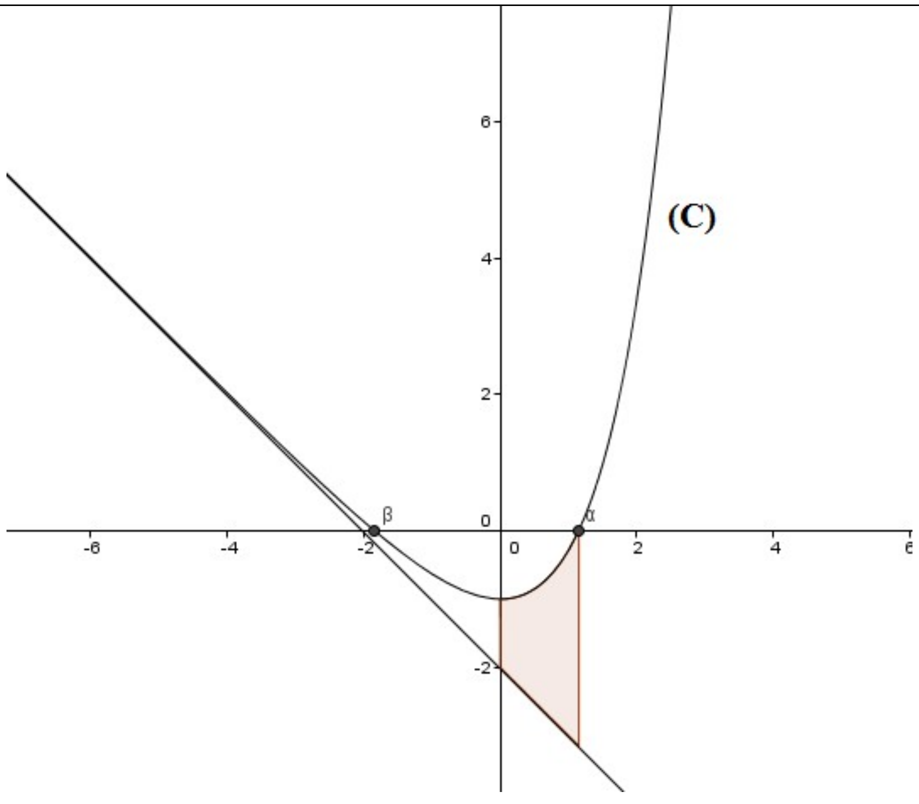
   **a-** Vérifier que $e^{\alpha} = \alpha + 2$.

   **b-** Démontrer que $A(\alpha) = (\alpha + 1)$ unités d'aire.

**اسس تصحيح**

| I | Eléments de réponses | Note/4 |
|---|---|---|
| **1** | b, $x-2>0$ et $x\neq 0$ ;<br>donc le domaine = $]2,+\infty[$ | 1 |
| **2** | c, $2<x<4; x-2=-x+4; x=3$<br>deuxième méthode: par vérification<br>pour x=3, ln(1) = ln (1) | 1 |
| **3** | **b,** soit u $=$ ln x, $u'=\frac{1}{x}$ , $\int\frac{ln(x)}{x}dx=\int u'\times udx=\frac{(ln(x))^2}{2}+c$<br>deuxième méthode: par vérification<br>$\left(\frac{(ln(x))^2}{2}\right)'=\frac{ln(x)}{x}$ | 1 |
| **4** | **b,** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\ln(x)}{\ln(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(x)}+1=1$<br>deuxième méthode: par vérification<br>$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\ln(x)}{\ln(x)}=\boldsymbol{R.H}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\mathbf{1}$ | 1 |

| II | Eléments de réponses | Note/6 |
|---|---|---|
| **A1** | $P(2\ boules\ rouges)=\frac{C_3^1}{C_8^1}\times\frac{C_4^1}{C_7^1}=\frac{3}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{3}{14}$. | 1 |
| **A2** | $P(\text{même couleur})=\frac{3}{14}+\frac{C_5^1}{C_8^1}\times\frac{C_3^1}{C_7^1}=\frac{3}{14}+\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{27}{56}$ | 1 |
| **A3** | $P(\text{ couleurs différentes})=1-\frac{27}{56}=\frac{29}{56}$ | 1 |
| **B1** | $P(R)=\frac{C_3^1}{C_8^1}=\frac{3}{8}$ | 1 |
| **B2** | P(S/R)= $\frac{C_4^2}{C_7^2}+\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{3}{7}$<br>P(R)×P(S/R)=$\frac{3}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{9}{56}$ | 1 |
| **B3** | P(S)= P(S $\cap$ R)+P$\left(S\cap\overline{R}\right)$=$\frac{9}{56}+\frac{5}{56}=\frac{1}{4}$ | 1 |

<table>
<tr><th>III</th><th>Eléments de réponses</th><th>Note/10</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) - 2 = +\infty(+\infty - 1) - 2 = +\infty$<br>$f(2) = e^2 - 4 \cong 3{,}39$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2a</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$</td><td>½</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (-x-2)] = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$<br>alors $y = -x - 2$ est une asymptote oblique à (C).</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2c</td><td>$f(x) - y_d = e^x > 0$ pour tout $x$<br>Alors $(C)$ est au-dessus de (d) pour tout $x \in \mathbb{R}$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$f'(x) = e^x - 1; f'(x) = 0\ pour\ x = 0$
<table>
<tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$0$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'$</td><td></td><td>$-$</td><td>$0$</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f$</td><td>$+\infty$</td><td>↘</td><td>$-1$</td><td>↗</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table></td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$f(1{,}1) = -0{,}096$|(négative)<br>$f(1{,}2) = 0{,}12$ (positive) et f est continue donc $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$<br>Autre méthode $f(1{,}1) \times f(1{,}2) < 0$ et f est continue donc $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>
</td><td>2</td></tr>
<tr><td>6a)</td><td>$f(\alpha) = 0, e^\alpha - \alpha - 2 = 0 \Rightarrow e^\alpha = \alpha + 2$</td><td>½</td></tr>
<tr><td>6b)</td><td>$Aire = \int_0^\alpha [f(x) - y_{(d)}]\, dx = \int_0^\alpha e^x\, dx = e^x]_0^\alpha = e^\alpha - 1 = (\alpha + 1)$ unités d'aire.</td><td>1</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الإمتحانات الرسمية | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>فرع علوم الحياة | دورة العام ٢٠٢٠ الخاصة<br>الإثنين في ٢١ أيلول ٢٠٢٠ |
| عدد المسائل : أربع | مسابقة في الرياضيات<br>المدة : ساعتان | الإسم:<br>الرقم: |

ملاحظة : - يسمح باستخدام آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات .
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الإلتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

**I- (4 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.

On considère les deux points A(1 ; 1 ; 2) et B(0 ; − 1 ; − 1).

1) Montrer qu'une équation du plan (P) déterminé par les trois points O, A et B est $x + y - z = 0$.
2) Soit (Q) le plan d'équation $2x - y + z = 0$.
   Montrer que le plan (Q) contient la droite (OB) et qu'il est perpendiculaire à (P).
3) On considère la droite (d) d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.
   a- Montrer que (d) est perpendiculaire au plan (P) en O.
   b- Vérifier que (d) est contenue dans le plan (Q).
4) On considère dans le plan (Q) le cercle (C) de centre I ($x_I > 0$), de rayon $3\sqrt{3}$ et tangent en O à la droite (OB).
   a- Démontrer que I est un point de (d).
   b- Calculer les coordonnées du point I.

**II- (4 points)**

Un sondage effectué dans une ville auprès d'un groupe de personnes montre que :

- 60% des personnes sont âgées de moins que 50 ans.
  Parmi ces personnes, 7% sont infectées par le virus covid-19.
- 8,2% des personnes sont infectées par le virus covid-19.

On choisit au hasard une personne de ce groupe.

On considère les évènements suivants :

A : « la personne choisie est âgée de moins que 50 »

C : « la personne choisie est infectée par le virus covid-19 »

1) a- Vérifier que la probabilité $P(A \cap C) = 0{,}042$.
   b- Calculer $P(\overline{C}/A)$ et déduire que $P(A \cap \overline{C}) = 0{,}558$.
2) La personne choisie est infectée par le virus covid-19. Calculer la probabilité que cette personne soit âgée de moins que 50 ans.
3) Le groupe est formé de 1 000 personnes.
   a- Calculer, dans ce groupe, le nombre des personnes infectées par le virus Covid-19.
   b- On interroge au hasard deux personnes de ce groupe infectées par le virus Covid-19 l'une après l'autre.
      Calculer la probabilité que la première personne interrogée soit la seule âgée de moins que 50 ans.

**III- (4 points)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$.

On donne les points A, M and M′ d'affixes respective i, z et z′ tel que $z' = \dfrac{iz-2}{z-i}$ où $z \neq i$.

1) Trouver la forme algébrique de z′ pour $z = i\left(1-\sqrt{3}\right)$.
2) a- Montrer que $(z' - i)(z - i) = -3$ pour tout $z \neq i$.
   b- En déduire AM × AM′.
   c- Montrer que si M varie sur le cercle (C) de centre A et de rayon 3, alors M′ varie sur un cercle à déterminer.
3) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x′ et y′ sont des réels.
   a- Vérifier que $x' = \dfrac{-3x}{x^2+\left(y-1\right)^2}$ et $y' = \dfrac{x^2+y^2+y-2}{x^2+\left(y-1\right)^2}$.
   b- Montrer que si y = 1, alors les trois points A, M et M′ sont alignés.

**IV- (8 points)**

**Partie A**

On considère la fonction g définie sur ℝ par $g(x) = 1 + (x - 1)e^x$.

1) Calculer g′(x). Recopier et compléter le tableau de variations de g.

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | 0 | |
| $g(x)$ | 1 | | $+\infty$ |

2) En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x.

**Partie B**

On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x + (x - 2)e^x$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

Soit (Δ) la droite d'équation y = x.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ et calculer f(2,5).
2) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$.
   b- Montrer que la droite (Δ) est asymptote à (C).
   c- Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (Δ).
3) Montrer que $f'(x) = g(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
4) a- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α.
   b- Vérifier que $\alpha \in \left]1{,}68\ ;\ 1{,}69\right[$.
5) Tracer (Δ) et (C).
6) Soit S l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
   Montrer que $S \leq 2\alpha$.

**H. Ahmad**

وزارة التربية والتعليم العالي
المديريّة العامّة للتربية
دائرة الامتحانات الرسميّة

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع علوم الحياة

دورة العام ٢٠١٩ الاستثنائيّة
الاثنين ٢٩ تموز ٢٠١٩

| | | |
|---|---|---|
| عدد المسائل: اربع | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة: ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |

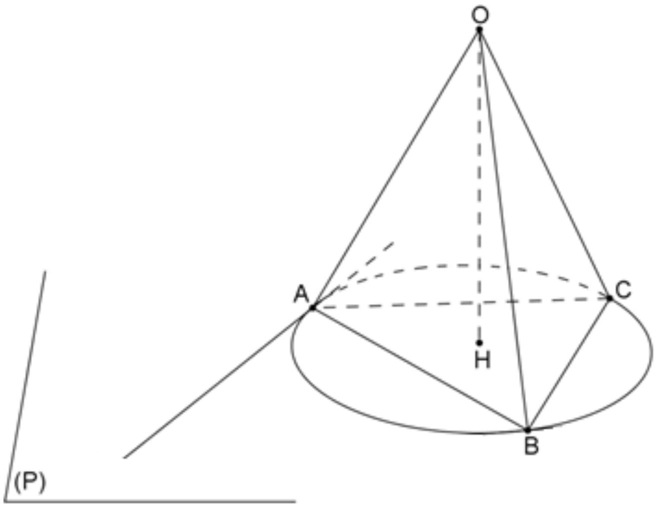
**ملاحظة:** - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

**I- (4 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les points A(6 ; 0 ; 0) , B(0 ; 6 ; 0) et C(0 ; 0 ; 6). Soit (Ω) le cercle circonscrit au triangle ABC.

1) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
2) Ecrire une équation cartésienne du plan (P) déterminé par les points A, B et C.
3) a- Montrer que le point H(2 ; 2 ; 2) est le projeté orthogonal du point O sur (P).
   b- Vérifier que H est le centre de (Ω).
   c- Montrer que le volume du tétraèdre OABC est le triple du volume du tétraèdre OAHB.
4) Soit (D) la droite d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = 6 \\ y = -m \quad \text{où} \quad m \in \mathbb{R} \\ z = m \end{cases}.$$
   Montrer que (D) est tangente à (Ω) en A.




**II- (4 points)**

Une enquête menée auprès d'un groupe de patients a montré qu'ils ont une maladie cardiaque seulement, ou une maladie pulmonaire seulement, ou les deux maladies à la fois. On sait que :

- 60 % des patients sont des hommes.
- Parmi les hommes: 20 % ont une maladie cardiaque seulement et 50% ont une maladie pulmonaire seulement.
- Parmi les femmes: 25% ont une maladie cardiaque seulement et 40% ont à la fois les deux maladies.

**Partie A**

Un patient est choisi au hasard. On considère les évènements suivants:

- H : « le patient choisi est un homme »
- C : « le patient choisi a une maladie cardiaque seulement »
- U : « le patient choisi a une maladie pulmonaire seulement »
- E : « le patient choisi a les deux maladies à la fois».

1) Calculer les probabilités $P(H \cap E)$ et $P(H \cap \overline{E})$.
2) Calculer $P(C)$, $P(U)$ et vérifier que $P(E) = \dfrac{17}{50}$.
3) Montrer que $P(C \cup U) = \dfrac{33}{50}$.
4) Sachant que le patient choisi a une seule maladie, calculer la probabilité que ce patient a une maladie cardiaque.

**Partie B**

Le groupe est formé de 500 patients. Les noms de trois patients sont choisis au hasard et simultanément pour que chacun d'eux obtient un contrat d'assurance gratuit.
Sachant que chacun des trois patients choisis a les deux maladies à la fois, calculer la probabilité qu'ils soient des hommes.

**III- (4 points)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère les points A et B d'affixes 1 et $-2$ respectivement.

M et $M'$ sont deux points d'affixes respectives z et $z'$ tel que $z' = \dfrac{\overline{z}+2}{\overline{z}}$ avec $z \neq 0$.

1) Ecrire z sous forme exponentielle dans le cas où $z' = 1+i$.
2) a- Montrer que $OM' = \dfrac{BM}{OM}$.

   b- Si $|z'| = 1$, montrer que M appartient à une droite à déterminer.
3) a- Pour tout $z \neq 0$, montrer que $\overline{z}(z'-1) = 2$.

   b- Pour tout $z \neq 0$, vérifier que $\arg\left(z'-1\right) = \arg\left(z\right) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

   c- Dans cette partie, on pose $z' = 1 + e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]-\pi\ ;\ \pi\right]$.

   Montrer que $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{AM'}$.

**IV- (8 points)**

**Partie A**

On considère l'équation différentielle $(E): y' - y = -2x$. On pose $y = z + 2x + 2$.

1) Former une équation différentielle (E') satisfaite par z.
2) Résoudre (E') et en déduire la solution particulière de (E) vérifiant $y(0) = 0$.

**Partie B**

On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty\ ;\ +\infty\right[$ par $f(x) = 2x + 2 - 2e^{x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit $(\Delta)$ la droite d'équation $y = 2x + 2$.

1) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   b- Montrer que, pour tout x, (C) est en-dessous de $(\Delta)$.

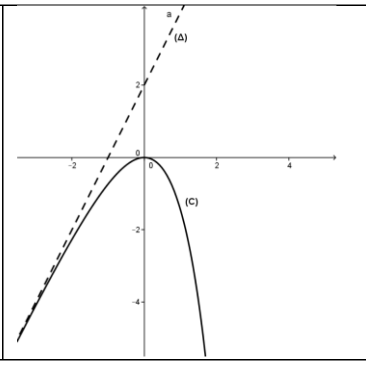
   c- Montrer que $(\Delta)$ est asymptote à (C).
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Calculer $f(1)$ et $f(1,5)$.
3) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
4) Tracer $(\Delta)$ et (C).
5) a- Montrer que f admet sur $\left]0\ ;\ +\infty\right[$ une fonction réciproque g dont on déterminera le domaine de définition.

   b- Soit (G) la courbe représentative de g et soit (T) la tangente à (C) au point L d'abscisse $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

   Montrer que (T) est tangente à (G) au point L' d'abscisse $2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) - 1$.

**أسس تصحيح مسابقة الرياضيات**

| Q.I | Answer key | 4 pts |
|---|---|---|
| 1 | AB = AC = BC = $6\sqrt{2}$ donc ABC est un triangle équilatéral | ½ |
| 2 | $\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0$ alors une équation cartésienne de (P) est $x+y+z-6=0$ | ½ |
| 3.a | $H\epsilon(P)$ et $\overrightarrow{OH}=2\overrightarrow{N_P}$ $donc$ $(OH)\perp(P)$ alors H projeté orthogonal de O sur (P). | 1 |
| 3.b | OA = OB = OC = 6 et H projeté orthogonal de O sur (P) donc HA = HB = HC donc H centre du cercle<br>**ou** HA = HB = HC = $2\sqrt{6}$ | ½ |
| 3.c | $V_{OABC}=\frac{1}{6}\left\|\overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}\right)\right\|=36$ unité de volumes<br>$V_{OAHB}=\frac{1}{6}\left\|\overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}\right)\right\|=12$ unité de volumes<br>**ou**<br>$V_{OABC}=\dfrac{1}{3}OH\times A_{ABC}$ $et$ $V_{OAHB}=\dfrac{1}{3}OH\times A_{AHB}$ $alors$ $\dfrac{V_{OABC}}{V_{OAHB}}=\dfrac{A_{ABC}}{A_{AHB}}=3$ | ½ |
| 4 | $A\in(D)$; $\vec{V}_{(D)}.\overrightarrow{HA}=0$ $et$ $(D)\subset(P)$ d'où (D) tangente en A à (P) | 1 |
| **Q.II** | **Answer key** | **4 pts** |
| A1 | $P(H\cap E)=P(H)\times P(E/H)=0,6\times(1-0,2-0,5)=0,18$<br>$P(H\cap\overline{E})=P(H)-P(H\cap E)=0,6-0,18=0,42$ | ½ |
| A2 | $P(C)=P(H\cap C)+P(\overline{H}\cap C)=0,12+0,4\times0,25=0,22$<br>$P(U)=P(H\cap U)+P(\overline{H}\cap U)=0,3+0,4\times0,35=0,44$<br>$P(E)=1-P(C)-P(U)=0,34$<br>OU $P(E)=P(H\cap E)+P(\overline{H}\cap E)=0,34$ | 1 |
| A3 | $P(C\cup U)=P(C)+P(U)-P(C\cap U)=0,22+0,44-0=0,66=\dfrac{33}{50}$<br>Car $C\cap U=\varnothing$ | ½ |
| A4 | $P(C/C\cup U)=\dfrac{P\left(C\cap(C\cup U)\right)}{P(C\cup U)}=\dfrac{P(C)}{P(C\cup U)}=\dfrac{0,22}{0,66}=\dfrac{1}{3}$<br>ou $P(C/\overline{E})=\dfrac{P\left(C\cap\overline{E}\right)}{P(\overline{E})}=\dfrac{1}{3}$ | 1 |
| B | $0,18\times500=90$ $(H\cap E)$<br>$0,34\times500=170$ $(E)$<br>$P=\dfrac{\frac{C_{90}^3}{C_{500}^3}}{\frac{C_{170}^3}{C_{500}^3}}=\dfrac{C_{90}^3}{C_{170}^3}=\dfrac{2937}{20111}=0,146$ OU $P=\dfrac{C_{90}^3}{C_{170}^3}=0,146$ | 1 |
| **Q.III** | **Answer key** | **4 pts** |
| 1 | $z'=1+i$ ; $(1+i)\overline{z}=\overline{z}+2$ ; $i\overline{z}=2$ ; $\overline{z}=-2i$; $z=2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ | ½ |
| 2a | $OM'=\|z'\|=\left\|\dfrac{\overline{z}+2}{\overline{z}}\right\|=\dfrac{\|\overline{z}+2\|}{\|\overline{z}\|}=\dfrac{\|\overline{z+2}\|}{\|Z\|}=\dfrac{\|z+2\|}{\|Z\|}=\dfrac{BM}{OM}$ | ½ |
| 2b | $\|z'\|=1$ ; $OM'=1$ ; $MB=MO$ alors M se trouve sur la médiatrice de [OB].<br>Ou $MB=MO$ alors x = - 1 lorsque M(x ;y) | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| **3a** | $z'-1=\dfrac{\bar{z}+2}{\bar{z}}-1=\dfrac{2}{\bar{z}}$ ; donc $\bar{z}\left(z'-1\right)=2$ | ½ |
| **3b** | $\arg(z'-1)=\arg\left(\dfrac{2}{\bar{z}}\right)=-\arg(\bar{z})=\arg(z)+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ | ½ |
| **3c** | $z'-1=e^{i\theta};\ \bar{z}=\dfrac{2}{z'-1}=2e^{-i\theta}\ ;\ z=2e^{i\theta}=2\left(z'-1\right)$ alors $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{AM'}$<br>OU<br>$\lvert Z'-1\rvert=1\ ;\ \lvert Z\rvert=\lvert\bar{Z}\rvert=\dfrac{2}{1}=2$ ;$OM=2AM'$<br>et $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right)=\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)+2k\pi\ ;\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{AM'}\right)=2k\pi$<br>alors $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{AM'}$ | 1 |
| **Q.IV** | **Answer key** | **8 pts** |
| **A1** | $y'=z'+2$ alors $z'+2-z-2x-2=-2x$<br>$(E'):z'-z=0$ | ½ |
| **A2** | la solution générale de $\left(E'\right)$ est $z=Ce^{x}$<br>Donc la solution générale de $\left(E\right)$ est $y=Ce^{x}+2x+2$<br>$y(0)=0$ ; $C=-2$ Donc la solution particulière de $\left(E\right)$ est $y=-2e^{x}+2x+2$ | 1 |
| **B1a** | $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ | ½ |
| **B1b** | $f(x)-y_{(\Delta)}=-2e^{x}<0$ alors (C) est en-dessous de (Δ) | ½ |
| **B1c** | $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-y_{(\Delta)}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}-2e^{x}=0$ alors $(\Delta)$ est asymptote à (C) | 1 |
| **B2** | $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(2+\dfrac{2}{x}-2\dfrac{e^{x}}{x}\right)=+\infty\left(2+0-\infty\right)=-\infty$<br>$f(1)=4-2e\approx-1{,}4\qquad f(1{,}5)=5-2e^{1{,}5}\approx-3{,}9$ | 1 |
| **B3** | $f'(x)=2-2e^{x}$ ; $f'(x)\ge0$ ; $x\le0$. Pour $x=0$; $f'(0)=0$ et $f(0)=0$<br>$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & 0 & \searrow & -\infty \end{array}$ | B3 1 |
| **B4** |  | B4 1 |
| **B5a** | Sur $\left]0;+\infty\right[$ , f est définie , continue et strictement décroissante de 0 à $-\infty$ donc f admet une fonction réciproque g et $D_g=f\left(\left]0;+\infty\right[\right)=\left]-\infty;0\right[$ | ½ |
| **B5b** | $f'\left(\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)=-1$ ; $\quad f\left(\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)=2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)-1$<br>$g\left(2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)-1\right)=\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ ; $L\left(2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)-1;\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)$<br>$g'\left(2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)-1\right)=\dfrac{1}{f'\left(\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)}=-1$ ; $(T):y=-x+3\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)-1$ | 1 |
| | | |

وزارة التربية والتعليم العالي
المديريّة العامة للتربية
دائرة الامتحانات الرسمية

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع: علوم الحياة

دورة العام 2019 العاديّة
الثلاثاء 18 حزيران 2019

| | | |
|---|---|---|
| عدد المسائل: اربع | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة: ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |

**ملاحظة:** - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

**I- (4 points)**

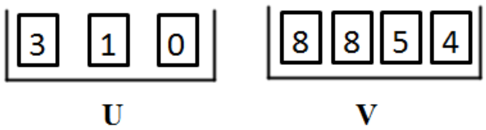
Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne les points

A(4 ; 1 ; 4), B(1 ; 0 ; 1), E(3 ; –1 ; 1) et le plan (P) d'équation $x + 2y + 3z - 4 = 0$.

1) Montrer que le point E est le projeté orthogonal du point A sur le plan (P).
2) a- Déterminer une équation du plan (Q) déterminé par A, B et E.
   b- Vérifier que les deux plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
3) Soit (d) la droite d'intersection de (P) et (Q).
   Montrer qu'un système d'équations paramétriques de (d) est $\begin{cases} x = -2t+1 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.
4) On considère, dans le plan (P), le cercle (C) de centre E et de rayon $\sqrt{5}$.
   Montrer que la droite (d) coupe le cercle (C) en deux points dont on déterminera leurs coordonnées.

**II- (4 points)**

On dispose de deux urnes U et V :




- U contient trois cartes portant les numéros 3, 1 et 0 ;
- V contient quatre cartes portant les numéros 8, 8, 5 et 4.

On tire au hasard une carte de l'urne U :

- Si la carte tirée porte le numéro 0, on tire simultanément et au hasard deux cartes de l'urne V ;
- Si la carte tirée ne porte pas le numéro 0, on tire simultanément et au hasard trois cartes de l'urne V.

On considère les évènements suivants :

A : « La carte tirée de l'urne U porte le numéro 0 » ;

S : « La somme des numéros portés par les cartes tirées de l'urne V est paire ».

1) a- Calculer les probabilités $P\left(S/A\right)$ et $P\left(S\cap A\right)$.
   b- Vérifier que $P\left(S\cap\overline{A}\right)=\frac{1}{6}$ et calculer P(S).
2) La somme des numéros portés par les cartes tirées de V est paire. Calculer la probabilité que la carte tirée de l'urne U ne porte pas le numéro 0.
3) Soit X la variable aléatoire égale au produit des numéros portés par les cartes tirées des urnes U et V. Calculer $P(X = 0)$ et déduire $P(X \leq 160)$.

**III- (4 points)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' tel que $z' = (1+i)\,\overline{z}$.

1) Dans cette partie, on pose $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
   a- Ecrire z' sous forme exponentielle.
   b- Vérifier que $(z')^6$ est imaginaire pur.
2) a- Montrer que $|z'| = \sqrt{2}\,|z|$.
   b- En déduire que, si M varie sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$, alors M' varie sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
3) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x , y , x' et y' sont des nombres réels.
   a- Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
   b- Pour tout $z \neq 0$, on note par N le point d'affixe $\overline{z}$.
   Démontrer que le triangle ONM' est rectangle isocèle de sommet principal N.

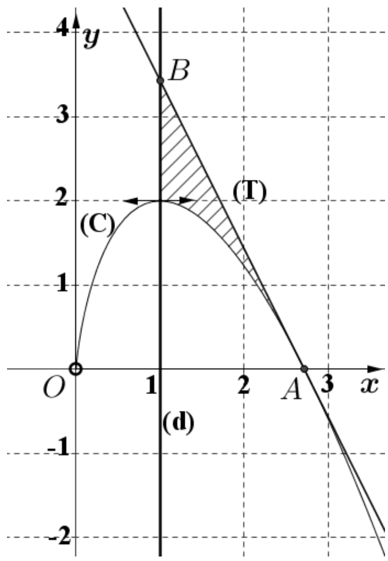
**IV- (8 points)**

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x(1-\ln x)$. On note par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2) a- Soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
   Déterminer les coordonnées de A.
   b- Montrer que $f'(x) = -2\ln x$ et dresser le tableau de variations de f.
   c- Déterminer une équation de la tangente (T) en A à (C).

**Dans la figure ci-contre :**

- (C) est la courbe représentative de f.
- (T) est la tangente en A à (C).
- (d) est la droite d'équation $x = 1$.
- $B(1\,;\,2e-2)$ est le point d'intersection de (d) et (T).




3) a- Montrer que, sur $]1;+\infty[$, f admet une fonction réciproque g dont on déterminera son domaine de définition.
   b- Dresser le tableau de variation de la fonction g.
   c- Reproduire (C) puis tracer (C'), la courbe représentative de g, dans le même repère.
4) a- En utilisant une intégration par parties, déterminer $\int x\ln(x)\,dx$.
   b- Montrer que $\int_1^e f(x)\,dx = \dfrac{e^2-3}{2}$.
   c- Calculer l'aire du domaine hachuré délimité par (C), (T) et (d).

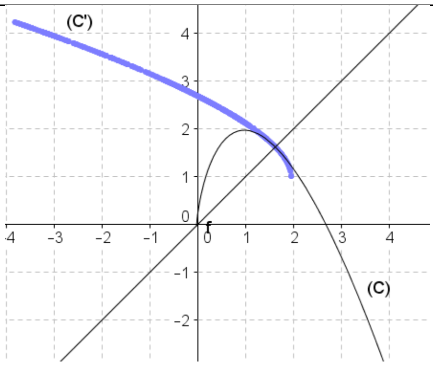
وزارة التربية والتعليم العالي
المديرية العامة للتربية
دائرة الامتحانات الرسمية

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع: علوم الحياة

دورة العام ٢٠١٩ العاديّة
الثلاثاء ١٨ حزيران ٢٠١٩

## أسس تصحيح مسابقة الرياضيات

| Q.I | Eléments de réponses | 4 pts |
|---|---|---|
| 1 | $x_E + 2(y_E) + 3(z_E) - 4 = 0$, $3 - 2 + 3 - 4 = 0$ donc $E \in (P)$.<br>$\overrightarrow{EA}(1,2,3) = \overrightarrow{n_P}$ alors E est le projeté orthogonale du point A sur le plan (P).<br>Ou : $(AE): \begin{cases} x = n+4 \\ y = 2n+1 \\ z = 3n+4 \end{cases}$ ; $E(n+4\ ;\ 2n+1;\ 3n+4)$ ; $x_E + 2(y_E) + 3(z_E) - 4 = 0$<br>alors n = -1 donc, $E(3; -1; 1)$ | 1 |
| 2.a | Soit $M(x, y, z) \in (Q)$<br>$\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE}) = 0$<br>$\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z-4 \\ -3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$<br>donc (Q): $3x + 6y - 5z + 2 = 0$. | 1 |
| 2.b | $\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_P} = 3 + 12 - 15 = 0$, alors les deux plans (P) et (Q) sont perpendiculaires. | ½ |
| 3 | Pour tout $M(-2t + 1;\ t\ ;\ 1) \in (d)$,<br>$x_M + 2(y_M) + 3(z_M) - 4 = 0$ donc $M \in (P)$<br>$3x_M + 6y_M - 5z_M + 2 = 0$ donc $M \in$ **(Q)** | ½ |
| 4 | $M(-2t + 1;\ t\ ;\ 1)$; $\overrightarrow{EM}\ (-2t - 2;\ t + 1;\ 0)$<br>$EM = \sqrt{5}$ ; $(-2t - 2)^2 + (t + 1)^2 = 5$, alors $t = 0$ ou $t = -2$ .<br>Par suite $B(\ 1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $I(5\ ;\ -2\ ;\ 1)$ sont les points d'intersection de (C) et (d). | 1 |
| **Q.II** | **Eléments de réponses** | **4 pts** |
| 1.a | $P(S/A) = \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{1}{2}$,<br>$P(S \cap A) = P(S/A) \times P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ | ½<br>½ |
| 1.b | $P(S \cap \overline{A}) = P(S/\overline{A}) \times P(\overline{A}) = \frac{C_3^3}{C_4^3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$<br>$P(S) = P(S \cap A) + P(S \cap \overline{A}) = \frac{1}{3}$ | ½<br>½ |
| 2 | $P(\overline{A}/S) = \frac{P(S \cap \overline{A})}{P(S)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ | 1 |
| 3 | $P(X = 0) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$<br>$P(X \leq 160) = P(X = 0) + P(X = 160)$<br>$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{C_2^1\, C_1^1\, C_1^1}{C_4^3}$<br>$= \frac{5}{12}$ | ½<br>½ |
| **Q.III** | **Eléments de réponses** | **4 pts** |
| 1.a | $z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{-\pi}{3}} = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{12}}$ | ½ |
| 1.b | $(z')^6 = (\sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{12}})^6 = 8e^{i\frac{-\pi}{2}} = -8i$ est imaginaire pur.<br>Ou $\arg(z'^6) = 6\arg(z')\ [2\pi] = 6 \times (\frac{-\pi}{12})\ [2\pi] = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, donc $(z'^6)$ est imaginaire pur . | ½ |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a** | $\lvert z'\rvert = \lvert 1+i\rvert\lvert\bar{z}\rvert$ ; $\lvert z'\rvert=\sqrt{2}\lvert z\rvert$ | ½ |
| **2.b** | $OM=\sqrt{2}$ ; $\lvert z'\rvert=\sqrt{2}\lvert z\rvert$ ; $OM'=\sqrt{2}OM=2$ donc M' varie sur le cercle de centre O et rayon 2. | **1** |
| **3.a** | $x'+iy'=(1+i)(x-iy)=x+y+i(x-y)$ donc $x'=x+y$ et $y'=x-y$. | ½ |
| **3.b** | $N(\bar{z})$ alors $N(x;-y)$ ; $M'(z')$ alors $M'(x+y;x-y)$<br>$\overrightarrow{ON}(x;-y)$ ; $\overrightarrow{NM'}(y;x)$<br>$ON = NM' = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{NM'}=xy-yx=0$, donc ONM' est un triangle rectangle isocèle en N.<br>**Ou:** $\frac{z'}{z}=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ , then $OM'=\sqrt{2}ON$ $\left(\overrightarrow{ON};\overrightarrow{OM'}\right)=\frac{\pi}{4}[2\pi]$ donc ONM' est un triangle rectangle isocèle en N.<br>**Ou:** $\frac{z'-\bar{z}}{\bar{z}}=i$ **…….** donc ONM' est un triangle rectangle isocèle en N. | **1** |
| **Q.IV** | **Eléments de réponses** | **8 pts** |
| **1** | $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 2x-2x\ln x=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x(1-\ln x)=-\infty$ | **1** |
| **2.a** | $2x(1-\ln x)=0$ ; $x=0$ rej $1-\ln x=0$ ; $\ln x=1$ alors $x=e$ donc $A(e;0)$ | ½ |
| **2.b** | $f'(x)=2(1-\ln x)+(2x)(-1/x)=-2\ln x$<br>$\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & 0 & \nearrow & 2 & \searrow & -\infty \end{array}$ | ¼<br>¾ |
| **2.c** | $f'(e)=-2$ (T): $y=-2x+2e$ | ½ |
| **3.a** | f est continue strictement décroissante $]1;+\infty[$, alors f admet une fonction réciproque g. $D_g=\ ]-\infty;2[$ | ¼<br>¼ |
| **3.b** | $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & 2 \\ \hline g'(x) & & - & \\ \hline g(x) & +\infty & \searrow & 1 \end{array}$ | **1** |
| **3.c** |  | **1 ½** |
| **4.a** | $\int x\ln(x)dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$ | **1** |
| **4.b** | $\int_1^e f(x)dx=\int_1^e 2xdx-2\int_1^e x\ln xdx=x^2-2\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right)=\left]\frac{3x^2}{2}-x^2\ln x\right]_1^e=\frac{e^2-3}{2}$ | ½ |
| **4.c** | Area $=\frac{(e-1)(2e-2)}{2}-\int_1^e f(x)dx=e^2-2e+1-\frac{e^2-3}{2}=\frac{e^2-4e+5}{2}=0.758u^2$ | ½ |

| | | |
|---|---|---|
| عدد المسائل: اربع | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة: ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |

**ملاحظة:** - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

**I- (4 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le point $A(1\,;1\,;1)$ et les deux droites $(d_1)$ et $(d_2)$ définies par $(d_1):\begin{cases}x=t+1\\y=t+1\\z=t+1\end{cases}\;;\ t\in\mathbb{R}$ et $(d_2):\begin{cases}x=-k+3\\y=k-1\\z=k-1\end{cases}\;;\ k\in\mathbb{R}$.

1) a. Montrer que les deux droites $(d_1)$ et $(d_2)$ ne sont pas parallèles et se coupent en A.

   b. Montrer que $y-z=0$ est une équation du plan $(P)$ déterminé par $(d_1)$ et $(d_2)$.

2) Soit $B(1\,;0\,;0)$ un point d'une bissectrice $(\delta)$ d'un angle formé par $(d_1)$ et $(d_2)$ dans le plan $(P)$.

   a. Déterminer les coordonnées du point E projeté orthogonal de B sur la droite $(d_1)$.

   b. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite $(\Delta)$ perpendiculaire en A à $(P)$.

   c. On désigne par F le projeté orthogonal de B sur la droite $(d_2)$ et M est un point de $(\Delta)$ où $y_M\neq 0$.

   Déterminer les coordonnées du point M pour que le volume du tétraèdre MABF soit égal à $\frac{2}{9}$ unités de volume.

**II- (4 points)**

Une urne U contient **six** boules : **quatre** boules rouges et **deux** boules bleues.
Un sac S contient **cinq** billets : **un** billet de 50 000 LL, **deux** billets chacun de 20 000 LL et **deux** billets chacun de 10 000 LL.

**Partie A**

On tire au hasard **une** boule de l'urne U

- Si cette boule est rouge, alors on tire au hasard, successivement et sans remise **deux** billets de S.
- Si cette boule est bleue, alors on tire au hasard et simultanément **trois** billets de S.

On considère les événements suivants :

R : " la boule tirée est rouge "
A : " la somme des valeurs des billets tirés est 70 000 LL ".

1) Calculer les probabilités $P(R)$, $P\left(A/R\right)$ puis vérifier que $P(A\cap R)=\frac{2}{15}$.

2) Calculer $P(A\cap\overline{R})$. Déduire $P(A)$.

**Partie B**

Dans cette partie, on tire au hasard, successivement et avec remise **deux** billets du sac S.
On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des valeurs des deux billets tirés.

1) Déterminer les six valeurs possibles de X.

2) Montrer que $P(X=70000)=\frac{4}{25}$.

3) Calculer $P(X<70000)$.

**III- (4 points)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$, on considère les points $A, B, M$ et $M'$ d'affixes respectives $1$ , $2$ , $z$ et $z'$ tels que $z'=\dfrac{z-2}{2-\overline{z}}$ où $z\neq 2$.

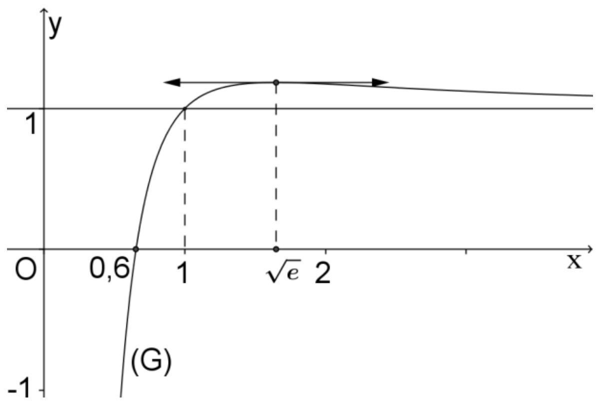
1) Dans cette partie on prend $z=1-i$ .
   a. Ecrire $z'$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle.
   b. Montrer dans ce cas que le quadrilatère $ABMM'$ est un parallélogramme.
2) Soit $z=x+iy$ où $x$ et $y$ sont deux nombres réels.
   Déterminer le nombre complexe $z$ pour lequel $M$ et $M'$ sont confondus.
3) a. Montrer que $|z'|=1$ pour tout $z\neq 2$ . En déduire que le point $M'$ varie sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
   b. Montrer que $|z'-1|\leq 2$ pour tout $z\neq 2$ .

**IV- (8 points)**

Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-\dfrac{1+\ln x}{x}$ et on désigne par $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (Unité graphique = 2 cm).

Soit $(d)$ la droite d'équation $y=x$ .

1) a. Etudier, suivant les valeurs de $x$, la position relative de $(C)$ et $(d)$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que la droite $(d)$ est une asymptote à $(C)$ .
2) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ puis déduire une asymptote à $(C)$ .
3) Dans la figure ci-contre, on a :
   - $(G)$ est la courbe représentative de la fonction **f ' dérivée de f**.
   - $(G)$ admet un maximum pour $x=\sqrt{e}$ .
   - $(G)$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $0,6$.




   a. Dresser le tableau de variations de $f$ .
   b. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet **exactement** deux racines dont l'une est 1.
   c. On note $\alpha$ la deuxième racine de l'équation $f(x)=0$.
      Vérifier que $0,4<\alpha<0,5$.
   d. Montrer que $(C)$ admet un point d'inflexion dont on déterminera ses coordonnées.
   e. Déterminer les coordonnées du point $A$ de $(C)$ où la tangente $(T)$ à $(C)$ est parallèle à $(d)$.
4) Tracer $(d)$, $(T)$ et $(C)$.
5) a. Calculer, en $cm^2$, l'aire $A(\alpha)$ du domaine limité par $(C)$, $(d)$ et les deux droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$.
   b. Montrer que $A(\alpha)=\left(2-2\alpha^4\right)\,cm^2$.

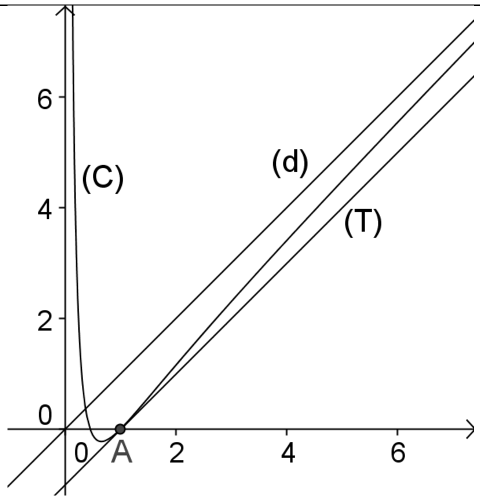
وزارة التربية والتعليم العالي
المديرية العامة للتربية
دائرة الامتحانات الرسمية

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع: علوم الحياة

دورة العام ٢٠١٨ الاستثنائية
الثلاثاء ٣١ تموز ٢٠١٨

## أسس تصحيح مسابقة الرياضيات

| Q.I | Eléments de réponses | 4 pts |
|---|---|---|
| 1.a | $\overrightarrow{u_1}(1;1;1)$ et $\overrightarrow{u_2}(-1;1;1)$ ne sont pas colinéaires.<br>$A \in (d_1)$ pour $t = 0$ et $A \in (d_2)$ pour $k = 2$. | 1 |
| 1.b | $(d_1) \subset (P) : t+1-(t+1) = 0$ pour tout $t$ et $(d_2) \subset (P) : k-1-(k-1) = 0$ pour tout $k$.<br>**OU**<br>Soit M(x ; y ; z) un point de (P) et $\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}) = 0$ | 0,75 |
| 2.a | $\overrightarrow{BE}(t\ ;\ t+1\ ;\ t+1)$ et $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{u_1} = 0$ alors $t = -\frac{2}{3}$ donc $E\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$ | 1 |
| 2.b | $\overrightarrow{n_P}(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$ est un vecteur directeur de $(\Delta)$ donc $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 \\ y = m+1 \\ z = -m+1 \end{cases}$ ; $m \in \mathbb{R}$ | 0,5 |
| 2.c | L'aire du triangle AEB = l'aire du triangle AFB car [AB) est une bissectrice de l'angle $E\hat{A}F$ donc $V_{MABE} = V_{MABF}$ , $M \in (\Delta)$ donc M(1 ; m+1 ; –m+1)<br>$V_{MABE} = \frac{1}{6}\left\|\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right)\right\| = \frac{2}{9}$ donc $\|m\| = 1$ alors m = 1 ou m = –1<br>$M_1(1\ ;\ 2\ ;\ 0)$ ou $M_2(1\ ;\ 0\ ;\ 2)$ alors $M_1(1\ ;\ 2\ ;\ 0)$ acceptable<br>**Ou** $V_{MABE} = \frac{A_{AEB} \times AM}{3}$ | 0,75 |
| **Q.II** | **Eléments de réponses** | **4 pts** |
| A.1 | $P(R) = \frac{C_4^1}{C_6^1} = \frac{2}{3}$<br>$P(A/R) = P(50\,000 \text{ et } 20\,000)$<br>$= P\left(\left(1^{er}\ 50\,000 \text{ alors } 2^{ème}\ 20\,000\right) \text{ ou } \left(1^{er}\ 20\,000 \text{ alors } 2^{ème}\ 50\,000\right)\right)$<br>$= P(1^{er}\ 50\,000 \text{ alors } 2^{ème}\ 20\,000) + P(1^{er}\ 20\,000 \text{ alors } 2^{ème}\ 50\,000)$<br>$= \frac{C_1^1}{C_5^1} \times \frac{C_2^1}{C_4^1} + \frac{C_2^1}{C_5^1} \times \frac{C_1^1}{C_4^1} = \frac{1}{5}$<br>$P(A \cap R) = P(R) \times P(A/R) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ | 1,5 |
| A.2 | $P(A \cap \bar{R}) = P(\bar{R}) \times P(A/\bar{R}) = \frac{1}{3} \times \frac{C_1^1 C_2^1}{C_5^3} = \frac{1}{15}$<br>$P(A) = P(A \cap R) + P(A \cap \bar{R}) = \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{5}$ | 1 |
| B.1 | $50\,000 + 50\,000 = 100\,000$ ; $50\,000 + 20\,000 = 70\,000$ ; $50\,000 + 10\,000 = 60\,000$<br>$20\,000 + 20\,000 = 40\,000$ ; $10\,000 + 10\,000 = 20\,000$ ; $20\,000 + 10\,000 = 30\,000$<br>$X \in \{20\,000\ ;\ 30\,000\ ;\ 40\,000\ ;\ 60\,000\ ;\ 70\,000\ ;\ 100\,000\}$ | 0,5 |
| B.2 | $P(X = 70\,000) = P(50\,000 \text{ et } 20\,000)$<br>$= P(1^{er}\ 50\,000 \text{ alors } 2^{ème}\ 20\,000) + P(1^{er}\ 20\,000 \text{ alors } 2^{ème}\ 50\,000)$<br>$= \frac{C_1^1}{C_5^1} \times \frac{C_2^1}{C_5^1} + \frac{C_2^1}{C_5^1} \times \frac{C_1^1}{C_5^1} = \frac{4}{25}$ | 0,5 |
| B.3 | $P(X < 70\,000) = 1 - P(70\,000) - P(100\,000) = 1 - \frac{4}{25} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ | 0,5 |

| Q.III | Eléments de réponses | 4 pts |
|---|---|---|
| **1.a** | $z' = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ | **0,75** |
| **1.b** | $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{MM'}} = 1$ et A,B, M et M ' ne sont pas colinéaires. | **0,75** |
| **2** | $z = \frac{z-2}{2-\bar{z}}$ donc $z - z\bar{z} + 2 = 0$ alors $x - x^2 - y^2 + 2 + iy = 0$<br>alors $x - x^2 + 2 = 0$ et $y = 0$ donc $z_1 = 2$ (inaceptable) ou $z_2 = -1$ (acceptable) | **1** |
| **3.a** | $\lvert z'\rvert = \frac{\lvert z-2\rvert}{\lvert 2-\bar{z}\rvert} = \frac{\lvert z-2\rvert}{\lvert \overline{z-2}\rvert} = \frac{\lvert z-2\rvert}{\lvert z-2\rvert} = 1$. Donc OM ' = 1<br>Alors M' varie sur un cercle de centre O et de rayon 1 | **1** |
| **3.b** | $\lvert z'-1\rvert \le \lvert z'\rvert + \lvert -1\rvert \le 1+1 \le 2$ **OU** méthode géométrique … | **0,5** |
| **Q.IV** | **Eléments de réponses** | **8 pts** |
| **1.a** | $f(x) - x = -\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)$<br>$f(x) - x > 0,\ -\left(\frac{1+\ln x}{x}\right) > 0,\ 1+\ln x < 0,\ x < \frac{1}{e}$ alors (C) est au – dessus de (d)<br>Pour $x > \frac{1}{e}$ alors (C) est au – dessous de (d) et pour $x = \frac{1}{e}$ alors (C) et (d) se coupent | **1** |
| **1.b** | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$<br>$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right] = 0$ alors (d) est une asymptote à (C) en $+\infty$ | **1** |
| **2** | $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0 + \infty = +\infty$, donc $x = 0$ est une A.V. | **1** |
| **3.a** | $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 0,6 & & +\infty \\ \hline f'(x) & \| & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & \| +\infty & \searrow & -0,2 & \nearrow & +\infty \end{array}$ | **0,75** |
| **3.b** | On $]0;0,6[$ : f est continue et strictement décroissante de $+\infty$ jusqu'à $-0,2 < 0$<br>alors l'équation f(x) = 0 admet une solution unique.<br>On $]0,6;+\infty[$ : f est continue et strictement croissante de $-0,2 < 0$ jusqu'à $+\infty$<br>alors l'équation f(x) = 0 admet une solution unique.<br>f(1) = 0 donc 1 est une racine. Donc il y a exactement deux solutions 1 et autre. | **0,5** |
| **3.c** | $f(0,4) \times f(0,5) = (0,19) \times (-0,11) < 0$, alors $0,4 < \alpha < 0,5$. | **0,25** |
| **3.d** | $f''(x)$ s'annule en changeant son signe pour $x = \sqrt{e}$<br>Donc (C) admet un point d'inflexion ($\sqrt{e}$ ; f($\sqrt{e}$)). | **0,5** |
| **3.e** | $f'(x_A) = 1$ donc $x_A = 1$ alors A(1 ;0) | **0,75** |
| **4** |  | **1** |
| **5.a** | $A(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} \frac{1+\ln x}{x}dx = [\frac{(1+\ln x)^2}{2}]_{\alpha}^{1}$<br>$= [\frac{1}{2} - \frac{(1+\ln\alpha)^2}{2}]\ u^2$<br>$= 2 - 2(1+\ln\alpha)^2\ cm^2$ | **0,75** |
| **5.b** | $f(\alpha) = 0$<br>$\alpha - \left(\frac{1+\ln\alpha}{\alpha}\right) = 0$<br>$1 + \ln\alpha = \alpha^2$<br>$A(\alpha) = 2 - 2(\alpha^2)^2 = 2 - 2\alpha^4\ cm^2$ | **0,5** |

| | | |
|---|---|---|
| عدد المسائل: اربع | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة: ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |

**ملاحظة:** - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

**I- (4 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les deux points A(0 ; 1 ; 2) et B(2 ; 0 ; 2) et le plan (P) d'équation x + 2y – 2 = 0.

1) Vérifier que les deux points A et B appartiennent au plan (P).
2) Démontrer qu'une équation du plan (Q) contenant la droite (AB) et perpendiculaire au plan (P) est $z-2=0$.
3) Soit (L) : $\begin{cases} x = t+2 \\ y = 2t \\ z = 2 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$, la droite perpendiculaire au plan (P) en B.

   a- Montrer que la droite (L) est contenue dans le plan (Q).

   b- Soit E le point de (L) d'ordonnée positive.
   Déterminer les coordonnées du point E pour que le triangle ABE soit rectangle isocèle en B.

   c- Soit $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};2\right)$ le milieu de [EA]. On considère dans le plan (Q) le cercle (C) de centre I et passant par B. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (T) tangente à (C) en B.

**II- (4 points)**

Le département du service clientèle d'un supermarché organise un jeu pour offrir des bons d'achats à ses clients. Pour cela, une urne est placée à l'entrée de ce supermarché. L'urne contient :

- trois boules rouges portant chacune le nombre 10 000 ;
- deux boules blanches portant chacune le nombre 30 000 ;
- une boule noire portant le nombre –10 000.

Le client qui décide de participer au jeu doit tirer simultanément et au hasard trois boules de l'urne.
On considère les évènements suivants :

A : « les trois boules tirées sont de même couleur »
B : « les trois boules tirées sont de trois couleurs différentes »
C : « parmi les trois boules tirées, deux seulement sont de même couleur ».

1) a- Calculer les probabilités P(A) et P(B).

   b- Montrer que $P(C) = \frac{13}{20}$.

2) Le client qui participe au jeu reçoit un bon d'achat dont la valeur, en L.L, est égale à la somme des nombres portés par les trois boules tirées.
   Soit X la variable aléatoire égale à la valeur d'un bon d'achat reçu par le client en LL.

   a- Vérifier que les valeurs possibles de X sont : 10 000 ; 30 000 ; 50 000 et 70 000.

   b- Montrer que $P(X = 50\,000) = \frac{7}{20}$.

   c- Montrer que $P(X > 35000) = \frac{1}{2}$.

   d- Sachant qu'un client a fait des achats avec le bon reçu dont la valeur est plus grande que 35 000 LL, calculer la probabilité qu'il ait tiré de l'urne exactement une boule rouge.

**III- (4 points)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Pour tout point M du plan d'affixe $z\neq 0$ , on associe le point $M'$ d'affixe $z'$, tel que $z'=\dfrac{z-5i}{z}$.

1) Ecrire z sous forme exponentielle dans le cas où $z'=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ .
2) On désigne par E le point d'affixe $z_E = 1$.

   a- Vérifier que $z'-1=\dfrac{-5i}{z}$.

   b- Calculer $EM'$ lorsque $OM = 5$.
3) On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ avec $x, y, x'$ et $y'$ sont des nombres réels.

   a- Montrer que $x'=\dfrac{x^2+y^2-5y}{x^2+y^2}$ et $y'=\dfrac{-5x}{x^2+y^2}$.

   b- En déduire que, lorsque le point M' varie sur la droite d'équation $y=x$, le point M varie sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

**IV- (8 points)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1-2e^{-x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et calculer $f(-1)$.
2) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et déduire une équation de l'asymptote (d) à (C).

   b- Montrer que, pour tout réel x, (C) est en dessous de (d).
3) La courbe (C) coupe l'axe des abscisses en A et l'axe des ordonnées en B.

   Trouver les coordonnées des points A et B.
4) a- Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

   b- Tracer (C) et (d).
5) a- Montrer que f admet sur $\mathbb{R}$ une fonction réciproque g.

   b- Déterminer le domaine de définition de g.

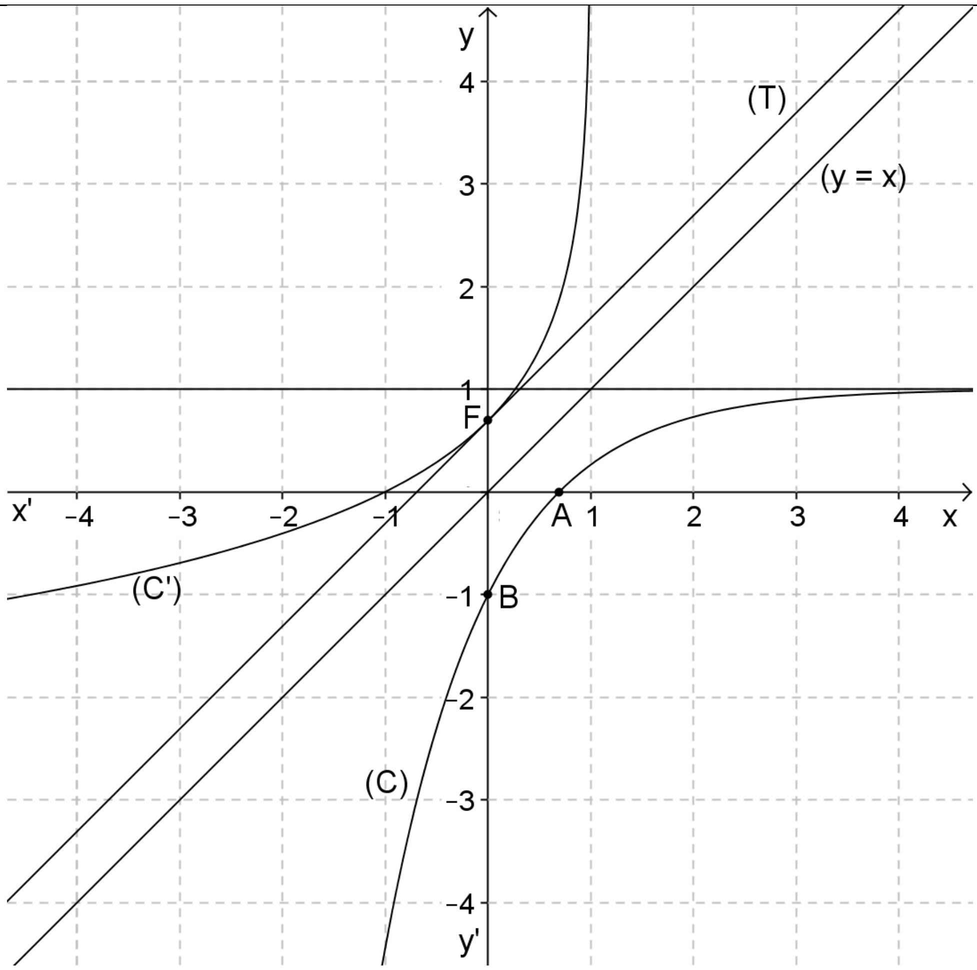
   c- Vérifier que $g(x)=\ln(2)-\ln(1-x)$.
6) Soit (C′) la courbe représentative de g.

   a- Déterminer une équation de la droite (T), tangente à (C′) en son point F d'abscisse 0.

   b- Tracer (C′) et (T) dans le même repère que (C).
7) Calculer l'aire du domaine limité par (C′), l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

## أسس تصحيح مسابقة الرياضيات

| Q.I | Eléments de réponses | 4 pts |
|---|---|---|
| 1 | $A \in (P)$ : $(x_A) + 2(y_A) - 2 = 0$, $2(0) + 2(1) - 2 = 0$, $0 = 0$<br>De même $B \in (P)$. | 0.5 |
| 2 | $A \in (Q)$ … et $B \in (Q)$ …<br>$\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_P} = (0)(1) + (0)(2) + (1)(0) = 0$. | 0.5 |
| 3.a | $(L) \subset (Q)$ car $2 - 2 = 0$, | 0.5 |
| 3.b | $E(t+2\ ;\ 2t\ ;\ 2)$, $AB = BE$ donc $\sqrt{5} = \sqrt{4t^2 + t^2}$ donc $t = 1$ ou $t = -1$,<br>et par suite $E(3\ ;\ 2\ ;\ 2)$ acceptable ou $E(1\ ;\ -2\ ;\ 2)$ à rejeter. | 1.5 |
| 3.c | Un vecteur directeur de (T) est : $\overrightarrow{IB} \wedge \overrightarrow{N_Q} = \frac{3}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$. donc (T): $\begin{cases} x = \frac{3}{2}m + 2 \\ y = \frac{1}{2}m \\ z = 2 \end{cases}$<br>**Autre méthode :**<br>ABE est rectangle isocèle en B donc (BI) est perpendiculaire à (AE)<br>donc (T) // (AE) et passe par B. | 1 |
| **Q.II** | **Eléments de réponses** | **4 pts** |
| 1.a | $P(A) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}$,<br>$P(B) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_6^3} = \frac{3}{10}$ | 0.5<br>0.5 |
| 1.b | $P(C) = 1 - P(A) - P(B) = \frac{13}{20}$<br>ou $P(C) = \frac{C_3^2 \times C_3^1 + C_2^2 \times C_4^1}{C_6^3} = \frac{13}{20}$ | 0.5 |
| 2.a | 10 000 (RRN); 30 000 (RRR ou RBN); 50 000 (RRB ou BBN); 70 000 (RBB) | 0.5 |
| 2.b | $P(X = 50\,000) = P(RRB) + P(BBN) = \frac{C_3^2 \times C_2^1 + C_2^2 \times C_1^1}{C_6^3} = \frac{7}{20}$ | 0.5 |
| 2.c | $P(X > 35\,000) = P(X = 50\,000) + P(X = 70\,000) = \frac{7}{20} + \frac{C_3^1 \times C_2^2}{C_6^3} = \frac{7}{20} + \frac{3}{20} = \frac{1}{2}$ | 1 |
| 2.d | $P(1 \text{ red} / x > 35\,000) = \frac{P(RBB)}{P(X>35\,000)} = \frac{\frac{C_3^1 \times C_2^2}{C_6^3}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{10}$ | 0.5 |
| **Q.III** | **Eléments de réponses** | **4 pts** |
| 1 | $z = 5 + 5i = 5\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ | 0.5 |
| 2.a | $z' - 1 = \frac{z-5i}{z} - 1 = -\frac{5i}{z}$ | 0.5 |
| 2.b | $OM = 5$ donc $\|z\| = 5$.<br>$EM' = \|z' - 1\| = \left\|-\frac{5i}{z}\right\| = \frac{5}{\|z\|} = 1$. | 1 |
| 3.a | $x' + iy' = \frac{x+iy-5i}{(x+iy)} \times \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x^2+y^2-5y-5ix}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-5y}{x^2+y^2} + i\frac{-5x}{x^2+y^2}$ | 1 |
| 3.b | $x' = y'$ donc $\frac{x^2+y^2-5y}{x^2+y^2} = \frac{-5x}{x^2+y^2}$ donc $x^2 + y^2 - 5y + 5x = 0$ donc M varie sur un cercle de centre $I(-\frac{5}{2}\ ;\ \frac{5}{2})$ et de rayon $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ | 1 |

<table>
<tr><th>Q.IV</th><th>Eléments de réponses</th><th>8 pts</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. $f(-1) = 1 - 2e$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2.a</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ donc $y = 1$ est une équation d'une asymptote horizontale à (C).</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2.b</td><td>$f(x) - 1 = -2e^{-x} < 0$ donc (C) est au-dessous de (d)</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>A(ln2 ; 0) et B(0 ; –1)</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>4.a</td><td>$f'(x) = 2e^{-x} > 0$.<br>$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & 1 \end{array}$$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4.b</td><td>
</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5.a</td><td>f est continue et strictement croissante sur ℝ.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>5.b</td><td>$D_g = ]-\infty, 1[$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>5.c</td><td>$y = f(x) = 1 - 2e^{-x}$, $e^{-x} = \frac{1-y}{2}$, $-x = \ln(\frac{1-y}{2})$, $x = \ln(\frac{2}{1-y}) = \ln 2 - \ln(1-y)$<br>Donc $g(x) = \ln 2 - \ln(1 - x)$.<br>Ou $f(g(x)) = x$, $1 - 2\,e^{-g(x)} = x$ donc $-g(x) = \ln\left(\frac{1-x}{2}\right)$ donc $g(x) = \ln\left(\frac{2}{1-x}\right)$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6.a</td><td>F(0 ; ln2) , $g'(x) = \frac{1}{1-x}$ donc $g'(0) = 1$ donc (T) : $y = x + \ln 2$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>6.b</td><td>Figure. (C') et (C) sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$A = -\int_0^{\ln 2} f(x)dx = -[x + 2e^{-x}]_0^{\ln 2} = [\ln 2 + 2e^{\ln 0.5}] + [0 + 2]$<br>A = 1 – ln2 (unité d'aire).</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

وزارة التربية والتعليم العالي | امتحانات الشهادة الثانوية العامة | دورة العام ٢٠١٧ الاستثنائيّة
المديرية العامة للتربية | فرع: علوم الحياة | الثلاثاء في ٨ آب ٢٠١٧
دائرة الامتحانات الرسميّة

| عدد المسائل: أربع | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة: ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |
|---|---|---|

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

**I- (4 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les trois points A(9; –1; 4), B(5; 1; 2), C(3; 2; 2) et le plan (P) d'équation : $x + 2y - 7 = 0$ déterminé par A, B et C.

1) Soit (Q) le plan passant par A et B et perpendiculaire au plan (P).
   Montrer que $2x - y - 5z + 1 = 0$ est une équation de (Q).
2) On désigne par (d) la droite d'intersection de (P) et (Q).
   Ecrire un système d'équations paramétriques de (d).
3) Soit (L) la droite d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = -t + 6 \\ y = -2t + 3 \\ z = 2 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

   a- Vérifier que (L) passe par B.
   b- Vérifier que (L) est contenue dans (Q) et que (L) est perpendiculaire à (d).
   c- Déterminer les coordonnées du point E de (L) d'ordonnée positive tel que l'aire du triangle BCE soit égale à 5 unités d'aire.

**II- (4 points)**

Une urne U contient dix boules :

- **cinq boules blanches** numérotées 1, 2, 3, 4, 5
- **trois boules noires** numérotées 6, 7, 8
- **deux boules vertes** numérotées 9, 10

**Partie A**

Un joueur tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne U.
On considère les événements suivants :

A : « les deux boules tirées ont des numéros impairs ».
B : « les deux boules tirées ont la même couleur ».
C : « les deux boules tirées ont des numéros impairs et ont la même couleur ».
D : « les deux boules tirées ont des numéros impairs et sont de couleurs différentes ».

1) Calculer la probabilité P(A) et vérifier que $P(B) = \dfrac{14}{45}$.
2) a- Calculer P(C).
   b- Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.
3) Vérifier que $P(D) = \dfrac{7}{45}$.
4) Sachant que le joueur a tiré deux boules de couleurs différentes, quelle est la probabilité que ces deux boules portent des numéros impairs ?

**Partie B**

Dans cette partie, le joueur tire successivement, au hasard et avec remise, deux boules de l'urne U.
A chaque boule blanche tirée il marque +1 point, à chaque boule noire tirée il marque –1 point et à chaque boule verte tirée il marque 0 point.
Calculer la probabilité que la somme des points marqués soit égale à zéro.

**III- (4 points)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, M et M′ d'affixes respectives 2i, z et z′ tel que : $z'=\dfrac{2i-z}{iz}$ avec $z\neq 0$.

Soit B le milieu du segment [OA].

1) Ecrire z′ sous forme algébrique dans le cas où z = 1 + i
2) a- Montrer que $OM'=\dfrac{AM}{OM}$.

   b- Démontrer que, si M se déplace sur la droite (d) d'équation y = 1, alors M′ varie sur un cercle de centre O dont on déterminera le rayon.
3) Vérifier que $z'-i=\dfrac{2}{z}$.
4) Soit $z=e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

   a- Ecrire z′ − i sous formes exponentielle et algébrique.

   b- Démontrer que les deux droites (OM) et (BM′) sont perpendiculaires.

**IV- (8 points)**

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = x + 2 - 2e^x$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

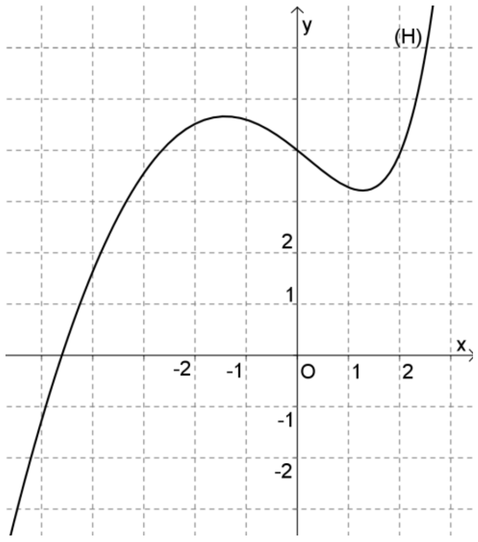
1) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

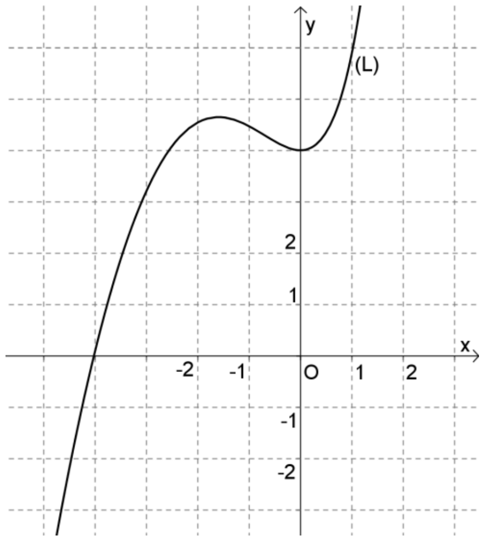
   b- Montrer que la droite (D) d'équation y = x + 2 est une asymptote à (C).

   c- Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (D) pout tout réel x.
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et calculer f(1,5).
3) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
4) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans ℝ exactement deux racines 0 et α. Vérifier que $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$.
5) Tracer (D) et (C).
6) On note par $A(\alpha)$ l'aire du domaine limité par (C) et l'axe des abscisses.

   Montrer que $A(\alpha)=\left(-\dfrac{\alpha^2}{2}-\alpha\right)$ unités d'aire.
7) Soit g une fonction définie sur ℝ avec $g'(x) = -2f(x)$.

   L'une des deux courbes (H) et (L) tracées ci-dessous représente la fonction g. Dire laquelle en justifiant votre réponse.



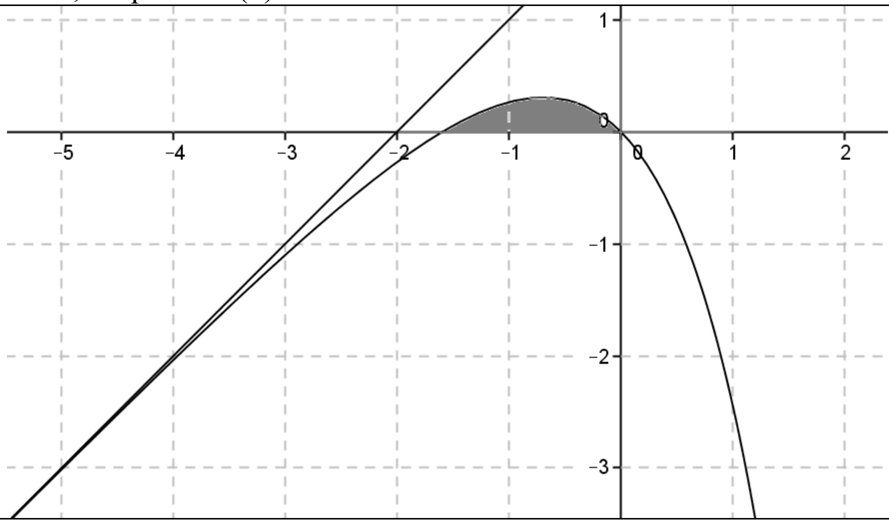



| | | |
|---|---|---|
| وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات الرسميّة | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>فرع: علوم الحياة | دورة الـعام ٢٠١٧ الاستثنائيّة<br>الثلاثاء في ٨ آب ٢٠١٧ |
| عدد المسائل: أربع | أسس تصحيح مادة الرياضيات | |

| I | Eléments de réponses | Notes |
|---|---|---|
| 1 | $A \in (Q) : 2(x_A) - (y_A) - 5(z_A) + 1 = 0$, $2(9) - (-1) - 5(4) + 1 = 0$, $0 = 0$<br>$B \in (Q) : 2(5) - (1) - 5(4) + 1 = 0$, $0 = 0$.<br>$\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_P} = (2)(1) + (-1)(2) + (-5)(0) = 0$. | 0.75 |
| 2 | $A \in (Q)\cap(P)$ et $B \in (Q)\cap(P)$ donc (d) est la droite (AB).<br>Alors (d) : $\begin{cases} x = -4k + 9 \\ y = 2k - 1 \quad \text{où } k \in \mathbb{R} \\ z = -2k + 4 \end{cases}$ | 0.75 |
| 3a | $B \in (L)$ pour $t = 1$. | 0.5 |
| 3b | $(L) \subset (Q) : 2(-t+6) - (-2t+3) - 5(2) + 1 = 0$, $0 = 0$.<br>$\overrightarrow{V_L}.\overrightarrow{V_d} = (-1)(-4) + (-2)(2) + (0)(-2) = 0$ | 1 |
| 3c | $E \in (L)$ donc $E(-t+6 ; -2t+3 ; 2)$, $\overrightarrow{BC}(-2; 1; 0)$, $\overrightarrow{EB}(t-1; 2t-2; 0)$.<br>Aire(EBC) $= \frac{1}{2}\lVert\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{BC}\rVert = 5$ donc $\frac{1}{2}\lVert 5(t-1)\vec{k}\rVert = 5$, $\frac{1}{2}5\lvert t-1\rvert = 5$, donc $\lvert t-1\rvert = 2$,<br>alors $t = 3$ donc $(3; -3; 2)$ inacc. **ou** $t = -1$ donc $(7; 5; 2)$ acc. Alors $E(7; 5; 2)$.<br>**Autre méthode :**<br>On a : $(L)\subset(Q)$, $(Q)\cap(P) = (d)$, $(L)\perp(d)$ en B et $(P)\perp(Q)$ donc $(L)\perp(P)$ or $(BC)\subset(P)$ donc $(L)\perp(BC)$ en B et par suite EBC est un triangle rectangle en B.<br>Aire(EBC) $= \frac{1}{2}EB.BC = 5$. On a $E \in (L)$ donc $E(-t+6 ; -2t+3 ; 2)$.<br>$\frac{1}{2}\sqrt{(t-1)^2 + 4(t-1)^2}.\sqrt{5} = 5$ donc $\lvert t-1\rvert = 2$<br>alors $t = 3$ donc $(3; -3; 2)$ inacc. **ou** $t = -1$ donc $(7; 5; 2)$ acc. Alors $E(7; 5; 2)$. | 1 |

| II | Eléments de réponses | Notes |
|---|---|---|
| A1 | $P(A) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{9}$ , $P(B) = P(bb) + P(nn) + P(vv) = \frac{C_5^2+C_3^2+C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{14}{45}$ | 1 |
| A2a | $P(C) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$ | 0.5 |
| A2b | $P(A\cap B) = P(C) = \frac{1}{15} \neq P(A).P(B) = \frac{28}{405}$ alors A et B ne sont pas indépendants | 0.5 |
| A3 | $P(D) = P(A\cap \overline{B}) = P(A) - P(A\cap B) = \frac{2}{9} - \frac{1}{15} = \frac{7}{45}$ | 0.5 |
| A4 | $P(A/\overline{B}) = \frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(D)}{1-P(B)} = \frac{7}{31}$ | 0.75 |
| B | $P(\text{Somme} = 0) = P(bn \text{ ou } nb) + P(vv) = 2\left(\frac{5\times3}{10^2}\right) + \frac{2\times2}{10^2} = 0{,}34$ | 0.75 |

| III | Eléments de réponses | Notes |
|---|---|---|
| 1 | $z' = \frac{2i-(1+i)}{i(1+i)} = 1$ | 0.5 |
| 2a | $OM' = \lvert z'\rvert = \frac{\lvert z-2i\rvert}{\lvert i\rvert\lvert z\rvert} = \frac{AM}{OM}$ | 0.75 |
| 2b | $M \in (d)$ alors $M(x; 1)$. On a $A(0; 2)$ donc $OM' = \frac{AM}{OM} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = 1$.<br>Alors $M'$ varie sur le cercle de centre O et de rayon 1.<br>**Autre méthode :** (d) est la médiatrice de [OA] et $M \in (d)$ donc $MA = MO$ alors $OM' = 1$. | 0.75 |
| 3 | $z' - i = \frac{2i-z}{iz} - i = \frac{2}{z}$ | 0.5 |
| 4a | $z' - i = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ | 0.75 |
| 4b | $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{BM'}) = (\overrightarrow{OM}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{BM'})\ (2\pi) = -\arg(z) + \arg(z' - i)\ (2\pi) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\ (2\pi) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$<br>**Autre méthode :** $B(0; 1)$, $\overrightarrow{OM}(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$ et $\overrightarrow{BM'}(\sqrt{2}; \sqrt{2})$. On a : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BM'} = 0$ | 0.75 |

<table>
<tr><th>IV</th><th>Eléments de réponses</th><th>Notes</th></tr>
<tr><td>1a</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x-2\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2e^x\right) = 0$ alors (D) est une asymptote à (C)</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>1c</td><td>$f(x) - x - 2 = -2e^x < 0$ alors (C) est au-dessous de (D)</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}-2\right) = -\infty$ ; $f(1,5) = -5,463$</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$f'(x) = 1 - 2e^x$<br>$$\begin{array}{c|ccccccccc} x & -\infty & & \alpha & & -\ln 2 & & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & & & 0 & & - & & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & 0 & \nearrow & 0,306 & \searrow & 0 & \searrow & -\infty \end{array}$$</td><td>1.25</td></tr>
<tr><td>4</td><td>• Sur $\left]-\infty;-\ln 2\right[$ : f est continue et strictement croissante de $-\infty$ jusqu'à 0,306 > 0 alors l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α.<br>$f(-1,6) \times f(-1,5) = (-0,003) \times (0,053) < 0$, alors $-1,6 < \alpha < -1,5$.<br>• Sur $\left]-\ln 2;+\infty\right[$ : f est continue et strictement décroissante de 0,306 > 0 jusqu'à $-\infty$ alors l'équation f(x) = 0 admet une solution unique β.<br>Puisque f(0) = 0, alors β = 0.<br>D'où, l'équation f(x) = 0 admet exactement deux solutions 0 et α.</td><td>1.25</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>1.25</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$A(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} f(x)dx = \left]\frac{x^2}{2}+2x-2e^x\right]_{\alpha}^{0} = -2-\frac{\alpha^2}{2}-2\alpha+2e^{\alpha}$.<br>Mais f(α) = 0, alors $2e^{\alpha} = \alpha + 2$, d'où $A(\alpha) = \left(-\frac{\alpha^2}{2}-\alpha\right)$ unités d'aire.</td><td>1.25</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & \alpha & & 0 & & +\infty \\ \hline g'(x) = -2f(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline g(x) & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \end{array}$$<br>Pour x = 0, g ′(x) = 0 et g′(x) change le signe, alors la courbe de la fonction g admet un extremum.<br>Par suite, (H) ne représente pas la courbe représentative de la fonction g donc (L) est la courbe représentative de la fonction g.</td><td>1</td></tr>
</table>

وزارة التربية والتعليم العالي | امتحانات الشهادة الثانوية العامة | دورة العام ٢٠١٧ العاديّة
المديرية العامة للتربية | فرع: علوم الحياة | السبت ١٧ حزيران ٢٠١٧
دائرة الامتحانات الرسمية

عدد المسائل: اربع | مسابقة في مادة الرياضيات | الاسم:
المدة: ساعتان | الرقم:

**ملاحظة:** - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

**I- (4 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne les points

$A(3;1;0)$, $B(2;0;1)$, $S(3;-1;-2)$ et la droite $(d)$ définie par: $\begin{cases} x=t \\ y=t+1 \quad ; \quad t\in\mathbb{R}. \\ z=-t \end{cases}$

1) a- Vérifier que le point $A$ n'appartient pas à la droite $(d)$ et que les deux droites $(AB)$ et $(d)$ sont parallèles.
   b- Montrer que $y+z-1=0$ est une équation du plan $(P)$ déterminé par $(AB)$ et $(d)$.
2) a- Montrer que le point A est le projeté orthogonal du point S sur le plan $(P)$.
   b- On désigne par S' le symétrique du point S par rapport à $(P)$. Calculer l'aire du triangle $BSS'$.
3) On considère dans le plan $(P)$ le cercle $(C)$ de centre A et de rayon 3.
   La droite (d) coupe le cercle $(C)$ en deux points E et F.
   a- Trouver les coordonnées des points E et F.
   b- Ecrire un système d'équations paramétriques d'une bissectrice de l'angle $\widehat{EAF}$.

**II- (4 points)**

Une urne U contient neuf boules :

- trois boules rouges numérotées **0**
- deux boules vertes numérotées **1**
- quatre boules bleues numérotées **2**.

**Partie A**

On tire simultanément et au hasard 3 boules de cette urne.

On considère les évènements suivants:

M: « les trois boules tirées sont de la même couleur »;
N: « le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égal à zéro ».

1) Calculer $P(M)$, la probabilité de l'évènement M.
2) a- Vérifier que $P(N)=\frac{16}{21}$.
   b- Calculer $P(M\cap N)$ et vérifier que $P\left(\overline{M}\cap N\right)=\frac{3}{4}$.
3) Sachant que les trois boules tirées n'ont pas la même couleur, calculer la probabilité que le produit des nombres portés par les trois boules tirées soit égal à zéro.

**Partie B**

Dans cette partie, on tire au hasard une boule de l'urne U.
On ne remet pas cette boule dans l'urne U.

- Si la boule tirée est numérotée **0**, on tire alors simultanément et au hasard deux boules de U. *(On aura ainsi 3 boules)*
- Si la boule tirée n'est pas numérotée **0**, on tire alors au hasard une boule de U. *(On aura ainsi 2 boules)*

Calculer la probabilité que la somme des nombres portés par les boules tirées soit égale à 3.

**III- (4 points)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, M et $M'$ d'affixes respectives $i$, $-2i$, $z$ et $z'$ tel que $z'=\dfrac{-2iz}{z-i}$ avec $z\neq i$.

1) a- Montrer que $(z'+2i)(z-i)$ est réel.

   b- Déduire que $AM\times BM'=2$.

   c- Si M varie sur le cercle de centre A et de rayon 3, montrer que $M'$ varie sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

2) Dans le cas où $z'=2i$, écrire $z$ sous forme exponentielle.

3) On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ où $x$, $y$, $x'$ et $y'$ sont des réels.

   a- Montrer que $x'=\dfrac{2x}{x^2+(y-1)^2}$ et $y'=\dfrac{-2(x^2+y^2-y)}{x^2+(y-1)^2}$.

   b- Si $AM=\sqrt{2}$, démontrer que $x=x'$.

**IV- (8 points)**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(1-x)e^x+2$.

Soit $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Déduire une asymptote $(d)$ à $(C)$.

   b- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis calculer $f(1)$ et $f(2)$.

2) a- Vérifier que $f'(x)=-xe^x$ et dresser le tableau de variations de $f$.

   b- Démontrer que la courbe $(C)$ admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

3) Tracer $(d)$ et $(C)$.

4) Soit $(\Delta)$ la droite d'équation $y=2x$.

   a- Vérifier que $f(x)-2x=(e^x+2)(1-x)$. Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de $(C)$ par rapport à la droite $(\Delta)$.

   b- Trouver une primitive F de la fonction $f$.

   c- Tracer $(\Delta)$ puis calculer l'aire du domaine limité par $(C)$, l'axe des ordonnées et la droite $(\Delta)$.

5) Soit $g$ la fonction donnée par $g(x)=\ln[f(x)-2]$.

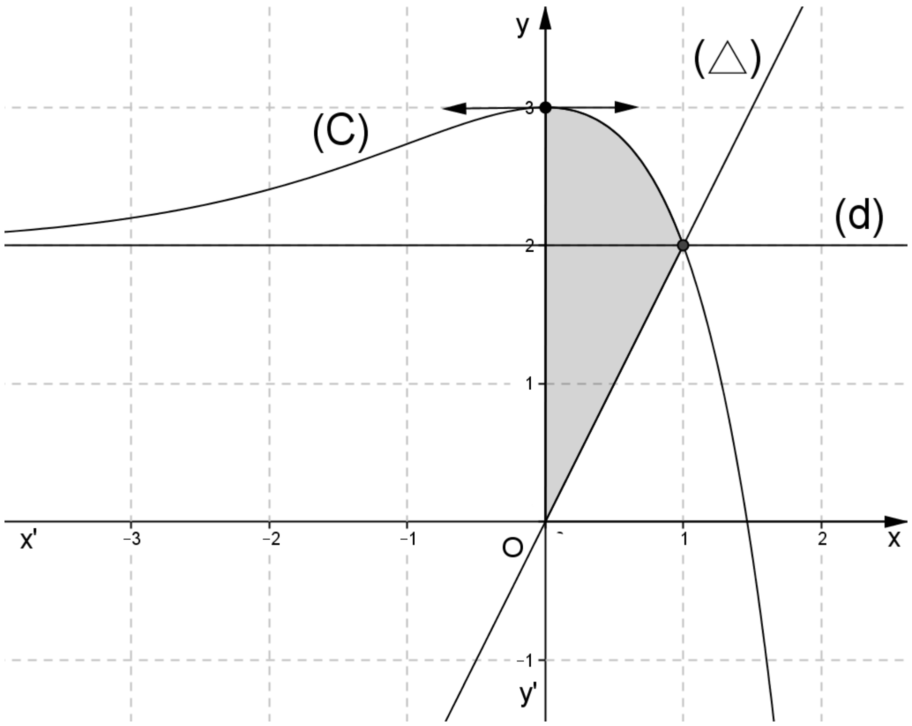
   On note $(G)$ la courbe représentative de g dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

   a- Vérifier que le domaine de définition de $g$ est $]-\infty;1[$.

   b- Peut-on trouver un point de la courbe $(G)$ où la tangente à $(G)$ est parallèle à la droite $(\Delta)$? Justifier.

## أسس تصحيح مسابقة الرياضيات

| Q.I | Eléments de réponses | 4 pts |
|---|---|---|
| 1.a | $3 = t$ et $1 = t + 1$ donc $t = 3$ et $t = 0$ impossible donc $A \notin (d)$.<br>$\overrightarrow{AB}(-1\,;\,-1\,;\,1) = -\overrightarrow{V}(1\,;\,1\,;\,-1)$ donc (AB) // (d). | ¾ |
| 1.b | $A \in (P) : 1 + 0 - 1 = 0, 0 = 0$.<br>$B \in (P) : 0 + 1 - 1 = 0, 0 = 0$.<br>$(d) \subset (P) : t + 1 + (-t) - 1 = 0, 0 = 0$. | ½ |
| 2.a | $A \in (P)$ et $\overrightarrow{AS}(0\,;\,-2\,;\,-2) = -2\overrightarrow{n_{(P)}}(0\,;\,1\,;\,1)$ donc $(AS) \perp (P)$ en A. | ¾ |
| 2.b | Aire(BSS') = 2.Aire(BSA) = $2.\frac{1}{2}$.AB.AS = $\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$ unités d'aire. | ½ |
| 3.a | $E \in (d)$ donc $E(t\,;\,t + 1\,;\,-t)$.<br>$AE = 3$, $(t - 3)^2 + t^2 + (-t)^2 = 9$ donc $t = 0$ et $t = 2$.<br>Donc $E(0\,;\,1\,;\,0)$ et $F(2\,;\,3\,;\,-2)$ | 1 |
| 3.b | AE = AF = rayon, donc AEF est isocèle en A.<br>Soit I le milieu de [EF] donc $I(1\,;\,2\,;\,-1)$. $\overrightarrow{AI}(-2\,;\,1\,;\,-1)$ est un vecteur directeur de la bissectrice. Alors $x = -2k + 3$, $y = k + 1$, $z = -k$ où $k \in \mathbb{R}$.<br>**Autre méthode :**<br>$AE = AF = 3$ donc $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$ est un vecteur directeur de la bissectrice.<br>$\overrightarrow{AE}(-3\,;\,0\,;\,0)$ et $\overrightarrow{AF}(-1\,;\,2\,;\,-2)$ donc $\overrightarrow{W}(-4\,;\,2\,;\,-2)$.<br>Alors $x = -4k' + 3$, $y = 2k' + 1$, $z = -2k'$ où $k' \in \mathbb{R}$. | ½ |
| **Q.II** | **Eléments de réponses** | **4 pts** |
| A.1 | $P(M) = \frac{C_3^3}{C_9^3} + \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{5}{84}$ | ½ |
| A.2.a | $P(N) = 1 - P(\overline{N}) = 1 - \frac{C_6^3}{C_9^3} = \frac{16}{21}$ | ½ |
| A.2.b | $P(M \cap N) = \frac{C_3^3}{C_9^3} = \frac{1}{84}$ . $P(\overline{M} \cap N) = P(N) - P(M \cap N) = \frac{16}{21} - \frac{1}{84} = \frac{3}{4}$ | 1 |
| A.3 | $P(N/\overline{M}) = \frac{P(\overline{M} \cap N)}{P(\overline{M})} = \frac{\frac{63}{84}}{1-\frac{5}{84}} = \frac{63}{79}$ | 1 |
| B | $P(S = 3) = P(R \cap (V \text{ et } B)) + P(B \cap (V)) + P(V \cap (B))$<br>$= \frac{C_3^1}{C_9^1} \times \frac{C_2^1 \times C_4^1}{C_8^2} + \frac{C_4^1}{C_9^1} \times \frac{C_2^1}{C_8^1} + \frac{C_2^1}{C_9^1} \times \frac{C_4^1}{C_8^1} = \frac{20}{63}$ | 1 |
| **Q.III** | **Eléments de réponses** | **4 pts** |
| 1.a | $(z'+2i)(z-i) = \left(\frac{-2iz}{z-i} + 2i\right)(z-i) = \frac{2}{z-i}(z-i) = 2$ | ¾ |
| 1.b | $AM.BM' = \lvert z-i \rvert \lvert z'+2i \rvert = 2$ | ½ |
| 1.c | $AM = 3, \lvert z-i \rvert = 3$, donc $BM' = \frac{2}{3}$ Donc M' varie sur le cercle de centre B et rayon $\frac{2}{3}$ | ½ |
| 2 | $2i = \frac{-2iz}{z-i}$ donc $z = \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ . | ¾ |
| 3.a | $x'+iy' = \frac{2i(x+iy)}{i-x-iy} = \frac{-2y+2ix}{-x+i(1-y)} = \frac{(-2y+2ix)(-x-i(1-y))}{x^2+(y-1)^2}$<br>$x' = \frac{2x}{x^2+(y-1)^2}$ , $y' = \frac{-2(x^2+y^2-y)}{x^2+(y-1)^2}$ | 1 |
| 3.b | Si $AM = \sqrt{2}$ alors $x^2+(y-1)^2 = 2$ et $x' = x$. | ½ |

<table>
<tr><th>Q.IV</th><th>Eléments de réponses</th><th>8 pts</th></tr>
<tr><td>1.a</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x - xe^x + 2) = 2$. Donc $y = 2$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.</td><td>½</td></tr>
<tr><td>1.b</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $f(1) = 2$, $f(2) = 2 - e^2 = -5,33$.</td><td>¾</td></tr>
<tr><td>2.a</td><td>$f'(x) = -xe^x$<br>$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & 2 & \nearrow & 3 & \searrow & -\infty \end{array}$$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2.b</td><td>$f''(x) = -(x+1)e^x$ s'annule pour $x = -1$ en changeant de signe.<br>Donc $I(-1\ ;\ 2e^{-1} + 2)$ est un point d'inflexion.</td><td>¾</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4.a</td><td>$f(x) - 2x = (1 - x)e^x + 2 - 2x = (1 - x)(e^x + 2)$.<br>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-1$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f(x) – 2x</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td></tr>
<tr><td>Position</td><td>(C) est au-dessus de (d)</td><td>(C) et (d) se coupent en (−1 ; 2)</td><td>(C) est en dessous de (d)</td></tr>
</table></td><td>1</td></tr>
<tr><td>4.b</td><td>$\int f(x)dx = (2 - x)e^x + 2x + c$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4.c</td><td>L'aire = $\int_0^1 [f(x) - 2x]dx = (e - 1)u^2$</td><td>¾</td></tr>
<tr><td>5.a</td><td>$f(x) - 2 > 0$ donc $x \in ]-\infty; 1[$</td><td>½</td></tr>
<tr><td>5.b</td><td>$g'(x) = 2$, $\frac{f'(x)}{f(x)-2} = 2$, $x = 2$ inacceptable car $2 \notin ]-\infty; 1[$.</td><td>¾</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

وزارة التربية والتعليم العالي | امتحانات الشهادة الثانوية العامة | دورة العام ٢٠١٦ الاستثنائيّة
المديرية العامة للتربية | الفرع : علوم الحياة | الإثنين ٨ آب ٢٠١٦
دائرة الامتحانات الرسميّة

عدد المسائل: أربع | مسابقة في مادة الرياضيات | الاسم:
المدة ساعتان | الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه ( دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

**I- (4 points)**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on donne les points A(1), M(z) et M'(z')

tels que : $z'=(1-i)z+i$ avec $z\neq 1$.

1) a- Vérifier que $z'-1=(1-i)(z-1)$.

b- Vérifier que $AM'=AM\sqrt{2}$. Déduire que si M varie sur le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$, alors $M'$ se déplace sur un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.

c- Prouver que $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right)=-\dfrac{\pi}{4}+\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.

d- Comparer $|z'-z|$ et $|z-1|$ puis montrer que le triangle AMM' est rectangle isocèle.

2) On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ avec $x$, $y$, $x'$ et $y'$ sont des réels.

a- Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de x et de y.

b- Vérifier que si $M'$ se déplace sur la droite (D) d'équation $y=x$, alors M se déplace sur une droite $(\Delta)$ à déterminer.

**II- ( 4 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne :

- Le plan $(P): x-2y+z=0$ et le plan $(Q): x+y+z+3=0$ ;
- Les points $A(1;0;-1)$ et $E(0;-1;-2)$ ;
- Dans le plan (P), le cercle (C) de centre A et de rayon $R=\sqrt{3}$.

Soit $(\Delta)$ la droite d'intersection de (P) et (Q).

1) a- Montrer que (P) est perpendiculaire à (Q).

b- Vérifier que la droite $(\Delta)$ est définie par: $x=-t-2$ ; $y=-1$ ; $z=t$ ($t\in\mathbb{R}$).

c- Montrer que E est le projeté orthogonal de A sur $(\Delta)$.

d- Déduire que $(\Delta)$ est tangente en E à (C).

2) Soit H le point de $(\Delta)$ d'abscisse positive telle que $EH=3\sqrt{2}$. Déterminer les coordonnées de H.

3) Soit (T) la deuxième tangente menée de H à (C) et F le point de tangence de (T) et (C).

Déterminer un système d'équations paramétriques d'une bissectrice de l'angle EHF.

**III- (4 points)**

On dispose d'une urne U contenant trois dés:

- **DEUX** dés rouges, dont les faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 6.
- **UN** dé noir, dont **deux** faces sont numérotées 6 et les **quatre** autres sont numérotées 1.

Un joueur tire au hasard et simultanément deux dés de l'urne puis les lance une seule fois.

On considère les évènements suivants:

A : « Tirer deux dés rouges ».

$\overline{A}$ : « Tirer deux dés un rouge et un noir ».

L : « Obtenir exactement une seule face numérotée 6 ».

1) Calculer la probabilité P(A).
2) a- Vérifier que $P(L/A) = \dfrac{5}{18}$ et calculer $P(A \cap L)$.

   b- Calculer $P(\overline{A} \cap L)$ et vérifier que $P(L) = \dfrac{19}{54}$.
3) Sachant qu'on a obtenu exactement une seule face numérotée 6, calculer la probabilité d'avoir tiré deux dés rouges.
4) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une face numérotée 6.

**IV- (8 points)**

Soit f la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + xe^{-x}$, et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Calculer $f(-1,5)$.
2) Soit (d) la droite d'équation $y = x$.

   a- Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).

   b- Démontrer que (d) est une asymptote à (C).
3) A est le point de (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (d). Déterminer les coordonnées de A et écrire une équation de (T).
4) Le tableau ci-dessous, est le tableau de variations de la fonction $f'$ dérivée de f

| x | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f'(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $1-e^{-2}$ | ↗ | 1 |

   a- Vérifier que (C) admet un point d'inflexion W dont on déterminera les coordonnées.

   b- Vérifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f.
5) Tracer (d), (T) et (C).
6) a- Démontrer que f admet une fonction réciproque h dont on déterminera le domaine de définition.

   b- Tracer la courbe (C') de h dans le même repère que (C).
7) Soit M un point quelconque de (C) d'abscisse $x \geq 0$ et N le symétrique de M par rapport à (d).

   a- Calculer MN en fonction de x.

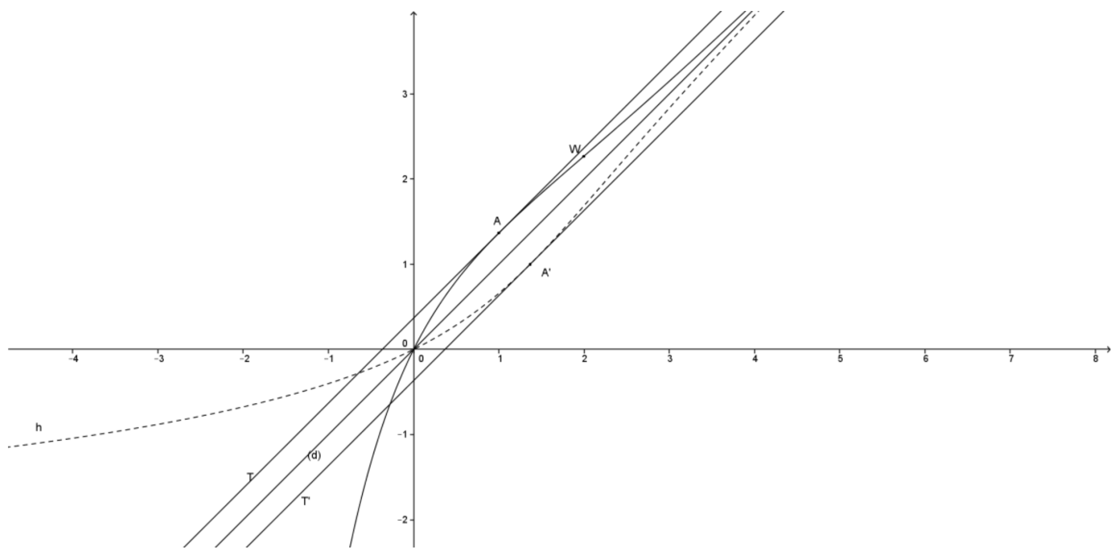
   b- Calculer la valeur maximale de MN.

| وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات الرسميّة | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>فرع: علوم الحياة | دورة العام ٢٠١٦ الاستثنائية<br>الاثنين ٨ آب ٢٠١٦ |
|---|---|---|
| مشروع معيار التصحيح | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة: ساعتان | |

| I | Solutions | Notes |
|---|---|---|
| 1a | $z'-1=(1-i)z+i-1$ ; $z'=(1-i)(z-1)$ | 0,25 |
| 1b | $\|z'-1\|=\|(1-i)(z-1)\|=\|1-i\|\times\|z-1\|$<br>$\|z_{M'}-z_A\|=\sqrt{2}\|z_M-z_A\|; AM'=\sqrt{2}AM$<br>$AM=\sqrt{2}$ ; $AM'=2$ ; $M'\in C(A;2)$ | 1 |
| 1c | $\arg[z'-1]=\arg[(1-i)(z-1)]=\arg(1-i)+\arg(z-1)+2k\pi;$<br>$(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=-\frac{\pi}{4}+(\vec{u};\overrightarrow{AM})+2k\pi$ | 1 |
| 1d | $\|z'-z\|=\|(1-i)z+i-z\|=\|-iz+i\|=\|i\|\|z-1\|=\|z-1\|$ alors $MM'=AM$<br>$(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=-\frac{\pi}{4}+(\vec{u};\overrightarrow{AM})$ donc $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'})=-\frac{\pi}{4}$ et $MAM'=45°$,<br>et comme $MM'=AM$ donc AMM' est un triangle rectangle isocèle en M. | 0,75 |
| 2a | $x'=x+y$ ; $y'=y-x+1$ | 0,5 |
| 2b | $x'=y'$ ; $x=\frac{1}{2}$ M se déplace sur la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$. | 0,5 |

| II | Solutions | Notes |
|---|---|---|
| 1a | $\overrightarrow{n_P}(1;-2;1)$ et $\overrightarrow{n_Q}(1;1;1)$ ; $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0$ | 0,5 |
| 1b | $-t-2+2+t=0$ donc $(\Delta)\subset(P)$ ; $-t-2-1+t+3=0$ donc $(\Delta)\subset(Q)$ | 0,5 |
| 1c | $\overrightarrow{AE}(-1;-1;-1);\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{V_\Delta}=0$ et pour $t=-2$ $E\in(\Delta)$ | 0,5 |
| 1d | $AE=\sqrt{3}=R;(\Delta)\subset(P)$ et $(\Delta)$ est perpendiculaire a $(AE)$ en E, $(\Delta)$ tangente à (C) en E | 0,5 |
| 2 | $H(-t-2;-1;t); EH=3\sqrt{2}; EH=\sqrt{2(t+2)^2}$; $t=1$ inacc. $t=-5$; $H(3;-1;-5)$ | 1 |
| 3 | $(AH):\begin{cases}x=2m+1\\y=-m\\z=-4m-1\end{cases}$ | 1 |

| III | Solutions | Notes |
|---|---|---|
| 1 | $p(A)=\frac{C_2^2}{C_3^2}=\frac{1}{3}$ | 0,5 |
| 2a | $p(L/A)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times2=\frac{5}{18}$ ; $P(A\cap L)=p(L/A)\times p(A)=\frac{5}{18}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{54}$ | 1 |
| 2b | $p(\overline{A}\cap L)=p(L/\overline{A})\times p(\overline{A})=\frac{2}{3}(\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{2}{6})=\frac{14}{54}$<br>$p(L)=p(A\cap L)+p(\overline{A}\cap L)=\frac{5}{54}+\frac{14}{54}=\frac{19}{54}$ | 1,25 |
| 3 | $p(A/L)=P\frac{(A\cap L)}{p(L)}=\frac{5}{19}$ | 0,5 |
| 4 | $1-p(\text{obtenir aucune face numérotée 6})=1-\left[\left(\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\right)\right]=\frac{43}{108}$ ou<br>$p(L)+p(\text{obtenir deux faces numérotées 6})=\frac{19}{54}+\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}\right)=\frac{43}{108}$ | 0,75 |

<table>
<tr><th>IV</th><th>Solutions</th><th>Notes</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$ ; $f(-1,5) \approx -8.22$</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td>2a</td><td>$f(x) - x = xe^{-x}$<br>si $x > 0; (C)$ est au-dessus de $(d)$<br>si $x = 0; (C)$ coupe $(d)$<br>si $x < 0; (C)$ est au-dessous de $(d)$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ donc (d) est une asymptote à (C).</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$f'(x) = 1;\ 1 + e^{-x} - xe^{-x} = 1; x = 1; A(1; 1 + e^{-1})$<br>$(T): y = x + e^{-1}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4a</td><td>$f''$ s'annule pour $x = 2$ en changeant de signe donc $W(2; 2 + 2e^{-2})$ est un point d’inflexion de (C).</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>4b</td><td>f’ admet un minimum égale à $1 - e^{-2} \approx 0,8 > 0$ donc f est strictement croissante sur IR.<br><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$      $+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$ ↗ $+\infty$</td></tr></table></td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>5</td><td>
</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6a</td><td>f est continue strictement croissante sur ℝ donc admet une fonction réciproque h.<br>$D_h = ]-\infty; +\infty[$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>6b</td><td>(C’) symétrique de (C) par rapport à (d).</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7a</td><td>$M(x; x + xe^{-x}); N(x + xe^{-x}; x); MN = \sqrt{2}xe^{-x}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7b</td><td>$MN = \sqrt{2}xe^{-x} = g(x);\ g'(x) = 0; \sqrt{2}e^{-x}(1 - x) = 0$<br>pour x=1 g admet un maximum égal à $\sqrt{2}e^{-1}$ donc la valeur maximale de MN est $\sqrt{2}e^{-1}$.</td><td>0,75</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| عدد المسائل: أربع | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة: ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |

ملاحظة :يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المُرشّح الاجابة بالترتيب الذي يناسبه ( دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

**I- (4 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$, on donne les deux points $A(3;1;1)$ et $F(2;2;-2)$ et la droite (d) définie par :

$$(d):\begin{cases} x=-t \\ y=t+2 \\ z=t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un paramètre réel.}$$

1) Soit (P) le plan passant par le point F et contenant la droite (d).
   Vérifier qu'une équation du plan (P) est : $x+z=0$
2) Soit $E(1;1;-1)$ un point de la droite (d).
   Vérifier que E est le projeté orthogonal de A sur (P).
3) Soit L le point de la droite (d) d'abscisse $x_L \neq 0$. Déterminer les coordonnées du point L pour que le triangle EFL soit isocèle de sommet principal E.
4) Calculer le volume du tétraèdre AEFL.

**II- (4 points)**

On dispose d'une boite V contenant six cartons numérotés 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 7 et 9 et de deux urnes $U_1$ et $U_2$ ;

- L'urne $U_1$ contient 3 boules rouges et 5 boules noires.
- L'urne $U_2$ contient 4 boules rouges et 4 boules noires.

On tire au hasard un carton de la boite V.
Si le carton tiré porte un numéro pair, on tire simultanément et au hasard deux boules de $U_1$.
Si le carton tiré porte un numéro impair, on tire simultanément et au hasard deux boules de $U_2$.
On considère les événements suivants:

A : " le carton tiré porte un numéro pair"
B : " le carton tiré porte un numéro impair"
R : " les deux boules tirées sont rouges"
N: " les deux boules tirées sont noires".

1) a- Calculer la probabilité $P\left(R/A\right)$ et déduire que $P(A\cap R)=\frac{1}{28}$ .
   b- Calculer $P(B\cap R)$ et $P(R)$.
2) Montrer que $P(N)=\frac{11}{42}$ .
3) Sachant qu'on a tiré deux boules noires, calculer la probabilité qu'elles proviennent de $U_1$.

**III- (4 points)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points $E(2i)$, $A(-i)$, $M(z)$ et $M'(z')$ où $z$ et $z'$ sont deux nombres complexes avec $z' = 2i - \frac{2}{z}$ $(z \neq 0)$ .

1) a- Montrer que $z(z'-2i) = -2$ .

   b- Calculer $\arg(z)+\arg(z'-2i)$ .

2) a- Vérifier que $z' = \dfrac{2i(z+i)}{z}$

   b- Montrer que $OM' = \dfrac{2AM}{OM}$

   c- Montrer que si M se déplace sur la médiatrice de $[OA]$ alors $M'$ se déplace sur un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.

3) On pose $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ où $x, y, x'$ et $y'$ sont des réels.

   a- Montrer que $x' = \dfrac{-2x}{x^2+y^2}$ et $y' = 2+\dfrac{2y}{x^2+y^2}$

   b- Montrer que si $x = y$ alors les droites $(OM)$ et $(EM')$ sont perpendiculaires.

**IV- (8 points)**

On considère la fonction $f$ définie sur $\left]-1;+\infty\right[$ par $f(x) = e^x - \dfrac{2e^x}{x+1}$.

(C) est la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a- Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)$. Déduire une asymptote (D) à (C).

   b- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et calculer $f(2,5)$.

2) Prouver que $f'(x) = \dfrac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}$ et dresser le tableau de variations de $f$.

3) Soit (d) la droite d'équation $y = x$ .

   La courbe (C) coupe la droite (d) en un point unique A d'abscisse $\alpha$.

   Vérifier que $1,8 < \alpha < 1,9$ .

4) a- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec les axes du repère.

   b- Tracer (D), (d) et (C).

5) a- Démontrer que, sur $\left]-1;+\infty\right[$, f admet une fonction réciproque $f^{-1}$.

   b- Tracer (C'), la courbe représentative de $f^{-1}$, dans le même repère que (C).

6) On suppose que l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à 0,53 unité d'aire.

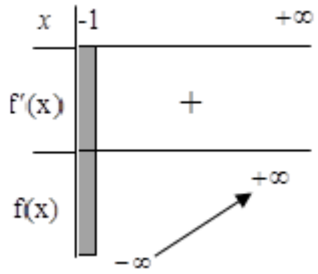
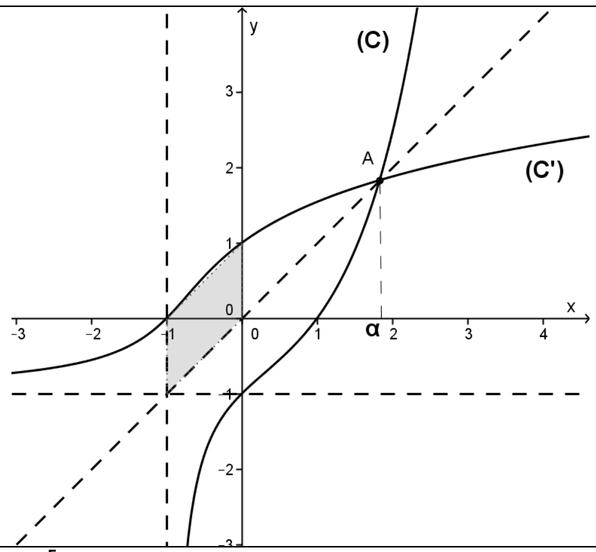
   Calculer l'aire du domaine limité par (C'), la droite (d), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = -1$.

| وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>الفرع : علوم الحياة | دورة ٢٠١٦ العادية |
|---|---|---|
| مشروع معيار التصحيح | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |

| I | Corrigé | N |
|---|---|---|
| 1 | Vérifier que F appartient à (P) et (d) est incluse dans (P) | 1 |
| 2 | E appartient à (d) alors E appartient à (P) et $\overrightarrow{AE}(-1,0,-2)$ donc $\overrightarrow{AE}=-2\overrightarrow{N_{(P)}}$ | 1 |
| 3 | $EF^2=3$ et $EL^2=3(t+1)^2$ alors $3(t+1)^2=3 \Rightarrow$<br>$t=-2$ ou $t=0$ donc $L(2,0,-2)$ | 1 |
| 4 | $V=\frac{1}{6}\left\lvert\overrightarrow{AL}.(\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AF})\right\rvert=\frac{\lvert -8\rvert}{6}=\frac{4}{3}u^3$ | 1 |

| II | | Corrigé | N |
|---|---|---|---|
| 1 | a | $P\left(R/A\right)=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}$ ; $p(A\cap R)=p(A).\ P\left(R/A\right)=\frac{2}{6}\times\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{1}{28}$ | 1 |
| | b | $p(B\cap R)=p(B).\ P\left(R/B\right)=\frac{4}{6}\times\frac{C_4^2}{C_8^2}=\frac{1}{7}$<br>$P(R)=p(A\cap R)+p(B\cap R)=\frac{5}{28}$. | 1 |
| 2 | | $P(N)=p(A\cap N)+p(B\cap N)=p(A).p(N/A)+p(B).p(N/B)=$<br>$\frac{1}{3}\times\frac{C_5^2}{C_8^2}+\frac{2}{3}\times\frac{C_4^2}{C_8^2}=\frac{11}{42}$. | 1 |
| 3 | | $p(A/N)=\frac{p(A\cap N)}{p(N)}=\frac{5/42}{11/42}=\frac{5}{11}$ | 1 |

| III | | Corrigé | N |
|---|---|---|---|
| 1 | a | $z'-2i=\frac{-2}{z}$ alors $z(z'-2i)=-2$ | 0.5 |
| | b | $\arg(z(z'-2i))=\arg z+\arg(z'-2i)=\arg(-2)=\pi[2\pi]$ | 0.5 |
| 2 | a | $z'=\frac{2i(z+i)}{z}$ | 0.5 |
| | b | $OM'=\left\lvert\frac{2i(z+i)}{z}\right\rvert=\frac{\lvert 2i(z+i)\rvert}{\lvert z\rvert}=\frac{\lvert 2i\rvert\lvert z+i\rvert}{\lvert z\rvert}=\frac{2AM}{OM}$ | 0.5 |
| | c | M appartient à la médiatrice de $[OA]$ alors MA=MO donc $OM'=2$, par suite M' varie sur le cercle de centre O et de rayon 2. | 0.5 |
| 3 | a | $x'=\frac{-2x}{x^2+y^2}$ et $y'=2+\frac{2y}{x^2+y^2}$ | 1 |
| | b | x= y alors $M'(\frac{-1}{x},2+\frac{1}{x})$ donc $\overrightarrow{EM'}(\frac{-1}{x},\frac{1}{x})$ et $\overrightarrow{OM}(x,y)$<br>$\overrightarrow{EM'}.\ \overrightarrow{OM}=0$ alors $(EM')\perp(OM)$. | 0.5 |

| IV | | Corrigé | N |
|---|---|---|---|
| 1 | a | $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = -\infty$ donc la droite (D) : x = -1 est une asymptote à (C) . | 0.5 |
| | b | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = (1)(+\infty) = +\infty$ ; f(2.5) $\approx 5,22$. | 1 |
| 2 | | $f'(x) = e^x - \left(\dfrac{2e^x(x+1)-2e^x}{(x+1)^2}\right)$ <br> $= \left(\dfrac{(x+1)^2-(x+1)+2}{(x+1)^2}\right)e^x$ <br> $= \left(\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}\right)e^x > 0$ pour tout $x \neq -1$ <br>   | 1 |
| 3 | | Soit $\phi(x) = f(x) - x$ . <br> $\phi(1.8) \approx -0.07 < 0$ et $\phi(1.9) \approx 0.17 > 0$ | 1 |
| 4 | a | Si x =0, alors f(0) = -1 , donc (C) coupe l'axe des ordonnées en (0,-1) <br> Si f(x) = 0, alors x = 1, donc (C) coupe l'axe des abscisses en (1; 0). | 0.5 |
| | b |   | 1 |
| 5 | a | Sur $]-1;+\infty[$ , f est continue et strictement croissante, elle admet une fonction réciproque $f^{-1}$. | 0.5 |
| | b | (C') et (C) sont symétriques par rapport à y = x. <br> Voir le graphique | 1 |
| 6 | | A cause de la symétrie par rapport à la droite y = x <br> L'aire de la région limitée par (C'), la droite (d), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = -1$ est égale à (0.53 + l'aire du triangle isocèle de côté 1) soit 1.03 unité d'aire. | 1.5 |

ملاحظة : - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الاجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

**I-(4 points)**

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le plan (P) d'équation $x-2y+2z-6=0$ et

la droite (d) d'équations paramétriques $\begin{cases} x = m+1 \\ y = 2m+1 \\ z = 2m+2 \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$.

Soit (Q) le plan contenant (d) et perpendiculaire à (P) et A (1 ; 1 ; 2) un point de (d).

1) Montrer que $2x-z=0$ est une équation du plan (Q).

2) Démontrer que la droite $(\Delta)$ d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 2t \\ y = 5t-3 \\ z = 4t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

est la droite d'intersection de (P) et (Q).

3) a- Déterminer les coordonnées du point B intersection de (d) et $(\Delta)$.
b- Déterminer les coordonnées du point F projeté orthogonal de A sur $(\Delta)$.
c- Calculer le cosinus de l'angle formé par (d) et (P).

**II-(4 points)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, M et M′ d'affixes respectives $-2$ ; $i$ ; $z$ et $z'$ tels que $z'=\dfrac{z+2}{z-i}$ où $z\neq -2$ et $z \neq i$.

1) Dans cette question seulement, on suppose que $z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
a- Ecrire le nombre complexe $-1-i$ sous forme exponentielle.
b- Déduire que $(z')^{40}$ est un réel.

2) On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ avec x, y, $x'$ et $y'$ sont des nombres réels.
a- Calculer $x'$ et $y'$ en fonction de x et de y.
b- Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$ en fonction de x et y.
c- Déduire que si $z'$ est imaginaire pur alors les deux droites (AM) et (BM) sont perpendiculaires.

3) a- Vérifier que $(z'-1)(z-i)=2+i$.
b- Déduire que si M se déplace sur le cercle (C) de centre B et de rayon $\sqrt{5}$ alors $M'$ varie sur un cercle $(C')$ dont on déterminera le centre et le rayon.

**III-(4 points)**

Une urne contient 4 boules rouges et 3 boules noires.

A- Dans cette partie, on tire de cette urne, successivement et au hasard, trois boules de la façon suivante : On tire la première boule sans la remettre dans l'urne, puis on tire la deuxième boule et on la remet dans l'urne, finalement on tire la troisième boule.

1) Vérifier que la probabilité de tirer trois boules noires est égale à $\frac{1}{21}$ .
2) Calculer la probabilité que la première boule tirée soit noire et les deux autres soient rouges.
3) Sachant que la première boule tirée est noire, calculer la probabilité que les deux autres boules tirées soient rouges.

B- Dans cette partie, les quatre boules rouges seront numérotées : 1 ; 2 ; 3 ; 4 et les trois boules noires : 1 ; 2 ; 3.
On tire **simultanément** et au hasard trois boules de l'urne.

1) Calculer la probabilité que deux boules parmi les trois boules tirées portent le même numéro.
2) Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées portant le numéro 2. Déterminer la loi de probabilité de X.

**IV-(8 points)**

A- Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=x^3-1+2\ln x$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
2) Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de $g$.
3) Calculer $g(1)$ puis déduire, suivant les valeurs de x, le signe de g(x).

B- On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x-\frac{\ln x}{x^2}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit (d) la droite d'équation $y=x$.

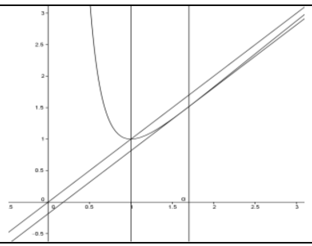
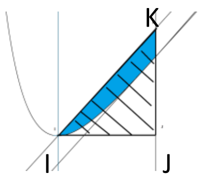
1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).
2) a- Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).
   b- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) est une asymptote à (C).
3) a-Vérifier que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ et dresser le tableau de variations de f.
   b- Déterminer le point E de (C) où la tangente (Δ) à (C) est parallèle à la droite (d).
   c- Tracer (d), (Δ) et (C).
4) Soit $\alpha$ un réel supérieur à 1. On désigne par $A(\alpha)$ l'aire du domaine limité par (C), (d) et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$.
   a- Vérifier que $\int \frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{-1-\ln x}{x}+k$ où k est un nombre réel.
   b- Exprimer $A(\alpha)$ en fonction de $\alpha$.
   c- A l'aide du graphique, démontrer que $A(\alpha)<\frac{(\alpha-1)^2}{2}$.

**Barème SV 2015 2ème session Fr**

| Q.I | Réponses | N |
|---|---|---|
| 1 | 2(m + 1) – (2 m+2) = 0, $\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{N_P}=2-2=0$ donc 2x – z = 0 est une équation de (Q).<br>**<u>OU</u>**: $\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{V_d}\wedge\overrightarrow{N_P}\right)=0\Leftrightarrow 2x-z=0.$ | 1 |
| 2 | 2t – 2t = 0 ; t –5t + 6 + 4t – 6 = 0 donc $(\Delta)$ vérifie les équations des deux plans.<br>**<u>OU</u>** : on résout le système $\begin{cases}2x-z=0\\x-2y+2z-6=0\end{cases}$ en prenant x = t. | 0,5 |
| 3.a | B est le point d'intersection de (d) et (P) :<br>m + 1 –4m –2 +4m + 4 – 6 = 0 $\rightarrow$ m = 3 et par suite B (4 ; 7 ; 8).<br>**<u>OU</u>** : on résout le système $\begin{cases}m+1=2t\\2m+1=5t-3\\2m+2=4t\end{cases}$ | 1 |
| 3.b | Si F est le projeté orthogonal de A sur $(\Delta)$ alors $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{V_\Delta}=0$ ; $\overrightarrow{V_\Delta}(2;5;4)$ et<br>$\overrightarrow{AF}(2t-1;5t-4;4t-2)$ ; $4t-2+25t-20+16t-8=0$ donc $t=\dfrac{2}{3}\rightarrow F\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{8}{3}\right)$ . | 1 |
| 3.c | Si α est une mesure de l'angle de (d) et (P) alors $\cos\alpha=\dfrac{BF}{AB}=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$. | 0,5 |

| Q.II | Réponses | N |
|---|---|---|
| 1.a | $-1-i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$ | 0.5 |
| 1.b | $z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1+i.\ z'=\dfrac{-1+i+2}{-1+i-i}=-1-i=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}.$<br>$(z')^{40}=2^{20}e^{50\pi i}=2^{20}e^{0\pi i}=2^{20}$ donc $(z')^{40}$ est un réel | 0.5 |
| 2.a | $z'=\dfrac{z+2}{z-i}=\dfrac{x+2+iy}{x+i(y-1)}\times\dfrac{x-i(y-1)}{x-i(y-1)}=\dfrac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2}+i\dfrac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2}.$<br>donc $x'=\dfrac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2}$ et $y'=\dfrac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2}$ . | 1 |
| 2.b | $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=x^2+y^2+2x-y$ . | 0.5 |
| 2.c | $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=x^2+y^2+2x-y$ .<br>Si $z'$ est imaginaire pur c.à.d. $\dfrac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2}=0$ ; $x^2+y^2+2x-y=0$ ; $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$<br>Donc (AM) et (BM) sont perpendiculaires. | 0.5 |
| 3.a | $(z'-1)(z-i)=\left(\dfrac{z+2}{z-i}-1\right)(z-i)=\dfrac{2+i}{z-i}(z-i)=2+i.$ | 0.5 |
| 3.b | si M se déplace sur le cercle (C) de centre B et de rayon $\sqrt{5}$ alors $\lvert z-i\rvert=\sqrt{5}$ ;<br>$\lvert z'-1\rvert\lvert z-i\rvert=\lvert 2+i\rvert=\sqrt{5}$ ; $\lvert z'-1\rvert=\dfrac{\sqrt{5}}{\lvert z-i\rvert}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$ donc M′ décrit le cercle de centre H<br>d'affixe 1 et de rayon 1. | 0.5 |

| Q.III | | Réponses | N |
|---|---|---|---|
| A | 1 | P (N, N, N) = $\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{21}$. \| 0.5 ⇒ 2 \| P (N, R, R) = $\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{21}$. | 0.5 |
| | 3 | P (deux autres boules tirées soient rouges / la première boule tirée est noire) = $\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$. | 0.5 |
| B | 1 | P(deux boules de même numéro) = P{1,1,x}+P(2,2,x}+P{3,3,x}= $3\times\frac{C_2^2\times C_5^1}{C_7^3}=\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$. | 1 |
| | 2 | $X=\{0;1;2\}$ $P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_7^3}=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$ ; $P(X=1)=\frac{C_2^1\times C_5^2}{C_7^3}=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$ ; $P(X=2)=\frac{C_2^2\times C_5^1}{C_7^3}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$ | 1.5 |

| Q.IV | | Réponses | N |
|---|---|---|---|
| A | 1 | $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^3-1+2\ln x\right)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-1+2\ln x\right)=+\infty.$ | 0,5 |
| | 2 | $g'(x)=3x^2+\frac{2}{x}>0.$ $\begin{array}{c\|ccc} x & 0 & & +\infty \\ \hline g'(x) & \| & + & \\ \hline g(x) & \| & -\infty \nearrow & +\infty \end{array}$ | 0,5 |
| | 3 | Comme g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $g(1)=0$ alors: si $0<x\leq 1$ alors $g(x)\leq g(1)$ et $g(x)\leq 0$. si $x>1$ alors $g(x)>g(1)$ et $g(x)>0$. | 0,5 |
| B | 1 | $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ alors la droite d'équation x = 0 est une asymptote à (C). | 0,5 |
| | 2.a | $f(x)-y=-\frac{\ln x}{x^2}$ . (C) et (d) se coupent au point (1 ; 1). Pour $0<x<1$, $f(x)-y>0$ ; (C) est au-dessus de (d) ; pour $x>1$ ; $f(x)-y<0$, (C) est en dessous de (d). | 0,5 |
| | 2.b | $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}(-\frac{\ln x}{x^2})=0$; $y=x$ asymptote à (C) | ¾ |
| | 3.a | $f'(x)=1-\frac{x-2x\ln x}{x^4}=1-\frac{1-2\ln x}{x^3}=\frac{x^3-1+2\ln x}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}.$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & \| & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & \| & +\infty \searrow & 1 & \nearrow +\infty & \end{array}$ | 1 |
| | 3.b | $f'(x)=1;g(x)=x^3$ ; $-1+2\ln x=0$ ; $x=e^{\frac{1}{2}}$ ; $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=e^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2e}$. $E\left(e^{\frac{1}{2}};e^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2e}\right)$. | ¾ |
| | 3.c |  \| 1 ⇒ 4.a \| $u=\ln x$ et $v'=\frac{1}{x^2}$ ; $u'=\frac{1}{x}$ et $v=-\frac{1}{x}$. $\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{-\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx=\frac{-\ln x}{x}-\frac{1}{x}+k=\frac{-1-\ln x}{x}+k$ | 1 |
| | 4.b | $A(\alpha)=\int_1^\alpha[x-f(x)]dx=\int_1^\alpha\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^\alpha-\left[\frac{1}{x}\right]_1^\alpha=(1-\frac{1}{\alpha}-\frac{\ln\alpha}{\alpha})$ $u^2$. | 0,5 |
| | 4.c |   $A(\alpha)<\int_1^\alpha(x-1)dx$ ; $A(\alpha)<\frac{\alpha^2}{2}-\alpha+\frac{1}{2}$ ; $A(\alpha)<\frac{(\alpha-1)^2}{2}$ car la partie coloriée est à l'intérieur du triangle rectangle isocèle IJK **OU** $A(\alpha)<$ Aire du triangle IJK; $A(\alpha)<\frac{IJ\times JK}{2}$;$A(\alpha)<\frac{(\alpha-1)^2}{2}$. | 0,5 |

| | | |
|---|---|---|
| عدد المسائل : اربع | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |

ارشادات عامة :-يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة.

**I-(4 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère le plan $(P)$ d'équation $x-2y+2z-6=0$ et les deux droites $(d)$ et $(d')$ définies par :

$$(d):\begin{cases}x=m+1\\ y=2m+1\\ z=2m+2\end{cases} \text{ et } (d'):\begin{cases}x=2t\\ y=5t-3\\ z=4t\end{cases} \text{(m et t sont des paramètres réels).}$$

1) Trouver les coordonnées du point A intersection de la droite $(d)$ et du plan $(P)$.
2) Vérifier que le point A appartient à la droite $(d')$ et que la droite $(d')$ est contenue dans le plan $(P)$.
3) a- Ecrire une équation du plan $(Q)$ formé par les deux droites $(d)$ et $(d')$.

b-Montrer que les deux plans $(P)$ et $(Q)$ sont perpendiculaires.

4) Soit $B(1;1;2)$ un point de $(d)$.

Calculer la distance du point B à la droite $(d')$.

**II- (4 points)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\vec{v})$.

On considère lespoints $A(-i)$, $B(-2)$ et $M(z)$ où $z$ est un nombre complexe différent de $-2$.

Soit $M'$ le point d'affixe $z'$ tel que : $z'=\dfrac{1-iz}{z+2}$.

1) a- Trouver la forme algébrique du nombre complexe $(z'+i)(z+2)$.

   b- Donner une interprétation géométrique de $|z'+i|$ et $|z+2|$, puis déduire que $AM'\times BM=\sqrt{5}$.

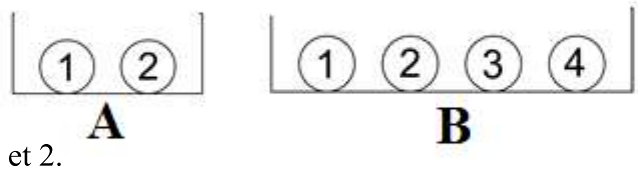
   c- Démontrer que, lorsque M se déplace sur le cercle de centre B et de rayon 1, $M'$ se déplace sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

2) On suppose que $z=-2+iy$ où $y$ est un réel non nul.

   a- Trouver, en fonction de $y$, la forme algébrique de $z'$.

   b- Déterminer le point M pour lequel $z'$ est réel.

**III- (4 points)**




On dispose de deux urnes $A$ et $B$.

- L'urne $A$ contient deux boules numérotées 1 et 2.
- L'urne $B$ contient quatre boules numérotées 1, 2, 3 et 4.

1) On choisit au hasard une des deux urnes puis de l'urne choisie, on tire au hasard une boule.
On considère les événements suivants :
- $A$ : « L'urne choisie est $A$ ».
- $N$ : « La boule tirée porte le numéro 1 ».

a- Calculer les probabilités $P(N/A)$ et $P(N \cap A)$.

b- Montrer que $P(N) = \frac{3}{8}$ et déduire $P(A/N)$.

2) Dans cette partie,les six boules des deux urnes $A$ et $B$ sont placées dans une urne W.
On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne W.
On considère les évènements suivants :
- E : « les deux boules tirées portent le même numéro. »
- F : « La somme des numéros portés par les deux boules est impaire. »

a- Vérifier que $P(E) = \frac{2}{15}$ .

b- Calculer $P(F)$ et $P(F/\overline{E})$.

**IV- (8 points)**

**A-**

Soit $g$ la fonction définie sur IR par $g(x) = x - 1 + e^x$.

1) Montrer que $g$ est strictement croissante sur IR. Dresser le tableau de variation de $g$.
2) Calculer $g(0)$ puis étudier, suivant les valeurs de $x$, le signe de $g(x)$.

**B-**

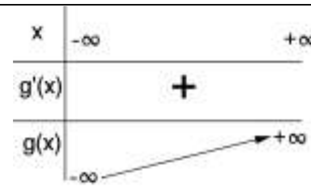
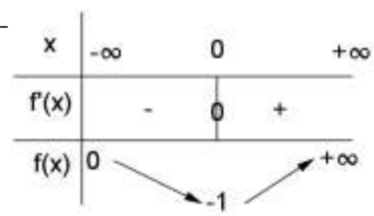
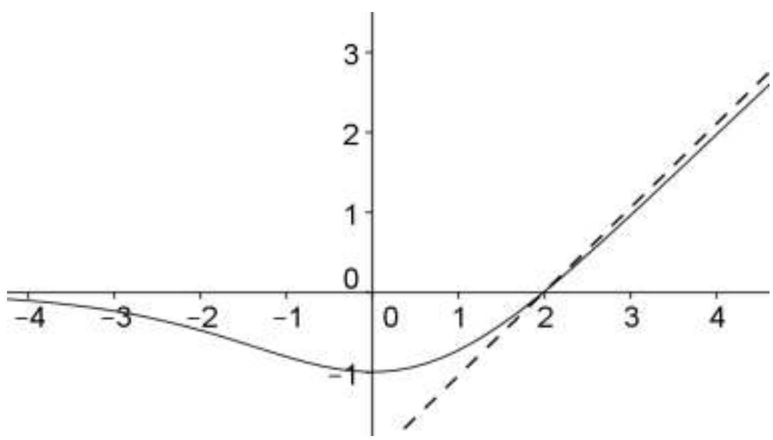
Soit $f$ la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{(x-2)e^x}{1+e^x}$ et $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. $(\Delta)$ est la droite d'équation $y = x - 2$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Déduire une asymptote à $(C)$.
2) Etudier, suivant les valeurs de $x$, la position relative de $(C)$ et $(\Delta)$.
3) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que $(\Delta)$ est une asymptote à $(C)$.
4) Montrerque $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(1+e^x)^2}$, puis dresser le tableau de variation de $f$.
5) Tracer $(\Delta)$ et $(C)$.
6) La fonction $f$ admet sur $[0;+\infty[$ une fonction réciproque $h$. Calculer $h'(0)$.

| وزارة التربية والتعليم العالي | امتحانات الشهادة الثانوية العامة | دورة العام 2015 العادية |
|---|---|---|
| المديرية العامة للتربية | فرع علوم الحياة | السبت 13 حزيـران 2015 |
| دائرة الامتحانات | | |

| عدد المسائل : اربع | مسابقة في مادة الرياضيات | الاسم: |
|---|---|---|
| | المدة ساعتان | الرقم: |

| Q1 | Réponses | N |
|---|---|---|
| 1 | m + 1 – 4m- 2+4m - 6 = 0; m = 3 alorsA(4;7;8) | 1 |
| 2 | 4=2t ; 7 = 5t – 3; 8 = 4t donc t = 2 valeur unique,alors A appartient à (d')<br>2t – 10t +6 +8t -6 =0 donc (d') est incluse (P). | ½ |
| 3a | $\overrightarrow{AM}.\left(\vec{V}\wedge\vec{V}'\right)=0$ ; $\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}=0$ ; alors (Q): $2x - z = 0$ | 1 |
| 3b | $\vec{N}.\vec{N}'=2+0-2=0$ ; $(P)\perp(Q)$ | ½ |
| 3c | $B\in(d)$ et $(P)\perp(Q)$et comme (d')intersection de $(P)$et$(Q)$ alors<br>$d\left(B;(d')\right)=d\left(B;(P)\right)=\dfrac{\lvert x_B-2y_B+2z_B-6\rvert}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{3}{3}=1$ | 1 |
| **Q2** | **Réponses** | **N** |
| 1a | $z'+i=\dfrac{1-iz+iz+2i}{z+2}=\dfrac{1+2i}{z+2}$ donc $(z'+i)(z+2)=1+2i.$ | 1 |
| 1b | $\lvert z'+i\rvert=AM'$;$\lvert z+2\rvert=BM$ $AM'\times BM=\lvert z'+i\rvert\times\lvert z+2\rvert=\lvert 1+2i\rvert=\sqrt{5}.$ | 1 |
| 1c | $M\in C(B;1)$ ; $BM=1$ ; $AM'=\sqrt{5}$ alors M' se déplace sur le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5}$ . | ½ |
| 2a | $z=-2+iy; z'=\dfrac{2}{y}+i\dfrac{-y-1}{y}$ | 1 |
| 2b | z' est un réel ; Im(z')=0 ; -y-1=0 donc $M(-2;-1)$ | ½ |
| **Q3** | **Réponses** | **N** |
| 1a | P (N/A)= $\dfrac{1}{2}$ ; $P(N\cap A) = P(A)\times P(N/A) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}.$ | 1 |
| 1b | P(N) = $P(N\cap A)+P(N\cap\bar{A})=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{8}.$ ; P(A/N)= $\dfrac{P(A\cap N)}{P(N)}=\dfrac{1/4}{3/8}=\dfrac{2}{3}$ | 1 |
| 2a | P(E) $=\dfrac{C_2^2}{C_6^2}+\dfrac{C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{2}{15}.$ | ½ |
| 2b | Réaliser F c'est avoir : $(1\text{ et }2)\text{ ou }(1\text{ et }4)\text{ ou }(2\text{ et }3)\text{ ou }(3\text{ et }4)$ alors<br>$P(F)=\dfrac{C_2^1\times C_2^1+C_2^1\times C_1^1+C_2^1\times C_1^1+C_1^1\times C_1^1}{C_6^2}=\dfrac{3}{5}$ et $P\left(F/_{E}\right)=\dfrac{P(F\cap\bar{E})}{p(\bar{E})}=\dfrac{P(F)}{1-p(E)}=\dfrac{9}{13}.$ | 1½ |

| Q4 | | Réponses | N |
|---|---|---|---|
| A | 1 | $g'(x) = 1 + e^x > 0$ pour tout réel x donc g est strictementcroissante sur IR.   | 1 |
| | 2 | g est strictement croissante sur IR avec g (0) = 0 donc<br>si $x < 0$ alors $g(x) < 0$ etsi $x > 0$ alors $g(x) > 0$. | 1 |
| B | 1 | $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0.$ L'axe $(x'x)$ est une asymptote à (C) en $-\infty$. | 1 |
| | 2 | $f(x) - (x-2) = \dfrac{-x+2}{1+e^x}$ donc (C) est au-dessus de (d) pour $x < 2$,<br>(C) est en-dessous de (d) pour $x > 2$ et (C) coupe (d) pour x=2. | 1 |
| | 3 | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (x-2)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x+2}{1+e^x} = 0.$<br>Donc la droite d'équation y = x-2 est une asymptote à (C) en $+\infty$. | 1 |
| | 4 | $f'(x) = \dfrac{\left[e^x + e^x(x-2)\right]\left[1+e^x\right] - e^x(x-2)e^x}{(1+e^x)^2}$<br>$= \dfrac{e^x(x-1+e^x)}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x g(x)}{(1+e^x)^2}.$   | 1 |
| | 5 |  | 1 |
| | 6 | Comme f(2)=0 donc $h'(0) = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1+e^2}{e^2}$. | 1 |

| وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الإمتحانات | امتحانات شهادة الثانوية العامة<br>فرع علوم الحياة | دورة العام ٢٠١٤ العادية<br>الخميس ١٩ حزيران ٢٠١٤ |
|---|---|---|
| عدد المسائل : أربع | مسابقة في الرياضيات<br>المدة ساعتان | الإسم:<br>الرقم: |

ملاحظة : - يسمح باستخدام آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات .
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الإلتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

**I - (4 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$, on considère le point A (2 ; 0 ; − 2) et la droite (d) d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = t-2 \\ y = -t \\ z = 3 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

1) a- Vérifier que A n'est pas un point de (d).
   b- Montrer que x + y + z = 0 est une équation du plan (P) contenant (OA) et parallèle à (d).

2) Soit (d′) la droite passant par O et parallèle à (d).
   a- Écrire un système d'équations paramétriques de (d′).
   b- Prouver que le point E( − 1 ; − 1 ; 3) est le projeté orthogonal de O sur (d) .
   c- Calculer la distance entre (d) et (d′).

3) On considère dans le plan (P) le cercle (C) de centre O et de rayon OA.
   Calculer les coordonnées des points d'intersection B et L de la droite (d′) et du cercle (C).

**II- (4 points)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$, on considère les points M et M′ d'affixes respectives z et z′ tel que $z' = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ . $(z \neq 0)$

1) Démontrer que OM′ = OM et que $\arg(z') = \frac{\pi}{3} + \arg(z)$.

2) On suppose que z = x + iy et z′ = x′ + iy′ où x, y, x′ et y′ sont des réels.
   a- Exprimer x′ et y′ en fonction de x et y.
   b- Montrer que si z′ est réel, alors M se déplace sur une droite à déterminer.

3) Dans ce qui suit on suppose que $z = e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
   a- Écrire z′ sous forme algébrique.
   b- Écrire z′ sous forme exponentielle et déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

**III- (4 points)**

Une urne contient deux boules rouges numérotées 0, trois boules vertes numérotées 1 et cinq boules bleues numérotées 2. On tire simultanément et au hasard trois boules de cette urne et on considère les événements suivants :

- A : « Les trois boules tirées sont de la même couleur ».
- H : « Le produit des nombres portés par les trois boules tirées est 2 ».
- C : « Le produit des nombres portés par les trois boules tirées est différent de zéro ».

1) a- Calculer P(A) la probabilité de l'événement A .
   b- Calculer P(B).
   c- Montrer que $P(C) = \frac{7}{15}$.

2) Sachant que le produit des nombres portés par les trois boules tirées est différent de zéro, calculer la probabilité que les trois boules tirées soient de la même couleur.

3) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues dans le tirage des trois boules.
   a- Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   b- Montrer que $P(X = 1) = \frac{7}{15}$.
   c- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

**IV - (8 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + e^{x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

1) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation y = x est asymptote à (C).
   b- Préciser la position de (C) par rapport à (d).
   c- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Calculer f(− 1), f(0) et f(1).

2) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

3) Montrer que l'équation f(x) = 1 admet une unique solution α et que $-0{,}6 < \alpha < -0{,}5$.

4) Tracer (d) et (C).

5) a- Montrer que f admet sur $\mathbb{R}$ une fonction réciproque g dont on déterminera le domaine de définition.
   b- Tracer la courbe représentative (Γ) de g dans le même repère que (C).
   c- Calculer l'aire du domaine limité par (Γ) et les axes des coordonnées.

| عدد المسائل اربع | مسابقة في الرياضيات<br>المدة ساعتان | الإسم:<br>الرقم: |
|---|---|---|

ملاحظة:- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

**I- (4 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le point A (6 ; 3 ; 2), le plan (P) d'équation $x-y+2z-7=0$ et la droite (d) d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t-3 \\ z = -1 \end{cases}$$ où t est un paramètre réel.

1) Montrer que A appartient à (P) et que (d) est parallèle à (P).

2) a- Vérifier que le point C (1 ; –2 ; –1) appartient à (d).

b- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (L) passant par C et perpendiculaire à (P).

c- Montrer que le point E $(3;-4;3)$ est le symétrique de C par rapport à (P).

d- Déduire un système d'équations paramétriques de la droite $(\Delta)$ symétrique de la droite (AC) par rapport à (P).

**II- (4 points)**

Une urne contient sept boules: quatre rouges et trois vertes.

Un joueur tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

1) a- Calculer la probabilité que le joueur tire exactement deux boules rouges.

b- Démontrer que la probabilité, que le joueur tire au moins deux boules rouges, est égale à $\frac{22}{35}$.

2) Après avoir tiré les trois boules, le joueur marque:

- 9 points s'il tire trois boules rouges ;
- 6 points s'il tire exactement deux boules rouges ;
- 4 points s'il tire exactement une boule rouge ;
- Zéro s'il tire trois boules vertes.

On désigne par X la variable aléatoire égale au score du joueur.

a- Déterminer la loi de probabilité de X.

b- Sachant que le joueur a marqué plus que 2 points, calculer la probabilité que son score soit multiple de 3.

**III- (4 points)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

**A-** On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2+2i$ et $z_B = \left(1+\sqrt{3}\right)\left(-1+i\right)$.

1) Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{z_B}{z_A}$.

2) Démontrer que le triangle OAB est rectangle en O.

**B-** A chaque point M d'affixe z ( $z \neq 0$ ), on associe le point M′ d'affixe z′ tel que $z' = 1+i-\frac{2}{z}$.

On pose z = x + iy avec x et y sont deux réels.

1) Exprimer, en fonction de x et de y, la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $z'$.

2) Démontrer que si la partie réelle de $z'$ est égale à zéro, alors M se déplace sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

**IV- (8 points)**

**A-** On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2\ln x$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

2) Dresser le tableau de variations de g et déduire que $g(x) > 0$.

**B-** Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).

2) a-Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite ($\Delta$) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à (C).

b- Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et ($\Delta$).

3) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$ et dresser le tableau de variations de f.

4) Calculer les coordonnées du point B de (C) où la tangente (T) est parallèle à ($\Delta$).

5) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique $\alpha$ puis vérifier que $0,34 < \alpha < 0,35$.

6) Tracer ($\Delta$), (T) et (C).

7) Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \frac{1+\ln x}{x}$.

a- Trouver une primitive H de h.

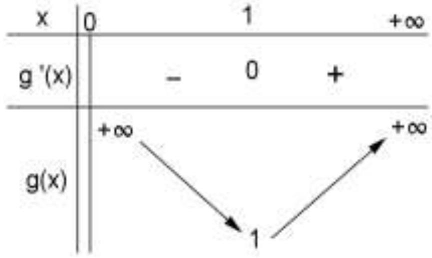
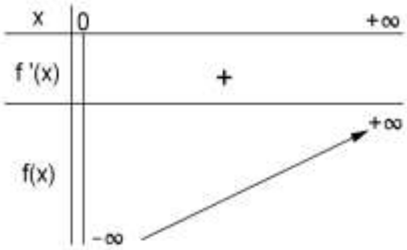
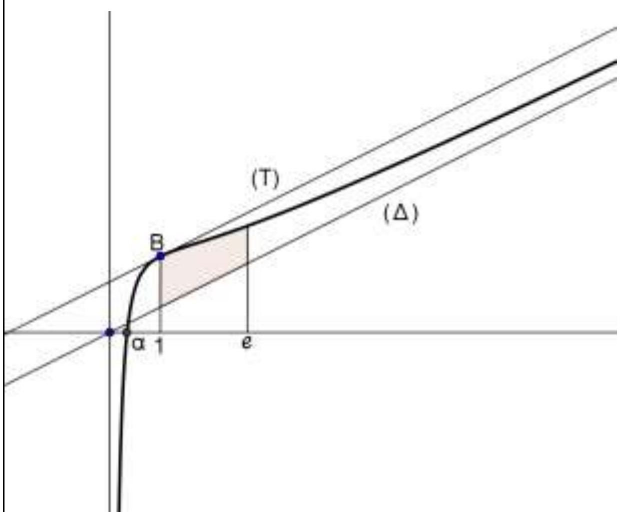
b- Déduire la mesure de l'aire du domaine limité par (C), ($\Delta$) et les deux droites d'équations x = 1 et x = e.

Barème S.V Fr Session 2 2013

| Q1 | Réponses | N |
|---|---|---|
| 1 | $x_A - y_A + 2z_A - 7 = 0$ donc $A \in (P)$. et t –t+3 –2 –7=–6 $\neq 0$. Donc (d) est parallèle à (P). | 1 |
| 2a | Pour : $x = x_C = 1$, t = 1 et $y = y_C = -2$, et z = $z_C = -1$ ; donc C $\in (d)$. | 0,5 |
| 2b | $\overrightarrow{v_L}$ est parallèle à $\overrightarrow{n_P}(1;-1;2)$ et (L) passe par C, donc un système d'équations paramétriques de (L) est : x = m +1, y = – m– 2, z = 2m –1 où m est un paramètre réel. | 0,5 |
| 2c | (L) coupe (P) au point I (m +1, – m –2, 2m –1), et I $\in (P)$, donc m = 1 et I (2;–3;1).<br>D'autre part, le point I est le milieu de [EC], donc :<br>$x_E = 2x_I - x_C = 3$, $y_E = 2y_I - y_C = -4$ et $z_E = 2z_I - z_C = 3$.<br>**OU :** $\overrightarrow{CE}(2;-2;4)$, $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{n_P}$, (CE) est donc perpendiculaire à (P) avec I(2;–3;1) milieu de [CE] qui vérifie l'équation de (P), alors C et E sont symétriques par rapport à (P). | 1,5 |
| 2d | La droite ($\Delta$) passe par A et E ; donc $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AE}$. x = –3k + 6, y = – 7k +3, z = k + 2. | 0,5 |

| $Q_2$ | Réponses | Note |
|---|---|---|
| 1a | $P\{2R,1V\} = \dfrac{C_4^2 \times C_3^1}{C_7^3} = \dfrac{18}{35}$. | 1 |
| 1b | $P\{2R,1V\}+P\{3R\} = \dfrac{18}{35} + \dfrac{C_4^3}{C_7^3} = \dfrac{22}{35}$. | 1 |
| 2a | $P(X=9) = P(3R) = \dfrac{4}{35}$. $P(X=6) = P\{2R,1V\} = \dfrac{18}{35}$.<br>$P(X=4) = P\{1R,2V\} = \dfrac{C_4^1 \times C_3^2}{C_7^3} = \dfrac{12}{35}$. $P(X=0) = P(3V) = \dfrac{C_3^3}{C_7^3} = \dfrac{1}{35}$. | 1 |
| 2b | P(Score multiple de 3/ Score > 2) $= \dfrac{22}{35} \div \dfrac{34}{35} = \dfrac{11}{17}$. | 1 |

| $Q_3$ | Réponses | Note |
|---|---|---|
| A1 | $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{(1+\sqrt{3})(-1+i)}{2(1+i)} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}i = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$. | 1 |
| A2 | $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = -2(1+\sqrt{3}) + 2(1+\sqrt{3}) = 0$.<br>OU $\dfrac{z_B}{z_A}$ est imaginaire pur donc $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \arg\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et $(OB) \perp (OA)$. | 0,5 |
| B1 | $z' = 1+i-\dfrac{2}{x+iy} = 1+i-\dfrac{2x-2iy}{x^2+y^2}$. $\mathrm{Re}(z') = 1-\dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $\mathrm{Im}(z') = 1+\dfrac{2y}{x^2+y^2}$. | 1 |
| B2 | $\mathrm{Re}(z') = 1-\dfrac{2x}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow x^2+y^2-2x = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = 1$ donc M se déplace sur le cercle de centre ( 1; 0) et de rayon 1 privé de O. | 1,5 |

| Q4 | | Note |
|---|---|---|
| A.1 | $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x-2\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty.$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ | 0,5 |
| A.2 | $g'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x+1)(x-1)}{x}.$<br>g(x) admet un minimum égal à 1,<br>d'où g(x) > 0 pour x > 0.<br> | 1 |
| B.1 | $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote à (C). | 0,5 |
| B.2.a | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{x}{2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}\right)=0$.<br>Donc la droite $(\Delta)$ d'équation $y=\dfrac{x}{2}$ est une asymptote à (C). | 0,5 |
| B.2.b | $f(x)-\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{x}(\ln x+1)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$ d'où $y=\dfrac{1}{2e}\Rightarrow A\left(\dfrac{1}{e};\dfrac{1}{2e}\right)$ est le point de rencontre de $(\Delta)$ et (C). Pour $x>\dfrac{1}{e}$, (C) est au-dessus de $(\Delta)$,pour $0<x<\dfrac{1}{e}$ (C) est au-dessous de $\Delta$. | 1 |
| B.3 | $f'(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}\right)(x)-\ln x-1}{x^2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\ln x}{x^2}=\dfrac{g(x)}{2x^2}.$<br> | 1 |
| B.4 | $f'(x_B)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{x^2-2\ln x}{2x^2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=1$ donc $B\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. | 0,5 |
| B.5 | f est continue et elle est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ donc l'équation f(x) = 0 admet une solution unique $\alpha$ de plus f(0,34) = – 0,061 < 0 et f(0,35) = 0,032 > 0 donc $0,34<\alpha<0,35$. | 1 |
| B.6 |  | 1 |
| B7a | $H(x)=\int h(x)\,dx=\dfrac{(\ln x)^2}{2}+\ln x+c$<br>$=\dfrac{(1+\ln x)^2}{2}+k.$ | 0,5 |
| B7b | $A=\displaystyle\int_1^e\left(f(x)-\dfrac{x}{2}\right)dx$<br>$=\displaystyle\int_1^e\dfrac{1+\ln x}{x}dx$<br>$=H(e)-H(1)=\dfrac{3}{2}\ u^2.$ | 0,5 |

وزارة التربية والتعليم العالي
المديرية العامة للتربية
دائرة الامتحانات

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع علوم الحياة

دورة سنة 2013 العادية

| | | |
|---|---|---|
| الاثنين 1 تموز 2013<br>عدد المسائل: اربع | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة: ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |

**ملاحظة:** - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة)

**I-(4points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$, on considère les points :
A (4 ; 2 ; 0), B (2 ; 3 ; 1) et C (2 ; 2 ; 2).

1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.
2)Montrer qu'une équation du plan (P) déterminé par les trois points A, B et C est $x + y + z - 6 = 0$.
3) Soit (Q) le plan passant par A et perpendiculaire à (AB).
   a- Déterminer une équation de (Q).
   b- On désigne par (D) la droite d'intersection de (P) et (Q). Démontrer que (D) est parallèle à (BC).
4) Soit $H(5;3;1)$ un point de (Q).
   a- Démontrer que A est le projeté orthogonal de H sur (P).
   b- Calculer le volume du tétraèdre HABC.

**II-(4points)**

Une discothèque vend uniquement des albums musicaux classiques et modernes.
Une enquête menée auprès des clients de cette discothèque a donné les résultats suivants :

- 20% de ces clients ont acheté chacun un album classique.
- Parmi les clients qui ont acheté un album classique, 70% ont acheté un album moderne.
- 22% de ces clients ont acheté chacun un album moderne.

On interroge, au hasard, un client de cette discothèque et on considère les événements suivants :
C : « le client interrogé a acheté un album classique »
M : « le client interrogé a acheté un album moderne ».

1) Calculer la probabilité $P(C \cap M)$ et vérifier que $P(C \cap \overline{M}) = 0{,}06$.
2) Démontrer que $P(\overline{C} \cap \overline{M}) = 0{,}72$.
3) Calculer la probabilité que le client ait acheté au moins un album.
4) Sachant que le client n'a pas acheté un album moderne, calculer la probabilité qu'il ait acheté un album classique.
5) L'album classique est vendu à 30 000LL et l'album moderne est vendu à 20 000LL.
   Soit X la variable aléatoire égale à la somme payée par le client.
   a- Justifier que les valeurs possibles de X sont 0 , 20 000 , 30 000 et 50 000 et déterminer la loi de probabilité de X.
   b- Durant le mois de juin, 300 clients ont visité cette discothèque. Estimer le revenu de cette discothèque durant ce mois.

**III- (4 points)**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$ , $z_B = 3-2i$ et $z_C = 1$.

1) Démontrer les points A, B et C sont alignés.

2) Soit le nombre complexe $w = z_C - z_A$ .

Ecrire w sous forme exponentielle et déduire que $w^{20}$ est un réel négatif.

3) Soit M un point du plan d'affixe z.

a- Donner une interprétation géométrique de $|z-i|$ et de $|z-1|$.

b- On suppose que $|z-i| = |z-1|$ . Démontrer que le point M se déplace sur une droite que l'on déterminera.

c- Démontrer que si $(z-i)\times(\bar{z}+i)=16$, alors le point M se déplace sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

**IV-(8points)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - \dfrac{4}{e^{2x}+1}$.

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (**unité graphique 2 cm**).

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et déduire les asymptotes de (C).

2) Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

3) La courbe (C) admet un point d'inflexion W d'abscisse 0. Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point W.

4) a- Calculer l'abscisse du point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

b- Tracer (T) et (C).

5) a- Vérifier que $f(x) = -1+\dfrac{4e^{2x}}{e^{2x}+1}$ et déduire une primitive F de f.

b- Calculer, en $cm^2$, l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$.

6) La fonction f admet sur $\mathbb{R}$ une fonction réciproque g. On désigne par (G) la courbe représentative de g.

a-Préciser le domaine de définition de g.

b-Montrer que (G) admet un point d'inflexion J dont on déterminera les coordonnées.

c-Tracer (G) dans le même repère que (C).

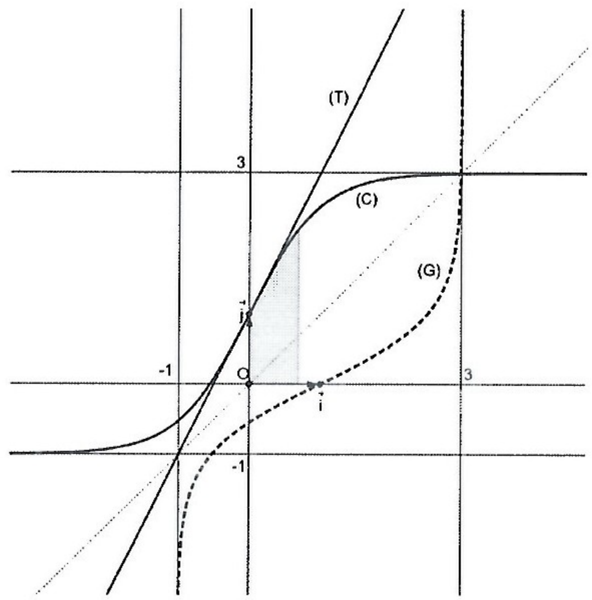
d-Déterminer g(x) en fonction de x.

# Barème Math S.V Session 1 2013

| $Q_1$ | Solutions | Notes |
|---|---|---|
| 1 | $\overrightarrow{AB}(-2\,;1\,;1)$, $\overrightarrow{BC}(0\,;-1\,;1)$ ; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, donc le triangle ABC est rectangle en B. | 0,5 |
| 2 | $x_A+y_A+z_A-6=0$, donc A est un point de (P) ; de même, $x_B+y_B+z_B-6=0$, donc B est un point de (P) et $x_C+y_C+z_C-6=0$, donc C est un point de (P). D'où (P) : $x + y + z - 6 = 0$.<br>**Ou** bien on cherche le produit mixte $\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})$ avec M(x : y ; z) un point quelconque de (P). | 0,5 |
| 3. a | Pour tout point M(x, y, z) dans (Q) on a: $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{AB}=0$; (Q): $-2x+y+z+6=0$. | 0,5 |
| 3. b | Un vecteur directeur de (D) est $\vec{V}=\vec{n}_P\wedge\vec{n}_Q$, donc $\vec{V}(0\,;-3\,;3)$, et $\overrightarrow{BC}(0\,;-1\,;1)$ et $B\notin(Q)$, donc $B\notin$ (D), donc (D) est parallèle à (BC).<br>**Ou** bien :<br>puisque (BC) est perpendiculaire à (AB) et (AB) est perpendiculaire à (D) en A, alors (BC) et (D) sont deux droites de (P) perpendiculaires à une même droite (AB), elles sont donc parallèles. | 1 |
| 4. a | $A\in(P)$, $\overrightarrow{AH}(1;1;1)$ et $\vec{n}_P\,(1;1;1)$ donc (AH) et perpendiculaire à (P). | 1 |
| 4. b | Le volume du tétraèdre HABC est égal à :<br>$V=\frac{1}{3}$ HA × l'aire du triangle ABC = $\frac{1}{6}\times BA\times BC\times\sqrt{3}=1$ unités de volume.<br>**Ou** bien $V=\frac{\left\|\overrightarrow{AH}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right\|}{6}=\frac{6}{6}=1.$ | 0,5 |

<table>
<tr><th>$Q_2$</th><th>Solution</th><th>Notes</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$P(C\cap M)=P(C)\times P(M/C)=0,14.$ $P(C\cap\overline{M})=P(C)\times P(\overline{M}/C)=0,06.$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$P(C\cap\overline{M})+P(\overline{C}\cap\overline{M})=P(\overline{M})=1-P(M)$ donc $P(\overline{C}\cap\overline{M})=0,78-0,06=0,72.$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>P (au moins un album) = $1-P(\overline{C}\cap\overline{M})=0,28$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$P(C/\overline{M})=\frac{P(C\cap\overline{M})}{P(\overline{M})}=\frac{0,06}{0,78}=\frac{1}{13}.$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>5a</td><td>Les quatre valeurs possibles sont : 0 (le client n'a rien acheté), 20 000 (le client a acheté l'album moderne), 30 000 (le client a acheté l'album classique), 50 000 (le client a acheté les deux albums).
<table>
<tr><td>$x_i$</td><td>0</td><td>20 000</td><td>30 000</td><td>50 000</td></tr>
<tr><td>$P_i$</td><td>0,72</td><td>0,08</td><td>0,06</td><td>0,14</td></tr>
</table></td><td>1</td></tr>
<tr><td>5b</td><td>$E(X)=\sum P_iX_i=0\times0,72+20\,000\times0,08+30\,000\times0,06+50\,000\times0,14=10\,400$ L L.<br>R= $E(X)\times300=10\,400\times300=3\,120\,000$ LL.</td><td>0,5</td></tr>
</table>

| $Q_3$ | Solutions | Notes |
|---|---|---|
| 1 | $z_A-z_B=-3+3i$ et $z_A-z_C=-1+i$. $z_A-z_B=3(z_A-z_C)$ d'où $z_{\overrightarrow{BA}}$ [illegible] $_{\overrightarrow{CA}}$ ; par suite $\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{CA}$<br>et les trois points A, B et C sont alignés. | 0,5 |
| 2 | $w=z_{\overrightarrow{AC}}=1-i=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$, donc $w^{20}=\left(\sqrt{2}\right)^{20}e^{-5i\pi}=-\left(\sqrt{2}\right)^{20}$. | 1 |
| 3. a | $\|z-i\|=\|z_M-z_A\|=AM$ ; $\|z-1\|=\|z_M-z_C\|=CM$. | 0,5 |
| 3. b | $\|z-i\|=\|z-1\|$, d'où MA = MC ; donc le point M varie sur la médiatrice (d) du segment [AC]. | 1 |
| 3-c | Si $z_M$ vérifie $(z-i)\times(\overline{z}+i)=16$ alors $(z_M-z_A)\times(\overline{z_M-z_A})=16$, soit $\|z_M-z_A\|\times\|\overline{z_M-z_A}\|=16$,<br>$\|z_M-z_A\|\times\|z_M-z_A\|=16.$ D'où $AM^2=16$ ; donc le point M appartient à un cercle de centre A et de rayon 4. | 1 |

| $Q_4$ | Solutions | Notes |
|---|---|---|
| 1 | $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3 - 4 = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$. Donc (C) admet deux asymptotes horizontales d'équation y = 3 et y = – 1. | 1 |
| 2 | $f'(x) = \dfrac{8e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} > 0$ ; f est strictement croissante sur IR.<br>$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & & & 3 \\ & & \nearrow & \\ & -1 & & \end{array}$ | 1 |
| 3 | Pente de (T) = f '(0) = 2, et (T) passe par le point W (0 ; 1), d'où l'équation de (T) est : y = 2 x + 1. | 0,5 |
| 4. a | $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 = \dfrac{4}{e^{2x}+1} \Leftrightarrow e^{2x} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\ln 3}{2}$. | 0,5 |
| 4. b |  | 1 |
| 5-a | $f(x) = 3 - \dfrac{4}{e^{2x}+1} = \dfrac{3e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ et $1 + \dfrac{4e^{2x}}{e^{2x}+1} = \dfrac{3e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.<br>$F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(-1+\dfrac{4e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)dx = -x + 2\int\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}dx = -x + 2\ln\left(e^{2x}+1\right) + c$. | 1 |
| 5-b | A = 4A' $cm^2$.<br>$A' = \displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx = \left[-x+2\ln\left(e^{2x}+1\right)\right]_0^{\ln 2} = 2\ln 5 - 3\ln 2 = \ln\left(\dfrac{25}{8}\right)$. Donc $A = 4\ln\left(\dfrac{25}{8}\right) cm^2$. | 0,5 |
| 6. a | Dom (g) =]–1; 3[. | 0,5 |
| 6. b | W (0,1) est un point d'inflexion de (C), d'où le symétrique de J par rapport à la droite d'équation y = x qui est le point J (1 ; 0), est un point d'inflexion de (G). | 0,5 |
| 6. c | (G) est symétrique de (C) par rapport à la droite d'équation y = x. | 0,5 |
| 6. d | $y = g(x) \leftrightarrows x = f(y) \leftrightarrows \quad x = 3 - \dfrac{4}{e^{2y}+1} \quad \leftrightarrows \quad \dfrac{4}{e^{2y}+1} = 3 - x \quad \leftrightarrows \quad e^{2y}+1 = \dfrac{4}{3-x} \quad \leftrightarrows$<br>$e^{2y} = \dfrac{4}{3-x} - 1 = \dfrac{1+x}{3-x}$. Donc $2y = \ln\left(\dfrac{1+x}{3-x}\right)$ ; $y = g(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{3-x}\right)$. | 1 |

| وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>الفرع : علوم الحياة | الدورة الإستثنائية للعام 2012 |
|---|---|---|
| عدد المسائل:أربع | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة.

**I- (4 points)**

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, en justifiant, la réponse qui lui correspond.

| N° | Questions | Réponses | | |
|---|---|---|---|---|
| | | a | b | c |
| 1 | Si $z = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $z' = -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, alors un argument de $(z - z')$ est | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ |
| 2 | Si z est l'affixe d'un point M tel que $\lvert z-2i\rvert = \lvert z+4i\rvert$, alors M décrit | un cercle | une droite parallèle à l'axe des ordonnées | une droite parallèle à l'axe des abscisses |
| 3 | Une des valeurs de z qui vérifient $\lvert z+1\rvert^2 + \lvert z-1\rvert^2 = 2\lvert z+i\rvert^2$ est | 3i | 2 + 3i | 2 |
| 4 | La forme exponentielle de $\frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\sqrt{3}+i}$ est | $\frac{1}{2}e^{i\left(-\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$ | $2e^{i\left(-\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$ | $\frac{1}{2}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$ |

**II- (4 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A (2; –2; –1), B (1 ; 0; –2), C (2; 1 ; –1) et le plan (P) d'équation :

$x - 2y + z + 1 = 0$.

1) Montrer qu'une équation du plan (Q) déterminé par A, B et C est $x - z - 3 = 0$.

2) a- Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires et qu'ils se coupent suivant la droite (BC).

b- Calculer la distance de A à (BC).

3) Soit (d) la droite définie par: $\begin{cases} x = t-1 \\ y = t+1 \\ z = t+2 \end{cases}$ où t est un paramètre réel.

a-Vérifier que (d) est incluse dans (P).

b-Soit M un point variable de (d).

Démontrer que l'aire du triangle MBC reste constante lorsque M se déplace sur (d).

**III- (4 points)**

On considère deux urnes **U** et **V**.

L'urne **U** contient huit boules: quatre boules portant le nombre 1, trois boules portant le nombre 2 et une boule portant le nombre 4.

L'urne **V** contient huit boules : trois boules portant le nombre 1 et cinq boules portant le nombre 2.

1) **On tire simultanément et au hasard deux boules de U.**

On considère les événements suivants :

- A : « les deux boules tirées portent le même nombre»
- B : « le produit des nombres portés par les deux boules tirées est égal à 4».

Calculer la probabilité P(A) de l'événement A et montrer que $P(B) = \frac{1}{4}$.

2) **On choisit au hasard une des deux urnes U et V puis on tire simultanément et au hasard deux boules de cette urne.**

On considère les événements suivants :

- E: « l'urne choisie est **V**»
- F: « le produit des nombres portés par les deux boules tirées est égal à 4».

a- Vérifier que $P(F \cap E) = \frac{5}{28}$ et calculer $P\left(F \cap \overline{E}\right)$.

b- Déduire $P(F)$.

3) **On tire au hasard une boule de U et on tire simultanément et au hasard deux boules de V.**

Calculer la probabilité de l'événement H : « le produit des 3 nombres portés par les trois boules tirées soit égal à 8 ».

**IV- (8 points)**

Soit f la fonction définie sur ]1 ; + ∞[ par $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer $\lim_{x\to 1} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$. En déduire les asymptotes de (C).

2) Vérifier que $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$ et dresser le tableau de variations de f.

3) Tracer (C).

4) a- Démontrer que f admet une fonction réciproque g dont on déterminera le domaine de définition.

b- Démontrer que $g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

c- Soit (G) la courbe représentative de g dans le même repère que (C). Tracer (G).

5) Soit h la fonction définie sur] 1 ; + ∞ [ par h(x) = x f(x).

a- Vérifier que $f(x) = h'(x) + \frac{2x}{x^2 - 1}$ et déterminer, sur ]1 ; + ∞[, une primitive F de f.

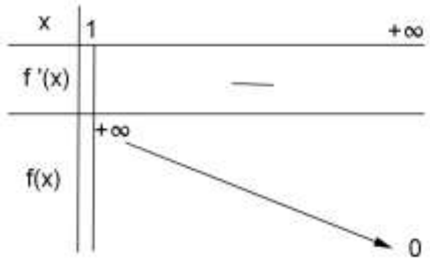
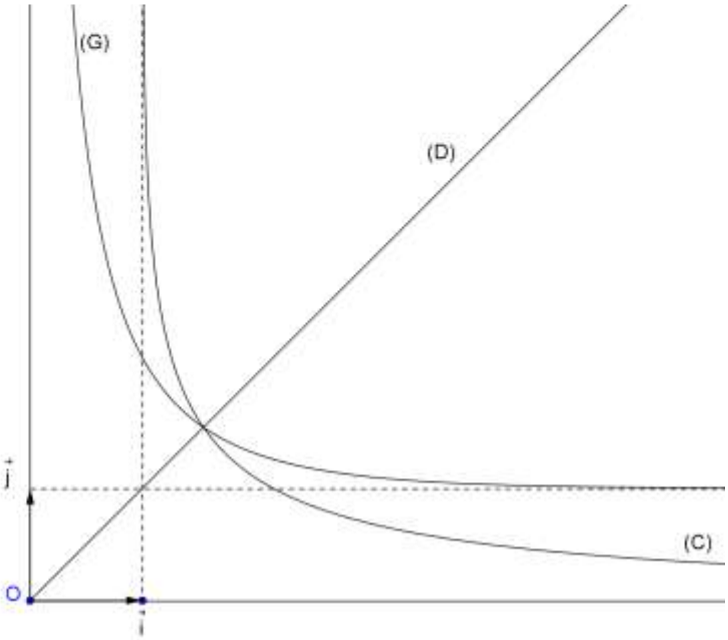
b- Calculer l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations x = 2 et x = 3.

| الدورة الإستثنائية للعام 2012<br>مشروع معيار التصحيح | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>الفرع : علوم الحياة | وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات |
|---|---|---|

| I | Corrigé | | Note |
|---|---|---|---|
| 1 | $z-z'=1-i\sqrt{3},\ z-z'=2e^{-i\frac{\pi}{3}}=2e^{i\frac{5\pi}{3}}$. | **b** | 1 |
| 2 | Si A (2i) et B (– 4i) alors $\lvert z-2i\rvert=\lvert z+4i\rvert \Leftrightarrow AM=BM$ par suite M décrit la médiatrice de [AB] qui est parallèle à l'axe des abscisses. | **c** | 1 |
| 3 | Si z=2 alors 9 + 1 = 2($2^2$ + 1) (oui). | **c** | 1 |
| 4 | $\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\sqrt{3}+i}=\frac{e^{-i\theta}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}=\frac{1}{2}e^{i\left(-\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$. | **a** | 1 |

| II | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0$ (Q) : x – z – 3 = 0.<br>Ou : on montre que les coordonnées de A, B et C vérifient l'équation donnée. | 0.5 |
| 2a | $\vec{N}$ (1 ; –2 ; 1) est normal à (P) ; $\vec{N'}$ (1 ; 0 ; –1) est normal à (Q) et $\vec{N}\,.\,\vec{N'}=0$.<br>donc (P) et (Q) sont perpendiculaires.<br>Les coordonnées de B et C vérifient l'équation de (P) et celle de (Q). | 1 |
| 2b | $d_{A/(BC)}=d_{A/(P)}=\frac{\lvert 2+4-1+1\rvert}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$. Ou $d=\frac{\lVert\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\rVert}{\lVert\overrightarrow{BC}\rVert}=\sqrt{6}$. | 1 |
| 3a | t – 1 – 2t – 2 + t + 2 + 1 = 0 alors (d) est incluse dans (P). | 0.5 |
| 3b | $\overrightarrow{BC}$ (1 ; 1 ; 1) est un vecteur directeur de (d) alors (d) est parallèle à (BC) et la distance de M à (BC) est constante. Alors l'aire du triangle MBC sera constante.<br>Ou : calculons la distance de M(t –1 ; t +1 ; t +2) à (BC) qui est égale à la distance de M à (Q) et démontrons qu'elle est indépendante de t.<br>Ou : calculons l'aire du triangle MBC : $\frac{1}{2}\lVert\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{BC}\rVert=\frac{1}{2}\sqrt{54}$ = constante. | 1 |

| III | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | P(A) $=\frac{C_4^2}{C_8^2}+\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{9}{28}$. P(B) $=\frac{C_3^2}{C_8^2}+\frac{C_4^1\times C_1^1}{C_8^2}=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$. | 1 |
| 2a | $P(F\cap E)=P(E)\times P(F/E)=\frac{1}{2}\times\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{28}$.<br>$P(F\cap\overline{E})=P(\overline{E})\times P(F/\overline{E})=\frac{1}{2}\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$. | 1.5 |
| 2b | $P(F)=P(F\cap E)+P(F\cap\overline{E})=\frac{5}{28}+\frac{1}{8}=\frac{17}{56}$. | 0.5 |
| 3 | P( produit = 8) = P(2 ;{2 , 2}) + P(4 ;{2 ,1})= $\frac{3}{8}\times\frac{C_5^2}{C_8^2}+\frac{1}{8}\times\frac{C_3^1\times C_5^2}{C_8^2}=\frac{45}{224}$. | 1 |

| IV | **Corrigé** | **Note** |
|---|---|---|
| 1 | $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0.$<br>Les droites d'équations $x = 1$ et $y = 0$ sont des asymptotes à (C). | 1.5 |
| 2 | $f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{(x+1)}{x-1}} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} < 0$ .  | 1 |
| 3 |  | 1 |
| 4a | Sur ]1 ; +∞[ ; f est , continue et strictement décroissante, donc elle admet une fonction réciproque g définie sur]0 ;+∞[. | 0.5 |
| 4b | $f(g(x)) = x$ donne $\ln\frac{g(x)+1}{g(x)-1} = x$ ; $\frac{g(x)+1}{g(x)-1} = e^x$ donc $g(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ .<br>OU $g(f(x)) = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{2x}{2} = x$ . | 1 |
| 4c | (G) se déduit de (C) par symétrie par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$.<br>(Voir figure – question 3) | 1 |
| 5a | $h'(x) = f(x) + xf'(x) = f(x) - \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$ donc $f(x) = h'(x) + \frac{2x}{x^2-1}$.<br>$F(x) = h(x) + \ln(x^2-1) = x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \ln(x^2-1).$ | 1.5 |
| **5b** | $A = F(3) - F(2) = 3\ln2 + \ln8 - 2\ln3 - \ln3 = 2\ln8 - 3\ln3$ ; $A = (2\ln8 - 3\ln3)\ u^2$. | 0.5 |

| دورة العام ٢٠١٢ العادية | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>فرع علوم الحياة | وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات |
|---|---|---|
| الاسم:<br>الرقم: | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة: ساعتان | عدد المسائل: أربع |

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة)

## I- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$, on donne les points suivants :
A (4 ;0 ; 1 ) , B(2 ;1 ;2), C( 2 ; 0 ;3) et E( 3 ; –1 ;0).

1) a- Ecrire une équation du plan (P) déterminé par A, B et C.
   b- Montrer que A est le projeté orthogonal de E sur (P).
2) a- Montrer que le triangle ABC est rectangle.
   b- Calculer l'aire du triangle ABC.
   c- Calculer le volume du tétraèdre EABC.
3) On désigne par (Q) le plan d'équation $x - 2y - 2z - 2 = 0$.
   Montrer que (Q) passe par A et qu'il est perpendiculaire à la droite (BE).
4) a- Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (BC).
   b- Soit M un point variable de (BC). Démontrer que, lorsque M décrit (BC), la distance de M au plan (Q) reste constante.

## II- (4 points)

Un magasin vend des écouteurs de deux genres différents $E_1$ et $E_2$ et des batteries de trois genres différents $B_1$, $B_2$ et $B_3$.
Pendant la période des soldes, certains articles sont placés dans deux paniers U et V.
Le Panier U contient 15 écouteurs $E_1$ et 5 écouteurs $E_2$;
le Panier V contient 8 batteries $B_1$, 10 batteries $B_2$ et 7 batteries $B_3$.

**A**-Un client choisit au hasard un article de chaque panier.

1) Démontrer que la probabilité de choisir un écouteur $E_1$ et une batterie $B_1$ est égale à $\frac{6}{25}$.
2) Calculer la probabilité qu'un écouteur $E_1$ soit parmi les deux articles choisis.
3) Le magasin affiche les prix suivants:

| Article | Ecouteur $E_1$ | Ecouteur $E_2$ | Batterie $B_1$ | Batterie $B_2$ | Batterie $B_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Prix en LL | **40 000** | **15 000** | **30 000** | **25 000** | **50 000** |

Soit X la variable aléatoire égale à la somme payée par le client pour l'achat des deux articles choisis.

a- Démontrer que la probabilité P(X = 65 000) est égale à $\frac{37}{100}$.

b- Déterminer la loi de probabilité de X.

**B**-Dans cette question, un client choisit au hasard un écouteur du panier U et choisit simultanément et au hasard deux batteries du panier V. Calculer la probabilité qu'il paie une somme inférieure ou égale à 70 000LL.

## III- (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$.

A tout point M d'affixe z ($z \neq 0$), on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{2}{\bar{z}}$.

1) Soit $z = re^{i\theta}$ $(r > 0)$, écrire z' sous forme exponentielle.

2) a- Montrer que $OM \times OM' = 2$.

b- Démontrer que si $z = z'$, alors M se déplace sur un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.

3) On pose $z = 1 + iy$ où y est un réel.

a- Montrer que $|z' - 1| = 1$.

b- Montrer que lorsque y varie, M' se déplace sur un cercle (C') dont on déterminera le centre et le rayon.

## IV-(8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a- Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et calculer $f(-2)$.

b- Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).

2) Montrer que $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x}$ et dresser le tableau de variations de f.

3) La droite (d) d'équation $y = x$ coupe (C) en un point d'abscisse $\alpha$.

Vérifier que $1{,}4 < \alpha < 1{,}5$.

4) Tracer (d) et (C).

5) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (px^2 + qx + r)\, e^{-x}$.

a- Calculer p, q et r pour que la fonction F soit une primitive de f.

b- Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), l’axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

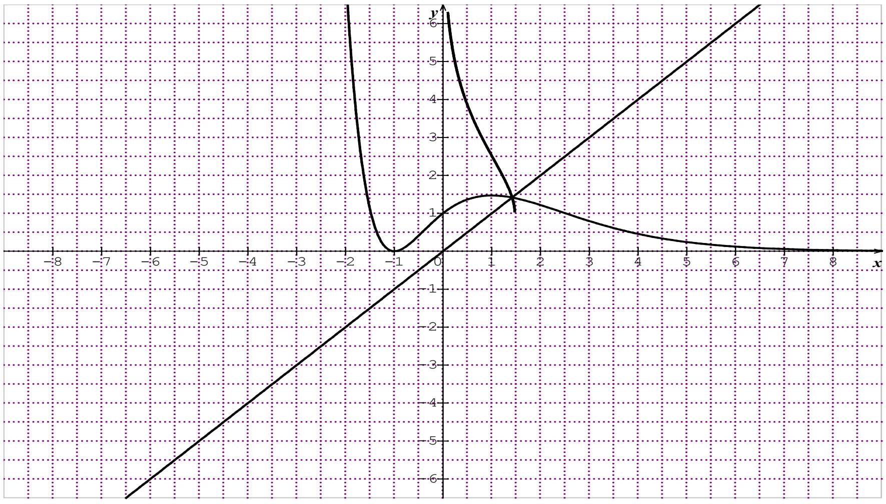
6) La fonction f admet sur $[1;+\infty[$ une fonction réciproque h. Préciser le domaine de définition de h et tracer sa courbe représentative dans le même repère que (C).

| I- | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1a | Pour tout point M(x; y ; z ) de (P) ;<br>$\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$ (P): $x + y + z - 5 = 0$ , | 0.5 |
| 1b | $\overrightarrow{AE}(-1,-1,-1)$, $\vec{N}_P(1,1,1)$ d'où $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{NP}$ .<br>(AE) est perpendiculaire à (P) et $A \in (P)$ donc A est le projeté orthogonal de E sur (P). | 0.5 |
| 2a | $\overrightarrow{AB}(-2,1,1)$ , $\overrightarrow{BC}(0,-1,1)$ ; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0$ donc ABC est rectangle en B. | 0.5 |
| 2b | Aire (ABC) = $\frac{1}{2}AB \times BC = \frac{1}{2}\sqrt{6\times 2} = \sqrt{3}\,u^2$ | 0.5 |
| 2c | $V = \frac{\text{Aire}(ABC)\times AE}{3} = 1\,u^3$.<br>OU : On calcule le produit mixte. | 0.5 |
| 3 | Les coordonnées de A vérifient l'équation de (Q): $4 - 0 - 2 - 2 = 0$.<br>$\overrightarrow{BE}(1,-2,-2)$ et $\vec{N}_Q(1;-2;-2)$ donc (Q) passe par A et est perpendiculaire à(BE). | 0.5 |
| 4a | $\overrightarrow{BC}(0,-1,1)$ ,<br>(BC) : $x = 2;\ y = -m+1;\ z = m+2\ ;m \in$ □ . | 0.5 |
| 4b | $d\,(M \to (Q)) = \frac{\lvert 2+2m-2-2m-4-2 \rvert}{\sqrt{1+4+4}} = 2$ . | 0.5 |

<table>
<tr><th>II-</th><th>Corrigé</th><th>Note</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>$P\ (E_1, B_1) = \frac{15}{20} \times \frac{8}{25} = \frac{120}{500} = \frac{6}{25}$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>$P\ (E_1, B) = \frac{15}{20} \times 1 = \frac{3}{4}$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>A3a</td><td>$P(X = 65000) = P(E_1, B_2) + P(E_2, B_3)$<br>$= \frac{15}{20} \times \frac{10}{25} + \frac{5}{20} \times \frac{7}{25} = \frac{37}{100}$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>A3b</td><td><table><tr><td>$x_i$</td><td>40000</td><td>45000</td><td>65000</td><td>70000</td><td>90000</td></tr><tr><td>$p_i$</td><td>$\frac{1}{10}$</td><td>$\frac{2}{25}$</td><td>$\frac{37}{100}$</td><td>$\frac{6}{25}$</td><td>$\frac{21}{100}$</td></tr></table></td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>B</td><td>Pour payer une somme inférieure ou égale à 70000LL. on ne peut pas choisir $E_1$ car 2 batteries valent au moins 50000LL ; donc on choisit $\{E_2, B_2, B_2\}$ ou $\{E_2, B_1, B_2\}$<br>$P(S \leq 70000) = \frac{5}{20} \times \frac{C_{10}^{2} + C_{8}^{1} \times C_{10}^{1}}{C_{25}^{2}} = \frac{5}{48}$.</td><td>1</td></tr>
</table>

| III | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $z' = \dfrac{2}{re^{-i\theta}} = \dfrac{2}{r}e^{i\theta}$. | 0.5 |
| 2a | $OM \times OM' = r \times \dfrac{2}{r} = 2.$<br>Ou : $\lvert z' \rvert = \left\lvert \dfrac{2}{\bar{z}} \right\rvert = \dfrac{2}{\lvert z \rvert}$ donc $OM' = \dfrac{2}{OM}$. | 0.5 |
| 2b | Si $z = z'$ alors $OM^2 = 2$; $OM = \sqrt{2}$.<br>M appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$. | 1 |
| 3a | $\lvert z'-1 \rvert = \left\lvert \dfrac{2}{1-iy} - 1 \right\rvert = \left\lvert \dfrac{1+iy}{1-iy} \right\rvert = \dfrac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}} = 1.$ | 1 |
| 3b | Soit I le point d'affixe 1. IM' = 1.<br>Donc M' appartient au cercle (C') de centre<br>I (1 ; 0) et de rayon 1. | 1 |

| IV | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1a | $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)^2 e^{-x} = +\infty$ ; $f(-2) = 7{,}4$. | 0.5 |
| 1b | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2(x+1)}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$<br>L'axe des abscisses est asymptote à (C). | 0.5 |
| 2 | $f'(x) = 2(x+1)\, e^{-x} - e^{-x}(x+1)^2 = (1-x^2)\, e^{-x}$ .<br>$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & -1 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & +\infty & \searrow & 0 & \nearrow & \frac{4}{e} & \searrow & 0 \end{array}$ | 1.5 |
| 3 | $f(1{,}4) = 1{,}42 > 1{,}4$ ; $f(1{,}5) = 1{,}39 < 1{,}5$<br>donc $1{,}4 < \alpha < 1{,}5$. | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 |  | 1.5 |
| 5a | $F'(x) = f(x)$ par suite,<br>$-p\,x^2 + (2\,p - q)\,x + q - r = x^2 + 2\,x + 1$<br>pour tout réel x.<br>Donc , $p = -1$ , $q = -4$ , $r = -5$. | 1 |
| 5b | Aire $= \int_0^1 f(x)\,dx = \left(-x^2 - 4x - 5\right)e^{-x}\Big]_0^1$<br>$= 5 - \frac{10}{e} = 1{,}321\ u^2$. | 1 |
| 6 | $D_h = \left]0; \frac{4}{e}\right]$, $C_h$ est symétrique de (C) par rapport à la droite d'équation $y = x$. | 1 |

| الدورة الإستثنائية للعام 2011 | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>الفرع : علوم الحياة | وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات |
|---|---|---|
| الاسم:<br>الرقم: | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة:ساعتان | عدد المسائل: اربع |

ارشادات عامة :- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
-يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

**I-(4 points)**

Dans le tableau suivant une des réponses proposées à chaque question est correcte. Ecrire le numéro de chaque question et donner en justifiant la réponse correspondante.

| N° | Question | Réponses | | |
|---|---|---|---|---|
| | | a | b | c |
| 1 | La forme exponentielle de $z=-\sin\theta+i\cos\theta$ est | $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ | $e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$ | $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$ |
| 2 | Si $z=\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos\theta+i\sin\theta}$ alors $\overline{z}=$ | $e^{2i\theta}$ | $e^{-2i\theta}$ | 1 |
| 3 | Si $z_A=1-2i, z_B=2+3i$ et $z_C=4$ alors le triangle ABC est | rectangle et non isocèle | isocèle et non rectangle | rectangle et isocèle |
| 4 | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln(t+1)dt}{e^x-1}=$ | 1 | 0 | $+\infty$ |
| 5 | $\int \cos^2 x dx =$ | $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+c$ | $\frac{\cos^3 x}{3}+c$ | $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$ |

**II- (4 points)**

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ , on considère les points A (4 ; 0 ; 0),

B (0 ; 6 ; 0), C (0 ; 0 ; 4) et E (2 ; 3 ; 0).

1) Montrer que le point E appartient à la droite (AB).
2) Soit (P) le plan passant par E et parallèle aux deux droites (OB) et (AC).
   Montrer qu'une équation de (P) est x + z –2 = 0.
3) Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (BC).
4) Le plan (P) coupe les droites (BC), (OC) et (OA) respectivement en F, G et H.
   Montrer que F a pour coordonnées (0 ; 3 ; 2) et préciser les coordonnées respectives de G et H.
5) a-Démontrer que EFGH est un rectangle.
   b- Soit $\Gamma$ le cercle circonscrit au rectangle EFGH et (T) la droite du plan (P) tangente en E à $\Gamma$.
   Déterminer un système d'équations paramétriques de (T).

**III- (4 points)**

Une urne contient 8 boules :

- 4 boules blanches portant chacune le nombre 0 ;
- 3 boules rouges portant chacune le nombre 5 ;
- 1 boule blanche portant le nombre 2.

On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

Soit les évènements suivants :

A : « les trois boules tirées portent des nombres pouvant former le nombre 200».

B : « les trois boules tirées portent des nombres identiques».

C : « les trois boules tirées sont blanches».

D : « les trois boules tirées sont de même couleur.

1) Montrer que la probabilité p(A) est égale à $\frac{3}{28}$ et calculer p(B), p(C) et p(D).

2) Déterminer la probabilité pour que parmi les trois boules tirées une seule porte le nombre 0.

3) Les trois boules tirées sont blanches ; calculer la probabilité que les nombres portés par ces boules peuvent former le nombre 200.

4) Soit X la variable aléatoire égale au produit des trois nombres portés par les trois boules tirées.

a- Donner les trois valeurs possibles de X.

b- Déterminer la loi de probabilité de X.

**IV-(8 points)**

A- Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x + \ln x$.

1) Calculer $\lim_{x\to 0} g(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x)$.

2) Dresser le tableau de variations de g.

3) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et vérifier que $0,5 < \alpha < 0,6$.

4) Déterminer suivant les valeurs de x le signe de g(x).

B- On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x(2\ln x + x - 2)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$ , $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ et déterminer f(e).

2) Démontrer que $f(\alpha) = -\alpha(\alpha + 2)$.

3) Vérifier que $f'(x) = 2g(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

4) Tracer (C). (0n prendra α = 0,55).

5) Utiliser une intégration par parties pour calculer $\int_{0,5}^{1} x \ln x dx$ et déduire l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0,5$ et x =1.

6) La courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse 1,37.
On désigne par F une primitive de f sur $]0;+\infty[$ , déterminer suivant les valeurs de x, les variations de F.

| وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>الفرع : علوم الحياة<br>مشروع معيار التصحيح | الدورة الإستثنائية للعام **2011** |
|---|---|---|

| QI | Corrigé | N |
|---|---|---|
| 1 | $z=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$. (c) | 0.5 |
| 2 | $z=\frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}}=e^{-2i\theta}\Rightarrow\overline{z}=e^{2i\theta}$. (a) | 0.5 |
| 3 | $AB=\lvert z_B-z_A\rvert=\lvert 1+5i\rvert=\sqrt{26},\quad AC=\lvert z_C-z_A\rvert=\lvert 3+2i\rvert=\sqrt{13},\quad BC=\lvert 2+3i\rvert=\sqrt{13}$.<br>ABC est rectangle isocèle. (c) | 1 |
| 4 | $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x \ln(t+1)dt}{e^x-1}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{e^x}=0$. (b) | 1 |
| 5 | $\int\cos^2 x dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+c$. (c) | 1 |

| QII | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | (AB) : $\begin{cases}x=-2t+4\\y=3t\\z=0\end{cases}$ pour $t=1: x=2, y=3$ et $z=0$. Donc E appartient à (AB). | 0.5 |
| 2 | $\overrightarrow{n_P}$ est parallèle à $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{n_P}(1;0;1)$.<br>(P) : x + z + r = 0 ; E (2 ; 3 ; 0) est un point de (P), d'où r = – 2 ; (P) : x +z – 2 =0. | 0.5 |
| 3 | $\overrightarrow{BC}(0;-6;4)$ et B est un point de (BC), d'où (BC) : $x=0; y=-3m+6; z=2m$ où m est un paramètre réel. | 0.5 |
| 4 | $x_F+z_F-2=0+2-2=0$ d'où F est un point de (P).<br>pour m = 1, F (0 ; 3 ; 2) est un point de (BC).<br>$x_G=y_G=0$ et G est un point de (P), donc $z_G=2$ d'où G (0 ; 0 ; 2).<br>$y_H=z_H=0$ et H est un point de (P), donc $x_H=2$ d'où H (2 ; 0 ; 0). | 1 |
| 5a | **<u>Géométriquement</u>**<br>(EF) est parallèle à (AC) qui est parallèle à (GH), donc (EF) est parallèle à (GH).<br>(EH) est parallèle à (OB) et (GF) est parallèle à (OB), donc (EH) est parallèle à (GF).<br>Par suite EFGH est un parallélogramme.<br>De plus $(OB)\perp(AC)\Rightarrow(EH)\perp(EF)$ donc c'est un rectangle.<br>**<u>Par le calcul</u>**<br>$\overrightarrow{EF}(-2;0;2), \overrightarrow{HG}(-2;0;2)$ donc $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$.<br>$\overrightarrow{FG}(0;-3;0)$ et $\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{HG}=0\Rightarrow(FG)\perp(HG)$.<br>d'où EFGH est un rectangle. | 0.5 |
| 5b | $\overrightarrow{EG}\wedge\overrightarrow{n_P}(-3;4;3)$ est un vecteur de (T) d'où : $x=-3\lambda+2$ ; $y=4\lambda+3$ ; $z=3\lambda$. | 1 |

| QIII | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $p(A)=\dfrac{C_4^2\times C_1^1}{C_8^3}=\dfrac{3}{28}$. $p(B)=\dfrac{C_3^3}{C_8^3}+\dfrac{C_4^3}{C_8^3}=\dfrac{5}{56}$, $p(C)=\dfrac{C_5^3}{C_8^3}=\dfrac{5}{28}$, $p(D)=\dfrac{C_5^3}{C_8^3}+\dfrac{C_3^3}{C_8^3}=\dfrac{3}{7}$. | 1.5 |
| 2 | $p(\text{Une seule boule porte } 0)=\dfrac{C_4^1\times C_4^2}{C_8^3}=\dfrac{3}{7}$. | 0.5 |
| 3 | $p(A/C)=\dfrac{C_1^1\times C_4^2}{C_5^3}=\dfrac{3}{5}$ | 0.5 |
| 4a | $X(\Omega)=\{0,\ 50,\ 125\}$ | 0.5 |
| 4b | $p(X=50)=p(\{2,5,5\})=\dfrac{C_1^1\times C_3^2}{C_8^3}=\dfrac{3}{56}$ $p(X=125)=p(\{5,5,5\})=\dfrac{1}{56}$.<br>$p(X=0)=\dfrac{C_4^1\times C_4^2+C_4^2\times C_4^1+C_4^3}{56}=\dfrac{13}{14}$ Ou $1-\dfrac{C_4^3}{56}=\dfrac{13}{14}$. | 1 |

| QIV | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| A1 | $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ | 0.5 |
| A2 | $g'(x)=\dfrac{1}{x}+1$ $\begin{array}{c\|ccc} x & 0 & & +\infty \\ \hline g'(x) & & + & \\ \hline g(x) & -\infty & \nearrow & +\infty \end{array}$ | 1 |
| A3 | g est continue et strictement croissante sur son domaine et change de signe donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$. Or $g(0,5)=-0,193$ et $g(0,6)=0,089$ donc $0,5<\alpha<0,6$. | 1 |
| A4 | $g(x)>0$ pour $x>\alpha$ , $g(x)<0$ pour $x<\alpha$ et $g(x)=0$ pour $x=\alpha$. | 0.5 |
| B1 | $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(2x\ln x+x^2-2x\right)=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-2x\right)=+\infty$ $f(e)=e^2$. | 1 |
| B2 | $f(\alpha)=\alpha\left(2\ln\alpha+\alpha-2\right)=\alpha\left(-2\alpha+\alpha-2\right)=-\alpha\left(\alpha+2\right)$ | 0.5 |
| B3 | $f'(x)=2\ln x+x-2+x\left(\dfrac{2}{x}+1\right)=2(\ln x+x)=2g(x)$<br>$\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & \alpha & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & 0 & \searrow & -\alpha(\alpha+2) & \nearrow & +\infty \end{array}$ | 1 |
| B4 |  | 1 |
| B5 | $u=\ln x,\quad v'=x,\quad u'=\dfrac{1}{x},\quad v=\dfrac{x^2}{2}$.<br>$\int x\ln x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\int\dfrac{x}{2}dx=\dfrac{x^2}{4}\left(2\ln x-1\right)$ $\int_{0.5}^{1} x\ln x\,dx=\dfrac{\ln 2}{8}-\dfrac{3}{16}$.<br>$A=-\int_{0.5}^{1} f(x)dx=-\dfrac{\ln 2}{4}+\dfrac{5}{6}=0,66u^2$. | 1 |
| B6 | $F'(x)<0$ sur $]0;1,37]$ donc F est décroissante sur cet intervalle.<br>$F'(x)>0$ sur $[1,37;+\infty[$ donc F est croissante sur cet intervalle. | 0.5 |

| وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>الفرع : علوم الحياة | دورة 2011 العادية |
|---|---|---|
| عدد المسائل: اربع | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه ( دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

## I- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère la droite (d) définie par :

$$(d)\begin{cases} x = t-1 \\ y = t+3 \\ z = t+1 \end{cases} \quad \text{(t est un paramètre réel).}$$

1) Ecrire une équation du plan (Q) déterminé par le point O et la droite (d).

2) a- Calculer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de O sur (d).
b- Montrer que la distance du point O à la droite (d) est égale à $2\sqrt{2}$ .

3) (P) est le plan d'équation $(2m-1)x - my + (1-m)z + 6m - 2 = 0$ où m est un paramètre réel.
a- Vérifier que H appartient à (P).
b- Montrer que (P) contient la droite (d).
c- Calculer, en fonction de m, la distance du point O à (P).

4) Déterminer m pour que la droite (OH) soit perpendiculaire à (P).

## II- (4 points)

Dans une école, chaque élève des deux sections SG et SV pratique un seul sport.
Les élèves sont distribués comme l'indique le tableau suivant.

| | **Football** | **Basketball** | **Tennis** |
|---|---|---|---|
| **SV** | 1 | 6 | 3 |
| **SG** | 4 | 4 | 2 |

On prend 20 cartons identiques. Sur chaque carton on écrit le nom d'un élève.

**A-** Les cartons portant les noms des élèves de la section SV sont placés dans une boîte $B_1$ et ceux portant les noms des élèves de la section SG sont placés dans une autre boîte $B_2$.
Le directeur de l'école choisit au hasard une boîte puis tire au hasard et simultanément deux cartons de cette boîte. On considère les événements suivants:
E : « la boîte choisie est $B_1$ »
S : « les deux cartons tirés portent les noms de deux élèves qui pratiquent le même sport »

1) a- Montrer que la probabilité $p(S/E)$ est égale à $\frac{2}{5}$ et déduire $p(E\cap S)$.
b- Prouver que $p(S) = \frac{31}{90}$.

2) Sachant que les deux cartons tirés portent les noms de deux élèves pratiquant des sports différents, quelle est la probabilité que les noms soient ceux de deux élèves de la section SV ?

**B-** On suppose dans cette partie que les 20 cartons portant les noms des élèves sont tous placés dans une même boîte B.
On tire simultanément et au hasard trois cartons de cette boîte.

1) Prouver que la probabilité que les trois cartons tirés portent les noms de trois élèves pratiquant le même sport, est égale à $\frac{7}{57}$.

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de sports pratiqués par les trois élèves dont les noms sont inscris sur les trois cartons tirés. Déterminer la loi de probabilité de X.

## III- (4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' telles que : $z' = (1 + i\sqrt{3})z - 2$.

1) On suppose dans cette partie que $z = 1 + i$.
   a- Montrer que le point M' appartient à la droite d'équation $y = -x$.
   b- Montrer que le triangle OMM' est rectangle en O.

2) Soit I le point d'affixe $-2$.
   a- Vérifier que $|z' + 2| = 2|z|$.
   b- Démontrer que, lorsque M décrit le cercle de centre O et de rayon 2, M' décrit un cercle fixe dont on déterminera le centre et le rayon.

3) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.
   a- Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
   b- Montrer que si M décrit la droite d'équation $y = -x\sqrt{3}$, alors M' décrit une droite que l'on précisera.

## IV- (8 points)

Soit f la fonction définie, sur $]-\infty\,;+\infty[$, par $f(x) = x + 2 - \dfrac{3}{1+e^x}$.

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ; montrer que la droite $(d_1)$ d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à (C) et préciser la position relative de $(d_1)$ et (C).
   b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ; montrer que la droite $(d_2)$ d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à (C) et préciser la position relative de $(d_2)$ et (C).

2) Démontrer que le point $I\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C).

3) Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty\,;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

4) Tracer $(d_1)$, $(d_2)$ et (C).

5) a - Vérifier que $f(x) = x + 2 - \dfrac{3e^{-x}}{1+e^{-x}}$.
   b - Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine limité par la courbe (C), l'asymptote $(d_2)$ et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$ où $\lambda > 0$ puis calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

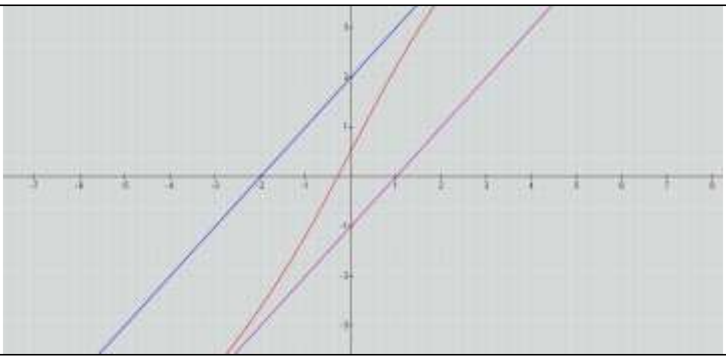
6) On désigne par g la fonction réciproque de f, sur $]-\infty\,;+\infty[$ ; (G) est la courbe représentative de g.
   a- Vérifier que $E\,(1+\ln 2;\ \ln 2)$ est un point de (G).
   b- Calculer la pente de la tangente à (G) au point E.

| Q1 | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | Pour t = 0, A (–1, 3, 1) un point de (d).<br>Soit M(x, y, z) un point de (Q) ; donc $\overrightarrow{OM}\cdot\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{v_d}\right)=0 \Leftrightarrow$ (Q) : x + y -2z = 0. | 0.5 |
| 2 a | H ($x_H$, $y_H$, $z_H$) est un point de (d) tel que (OH) soit perpendiculaire à (d) ; donc $\begin{cases} H\in(d) \\ \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{v_d}=0 \end{cases}$<br>t–1+ t + 3 + t + 1= 0, donc t = –1 et H(– 2, 2, 0). | 1 |
| 2 b | $OH=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$ . | 0.5 |
| 3a | (2m – 1) (– 2) – 2m + 0 +6m – 2 = 0<br>Les coordonnées de H vérifient l'équation de (P) ; donc H appartient à(P).<br>**Ou** A appartient à (P) et H appartient à (P). | 0.5 |
| 3b | (2m–1) (t–1) – m(t + 3) + (1– m) (t + 1) + 6m–2 =<br>2 m t – 2m – t + 1 – m t – 3 m + t +1– m t – m + 6 m – 2 = 0. Donc (d) est contenue dans (P). | 0.5 |
| 3c | $d=\dfrac{\lvert 6m-2\rvert}{\sqrt{(2m-1)^2+m^2+(1-m)^2}}=\dfrac{\lvert 6m-2\rvert}{\sqrt{6m^2-6m+2}}$. | 0.5 |
| 4 | (OH) est perpendiculaire au plan (P)<br>Si d= OH, donc $2\sqrt{2}=\dfrac{\lvert 6m-2\rvert}{\sqrt{(2m-1)^2+m^2+(1-m)^2}}$, d'où 12($m^2$ – 2m +1) = 0 par suite m = 1. | 0.5 |

| Q2 | Corrigé | N |
|---|---|---|
| A1a | $p(S/E)$ =p(les deux pratiquent le basketball ou les deux pratiquent le Tennis)= $\dfrac{C_6^2+C_3^2}{C_{10}^2}=\dfrac{2}{5}$<br>$p(E\cap S)=p(E)\times p(S/E)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}$. | 1 |
| A1b | $P(S)=P(S\cap E)+P(S\cap\overline{E})=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{C_4^2+C_4^2+C_2^2}{C_{10}^2}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{13}{90}=\dfrac{31}{90}$. | 1 |
| A2 | $p(E/\overline{S})=\dfrac{p(E\cap\overline{S})}{p(\overline{S})}=\dfrac{p(E)-P(E\cap S)}{1-p(S)}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}}{1-\frac{31}{90}}=\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{59}{90}}=\dfrac{27}{59}$. | 0.5 |
| B1 | P(3 élèves pratiquent le même sport)= $\dfrac{C_5^3+C_{10}^3+C_5^3}{C_{20}^3}=\dfrac{7}{57}$ | 0.5 |
| B2 | X(Ω) = { 1, 2 , 3} puisque les élèves peuvent pratiquer le même sport ou deux sports, ou trois sports distincts.<br>$p(X=3)=\dfrac{C_5^1\times C_{10}^1\times C_5^1}{C_{20}^3}=\dfrac{25}{114}$ ; $P(X=1)=\dfrac{7}{57}$ ; P(X=2) = 1 – p(X=1) – p (X=3) = $\dfrac{25}{38}$. | 1 |

| Q3 | Corrigé | N |
|---|---|---|
| 1a | $z'=-1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$ . D'où y' = - x', donc M' décrit la droite d'équation y = – x. | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 1b | M appartient à la droite d'équation y = x et M' appartient à la droite d'équation y = -x, donc le triangle OMM' est rectangle en O. **Ou** $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 0$ par suite OM et OḾ sont perpendiculaires. | 0.5 |
| 2a | $z'+2 = (1+i\sqrt{3})z$ ; $\|z'+2\| = \|2z\| = 2\|z\|$. | 0.5 |
| 2b | M appartient au cercle de centre O et de rayon 2, d'où $\|z\| = 2$; donc $\|z'+2\| = 4$ d'où $\\|\overrightarrow{IM'}\\|$ = 4, donc M' décrit le cercle de centre I et de rayon 4. | 1 |
| 3a | $x' = x - \sqrt{3}\,y - 2$ et $y' = y + x\sqrt{3}$. | 0.5 |
| 3b | Si $y + x\sqrt{3} = 0$, alors y' = 0, d'où z' est un réel, donc M' décrit l'axe des abscisses. | 1 |

| Q4 | Corrigé | N |
|---|---|---|
| 1a | $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[3-\frac{3}{1+e^x}] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3e^x}{1+e^x} = 0$ <br> Donc la droite $(d_1)$ d'équation y = x -1 est asymptote à (C). <br> $f(x)-(x-1) = \frac{3e^x}{1+e^x} > 0$ ; donc (C) est au-dessus de $(d_1)$. | 1 |
| 1b | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)] = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{3}{1+e^x} = 0$. <br> Donc la droite $(d_2)$ d'équation y = x + 2 est asymptote à (C). <br> $f(x)-(x+2) = \frac{-3}{1+e^x} < 0$; (C) est en dessous de $(d_2)$. | 1 |
| 2 | 0 centre du domaine et f(2a-x) +f(x) = f(–x) + f(x) = 1 donc I est centre de symétrie de ( C ). | 1 |
| 3 | $f'(x) = 1 + \frac{3e^x}{(1+e^x)^2}$ f '(x) >0 pour tout x ; <br> d'où f est strictement croissante. <br> x : $-\infty$ … $+\infty$ ; f'(x) : + ; f(x) : $-\infty \nearrow +\infty$ | 1 |
| 4 |  | 1 |
| 5a | $f(x) = x+2-\frac{3}{1+e^x} = x+2-\frac{3}{1+e^x}\times\frac{e^{-x}}{e^{-x}} = x+2-\frac{3e^{-x}}{1+e^{-x}}$. | 0.5 |
| 5b | $A(\lambda) = \int_0^{\lambda}[(x+2)-(x+2-\frac{3e^{-x}}{1+e^{-x}})]dx = \int_0^{\lambda}\frac{3e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \left[-3\ln(1+e^{-x})\right]_0^{\lambda}$ <br> $= -3\ln(1+e^{-\lambda}) + 3\ln 2$ d'où $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = 3\ln 2$. | 1.5 |
| 6a | $f(\ln 2) = \ln 2 + 2 - \frac{3}{1+e^{\ln 2}} = \ln 2 + 2 - 1 = 1 + \ln 2$ <br> Donc g (1+ln2) = ln 2 et E (1+ ln 2;ln 2) est un point de (G). | 0.5 |
| 6b | La pente de la tangente à (G) au point E est: $g'(1+\ln 2) = \frac{1}{f'(\ln 2)} = \frac{1}{1+\frac{3\times 2}{(2+1)^2}} = \frac{3}{5}$. | 0.5 |

| الدورة العادية الاستكمالية للعام 2011 | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>الفرع : علوم الحياة | وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات |
|---|---|---|
| الاسم:<br>الرقم: | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة ساعتان | عدد المسائل: اربع |

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة)

**I- (4 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\ ;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$, on considère les points

A (1;–1;1), B (–2 ; 2 ; 1), I $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1\right)$ et la droite (d) définie par : $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=-t \\ z=2t \end{cases}$ (t est un réel).

1) Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (AB).

2) Démontrer que (AB) et (d) se coupent en I.

3) Montrer qu'une équation du plan (P) déterminé par (d) et (AB) est $x+y+z-1=0$.

4) On considère le point $H\left(2;\ 1;\ \frac{5}{2}\right)$.

a- Montrer que I est le projeté orthogonal de H sur (P).
b- Vérifier que (AB) et (d) sont perpendiculaires.
c- K est un point de (d) tel que IK = IA. Calculer le volume du tétraèdre HABK.

**II- (4 points)**

Une urne contient 4 boules noires, 3 boules blanches et n boules rouges. ($n \geq 2$)

**A-**

Dans cette partie on prend **n = 2**.
On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.
1) Calculer la probabilité de tirer trois boules de même couleur.
2) On désigne par E l'événement :
« Parmi les trois boules tirées il y a exactement 2 boules de même couleur ».
Montrer que la probabilité P(E) est égale à $\frac{55}{84}$.

**B-**

Dans cette partie on tire simultanément et au hasard 2 boules parmi les **n+7** boules de l'urne.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.
1) Démontrer que $P(X=2)=\frac{n(n-1)}{(n+6)(n+7)}$.
2) Déterminer la loi de probabilité de X.

3) Calculer n pour que l'espérance mathématique E(X) soit égale à 1.

**III- (4 points)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on donne les points A et B d'affixes $z_A = 1$ et $z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}$ . On désigne par E le milieu du segment [AB].

1) Vérifier que $z_E = \frac{2+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}$.

2) a- Vérifier que, pour tout réel θ, $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})$.

b- Montrer que $z_E = \cos\frac{\pi}{8} e^{i\frac{\pi}{8}}$ .

c- Déduire des résultats précédents la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$.

3) Soit M un point variable d'affixe z tel que $\left|2z - \sqrt{2} - i\sqrt{2}\right| = 2$.

Démontrer que M décrit un cercle (C) et vérifier que O appartient à (C).

**IV- (8 points)**

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire les asymptotes de la courbe (C).

2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

3) Montrer que $f''(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. Démontrer que (C) admet un point d'inflexion I à déterminer.

4) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point I.

5) Tracer (T) et (C).

6) La fonction f admet sur IR une fonction réciproque g.

a-Tracer la courbe représentative (G) de g dans le repère donné.

b- Vérifier que $g(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

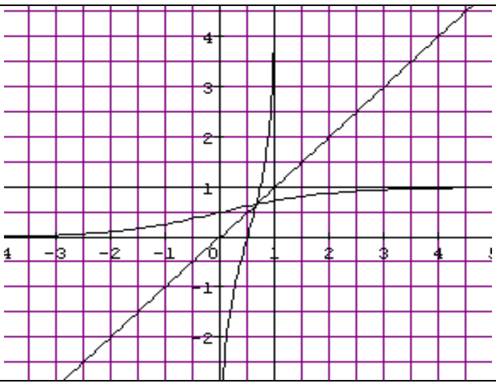
c- Les deux courbes (C) et (G) se coupent en un point d'abscisse α.
Calculer, en fonction de α, l'aire du domaine limité par les deux courbes (C), (G) et les deux axes de coordonnées.

| الدورة العادية للعام 2011<br>مسابقة في مادة الرياضيات | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>الفرع : علوم الحياة | مشروع معيار التصحيح |
|---|---|---|

| QI | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $\overrightarrow{AB}(-3,3,0)$ $\vec{V}(1,-1,0)$ est un vecteur directeur de (AB) donc : $x = m+1, y = -m-1, z = 1$. | **0.5** |
| 2 | Pour $t = \frac{1}{2}$, I appartient à (d). $\overrightarrow{AI}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$; $\overrightarrow{BI}\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{2};0\right)$; donc $\overrightarrow{BI} = -5\,\overrightarrow{AI}$ par suite B, A et I sont alignés.. I appartient à (AB) et (d) avec $A \notin (d)$ donc (AB) et(d) se coupent en I.<br>**Ou** pour $m = -0.5$ I appartient à (AB) et pour $t = \frac{1}{2}$, I appartient à (d). | **0.5** |
| 3 | Les coordonnées de A et B vérifient l'équation donnée puisque: $x_A + y_A + z_A - 1 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$ et $x_B + y_B + z_B - 1 = 0$<br>(d) $\subset$ (P) car les coordonnées du point $(-t+1;-t;2t)$ vérifient l'équation donnée pour tout t. | **1** |
| 4a | $\overrightarrow{IH}\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{n_p}(1\,;1;\,1)$ ont la même direction.<br>Et I appartient au plan (P) donc I est le projeté orthogonal de H sur (P). | **0.5** |
| 4b | $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{V_d} = 3-3+0 = 0$, donc (AB) et (d) sont perpendiculaires en I. | **0.5** |
| 4c | Volume $= \frac{\text{aire de } ABK \times IH}{3}$. L'aire du triangle KAB<br>$= \frac{IK \times AB}{2} = \frac{IA \times AB}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2}\right) = \frac{3}{2}u^2$. Donc $V = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}u^3$.<br>( **OU**: trouver les coordonnées du point K (deux possibilités) puis $V = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{AK}\right)\right\|}{6}$. | **1** |

| QII | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| A1 | P(3 boules de m couleur) = P(3N) + P(3B) $= \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{5}{84}$. | **0.5** |
| A2 | P(E) = P(2 boules de m couleur)=<br>$P(2R,1\overline{R}) + P(2N,1\overline{N}) + P(2B,1\overline{B}) = \frac{C_2^2 \times C_7^1 + C_4^2 \times C_5^1 + C_3^2 \times C_6^1}{C_9^3} = \frac{55}{84}$. | **1** |
| B1 | p(X=2) = p(2 rouges) $= \frac{C_n^2}{C_{n+7}^2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} \times \frac{2!(n+5)!}{(n+7)!} = \frac{n(n-1)}{(n+7)(n+6)}$. | **1** |
| B2 | <table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>p</td><td>$\frac{C_7^2}{C_{n+7}^2} = \frac{42}{(n+7)(n+6)}$</td><td>$\frac{C_n^1 \times C_7^1}{C_{n+7}^2} = \frac{14n}{(n+7)(n+6)}$</td><td>$\frac{n^2 - n}{(n+7)(n+6)}$</td></tr></table> | **1** |
| B3 | E(X)= $\frac{14n + 2n^2 - 2n}{n^2 + 13n + 42} = 1$ donc $n^2 - n - 42 = 0$ on trouve n = 7 ou n = -6. Donc n = 7. | **0.5** |

| QIII | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $z_E = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{1}{2}\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}+i\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ | **0.5** |
| 2a | $e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)} = e^{i\theta} + e^{i(0)} = 1 + e^{i\theta}.$ | **0.5** |
| 2b | $z_E = \dfrac{1}{2}\left(1+e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{8}}(e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{\pi}{8}}) = e^{i\frac{\pi}{8}}\dfrac{1}{2}\left(2\cos\dfrac{\pi}{8}\right) = \left(\cos\dfrac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}.$ | **1** |
| 2c | $\cos\dfrac{\pi}{8}e^{i\frac{\pi}{8}} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}i$, **Donc** $\cos^2\dfrac{\pi}{8}+i\cos\dfrac{\pi}{8}\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}i$<br>$\cos\dfrac{\pi}{8} = +\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}}\quad\left(\cos\dfrac{\pi}{8}>0\right)$ | **1** |
| 3 | $\lvert 2Z-2Z_B\rvert = 2;\ \lvert Z-Z_B\rvert = 1$ d'où BM=1 et M décrit le cercle de centre B et de rayon 1. BO=1 donc O appartient à (C). | **1** |

| QIV | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{0}{0+1} = 0$. La droite d'équation y = 0 est asymptote à (C).<br>$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x} = 1$. La droite d'équation y = 1 est asymptote à (C). | **1** |
| 2 | $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x)}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$<br>x : $-\infty$ … $+\infty$ ; $f'(x)$ : + ; $f(x)$ : 0 ↗ 1 | **1** |
| 3 | $f''(x) = \dfrac{e^x(e^x+1)^2 - 2e^x(e^x+1)e^x}{(1+e^x)^4} = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. f''(x) s'annule pour x = 0 en changeant de signe. Donc le point I(0 ;1/2) est un point d'inflexion. | **1.5** |
| 4 | $f'(0) = \dfrac{1}{4};\quad y-\dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{4};\quad y = \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}.$ | **0.5** |
| 5 |  | **1** |
| 6a | (G) est symétrique de (C) par rapport à la droite d'équation y = x. | **1** |
| 6 b | $e^x = \dfrac{y}{1-y}$ donc $x = \ln\left(\dfrac{y}{1-y}\right)$<br>alors $g(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ | **1** |
| 6c | En utilisant la symétrie par rapport à la première bissectrice, l'aire du domaine en question est le double du domaine limité par (C) et la droite d'équation y = x.<br>$A = 2\int_0^{\alpha}\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}-x\right)dx = 2\left[\ln(e^x+1) - \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{\alpha} = \left(2\ln(e^{\alpha}+1) - 2\ln 2 - \alpha^2\right)u^2.$ | **1** |

| وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>الفرع : علوم الحياة | الدورة الإستثنائية للعام 2010 |
|---|---|---|
| عدد المسائل : اربع | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة)

## I- (4 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Écrire le numéro de chaque question et donner, en justifiant, la réponse qui lui correspond :

| N | Questions | Réponses | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | a | b | c | d |
| 1 | $\left(e^{i\frac{\pi}{12}}+e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)^2 =$ | $0$ | $2+\sqrt{3}$ | $2-\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| 2 | La forme exponentielle de $z=\sin\theta - i\cos\theta$ est: | $e^{i\theta}$ | $e^{-i\theta}$ | $e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$ | $e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$ |
| 3 | A , B et C sont les points d'affixes respectives $z_A=-3i$, $z_B=i$ et $z_C=3i$. Le point M d'affixe z, tel que $\|z+3i\|=\|-i\|$ décrit: | La médiatrice du segment [AB] | Le cercle de centre A et de rayon 1 | Le cercle de centre C et de rayon 1 | La médiatrice du segment [CB] |
| 4 | Si $Z=\frac{iz}{z+1-i}$ alors : | $\overline{Z}=\frac{i\overline{z}}{\overline{z}-1+i}$ | $\overline{Z}=\frac{i\overline{z}}{\overline{z}+1+i}$ | $\overline{Z}=\frac{-i\overline{z}}{\overline{z}-1+i}$ | $\overline{Z}=\frac{-i\overline{z}}{\overline{z}+1+i}$ |

## II- (4 points)

Dans une boutique il y a deux tiroirs $T_1$ et $T_2$ contenant des cravates.
Le tiroir $T_1$ contient 15 cravates en soie : 3 rouges, 5 vertes et 7 bleues.
Le tiroir $T_2$ contient 10 cravates en polyester : 2 rouges, 5 vertes et 3 bleues.

**A-** On choisit au hasard, une cravate de $T_1$ et une de $T_2$. On désigne par E et F les deux événements suivants :
E : « les deux cravates choisies sont de même couleur »
F : « les deux cravates choisies sont l'une rouge et l'autre bleue »

1) Démontrer que la probabilité $P(E)$ est égale à $\frac{26}{75}$.
2) Calculer P(F).

**B-** Dans cette partie, on choisit au hasard un des deux tiroirs et de ce tiroir on choisit au hasard une cravate.
On considère les événements suivants :
R : « la cravate choisie est rouge »
$T_1$ : « la cravate choisie provient du tiroir $T_1$ »

1) Calculer $P(R/T_1)$ et $P(R\cap T_1)$.
2) Calculer $P(R)$.

**C-** On suppose que les 25 cravates sont placées dans un même tiroir T et on choisit simultanément et au hasard trois cravates de T.
Le prix d'une cravate en soie est 50 000LL et celui d'une cravate en polyester est 10 000LL.
On désigne par X la somme des prix des trois cravates choisies.
Calculer $P(X\le 100\ 000)$.

## III- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on donne le point A (1 ;1 ;2),

le plan (P) d'équation $x+y-z+2=0$ et la droite (d) d'équations paramétriques $\begin{cases} x = m+1 \\ y = m-2 \\ z = 2m+1 \end{cases}$

où m est un paramètre réel.

1) Montrer que la droite (d) est contenue dans le plan (P) et que A n'appartient pas à (P).

2) Trouver une équation du plan (Q) déterminé par le point A et la droite (d) .

3) Montrer que le point $A'\left(\frac{-1}{3};\frac{-1}{3};\frac{10}{3}\right)$ est symétrique de A par rapport à (P).

4) Soit $(Q')$ le plan déterminé par $A'$ et (d). Vérifier qu'une équation de $(Q')$ est $x+5y-3z+12=0$.

5) Soit H le projeté orthogonal de A sur (d) et $\alpha$ l'angle aigu des deux plans (Q) et $(Q')$.
Montrer que l'angle aigu des deux droites $(HA)$ et $(HA')$ est égal à $\alpha$ et calculer $\cos\alpha$.

## IV- (8 points)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-\frac{(\ln x)^2}{x}$. (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. (unité : 1 cm)

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ . Déduire une asymptote à (C).

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et vérifier que la droite (D) d'équation $y=x$ est une asymptote à (C).

3) Le tableau ci-contre donne les variations de la fonction $\varphi$ définie sur $]0;+\infty[$ par :
$\varphi(x)=x^2+(\ln x)^2-2\ln x$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi(x)$ | ‖ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | |

Vérifier que $f'(x)=\frac{\varphi(x)}{x^2}$. En déduire que f est strictement croissante.

4) a- Démontrer que (D) est tangente à (C) au point A(1;1) et que (D) est au-dessus de (C) pour $x \neq 1$.
b- Vérifier que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $e^2$ est parallèle à (D).

5) Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une racine unique $\alpha$ et vérifier que $0{,}5<\alpha<0{,}6$.

6) Tracer (D) , (T) et (C).

7) On désigne par (C') la courbe représentative de la fonction réciproque $f^{-1}$ de f .
Tracer (C') dans le même repère que (C).

8) a- Calculer $\int_{\alpha}^{1} f(x)dx$ en fonction de $\alpha$.
b- Déduire, en fonction de $\alpha$, l'aire du domaine limité par (C), (C') et les deux droites d'équations $x=0$ et $y=0$.

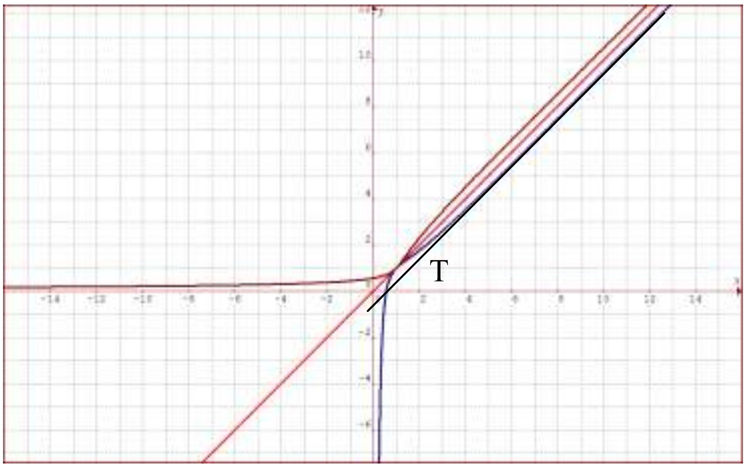
| الدورة الإستثنائية للعام 2010 | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>الفرع : علوم الحياة | وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات |
|---|---|---|
| | | مشروع معيار التصحيح |

| QI | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $(e^{\frac{i\pi}{12}}+e^{\frac{-i\pi}{12}})^2=e^{\frac{i\pi}{6}}+e^{\frac{-i\pi}{6}}+2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i+2=2+\sqrt{3}$ (b) | 1 |
| 2 | $\sin\theta-i\cos\theta=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)-i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos(\theta-\frac{\pi}{2})+i\sin(\theta-\frac{\pi}{2})=e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$ (d) | 1 |
| 3 | $\lvert z+3i\rvert=\lvert -i\rvert$ ; $\lvert z_M-z_A\rvert=1$ ; AM = 1; M décrit le cercle de centre A et de rayon 1 (b) | 1 |
| 4 | $Z=\frac{iz}{z+1-i}$ ; $\overline{Z}=\frac{\overline{iz}}{\overline{z+1-i}}=\frac{-i\overline{z}}{\overline{z}+1+i}$ . (d) | 1 |

| QII | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| A1 | p(E) = p(R,R) + p(V,V) + p(B,B) $=\frac{3}{15}\times\frac{2}{10}+\frac{5}{15}\times\frac{5}{10}+\frac{7}{15}\times\frac{3}{10}=\frac{26}{75}$ . | 0.5 |
| A2 | P(F) =p(R,B) + p(B,R) $=\frac{3}{15}\times\frac{3}{10}+\frac{7}{15}\times\frac{2}{10}=\frac{23}{150}$ | 1 |
| B1 | $p(R/T_1)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$. $P(R\cap T_1)=p(R/T_1)\times p(T_1)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$. | 1 |
| B2 | $p(R/T_2)=\frac{2}{10}$ et $P(R\cap T_2)=p(R/T_2)\times p(T_2)=\frac{2}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$ .<br>$P(R)=P(R\cap T_1)+P(R\cap T_2)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$ . | 0.5 |
| C | $P(X\le 100\ 000)=P(30\ 000)+P(70\ 000)=\frac{C_{10}^3}{C_{25}^3}+\frac{C_{10}^2\times C_{15}^1}{C_{25}^3}=\frac{159}{460}$ | 1 |

| QIII | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | • m+1+m-2-2m-1+2=0 $\Rightarrow 0=0$ vraie, donc $(d)\subset(P)$<br>• 1+1-2+2≠0 ; donc $A\notin(P)$ | 0.5 |
| 2 | $\vec{v}(1;1;2)$ directeur de (d).Soit E (1;-2;1) $\in(d)$ ( m = 0 ) , $M(x,y,z)\in(Q)$ ssi<br>$\vec{AM}.(\vec{v}\wedge\vec{AE})=0$ ;ce qui donne $5x+y-3z=0$ (Q) | 1 |
| 3 | $\overrightarrow{AA'}(\frac{-4}{3},\frac{-4}{3},\frac{4}{3})//\vec{N}$ vecteur normal de (P)<br>Soit I le milieu de $[AA']$ ; $I(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{8}{3})$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{8}{3}+2=0$ donc $I\in(P)$<br>donc A et A' sont symétriques par rapport à (P). | 1 |
| 4 | On vérifie que $(d)\subset(Q')$ et $A'\in(Q')$.<br>Ou $M(x,y,z)\in(Q')$ ssi $\overrightarrow{EM}.(\vec{v}\wedge\overrightarrow{A'E})=0$ donne x+5y-3z+12=0 (Q') | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | $(AH)\perp(d)$ et $AA'\perp(d)$ donc $(A'H)\perp(d)$ et $(d)=(Q)\cap(Q')$.<br>L'angle aigu de $(HA)$ et $(HA')$ est $\alpha$. $\vec{N}_1(5,1,-3)\perp(Q)$ et $\vec{N}_2(1,5,-3)\perp(Q')$,<br>$\cos\alpha=\frac{\left\lvert \vec{N_1}.\vec{N_2}\right\rvert}{N_1.N_2}=\frac{5+5+9}{\sqrt{35}.\sqrt{35}}=\frac{19}{35}$. Ou bien en calculant les coordonnées de H. | 1 |

| QIV | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$ ; y'y est une asymptote à (C). | 0.5 |
| 2 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$ donc la droite (D) d'équation y = x est une asymptote à (C) en $+\infty$. | 0.5 |
| 3 | $f'(x)=1-\frac{2\left(\frac{\ln x}{x}\right)x-\ln^2 x}{x^2}=\frac{x^2-2\ln x+\ln^2 x}{x^2}=\frac{\phi(x)}{x^2}$ avec $\varphi(x)\geq1$<br>donc $f'(x)>0$ et f est strictement croissante pour tout $x\in]0;+\infty[$. | 1 |
| 4a | Equation de la tangente à (C) en A: y=f'(1)(x-1)+1=x<br>$f(x)-x=-\frac{\ln^2 x}{x}\leq0$ donc (D) est au-dessus de (C) pour $x\neq1$. | 1 |
| 4b | $f'\left(e^2\right)=1-\frac{4-4}{e^4}=1$ donc (T)//(D) | 0.5 |
| 5 | Sur $]0;+\infty[$, f est continue et change de signe, donc l'équation f(x) = 0 a au moins une racine α mais f est strictement croissante donc α est unique.<br>f(0,5) = – 0,46 < 0 f(0,6) = 0,165 > 0 donc 0,5 < α < 0,6. | 1 |
| 6 |  | 1.5 |
| 7 | (C') et (C) sont symétriques par rapport à la droite d'équation *y*=*x*. | 0.5 |
| 8a | $\int_\alpha^1\left(x-\frac{\ln^2 x}{x}\right)dx=\left.\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^1-\int_\alpha^1 u^2u'dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{\ln^3 x}{3}\right)_\alpha^1=\frac{1}{2}-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\ln^3\alpha}{3}$. | 1 |
| 8b | L'aire du domaine limité par (C), x'x et les droites d'équations x= α et x = 1 est égale à l'aire du domaine limité par (C'), y'y et les droites d'équations y= α et y = 1.<br>Donc l'aire requise A est égale à l'aire du carré de côté 1 moins 2 fois l' aire calculée dans 8a, par suite A = $(\alpha^2-2\frac{\ln^3\alpha}{3})\ u^2$ | 0.5 |

| الدورة العادية للعام ٢٠١٠ | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>الفرع : علوم الحياة | وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات |
|---|---|---|
| الاسم:<br>الرقم: | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة ساعتان | عدد المسائل : أربع |

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة )

**I-(4 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$, on considère le plan (P) d'équation $3x - 4y + z = 0$ et le point A $(-1\,;5\,;-3)$.

1) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (d) passant par A et perpendiculaire à (P). à (P).

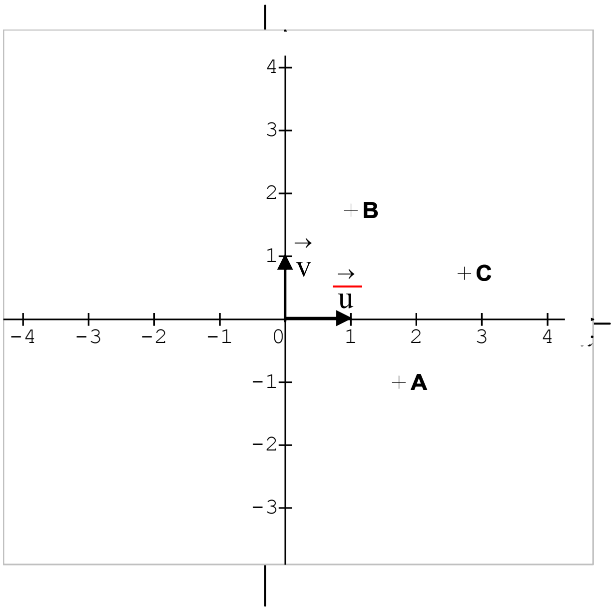
2) Soit H le projeté orthogonal de A sur (P). Démontrer que les coordonnées de H sont $(2\,;1\,;-2)$.

3) Calculer la distance de O à (d).

4) a-Déterminer une équation du plan (Q) perpendiculaire à (P) et contenant les points A et O.
b- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite d'intersection de (P) et (Q).

**II- (4 points)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on considère les points -A, B et C d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{3} - i$ , $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = z_A + z_B = \sqrt{3} + 1 + i\left(\sqrt{3} - 1\right)$.




1) Ecrire $z_A$ et $z_B$ sous forme exponentielle.

2)- a- Démontrer que $\dfrac{z_B}{z_A} = i$ .

b- Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle.

c- Vérifier que OACB est un carré.

3) a- Utiliser la figure pour montrer qu'une mesure de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OC}\right)$ est $\dfrac{\pi}{12}$.

b- Calculer la valeur exacte de $|z_C|$ puis écrire $z_C$ sous forme exponentielle.

- c- Déduire la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

**III- (4points)**

On dispose de deux urnes U et V.
L'urne U contient trois boules portant chacune le nombre **1** et deux boules portant chacune le nombre **3.**
L'urne V contient deux boules portant chacune le nombre **1** et trois boules portant chacune le nombre **3.**

**A-** On tire, au hasard, une boule de U et une boule de V.

1) Quelle est la probabilité que les deux boules tirées portent le même nombre?
2) Quelle est la probabilité que les deux boules tirées portent deux nombres dont la somme est 4?

**B-** Dans cette partie, on tire au hasard et simultanément deux boules de U et une boule de V.
On désigne par E l'événement : « La somme des nombres portés par les trois boules tirées est 7».
Montrer que la probabilité $P(E) = \frac{2}{5}$.

**C** - On place les 10 boules des deux urnes dans une même urne W et on tire au hasard et simultanément trois boules de W. On désigne par X la variable aléatoire égale au produit des nombres portés par les trois boules tirées.

1) Trouver les quatre valeurs possibles de X.

2) Déterminer la loi de probabilité de X.

**IV- (8 points)**

Soit f la fonction définie sur ]0, +∞[ par $f(x) = 2x - 2 + \frac{1}{e^x - 1}$.

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).

b- Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation y = 2x – 2 est une asymptote à (C).

c- Quelle est la position relative de (C) et (d) ?

2) a-Montrer que $f'(x) = \frac{(e^x - 2)(2e^x - 1)}{(e^x - 1)^2}$.

b- Compléter le tableau de variations de f ci-contre.

| x | 0 | ln2 | +∞ |
|---|---|---|---|
| f '(x) | | 0 | |
| f(x) | | | |

3) Tracer (d) et (C).

4) Vérifier que $\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x}{e^x - 1} - 1$ et calculer l'aire du domaine limité par (C), la droite (d) et les deux droites d'équations x = ln2 et x = ln3.

5)- Soit g la fonction définie sur ]0, +∞[ par g(x) = ln(f(x)).

a- Calculer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

\- b- Dresser le tableau de variations de g.

\- c- Prouver que l'équation g(x) = 0 admet deux racines distinctes.

| الدورة العادية للعام ٢٠١٠ | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>الفرع : علوم الحياة | وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات |
|---|---|---|
| الاسم:<br>الرقم: | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة ساعتان | مشروع معيار التصحيح |

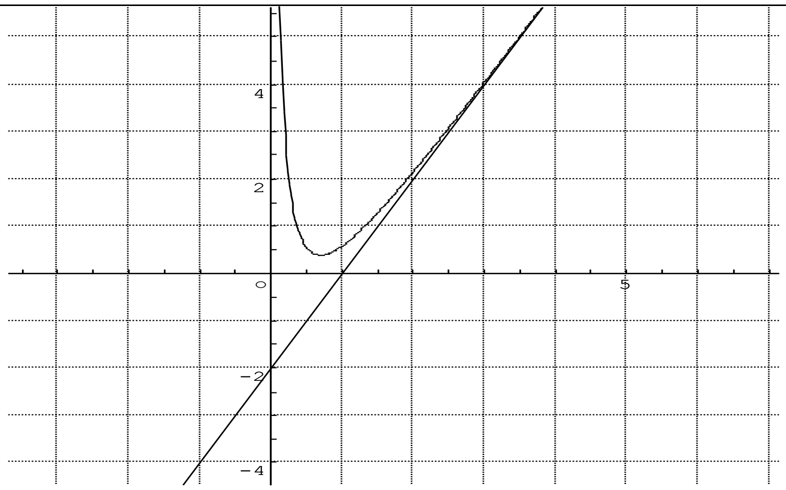
| QI | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | (d) est perpendiculaire à (P) donc $\vec{V}_d$ est parallèle à $\vec{N}_P$ et $\vec{V}_d$ (3;-4;1)<br>A appartient à (d) ; par suite (d): $\begin{cases} x = 3\lambda - 1 \\ y = -4\lambda + 5 \\ z = \lambda - 3 \end{cases}$ | 1 |
| 2 | H est le projeté orthogonal de A sur (P), donc H appartient à (d) et (P) d'où :<br>3(3λ-1) - 4(-4 λ+5) + (λ-3) = 0 ; λ = 1 et H ( 2;1;−2 ).<br>Ou bien $H \in (P)$ et $\overline{AH}$ et $\overrightarrow{n_P}$ sont colinéaires. | 0,5 |
| 3 | O appartient à (P) donc la distance de O à (d) est OH= $\sqrt{4+1+4}$ =3. . | 1 |
| 4a | $\overrightarrow{OM} \cdot (\vec{N}_P \wedge \overrightarrow{OA}) = 0$ ; $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0$; 7x + 8y + 11z = 0.<br>Ou bien distance de O à (d) = $\dfrac{\left\Vert \overrightarrow{V_d} \wedge \overrightarrow{OA} \right\Vert}{\left\Vert \overrightarrow{V_d} \right\Vert}$ | 1 |
| 4b | La droite d'intersection de (P) et (Q) est (OH). Un vecteur directeur de (OH) est $\vec{V}(7;8;11)$ .<br>Donc un système d'équations paramétriques de $(P) \cap (Q)$ est $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$ .<br>Ou bien $(P) \cap (Q)$ : $\begin{cases} 3x - 4y + z = 0 \\ 7x + 8y + 11z = 0 \end{cases}$ soit z = t, d'où $\begin{cases} x = -t \\ y = -\dfrac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$ | 0.5 |

| QII | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $z_A = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ; $z_B = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ | 0.5 |
| 2a | $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ | 0,5 |
| 2b | $\left\lvert \dfrac{z_B}{z_A} \right\rvert = \dfrac{OB}{OA} = 1$ donc $OB = OA$ et $\arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right) = \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)[2\pi] = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ .<br>Par suite le triangle OAB est rectangle isocèle en O.<br>OU : On calcule OA =OB =2 et $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$ . | 1 |
| 2c | $z_C = z_A + z_B$ donc $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et par suite OACB est un parallélogramme. mais OA = OB | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| | et $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc OACB est un carré.<br>Ou bien $z_{\overrightarrow{AC}}=z_C-z_A=z_B$ alors $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$ d'où OACB est un carré. | |
| 3a | $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$ $[2\pi]$ car (OC) est bissectrice de $\widehat{AOB}$. | 0.5 |
| 3b | $\lvert z_C\rvert=OC=OA\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ et $z_C=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $\lvert z_C\rvert=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=2\sqrt{2}$. | 0.5 |
| 3c | $z_C=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}-1\right)$ donc $2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{3}-1$<br>et $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. | 0.5 |

| **QIII** | **Corrigé** | **Note** |
|---|---|---|
| A1 | P(2 boules portant le même nombre)= P(1,1)+p(3,3) $=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$. | 0.5 |
| A2 | P(S = 4) = p(1,3) + p(3,1) = $\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{13}{25}$. | 1 |
| B | P(S = 7) = p(2 boules marqués 3 de U et 1 boule marqué 1 de V)+ P(1 boule de U marqué 1 et 1 boule de U marqué 3 et une boule de V marqué 3)<br>$=\frac{C_2^2}{C_5^2}\times\frac{2}{5}+\frac{C_3^1\times C_2^1}{C_5^2}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$ . | 1 |
| C1 | $X(\Omega)=\{1;3;9;27\}$ | 0,5 |
| C2 | P(X = 1) = p( 3 boules marqués 1) = $\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$<br>P(X=3) = $\frac{C_5^2\times C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{5}{12}$ ; P(X = 9) = $\frac{C_5^1\times C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{5}{12}$ ; p(X = 27) = $\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$. | 1 |

| **QIV** | **Corrigé** | **Note** |
|---|---|---|
| 1a | $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$, donc $y'y$ est une asymptote à (C). | 0,5 |
| 1b | $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x-1}=0$ .<br>Donc, la droite (d) d'équation $y=2x-2$ est une asymptote à (C). | 1 |
| 1c | $[f(x)-(2x-2)]=\frac{1}{e^x-1}>0$ pour tout $x$ dans $D_f$, (C) est au-dessus de (d). | 0,5 |
| 2a | $f'(x)=2-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{(e^x-2)(2e^x-1)}{(e^x-1)^2}$ | 0,5 |
| 2b | $f'(x)\geq 0; e^x\geq 2$ ou $e^x\leq\frac{1}{2}$;<br>$x\geq\ln 2$ ou $x\leq-\ln 2$<br>$\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & \ln 2 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & +\infty & \searrow & 2\ln 2-1 & \nearrow & +\infty \end{array}$ | 1 |
| 3 | | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| |   | |
| 4 | $\dfrac{e^x}{e^x-1}-1=\dfrac{-e^x+1+e^x}{e^x-1}=\dfrac{1}{e^x-1}$.<br>$\text{Aire}=\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}(f(x)-(2x-2))dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}(-1+\dfrac{e^x}{e^x-1})dx=\left[-x+\ln(e^x-1)\right]_{\ln 2}^{\ln 3}=(2\ln 2-\ln 3)\ u^2.$ | 1.5 |
| 5a | $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(f(x))=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(f(x))=+\infty$ | 0,5 |
| 5b | $g'(x)$ a même signe que $f'(x)$.<br>$x$ : 0, ln2, $+\infty$<br>$g'(x)$ : – , 0 , +<br>$g(x)$ : $+\infty$ ↘ $\ln(2\ln 2-1)$ ↗ $+\infty$ | 0,5 |
| 5c | La valeur minimum de p($x$) est négative et ses valeurs limites sont positives, donc p($x$) = 0 a deux racines distinctes.<br>Ou bien g(x) = 0 ssi f(x) = 1<br>La droite d'équation y = 1 coupe (C) en deux points distincts, par suite l'équation g(x) = 0 admet deux racines distinctes. | 1 |

| الدورة الإستثنائية للعام<br>2009 | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>الفرع : علوم الحياة | وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات |
|---|---|---|
| الاسم:<br>الرقم: | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة ساعتان | عدد المسائل: اربع |

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة)

## I- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le plan (P) d'équation $x - y + z + 2 = 0$ et les deux droites (D) et (D') d'équations paramétriques:

$$(D)\begin{cases} x = t \\ y = -t+1 \\ z = 2t-1 \end{cases} \quad \text{et} \quad (D')\begin{cases} x = -5m-10 \\ y = 5m+11 \\ z = -2m-5 \end{cases}$$ où t et m sont deux paramètres réels.

1) Montrer que (D) et (D') se coupent au point A(0 ;1 ; –1) et vérifier que A appartient au plan (P).

2) Ecrire une équation du plan (Q) qui contient les deux droites (D) et (D').

3) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (d), intersection de (P) et (Q).

4) Vérifier que le point B(1 ; 0 ;–3) de la droite (d), est équidistant des deux droites (D) et (D'), et déduire que (d) est une bissectrice de l'angle de (D) et (D').

## II- (4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, M et M' d'affixes respectives 2, – i, z et z' avec $z' = \dfrac{iz-1}{z-2}$. $(z \neq 2)$.

1) Trouver les coordonnées de M lorsque $z' = 1+2i$.

2) Donner une interprétation géométrique de $|z-2|$ et de $|iz-1|$ et déterminer l'ensemble des points M tels que $|z-2| = |iz-1|$.

3) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (x, y, x' et y' sont des réels).

a- Calculer x' et y' en fonction de x et y.

b- Montrer que lorsque z' est imaginaire pur, M se déplace sur une droite dont on déterminera une équation.

c- Montrer que lorsque z est réel, M' se déplace sur une droite dont on déterminera une équation.

## III- (4 points)

Le tableau suivant représente la distribution des âges de 26 hommes et 24 femmes.

| Age en années | $[20;25[$ | $[25;30[$ | $[30;35]$ |
|---|---|---|---|
| Nombre d'hommes | 8 | 8 | 10 |
| Nombre de femmes | 5 | 9 | 10 |

On choisit au hasard, 3 personnes parmi ces 50 personnes pour former un comité.
Soit les événements suivants:

M: «le comité est formé de trois hommes».
F : «le comité est formé de trois femmes».
A : «le comité est mixte (formé d'hommes et de femmes)».
B : «l'âge de chaque membre du comité est inférieur à 30 ans».

1) Calculer chacune des probabilités $p(M)$, $p(F)$ et $p(A)$.

2) a- Calculer $p(B)$ et montrer que $p\left(B\cap\overline{A}\right)=\dfrac{33}{700}$. En déduire $p\left(B\cap A\right)$.

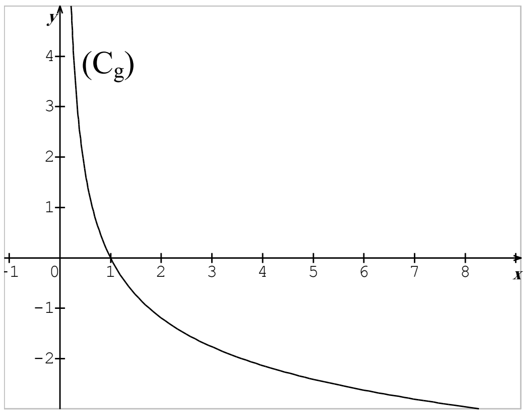
b- Calculer $p\left(B/A\right)$.

3) On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre des femmes d'un comité dont l'âge est inférieur à 25 ans.
Déterminer la loi de probabilité de X.

## IV- (8 points)

Soit f la fonction définie, sur $]0;+\infty[$, par $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

La courbe ($C_g$) ci-contre est la courbe représentative, dans un repère orthonormé, de la fonction g définie, sur $]0;+\infty[$, par $g(x)=\dfrac{1}{x}-1-\ln x$.




1) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe ($C_g$), l'axe des abscisses et la droite d'équation x = 2.

2) Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{e^x}$ et en déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et déterminer les asymptotes de la courbe (C).

4) Dresser le tableau de variations de f.

5) Résoudre l'équation $f(x)=0$.

6) Trouver une équation de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $\dfrac{1}{e}$.

7) Tracer (C).

8) Discuter, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation $\ln x = me^x - 1$.

| الدورة الإستثنائية للعام<br>2009 | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>الفرع : علوم الحياة | وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات |
|---|---|---|
| | مسابقة في مادة الرياضيات | مشروع معيار التصحيح |

| QI | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $x = 0$ , donc $t = 0$ ; $y = 1$ et $z = -1$ $m = -2$ ; $y = 1$ et $z = -1$.<br>A(0,1,-1) est le point d'intersection des deux droites.<br>(P) : $x - y + z + 2 = 0$. $0 - 1 - 1 + 2 = 0$, donc A appartient au plan (P). | 1 |
| 2 | $\overrightarrow{V_{(D)}}(1,-1,2)$ $\overrightarrow{V_{(D')}}(-5,5,-2)$ et $A(0,1,-1)M(x,y,z)$ est un point du plan (Q).<br>Equation de (Q) est $\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{V_{(D)}}\wedge\overrightarrow{V_{(D')}}) = 0$<br>$\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{V_{(D)}},\overrightarrow{V_{(D')}}) = \begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -5 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -8x - 8y + 8 = 0$<br>$(Q): x + y - 1 = 0$ | 1 |
| 3 | (P): $x - y + z + 2 = 0$ (Q): $x + y - 1 = 0$. $(d)\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha + 1 \\ z = -2\alpha - 1 \end{cases}$ | 0.5 |
| 4 | B appartient à (d) et $y_B = 0$, donc $\alpha = 1$, par suite $x = 1$ et $z = -3$ d'où B(1,0, -3)<br>Soit C(1,0,1) un point de (D). (t = 1) $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{V_{(D)}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$ .<br>$d(B,(D)) = \dfrac{\lVert \overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{V_{(D)}} \rVert}{\lVert \overrightarrow{V_{(D)}} \rVert} = \dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{16}{3}}$ .<br>Soit E (-5,6,-3) un point de (D ') ( m = -1) $\overrightarrow{BE}\wedge\overrightarrow{V_{(D')}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 6 & 0 \\ -5 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 12\vec{j}$<br>$d(B,(D')) = \dfrac{\lVert \overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{V_{(D')}} \rVert}{\lVert \overrightarrow{V_{(D')}} \rVert} = \dfrac{\sqrt{288}}{\sqrt{54}} = \sqrt{\dfrac{16}{3}}$. donc B est équidistant de (D) et (D').<br>A est l'intersection de(D) et (D'), donc A est équidistant de (D) et (D')<br>La droite (d) est contenue dans le plan (Q) et passe par A et B (D') donc (d) est une bissectrice de l'angle de (D) et (D'). | 1.5 |

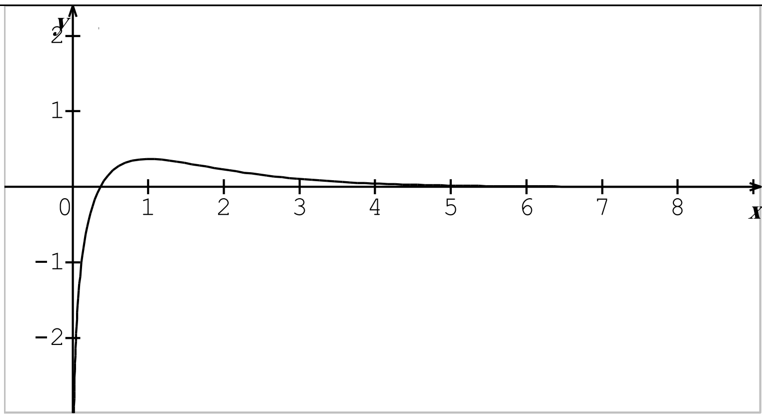
| QII | Corrigé | Note |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $1 + 2i = \dfrac{iz-1}{z-2}$ ; $(1 + i)z = 1 + 4i$ ; $z = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}i$ ; $M(\dfrac{5}{2} ; \dfrac{3}{2})$. | 0.5 |
| 2 | $\|z - 2\| = AM$ et $\|iz - 1\| = \| i.(z+i) \| = \|i\|.\|z+i\| = \|z+i\| = BM$.<br>$\| z - 2\| = \| iz - 1\| \Leftrightarrow AM=BM \Leftrightarrow$ M décrit la médiatrice du segment [AB]. | 1 |
| 3a | $x' + iy' = \dfrac{-y-1+ix}{x-2+iy} = \dfrac{2y-x+2+i(x^2+y^2-2x+y)}{(x-2)^2+y^2}$<br>$x' = \dfrac{2y-x+2}{(x-2)^2+y^2}$ et $y' = \dfrac{x^2+y^2-2x+y}{(x-2)^2+y^2}$ | 0.5 |
| 3b | z' est imaginaire pur si x'= 0 et $z' \neq 0$ ; $2y - x + 2 = 0$ avec $z \neq -i$ et $z \neq 2$.<br>L'ensemble des points M est la droite (d) d'équation : $y = \dfrac{x}{2} - 1$ privée des points : A(2,0) et B(0,–1). | 1 |
| 3c | z est un réel si y = 0 : $x' = \dfrac{-1}{x-2}$ et $y' = \dfrac{x}{x-2}$ ; $y' = -2x'+1$ et M' se déplace sur la droite d'équation : $y = -2x +1$. | 1 |

| QIII. | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $P(M) = \dfrac{C_{26}^3}{C_{50}^3} = \dfrac{2600}{19600} = \dfrac{13}{98}$. $P(F) = \dfrac{C_{24}^3}{C_{50}^3} = \dfrac{2024}{19600} = \dfrac{253}{2450}$.<br><br>$P(A) = 1 - P(M) - P(F) = \dfrac{936}{1225} = 0{,}764$. | 1 |
| 2a | $P(B) = \dfrac{C_{30}^3}{C_{50}^3} = 0{,}207$. $P(B \cap \overline{A}) = \dfrac{C_{16}^3 + C_{14}^3}{C_{50}^3} = \dfrac{33}{700}. = 0{,}047$.<br><br>$p(B \cap \overline{A}) = 0{,}047$, $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$<br>Donc $p(B \cap A) = 0{,}207 - 0{,}047 = 0{,}16$. | 1.5 |
| 2b | $p(B/A) = \dfrac{p(B \cap A)}{p(A)} = 0{,}21$, | 0.5 |
| 3 | Les valeurs possibles de X : 0,1,2,3 | 1 |

| X= $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| pi | $\dfrac{C_5^0 \times C_{45}^3}{C_{50}^3} = \dfrac{1419}{1960}$ | $\dfrac{C_5^1 \times C_{45}^2}{C_{50}^3} = \dfrac{99}{392}$ | $\dfrac{C_5^2 \times C_{45}^1}{C_{50}^3} = \dfrac{9}{392}$ | $\dfrac{C_5^3}{C_{50}^3} = \dfrac{1}{1960}$ |

| QIV | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $A = \left\|\int_1^2 g(x)dx\right\| = -\left[\ln x - x - x\ln x + x\right]_1^2 = \ln 2$ u.a. | 1 |

<table>
<tr><td>2</td><td>$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}e^x - e^x(1+\ln x)}{(e^x)^2} = \dfrac{g(x)}{e^x}$ et $e^x > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ donc $f'(x) > 0$ pour $x < 0$ , $f'(1) = 0$ et $f(1) = \frac{1}{e}$ .</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{-\infty}{1} = -\infty$ alors y′y est une asymptote à (C).<br>$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ ind. (Hop) = $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{xe^x} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$ alors y = 0 est une asymptote à (C).</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td><table>
<tr><td>$x$</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>‖</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>‖$-\infty$</td><td></td><td>$\frac{1}{e}$</td><td></td><td>0</td></tr>
</table></td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>f (x) = 0 ; 1+lnx = 0 ; x= $\frac{1}{e}$ .</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>6</td><td>x= $\frac{1}{e}$ alors $f(\frac{1}{e}) = 0$ et $f'(\frac{1}{e}) = e^{1-\frac{1}{e}}$ la tangente : y = $e^{1-\frac{1}{e}}(x - \frac{1}{e})$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7</td><td>
</td><td>1</td></tr>
<tr><td>8</td><td>lnx = me$^x$ – 1 est équivalente à f(x) = m.<br>pour m≤ 0 une solution .<br>pour $0 < m < \frac{1}{e}$ deux solutions<br>pour m = $\frac{1}{e}$ une solution double.<br>Pour m > $\frac{1}{e}$ pas de solutions.</td><td>1</td></tr>
</table>

| وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>الفرع : علوم الحياة | دورة سنة 2009 العادية |
|---|---|---|
| عدد المسائل : أربع | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات

- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة )

## I- (4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et $z'$ telles que $z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z$ .

1) On suppose dans cette partie que $z = 2i$.

a- Déterminer la forme exponentielle de $z'$.

b- Calculer $\left|\dfrac{z'}{z}\right|$ et $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right)$.

c- Montrer que le triangle OMM' est rectangle en M.

2) On suppose dans cette partie que $z = (1+i)^3$ .

a- Ecrire z sous formes exponentielle et algébrique.

b- Ecrire $z'$ sous formes exponentielle et algébrique.

c- Déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{13\pi}{12}$ .

## II- (4 points)

On considère deux sacs $\mathbf{S_1}$ et $\mathbf{S_2}$ tels que:

$\mathbf{S_1}$ contient **six** cartes numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$\mathbf{S_2}$ contient **cinq** cartes numérotées 0, 1, 2, 4, 5.

**A-**

**Une** carte est tirée au hasard du sac $\mathbf{S_1}$ :

♦ si elle porte l'un des numéros 1 ou 2, on tire simultanément et au hasard **trois** cartes du sac $\mathbf{S_2}$.

♦ si elle porte l'un des numéros 3, 4, 5 ou 6, on tire simultanément et au hasard **deux** cartes du sac $\mathbf{S_2}$.

On considère les événements suivants :

K : « la carte tirée du sac $\mathbf{S_1}$ porte l'un des numéros 1 ou 2 ».

L : « la carte tirée du sac $\mathbf{S_1}$ porte l'un des numéros 3, 4, 5 ou 6».

E : « Le produit des numéros portés par les cartes tirées du sac $\mathbf{S_2}$ est zéro ».

1) a- Calculer les probabilités p(K) et p(L).

b- Montrer que $p(E \cap K) = \dfrac{1}{5}$ .

c- Calculer $p(E \cap L)$ et déduire p(E).

2) Sachant que le produit des numéros portés par les cartes tirées du sac $\mathbf{S_2}$ est zéro, calculer la probabilité que l'on ait tiré trois cartes de $\mathbf{S_2}$ .

**B-**

Dans cette partie, on utilise **seulement** le sac $\mathbf{S_2}$.

On tire simultanément et au hasard **trois** cartes de ce sac.

Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros portés par les trois cartes tirées, ainsi les valeurs possibles de X sont 2, 4 et 5 .

Démontrer que p(X= 4) = $\dfrac{3}{10}$ et déterminer la loi de probabilité de X.

## III- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$, on considère le point A (1 ; 0 ; 1) et les deux plans (P) et (Q) d'équations respectives $2x - y - 2 = 0$ et $x + 2y - z = 0$.

1) a- Vérifier que A est un point commun à (P) et (Q).
   b- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (d), intersection de (P) et (Q).

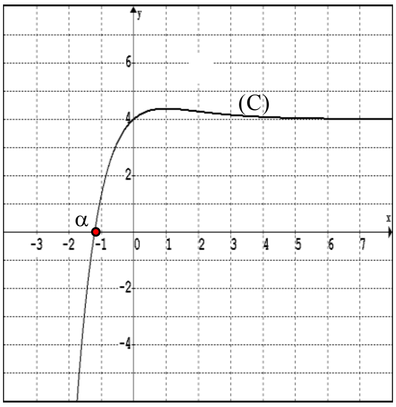
2) a- Donner un système d'équations paramétriques de la droite (D) perpendiculaire en A à (P).
   b- Calculer les coordonnées d'un point E de (D) tel que AE = $\sqrt{5}$ .

3) a- Montrer que les points B(0 ; –2 ; 0) et C(2 ; 2 ; t) appartiennent à (P). (t est un réel)
   b- Calculer t pour que le triangle ABC soit rectangle en B et trouver dans ce cas le volume du tétraèdre EABC.

## IV- (8points)

**A-** On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = 4 + x\,e^{-x}$ et dont la courbe représentative (C), dans un repère orthonormé est donnée par la figure ci-contre.

(C) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse $\boldsymbol{\alpha}$.




1) Utiliser (C) pour déterminer le signe de f(x).

2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^2 x\,e^{-x}dx$ ,

puis calculer l'aire du domaine limité par l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses, la courbe (C) et la droite d'équation x = 2.

**B- Dans ce qui suit, on prend $\boldsymbol{\alpha}$** = -1,2.

On considère la fonction g, définie sur IR, par $g(x) = 4x - 3 - (x+1)e^{-x}$ et on désigne par (G) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.

1) Vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et déterminer g(– 2,5) à $10^{-2}$ près.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et vérifier que la droite (D) d'équation y = 4x –3 est une asymptote à (G).

3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de (G) avec son asymptote (D) et étudier la position relative de (G) et (D).

4) a- Montrer que g'(x) = f(x).

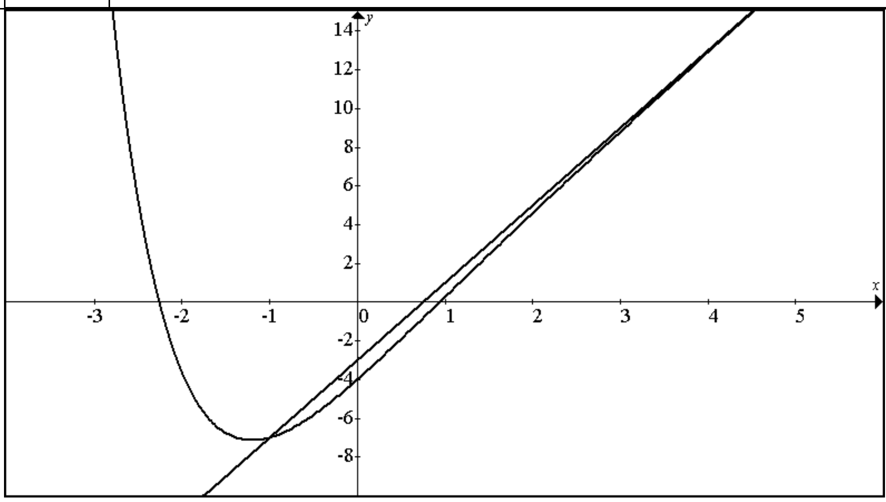
   b- Dresser le tableau de variations de g.

5) Tracer (D) et (G).

| $Q_I$ | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1a | $1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ; $2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ ; $z'=4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ . | 0.5 |
| 1b | $\left\|\frac{z'}{z}\right\|=2$ $\arg\left(\frac{z'}{z}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$ . | 0.5 |
| 1c | OM= $\|z\|=2$ ; OM'= $\|z'\|=4$ ; $MM'=\|z-z'\|=\|-2\sqrt{3}+2i-2i\|=2\sqrt{3}.$<br>$OM'^2=OM^2+MM'^2$.<br>***OU***<br>$z'=(1+i\sqrt{3})2i=-2\sqrt{3}+2i$<br>M et M' ont même ordonnée et M $\in$ y'y, donc OMM' est rectangle en M | 1 |
| 2a | $(1+i)^3=2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ; $(1+i)^3=-2+2i$ | 0.5 |
| 2b | <u>Forme exponentielle</u>:<br>$z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1+i\right)^3=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3=4\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)}=4\sqrt{2}e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)}$.<br><u>Forme algébrique:</u><br>$z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(2i-2\right)=2\left(-1-\sqrt{3}\right)+2\left(1-\sqrt{3}\right)i$ | 0.5 |
| 2c | En comparant les formes exponentielle et algébrique de z':<br>$4\sqrt{2}\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)=2\left(-1-\sqrt{3}\right),$<br>Par suite $\cos\frac{13\pi}{12}=\frac{-(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}$ | 1 |

| $Q_{II}$ | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| A1a | $p(K)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ ; $p(L)=\frac{2}{3}$ | 0.5 |
| A1b | $p(E\cap K)=p(K)\times p(E/K)=\frac{1}{3}\times\frac{C_1^1\times C_4^2}{C_5^3}=\frac{1}{5}.$ | 0.5 |
| A1c | $p(E\cap L)=p(L)\times p(E/L)=\frac{2}{3}\times\frac{C_1^1\times C_4^1}{C_5^2}=\frac{4}{15}.$<br>$p(E)=p(E\cap K)+p(E\cap L)=\frac{1}{5}+\frac{4}{15}=\frac{7}{15}.$ | 1 |
| A2 | $p(K/E)=\frac{p(E\cap K)}{p(E)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{15}}=\frac{3}{7}.$ | 0.5 |
| B | Le nombre de cas possibles est $C_5^3=10$<br>$p(X=4)=p(0,\,1,\,4\text{ ou }0,\,2,\,4\text{ ou }1,\,2,\,4)=\frac{3}{10}.$<br><table><tr><td>X=$x_i$</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>$p_i$</td><td>$\frac{1}{10}$</td><td>$\frac{3}{10}$</td><td>$\frac{6}{10}$</td></tr></table> | 1.5 |

| $Q_{III}$ | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1a | 2– 0 –2 = 0 et 1+ 0 –1= 0. | 0.5 |
| 1b | (d): x = m+1; y=2m; z = 5m+1 | 0.5 |
| 2a | $(D):\ x=2t+1\ ;\ y=-t\ ;\ z=1$ | 0.5 |
| 2b | $\overrightarrow{AE}(2t,-t,0)$; $AE=\sqrt{5t^2}=\sqrt{5}$, donc $t=\pm1$<br>Pour t = 1, E(3, –1,1). | 0.5 |
| 3a | 0 + 2 –2 = 0;    4 –2–2 = 0   donc B et C appartiennent à P. | 0.5 |
| 3b | $\overrightarrow{AB}(-1,-2,-1)$ ; $\overrightarrow{BC}(2,4,t)$ ; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$ donc $t=-10$<br>Aire de ABC = $\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{120}}{2}=6\sqrt{5}$<br>Volume de EABC = $\frac{\text{aire(ABC)}\times EA}{3}=\frac{6\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{3}=10u^3$.<br>***OU***<br>on calcule le produit mixte | 1.5 |

<table>
<tr><th>QIV</th><th>Corrigé</th><th>Note</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>f(x) = 0 pour x = $\alpha$ ; f(x) > 0 pour x > $\alpha$ ; f(x) < 0 pour x < $\alpha$ .</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>u(x) = x et v'(x) = $e^{-x}$<br>$\int_0^2 xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^2 = -3e^{-2} + 1$ Aire =<br>$\int_0^2 4dx + \int_0^2 xe^{-x}dx = \left[4x\right]_0^2 + \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^2 = (-3e^{-2}+9)\ u^2$ .</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>B1</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4xe^x - 3e^x - x - 1}{e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x-1}{e^x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} 4xe^x = 0.$<br>g(-2,5) =5,27.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B2</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (4x - 3 - xe^{-x} - e^{-x}) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$<br>$\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - (4x-3)) = \lim\limits_{x\to+\infty} -(x+1)e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (-xe^{-x} - e^{-x}) = 0$<br>donc la droite d'équation y = 4x - 3 est une asymptote de (G).</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B3</td><td>g(x) - (4x-3) = - (x+1) $e^{-x}$<br>(G) coupe (D) pour x = –1 ; donc A( –1 ; –7)<br>Si x < -1, - (x+1) $e^{-x}$ > 0 , alors (G) est au-dessus de (D)<br>Si x > -1, - (x+1) $e^{-x}$ < 0 , alors (G) est au-dessous de (D)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B4a</td><td>g'(x) = 4 - $e^{-x}$ + (x+1) $e^{-x}$ = 4 + x $e^{-x}$ = f(x)</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>B4b</td><td><table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1,2</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>g'(x)</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>g(x)</td><td>$+\infty$ ↘</td><td>-7,1</td><td>↗ $+\infty$</td></tr>
</table></td><td>1</td></tr>
<tr><td>B5</td><td>
</td><td>1.5</td></tr>
</table>

| وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>الفرع : علوم الحياة | دورة سنة ٢٠٠٨ الاكمالية الاستثنائية |
|---|---|---|
| عدد المسائل : اربع | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات

- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

## I- (4 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, avec justification, la réponse qui lui correspond.

| Nº | Questions | Réponses | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | a | b | c | d |
| 1 | Si $\frac{\pi}{6}$ est un argument de z, alors un argument de $\frac{i}{\overline{z}^2}$ est: | $-\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $-\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{6}$ |
| 2 | Si $z=-\sqrt{3}+e^{i\frac{\pi}{6}}$, alors la forme exponentielle de z est: | $e^{\frac{5\pi}{6}i}$ | $e^{\frac{7\pi}{6}i}$ | $\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}$ | $e^{-\frac{5\pi}{6}i}$ |
| 3 | Si z et z' sont deux nombres complexes tels que $\lvert z\rvert=2$ et $z'=z-\frac{1}{\overline{z}}$, alors $\lvert z'\rvert=$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{2}$ |
| 4 | Si z est un nombre complexe tel que $\lvert z\rvert=\sqrt{2}$, alors $\lvert\overline{z}+i\overline{z}\rvert=$ | $2\sqrt{2}$ | 2 | $\sqrt{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |

## II- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on donne les points :
A(0 ; 1 ; – 2), B(2 ; 1 ; 0), C(3 ; 0 ; – 3) et H(2 ; 2 ; – 2).

1) Montrer que $x - 2y - z = 0$ est une équation du plan (P) déterminé par les points H, A et B et vérifier que le point C n'appartient pas à ce plan.

2) a- Montrer que le triangle HAB est isocèle en H.
b- Montrer que (CH) est perpendiculaire à (P).
c- Prouver que CA = CB et déterminer un système d'équations paramétriques de la bissectrice intérieure $(\delta)$ de l'angle ACB.

3) Soit T le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC).
Montrer que T appartient à $(\delta)$.

## III- (4 points)

Pour faire face à une certaine maladie, on vaccine 40% des personnes d'une population.
On remarque par la suite que 85% des personnes vaccinées ne sont pas atteintes par la maladie et que 75% des personnes non vaccinées sont atteintes par la maladie.
On choisit, au hasard, une personne de cette population.
Soit les événements suivants :

M : « la personne choisie est atteinte par la maladie ».
V : « la personne choisie est vaccinée».

1) a- Vérifier que la probabilité de l'événement $M \cap V$ est égale à $\frac{6}{100}$.

   b- Quelle est la probabilité que la personne choisie soit atteinte par la maladie et non vaccinée?

   c- En déduire la probabilité P (M).

2) La personne choisie est non atteinte par la maladie.
   Calculer la probabilité qu'elle soit vaccinée.

3) Dans cette partie, on suppose que cette population est formée de 300 personnes.
   On choisit, au hasard, 3 personnes de cette population.
   Quelle est la probabilité que, parmi les 3 personnes choisies, il y ait au moins une qui soit vaccinée ?

## IV- (8 points)

Soit f la fonction définie sur ]1 ; + ∞ [ par $f(x) = x - \frac{1}{x \ln x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ et en déduire une asymptote à (C).

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Démontrer que la droite (d) d'équation y = x est une asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à (d).

3) Calculer f '(x) et montrer que f est strictement croissante.
   Dresser le tableau de variations de f.

4) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une racine unique $\alpha$ et vérifier que $1,5 < \alpha < 1,6$.

5) Tracer (d) et (C).

6) a- Calculer l'aire A(t) du domaine limité par la courbe (C), la droite (d) et les deux droites d'équations $x = e$ et $x = t$ où $t > e$.

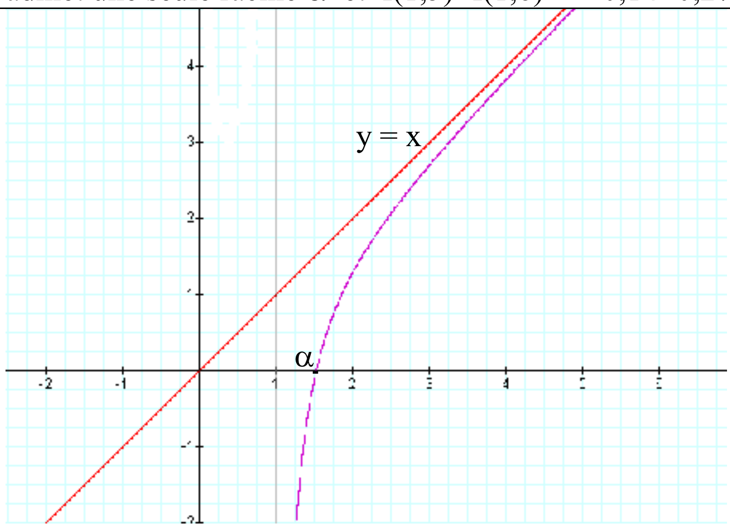
   b- Montrer que pour tout $t > e$, on a $A(t) < t$.

| I | Corrigé | | Note |
|---|---|---|---|
| 1 | $\arg\left(\dfrac{i}{\bar{z}^2}\right)=\arg(i)-2\arg(\bar{z})\ [2\pi]=\dfrac{\pi}{2}+2\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\ [2\pi]=\dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$ | **d** | 1 |
| 2 | $z=-\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i=e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$ | **a** | 1 |
| 3 | $z'=\dfrac{z\bar{z}-1}{\bar{z}}=\dfrac{\lvert z\rvert^2-1}{\bar{z}}=\dfrac{3}{\bar{z}}$, donc $\lvert z'\rvert=\dfrac{3}{\lvert z\rvert}=\dfrac{3}{2}$ | **c** | 1 |
| 4 | $\lvert\bar{z}+i\bar{z}\rvert=\lvert\bar{z}(1+i)\rvert=\lvert\bar{z}\rvert\times\lvert 1+i\rvert=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ | **b** | 1 |

| QII | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $x_A-2y_A-z_A=0-2+2=0$ ; $x_B-2y_B-z_B=2-2-0=0$ ;<br>$x_H-2y_H-z_H=2-4+2=0$, donc $x-2y-z=0$ est une équation du plan (P) déterminé par A, B et H.<br>$x_C-2y_C-z_C=3-0+3\neq 0$, donc C n'appartient pas à (P). | 1 |
| 2a | $\overrightarrow{HA}(-2;-1;0)$ ; $\overrightarrow{HB}(0;-1;2)$ donc HA = HB = $\sqrt{5}$. | 0.5 |
| 2b | $\overrightarrow{HC}(1;-2;-1)=\overrightarrow{N}_{(P)}$ donc (CH) est perpendiculaire à (P). | 0.5 |
| 2c | Les triangles AHC et BHC sont égaux donc CA = CB et le triangle ABC est isocèle en C(ou CA = CB = $\sqrt{11}$ ) donc la bissectrice de l'angle $A\hat{C}B$ est la médiane relative au côté [AB].<br>I(1 ; 1 ; – 1) est le milieu de [AB]; $\overrightarrow{CI}(-2;1;2)$ est un vecteur directeur de (δ) et C∈(δ) donc un système d'équations paramétriques de (δ) est : $x=-2m+3$ ; $y=m$ et $z=2m-3$. | 1 |
| 3 | (CH) est perpendiculaire au plan (P) donc (CH) est orthogonale à la droite (AB) de (P) ; la droite (AB) étant orthogonale à (CI) et à (CH)<br>donc (AB) est perpendiculaire au plan (CHI), par suite les plans (ABC) et (CHI) sont perpendiculaires, d'où le projeté T de H sur (ABC) appartient à la droite (CI) = (δ) , intersection de ces plans.<br>OU: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+8\vec{j}-2\vec{k}$<br>Donc le plan (ABC) a pour équation : $2x+8y-2z-12=0$<br>$(HT):\begin{cases}x=2t+2\\ y=8t+2\\ z=-2t-2\end{cases}$ $(HT)\cap(ABC)=\{T\}$ par suite $T\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{5}{3}\right)$<br>T appartient à (δ) pour $m=\dfrac{2}{3}$. | 1 |

| QIII | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1a | $P(M\cap V)=P(V)\times P(M/V)=\dfrac{40}{100}\times\dfrac{15}{100}=\dfrac{6}{100}$. | 0.5 |
| 1b | $P(M\cap\overline{V})=P(\overline{V})\times P(M/\overline{V})=\dfrac{60}{100}\times\dfrac{75}{100}=\dfrac{45}{100}$. | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| 1c | $P(M) = P(M \cap V) + P(M \cap \overline{V}) = \dfrac{6}{100} + \dfrac{45}{100} = \dfrac{51}{100}$. | 1 |
| 2 | $P(V/\overline{M}) = \dfrac{P(V \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \dfrac{\frac{40}{100} \times \frac{85}{100}}{1 - \frac{51}{100}} = \dfrac{34}{49}$. | 1 |
| 3 | Soit A l'événement : « au moins une personne vaccinée parmi les 3 personnes »<br>$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{C_{180}^{3}}{C_{300}^{3}} = 0{,}785$. | 1 |

| QIV | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $\lim\limits_{x \to 1^{+}} f(x) = 1 - \infty = -\infty$, la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe (C). | 0.5 |
| 2. | $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = 0$, donc la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C).<br>$f(x) - x = -\dfrac{1}{x \ln x} < 0$, donc (C) est au-dessous de (d). | 1 |
| 3 | $f'(x) = 1 + \dfrac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x} > 0$ pour $x > 1$, donc f est strictement croissante .<br>$\begin{array}{c\|lcr} x & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & +\infty \end{array}$ | 1.5 |
| 4 | f est continue et strictement croissante et f(x) croit de $-\infty$ à $+\infty$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule racine $\alpha$ et $f(1{,}5) \times f(1{,}6) = -0{,}14 \times 0{,}27 < 0$ donc $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$ . | 1 |
| 5 |  | 1.5 |
| 6a | $A(t) = \displaystyle\int_e^t [x - f(x)].dx = \int_e^t \frac{1}{x \ln x}.dx = \int_e^t \frac{(\ln x)'}{\ln x}.dx = [\ln(\ln x)]_e^t$<br>$= \ln(\ln t) - \ln(\ln e) = \ln(\ln t)$. | 1.5 |
| 6b | $A(t) < t$ si $\ln(\ln t) < t$ ; $\ln t < e^t$ ce qui est vrai , car la courbe représentative de la fonction ln est au-dessous de celle de la fonction exponentielle. | 1 |

| دورة سنة ٢٠٠٨ العادية | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>الفرع : علوم الحياة | وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات |
|---|---|---|
| الاسم:<br>الرقم: | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة ساعتان | عدد المسائل : أربع |

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة) .

**I - (4 points)**

Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = \sqrt{3} - i$, $b = \sqrt{3} + i$ et $c = 2i$.

1) Montrer que les trois points A , B et C sont sur un même cercle de centre O.
2) Ecrire $\frac{c-b}{a-b}$ sous formes algébrique et exponentielle.
3) Soit M un point de (P) privé de O, d'affixe $z = x + iy$ (x et y sont des réels).
   On pose $Z = \frac{z-b}{z}$.
   a- Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que $|Z| = 1$.
   b- Vérifier que A et C appartiennent à (E).
   c- Déterminer l'ensemble (F) des points M tels que Z est un imaginaire pur.

**II- (4points)**

Pour encourager le tourisme intérieur, une agence de tourisme propose à ses clients des week-ends de 2 jours avec trois options :
- Pension complète
- Demi-pension
- Pension de luxe.

L'agence publie l'annonce publicitaire suivante :

| Option / Destination | Pension complète | Demi-pension | Pension de luxe |
|---|---|---|---|
| Montagne | 150 000 LL | 100 000 LL | 200 000 LL |
| Plage | 100 000 LL | 75 000 LL | 150 000 LL |

Cette agence estime que 65% de ses clients choisissent la montagne, et le reste la plage et que parmi les clients de chaque destination, 55% choisissent la pension complète, 30% choisissent la demi-pension, et le reste la pension de luxe.
On interroge au hasard un client.
Soit les événements suivants :
A : « le client interrogé a choisi la montagne».
B : « le client interrogé a choisi la plage».
C : « le client interrogé a choisi la pension complète».
D : « le client interrogé a choisi la demi-pension».
S : « le client interrogé a choisi la pension de luxe».

1) a- Calculer les probabilités suivantes : P $(A\cap C)$, P $(B\cap C)$ et P (C).
b- Le client interrogé a choisi la pension complète, quelle est la probabilité qu'il ait choisi la plage?

2) Soit X la variable aléatoire égale à la somme payée à l'agence par un client.
a- Montrer que P(X=150 000) = 0,41 et déterminer la loi de probabilité de X.
b- Calculer l'espérance mathématique E (X). Que représente le nombre ainsi trouvé?
c- Estimer la somme reçue par l'agence lorsqu'elle sert 200 clients.

**III- (4points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :
A(1; 2; 0) , B(2; 1; 3) , C(3; 3; 1) , D(5;–3; –3) et E(–3; 7; 3).

1) Trouver une équation du plan (P) déterminé par A, B et C.

2) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (DE).

3) Démontrer que (P) est le plan médiateur de [DE].

4) Démontrer que (BC) est orthogonale à (DE).

5) a- Calculer l'aire du triangle BCD.
b- Calculer le volume du tétraèdre ABCD et déduire la distance de A au plan BCD.

**IV- (8 points)**

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = (x-1)e^{x} + 1$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (d) à (C).

b- Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).

c- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et donner f(2) sous forme décimale.

2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

3) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion W dont on déterminera les coordonnées.

4) a- Tracer (d) et (C).
b- Discuter graphiquement, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation $(m-1)e^{-x} = x - 1$.

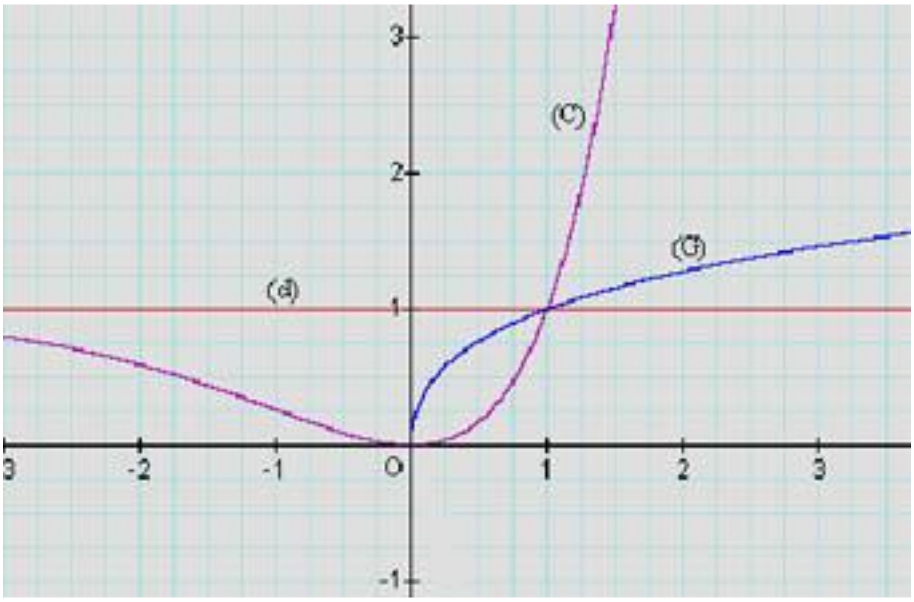
5) Calculer l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations x = 0 et x = 1.

6) a- Montrer que la fonction f admet sur $[0 ; +\infty[$ une fonction réciproque g et tracer la courbe représentative (G) de g dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
b- Trouver l'aire du domaine limité par (G), l'axe des ordonnées et la droite (d).

| Q :I | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $\lvert a\rvert=\lvert b\rvert=\lvert c\rvert=2$ donc OA=OB=OC=2. | 0.5 |
| 2 | $\dfrac{c-b}{a-b}=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{-2i}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}=e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. | 1 |
| 3a | $\lvert Z\rvert=1$, ssi BM = OM ssi M se trouve sur la médiatrice (E) de [OB]. | 1 |
| 3b | AB=AO et CB=CO donc A et C sont deux points de (E). | 0.5 |
| 3c | $Z=\dfrac{x+iy-\sqrt{3}-i}{x+iy}=\dfrac{x^2+y^2-\sqrt{3}x-y}{x^2+y^2}+i\dfrac{-x+\sqrt{3}y}{x^2+y^2}$.<br>Z est imaginaire pur ssi $\begin{cases}x^2+y^2-\sqrt{3}x-y=0\\-x+\sqrt{3}y\neq 0\end{cases}$<br>M décrit un cercle privé de O et B.<br>Ou arg(Z) $=\dfrac{\pi}{2}[\pi]=(\vec{u},\overrightarrow{BM})-(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{BM}\right)[\pi]$.<br>Donc M est un point de (F) cercle de diamètre [OB] privé de O et B. | 1 |

| Q :II | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1a | $P(A\cap C)=P(A)\times P(C/A)=0,65\times 0,55=0,3575$<br>$P(B\cap C)=P(B)\times P(C/B)=0,35\times 0,55=0,1925$<br>$P(C)=P(A\cap C)+P(B\cap C)=0,3575+0,1925=0,55$<br>ou directement $P(C)$=0,55. | 1 |
| 1b | $P(B/C)=\dfrac{P(B\cap C)}{P(C)}=\dfrac{0,1925}{0,55}=0,35$. | 0.5 |
| 2a | $P(X=150\ 000)=0,65\times 0,55+0,35\times 0,15=0,41$.<br>$x_i$: 75 000 ; 100 000 ; 150 000 ; 200 000<br>$P_i$: $0,35\times 0,3=0,105$ ; $0,35\times 0,55+0,65\times 0,3=0,3875$ ; 0,41 ; $0,65\times 0,15=0,0975$ | 1.5 |
| 2b | $E(X)=\sum p_ix_i=0,105\times 75\ 000+0,3875\times 100\ 000+0,41\times 150\ 000+0,0975\times 200000=127625$<br>La somme moyenne payée par un client est 127 625LL. | 0.5 |
| 2c | La somme estimée est $127\ 625\times 200=25\ 525\ 000$ LL. | 0.5 |

| Q :III | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\ (4;-5;-3)$, (P) : $\overrightarrow{AM}.\vec{N}=0$ . Donc (P) : $4x-5y-3z+6=0$. | 0.5 |
| 2 | (DE): $x=-8t+5$ ; $y=10t-3$ ; $z=6t-3$. | 0.5 |
| 3 | Un vecteur directeur de (DE) est colinéaire à un vecteur normal de (P).<br>Le milieu de [DE] (1;2;0) appartient à (P). | 1 |
| 4 | $\overrightarrow{DE}(-8;10;6)$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{BC}(1;2;-2)$ ou puisque(DE) est perpendiculaire au plan (P). | 0.5 |
| 5a | $\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC}=(-20;0;-10)$, aire $=\dfrac{1}{2}\sqrt{500}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$. | 0.5 |
| 5b | Volume $=\dfrac{1}{6}\lvert\overrightarrow{DA}.(\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC})\rvert=\dfrac{50}{6}=\dfrac{25}{3}$. V$=\dfrac{\text{base}\times h}{3}$ , $\dfrac{25}{3}=\dfrac{5\sqrt{5}\ h}{3}$ donc $h=\sqrt{5}$ | 1 |

<table>
<tr><th>Q :IV</th><th>Corrigé</th><th>Note</th></tr>
<tr><td>1a</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x - e^x + 1) = 1$ , donc la droite d'équation y = 1 est asymptote à (C) .</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>$f(x) - 1 = (x - 1)e^x$.<br>□ (C) rencontre (d) au point (1 ; 1)<br>□ Pour x > 1, (C) est au-dessus de (d) □ Pour x < 1, (C) est au-dessous de (d).</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>1c</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et f(2) = 8,389.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = xe^x$ .
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f '(x)</td><td></td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>1</td><td>↘</td><td>0</td><td>↗</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table></td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$f''(x) = (x + 1)e^x$ ; $f''(x)$ s'annule pour x = –1 en changeant de signe; par conséquent (C) a un point d'inflexion $W(-1, 1 - \frac{2}{e})$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>4a</td><td>
</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>4b</td><td>$(m - 1)e^{-x} = x - 1$ donne $m = (x - 1)e^x + 1$<br>□ Pour m < 0 ; pas de solutions □ Pour m = 0 ; une solution (double)<br>□ Pour 0 < m < 1 ; deux solutions □ Pour m ≥ 1 ; une solution .</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$A = \int_0^1 [(x-1)e^x + 1]dx = \Big[(x-2)e^x + x\Big]_0^1 = (3 - e)\ u^2$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6a</td><td>f est continue et strictement croissante sur [0 ; +∞[, elle admet donc une fonction réciproque g.<br>(G) est symétrique de (C) par rapport à la droite y = x.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6b</td><td>L'aire A'du domaine limité par (G), l'axe des ordonnées et la droite (d) est égale (par symétrie) à l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations x = 0 et x = 1 , donc A' = A = $(3 - e)u^2$.</td><td>0.5</td></tr>
</table>

| عدد المسائل : اربع | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |
|---|---|---|

ملاحظة : يسمح بإستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه ( دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

**I – (4 points)**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, M et M' d'affixes respectives i, z et z' tels que $z' = \dfrac{iz}{z-i}$ $(z \neq i)$.

1- Déterminer les points M tels que $z' = z$.

2- Dans le cas où $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, trouver un argument de $z'$.

3- Soit $z = x+iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.

a) Calculer x' et y' en fonction de x et y.

b) Déterminer l'ensemble des points M dans le cas où z' est réel.

4- a) Montrer que $z' - i = \dfrac{-1}{z-i}$.

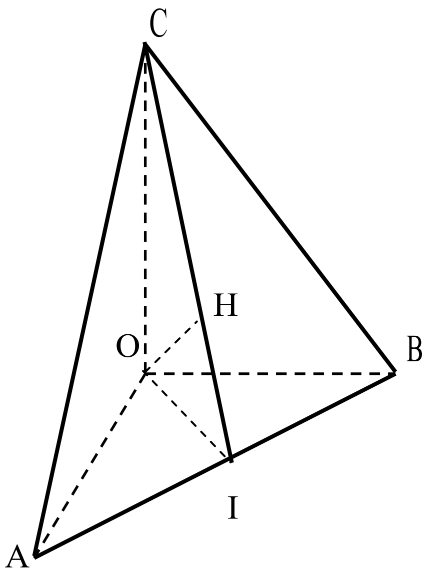
b) Démontrer que lorsque M se déplace sur le cercle $(\omega)$ de centre A et de rayon 1, alors M' se déplace sur le même cercle.

**II – (4 points)**

La figure ci-contre est considérée dans un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ où :

$\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ ; $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OC} = 2\vec{k}$.

Soit I le milieu de [AB].




1- Justifier qu'une équation du plan (ABC) est : $2x + 2y + z - 2 = 0$.

2- On considère le point $H\left(\dfrac{4}{9}; \dfrac{4}{9}; \dfrac{2}{9}\right)$.

a) Montrer que C, H et I sont alignés.

b) Démontrer que (OH) est perpendiculaire au plan (ABC).

c) Démontrer que les deux plans (OIC) et (ABC) sont perpendiculaires.

3- a) Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite $(\Delta)$ passant par C et parallèle à (OB).

b) Soit F un point variable de $(\Delta)$.

Démontrer que le tétraèdre FOAB a un volume constant que l'on calculera.

**III – (4 points)**

Dans une bibliothèque publique, chaque visiteur doit choisir un livre ou bien utiliser un ordinateur.

70% des visiteurs utilisent l'ordinateur.

Parmi ceux qui utilisent l'ordinateur 45% font des recherches.

Parmi les visiteurs qui choisissent un livre 80% font des recherches.

**A)** On rencontre, au hasard, un visiteur de la bibliothèque.

On considère les événements suivants :

O: « le visiteur utilise l'ordinateur».

L: « le visiteur choisit un livre».

R: « le visiteur fait des recherches».

1-Vérifier que la probabilité $P(O \cap R)$ est égale à 0,315.

2-Calculer $P(L \cap R)$ puis $P(R)$.

3-Le visiteur a fait des recherches, calculer la probabilité qu'il ait utilisé l'ordinateur.

**B)** Un lundi matin, 30 personnes ont visité la bibliothèque. On choisit, simultanément et au hasard, trois de ces visiteurs. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de visiteurs qui ont utilisé l'ordinateur parmi les trois visiteurs choisis.

1- Déterminer les valeurs de X.

2- Déterminer la loi de probabilité de X.

**IV – (8 points)**

Soit f la fonction définie, sur $[0;+\infty[$, par $f(x) = (x+1)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$. (unité 2cm)

1- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).

2- a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

b) Calculer $f'(0)$ et interpréter le résultat graphiquement.

3- a) Prouver que la courbe (C) a un point d'inflexion $W(1, \frac{2}{e})$.

b) Ecrire une équation de la tangente (d) à (C) au point W.

4- Tracer (d) et (C).

5- a) Calculer les réels a et b pour que la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)e^{-x}$ soit une primitive de f.

b) Calculer, en $cm^2$, l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

6- Soit g la fonction réciproque de f et (G) sa courbe représentative.

a) Tracer (G) dans le repère précédent.

b) Ecrire une équation de la tangente à (G) au point d'abscisse $\frac{2}{e}$.

**معيار التصحيح** مسابقة في مادة الرياضيات

## I – (4 points)

| Partie de la Q. | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $z=\frac{iz}{z-i}$ donc z(z-2i) = 0, z = 0 ou z = 2i par suite M(0;0) ou M(0;2). | 0,5 |
| 2 | $z=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}=\frac{-1}{2}+\frac{i}{2};z'=\frac{\frac{-1}{2}-\frac{i}{2}}{\frac{-1}{2}-\frac{i}{2}}=1;\ \arg z'=0(2\pi)$. | 0,5 |
| 3a | $z'=\frac{-x}{x^2+(y-1)^2}+i\frac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}$. $x'=\frac{-x}{x^2+(y-1)^2}$ ; $y'=\frac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}$ | 0,5 |
| 3b | z’ est réel donc $x^2+y^2-y=0$; par suite $x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$ et $z\neq i$, l’ensemble des points M est le cercle de centre $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé du point A(0;1). | 1 |
| 4a | $z'=\frac{iz}{z-i}$ alors $z'-i=\frac{iz}{z-i}-i$ donc $z'-i=\frac{-1}{z-i}$. | 0,5 |
| 4b | Puisqu’on a AM = 1, $\lvert z-i\rvert=1$ alors $\lvert z'-i\rvert=\left\lvert\frac{-1}{z-i}\right\rvert=\frac{\lvert -1\rvert}{1}=1$ ; AM' = 1 et M’décrit le même cercle $(\omega)$. | 1 |

## II – (4 points)

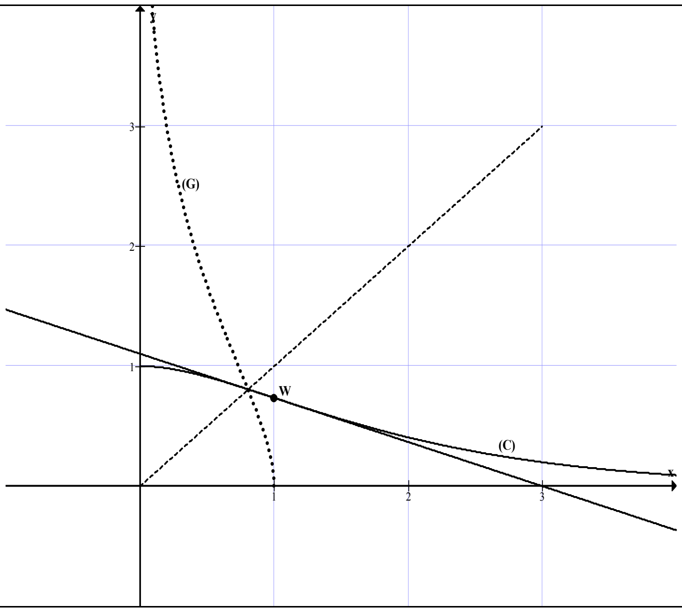
| Partie de la Q. | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | Les coordonnées de A, B et C vérifient l’équation donnée car: $2x_A+2y_A+z_A-2=2+0+0-2=0$. De même, $2x_B+2y_B+z_B-2=0+2+0-2=0$; et $2x_C+2y_C+z_C-2=0$ . | 0,5 |
| 2a | $\overrightarrow{CH}\left(\frac{4}{9};\frac{4}{9};-\frac{16}{9}\right)$; $\overrightarrow{CI}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-2\right)$; donc, $\overrightarrow{CH}=\frac{8}{9}\overrightarrow{CI}$, par suite C , H et I sont alignés. | 0,5 |
| 2b | $\vec{n}$ (2 ; 2; 1) est un vecteur normal au plan (ABC), mais $\overrightarrow{OH}\left(\frac{4}{9};\frac{4}{9};\frac{2}{9}\right)=\frac{2}{9}\vec{n}$ , donc (OH) est perpendiculaire au plan (ABC) | 0,5 |

| | | |
|---|---|---|
| 2c | (OH) est perpendiculaire au plan (ABC) et (OH) $\subset$(OCI) donc le plan (OCI) est perpendiculaire au plan (ABC)<br>***OU :***<br>$\vec{n'} = \vec{OI} \wedge \vec{OC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j}$ ; $\vec{n'}$ est normal au plan $(OIC)$ et $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$ | 1 |
| 3a | $\vec{OB}(0;1;0)$ est un vecteur directeur de ( $\Delta$ ), et C est un point de( $\Delta$ ).<br>Par conséquent, $(\Delta): \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$. | 0,5 |
| 3b | ( $\Delta$ ) est parallèle au plan(OAB), donc la distance de F à (OAB) est constante par suite le volume du tétraèdre est constant.<br>Aire du triangle OAB $= \dfrac{OA \times OB}{2} = 0,5u^2$ et d (F ;(OAB)) = OC = 2,<br>par conséquent, $V = \dfrac{0,5 \times 2}{3} = \dfrac{1}{3}u^3$.<br>►OU : On calcule $\vec{OF} \cdot \left(\vec{OA} \wedge \vec{OB}\right) = 2$ (indépendant de t),<br>et V= $\dfrac{\left\lvert \vec{OF} \cdot \left(\vec{OA} \wedge \vec{OB}\right)\right\rvert}{6} = \dfrac{1}{3}u^3$ | 1 |

## III – (4 points)

| Partie de la Q. | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| A1 | $P(O \cap R) = P(O).P(R/O) = (0,7)(0,45) = 0,315$ | 0,5 |
| A2 | $P(L \cap R) = P(L).P(R/L) = (0,3)(0,8) = 0,24$<br>$P(R) = P(O \cap R) + P(L \cap R) = 0,315 + 0,24 = 0,555$ | 1 |
| A3 | $P(O/R) = \dfrac{P(O \cap R)}{P(R)} = 0,567$ | 0,5 |
| B1 | Les valeurs de X sont : 0 ; 1 ; 2 et 3 | 0,5 |
| B2 | **Si le nombre total est 30, alors il y a 21 qui utilisent l'ordinateur.**<br>$P(X=0) = \dfrac{C_9^3}{C_{30}^3} = \dfrac{3}{145}$ , $P(X=1) = \dfrac{C_{21}^1 C_9^2}{C_{30}^3} = \dfrac{27}{145}$<br>$P(X=2) = \dfrac{C_{21}^2 C_9^1}{C_{30}^3} = \dfrac{27}{58}$ , $P(X=3) = \dfrac{C_{21}^3}{C_{30}^3} = \dfrac{19}{58}$ | 1,5 |

## IV – (8 points)

| Partie de la Q. | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$, donc l'axe des abscisses est asymptote à (C) . | 0,5 |
| 2a | $f'(x) = -xe^{-x}$. <br> $\begin{array}{c\|lcr} x & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & 0 & - & \\ \hline f(x) & 1 & \searrow & 0 \end{array}$ | 1 |
| 2b | f '(0) = 0. La tangente à (C) en (0 ;1) est parallèle à l'axe des abscisses. | 1 |
| 3a | $f''(x) = (x - 1)e^{-x}$; $f''(x)$ s'annule pour x = 1 en changeant de signe; par conséquent (C) a un point d' inflexion $W(1, \frac{2}{e})$. | 1 |
| 3b | $y - \frac{2}{e} = -\frac{1}{e}(x-1)$ ou $y = -\frac{1}{e}x + \frac{3}{e}$ | 0,5 |
| 4 |  | 1 |
| 5a | F'(x) = f(x) ; a – b – ax = x + 1 donc a = –1, b = –2. | 1 |
| 5b | $A = \int_0^1 f(x)dx = \left[ (-x-2)e^{-x} \right]_0^1 = \left(2 - \frac{3}{e}\right)u^2 = 0{,}896\ u^2 = 0{,}896 \times 4cm^2 = 3{,}584cm^2$. | 1 |
| 6a | Courbe représentative de g. | 0,5 |
| 6b | La droite symétrique de (d) par rapport à la première bissectrice a pour équation: $x = -\frac{1}{e}y + \frac{3}{e}$ ou $y = -ex + 3$ <br> ***OU*** : $g'\left(\frac{2}{e}\right) = \frac{1}{f'(1)} = -e$ ; <br> une équation de la tangente est $y - 1 = -e(x - \frac{2}{e})$ ; $y = -ex + 3$ . | 0,5 |

وزارة التربية والتعليم العالي
المديرية العامة للتربية
دائرة الامتحانات

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع علوم الحياة

دورة سنة 2007 العادية

| عدد المسائل: اربع | مسابقة في مادة تايضايرلا<br>المدة: ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |
|---|---|---|

ملاحظة: يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات
يستطيع المرشح الاجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

**I– (4 points).**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$, on donne les points A (1 ; 1 ; 0), B (2; 0 ; 0), C (1; 3; –1), E (2 ; 2 ; 2) et le plan (P) d'équation $x + y + 2z - 2 = 0$.

1) a- Vérifier que (P) est le plan déterminé par A, B et C.
   b- Montrer que la droite (AE) est perpendiculaire au plan (P).
   c- Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre EABC.

2) On désigne par L le milieu de [AB] et par (Q) le plan passant par L et parallèle aux deux droites (AE) et (BC).
   a- Ecrire une équation du plan (Q).
   b- Démontrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
   c- Démontrer que la droite (d), intersection des plans (P) et (Q), est parallèle à (BC).

**II– (4 points).**

Dans une entreprise il y a 20 employés répartis dans deux départements selon le tableau suivant :

| | Département technique | Département administratif |
|---|---|---|
| Femmes | 3 | 5 |
| Hommes | 10 | 2 |

1) Le directeur de l'entreprise veut offrir un cadeau à l'un des employés; pour cela il choisit au hasard un employé de cette entreprise.
   On considère les événements suivants :
   F : « l'employé choisi est une femme ».
   H : « l'employé choisi est un homme ».
   T : « l'employé choisi est du département technique ».
   A : « l'employé choisi est du département administratif ».
   a- Calculer les probabilités suivantes :
   $P(F / T)$ , $P(F / A)$ , $P(F \cap T)$ et $P(F)$.
   b- Sachant que l'employé choisi est un homme, quelle est la probabilité qu'il soit du département technique ?

2) Dans une autre occasion, le directeur de l'entreprise choisit au hasard et simultanément **deux** employés du département technique et il choisit aussi au hasard **un** employé du département administratif.
   On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de femmes choisies.
   a- Vérifier que $P(X = 1) = \frac{95}{182}$.
   b- Déterminer la loi de probabilité de X.

**III– (4 points)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ on donne les points E, F, G d'affixes respectives $z_E = 2i$ , $z_F = -2i$ , $z_G = -1 + i$ et soit M un point d'affixe z.

1) a- Trouver l'ensemble (T) des points M tels que $|z-2i| = \sqrt{2}$.

b- Montrer que G est un point de (T).

2) a- Sur quelle ligne (L) se déplace le point M lorsque $\left|\frac{z-2i}{z+2i}\right| = 1$ ?

b- Déterminer l'affixe $z_0$ d'un point W de (L) telle que $|z_0 - 2i| = 3$.

3) Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A$ et $z_B$ telles que $z_A = z_F + z_G$ et $z_B = z_F \times z_G$.

a- Ecrire les complexes $z_A$ et $z_B$ sous forme exponentielle.

b- Démontrer que les points O, A et B sont alignés.

**IV– (8 points)**

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \dfrac{4}{e^x - 1}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- Montrer que l'axe des ordonnées est une asymptote à (C).

b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe (C).

c- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 3$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.

2) Démontrer que le point S (0 ; 1) est un centre de symétrie de (C).

3) a- Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

b- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet deux racines $\alpha$ et $\beta$ et vérifier que : $1{,}7 < \alpha < 1{,}8$ et $-3{,}2 < \beta < -3{,}1$.

4) Tracer (d), (D) et (C).

5) a- Prouver que $f(x) = x + 3 - \dfrac{4e^x}{e^x - 1}$.

b- Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

6) Soit g la fonction réciproque de f sur $]0, +\infty[$.
Démontrer que l'équation f(x) = g(x) n'admet pas de racines.

.

| Q1 | MATH SV PREMIERE SESSION-2007 | Notes |
|---|---|---|
| 1-a | ◇ $1+1+0-2=0$ ; $A\in(P)$ ◇ $2+0+0-2=0$ ; $B\in(P)$ <br> ◇ $1+3-2-2=0$ ; $C\in(P)$ <br> OU $\vec{AM}.(\vec{AB}\wedge\vec{AC})=0$ ; $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$ ; <br> (P) : $x+y+2z-2=0$ | ½ |
| 1-b | $\vec{AE}(1;1;2)$ et $\vec{N}_P(1;1;2)$ ; (AE) est perpendiculaire au plan (P). | ½ |
| 1-c | $S=\frac{1}{2}\lVert\vec{AB}\wedge\vec{AC}\rVert=\frac{\sqrt{1+1+4}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$. <br> $V=\frac{1}{3}S\times AE=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{6}=1$ <br> OU : $V=\frac{1}{6}\lvert\vec{AE}.(\vec{AB}\wedge\vec{AC})\rvert=\frac{1}{6}\lvert 1+1+4\rvert=1$ | 1 |
| 2-a | $\vec{LM}.(\vec{AE}\wedge\vec{BC})=0$ avec $L\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};0\right)$ ; donc $\begin{vmatrix} x-\frac{3}{2} & y-\frac{1}{2} & z \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0$ <br> (Q) : $7x+y-4z-11=0$. | 1 |
| 2-b | $\vec{N}_P.\vec{N}_Q=-7-1+8=0$ ; (P) et (Q) sont perpendiculaires. | ½ |
| 2-c | (BC) // (Q) et (BC) est une droite de (P) , donc (BC) est parallèle à la droite d'intersection de (P) et (Q). <br> OU : $(d)=(P)\cap(Q)$ : $\begin{cases} x+y+2z-2=0 \\ 7x+y-4z-11=0 \end{cases}$ ; <br> (d) : $\begin{cases} x=t+\frac{3}{2} \\ y=-3t+\frac{1}{2} \\ z=t \end{cases}$ $\vec{BC}(-1\ ;3\ ;-1)$ et $\vec{V}_d(1\ ;-3\ ;1)$ donc (BC) //(d). | ½ |

<table>
<tr><th>Q 2</th><th>MATH SV — PREMIERE SESSION-2007</th><th>Notes</th></tr>
<tr><td>1-a</td><td>$P(F/T) = \frac{3}{13}$ ; $P(F/A) = \frac{5}{7}$ ; $P(F\cap T) = \frac{3}{20}$ ; $P(F) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1-b</td><td>$P(T/H) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.</td><td>½</td></tr>
<tr><td>2-a</td><td>

$P(X = 1) = \frac{3\times 10}{C_{13}^{2}}\times\frac{2}{7} + \frac{C_{10}^{2}}{C_{13}^{2}}\times\frac{5}{7} = \frac{285}{546} = \frac{95}{182}$

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">T</th><th colspan="2">A</th></tr>
<tr><td></td><td>3F</td><td>10H</td><td>5F</td><td>2H</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Ou</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2-b</td><td>

$P(X= 0) = \frac{C_{10}^{2}}{C_{13}^{2}}\times\frac{2}{7} = \frac{90}{546} = \frac{15}{91}$

<table>
<tr><th colspan="2">T</th><th colspan="2">A</th></tr>
<tr><td>3F</td><td>10H</td><td>5F</td><td>2H</td></tr>
<tr><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>

$P(X= 2) = \frac{C_{3}^{2}}{C_{13}^{2}}\times\frac{2}{7} + \frac{3\times 10}{C_{13}^{2}}\times\frac{5}{7} = \frac{156}{546} = \frac{26}{91}$

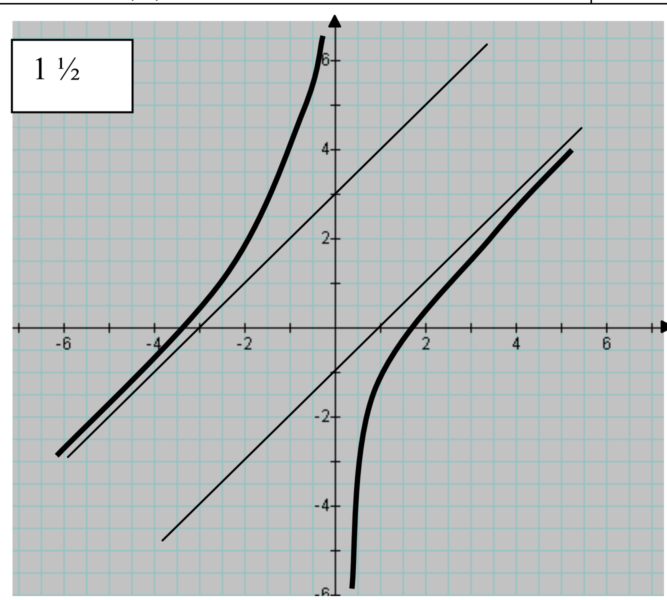
<table>
<tr><th></th><th colspan="2">T</th><th colspan="2">A</th></tr>
<tr><td></td><td>3F</td><td>10H</td><td>5F</td><td>2H</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Ou</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>

$P(X= 3) = \frac{C_{3}^{2}}{C_{13}^{2}}\times\frac{5}{7} = \frac{15}{546} = \frac{5}{182}$

<table>
<tr><th colspan="2">T</th><th colspan="2">A</th></tr>
<tr><td>3F</td><td>10H</td><td>5F</td><td>2H</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>$x_i$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$P_i$</td><td>$\frac{15}{91}$</td><td>$\frac{95}{182}$</td><td>$\frac{26}{91}$</td><td>$\frac{5}{182}$</td></tr>
</table>
</td><td>1½</td></tr>
</table>

| Q3 | MATH SV PREMIERE SESSION-2007 | Notes |
|---|---|---|
| 1-a | $\|z-2i\|=\sqrt{2}$ équivaut à EM=$\sqrt{2}$ et (T) est le cercle de centre E et de rayon $\sqrt{2}$. | 1 |
| 1-b | EG=$\|z_G - z_E\| = \|-1-i\| = \sqrt{2}$ d'où G$\in$(T). | ½ |
| 2-a | $\left\|\dfrac{z-2i}{z+2i}\right\| = 1$ équivaut à $\|z-2i\| = \|z+2i\|$ donc ME =MF et (L) est la médiatrice de [EF] qui est l'axe des abscisses. | ½ |
| 2-b | W$\in$(L) donc $\|z_0-2i\| = \|z_0+2i\| = 3$ ; Soit $z_0 = x+iy$.<br>$\|x+iy-2i\| = \|x+iy+2i\|$ équivaut à $x^2+(y-2)^2 = x^2+(y+2)^2$<br>$y = 0$ puis $x^2+4=9$ ; $x=\sqrt{5}$ ou x=$-\sqrt{5}$ et par suite $z_0=\sqrt{5}$ ou $z_0 = -\sqrt{5}$<br>OU : W$\in$ x'x et EW=3 donc $OW^2 = EW^2 - OE^2 = 9-4=5$ et OW=$\sqrt{5}$ et par suite $z_0=\sqrt{5}$ ou $z_0=-\sqrt{5}$. | ½ |
| 3-a | $z_A = -1-i = \sqrt{2}e^{i5\frac{\pi}{4}}, z_B = 2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. | 1 |
| 3-b | $\arg z_A = 5\dfrac{\pi}{4}, \arg z_B = \dfrac{\pi}{4}$ ; $\arg z_A = \arg z_B + \pi$ donc O,A et B sont alignés<br>OU $z_B = -2z_A$ soit $\overrightarrow{OB} = -2\overrightarrow{OA}$. | ½ |

| Q4 | MATH SV PREMIERE SESSION-2007 | Notes |
|---|---|---|
| 1-a | $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -1-\dfrac{4}{0^+} = -\infty$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -1-\dfrac{4}{0^-} = +\infty$<br>donc l'axe des ordonnées, d'équation x = 0, est asymptote à (C). | ½ |
| 1-b | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(x-1)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4}{e^x-1} = 0$ | 1 |
| 1-c | $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-(x+3)] = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1-\dfrac{4}{e^x-1}-x-3) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-4-\dfrac{4}{e^x-1})$<br>$= -4+4 = 0.$ | ½ |
| 2 | Le domaine de définition de f est centré en O.<br>$f(-x)+f(x) = -x-1-\dfrac{4}{e^{-x}-1}+x-1-\dfrac{4}{e^x-1} = -2+\dfrac{4e^x}{e^x-1}-\dfrac{4}{e^x-1}$<br>= – 2 +4 = 2, d'où S(0 ; 1) est un centre de symétrie de (C). | ½ |
| 3-a | $f'(x) = 1+\dfrac{4e^x}{(e^x-1)^2} > 0.$<br>$\begin{array}{c\|ccc\|\|ccc} x & -\infty & & & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & & & + & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & +\infty & -\infty & \nearrow & +\infty \end{array}$ | 1 |
| 3-b | f est continue et strictement croissante de – ∞ à + ∞ sur ] – ∞ ; 0[ ; l'équation f(x) = 0 admet sur cet intervalle une seule racine négative β ;<br>f( – 3,2) = – 0,03 < 0 et<br>f(– 3,1) = 0,088 > 0<br>donc – 3,2 < β < – 3,1. | |
| 4 | De même l'équation f(x) = 0 admet sur ]0 ; +∞ [ une seule racine positive α ;<br>f(1,7) = – 0,154 < 0 et<br>f(1,8) = +0,0078 > 0<br>donc 1,7 < α < 1,8.<br>1<br><br><br>1 ½ | |
| 5-a | $x+3-\dfrac{4e^x}{e^x-1} = x-1+4-\dfrac{4e^x}{e^x-1} = x-1+\dfrac{4e^x-4-4e^x}{e^x-1} = x-1-\dfrac{4}{e^x-1}.$ | ½ |
| 5-b | $A = \displaystyle\int_2^3 (x+3-\dfrac{4e^x}{e^x-1})\,dx = \left[\dfrac{x^2}{2}+3x-4\ln(e^x-1)\right]_2^3 = \dfrac{11}{2}+4\ln\left(\dfrac{e^2-1}{e^3-1}\right) = 1{,}122\ u^2$ | 1 |
| 6 | f(x) = g(x) équivaut à f(x) = x ; $x-1-\dfrac{4}{e^x-1} = x$ ; $-1 = \dfrac{4}{e^x-1}$ ; $e^x = -3$<br>La dernière égalité est impossible ( $e^x > 0$ ) donc l'équation n'a pas de racines. | ½ |

وزارة التربية والتعليم العالي
المديرية العامة للتربية
دائرة الامتحانات

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع علوم الحياة

دورة سنة ٢٠٠٦ الأستثنائية

| | | |
|---|---|---|
| عدد المسائل: اربع | مسابقة في مادة تايضايرلا<br>المدة: ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |

ملاحظة: يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات
يستطيع المرشح الاجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

**I-(3,5 points)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$, on donne les points A, B et M d'affixes respectives 2, 4 et z (avec $z \neq 2$).

Soit M' le point d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z-4}{z-2}$.

1) a- Donner une interprétation géométrique de $|z'|$ , $|z-4|$ et $|z-2|$.
   b- Déterminer l'ensemble des points M lorsque M' décrit le cercle de centre O et de rayon 1.

2) Soit $z = x + i\,y$ et $z' = x' + i\,y'$.
   a- Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.
   b- Lorsque $z'$ est réel, sur quelle ligne se déplace le point M ?

**II- (4 points)**

Une urne U contient **quatre** boules numérotées **1**, **trois** boules numérotées **2** et **une** boule numérotée **5**.
Une autre urne V contient **trois** boules numérotées **1** et **cinq** boules numérotées **2**.

A- On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne U.
   Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   E : « les deux boules tirées portent le même numéro »
   F : « le produit des deux numéros portés par les deux boules tirées est 10 ».

B- On tire au hasard une boule de l'urne U et une boule de l'urne V.
   Soit X la variable aléatoire égale à la somme des deux numéros portés par les deux boules tirées.

1) Donner les cinq valeurs possibles de X.
2) Vérifier que la probabilité d'avoir X = 3 est égale à $\dfrac{29}{64}$.
3) Déterminer la loi de probabilité de X.

III-**(4 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne :

le plan (P) d'équation : $x + y + z - 4 = 0$,

les points A ( 3 ;1 ; 0 ) , B( 1 ;2 ;1), C( 1 ; 1 ;2) et E( 2 ; 0 ;-1).

1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

2) a- Vérifier que (P) est le plan déterminé par A, B et C.

b- Montrer que la droite (AE) est perpendiculaire au plan (P).

3) On désigne par (Q) le plan passant par A et perpendiculaire à (BE). Ecrire une équation de (Q).

4) Les plans (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).

a- Démontrer que les droites (D) et (BC) sont parallèles.

b- Soit L un point quelconque de (BC) et H son projeté orthogonal sur (Q).

Montrer que LH reste constante lorsque L décrit la droite (BC).

IV-**(8,5 points)**

A- On donne l'équation différentielle (E) : $y' - y - e^x + 1 = 0$ .

On pose $z = y - xe^x - 1$.

1) Trouver une équation différentielle (E') satisfaite par z et déterminer sa solution générale.

2) Déduire la solution générale de (E) et trouver une solution particulière y de (E) qui vérifie y(0) = 0.

B- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = (x - 1)e^x + 1$ et l'on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Donner f(2) sous forme décimale .

b- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (d) à (C).

c- Vérifier que la courbe (C) coupe son asymptote (d) au point E( 1 ; 1).

2) a- Calculer f '(x) et dresser le tableau de variations de f.

b- Démontrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion.

3) Tracer la droite (d) et la courbe (C).

4) a- Démontrer que la fonction f admet sur $[0 ; +\infty[$ une fonction réciproque g.

b- Tracer la courbe représentative (G) de g dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

c- Calculer l'aire du domaine limité par les deux courbes (C) et (G).

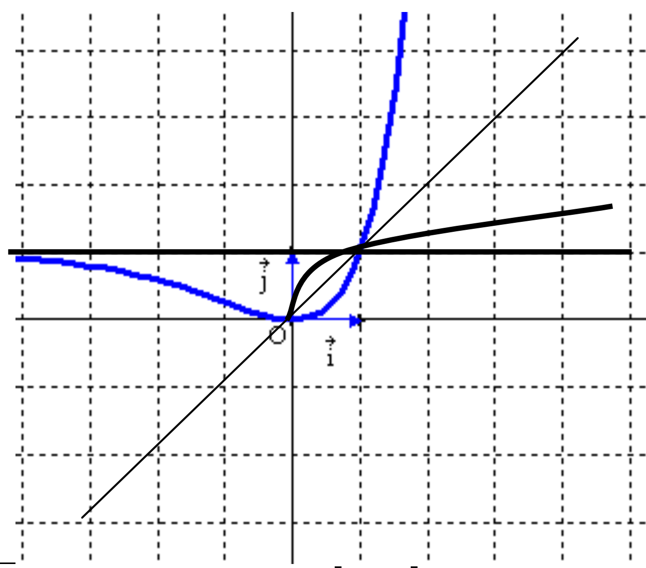
# SV MATHEMATIQUES

| BAREME | | 2$^{ème}$ SESSION 2006 |
|---|---|---|
| Q1 | | N |
| 1.a | $|z'| = OM'$ ; $|z-4| = BM$ et $|z-2| = AM$ | 1 |
| 1.b | $|z'| = \dfrac{|z-4|}{|z-2|}$ d'où $OM' = \dfrac{BM}{AM}$. OM' = 1 équivaut à BM = AM et l'ensemble des points M est la médiatrice de [AB], | 1 |
| 2.a | $x' + iy' = \dfrac{x+iy-4}{x+iy-2} = \dfrac{(x-4+iy)(x-2-iy)}{(x-2)^2+y^2}$ ;$x' = \dfrac{x^2+y^2-6x+8}{(x-2)^2+y^2}$ ,$y' = \dfrac{2y}{(x-2)^2+y^2}$ | 1 |
| 2.b | z' est réel ssi y' = 0 d'où y = 0 et M se déplace sur l'axe des abscisses. | ½ |

| Q2 | | N |
|---|---|---|
| A | $P(E) = P(1\,;1) + P(2\,;2) = \dfrac{C_4^2}{C_8^2} + \dfrac{C_3^2}{C_8^2} = \dfrac{9}{28}$. $P(F) = P(2\,;5) = \dfrac{C_3^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \dfrac{3}{28}$ | 1½ |
| B-1 | Les cinq valeurs de X sont : 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 7 . | ½ |
| B-2 | $P(X=3) = P(1\,;2) + P(2\,;1) = \dfrac{4}{8}\times\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}\times\dfrac{3}{8} = \dfrac{29}{64}$ | ½ |
| B-3 | voir tableau ci-dessous | 1½ |

| $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_i$ | $\frac{4}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{12}{64}$ | $\frac{29}{64}$ | $\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{15}{64}$ | $\frac{1}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{64}$ | $\frac{1}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{64}$ |

| Q3 | | N |
|---|---|---|
| 1 | $\vec{AB}(-2,1,1)$ , $\vec{BC}(0,-1,1)$ ; $\vec{AB}.\vec{BC} = 0$ donc ABC est rectangle en B. | ½ |
| 2.a | Les coordonnées de A , B et C vérifient l'équation de (P).<br>$\Rightarrow$ ou : $\vec{AM}.(\vec{AB}\wedge\vec{AC}) = 0$ | ½ |
| 2.b | $\vec{AE}(-1,-1,-1)$ , $\vec{N_P}(1,1,1)$ d'où $\vec{AE} = -\vec{N_P}$ et (AE) est perpendiculaire à (P). | ½ |
| 3 | . $\vec{BE}(1,-2,-2) = \vec{N_Q}$ donc (Q) : x – 2y – 2z + d = 0, A appartient à (Q) donne d = – 1<br>(Q) : x – 2y – 2z – 1 = 0. | ½ |
| 4.a | $\vec{BC}(0,-1,1)$ , $\vec{V_D} = \vec{N_P}\wedge\vec{N_Q} = 3\vec{j} - 3\vec{k}$ donc $\vec{V_D} = -3\vec{BC}$ et B n'appartient pas à (Q) d'où (D) // (BC) .<br>$\Rightarrow$ OU : (BC) est perpendiculaire au plan (ABE) , donc (BC) est perpendiculaire à (EB), et (EB) est perpendiculaire à (Q) , donc (BC) // (Q) [car (BC) $\not\subset$ (Q)]<br>(P) passe par (BC) donc (P) coupe (Q) suivant (D) //(BC). | 1 |
| 4.b | (D) //(BC) , donc(BC) //(Q) .Tous les points de (BC) sont à égale distance de (Q) ;<br>$\Rightarrow$ OU : Equations de (BC) : x = 1 , y = – m + 2 , z = m + 1<br>$d(M \to (Q)) = \dfrac{|1+2m-4-2m-2-1|}{\sqrt{1+4+4}} = 2$ | 1 |

<table>
<tr><th>Q4</th><th></th><th>N</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>$y' - y - e^x + 1 = 0$ ; $y = z + xe^x + 1$ ; $y' = z' + e^x + xe^x$ ; $z' + e^x + xe^x - z - xe^x - 1 - e^x + 1 = 0$<br>$z' - z = 0$ ; $z = Ce^x$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>$y = Ce^x + xe^x + 1$ ; $y(0) = C + 1 = 0$ ; $C = -1$, donc $y = -e^x + xe^x + 1$ .</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B1.a</td><td>$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ; $f(2) = e^2 + 1 = 8{,}389$.</td><td>½</td></tr>
<tr><td>B1.b</td><td>$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x - e^x + 1) = 1$ , donc la droite (d) d'équation $y = 1$ est une asymptote à (C) .</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B1.c</td><td>$y = 1$ et $1 = (1 - 1)e^x + 1$ ; d'où (C) coupe (d) en E (1 ;1) .</td><td>½</td></tr>
<tr><td>B2.a</td><td>$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = xe^x$ .
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f '(x)</td><td></td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>1</td><td>↘</td><td>0</td><td>↗</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table></td><td>1</td></tr>
<tr><td>B2.b</td><td>$f''(x) = (x + 1)e^x$ ; $f''(x)$ s'annule pour $x = -1$ en changeant de signe ; donc (C) admet un point d'inflexion .</td><td>½</td></tr>
<tr><td>B3</td><td>
</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B4.a</td><td>f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ elle admet donc une fonction réciproque g .</td><td>½</td></tr>
<tr><td>B4.b</td><td>(G) est le symétrique de (C) par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$ .</td><td>½</td></tr>
<tr><td>B4.c</td><td>$\mathcal{A} = 2\int_0^1 [x - f(x)]dx = 2\int_0^1 (x - 1 + e^x - xe^x)dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - x + e^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x dx$<br>or $\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$<br>d'où $\mathcal{A} = 2\left(\frac{1}{2} - 1 + e - 1\right) - 2 = 2e - 5$ $u^2$.</td><td>1</td></tr>
</table>

وزارة التربية والتعليم العالي
المديرية العامة للتربية
دائرة الامتحانات

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع علوم الحياة

دورة سنة ٢٠٠٦ العادية

عدد المسائل: اربع
مسابقة في مادة تايضايرلا
المدة: ساعتان
الاسم:
الرقم:

ملاحظة: يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات
يستطيع المرشح الاجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I– (**4 points**)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$, on donne le plan (P) d'équation $x + y + z - 4 = 0$ et les points A (3 ;1 ; 0) , B(1; 2 ;1) , C(1; 1;2) et E(2 ; 0 ;–1).

1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.
2) a- Vérifier que les points A, B et C appartiennent au plan (P).
   b- Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (d) perpendiculaire en A au plan (P) et vérifier que E est un point de (d).
3) On désigne par (Q) le plan passant par A et perpendiculaire à (BE).
   Ecrire une équation de (Q).
4) Les plans (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).
   a- Démontrer que les droites (D) et (BC) sont parallèles.
   b- M est un point variable de (BC), démontrer que la distance de M au plan (Q) reste constante.

II– (**4,5 points**)

Un sac **S** contient **huit** billets: **quatre** billets de 10 000LL, **trois** de 20 000LL et **un** de 50 000LL.
Un autre sac **T** contient aussi **huit** billets : **trois** billets de 10 000LL et **cinq** de 20 000LL.

1) **On tire simultanément et au hasard deux billets du sac S**.
   Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « les deux billets tirés sont de la même catégorie »
   B : « la somme des valeurs des deux billets tirés est 30 000LL »
2) **On choisit au hasard l'un des deux sacs T et S puis on tire simultanément et au hasard deux billets de ce sac** .
   On considère les événements suivants :
   E: « Le sac choisi est **S** »
   F: « La somme des valeurs des deux billets tirés est 30 000LL »
   Calculer les probabilités $P(F \cap E)$ et $P(F \cap \overline{E})$. En déduire $P(F)$.
3) **On tire au hasard un billet du sac S et un billet du sac T**.
   Soit X la variable aléatoire égale à la somme des valeurs des deux billets tirés.
   a- Vérifier que $P(X = 60\,000) = \dfrac{3}{64}$ .
   b- Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

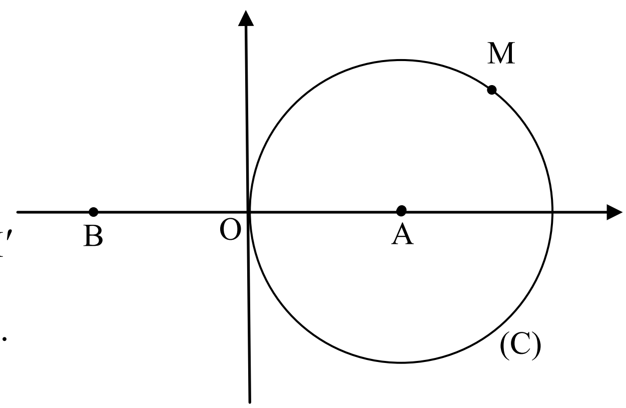
III– **(3,5 points)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ on donne les points A et B

d'affixes respectives 1 et – 1.Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 1.

La forme exponentielle de l'affixe $z$ d'un point M de (C), distinct de O, est donnée par $z = re^{i\theta}$.

Soit $M'$ le point d'affixe $z'$ telle que $z' = \frac{1}{r}e^{i(\pi+\theta)}$.




1) Montrer que $z' \times \overline{z} = -1$.

2) Montrer que les points O, M et M′ sont alignés.

3) a- Justifier l'égalité $|z-1| = 1$.

b- Démontrer que $|z' + 1| = |z'|$ et en déduire que $M'$ décrit une droite (d) que l'on déterminera.

4) Déterminer les points M de (C) pour lesquels $z' = -z$.

IV– (**8 points**)

**A-** Soit l'équation différentielle (E): $y'' - 4y' + 4y = 4x^2 - 16x + 10$.

On pose $z = y - x^2 + 2x$.

1) Ecrire une équation différentielle (E') satisfaite par z.
2) Résoudre (E') et déduire la solution générale de (E).
3) Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative dans un repère orthonormé admet au point A(0 ;1) une tangente parallèle à l'axe des abscisses .

**B-** Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = e^{2x} + x^2 - 2x$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b- Donner sous forme décimale f(1) et f(–1,5).

2) Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction f ' dérivée de f.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-\infty$ ↗ | $0$ | ↗ $+\infty$ |

a- Déterminer, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$ .

b- Dresser le tableau de variations de f.

3) Tracer la courbe (C).

4) Soit F la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ .

a- Déterminer le sens de variations de F.

b- Quel est le signe de F(x) ? justifier la réponse.

# MATHEMATIQUES SV    PREMIERE SESSION 2006

| I | Eléments des réponses | Notes |
|---|---|---|
| 1 | $\overrightarrow{BA}(2\ ;-1\ ;-1)$ , $\overrightarrow{BC}(0\ ;-1\ ;\ 1)$ ; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ donc ABC est rectangle en B | ½ |
| 2.a | $x_A+y_A+z_A-4=3+1+0-4=0$ ; $A\in(P)$.<br>$x_B+y_B+z_B-4=1+2+1-4=0$ ; $B\in(P)$.<br>$x_C+y_C+z_C-4=1+1+2-4=0$ ; $C\in(P)$. | ½ |
| 2.b | $\overrightarrow{N}_P(1;1;1)$ est un vecteur directeur de (d) donc (d) : $x=\lambda+3$ ; $y=\lambda+1$ ; $z=\lambda$.<br>Pour y = 0 on a $\lambda=-1$, donc x = 2 et z = – 1 d'où $E\in(P)$. | 1 |
| 3 | $\overrightarrow{BE}(1\ ;-2\ ;-2)$ est normal à (Q) donc (Q) : x – 2y – 2z + r = 0 .<br>$A\in(Q)$ donc r = – 1 ; (Q) : x – 2y – 2z – 1 = 0. | ½ |
| 4.a | $(D)\begin{cases}x+y+z-4=0\\x-2y-2z-1=0\end{cases}$ ; $(D)\begin{cases}x=3\\y=-t+1\\z=t\end{cases}$ donc $\overrightarrow{V}_D(0\ ;-1\ ;\ 1)=\overrightarrow{BC}$ ; (BC) // (D).<br>▶**OU :**(BC) est perpendiculaire à (AB) et orthogonale à (EA) donc la droite (BC) est perpendiculaire au plan (EAB) et en particulier à (EB) , or (EB) est perpendiculaire à (Q) donc (BC) est parallèle à (Q) , le plan (P) contenant (BC) coupe (Q) suivant (D) parallèle à (BC). | 1 |
| 4.b | $(BC):\begin{cases}x=1\\y=-m+2\\z=m+1\end{cases}$ ; M(1 ; – m + 2 ; m +1) ; $d(M;(Q))=\dfrac{\lvert 1+2m-4-2m-2-1\rvert}{\sqrt{1+4+4}}=2$.<br>▶**OU :** (BC) // (D) et $(D)\subset(Q)$ alors (BC) // (Q) et $M\in(BC)$ donc $d(M;(Q))=cte$. | ½ |

| II | Eléments des réponses | Notes |
|---|---|---|
| 1 | $P(A)=P[(10\,000\ ,\ 10\,000)\text{ ou }(20\,000\ ,\ 20\,000)]=\dfrac{C_4^2+C_3^2}{C_8^2}=\dfrac{9}{28}$.<br>$P(B)=P(10\,000\ ,\ 20\,000)=\dfrac{C_4^1\times C_3^1}{C_8^2}=\dfrac{3}{7}$. | 1 |
| 2 | $P(F\cap E)=P(E)\times P(F/E)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{7}=\dfrac{3}{14}$.<br>$P(F\cap\overline{E})=P(E)\times P(F/\overline{E})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{C_3^1\times C_5^1}{C_8^2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{15}{28}=\dfrac{15}{56}$.<br>$P(F)=P(F\cap E)+P(F\cap\overline{E})=\dfrac{3}{14}+\dfrac{15}{56}=\dfrac{27}{56}$. | 1½ |
| 3.a | P(X = 60 000) = P(50 000 , 10 000) = 1/8 × 3/8 = 3/64. | ½ |
| 3.b | (tableau ci-dessous)<br>$E(X)=(24+87+60+18+35)\times\dfrac{10000}{64}=35\,000$. | 1½ |

| $X=x_i$ | 20 000 | 30 000 | 40 000 | 60 000 | 70 000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{4}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{12}{64}$ | $\frac{4}{8}\times\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{29}{64}$ | $\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{15}{64}$ | $\frac{3}{64}$ | $\frac{1}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{64}$ |

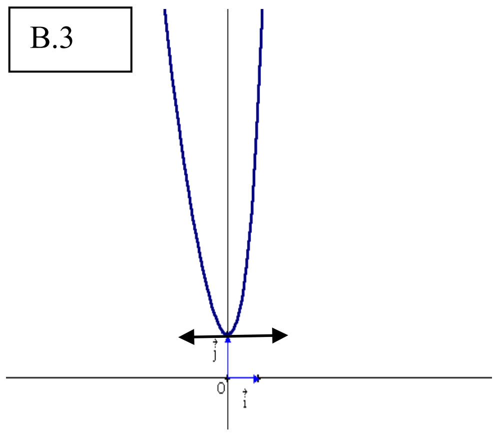
| III | Eléments des réponses | Notes |
|---|---|---|
| 1 | $z'\times\bar{z} = \frac{1}{r}e^{i(\pi+\theta)}\times re^{-i\theta} = e^{i\pi} = -1$. | ½ |
| 2 | $(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM}) = \theta$ , $(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM'}) = \pi+\theta$ , donc $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) = (\pi+\theta)-\theta = \pi$ d'où O , M et M'sont alignés.<br>▶**OU :** $\frac{z'}{z} = -\frac{1}{r^2}$ **;** $z' = -\frac{1}{r^2}z$ donc $\overrightarrow{OM'} = -\frac{1}{r^2}\overrightarrow{OM}$ et O , M et M'sont alignés. | ½ |
| 3.a | $\lvert z-1\rvert = \lvert z_M - z_A\rvert = AM = 1$ | ½ |
| 3.b | $\lvert z'+1\rvert = \left\lvert\frac{-1}{\bar{z}}+1\right\rvert = \left\lvert\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}}\right\rvert = \frac{\lvert\overline{z-1}\rvert}{\lvert\bar{z}\rvert} = \frac{\lvert z-1\rvert}{\lvert\bar{z}\rvert} = \frac{1}{\lvert\bar{z}\rvert}$ ; $\lvert z'\rvert = \frac{\lvert -1\rvert}{\lvert\bar{z}\rvert} = \frac{1}{\lvert\bar{z}\rvert}$ d'où $\lvert z'+1\rvert = \lvert z'\rvert$.<br>$\lvert z_{M'} - z_B\rvert = \lvert z_{M'}\rvert$ ; BM' = OM' ; M' décrit la médiatrice (d) de [OB]. | 1 |
| 4 | $z' = -z$ ; $-z\times\bar{z} = -1$ ; $z\times\bar{z} = 1$ ; $\lvert z\rvert^2 = 1$ ; $OM^2 = 1$ ; OM = 1 donc M appartient au cercle (C') de centre O , de rayon 1 , avec M appartient à (C) .Donc les points M sont les deux points d'intersection de (C) et (C').<br>▶**OU :** $\lvert -z+1\rvert = \lvert -z\rvert$ ; $\lvert z-1\rvert = \lvert z\rvert$ ; AM = OM ; M décrit la médiatrice (D) de [OA]. Ainsi les points M sont les deux points d'intersection de (D) et de (C). | 1 |

| IV | Eléments des réponses | Notes |
|---|---|---|
| A.1 | $z' = y' - 2x + 2$ et $z'' = y'' - 2$<br>$z'' + 2 - 4(z' + 2x - 2) + 4(z + x^2 - 2x) = 4x^2 - 16x + 10$<br>$z'' - 4z' + 4z = 0$ | ½ |
| A.2 | $r^2 - 4r + 4 = 0$ ; r = 2 racine double ; $z = (Ax + B)e^{2x}$ et $y = (Ax + B)e^{2x} + x^2 - 2x$ | 1 |
| A.3 | $y(0) = 1$ ; $B = 1$<br>$y'(0) = 1$ avec $y'(x) = Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x} + 2x - 2$ ; $A + 2B = 2$ ; $A = 0$ .<br>Donc $y = e^{2x} + x^2 - 2x$. | 1 |
| B.1.a | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [e^{2x} + x(x-2)] = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [e^{2x} + x(x-2)] = +\infty$ | ½ |
| B.1.b | $f(1) = 6{,}39$ et $f(-1{,}5) = 5{,}30$ . | ½ |
| B.2.a | $f'(x) < 0$ pour $x < 0$ ; $f'(x) > 0$ pour $x > 0$. | 1 |

**B.2.b** — ½

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | | − | 0 | + | |
| f(x) | $+\infty$ | ↘ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

**B.3** — 1




| IV | Eléments des réponses | Notes |
|---|---|---|
| B.4.a | $F'(x) = f(x) > 0$ pour $x \geq 0$(min (f(x)) =1) donc F est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ . | 1 |
| B.4.b | $f(t) > 0$ et $x \geq 0$ donc $\int_0^x f(t)dt \geq 0$ c.à.d. $F(x) \geq 0$.<br>▶**OU :** F est croissante et $F(0) = 0$ , donc $F(x) \geq 0$. | 1 |

عدد المسائل : أربع

مسابقة في مادة الرياضيات
المدة: ساعتان

الاسم:
الرقم:

**ملاحظـة :** يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

## I- (4 points)

Dans Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$,

on donne les points E et F d'affixes $z_E = \frac{\sqrt{3}+1}{4} - \frac{\sqrt{3}-1}{4}i$ et $z_F = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ .

1) a- Calculer $(z_E)^2$ et trouver le module et un argument de $(z_E)^2$.

b- Déterminer le module de $z_E$ et vérifier que $-\frac{\pi}{12}$ est un argument de $z_E$.

c- Déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

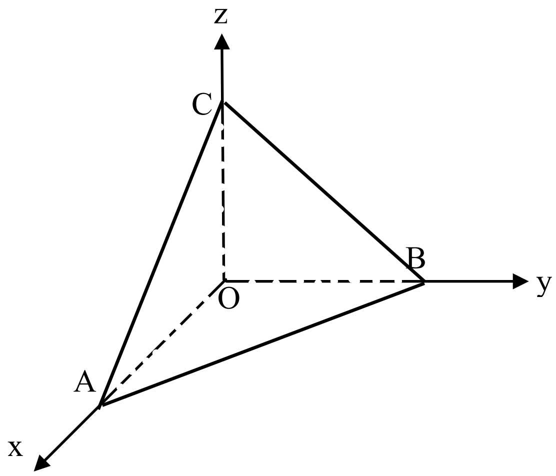
2) Soit $Z = \frac{z_E}{z_F}$ .

a- Ecrire sous forme exponentielle $z_E$, $z_F$ et Z.

b- Montrer que le triangle OEF est équilatéral.

## II- ( 4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$, on donne les points A (4 ; 0 ; 0 ) , B ( 0 ; 4 ; 0 ) et C ( 0 ; 0 ; 4).




1) Ecrire une équation du plan (ABC).

2) Calculer l'aire du triangle ABC.

3) Soit F et G les milieux respectifs de [AC] et [BC].

a- Donner un système d'équations paramétriques de la droite (FG).

b- Le plan d'équation z = 0 et le plan (OFG) se coupent suivant une droite (d). Démontrer que les droites (d) et (FG) sont parallèles.

c- Calculer la distance entre les deux droites (d) et (AB).

**III- ( 4 points)**

les 80 élèves des classes terminales d'une école sont répartis dans trois sections SG , SV et ES selon le tableau suivant :

| | SG | SV | ES |
|---|---|---|---|
| Filles | 8 | 18 | 10 |
| Garçons | 12 | 14 | 18 |

La direction de l'école choisit au hasard un groupe formé de 3 élèves de ces classes pour participer à une émission télévisée.

1) Quel est le nombre de groupes possibles ?
2) On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de garçons dans le groupe choisi. Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Montrer que la probabilité de choisir un groupe comprenant une fille de chaque section est $\frac{18}{1027}$.
4) Le groupe choisi est formé de 3 filles, quelle est la probabilité qu'elles soient d'une même section ?

IV- **(8 points)**

Soit f la fonction définie, sur IR, par : $f(x) = x + 2 - e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et démontrer que la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à (C).
   b- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et donner, sous forme décimale, les valeurs de $f(-1,5)$ et $f(-2)$.
2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point A d'abscisse 0.
4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique $\alpha$ et vérifier que $-0,5 < \alpha < -0,4$.
5) Tracer (d) , (T) et (C).
6) On désigne par g la fonction réciproque de f, sur IR.
   a- Tracer la courbe représentative (G) de g dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
   b- On désigne par $A(\alpha)$ l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$ .
   Montrer que $A(\alpha) = (-\frac{\alpha^2}{2} - 3\alpha - 1)$ unités d'aire.
   c- Déduire l'aire du domaine limité par la courbe (G), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ .

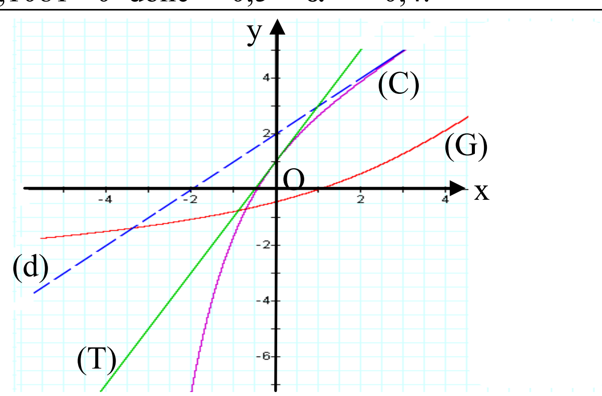
# S. V-MATHS

2ème session 2005

| Q1 | Eléments des réponses | N |
|---|---|---|
| 1.a | $z_E^2 = \frac{1}{16}(3+1+2\sqrt{3}-3-1+2\sqrt{3}-4i) = \frac{1}{16}(4\sqrt{3}-4i) = \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$ <br> $z_E^2 = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i) = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ; $\left\lvert z_E{}^2\right\rvert = \frac{1}{2}$ ; $\arg(z_E{}^2) = -\frac{\pi}{6}$. | 1 |
| 1.b | $\left\lvert z_E{}^2\right\rvert = \frac{1}{2}$ d'où $\lvert z_E\rvert = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $\arg(z_E{}^2) = 2\arg(z_E) = -\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ; $\arg(z_E) = -\frac{\pi}{12}+k\pi$, <br> comme $R_e(z_E) > 0$ et $Im(z_E)<0$ donc $\arg(z_E) = -\frac{\pi}{12}$. | 1 |
| 1.c | $z_E = \frac{1}{\sqrt{2}}[\cos(-\frac{\pi}{12})+i\sin(-\frac{\pi}{12})] = \frac{1}{\sqrt{2}}[\cos(\frac{\pi}{12})-i\sin(\frac{\pi}{12})] = \frac{\sqrt{3}+1}{4}-\frac{\sqrt{3}-1}{4}i$ <br> $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. | ½ |
| 2.a | $z_E = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ , $z_F = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$ , $Z = e^{i(-\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4})} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ | ½ |
| 2.b | $\lvert Z\rvert = 1 = \frac{OE}{OF}$ ; OE = OF <br> $\arg(Z) = \arg(z_E) - \arg(z_F) = (\vec{u},\vec{OE}) - (\vec{u},\vec{OF})\ [2\pi] = (\vec{OF},\vec{OE})\ [2\pi] = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$. <br> Le triangle OEF est équilatéral. • OU : $EF = \lvert z_F - z_E\rvert = \frac{1}{\sqrt{2}} = OE = OF$ | 1 |

| Q2 | Eléments des réponses | N |
|---|---|---|
| 1 | $\vec{AM}.(\vec{AB}\wedge\vec{AC}) = 0$ ; $\begin{vmatrix} x-4 & y & z \\ -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$ ; $x+y+z-4=0$ | 1 |
| 2 | $\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2}\lVert\vec{AB}\wedge\vec{AC}\rVert = 2\sqrt{3}\ u^2$ | ½ |
| 3.a | F(2 ;0 ;2) et G(0 ; 2 ; 0) (FG) : $x = -2t$ , $y = 2t+2$ , $z = 2$. | ½ |
| 3.b | Le plan z = 0 est le plan (AOB) , (FG) // (AB) donc (FG) // (OAB), comme (d) est la droite d'intersection de (OFG) et (OAB) , alors (FG) //(d). <br> • OU :l'équation de (OFG) est : $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ ; $x+y-z=0$ . (d) $\begin{cases} x = m \\ y = -m \\ z = 0 \end{cases}$ <br> $\vec{V_d}(1;-1;0)$, $\vec{FG}(-2;2;0)$ donc $\vec{FG} = -2\vec{V_d}$ et les droites (d) et (FG) sont distinctes alors elles sont parallèles. | 1 |
| 3.c | La distance entre (d) et (AB) est la distance de O à (AB) car (d) passe par O et (d) //(AB), d'où $d = \frac{\lVert\vec{OA}\wedge\vec{OB}\rVert}{\lVert\vec{AB}\rVert} = 2\sqrt{2}u$. | 1 |

<table>
<tr><th>Q3</th><th>Eléments des réponses</th><th>N</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Nombre de cas possibles : $C_{80}^{3} = 82\,160$.</td><td>½</td></tr>
<tr><td>2</td><td><table>
<tr><td>$x_i$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$p_i$</td><td>$\dfrac{C_{36}^{3}}{C_{80}^{3}} = \dfrac{7140}{82160}$</td><td>$\dfrac{C_{36}^{2} \times C_{44}^{1}}{C_{80}^{3}} = \dfrac{27720}{82160}$</td><td>$\dfrac{C_{36}^{1} \times C_{44}^{2}}{C_{80}^{3}} = \dfrac{34056}{82160}$</td><td>$\dfrac{C_{44}^{3}}{C_{80}^{3}} = \dfrac{13244}{82160}$</td></tr>
</table></td><td>1½</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\dfrac{C_{8}^{1} \times C_{18}^{1} \times C_{10}^{1}}{C_{80}^{3}} = \dfrac{18}{1027}$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>p(les filles sont de même section / 3 filles) = $\dfrac{C_{8}^{3} + C_{18}^{3} + C_{10}^{3}}{C_{36}^{3}} = \dfrac{243}{1785} = 0{,}136$.</td><td>1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Q4</th><th>Eléments des réponses</th><th>N</th></tr>
<tr><td>1.a</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim\limits_{x\to+\infty} (-e^{-x}) = 0$ donc la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (C) .</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1.b</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$ ; $f(-1{,}5) = -3{,}981$ ; $f(-2) = -7{,}389$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$f'(x) = 1 + e^{-x}$<br>$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & +\infty \end{array}$$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>(T) : $y = f'(0)x + f(0)$ ; $y = 2x + 1$.</td><td>½</td></tr>
<tr><td>4</td><td>f est continue,strictement croissante sur IR et passe de $-\infty$ à $+\infty$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$.<br>$f(-0{,}5) \times f(-0{,}4) = -0{,}148 \times 0{,}1081 < 0$ donc $-0{,}5 < \alpha < -0{,}4$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>
</td><td>1½</td></tr>
<tr><td>6.a</td><td>Voir figure.</td><td>½</td></tr>
<tr><td>6.b</td><td>$$A(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{0} (x + 2 - e^{-x})\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x + e^{-x}\right]_{\alpha}^{0} = 1 - \frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha - e^{-\alpha}$$<br>Or $f(\alpha) = 0$ c.à.d. $\alpha + 2 - e^{-\alpha} = 0$ donc $e^{-\alpha} = \alpha + 2$ d'où $A(\alpha) = (-1 - 3\alpha - \dfrac{\alpha^2}{2})\,.\,u^2$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6.c</td><td>Le domaine limité par (G) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations x = 0 et x = 1 , est symétrique du domaine précédent par rapport à la droite d'équation y = x , donc l'aire demandée est aussi égale à $A(\alpha)$.</td><td>½</td></tr>
</table>

| وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات | امتحانات شهادة الثانوية العامة<br>فرع علوم الحياة | دورة سنة 2005 العادية |
|---|---|---|

| عدد المسائل : أربع | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة: ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |
|---|---|---|

ملاحظة: يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه ( دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

**I - (3 points)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on donne les points E , M et M' d'affixes respectives $i$ , $z$ et $z'$ , avec $z' = iz + 1 + i$ .

1) Donner la forme algébrique de $z'$ si $z = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ .
2) Déterminer le module et l'argument de $z$ si $z' = 1 + \sqrt{3} + 2i$ .
3) Pour quelle valeur de z , les points M et M' sont-ils confondus ?
4) a- Démontrer que $z' - i = i(z - i)$.
   b- En déduire que, lorsque M décrit le cercle (C) de centre E et de rayon 3, le point M' décrit le même cercle .

**II - ( 4 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$, on considère :

- Le plan (P) d'équation $2x + y - 3z - 1 = 0$ ;
- Le plan (Q) d'équation $x + 4y + 2z + 1 = 0$ ;
- La droite (d) définie par : $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 1 \\ z = t \end{cases}$ ( t est un paramètre réel).

1) Démontrer que la droite (d) est incluse dans le plan (P) .
2) Ecrire une équation du plan (S) déterminé par le point O et la droite (d).
3) Soit le point $E\left(0\,;-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$, montrer que E est le projeté orthogonal du point O sur la droite (d).
4) a- Montrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
   b- Soit (D) la droite d'intersection de (P) et (Q), calculer la distance de E à (D).

**III - (5 points)**

Un magasin vend seulement des vestes, des manteaux et des chemises.
Durant une semaine **120** clients se présentent dans ce magasin.
**90** de ces clients achètent chacun une veste et les **30** autres clients achètent chacun un manteau.
**40%** de ceux qui ont acheté une veste achètent chacun aussi une chemise et **20%** de ceux qui ont acheté un manteau achètent chacun aussi un manteau.

On interroge au hasard un client de ces **120** clients.

1) Soit les événements suivants :

V : « le client interrogé a acheté une veste ».

M : « le client interrogé a acheté un manteau ».

C : « le client interrogé a acheté une chemise ».

a- Vérifier que la probabilité de l'événement $C \cap V$ est égale à $\frac{3}{10}$ .

b- Calculer les probabilités suivantes : $P(C \cap M)$ , $P(C)$ , $P(M/C)$ et $P(M/\overline{C})$ .

2) Les prix des vêtements dans ce magasin sont donnés dans le tableau suivant :

| Genre | Veste | Manteau | Chemise |
|---|---|---|---|
| Prix en LL | 150 000 | 200 000 | 60 000 |

On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme payée par un client.

a- Donner les quatre valeurs possibles de X.

b- Déterminer la loi de probabilité de X .

c- Calculer l'espérance mathématique de E(X) .

d- Estimer le montant de vente de ce magasin durant cette semaine .

IV- **( 8 points)**

Soit f la fonction , définie sur $I = ]\,1\,;+\infty\,[$, par $f(x) = x + 1 - \frac{3e^x}{e^x - e}$ et l'on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.

1) a- Démontrer que la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à (C) .

b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et démontrer que la droite (d) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à (C).

c- Déterminer la position relative de (C) et (d) .

2) Montrer que , pour tout x de I, $f'(x) > 0$ et dresser le tableau de variations de f.

3) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique α et vérifier que $2.6 < \alpha < 2.7$ .

4) Tracer la courbe (C) .

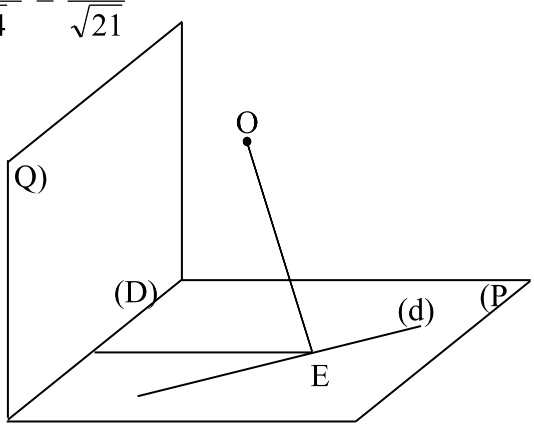
5) On désigne par (D) le domaine limité par (C) , la droite (d) et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 4$.

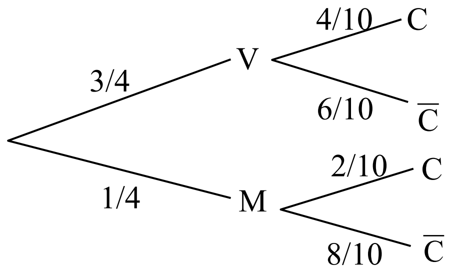
Calculer $\int_3^4 \frac{e^x}{e^x - e}\,dx$ et déduire l'aire du domaine (D).

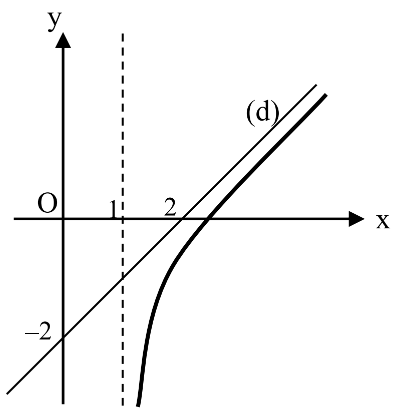
6) a- Démontrer que f admet sur I une fonction réciproque g.

b- Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ n'admet pas de racines .

| S.V | | MATH | 1ère session 2005 |
|---|---|---|---|
| Question | | Eléments de réponses | N |
| I | 1 | $z' = i(\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}) + 1 + i = i(1 + i) + (1 + i) = 2i$ . | ½ |
| | 2 | $1+\sqrt{3} + 2i = iz + 1 + i$ ; $iz = \sqrt{3} + i$ ; $z = 1 - i\sqrt{3}$ ;<br>$\lvert z\rvert = 2$ et $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}$ | ½ |
| | 3 | $z' = z$ pour $z = iz + 1 + i$ ; $z(1 - i) = 1 + i$ ; $z = \frac{1+i}{1-i}$ ; $z = i$ . | ½ |
| | 4a | $z' - i = iz + 1 = i(z - i)$ | ½ |
| | 4b | $\lvert z' - i\rvert = \lvert i\rvert\ \lvert z - i\rvert = \lvert z - i\rvert$ ; EM' = EM.<br>M décrit le cercle (C) , EM = 3 , donc EM' = 3 et M' décrit le même cercle. | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| II | 1 | Tout point $M(2t + 1; - t - 1 ; t)$ de (d) est un point de (P) car<br>$2(2t + 1) - t - 1 - 3t - 1 = 0$ ; donc (d) est incluse dans (P). | ½ |
| | 2 | $I(1 , - 1 , 0)$ est un point de (d), l'équation de (S) est donnée par :<br>$\vec{OM}.(\vec{OI} \wedge \vec{V_d}) = 0$ ; $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ; $x + y - z = 0$ . | 1 |
| | 3 | E est un point de (d) ( pour $t = -$ ½ ).<br>$\vec{OE}.\vec{V_d} = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ .<br>►OU : On cherche les coordonnées du projeté orthogonal de O sur (d). | 1 |
| | 4a | $\vec{n}_P(2 ; 1; -3)$ et $\vec{n}_Q(1 ; 4; 2)$ ;<br>$\vec{n}_P . \vec{n}_Q = 0$ ; (P) et (Q) sont perpendiculaires. | ½ |
| | 4b | (P) et (Q) sont perpendiculaires, E est un point de (P) ;<br>$d(E /(D)) = d(E/(Q)) = \frac{\lvert 0-2-1+1\rvert}{\sqrt{1+16+4}} = \frac{2}{\sqrt{21}}$<br>►OU : On trouve un système d'équations paramétriques de (D)et on calcule la distance de E à (D).<br><br> | 1 |

<table>
<tr><th colspan="2">Question</th><th>Eléments de réponses</th><th>N</th></tr>
<tr><td rowspan="8">III</td><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>1a</td><td>$P(C\cap V) = P(V) \times P(C/V) = \frac{3}{4}\times\frac{4}{10} = \frac{3}{10}$.</td><td>½</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>$P(C\cap M) = P(M) \times P(C/M) = \frac{1}{4}\times\frac{2}{10} = \frac{1}{20}$.<br>$P(C) = P(C\cap V) + P(C\cap M) = \frac{6}{20} + \frac{1}{20} = \frac{7}{20}$.<br>$P(M/C) = \frac{P(M\cap C)}{P(C)} = \frac{1/20}{7/20} = \frac{1}{7}$.<br>$P(M/\overline{C}) = \frac{P(M\cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(M)\times P(\overline{C}/M)}{1-P(C)} = \frac{(1/4)(8/10)}{1-(7/20)} = \frac{4}{13}$.</td><td>1½</td></tr>
<tr><td>2a</td><td>Un client a un seul choix parmi les quatre suivants :<br>Il achète : une veste seulement, un manteau seulement, une veste et une chemise, ou un manteau et une chemise.<br>$X(\Omega) = \{ 150\,000 , 200\,000 , 210\,000 , 260\,000\}$</td><td>½</td></tr>
<tr><td>2b</td><td><table><tr><td>$X = x_i$</td><td>150 000</td><td>200 000</td><td>210 000</td><td>260 000</td></tr><tr><td>$P_i$</td><td>$\frac{3}{4}\times\frac{6}{10}=\frac{18}{40}$</td><td>$\frac{1}{4}\times\frac{8}{10}=\frac{8}{40}$</td><td>$\frac{3}{4}\times\frac{4}{10}=\frac{12}{40}$</td><td>$\frac{1}{4}\times\frac{2}{10}=\frac{2}{40}$</td></tr></table></td><td>1 ½</td></tr>
<tr><td>2c</td><td>$E(X) = \frac{10000}{40}(15 \times 18 + 20 \times 8 + 21 \times 12 + 26 \times 2) = 183\,500$</td><td>½</td></tr>
<tr><td>2d</td><td>Le montant de vente durant cette semaine est égal au produit du moyen de la somme payée par un client par le nombre des clients ;<br>$183\,500 \times 120 = 22\,020\,000$ LL.</td><td>½</td></tr>
</table>

| Question | | Eléments de réponses | N |
|---|---|---|---|
| IV | 1a | $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} e^x = e$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(e^x - e) = 0^+$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -\infty$<br>La droite d'équation x = 1 est une asymptote à (C) . | ½ |
| | 1b | $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3e^x}{e^x - e} = 3$ par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ;<br>$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x-2)] = \lim\limits_{x\to+\infty}[3 - \frac{3e^x}{e^x - e}] = 0$<br>La droite (d) d'équation y = x – 2 est asymptote à (C). | 1 |
| | 1c | $f(x) - (x-2) = 3 - \frac{3e^x}{e^x - e} = \frac{-3e}{e^x - e}$<br>x > 1 , $e^x > e$ , donc f(x) – (x – 2) < 0 et (C) est au-dessous de (d). | ½ |
| | 2 | $f'(x) = 1 - 3\frac{e^x(e^x - e) - e^x(e^x)}{(e^x - e)^2} = 1 + 3\frac{e^{x+1}}{(e^x - e)^2} > 0$<br>$\begin{array}{c\|c\|ccc} x & 1 & & & +\infty \\ \hline f'(x) & \| & & + & \\ \hline f(x) & \| & -\infty & \nearrow & +\infty \end{array}$ | 1 |
| | 3 | Sur I, f est continue et change de signe, donc l'équation f(x) = 0 admet au moins une racine α, comme f est strictement croissante sur I ,alors α est unique.<br>f(2,6) = – 0,158 et f(2,7) = 0,0294 , donc 2,6 < α < 2,7. | 1 |
| | 4 |  | 1 |
| | 5 | • $\int_3^4 \frac{e^x}{e^x - e}dx = [\ln(e^x - e)]_3^4 = \ln(e^4 - e) - \ln(e^3 - e) = \ln\frac{e^3 - 1}{e^2 - 1}$ .<br>• $\mathscr{A} = \int_3^4 (x - 2 - f(x))dx = \int_3^4 (-3 + 3\frac{e^x}{e^x - e})dx = [-3x]_3^4 + 3\ln\frac{e^3 - 1}{e^2 - 1}$<br>$= [-3 + 3\ln\frac{e^3 - 1}{e^2 - 1}]\ u^2 \approx 0{,}28\ u^2$ | 1 ½ |
| | 6a | Sur I, f est continue et strictement croissante, elle admet une fonction réciproque g. | ½ |
| | 6b | L'équation f(x) = g(x) est équivalente à f(x) = x donc $1 - \frac{3e^x}{e^x - e} = 0$ soit<br>$2\,e^x = -e$ ce qui est impossible.<br>►OU : graphiquement , la courbe (C) ne coupe pas la droite d'équation y = x. | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>فرع علوم الحياة | دورة سنة ٢٠٠٤ الاستثنائية |
| عدد المسائل:اربع | مسابقة في الرياضيات<br>المدة : ساعتان | الاسم :<br>الرقم : |

**ملاحظـــة:** يُسمح بإستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو إختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

**I- (3,5 points).**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A , B et M d'affixes respectives -1 , 4 et z , et soit M' le point d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z-4}{z+1}$ $(z \neq -1)$.

1) Dans le cas où $z = 1+i$ , écrire z' sous forme algébrique et donner sa forme exponentielle .

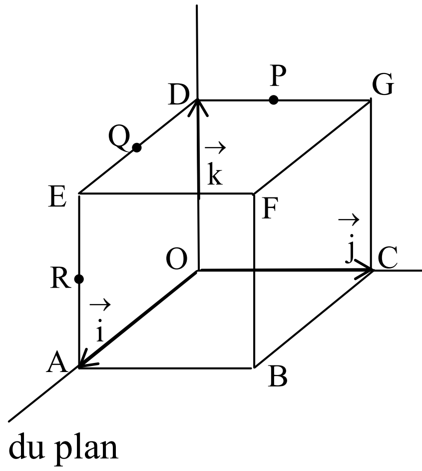
2) Déterminer les valeurs de z lorsque $z' = z$ .

3) a- Donner une interprétation géométrique de $|z+1|$ et de $|z-4|$.

b- Sur quelle ligne se déplace le point M lorsque $|z'| = 1$ ?

**II- (3,5 points).**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,on donne le cube OABCDEFG tel que : A( 1 ; 0 ; 0 ) , B( 1 ; 1 ; 0 ) et F ( 1 ; 1 ; 1 ) .
On désigne par P, Q et R les milieux respectifs des segments [DG] , [DE] et [AE] .




1) a- Montrer que $2x + 2y + 2z - 3 = 0$ est une équation du plan (PQR).

b- Démontrer que le plan (PQR) passe par le milieu de [AB] .

c- Démontrer que les plans (PQR) et (BEG) sont parallèles .

2) a- Quelle est la nature du quadrilatère EGCA ?

b- Soit M un point variable de la droite (AC) .

Montrer que $\vec{AM} \wedge \vec{EF} = \vec{AM} \wedge \vec{GF}$.

**III-( 4 points).**

Un test à choix multiple est constitué de **trois** questions indépendantes ; le
candidat doit répondre à toutes les questions.
Pour chacune des questions deux réponses sont proposées dont une seule est juste.

**Un candidat répond au hasard à chacune de ces trois questions .**

1) a- Montrer que la probabilité qu'il donne des réponses justes aux trois questions est
égale à $\frac{1}{8}$ .

b- Soit l'événement E : « parmi les trois réponses du candidat il y a exactement deux
réponses justes » .
Calculer la probabilité de E.

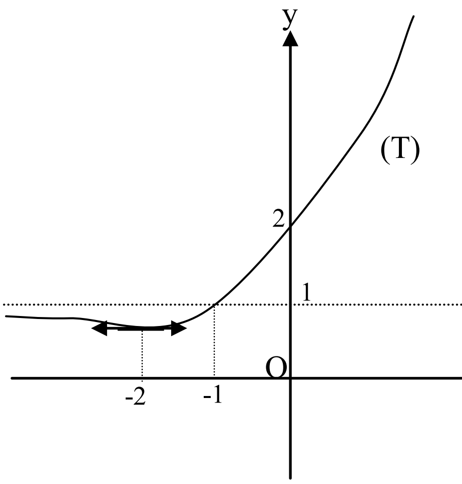
2) Le barème attribue **+5** points à chaque réponse juste et **-3** points à chaque réponse non
juste .
On désigne par X la variable aléatoire égale à la note globale obtenue par le candidat sur ce test.
a- Déterminer les 4 valeurs possibles de X .
b- Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique E (X).

**IV-( 9 points).**

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = x + 1$.

1) On pose $y = z + x + 3$ .
a- Ecrire une équation différentielle (E') satisfaite par z et résoudre (E') .
b- Déduire la solution générale de (E).

2) Soit f une solution particulière de (E) .
La courbe (T) ci-contre est
la courbe représentative de
la fonction f ' **dérivée** de f .
Montrer que $f(x) = xe^x + x + 3$ .




***On désigne par*** (C) ***la courbe représentative***

***de la fonction*** f ***dans un repère orthonormé*** $(O;\vec{i},\vec{j})$ ; ***unité 2cm*** .

3) a- Calculer f(1) et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ .

b- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et démontrer que la droite (d) d'équation y = x + 3 est une asymptote à (C) .

c- Déterminer , suivant les valeurs de x, les positions relatives de (C) et (d).

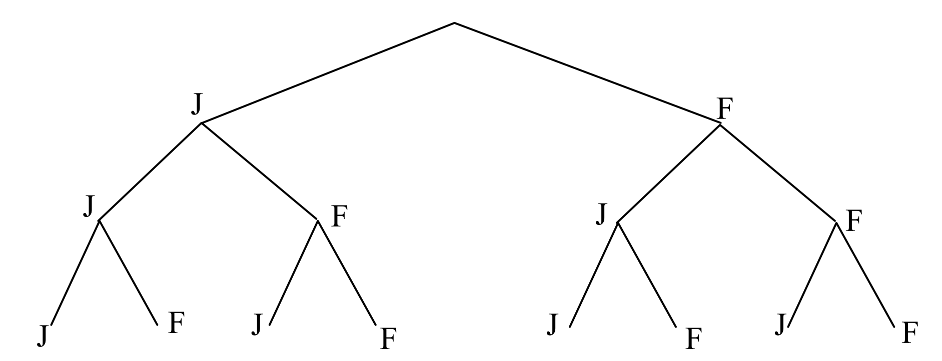
d -Vérifier que I ( -2 ; $1 - \frac{2}{e^2}$ ) est un point d'inflexion de la courbe (C) .

4) a- Vérifier que f est strictement croissante sur IR et dresser son tableau de variations.

b-Tracer (d) et (C).

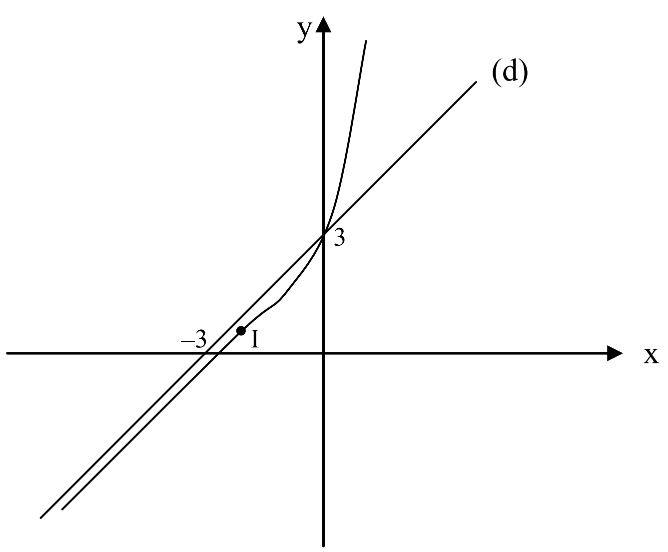
c- Calculer ,en $cm^2$, l'aire du domaine limité par la courbe (C), la droite (d) et les droites d'équations x = 0 et x = 1 .

# Réponses

| Sciences de la vie | | **MATH** | $2^{ème}$ Session 2004 |
|---|---|---|---|
| Questions | | Eléments de réponses | N |
| I | 1 | $z' = \dfrac{1+i-4}{1+i+1} = \dfrac{-3+i}{2+i} = -1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ | 1 ½ |
| | 2 | $z' = z$ ; $z = \dfrac{z-4}{z+1}$ ; $z^2 = -4$ ; $z = -2i$ ou $z = 2i$. | ½ |
| | 3-a- | $\lvert z+1\rvert = \lvert z_M - z_A\rvert = MA$ ; $\lvert z-4\rvert = \lvert z_M - z_B\rvert = MB$ | ½ |
| | 3-b- | $\lvert z'\rvert = \dfrac{MB}{MA}$ ; comme $\lvert z'\rvert = 1$ alors MB = MA.<br>M se déplace sur la médiatrice de [AB]. | 1 |
| II | 1-a- | P(0 ; ½ ; 1) , Q( ½ ; 0 ; 1) , R(1 ; 0 ; ½)<br>Les coordonnées de P , Q et R vérifient l'équation $2x + 2y + 2z - 3 = 0$<br>▶ ou : M(x ; y ; z) est un point du plan (PQR) ssi $\vec{PM}.(\vec{PQ}\wedge\vec{PR}) = 0$. | ½ |
| | 1-b- | I(1 ; ½ ;0) : milieu de [AB], les coordonnées de I vérifient l'équation du plan (PQR). | ½ |
| | 1-c- | (PQ) est parallèle à (EG) ;<br>(QR) est parallèle à (DA) qui est parallèle à (BG)<br>(PQR) contient deux droites concourantes parallèles à deux droites concourantes du plan (EBG) ; donc (PQR) et (EBG) sont parallèles.<br>▶ ou :$x + y + z - 2 = 0$ est une équation du plan (BEG) .<br>Les deux plans distincts (PQR) et (BEG) sont parallèles ayant deux vecteurs normaux colinéaires. | 1 |
| | 2-a- | $\vec{EA} = \vec{GC}$<br>(EA) est perpendiculaire au plan (OABC) , donc (EA)$\perp$(AC)<br>EAGC est un rectangle. | ½ |
| | 2-b- | $\vec{AM}\wedge\vec{EF} = \vec{AM}\wedge(\vec{EG}+\vec{GF}) = \vec{AM}\wedge\vec{EG}+\vec{AM}\wedge\vec{GF}$<br>$\vec{AM}$ et $\vec{EG}$ sont colinéaires, $\vec{AM}\wedge\vec{EG} = \vec{0}$ ,par suite $\vec{AM}\wedge\vec{EF} = \vec{AM}\wedge\vec{GF}$<br>▶ou<br>(AC) : $x = -\alpha + 1$ ; $y = \alpha$ , $z = 0$<br>$\vec{AM}(-\alpha ; \alpha ; 0)$ , $\vec{EF}(0 ;-1 ;0)$ , $\vec{GF}(1 ;0 ;0)$ ; $\vec{AM}\wedge\vec{EF} = \vec{AM}\wedge\vec{GF} = \alpha\ \vec{k}$ | 1 |
| III | |  | |
| | 1-a- | P(JJJ) = ½ × ½ ×½ = 1/8 | 1 |
| | 1-b- | P(E) = P(JJF) + p(JFJ) + p(FJJ) = 1/8 +1/8 + 1/8 = 3/8 | 1 |
| | 2-a- | Les quatre valeurs possibles de X sont – 9 ; – 1 ; 7 ; 15 . | ½ |
| | 2-b- | voir tableau ci-dessous | 1 ½ |

| $x = x_i$ | –9 | – 1 | 7 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| $P_i$ | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | E(X) = – 9/8 – 3/8 + 21/8 + 15/8 = 3 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1-a- | $y''-2y'+y = x+1$ avec $y' = z'+1$ et $y'' = z''$ donc $z''-2z'+z = 0$.<br>Equation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$ et $r_1 = r_2 = 1$ ; $z = (c_1x + c_2)e^x$. | 1 ½ |
| | 1-b- | La solution générale de (E) est $y = (c_1x + c_2)e^x + x + 3$. | ½ |
| | 2 | D'après le graphique $f'(-1) = 1$ et $f'(0) = 2$<br>$f'(x) = c_1e^x + (c_1x + c_2)e^x + 1$<br>$f'(-1) = 1$ donne $\frac{c_2}{e} + 1 = 1$ soit $c_2 = 0$ ,<br>$f'(0) = 2$ donne $c_1 + c_2 + 1 = 2$ soit $c_1 = 1$,<br>$f(x) = xe^x + x + 3$. | 1 |
| | 3-a- | $f(1) = e + 4 \approx 6,738$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. | ½ |
| | 3-b- | $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x + \lim\limits_{x\to-\infty} (x+3) = 0 - \infty = -\infty$.<br>$\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+3)] = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ , donc la droite (d) d'équation<br>y = x + 3 est une asymptote à (C) . | 1 |
| | 3-c- | $f(x) - (x+3) = xe^x$<br>pour x = 0 , (C) rencontre (d) au point (0 ; 3 )<br>pour x > 0 , (C) est au-dessus de (d)<br>pour x < 0 , (C) est au-dessous de (d) . | 1 |
| IV | 3-d- | D'après le graphique $f''(-2) = 0$,<br>sur ]– ∞ ;–2[ : f ' est décroissante donc f '' (x) < 0<br>sur ]–2 ; +∞[ : f ' est croissante donc f '' (x) > 0<br>Donc le point I(–2 ;f(–2)= $1 - \frac{2}{e^2}$ ) est un point d'inflexion de (C). | ½ |
| | 4-a- | (T) est au-dessus de l'axe des abscisses, donc f '(x) > 0 pour tout réel x et par suite f est strictement croissante sur R<br>$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & +\infty \end{array}$ | ½ |
| | 4-b- |  | 1 ½ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 4-c- | $A = \int_0^1 xe^{x}dx = (x-1)e^{x}\Big\|_0^1 = 1\ u^2$ donc $A = 4\ cm^2$ . | 1 |

وزارة التربية والتعليم العالي
المديرية العامة للتربية
دائرة الامتحانات

امتحانات شهادة الثانوية العامة
فرع علوم الحياة

دورة سنة ٢٠٠٤ العادية

عدد المسائل :أربع

مسابقة في الرياضيات
المدة : ساعتان

الاسم :
الرقم :

**ملاحظة :** يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

## I - ( 3 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A et B tels que : $z_A = 1$ et $z_B = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 1.

1) a- Ecrire $z_B - z_A$ sous forme exponentielle .

b-Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u}\ ;\overrightarrow{AB})$ .

c- Montrer que le point B appartient au cercle (C).

2) A tout point M d'affixe z, non nul, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{\bar{z} + 2}{\bar{z}}$.

a- Démontrer que $\bar{z}\,(z' - 1) = 2$.

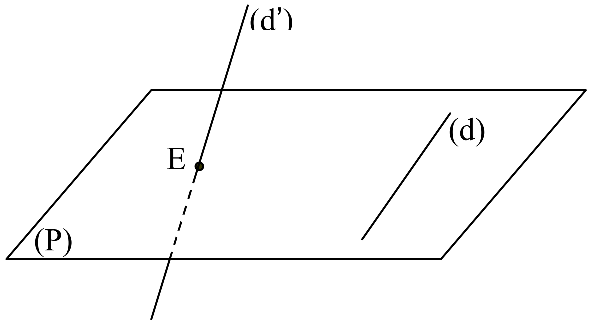
b-En déduire que, lorsque M' décrit le cercle (C), M décrit un cercle (T) à déterminer.

## II - ( 4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les droites (d) et (d') définies par :

$$(d) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \\ z = t - 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad (d') : \begin{cases} x = 2m \\ y = -m + 1 \\ z = m + 1 \end{cases}$$

(t et m sont deux paramètres réels).




1) Démontrer que (d) et (d') sont non coplanaires.

2) a- Montrer que x – y + z = 0 est une équation du plan (P) déterminé par O et (d).

b- Déterminer les coordonnées du point E intersection de (P) et (d').

c- Démontrer que la droite (OE) rencontre (d).

3) a- Calculer la distance du point O à la droite (d).

b- En déduire que le cercle ,du plan (P), de centre O et passant par E, est tangent à (d).

**III - ( 9points )**

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x + 2\dfrac{\ln x}{x}$ . (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ ; unité 2 cm .

1) a - Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.

b - Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et vérifier que la droite (d) d'équation y = x est une asymptote à (C) .

c - Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).

2) Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction f ' dérivée de f.

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $e\sqrt{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\searrow$ | $1-e^{-3}$ | $\nearrow$ | $1$ |

a - Montrer que f est strictement croissante sur son domaine de définition et dresser son tableau de variations .

b - Ecrire une équation de la tangente (D) à (C) au point G d'abscisse e.

c - Démontrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion L.

d - Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une racine unique $\alpha$ et vérifier que $0{,}75 < \alpha < 0{,}76$ .

3) Tracer (D) , (d) et (C) .

4) Calculer, en $cm^2$, l'aire du domaine limité par la courbe (C), la droite (d) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ .

**IV - (4points)**

On dispose de deux urnes U et V :

U contient **trois** boules numérotées 0 et **deux** boules numérotées 1.

V contient **cinq** boules numérotées de 1 à 5.

**A** - On tire au hasard **une** boule de chaque urne et on désigne par X la variable aléatoire égale au produit des deux numéros portés par les deux boules tirées.

1) Démontrer que P(X = 0) est égale à $\dfrac{3}{5}$ .

2) Déterminer la loi de probabilité de X.

**B** - Dans cette partie on place les **dix boules** des urnes U et V dans une même urne W. On tire simultanément et au hasard **deux** boules de l'urne W.

1) Quel est le nombre de tirages possibles ?

2) On désigne par q le produit des deux numéros portés par les deux boules tirées.

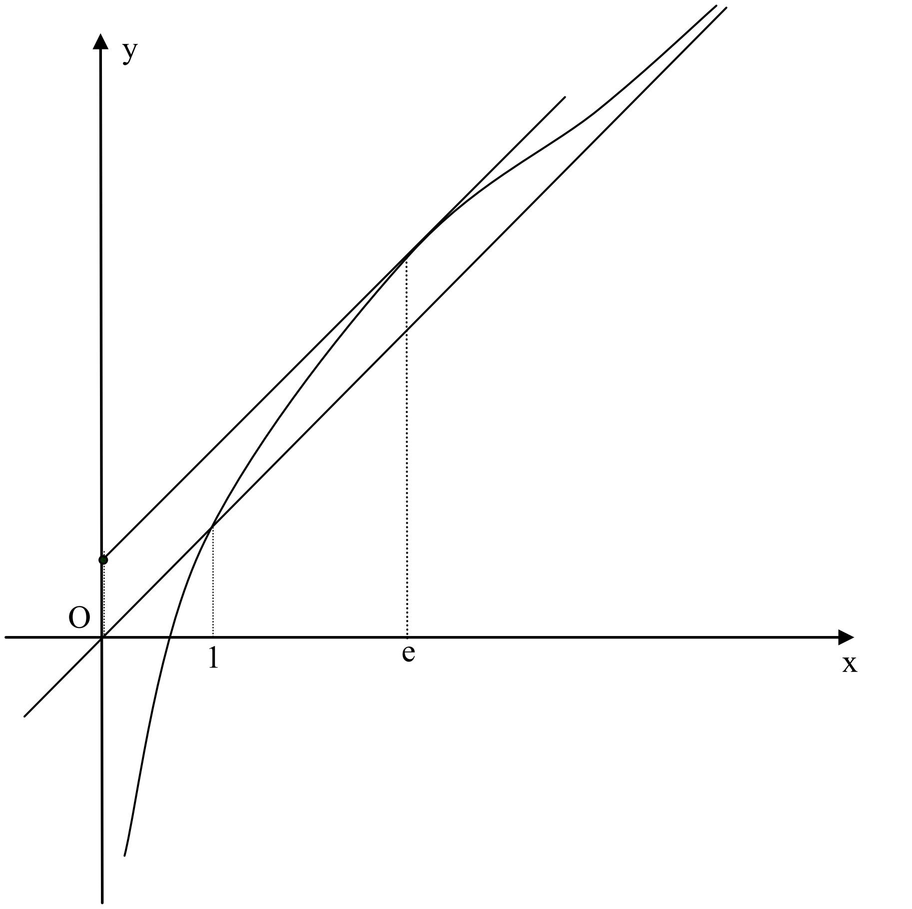
a - Montrer que la probabilité P(q = 0) est égale à $\dfrac{8}{15}$ .

b - Calculer la probabilité P(q < 4).

| Q | | Eléments de réponse | N |
|---|---|---|---|
| I | 1-a | $z_B - z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ | |
| | 1-b | $(\vec{u};\vec{AB}) = \arg(Z_{\vec{AB}}) = \arg(z_B - z_A) = \frac{\pi}{3}$ | |
| | 1-c | $AB = \lvert z_B - z_A \rvert = 1$ donc B appartient à (C). | |
| | 2-a | $\bar{z}(z'-1) = \bar{z}(\frac{\bar{z}+2}{\bar{z}} - 1) = \bar{z}\left(\frac{2}{\bar{z}}\right) = 2$. | |
| | 2-b | Lorsque M' décrit (C) alors AM' = 1 donc $\lvert z'-1 \rvert = 1$ par suite<br>$\lvert \bar{z} \rvert = 2$ c.à.d $\lvert z \rvert = 2$ et M décrit le cercle de centre O et de rayon 2. | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| II | 1 | $\vec{V}\,(1\,;2\,;1)$ et $\vec{V'}\,(2\,;-1\,;1)$ ; $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ ne sont pas colinéaires, donc (d) et (d') ne sont pas parallèles.<br>Etudions l'intersection de (d) et (d') :<br>t + 1 = 2m ; 2t = – m + 1 ; t – 1 = m + 1<br>On prend 2t = – m + 1 ; t – 1 = m +1, on obtient t = 1 et m = –1, ces valeurs ne vérifient pas l'équation t + 1 = 2m.<br>Donc (d) et (d') sont non coplanaires.<br>►Ou : soit L (1 ; 0 ; –1) un point de (d) et J (2 ; 0 ; 2) un point de (d') ;<br>$\vec{LJ}.(\vec{V}\wedge\vec{V'}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$ | |
| | 2-a | Par vérification :<br>O est un point de (P)<br>(d) est incluse dans (P) car t + 1 –2t + t – 1 = 0 pour tout réel t.<br>►Ou : M(x ; y ; z) appartient à (P) ssi $\vec{OM}.(\vec{OL}\wedge\vec{V}) = 0$ ce qui donne $x - y + z = 0$ | |
| | 2-b | 2m + m –1 + m + 1 = 0 ; m = 0 donc E (0 ; 1 ; 1) | |
| | 2-c | (OE) est une droite du plan (P), (OE) et (D) sont coplanaires et elles ne sont pas parallèles ( $\vec{OE}$ et $\vec{V}$ ne sont pas colinéaires), donc elles sont sécantes.<br>►Ou : On détermine un système d'équations paramétriques de (OE) et on démontre qu'elle coupe (d). | |
| | 3-a | distance (O/ (d)) = ….. = $\sqrt{2}$. | |
| | 3-b | OE = $\sqrt{2}$ = distance (O/ (d)) ; donc (C) est tangent à (d). | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| III | 1-a | $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ ; y'y est une asymptote à (C). | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1-b | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$ donc la droite (d) d'équation y = x est une asymptote à (C) en $+\infty$. | |
| | 1-c | $f(x)-x=2\dfrac{\ln x}{x}$.<br>Pour x = 1, (C) rencontre (d).<br>Pour 0 < x < 1, f(x) – x < 0 donc (C) est au-dessous de (d).<br>Pour x > 1, (C) est au-dessus de (d). | |
| | 2-a | $f'(x)\geq 1-\dfrac{1}{e^3}>0$ donc f est strictement croissante. $\begin{array}{c\|lr} x & 0 & +\infty \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow +\infty \end{array}$ | |
| | 2-b | $y=f'(e)(x-e)+f(e)$ ; $y=x-e+e+\dfrac{2}{e}=x+\dfrac{2}{e}$. | |
| | 2-c | f ”(x) s'annule pour x = $e\sqrt{e}$ en changeant de signe, donc (C) admet un point d'inflexion L d'abscisse $e\sqrt{e}$ . | |
| | 2-d | f est continue et change de signe sur son domaine, f(x) = 0 admet au moins une racine α, en plus f est strictement croissante, donc α est unique. f (0,75) ×f (0,76) = –0,017×0,377 < 0, donc 0,75 < α < 0,76. | |
| | 3 |  | |
| | 4 | $A=\displaystyle\int_1^e 2\frac{\ln x}{x}\,dx=\left[\ln^2 x\right]_1^e=1\ u^2$, donc A = 4 cm$^2$. | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| IV | A-1 | Pour obtenir un produit égal à 0 il suffit de tirer de U une boule numérotée 0, d'où la probabilité est égale à $\dfrac{3}{5}$.<br>►Ou : Nombre de tirages possibles est égal à 5 ×5 = 25 | |

<table>
<tr><td></td><td></td><td>$P(X = 0) = \dfrac{3\times 5}{5\times 5} = \dfrac{3}{5}$.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>A-2</td><td><table><tr><td>$x_i$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>$p_i$</td><td>3/5</td><td>2/25</td><td>2/25</td><td>2/25</td><td>2/25</td><td>2/25</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>B-1</td><td>$C_{10}^{2} = 45$.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>B-2<br>a</td><td>Pour obtenir un produit égal à 0 on doit avoir l’un des tirages suivants :<br>Deux boules numérotées 0<br>ou<br>$\{0 ; a\}$ avec a = 1, 2, 3, 4, 5.<br>Nombre de cas favorables est $C_3^2 + C_3^1 \times C_7^1 = 24$<br>$P\ (q = 0) = \dfrac{24}{45} = \dfrac{8}{15}$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>B-2<br>b</td><td>$P\ (q < 4) = P\ (q = 0) + P\ (q = 1) + P\ (q = 2) + P\ (q = 3)$<br>$= \dfrac{8}{15} + \dfrac{C_3^2 + C_3^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_1^1}{45} = \dfrac{33}{45} = \dfrac{11}{15}$.</td><td></td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات | امتحانات شهادة الثانوية العامة<br>فرع علوم الحياة | دورة سنة ٢٠٠٣ الاستثنائية |

| | | |
|---|---|---|
| عدد المسائل: اربع | مسابقة في الرياضيات<br>المدة: ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |

ملاحظة: يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
يستطيع المرشح الاجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة) .

**I – (3,5 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$, on donne les points A(2 ; 1 ; 1), B(0 ; 2 ; 3), C(– 1 ; 0 ; 5) et D(1 ; – 1 ; 3).

1) Ecrire une équation du plan (ABC) et vérifier que le point D appartient à ce plan.
2) Donner un système d'équations paramétriques de la droite (d) passant par B et D.
3) a- Démontrer que le quadrilatère ABCD est un losange.
   b- Calculer la distance du point A à la droite (d).

**II – (3.5 points)**

Dans le plan complexe, rapport à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$, on considère les points A, B , M et M' d'affixes respectives 1, 5 , z et z'
avec $z' = \dfrac{z-5}{z-1}$ $(z \neq 1)$

1) a- Donner une interprétation géométrique de $|z-5|$ , $|z-1|$ et $|z'|$.
   b- Déterminer l'ensemble des points M lorsque M' décrit le cercle de centre O et de rayon 1.
2) Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$
   a- Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
   b- Sur quelle ligne se déplace le point M pour que z' soit un réel ?

**III – ( 5 points)**

**A-** Le tableau ci-dessous donne la répartition, selon leurs âges respectifs, des 40 employés d'une usine :

| Age en années | [20 ; 30[ | [30 ; 40[ | [40 ; 50[ | [50 ; 60] |
|---|---|---|---|---|
| Effectif | 13 | 12 | 10 | 5 |

1) Calculer l'âge moyen de ces 40 employés.
2) a- Tracer le polygone des effectifs cumulés croissants.
   b- La droite d'équation $y = 20$ coupe ce polygone en un point M.
   Calculer l'abscisse de M et donner une signification à la valeur trouvée.

**B-** Les 40 employés de cette usine sont : 5 ingénieurs, 10 techniciens et 25 ouvriers répartis selon le tableau suivant :

| | [20 ; 30[ | [30 ; 40[ | [40 ; 50[ | [50 ; 60] |
|---|---|---|---|---|
| ingénieur | 1 | 1 | 2 | 1 |
| technicien | 2 | 3 | 3 | 2 |
| ouvrier | 10 | 8 | 5 | 2 |

On choisit au hasard un groupe de 3 employés de cette usine. Soit les événements suivants :

E : « ***Le groupe choisi comprend un ingénieur, un technicien et un ouvrier*** »

G : ***« Le groupe choisi est formé de 3 employés ayant chacun un âge supérieur ou égal à 40 ans*** ».

1) Calculer les probabilités : P(E) et P(G).
2) Calculer P(E / G) et P(E $\cap$ G).

**IV – ( 8 points)**

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ , par $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1+\ln x}{x}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Démontrer que la droite d'équation x = 0 est une asymptote à (C).

2) a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et démontrer que la droite (d) d'équation $y = \frac{1}{2}x$ Est une asymptote à (C).

   b- Déterminer les coordonnées de E, point d'intersection de la droite (d) et de la courbe (C).

3) Vérifier que $f'(x) = \frac{x^2 - 2\ln x}{2x^2}$

4) Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction h définie par : $h(x) = x^2 - 2\ln x$

| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| h'(x) | ‖ | − | 0 | + | |
| h (x) | ‖ $+\infty$ | ↘ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

   a- Vérifier que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

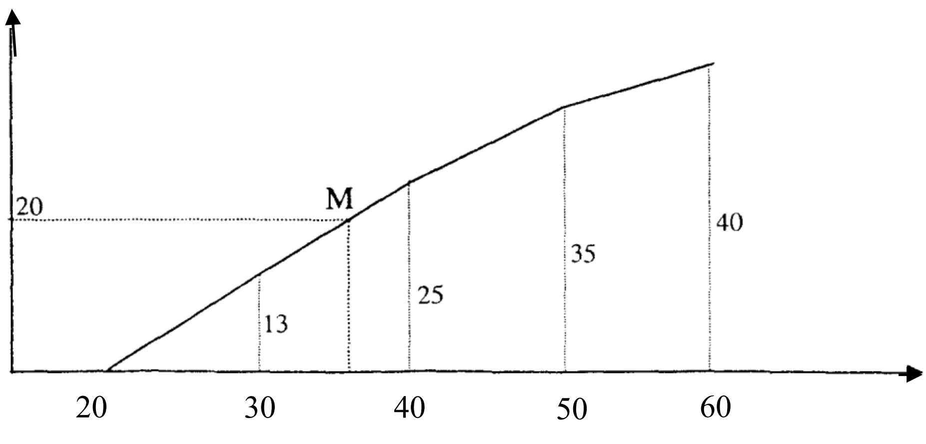
   b- Soit W le point de (C) d'abscisse 1
   Ecrire une équation de la tangente (D) à (C) au point W.

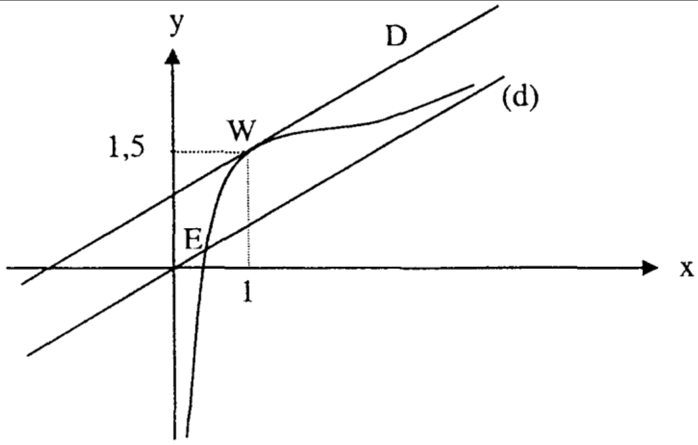
5) Tracer la courbe (C) et les droites (d) et (D) et placer les points E et W.

6) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'asymptote (d) et les droites d'équations x = 1 et x = e.

| Questions | | Elements de Réponses | Notes |
|---|---|---|---|
| I - | 1 | $\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$ ; $6x+2y+5z-19=0$ .<br>$6X_D+2y_D+5z_D-19=6(1)+2(-1)+5(3)-19=0$ . | 1 |
| | 2 | $x=\lambda$ ; $y=-3\lambda+2$ , $z=3$ | ½ |
| | 3(a) | $\overrightarrow{AB}$ (–2; 1; 2) et $\overrightarrow{DC}$ (–2; 1; 2) donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ , ABCD est un parallélogramme, de plus AB = BC = 3 , c'est donc un losange .<br>⊳ ou :<br>AB = BC = CD = DA = 3 .<br>⊳ ou :<br>[AC] et [BD] ont même milieu et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$. | 1 |
| | 3(b) | Les diagonales du losange sont perpendiculaires et ont le même milieu H :<br>Distance (A ; (d)) = AH = $\frac{1}{2}$ AC = $\frac{\sqrt{26}}{2}$.<br>⊳ ou ; Distance (A ; (d)) = $\frac{\left\Vert\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BD}\right\Vert}{\left\Vert\overrightarrow{BD}\right\Vert}$ . | 1 |
| II- | 1(a) | $\lvert z-5\rvert=\lvert z_M-z_B\rvert=BM$ $\lvert z-1\rvert=\lvert z_M-z_A\rvert=AM$ et $\lvert z'\rvert=OM'$ . | 1 |
| | 1(b) | OM' = 1 donc MB = MA , l'ensemble des points M est la médiatrice de [AB]. | 1 |
| | 2(a) | $x'+iy'=\frac{x-5+iy}{x-1+iy}=\frac{(x-5+iy)(x-1-iy)}{(x-1)^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-6x+5+4iy}{(x-1)^2+y^2}$<br>$x'=\frac{x^2+y^2-6x+5}{(x-1)^2+y^2}$ et $y'=\frac{4y}{(x-1)^2+y^2}$ | 1 |
| | 2(b) | z' est un réel donc y' = 0 par suite y = 0 et M se déplace sur l'axe des abscisses. | ½ |
| III- | A(1) | L'âge moyen est égal à 36,75 ans. | ½ |
| | A(2-a) | (table et graphique ci-dessous) | 1 |

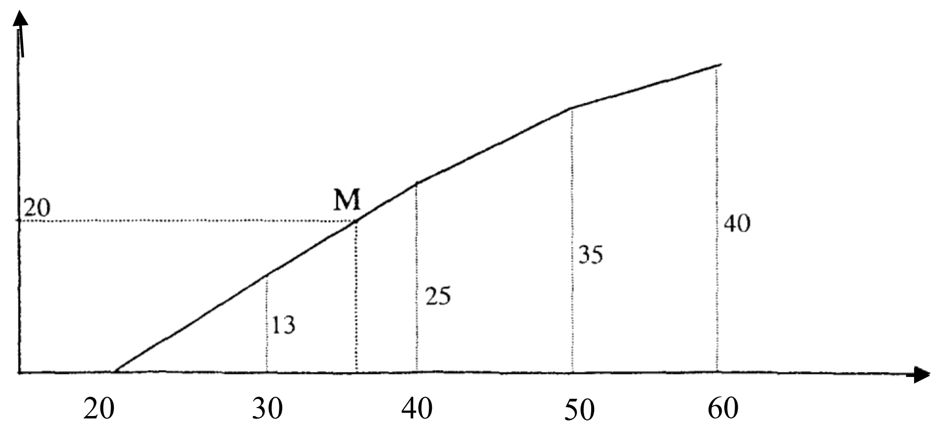
| Age | [20 ; 30[ | [30 ; 40[ | [40 ; 50[ | [50 ; 60] |
|---|---|---|---|---|
| E.C.C. | 13 | 25 | 35 | 40 |

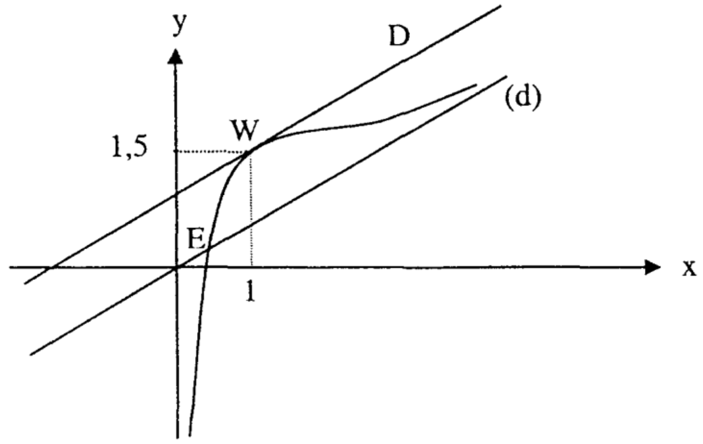


| | | | |
|---|---|---|---|
| | A(2-b) | $\frac{x_M - 30}{40-30} = \frac{20-13}{25-13}$ $x_M = 35{,}8$ .<br>35,8 est la médiane de cette série ou 50 % des employés de cette usine ont un âge inférieur ou égal (ou supérieur ou égal) à 35,8 ans. | 1 |
| | B(1) | $P(E) = \frac{C_5^1 C_{10}^1 C_{25}^1}{C_{40}^3} = \frac{1250}{9880} = 0{,}126$ et $P(G) = \frac{C_{15}^3}{C_{40}^3} = \frac{455}{9880} = 0{,}046$ | 1 |
| | B(2) | $P(E/G) = \frac{C_3^1 C_5^1 C_{25}^1}{C_{15}^3} = \frac{105}{455} = 0{,}23$ et $P(E \cap G) = P(G) \times P(E/G) = 0{,}01$ | 1<br>½ |
| | 1 | $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 + \frac{1-\infty}{0^+} = -\infty$. | ½ |
| | 2(a) | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty.$<br>$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = 0.$ | 1 |
| | 2(b) | $f(x) = \frac{1}{2}$ x donc $1 + \ln x = 0$ , d'où $x = \frac{1}{e}$ et E $\left(\frac{1}{e} ; \frac{1}{2e}\right)$. | 1 |
| | 3 | $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1-1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 2\ln x}{2x^2}$ . | ½ |
| | 4(a) | $f'(x) = \frac{h(x)}{2x^2}$ avec $h(x) \geq 1$ donc $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante. | ½ |
| | 4(b) | $Y = (x-1)\ f'(1) + f(1) = \frac{1}{2}x + 1$ . | 1 |
| | 5 |  | 2 |
| | 6 | $A = \int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx = \left[\frac{(1+\ln x)}{2}\right]_1^e = \frac{3}{2}u^2$ . | 1<br>½ |

| Questions | | Answers | Marks |
|---|---|---|---|
| I - | 1 | $\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$ ; $6x+2y+5z-19=0$ .<br>$6X_D+2y_D+5z_D-19=6(1)+2(-1)+5(3)-19=0$ . | 1 |
| | 2 | $x=\lambda$ ; $y=-3\lambda+2$ , $z=3$ | ½ |
| | 3(a) | $\overrightarrow{AB}$ (–2; 1; 2) and $\overrightarrow{DC}$ (–2; 1; 2) then $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ , ABCD is a parallelogram; AB = BC = 3 , it is a rhombus.<br>▷ Or :<br>AB = BC = CD = DA = 3<br>▷ Or :<br>[AC] et [BD] have the same mid point and $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$. | 1 |
| | 3(b) | The diagonals of the rhombus are perpendicular and they have the same mid point H :<br>Distance (A ; (d)) = AH = $\frac{1}{2}$ AC = $\frac{\sqrt{26}}{2}$.<br>▷ Or ; Distance (A ; (d)) = $\frac{\left\Vert\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BD}\right\Vert}{\left\Vert\overrightarrow{BD}\right\Vert}$ . | 1 |
| II- | 1(a) | $\lvert z-5\rvert=\lvert z_M-z_B\rvert=BM$ $\lvert z-1\rvert=\lvert z_M-z_A\rvert=AM$ and $\lvert z'\rvert=OM'$ | 1 |
| | 1(b) | OM' = 1 then MB = MA , the set of points M is the perpendicular bisector of [AB] . | 1 |
| | 2(a) | $x'+iy'=\frac{x-5+iy}{x-1+iy}=\frac{(x-5+iy)(x-1-iy)}{(x-1)^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-6x+5+4iy}{(x-1)^2+y^2}$<br>$x'=\frac{x^2+y^2-6x+5}{(x-1)^2+y^2}$ et $y'=\frac{4y}{(x-1)^2+y^2}$ | 1 |
| | 2(b) | z' is real so y' = 0 then y = 0 and M moves on the axes of abscissas. | ½ |
| III- | A(1) | The average age is equal to 36.75 years. | ½ |
| | A(2-a) | see table and figure below | 1 |

| Age | [20 ; 30[ | [30 ; 40[ | [40 ; 50[ | [50 ; 60] |
|---|---|---|---|---|
| I.C.F. | 13 | 25 | 35 | 40 |



| | | | |
|---|---|---|---|
| | A(2-b) | $\frac{x_M - 30}{40-30} = \frac{20-13}{25-13}$ $x_M = 35.8$<br>35,8 is the median of this distribution or 50 % of the employees of this factory have an age less than or equal to (greater than or equal to) 35,8 years. | 1 |
| | B(1) | $P(E) = \frac{C_5^1 C_{10}^1 C_{25}^1}{C_{40}^3} = \frac{1250}{9880} = 0.126$ and $P(G) = \frac{C_{15}^3}{C_{40}^3} = \frac{455}{9880} = 0.046$ | 1 |
| | B(2) | $P(E/G) = \frac{C_3^1 C_5^1 C_{25}^1}{C_{15}^3} = \frac{105}{455} = 0.23$ and $P(E \cap G) = P(G) \times P(E/G) = 0.01$ | 1 ½ |
| | 1 | $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 + \frac{1-\infty}{0^+} = -\infty$. | ½ |
| | 2(a) | $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$.<br>$\lim\limits_{x \to +\infty} \left( f(x) - \frac{1}{2}x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left( \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = 0$. | 1 |
| | 2(b) | $f(x) = \frac{1}{2}x$ then $1 + \ln x = 0$ , So $x = \frac{1}{e}$ and $E\left(\frac{1}{e} ; \frac{1}{2e}\right)$ . | 1 |
| | 3 | $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1-1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 2\ln x}{2x^2}$ . | ½ |
| | 4(a) | $f'(x) = \frac{h(x)}{2x^2}$ with $h(x) \geq 1$ then $f'(x) > 0$ and f is strictly increasing. | ½ |
| | 4(b) | $Y = (x-1)\ f'(1) + f(1) = \frac{1}{2}x + 1$ . | 1 |
| | 5 |  | 2 |
| | 6 | $A = \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx = \left[ \frac{(1+\ln x)}{2} \right]_1^e = \frac{3}{2} u^2$ . | 1 ½ |

| | | |
|---|---|---|
| دورة سنة ٢٠٠٣ العادية | امتحانات شهادة الثانوية العامة<br>فرع علوم الحياة | وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات |
| الاسم:<br>الرقم: | مسابقة في الرياضيات<br>المدة: ساعتان | عدد المسائل: اربع |

ملاحظة: يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
يستطيع المرشح الاجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

## I – (3 points)

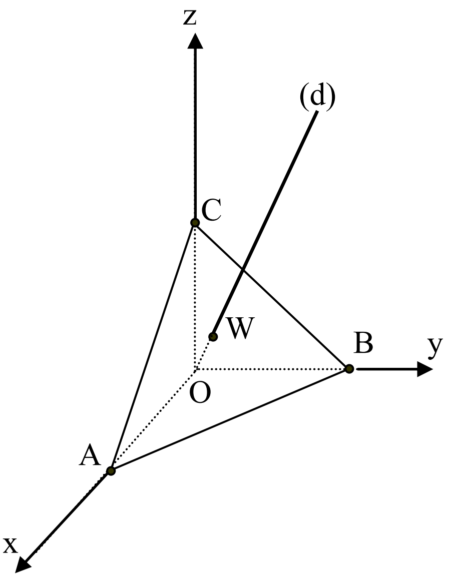
Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$, on donne les points E , F et G d'affixes respectives :

$$z_E = i \quad , \quad z_F = 2 \quad \text{et} \quad z_G = (1+\frac{\sqrt{3}}{2}) + i(\frac{1}{2}+\sqrt{3}).$$

1) Exprimer sous forme algébrique le nombre complexe $z' = \dfrac{z_G - z_E}{z_F - z_E}$ et vérifier que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
2) Démontrer que le triangle EFG est équilatéral.
3) Soit M un point variable d'affixe $z$. Déterminer ensemble (T) des points M tels que $|z - z_E| = \sqrt{5}$ et vérifier que F appartient à (T).

## II – (4 points)

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$, on donne le plan (P) d'équation $x + y + z - 2 = 0$.




1) Déterminer les coordonnées de A, B et C, points d'intersection du plan (P) avec les axes des coordonnées.
2) Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (d) passant par O et perpendiculaire à (P).
3) a- Déterminer les coordonnées du point W intersection de (d) et (P).
   b- Démontrer que W est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
4) Soit le point $E\left(\frac{4}{3}\ ;\ -\frac{2}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\right)$.
   a- Vérifier que B est le symétrique de B par rapport à W.
   b- Calculer l'aire du quadrilatère ABCE.

## III – (5 points)

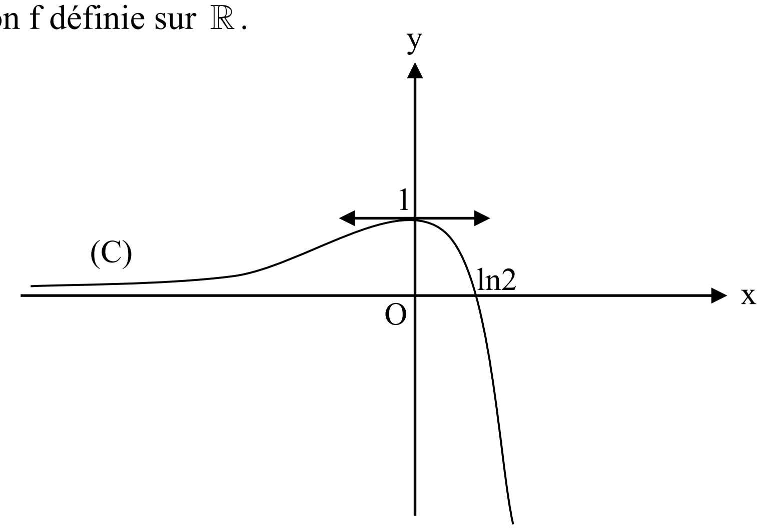
Un homme a dans sa poche droite <u>**un**</u> **billet de 100 000 L.L.** et <u>**trois**</u> **billets de 20 000 L.L.** et dans sa poche gauche <u>**trois**</u> **billets de 50 000 L.L.** et <u>**deux**</u> **billets de 20 000 L.L.**

1) Il tire au hasard <u>un billet</u> de chacune de ces deux poches.
   Soit X la variable aléatoire désignant la somme d'argent ainsi tirée.
   a- Démontrer que $P(X = 70\,000) = \dfrac{9}{20}$.
   b- Déterminer la loi de probabilité de X.
   c- Calculer $P(X < 100\,000)$.

2) Dans cette partie, cet homme choisit l'une de ces deux poches puis il tire, de la poche choisie, simultanément <u>deux billets</u> au hasard.
Soit les événements suivants :
D : « il a choisi la poche droite »
G : « il a choisi la poche gauche »
S : « La somme tirée est inférieure à 90 000 L.L. ».
On suppose que $P(D) = \frac{2}{3}$ et $P(G) = \frac{1}{3}$.
a- Calculer $P(S / D)$.
b- Calculer la probabilité de chacun des événements suivants : $S \cap D$ , $S \cap G$ et S.

**IV– (8 points)**

La courbe (C) ci-contre est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.




1) a- Démontrer que f admet sur $[0 ; +\infty[$ une fonction réciproque g.
b- Préciser le domaine de définition de g et tracer sa courbe représentative (G).

2) La fonction f, représentée par la courbe ci-contre, est une solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$.
Déterminer f(x).

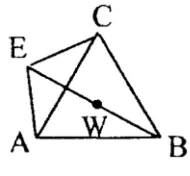
**Dans ce qui suit on prend** $f(x) = 2e^{x} - 2e^{2x}$.

3) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 2$.

4) Vérifier que $g(x) = \ln(1 + \sqrt{1-x})$.

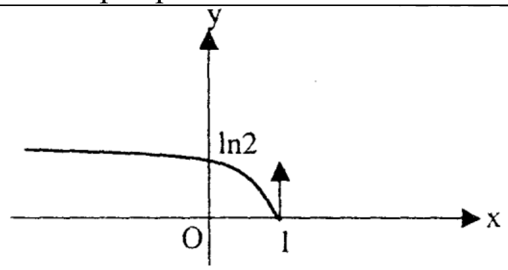
5) Calculer $g'(x)$ et en déduire la pente de la tangente à la courbe (C) au point A d'abscisse ln 2.

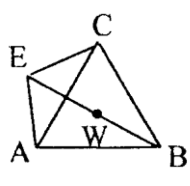
فرع علوم الحياة | مسابقة في مادة الرياضيات<br>اسس التصحيح | دورة سنة ٢٠٠٣ العادية

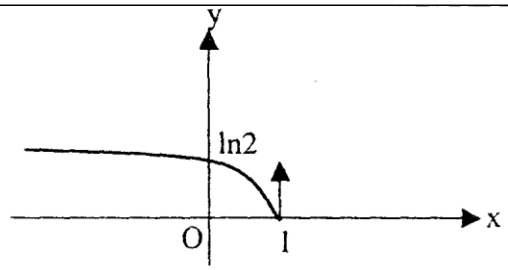
| **Questions** | | **Elements de Réponses** | **Notes** |
|---|---|---|---|
| **I -** | 1 | $z' = \dfrac{\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}\right)-i}{2-i} = \dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$<br>$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3} = z'$ | 1 |
| | 2 | EF = $\lvert z_F - z_E\rvert = \lvert 2-i\rvert = \sqrt{5}$ et FG = GE = $\sqrt{5}$<br>► ou $\lvert z'\rvert = 1 = \dfrac{EG}{EF}$ et arg z' = $(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EG}) = \dfrac{\pi}{3}$ donc EFG est équilatéral. | 1 |
| | 3 | $\lvert z - z_E\rvert = \sqrt{5}$ alors EM = $\sqrt{5}$, donc l’ensemble des points M est le cercle (T) de centre E et de rayon $\sqrt{5}$.<br>EF = $\sqrt{5}$ , F appartient à (T).<br>► ou on pose z = x + iy, d’où $\lvert x+iy-i\rvert = \sqrt{5}$ ce qui donne une équation de (T) : $x^2 + (y-1)^2 = 5$ | 1 |
| **II-** | 1 | A(2 ; 0 ; 0) , B(0 ; 2 ; 0) et c(0 ; 0 ; 2) | ½ |
| | 2 | $\overrightarrow{N_P}$ (1 ; 1 ; 1) est un vecteur directeur de (d) et (d) passe par O.<br>(d) : x = m , y = m , z = m . | ½ |
| | 3a | W(m ; m ; m) avec W est un point de (P), d’où m + m + m = 2 , m = $\dfrac{2}{3}$<br>Par suite W $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ . | ½ |
| | 3b | WA = WB = WC = $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ , donc W est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.<br>► ou OA = OB = OC avec W est le projeté orthogonal de O sur (ABC),<br>Donc WA = WB = WC | 1 |
| | 4a | On vérifie que W est le milieu de [BE] . | ½ |
| | 4b | L’aire de ABCE est le double de celle du triangle EAB ;<br>S(EAB) = $\dfrac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AE}\rvert = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ $u^2$ .<br>L’aire de ABCE est $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ $u^2$ .<br>► ou aire (ABCE) = $\dfrac{1}{2}$ BE × AC .<br><br> | 1 |
| **III-** | 1a | P(X = 70 000) = (tirer 50 000 de p.g) × P(tirer 20 000 de p.d)<br>P(X = 70 000) = $\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{20}$ | ½ |

<table>
<tr><td rowspan="5">III-</td><td>1b</td><td>

| $x_i$ | 40 000 | 70 000 | 120 000 | 150 000 |
|---|---|---|---|---|
| $P_i$ | $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$ | $\frac{9}{20}$ | $\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$ |

</td><td>1½</td></tr>
<tr><td>1c</td><td>$P(X < 100\,000) = \frac{6}{20}+\frac{9}{20}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$.</td><td>½</td></tr>
<tr><td>2a</td><td>$P(S/D) = \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>$P(S\cap D)=P(D)\times P(S/D)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$<br>$P(S/D) = \frac{C_2^2+C_2^1\times C_3^1}{C_5^2}=\frac{1+6}{10}=\frac{7}{10}$<br>$P(S\cap D)=\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}=\frac{7}{30}$ .<br>$P(S) = P(S\cap D)+P(S\cap G) = \frac{1}{3}+\frac{7}{30}=\frac{17}{30}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="6">IV-</td><td>1a</td><td>D’après sa courbe représentative, la fonction f est continue et strictement décroissante. Donc elle admet une fonction réciproque.</td><td>½</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>$D_g = ]-\infty\ ;\ 1]$ , (G) est symétrique de (C) où $x \geq 0$ par rapport à la droite d’équation $y = x$ .<br>
</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>L’équation caractéristique associé à l’équation différentielle est :<br>$r^2-3r+2=0$ , qui a pour solution $r_1 = 1$ , $r_2 = 2$ d’où : $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$<br>on a $y(0) = 1$ et $y(\ln 2) = 0$ (ou $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$), ce qui donne $C_1 = 2$ et $C_2 = -1$ . d’où $f(x) = 2e^x - e^{2x}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$A = \int_0^{\ln 2}(2e^x - e^{2x})\,dx = \left(2e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\right)\Big|_0^{\ln 2} = 2e^{\ln 2} - \frac{1}{2}e^{2\ln 2} - 2 + \frac{1}{2} = 0{,}5u^2$</td><td>1½</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$y = 2e^x - e^{2x}$ , donne $2e^x - e^{2x} + y = 0$ , d’où $(e^x-1)^2 = 1-y$<br>$x \geq 0$ donne $e^x \geq 1$ et par suite $e^x - 1 = \sqrt{1-y}$ , donc $x = \ln(1+\sqrt{1-y})$<br>la fonction réciproque est alors $g(x) = \ln(1+\sqrt{1-x})$<br>► ou on démontre que $g^{-1}(x) = f(x)$<br>►ou on démontre $(g\circ f)(x) = x$ ou $(f\circ g)(x) = x$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>On a $g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}\,(1+\sqrt{1-x})}$<br>Le point A(ln2 , 0) de (C) a pour symétrique B(0 , ln2 ) de (G).<br>La pente de la tangente en A à (C) est $f'(\ln 2) = \frac{1}{g'(0)} = -4$</td><td>1</td></tr>
</table>

| Questions | | ANSWERS | scheme |
|---|---|---|---|
| I - | 1 | $z' = \dfrac{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)-i}{2-i} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$<br>$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=z'$ | 1 |
| | 2 | $EF = \left\|z_F - z_E\right\| = \left\|2-i\right\| = \sqrt{5}$ and $FG = GE = \sqrt{5}$<br>► or $\left\|z'\right\| = 1 = \frac{EG}{EF}$ and $\arg z' = (\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EG}) = \frac{\pi}{3}$ hence EFG is equilateral. | 1 |
| | 3 | $\left\|z-z_E\right\| = \sqrt{5}$ then $EM = \sqrt{5}$, thus the set of points M is the circle (T) of center E and radius $\sqrt{5}$.<br>$EF = \sqrt{5}$ , F belongs to (T).<br>► or let $z = x + iy$, then $\left\|x+iy-i\right\| = \sqrt{5}$ which gives an equation of (T) :<br>$x^2 + (y-1)^2 = 5$ | 1 |
| II- | 1 | A(2 ; 0 ; 0) , B(0 ; 2 ; 0) and c(0 ; 0 ; 2) | ½ |
| | 2 | $\overrightarrow{N_P}$ (1 ; 1 ; 1) is a director vector of (d) and (d) passes through O.<br>(d) : x = m , y = m , z = m . | ½ |
| | 3a | W(m ; m ; m) with W is a point (P), hence m + m + m = 2 , $m = \frac{2}{3}$<br>Thus $W\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ . | ½ |
| | 3b | $WA = WB = WC = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ , then W is the center of the circle circumscribed about the triangle ABC.<br>► or OA = OB = OC and W is the orthogonal projection of O on (ABC),<br>So WA = WB = WC | 1 |
| | 4a | We verify that W is the mid point of [BE] . | ½ |
| | 4b | The area of ABCE is double of the area of triangle EAB ;<br>$S(EAB) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AE}\right\| = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ u^2$ .<br>Area ABCE = $\frac{8\sqrt{3}}{3}\ u^2$ .<br><br><br>► Or area (ABCE) = $\frac{1}{2}$ BE × AC . | 1 |
| III- | 1a | P(X = 70 000) = (drawing 50 000 from L.P) × P(drawing 20 000 from R.P)<br>$P(X = 70\ 000) = \frac{3}{5}\times\frac{3}{4} = \frac{9}{20}$ | ½ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| III- | 1b | $x_i$: 40 000, 70 000, 120 000, 150 000<br>$P_i$: $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$, $\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$ | 1½ |
| | 1c | $P(X < 100\,000) = \frac{6}{20}+\frac{9}{20}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$. | ½ |
| | 2a | $P(S/D) = \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ | 2 |
| | 2b | $P(S\cap D)=P(D)\times P(S/D)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$<br>$P(S/D) = \frac{C_2^2 + C_2^1\times C_3^1}{C_5^2}=\frac{1+6}{10}=\frac{7}{10}$<br>$P(S\cap D)=\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}=\frac{7}{30}$ .<br>$P(S) = P(S\cap D) + P(S\cap G) = \frac{1}{3}+\frac{7}{30}=\frac{17}{30}$ | 2 |
| IV- | 1a | Using the representative curve, we can conform that the function f is continuous and strictly decreasing. Therefore it has an inverse function.. | ½ |
| | 1b | $D_g = ]-\infty\ ;\ 1]$ , (G) is symmetric of (C) for $x \geq 0$ with respect to the line of equation $y = x$ .<br><br> | 2 |
| | 2 | The characteristic equation associated to the differential equation is: $r^2 - 3r + 2 = 0$ , which has as solution $r_1 = 1$ , $r_2 = 2$ we get : $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ we have $y(0) = 1$ and $y(\ln 2) = 0$ (or $y(0) = 1$ and $y'(0) = 0$), consequently $C_1 = 2$ and $C_2 = -1$ . Hence $f(x) = 2e^x - e^{2x}$ | 2 |
| | 3 | $A = \int_0^{\ln 2} (2e^x - e^{2x})\,dx = \left(2e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\right)\Big\|_0^{\ln 2} = 2e^{\ln 2} - \frac{1}{2}e^{2\ln 2} - 2 + \frac{1}{2} = 0{,}5u^2$ | 1½ |
| | 4 | $y = 2e^x - e^{2x}$ , is equivalent to $2e^x - e^{2x} + y = 0$ , $(e^x - 1)^2 = 1 - y$<br>$x \geq 0$ leads to $e^x \geq 1$ then $e^x - 1 = \sqrt{1-y}$ , and $x = \ln(1+\sqrt{1-y})$<br>$g(x) = \ln(1+\sqrt{1-x})$<br>► or we prove that $g^{-1}(x) = f(x)$<br>►or we prove that $(g\circ f)(x) = x$ or $(f\circ g)(x) = x$ | 1 |
| | 5 | $g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}\,(1+\sqrt{1-x})}$<br>The point A(ln2 , 0) of (C) is symmetric of B(0 , ln2 ) of (G).<br>The slope of the tangent at A to (C) is $f'(\ln 2) = \frac{1}{g'(0)} = -4$ | 1 |

| دورة سنة ٢٠٠٢ الاستثنائية | امتحانات شهادة الثانوية العامة<br>فرع علوم الحياة | وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات |
|---|---|---|
| الاسم:<br>الرقم: | مسابقة في الرياضيات<br>المدة: ساعتان | عدد المسائل : اربعة |

ملاحظة : يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات .
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الإلتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

**I - ( 1,5 points)**

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposes à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

| N ° | Questions | Réponses | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | a | b | c | d |
| 1 | Un argument de $z = -2e^{-i\frac{\pi}{5}}$ est : | $-\frac{\pi}{5}$ | $\frac{\pi}{5}$ | $\frac{2\pi}{5}$ | $\frac{4\pi}{5}$ |
| 2 | Si z est un nombre complexe variable tel que $\overline{z}-\frac{1}{z}=0$, alors le point M(z) décrit : | Le cercle de centre l'origine et de rayon 1 | La droite d'équation $y = x$ | L'axe des abscisses | L'axe des ordonnées |
| 3 | Si $z = 1-e^{-i\frac{\pi}{3}}$, alors $\overline{z}=$ | $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ | $e^{i\frac{\pi}{3}}$ | $1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ | $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ |

**II - ( 4 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$, on considère les points A(1 ; 2 ; 1), B(2 ; – 1 ; – 1) et C(3 ; – 2 ; 1), et la plan (P) d'équation: $x - y + 2z - 1 = 0$.

1) Démontrer que la droite (AB) est contenue dans le plan (P).
2) Démontrer que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (P)
3) Soit (Q) le plan passant par C et parallèle à (P).
   a- Ecrire une équation du plan (Q).
   b- Calculer la distance entre les plans (P) et (Q).
4) Soit E le symétrique du point C par rapport à (P).
   Calculer l'aire du triangle AEC.

**III- (5 points)**

Une usine fabrique des montres.
4% de ces montres présentent un défaut α et 10% un défaut β.
On suppose que l'existence de l'un des défauts est **indépendante** de l'existence de l'autre.
Une montre est tirée au hasard.

1) Calculer la probabilité pour que la montre tirée présente les deux défauts α et β.
2) On considère les événements suivants :
   A : « La montre tirée présente **uniquement** le défaut α ».
   B : « La montre tirée présente **uniquement** le défaut β ».
   F : « La montre tirée ne présente aucun défaut ».
   Démontrer que P(A) = 0,036 et calculer P(B) et P(F).

3) L'usine vend la montre à 90 000 L L mais elle rend à l'acheteur ;
  - 10 000 LL si la montre présente le défaut $\alpha$.
  - 15 000 LL si la montre présente le défaut $\beta$.
  - 30 000 LL si la montre présente les deux défauts.

  Soit X la variable aléatoire qui à chaque montre associe le **prix définitif** payé par l'acheteur.
  a- Déterminer la loi de probabilité de X.
  b- Calculer l'espérance mathématique E(X). Que signifie cette valeur pour l'usine ?

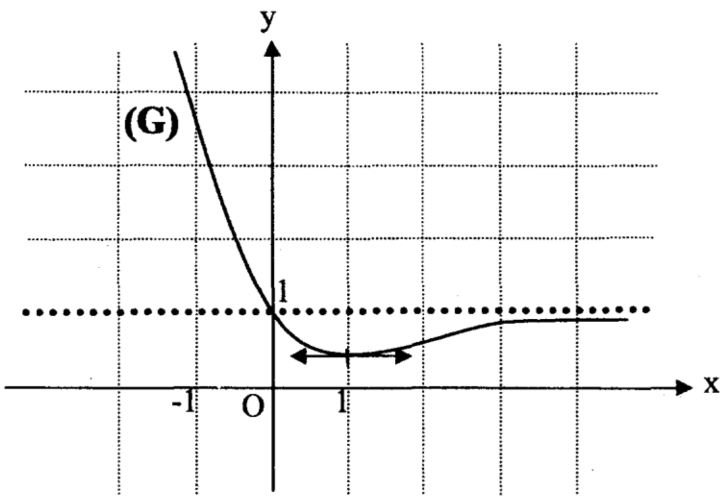
**IV- (9,5 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + (x + 1)\, e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative.

1) a- Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et vérifier que la droite (d) d'équation y = x est une asymptote à (C).
   b- Calculer les coordonnées du point d'intersection E de la courbe (C) avec son asymptote (d).
   c- Pour quelles valeurs de x la courbe (C) est-elle au-dessus de (d) ?

2) a- Déterminer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
   b- Calculer f (–2) et donner la réponse sous forme décimale à $10^{-1}$ près.

3) La courbe **(G)** ci-dessous est la courbe représentative de la fonction dérivée f ' de f dans un repère orthonormé.




   a- Justifier que la fonction f est strictement croissante.
   b- Calculer l'aire du domaine limité par la courbe **(G),** l'axe des abscisses et les droits d'équations : x = 0 et x = 1

4) a- Ecrire une équation de la tangente (D) à (C) au point A d'abscisse 0.
   b- Démontrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion W d'abscisse 1.
   c- Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe (C) et sa tangente (D) dans un repère orthonormé. (*unité : 1cm*)

| | | |
|---|---|---|
| عدد المسائل : اربع | **مسابقة في الرياضيات**<br>المدة: ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |

**ملاحظة :** يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الاجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة)

**I- (3 points)**

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposes à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

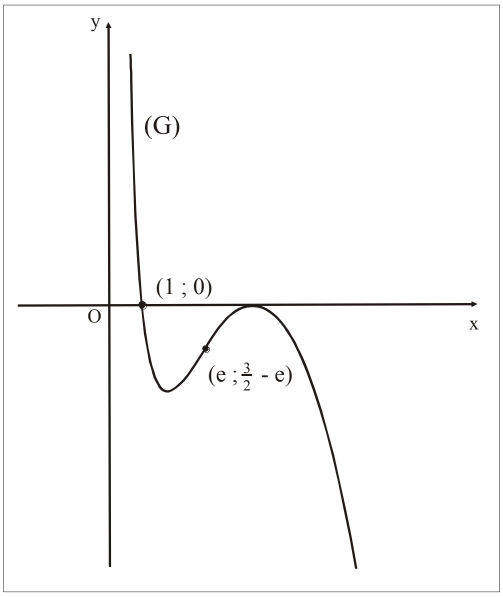
| N° | Questions | Réponses | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | **a** | **b** | **c** | **d** |
| 1 | Une solution particulière de l'équation différentielle : $y'' - 4y' - 5y = 0$, est : | $y = e^x$ | $y = xe^{-x}$ | $y = e^{-x}$ | $y = \cos 5x$ |
| 2 | $A(1 ; 2 ; -1)$ et $B(3 ; 0 , 1)$ sont deux points. Le plan médiateur de [AB] a pour équation : $x + my + nz - 1 = 0$ où | $m = -1$<br>$n = 1$ | $m = -1$<br>$n = -1$ | $m = 1$<br>$n = 1$ | $m = 1$<br>$n = -1$ |
| 3 | (d) est la droite d'intersection des deux plans :<br>(P) : $x + y - z + 1 = 0$<br>(Q) : $2x - y + z = 0$.<br>Un vecteur directeur de (d) est : | $\vec{V}(0 ;-1 ;1)$ | $\vec{V}(2 ;-3 ;-3)$ | $\vec{V}(0 ; 1 ; 1)$ | $\vec{V}(2;3;-3)$ |

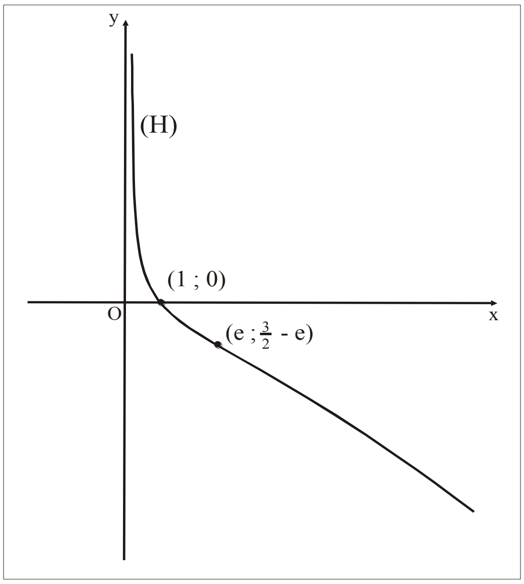
**II- ( 7 points)**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = ]0 ; +\infty[$, par : $f(x) = \frac{\ln x}{x} - 1$ .

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. *(unité : 2cm)*.

**1)** a) Calculer les limites de f aux bornes de I .
b) Déterminer les asymptotes à (C).
**2)** Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
**3)** Vérifier que la tangente (d) à (C), au point $A(1 ; -1)$ a pour équation $y = x - 2$ .
**4)** Tracer la droite (d) et la courbe (C) .
**5)** L'une des deux courbes (G) et (H), traces ci-dessous est la courbe représentative d'une **primitive** F de la fonction f .



a- **Laquelle** de ces deux courbes représente-t-elle la fonction F ? Justifier la réponse.
b- Sans trouver l'expression de $F(x)$, calculer en $cm^2$, l'aire du domaine limité par la courbe (C) de la fonction f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. Donner la réponse à $10^{-2}$ près.

**III- (5 points)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $( O ; \vec{u} , \vec{v} )$, on donne les points A et A′ d'affixes respectives $-4$ et 4.
M étant un point du plan d'affixe z, ( M distinct de A ), on considère le point M′ d'affixe z′ telle que $z' = \dfrac{z-4}{z+4}$.

1) Ecrire z′ sous la forme algébrique dans le cas où $z = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$.
2) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Exprimer x′ et y′ en fonction de x et y.

***Dans ce qui suit on désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 4 et on suppose que M décrit (C) privé de A et A′.***

3) Démontrer que z′ est imaginaire pur.
4) On pose $z = 4\,e^{i\theta}$ , où $0 < \theta < \dfrac{\pi}{6}$.

   Soit N le point d'affixe $\overline{z}$ et L le point d'affixe $z_1 = 4\,e^{i3\theta}$.
   a- Placer les points M, N et L dans le repère précédent.
   b- Vérifier que $z_1 = \dfrac{z^2}{\overline{z}}$.
   c- Démontrer que le triangle MLN est isocèle de sommet principal M .

**IV-(5 points)**
Une famille $F_1$ a **4** enfants : **deux** filles et **deux** garçons, une autre famille $F_2$ a **3** enfants : **une** fille et **deux** garçons.

1) La direction d'un club décide de choisir au hasard un groupe de **3** enfants parmi ces 7 enfants pour passer gratuitement les vacances d'été à l'étranger.
   a- Quel est le nombre de groupes possibles ?
   b- Démontrer que la probabilité d'avoir **exactement une fille** parmi les 3 enfants choisis est $\dfrac{18}{35}$.
   c- Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de filles parmi les enfants choisis. Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Pour des raisons financières, la direction du club décide de choisir **un seul enfant.** Pour cela elle choisit au hasard **une famille** puis **un enfant de la famille choisie.**
   ( *les choix sont supposés équiprobables).*
   Soit l'événement A :« *l'enfant choisi est une fille de la famille* $F_2$ ».

   a- Vérifier que la probabilité de A est $p(A) = \dfrac{1}{6}$.
   b- Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
      B: « *l'enfant choisi est une fille de la famille* $F_1$ »
      C : « *l'enfant choisi est une fille* »
      D: « *l'enfant choisi est de la famille* $F_1$ *sachant que c'est une fille* ».

وزارة التربية والتعليم العالي
المديرية العامة للتربية
دائرة الامتحانات

امتحانات شهادة الثانوية العامة
فرع علوم الحياة

دورة سنة ٢٠٠١ الاستثنائية

| | | |
|---|---|---|
| عدد المسائل : أربعة | مسابقة في الرياضيات<br>المدة: ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |

ملاحظة : يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات .
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الإلتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

## I - ( 3 points)

Dans l'espace rapport à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
on donne le plan (P) d'équation: $x - 3y - 2z + 6 = 0$
et le plan (Q) d'équation: $3x - y - 2z + 2 = 0$.

1) Démontrer que (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).
Ecrire un système d'équations paramétriques de (D).

2) Trouver les coordonnées du point A commun à (P) et (Q) et situe dans le plan (R) d'équation : $x + y - z + 2 = 0$.

3) A est le symétrique de O par rapport à un plan (S).
Déterminer une équation de (S) et calculer la distance de A à (S).

## II- (6 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ on donne un point M, distinct de O, d'affixe z et un point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z}{|z|^2}$.

1) Déterminer la forme algébrique de z' dans chacun des cas suivants :

$$z = 2 \quad ; \quad z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad z = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

2) Vérifier que $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$

3) Démontrer que les points O, M et M' sont alignés.

4) Démontrer que $\overline{z'-1} = \dfrac{1-z}{z}$

5) Calculer $|z'|$ en fonction de $|z|$.

6) Dans cette partie, le point M décrit le cercle (C) de centre E(1 ; 0) et de rayon 1, (M est distinct de O).
   a- Vérifier que $|1-z| = 1$.
   b- Démontrer que $|z'-1| = |z'|$ et en déduire que M' décrit une droite (d) que l'on déterminera.
   c- M étant un point donné de (C), construire géométriquement le point M'.

**III- (3 points)**

Le tableau suivant donne la distribution des salaires mensuels (en milliers de LL) de 40 ouvriers d'une usine.

| Salaire | [400 ; 600[ | [600 ; 800[ | [800 ; 1000[ | [1000 ; 1200[ | [1200 ; 1400[ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 8 | 5 | 9 | 15 | 3 |

1) Calculer la moyenne de cette distribution et donner une signification à cette valeur.

2) Calculer l'écart type et la variance.

3) On choisit au hasard deux ouvriers de l'usine.
   Calculer la probabilité de l'événement suivant :
   *Le salaire de chacun de ces deux ouvriers est strictement inférieur à 800 000 LL.*
   Donner la réponse sous forme décimale

**IV- (8 points)**

Soit la fonction f définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x+1} - 1$ , et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (*unité: 2cm*).

1) Vérifier que $f(x) + f(-x) = 0$ et déterminer le centre de symétrie de (C).

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et en déduire les asymptotes de (C ).

3) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

4) Ecrire une équation de tangente (D) en O) à (C).

5) Tracer (D) et (C).

6) Calculer l'aire A du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droits d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

7) On désigne par $f^{-1}$ la fonction réciproque de f dans $\mathbb{R}$.
   a- Déterminer le domaine de définition de $f^{-1}$ et trouver $f^{-1}(x)$

   b- Tracer la courbe représentative (G) de $f^{-1}$.

   c- Calculer l'aire B du domaine limité par (G), l'axe des ordonnées et les droites d'équations

   $y = 0$ et $y = 1$.

**Sciences de la vie** **MATHEMATIQUES** **2ème session**
**2001**

| Questions | | ELEMENTS DE Réponses | Note |
|---|---|---|---|
| I | 1 | Les vecteurs normaux à (P) et (Q) $\overrightarrow{N_P}(1\,;-3\,;-2)$ $\overrightarrow{N_Q}(3\,;-1\,;-2)$ sont respectivement $\overrightarrow{N_P}$ et $\overrightarrow{N_Q}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{1}{3}\neq\frac{-3}{-1}$ . <br> (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D) d'équation : <br> pour x = m $\begin{cases}3y+2z=m+6\\-y-2z=-3m-2\end{cases}$ la solution $\begin{cases}y=-m+2\\z=2m\end{cases}$ <br> (D) : x = m y = –m +2 z = 2m . | 1 |
| | 2 | (P) $\cap$ (Q) = (D) , A est l'intersection de (D) et (R) alors A point commun aux trois plans (P), (Q) et (R) <br> m – m + 2 –2m + 2 = 0 donc m = 2 alors A(2 ; 0 ; 4) . | 1 |
| | 3 | I milieu de [OA] alors I (1 ; 0 ; 2) <br> A symétrique de O par rapport à (S) , (S) passe par I et admet une normale $\overrightarrow{OA}(2\,;0\,;4)$ <br> M (x ; y ; z) un point de (S) donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{IM}=0$ <br> (S) : 2(x – 1) + 0(y – 0) + 4(z – 2) = 0 . <br> (S) : x + 2z – 5 = 0 <br> d(A,S) = $\frac{\lvert 2+8-5\rvert}{\sqrt{1+4}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ unité de longueur. | 1 |
| II | 1 | z' = $\frac{z}{\lvert z\rvert^2}$ ; pour z = 2 $\lvert z\rvert$ = 2 z' = $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ; <br> pPour z = $\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\lvert z\rvert=\left\lvert\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right\rvert$ z = $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ = 1 + i <br> z' = $\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$ ; <br> pour z = $\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ même calcul z' = $\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$ . | ¾ |
| | 2 | $\lvert z^2\rvert=z.\overline{z}$ d'où z' = $\frac{z}{z\overline{z}}=\frac{1}{\overline{z}}$ . | ½ |
| | 3 | $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right)$ = arg(z') – arg(z) = arg($\frac{1}{\overline{z}}$) – arg(z) = 0 mod 2π <br> les points O , M et M' sont alignés . | ¾ |
| | 4 | z' = $\frac{1}{\overline{z}}$ ; $\overline{z'}=\frac{1}{z}$ ; $\overline{z'-1}=\overline{z'}-1=\frac{1}{z}-1=\frac{1-z}{z}$ . | 1 |
| | 5 | z' = $\frac{1}{\overline{z}}$ donc $\lvert z'\rvert=\left\lvert\frac{1}{\overline{z}}\right\rvert=\frac{1}{\lvert z\rvert}$ car ( $\lvert\overline{z}\rvert=\lvert z\rvert$) . | ½ |

**6-a** (¾)

M décrit le cercle (C) de centre E et de rayon 1

$|z_M - z_E| = 1$ ; $|z-1| = 1$ ; $|1-z| = 1$ .

Ou $|1-z|^2 = |1-x-iy|^2 = (1-x)^2 + y^2 = 1$ .

**6-b** (1 ¼)

$|z'-1| = \dfrac{|1-z|}{|z|} = |z'|$ .

$|z-1| = 1$ ; $\left\|\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OE}\right\| = \left\|\overrightarrow{EM'}\right\|$ ; et $|z'| = OM'$ donc $M'O = M'E$ .

**6-c** (½)

M' décrit la médiatrice (d) de [OE]

M un point de (C), M' un point de (d) les points O,M et M' sont alignés et M' est le point d'intersection de (OM) avec (d) .

**III**

**1** (1)

| Salaire | Effectifs | Centre de la classe ($x_i$) | $n_i x_i$ | $\lvert x_i - \bar{x}\rvert$ | $n_i (x_i - \bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| [400 ; 600[ | 8 | 500 | 4000 | 400 | 1 280 000 |
| [600 ; 800[ | 5 | 700 | 3500 | 200 | 200 000 |
| [800 ; 1000[ | 9 | 900 | 8100 | 0 | 0 |
| [1000 ; 1200[ | 15 | 1100 | 16500 | 200 | 600 000 |
| [1200 ; 1400[ | 3 | 1300 | 3900 | 400 | 480 000 |
| **Total** | **40** | | **36000** | | **2 560 000** |

$\bar{X} = \dfrac{\sum n_i x_i}{40} = 900$ .

le salaire mensuel moyen de ces 40 ouvriers est 900 000 LL.

**2** (¾)

La variance : $V = \dfrac{1}{n}\left(\sum n_i (x_i - \bar{x})^2\right) = 64\,009$

L'écart type : $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{64009} = 253$ .

**3** (1 ¼)

13 ouvriers ont un salaire < 800 000 LL.

La probabilité d'en choisir deux est $p = \dfrac{C_{13}^2}{C_{40}^2} = \dfrac{13\times 12}{40\times 39} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

<u>Remarque :</u> les parties 1 et 2 sont calculées directement avec une calculatrice en entrant les centres de classe et les effectifs au mode SD.

**IV**

**1** (1)

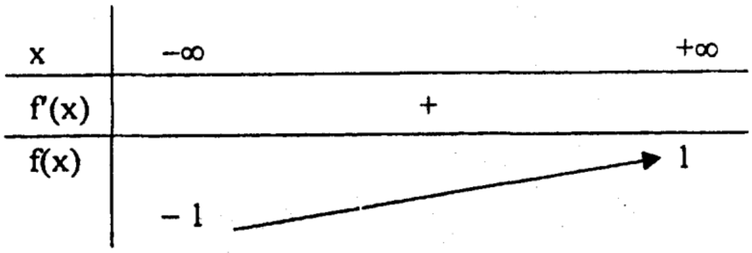
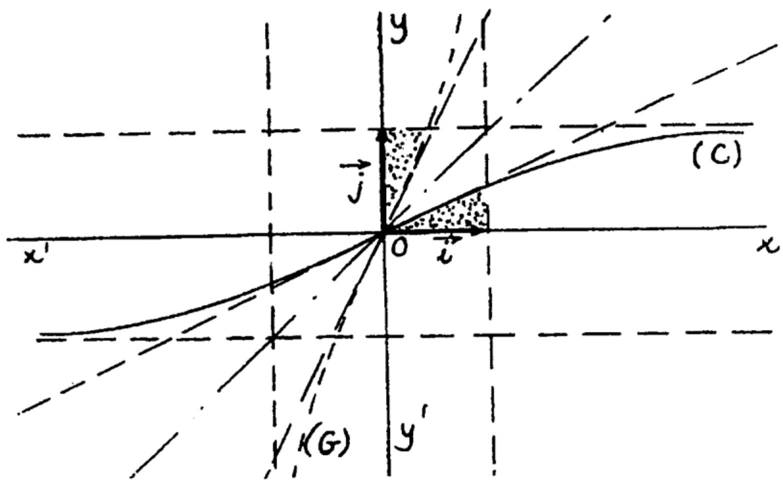
$f(x) + f(-x) = \dfrac{2e^x}{e^x+1} - 1 + \dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1} - 1 = 2 - 2 = 0$

f(x) est définie dans $\mathbb{R}$ qui est centré en O et $f(x) + f(-x) = 0$ donc f(x) est une fonction impaire et (C) admet O comme centre de symétrie.

**2** (1)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 - 1 = 1$ ; $y = 1$ est une asymptote à (C) à $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ ; $y = -1$ est une asymptote à (C) à $-\infty$

| | | | |
|---|---|---|---|
| IV | 3 | $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ ; $f'(x) > 0$  | **1** |
| | 4 | $f(0) = \dfrac{2(1)}{1+1} - 1 = 0$ ; $f'(0) = \dfrac{1}{2}$<br>(D) est tangente en O à (C) : $y - 0 = \dfrac{1}{2}(x - 0)$ D'où D : $y = \dfrac{1}{2}x$ .<br> | **1 ½** |
| | 5 | $A = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \dfrac{2e^x}{e^x+1}\,dx - \int_0^1 dx$ = (2 ln(e + 1) – 2 ln2 – 1) unités d'aire<br>= 4(2 ln(e + 1) – 2 ln2 – 1) $cm^2$. (unité d'aire = 4 $cm^2$) | **1** |
| | 6-a | Domaine de $f^{-1}$ réciproque de f est ]– 1 ; 1[<br>$y = \dfrac{2e^x}{e^x+1} - 1$ ; $e^x = \dfrac{y+1}{1-y}$ ; $\ln e^x = \ln \dfrac{y+1}{1-y}$ ;<br>$x = \ln \dfrac{y+1}{1-y}$ ; $f^{-1}(y) = \ln \dfrac{y+1}{1-y}$ | **1** |
| | 6-b | La courbe (G) est la symétrique de (C) par rapport à la droite y = x | **½** |
| | 6-c | B est le symétrique de A par rapport à y = x alors aire de B = aire de A. | **1** |

امتحانات شهادة الثانوية العامة
فرع علوم الحياة

دورة سنة ٢٠٠١ العادية

| عدد المسائل : أربعة | مسابقة في الرياضيات<br>المدة: ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |
|---|---|---|

ملاحظة : يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات .
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الإلتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

## I - ( 2,5 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et la réponse qui lui correspond.

| Nº | Données | Questions | Réponses | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | a | b | c | d |
| 1 | $z = e^{i\frac{\pi}{6}}$ | $z^9 =$ | $9$ | $9i$ | $i$ | $-i$ |
| 2 | $z' = \dfrac{z-1}{\bar{z}-1}$ $(z \neq 1)$ | $\lvert z' \rvert =$ | $\lvert z \rvert$ | $2\lvert z \rvert$ | $1$ | $2$ |
| 3 | $z = \sin\dfrac{\pi}{3} - i\cos\dfrac{\pi}{3}$ | $z =$ | $e^{i\frac{\pi}{6}}$ | $e^{-i\frac{\pi}{6}}$ | $e^{i\frac{\pi}{3}}$ | $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ |
| 4 | $f(x) = \dfrac{e^x}{x^e}$ | $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ | $1$ | $+\infty$ | $0$ | $\dfrac{1}{e}$ |
| 5 | $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + 1)\, dx$ | $I =$ | $\pi$ | $0$ | $1$ | $\dfrac{\pi}{2}$ |

## II - (5,5 points)

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, on donne le plan (P) d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$, et les points $A(2 ; -2 ; -1)$ , $B(1 ; 0 ; -2)$ et $C(2 ; 1 ; -1)$.

1) Déterminer une équation du plan (Q) passant par A, B et C.
2) Démontrer que les plans (P) et (Q) se coupent suivant la droite (BC).
3) a- Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires.
   b- Calculer la distance de A à (BC).
4) Soit (d) la droite définie par: $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 1 \\ z = t + 2 \end{cases}$ où t est un paramètre réel.
   a- Vérifier que (d) est incluse dans (P).
   b- Soit M un point variable de (d). Démontrer que l'aire du triangle MBC est indépendante de la position de M sur (d).

## III- (4 points)

Dans une ville, 40 % des hommes sont des fumeurs. On signale que 6 % des hommes de cette ville ont une maladie pulmonaire et que 85% de ces malades sont des fumeurs.
On choisit au hasard un homme de cette ville.
Soit les événements suivants :
M: « l'homme choisi a une maladie pulmonaire »
F: « l'homme choisi est un fumeur »

1) Déterminer les probabilités suivantes: p(M), p(F) et p(F / M).
2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   a- L'homme choisi est un fumeur et a une maladie pulmonaire.
   b- L'homme choisi est non-fumeur et a une maladie pulmonaire.
   c- L'homme choisi a une maladie pulmonaire sachant qu'il est fumeur.

## IV – (8 points)

Soit les fonctions f et g, définies dans $]0\,;\,+\infty[$ par :

$f(x) = 2x \ln x$ et $g(x) = e^{\frac{1}{2x}}$

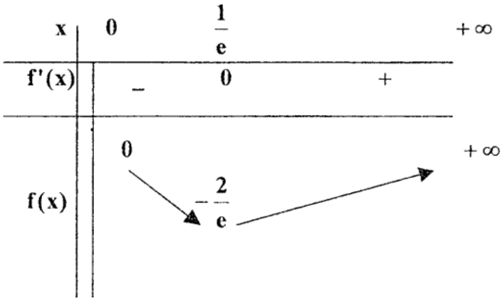
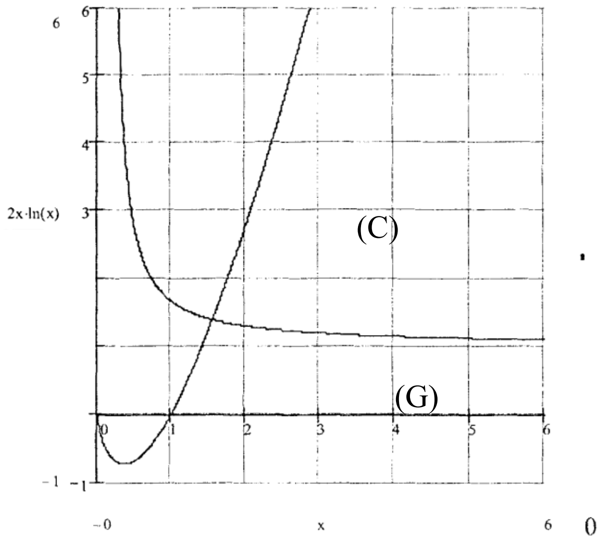
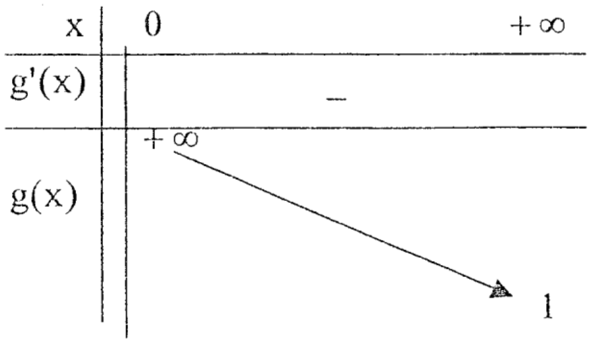
On désigne par (C) la courbe représentative de f et par (G) celle de g , dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (***unité: 2 cm***).

1) a - Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$ et préciser f(e).
   b - Dresser le tableau de variations de f et tracer (C).
2) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$
3) a - Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
   Préciser les asymptotes de (G).
   b - Dresser le tableau de variations de g et tracer (G) (*dans le même repère que* (C)).
4) a - Démontrer que la fonction g admet, sur $]0\,;\,+\infty[$, une fonction réciproque $g^{-1}$.
   b - Préciser le domaine de définition de $g^{-1}$ et déterminer $g^{-1}(x)$ en fonction de x.
5) La droite d'équation $y = 1$ coupe (C) au point A d'abscisse a , et la droite d'équation $y = x$ coupe (G) au point B d'abscisse b.
   Démontrer que a = b et vérifier que $1,4 < a < 1,5$

**H. Ahmad**

**Sciences de la vie** **MATHEMATIQUES** **1$^{ère}$session 2001**

<table>
<tr><th colspan="2">Questions</th><th>ELEMENTS DE REPONSE</th><th>Note</th></tr>
<tr><td rowspan="5">I</td><td>1</td><td>d</td><td>½</td></tr>
<tr><td>2</td><td>c</td><td>½</td></tr>
<tr><td>3</td><td>b</td><td>½</td></tr>
<tr><td>4</td><td>b</td><td>½</td></tr>
<tr><td>5</td><td>a</td><td>½</td></tr>
<tr><td rowspan="4">II</td><td>1</td><td>$\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}) = 0$<br>(Q) : $x - z - 3 = 0$ .</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>(P) et (Q) sont distincts.<br>Les coordonnées de B et C vérifient l'équation de (P).</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>a) $\vec{N}(1 ; -2 ; 1)$ est normal à (P)<br>$\vec{N'}$ (1 ; 0 ; –1) est normal à (Q) et $\vec{N}\,.\,\vec{N'} = 0$<br>b) $d_{A/(BC)} = d_{A/(P)} = \frac{|2+4-1+1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$ .</td><td>½<br><br>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>a) $t - 1 - 2t - 2 + t + 2 + 1 = 0$ alors $0 = 0$<br>b) $\overrightarrow{BC}(1 ; 1 ; 1)$ est le vecteur directeur de (d) alors (d) est parallèle à (BC) et la distance de M à (BC) est constante .<br>Ou calculons la distance de M à (BC) et démontrons qu'elle est constante.<br>Ou calculons l'aire du triangle MBC :<br>$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{BC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{54}$ = constante .</td><td>½<br><br>1 ½</td></tr>
<tr><td rowspan="2">III</td><td>1</td><td>$P(M) = \frac{6}{100} = 0{,}06$ .<br>$P(F) = \frac{40}{100} = 0{,}4$ .<br>$P(F/M) = \frac{85}{100} = 0{,}85$ .</td><td>¼<br>¼<br>½</td></tr>
<tr><td>2</td><td>a) $P(F\cap M) = P(M) . P(F/M) = (0{,}06) . (0{,}85) = 0{,}051$.<br>b) $P(\overline{F}\cap M) = P(M) - P(F\cap M) = 0{,}06 - 0{,}051 = 0{,}009$ .<br>c) $P(M/F) = \frac{P(M\cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}051}{0{,}4} = 0{,}1275$ .</td><td>1<br>1<br>1</td></tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| IV | 1-a | $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ ; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$<br>$f(e) = 2e$<br>$f'(x) = 2(1 + \ln x)$. | ¼ ¼<br>¼<br>¼ |
| | 1-b | <br> | ¼<br>¼<br>½ |
| | 2 | $A = \int_1^{\sqrt{e}} 2x \ln x \, dx = \left[ x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} \right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{1}{2}$ unité de surface $= \frac{1}{2}$ (4 $cm^2$) = 2 $cm^2$ . | 1 |
| | 3-a | $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ et<br>$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 1$ ; | ¼ ¼<br>¼ ¼ |
| | 3-b | asymptotes : y'y et la droite d'équation x = 1<br>$g'(x) = \frac{-1}{2x^2} e^{\frac{1}{2x}} < 0$ .<br> | ¼<br>¼ |
| | 4 | a) g est continue et strictement décroissante, alors elle admet une fonction inverse $g^{-1}$ .<br>b) $D_{g^{-1}} = ]1;+\infty[$<br>$y = e^{\frac{1}{2x}}$ ; $\ln y = \frac{1}{2x}$ ; $x = \frac{1}{2\ln y}$ et $g^{-1}(x) = \frac{1}{2\ln x}$ . | ½<br>¼<br>½ |
| **IV** | 5 | D'après (C) , l'équation $2x \ln x = 1$ admet une seule racine .<br>L'abscisse a de A est une solution de l'équation alors $2a \ln a = 1$.<br>L'abscisse b de B est une solution de l'équation $e^{\frac{1}{2b}} = b$<br>Donc on a $\frac{1}{2b} = \ln b$ soit $2b\ln b = 1$ , d'où a = b<br>f(1,4) = 0,942 et f(1,5) = 1,216 ; f est continue et f(a) = 1<br>donc 1,4 < a < 1,5 . | ¾ |