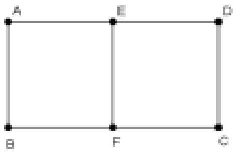
Fiche supplémentaire

I-

Dans le tableau ci-dessous, pour chaque question **une seule** réponse est correcte.

Choisir la bonne réponse **en justifiant** chaque fois ta réponse.

N°	Questions	Réponses possibles			
		A	B	C	D
1)	Soit (C) le cercle de center O (0 ;0) et de rayon R = 2 et (C') le cercle de center A(5 ; 0) et R ' = 3 donc l'affixe du center I de l'homothétie négative qui transforme (C) en (C ') est Z_I =	-10	2	-15	Aucune de ces réponses
2)	Soit ABFE et EFCD sont deux carrés et soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$, tel que  RoRoRoR (C) = B alors RoR (C) =	B	A	E	Aucune de ces réponses
3)	Soit S la similitude de rapport k > 1 et d'angle α, et SoSoSoSoS est une homothétie positive donc α =	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{n\pi}{5}$, n ∈ IN	$\frac{2n\pi}{5}$, n ∈ IN	Aucune de ces réponses
4)	$z = -3i(\sin\alpha - i\cos\alpha)$ La forme exponentielle de z est:	$3e^{i(\pi+\alpha)}$	$3e^{i(\pi-\alpha)}$	$3e^{i\alpha}$	Aucune de ces réponses
5)	$g(x) = \sqrt{x}$; $f(x) = \frac{4}{x^2} - 1$. Le domaine de définition de gof est:	$[0; +\infty[$	$[-2; 2]$	$[-2; 0[\cup]0; 2]$	Aucune de ces réponses
6)	Dans le plan complexe rapportes au system orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Considérons le point A d'affixe $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. L'affixe de point E telle que le triangle OAE est semi équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{6}$ and $\hat{A} = 90^o$ is	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}i$	$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$	Aucune de ces réponses
7)	Si A, B, C, et D sont quatre points d'affixe $z_A = i$, $z_B = 1$, $z_C = 2 + 2i$, et $z_D = -1 - i$, donc	(AC) / /(BD)	(AC) ⊥ (BD)	A ∈ (BC)	Aucune de ces réponses
8)	$\lim\limits_{x \to e} \left[\frac{\ln(\ln x)}{\ln x - 1} \right] =$	1	e	$\frac{1}{e}$	$-e$

II-

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit A, B, et D les point d'affixes respective i, 2i et 1.

E est le point tel que le triangle ODE est isocèles de sommet D, et $(\vec{u}; \overrightarrow{DE}) = \dfrac{\pi}{6}$.

1)

- **a)** Ecrire $\dfrac{z_{\overrightarrow{DE}}}{z_{\overrightarrow{OD}}}$ sous la forme exponentielle puis le forme algébrique.
- **b)** Déduire que $z_E = \left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\dfrac{1}{2}i$. Démontrer que $|z_E| = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.
- **c)** Utiliser le triangle ODE pour démontrer que $\arg(z_E) = \dfrac{\pi}{12}$, puis utiliser partie (b) pour calculer le valeur exact de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2) z est l'affixe du point variable M et z′ est celle de point M′ tel que $z' = \dfrac{2z-i}{iz+1}$.

- **a)** Résoudre l'équation z′ = z.
- **b)** Si z′ est imaginaire pure, démontrer que z est imaginaire pure.
- **c)** Si $z = e^{i\frac{\pi}{6}}$, écrire z′ en forme exponentielle.

3)

- **a)** Démontrer que (z′ + 2i)(z – i) = 1.
- **b)** Déduire le valeur de BM′ × AM et un mesure de $\left(\vec{u}; \overrightarrow{BM'}\right)+\left(\vec{u}; \overrightarrow{AM}\right)$.
- **c)** Si BM′ = AM, déterminer le nature du quadrilatère AMM′B.

III-

f est la fonction définie sur]-∞; 1[par f(x) = $x+\ln|1-x|$ et désignons par (C) sa courbe représentative dans un system orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)

- **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
- **b)** Vérifier que la droite d'équation x = 1 est une asymptote à (C).

2)

- **a)** Calculer f ′(x) et dresser le tableau de variations de f.
- **b)** Démontrer que f(x) = 0 admet seulement deux solution 0 et α tel que –2.25 < α < – 2.51.

3) Tracer (C).

4)

- **a)** Trouver le point d'intersection de (C) et la droite (d) d'équation y = x + 1.
- **b)** Résoudre graphiquement 0 ≤ f(x) ≤ x + 1.

5) h est la fonction définie sur]0; +∞[par $h(x) = \dfrac{1+2\ln x}{2x}$.

- **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.
- **b)** Tracer le tableau de variations de h. Déduire que h(x) < 1.
- **c)** Démontrer que $h(1-\alpha) = \dfrac{1}{2}$ et que $h'(1-\alpha) = \dfrac{1+\alpha}{2(1-\alpha)^2}$

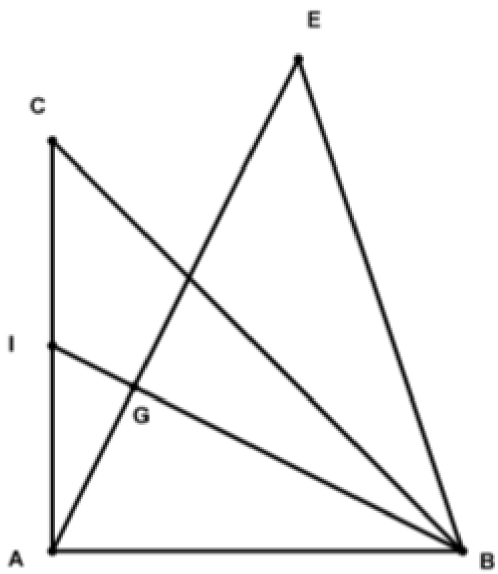
IV-

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct (O, $\vec{u}$; $\vec{v}$). Considère les points A et B d'affixe : $Z_A = 1$ and $Z_B = 1 - 2i$. A chaque point M, distinct de A, d'affixe Z, on associe le point M′ d'affixe Z′ tel que : $Z' = \dfrac{Z - 1 + 2i}{Z - 1}$ $(Z \neq 1)$.

1) Trouver le forme exponentiel de Z' dans le cas où Z = 3, puis vérifier que $(Z')^{10}$ est imaginaire pure.
2) Soit Z = x + iy et Z′ = x′ + iy′, où x, y, x′, et y′ sont des nombre réel.
   a) Écrire x′ et y′ en termes de x et y.
   b) Déterminer l'ensemble des points M tel que Z' est un nombre réel.
3)
   a) Démontrer que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) + 2k\pi$
   b) Déduire l'ensemble des points M où Z′ est un nombre imaginaire pur.
4)
   a) Démontrer que $(Z'-1)(Z-1) = 2i$.
   b) Déduire que, pour que le point M distinct de A, on a : AM $\times$ AM′ = 2
   c) Supposons que M varies sur le cercle de center A et de rayon 1. Démontrer que M' varies sur un cercle fixe à déterminer.

V-

Dans la figure adjacente : A



- ABC est un triangle rectangle isoscèles direct en A.
- AB = 1
- I le milieu de [AC].
- EGB est un triangle rectangle isoscèles direct en G.
- (AE) coupe (IB) en G.

Soit S la similitude de centre B, et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1) Montrer que S(C) = A, et déterminer S(E).
2) Soit S′ la similitude qui transforme A en C et C en B.
3) Montrer que le ratio de S′ est de rapport $\sqrt{2}$, et d'angle $\frac{5\pi}{4}$.
4) Soit f = S'o S'.
   a- Déterminer la nature, et le rapport de f, puis vérifier que l'angle de f est $\frac{\pi}{2}$ [2π].
   b- Montrer que tan $(\widehat{ABI}) = \frac{1}{2}$, déduire que GB = 2 GA.
   c- Déterminer f (A), déduire que G est le centre de S'.
5) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
   a- Trouver la forme complexe de S'.
   b- Déterminer l'affixe de G et celle de B' l'image de B par S'.

VI-

Le plan est muni du repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère le point A (3, 2).

Soit N (a, 0) et P (0, b) deux point telle que le triangle ANP est rectangle en A.

1) Soit E (3, 0) et F (0, 2).

   Soit S la similitude directe de centre A qui transforme E en F.

   Déterminer le rapport et l'angle de S.

2) Trouver l'image de (ON) par S, déduire que S (N) = P.

3) Soit M et M' les point d'affixe z et z' respective telle que S(M) = M'.

   Démontrer que $z' = -\frac{3}{2}\mathrm{i}z + \frac{13}{2}\mathrm{i}$

4) Démontrer que 3a + 2b = 13.

VII-

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par f(x) = f(x) = $a(\ln x)^2 + b \ln x$, où a et b sont deux paramètre réels, et désignons par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$. (Unité 2cm).

Le tableau ci-dessous est celle de variation de la fonction f ', **la dérivée de f**.

x	0		1		$+\infty$
f ''(x)		+	0	−	
f ' (x)	$-\infty$	↗	2	↘	0

1) Démontrer que a = 1 et b = 2.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter les résultats graphiquement.

3) Déterminer les abscisses des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

4) a) Calculer f '(x) puis dresser le tableau de variations de f.

b) Démontrer que (C) admet un point d'inflexion I et écrire une équation de la tangent (d) à (C) en I.

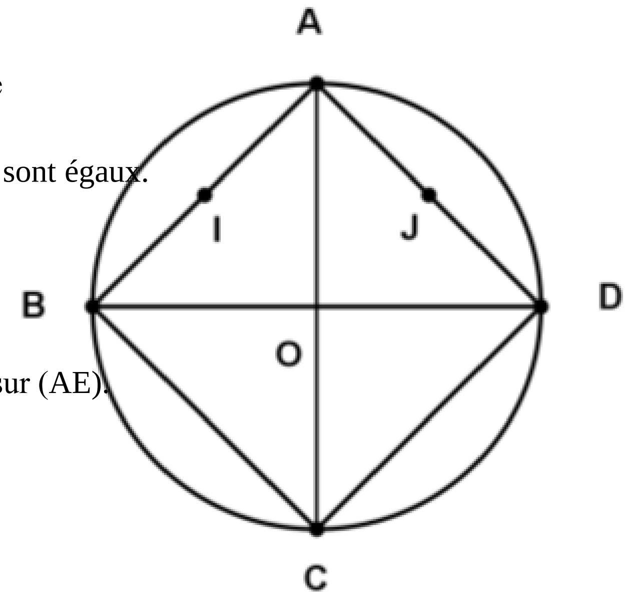
5) Tracer (d) et (C).

VIII-

Dans le plan orienté direct. On considère le carré direct ABCD, inscrit dans le cercle (Ω) de centre O et rayon 2.

Soit I, et J les milieux respective de [AB], et [AD].

Soit S la similitude qui transforme A en B et J en O.



Indication:

- Dans un cercle, l'angle au centre mesure le double d'un angle inscrit interceptant le même arc.
- Dans un cercle, deux angles inscrits interceptant le même arc sont égaux.

1)
   - a- Déterminer le rapport et un angle de S.
   - b- Démontrer que S(O) = C.
   - c- Déduire que D est le centre de S.
2) (CI) coupe (Ω) en E, et soit H le projeté orthogonal de B sur (AE).
   - a- Démontrer que E est le milieu de [AH].
   - b- Déduire que $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = -EA^2$.
   - c- Montrer d'autre part que $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = -\frac{\sqrt{2}}{2}EA.EB$.
3) Soit S' la similitude direct de centre E qui transforme B en A.

   Déterminer le rapport de S', et démontrer qu'un angle de S' est $\frac{3\pi}{4}$.
4) Soit F le troisième sommet de triangle rectangle isocèle direct FBD en B.
   - a- Déterminer S'oS (A), puis déterminer la nature et les caractéristique de S'oS.
   - b- Démontrer que S'oS (D) = F, puis déduire S'(D).
5) Le plan est muni du repère orthonormal $(B,\vec{u},\vec{v})$ telle que O (2, 0) et A (2, 2).
   - a- Déterminer la forme complexe de S et de S', déduire l'affixe de E.
   - b- Déterminer l'affixe de B' l'image de B par S.

IX-

On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{U_n^{\ 2}+1}{2}} \end{cases}$, pour tous n∈ ℕ.

1)
   - a- Montrer par récurrence que $0 < U_n < 1$.
   - b- Montrer que la suite (U_n) est croissante.
   - c- En déduire que et convergente et calculer sa limite.
2) On considère la suite $V_n = U_n^{\ 2} - 1$.
   - a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique, dont le rapport commun et le premier terme sont à déterminer
   - b- Calculer V_n et U_n en fonction de n.
   - c- Retrouver la limite de U_n.

.

X-

Partie A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=1-e^{2x}-2xe^{2x}$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
2) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction g.
3) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+3-xe^{2x}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x-3\right]$. En déduire que la courbe (C) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote (Δ) que l'on déterminera l'équation.

   b) Etudier la position relative de (C) et (Δ).

   c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et donner la valeur de f(1) à 10^{-1} près.

2) Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=g(x)$, et dresser le tableau de variation de la fonction f.
3) Démontrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I que l'on déterminera les coordonnées.
4) Vérifier que (C) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives α et β tels que $-3,5<\alpha<-3$ et $0,5<\beta<1$.
5) Tracer (Δ) et (C).

7) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x)=\dfrac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}$.

   a) Vérifier que pout tout x de $\mathbb{R}^*$, $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction h.