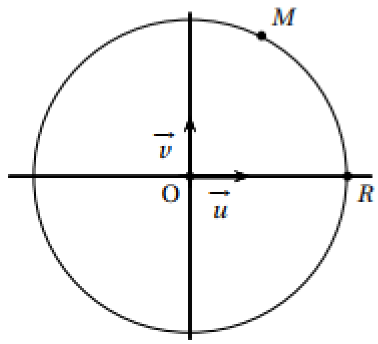
Consolidation 7 : Complexes

Exercice 1:

Partie A

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ on a placé un point M d'affixe z appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe $\left[O\ ;\ \vec{u}\right)$.



1. Exprimer l'affixe du point R en fonction de z.

2. Soit le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z+|z|}{2}\right).$$

Reproduire la figure sur la copie et construire le point M'.

Partie B

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à $\mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0.

1. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif?
2. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif?
3. On suppose désormais que z_0 n'est pas un nombre réel.
   a. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?
   b. Démontrer cette conjecture, puis conclure.

Exercice 2:

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

   b. Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.
3. Démontrer les égalités suivantes :
   a. $j^3 = 1$;
   b. $j^2 = -1 - j$.
4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.
   Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = j(c - b)$.
2. En déduire que AC = BC .
3. Démontrer l'égalité : $a - b = j^2(b - c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.*

Exercice 3 :

Les questions 1. et 2. de cet exercice pourront être traitées de manière indépendante.

On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par

$$z_n = \frac{1+i}{(1-i)^n}.$$

On se place dans le plan complexe d'origine O.

1. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.
   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\frac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.
   b. Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.
2. Pour quelles valeurs de n le nombre z_n est-il réel?