

Exercice 1 [15 points]

Granulométrie d'une poudre de cacao

Le but est la détermination, par la diffraction, de la taille moyenne de poudre de cacao.

Document 1 : Granulométrie laser de la poudre de cacao

L'instrument de mesure ci-contre permet de mesurer la taille de particules allant de 40 nm à 2500 μm en utilisant deux diodes laser de longueurs d'onde 635 nm et 830 nm.



Document 2 : Différents types de chocolat

Le succès du chocolat, auprès des consommateurs, est lié à des caractéristiques gustatives bien identifiées et à la granulométrie de chacun des constituants.

Cette dernière propriété représente un enjeu important du procédé de fabrication puisque des particules, trop finement broyées, rendront le chocolat collant alors que de trop grosses particules lui donneront un aspect granuleux à l'œil et en bouche.

Document 3 : Théorème de Babinet

Deux objets sont complémentaires si les parties opaques de l'un correspondent à des parties transparentes de l'autre et inversement. Les figures de diffraction de deux objets complémentaires sont identiques.

Par exemple, la figure de diffraction d'un fil de diamètre a est identique à celle d'une fente de largeur a .



La mesure de la taille des particules, par diffraction laser, est une technique simple et rapide, adaptée à la détermination de la distribution granulométrique de tous les types de chocolat comme les chocolats de couverture utilisés pour le nappage, les chocolats au lait ou les chocolats agglomérés utilisés pour les recettes instantanées.

Type de chocolat	De couverture	Au lait	Aggloméré
$a^{(*)}$ en μm	10	30	300

$a^{(*)}$ représente le diamètre moyen recommandé de la poudre de cacao pour un type de chocolat.

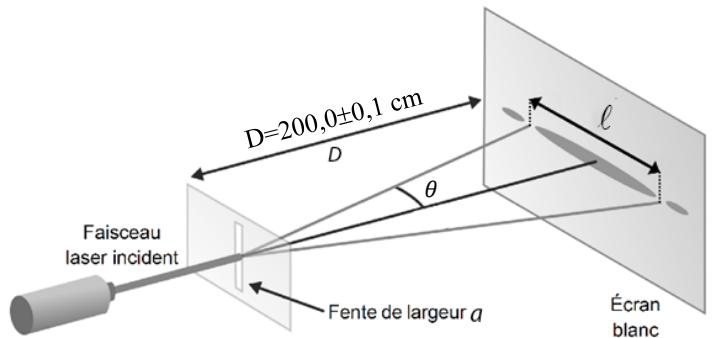
Les deux parties A et B sont indépendantes.

A- Vérification de la longueur d'onde d'une des diodes laser utilisées

L'objectif de cette partie est de vérifier la valeur de la longueur d'onde λ d'une des diodes laser utilisées dans l'appareil de granulométrie. Sur le trajet du faisceau laser, on intercale des fentes de différentes largeurs. Sur un écran placé à une distance D , on observe une figure de diffraction.

ℓ représente la largeur de la tache centrale et θ le demi-angle au sommet exprimé en radian.

Donnée : Approximation d'un petit angle θ , exprimé en radian : $\sin \theta \approx \theta$ et $\tan \theta \approx \theta$;



1.1. Pour une longueur d'onde donnée, décrire l'évolution du demi-angle θ en fonction de la largeur a de la fente.

1.2. Donner la relation qui lie λ , θ et a .

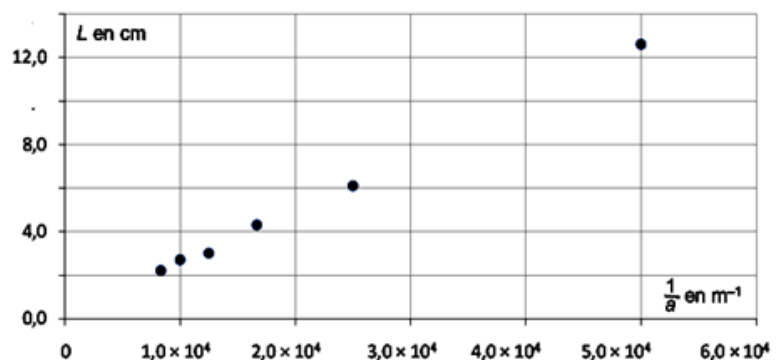
2. La largeur ℓ de la tache centrale de diffraction peut s'exprimer sous la forme : $\ell = k \times \frac{1}{a}$.

Donner l'expression de la constante k en fonction de D et λ .

3. Expérimentalement, on mesure la largeur de la tache centrale ℓ pour des fentes calibrées de différentes valeurs de a et on porte les valeurs obtenues sur le graphique ci-contre.

3.1. Déterminer graphiquement la valeur de k en m^2 , avec trois chiffres significatifs.

3.2. En déduire la valeur de la longueur d'onde λ de la diode laser utilisée.



4. L'incertitude absolue sur la longueur d'onde λ , notée $u(\lambda)$, peut être déterminée à partir de la relation suivante :

$$u(\lambda) = \lambda \sqrt{\left(\frac{u(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{u(k)}{k}\right)^2}$$

L'incertitude absolue sur la valeur du coefficient directeur est $u(k) = 1,2 \times 10^{-7} \text{ m}^2$.

Exprimer la valeur de λ avec son incertitude, confronter aux valeurs données par le fabricant de l'appareil et, puis, conclure.

B- Étude de la diffraction par la poudre de cacao

Dans cette partie, on considère que l'on peut déterminer le diamètre moyen des grains de cacao d'une poudre donnée en utilisant une figure de diffraction réalisée avec la diode laser de longueur d'onde $\lambda = 635 \text{ nm}$.

Donnée : Expérience de diffraction par un trou circulaire:

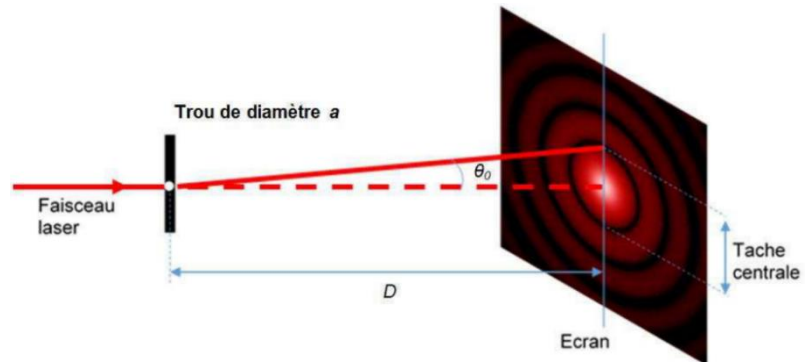
La figure de diffraction obtenue par un trou circulaire est constituée de cercles concentriques alternativement brillants et sombres avec :

$$\sin \theta_0 = \frac{1,22 \cdot \lambda}{a},$$

λ : longueur d'onde du faisceau laser, exprimée en mètre,

a : diamètre du trou, exprimé en mètre,

θ_0 : demi-angle au sommet, exprimé en radian.



1. En utilisant un montage proche de celui donné ci-dessus, on réalise l'expérience sur un échantillon de poudre de cacao.

Sachant que les grains de cacao sont assimilés à des sphères, justifier le fait qu'on observe une figure de diffraction identique à celle obtenue avec un trou circulaire.

2. Lors du contrôle d'un échantillon de poudre de cacao, on obtient que la valeur du demi-angle est $\theta_0 = 0,018 \text{ rad}$. Peut-on utiliser cet échantillon pour un chocolat de couverture ?

Exercice 2 [15 points]

Lancement de la fusée Ariane

(Certains renseignements et données sont nécessaires à la résolution du sujet).

Le premier lanceur Ariane est une fusée à trois étages dont la hauteur totale est de 47,4 m et qui pèse, avec sa charge utile (satellite), 208 tonnes au décollage.

Le premier étage qui fonctionne pendant 145 secondes est équipé de 4 moteurs Viking V alimentés par du peroxyde d'azote N_2O_4 (masse de peroxyde emportée : 147,5 tonnes).

L'intensité de la force de poussée totale \vec{F} de ces 4 réacteurs est constante pendant leur fonctionnement: elle vaut $F = 2445 \text{ kN}$.

Ce lanceur peut mettre en orbite circulaire basse, de 200 km d'altitude, un satellite de 4850 kg ; il peut également placer sur une orbite géostationnaire un satellite de 965 kg ; il peut aussi être utilisé pour placer en orbite héliosynchrone des satellites très utiles pour des applications météorologiques.

D'après Encyclopedia Universalis (1998)

Le champ de pesanteur \vec{g} est supposé uniforme : son intensité est $g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

On choisit un axe Oz vertical dirigé vers le haut.

On étudie le mouvement de la fusée dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen.

1. Représenter clairement, sur un schéma, en les nommant, les deux forces qui agissent sur la fusée Ariane lorsqu'elle s'élève verticalement. On néglige les frottements et la poussée d'Archimède dans l'air.

2. À un instant t quelconque, la masse de la fusée est m .

2.1. Déterminer, en fonction de m et des intensités des 2 forces précédentes, la valeur de l'accélération a .

2.2. On considère d'abord la situation au décollage. La masse de la fusée vaut alors m_1 . Calculer la valeur numérique de l'accélération a_1 à cet instant.

2.3. On envisage la situation qui est celle immédiatement avant que tout le peroxyde d'azote ne soit consommé. La masse de la fusée vaut alors m_2 . Calculer la valeur numérique de m_2 puis celle de l'accélération a_2 à cet instant. Le mouvement d'ascension de la fusée est-il uniformément accéléré ?

3. La vitesse d'éjection \vec{V}_e des gaz issus de la combustion du peroxyde d'azote est donnée par la relation:

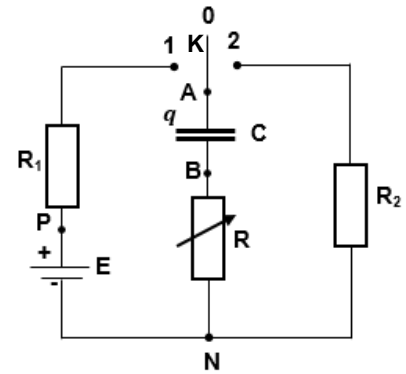
$\vec{V}_e = \frac{\Delta t}{\Delta m} \cdot \vec{F}$ où $\frac{\Delta t}{\Delta m}$ est l'inverse de la variation de masse de la fusée par unité de temps et caractérise la consommation des moteurs.

3.1. Calculer la valeur numérique de V_e .

3.2. Quel est le signe de $\frac{\Delta t}{\Delta m}$? En déduire le sens de \vec{V}_e . Qu'en pensez-vous ?

Exercice 3 [20 points]**Circuit RC série**

Le circuit électrique, représenté par la figure 1 (Fig. 1), est constitué d'un générateur idéal de tension de f.é.m. E , de deux conducteurs ohmiques (R_1) et (R_2) de résistances respectives R_1 et R_2 , d'un conducteur ohmique (R) de résistance R réglable, d'un condensateur (C) de capacité C , initialement déchargé, et d'un commutateur K .

**Fig. 1****A-I. Étude théorique de la charge**

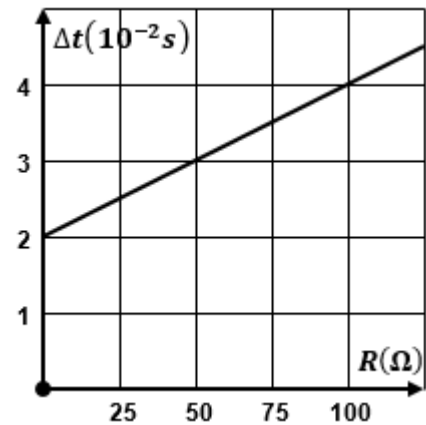
À l'instant $t_0 = 0$, on place le commutateur K sur la position 1. À un instant t , le circuit est parcouru par un courant d'intensité i , $u_C = u_{AB}$ est la charge de (C) qui porte une charge $q = C u_C$.

1. Établir l'équation différentielle régissant la variation de u_C en fonction de t .
2. La solution de cette équation étant de la forme $u_C = A(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}})$, montrer que les expressions de A et τ_1 sont $A = E$ et $\tau_1 = (R + R_1) C$.
3. Dédire l'expression de l'intensité i du courant électrique en fonction de E , t et τ_1 .

A-II. Étude expérimentale de la charge

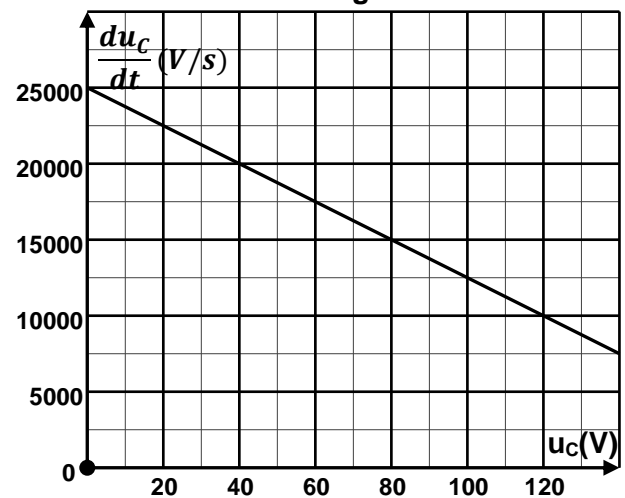
Expérience 1 : On veut déterminer expérimentalement la valeur de C et celle de R_1 . Pour cela, on donne à R différentes valeurs et on mesure, pour chacune de ces valeurs, la durée Δt au bout de laquelle (C) est pratiquement complètement chargé. Un dispositif (D) nous a permis d'obtenir le tracé de la courbe d'évolution de Δt en fonction de R (Fig. 2).

1. Justifier théoriquement l'allure de la courbe de $\Delta t = f(R)$.
2. En se référant au graphe, déterminer C et en déduire R_1 .

**Fig. 2**

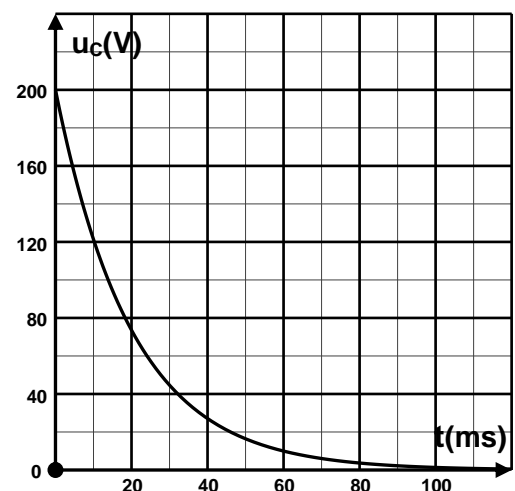
Expérience 2 : Au cours de cette expérience, on fixe la valeur de R à une valeur R_0 constante et à l'aide de (D), on a obtenu le tracé de la courbe d'évolution de $\frac{du_C}{dt}$ en fonction de u_C (Fig. 3).

1. Déterminer, à partir du graphe, la valeur de τ_1 .
2. Calculer la valeur de R_0 .
3. Dédire la valeur de la f.é.m. E du générateur.

**Fig. 3****B- Étude de la décharge**

Lorsque l'intensité du courant s'annule dans le circuit, on bascule le commutateur K sur la position 2 à un instant choisi comme une nouvelle origine des temps ($t_0 = 0$); (C) commence à se décharger à travers (R) et (R_2). À un instant t , le circuit est parcouru par un courant d'intensité i , dans le sens réel, et (C) est chargé de q .

1. Établir l'équation différentielle régissant la variation de u_C en fonction de t .
2. Vérifier que $u_C = E e^{-\frac{t}{\tau_2}}$ est la solution de l'équation différentielle précédente avec $\tau_2 = (R_0 + R_2) C$.
3. À l'aide de (D), on a obtenu le tracé de la courbe d'évolution de u_C en fonction du temps (Fig. 4).
- 3.1. Déterminer la valeur de τ_2 en précisant la méthode utilisée.
- 3.2. En déduire la valeur de la résistance R_2 .
4. On remplace le conducteur ohmique (R_2) par une lampe à halogène qui fonctionne entre 100V et 200V. Après avoir chargé le condensateur, on bascule le commutateur K sur la position 2. Déterminer la durée pendant laquelle la lampe reste allumée.

**Fig. 4**

Exercice 4 [10 points]

La mission GRACE-FO

L'attraction gravitationnelle de notre planète varie faiblement d'un mois à l'autre. Ces faibles variations de la gravité sont principalement dues à une infime fraction de la masse terrestre, constamment en mouvement, essentiellement de l'eau : la pluie tombe, l'océan s'évapore, les courants océaniques coulent, la glace fond...

Le 22 mai 2018, deux satellites scientifiques GRACE-FO (Gravity Recovery and Climate Experiment – Follow-on) sont lancés. Ces deux satellites jumeaux situés sur la même orbite ont pour objectif de mesurer avec une grande précision les variations mensuelles du champ de gravité de la Terre afin de suivre les masses d'eau liquide ou gelée.



Caractéristiques de l'orbite

L'orbite des satellites de la mission GRACE-FO est quasi circulaire à l'altitude z égale à 490 km. L'inclinaison du plan de la trajectoire sur l'équateur est égale à 89,0 degrés ; on parle d'une orbite polaire. Les deux satellites jumeaux se déplacent sur la même orbite à une distance, notée L , de 220 km l'un de l'autre. Leur altitude leur permet de parcourir environ 15 fois leur orbite polaire par jour et d'obtenir ainsi une cartographie mensuelle de l'évolution des masses d'eau. On étudie le mouvement d'un de ces satellites, de masse m , dans le référentiel géocentrique considéré galiléen.

Données :

- constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
- masse de la Terre : $M_T = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$
- rayon de la Terre : $R_T = 6\,371 \text{ km}$

1. Sur la copie, faire un schéma, sans souci d'échelle, montrant la Terre (de centre T) et le rayon R_T , et le satellite de centre S sur son orbite à une altitude z .

Représenter sur ce schéma un vecteur unitaire \vec{n} dirigé du satellite vers la Terre.

2. Donner l'expression vectorielle, en fonction de G , m , M_T , R_T , z et \vec{n} , de la force gravitationnelle $\vec{F}_{T/S}$ exercée par la Terre sur le satellite supposé ponctuel.

Représenter ce vecteur-force, sans souci d'échelle, sur le schéma réalisé à la question 1.

3. En déduire l'expression vectorielle du champ de pesanteur terrestre \vec{g} .

4. En considérant uniquement l'action de la Terre, établir l'expression vectorielle de l'accélération \vec{a} du satellite.

5. Montrer que, dans le cadre de l'approximation d'une orbite circulaire, le mouvement du satellite est uniforme.

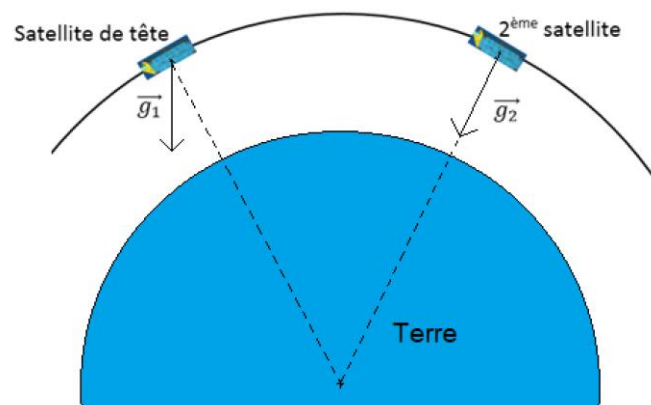
6. Montrer alors que l'expression de la vitesse v du

satellite s'exprime par la relation : $v = \sqrt{\frac{G M_T}{(R_T + z)}}$.

7. En déduire la valeur de la période de révolution du satellite et vérifier qu'elle est conforme à l'information de l'énoncé : « leur altitude leur permet de parcourir environ 15 fois leur orbite polaire par jour ».


8. On s'intéresse à la situation particulière schématisée ci-contre. Le satellite de tête passe au-dessus d'une zone où le champ gravitationnel \vec{g}_1 n'est pas centripète alors que le deuxième satellite survole une zone où règne un champ gravitationnel \vec{g}_2 centripète.

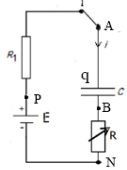
Dans le cas de la situation schématisée, expliquer, en détaillant le raisonnement, si la distance, L , entre les deux satellites reste constante, augmente ou bien diminue.



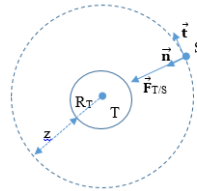
(Les échelles ne sont pas respectées)

Exercice 1 (15 points)		
A-1.1	La longueur d'onde λ est fixée. θ sera plus élevé si la largeur a de la fente est plus faible.	1
A-1.2.	On retrouve cette idée dans la relation $\theta = \frac{\lambda}{a}$.	1,5
A-2.	À l'aide du schéma, on peut écrire : $\tan\theta = \frac{\frac{L}{2}}{D} = \frac{L}{2D}$. Dans le cadre de l'approximation des petits angles : $\theta \approx \tan\theta = \frac{L}{2D}$. Or $\theta = \frac{\lambda}{a}$, donc : $\frac{L}{2D} = \frac{\lambda}{a}$. On en déduit que l'on peut écrire : $L = \frac{2\lambda \cdot D}{a}$.	2
A-3.	Vu que $L = k \times \frac{1}{a}$ avec $k = 2 \lambda \cdot D$, la courbe $L = f\left(\frac{1}{a}\right)$ est portée par une droite passant par l'origine de coefficient directeur k . On trace la droite modélisée (passant au plus près de tous les points expérimentaux), on détermine son coefficient directeur : $k = \frac{\Delta L}{\Delta(1/a)} = \frac{10,0 \times 10^{-2} - 0}{4,0 \times 10^{-4} - 0} = 2,5 \times 10^{-6} \text{ m}$ (ATTENTION L doit être en mètre pour que la relation soit homogène) Or $k = 2 \lambda \cdot D$, donc $\lambda = \frac{k}{2D}$. $\lambda = \frac{2,5 \times 10^{-6}}{2 \times 200 \times 10^{-2}} = 6,25 \times 10^{-7} \text{ m} = 625 \text{ nm}$.	1,5 1
A-4.	$\frac{u(D)}{D} = \frac{0,1}{200} = 5 \times 10^{-4}$ et $\frac{u(k)}{k} = \frac{1,2 \times 10^{-7}}{2,5 \times 10^{-6}} = 4,8 \times 10^{-2}$. Ainsi, $u(\lambda) = 6,25 \times 10^{-7} \sqrt{(5 \times 10^{-4})^2 + (4,8 \times 10^{-2})^2} = 3 \times 10^{-8} \text{ m}$ ou 30 nm. Ainsi, $\lambda = (625 \pm 30) \text{ nm}$. La valeur de 635 nm, donnée par le fabricant, est bien incluse dans l'intervalle de confiance (l'encadrement). Les mesures sont validées	2 1
B-1.	Le grain sphérique se comporte comme un obstacle circulaire et donne donc la même figure de diffraction que celle d'un trou de même dimension (objets complémentaires).	2
B-2.	Or $\sin \theta_0 = \frac{1,22 \cdot \lambda}{a}$ donc $a = \frac{1,22 \cdot \lambda}{\sin \theta_0}$ et $a = \frac{1,22 \times 635 \times 10^{-9}}{\sin(0,018)} = 4,3 \times 10^{-5} \text{ m} = 43 \text{ } \mu\text{m}$. D'après le document 2, ces grains sont trop gros pour être utilisés comme chocolat de couverture dont le diamètre moyen vaut $a = 10 \text{ } \mu\text{m}$.	2 1

Exercice 2 (15 points)		
1.	<p>Système: Ariane - Référentiel terrestre supposé galiléen</p> <p>Inventaire des forces:</p> <p>\vec{F}_T: Force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre</p> <p>\vec{F}: Force de poussée</p> 	1
2.1.	<p>On applique la 2^{ème} loi de Newton: $\vec{F}_T + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$</p> <p>Par projection sur l'axe O_z vertical dirigé vers le haut: $-F_T + F = m \cdot a$</p> <p>$a = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{F - F_T}{m}$ on assimile F_T à la force poids soit $F_T = m \cdot g_0$,</p> <p>$\Rightarrow a = \frac{F}{m} - g_0$</p>	1 2
2.2.	<p>$a_1 = \frac{F}{m_1} - g_0 = \frac{2445 \times 10^3}{208 \times 10^3} - 9,8$ et $a_1 = 1,95$.</p> <p>Donc $a_1 = 1,95 \text{ m.s}^{-2}$.</p>	2
2.3.	<p>$m_2 = m_1 - \text{partie de la masse de peroxyde d'azote emporté} = m_1 - m'$ où $m' < 147,5 \times 10^3 \text{ kg}$.</p> <p>$m_2 > m'_2 = 208 \times 10^3 - 147,5 \times 10^3 = 60,5 \times 10^3 \text{ kg}$, soit : $\frac{1}{m'_2} > \frac{1}{m_2}$;</p> <p>$a_2 = \frac{F}{m_2} - g_0 < a'_2 = \frac{F}{m'_2} - g_0 = \frac{F}{m'_2} - g_0 = \frac{2445 \times 10^3}{60,5 \times 10^3} - 9,8 = 30,6 \text{ m.s}^{-2}$,</p> <p>La masse de la fusée a diminué de m_1 à m'_2, ainsi, la valeur de l'accélération a augmenté au cours du temps de $a_1 = 1,95 \text{ m/s}^2$ à $a'_2 = 30,6 \text{ m/s}^2$. Le mouvement n'est pas alors uniformément accéléré. (a non cte).</p>	3,5
3.1.	<p>Calcul de V_e : en $\Delta t = 145$ secondes, la fusée subit une variation de masse $\Delta m = 147,5$ tonnes.</p> <p>$V_e = \frac{\Delta t}{ \Delta m } \cdot F = \frac{145}{147,5 \times 10^3} \times 2445 \times 10^3 = 2,40 \times 10^3 \text{ m.s}^{-1}$;</p>	2,5
3.2.	<p>$\frac{\Delta t}{\Delta m}$ est négatif puisque $\Delta m < 0$ (perte de masse)</p> <p>Donc \vec{V}_e est orienté vers le bas, opposé à \vec{F}.</p> <p>Ceci est logique, les molécules de gaz sont éjectées de la fusée, elles s'éloignent de celle-ci.</p>	3

Exercice 3 (20 points)		
A-1.	<p>Loi d'additivité des tensions $u_{PN} = u_{PA} + u_{AB} + u_{BN}$. avec $u_{AB} = u_C$ et d'après la loi d'Ohm: $u_{PA} = R_1 i$ et $u_{BN} = R i$.</p> <p>$E = R_1 i + u_C + R i = (R_1 + R) i + u_C \quad \forall t$</p> <p>$i$ se dirige vers l'armature chargée de $q \Rightarrow i = \frac{dq}{dt}$ et $q = C u_C$ alors $i = C \frac{du_C}{dt}$.</p> <p>$E = (R_1 + R)C \frac{du_C}{dt} + u_C$</p>	 <p>2</p>
A-2.	<p>La solution est $u_C = A (1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}})$, $\frac{du_C}{dt} = \frac{A}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$</p> <p>En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient :</p> <p>$E = (R_1 + R) C \frac{A}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + A (1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}) = A e^{-\frac{t}{\tau_1}} [-1 + \frac{(R+R_1)C}{\tau_1}] + A$</p> <p>$A e^{-\frac{t}{\tau_1}} [-1 + \frac{(R+R_1)C}{\tau_1}] + (A - E) = 0$, et par identification, on a :</p> <p>$(A - E) = 0$ et $-1 + \frac{(R+R_1)C}{\tau_1} = 0$, soit : $A = E$ et $\tau_1 = (R_1 + R) C$.</p>	2
A-3.	Sachant que $u_C = E (1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}})$, $i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$	1
A.II (1^e)-1.	<p>$\Delta t = 5 \tau_1$ = durée au bout de laquelle la charge du condensateur est complète.</p> <p>$\Delta t = 5 \tau_1 = 5 (R_1 + R) C = 5C.R + 5 R_1 C$, c'est l'équation de la forme $\Delta t = a R + b$, où $b = 5 R_1 C$ et $a = 5 C$ la pente de la droite portant la courbe</p>	2
A.II (1^e)-2.	<p>La pente s'écrit : $a = 5 C = \frac{(4-2) \times 10^{-2}}{100}$ et $C = 0,4 \times 10^{-4} = 4 \times 10^{-5} \text{ F}$ ou $40 \mu\text{F}$.</p> <p>La constante b s'écrit (ordonnée à l'origine), $b = 5 R_1 C = 2 \times 10^{-2}$</p> <p>et $R_1 = \frac{2 \times 10^{-2}}{5 \times 40 \times 10^{-6}} = 100 \Omega$.</p>	2
A.II (2^e)-1.	<p>De l'équation différentielle, on tire : $\frac{du_C}{dt} = \frac{E - u_C}{\tau_1} = \frac{E}{\tau_1} - \frac{u_C}{\tau_1}$</p> <p>$-\frac{1}{\tau_1}$ est alors la pente p de la droite portant la courbe:</p> <p>$p = -\frac{1}{\tau_1} = \frac{-5-0}{0,04-0} = -125$ et $\tau_1 = \frac{1}{125} = 0,008 \text{ s}$</p>	2
A.II (2^e)-2.	Sachant que $\tau_1 = (R_1 + R_0) C$. Alors $R_0 = \frac{\tau_1}{C} - R_1$ et $R_0 = \frac{0,008}{40 \times 10^{-6}} - 100 = 100 \Omega$.	1
A.II (2^e)-3.	<p>On sait que : $\frac{du_C}{dt} = \frac{E - u_C}{\tau_1}$.</p> <p>À la date $t_0 = 0$, $u_{C0} = 0$, soit : $(\frac{du_C}{dt})_{t=0} = 25000 = \frac{E}{0,008}$, $E = 200 \text{ V}$.</p>	1,5
B-1.	<p>À la fin de la charge $u_C = E$.</p> <p>Soit, à la date $t_0 = 0$, $u_{C0} = E$.</p> <p>À une date t, i, dans le sens réel, se dirige vers l'armature chargée de $(-q)$: $i = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{du_C}{dt}$</p> <p>Loi d'additivité des tensions: $u_{AN} = u_{AB} + u_{BN}$. Avec $u_{AB} = u_C$ et</p> <p>D'après la loi d'Ohm: $u_{AN} = R_2 i$ et $u_{BN} = -R i$.</p> <p>$R_2 i = -R_0 i + u_C \Rightarrow u_C = (R_2 + R_0) i$</p> <p>Dérivons par rapport au temps : $u_C = - (R_2 + R_0) C \frac{du_C}{dt}$, soit : $u_C + (R_2 + R_0) C \frac{du_C}{dt} = 0$.</p> <p>L'équation différentielle est alors: $u_C + (R_2 + R_0) C \frac{du_C}{dt} = 0$.</p>	1,5
B-2.	<p>Vérification : $u_C = E.e^{-\frac{t}{\tau_2}}$; $\frac{du_C}{dt} = -\frac{E}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$</p> <p>Remplaçons dans l'équation différentielle: $E.e^{-\frac{t}{\tau_2}} - (R_2 + R_0) C \frac{E}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} = E.e^{-\frac{t}{\tau_2}} [1 - \frac{(R_2 + R_0)C}{\tau_2}] = 0$</p> <p>car $\tau_2 = (R_0 + R_2)C$</p>	1,5
B-3.1	<p>Au cours de la décharge, à la date $t = \tau_2$, $u_C = 0,37 E = 74 \text{ V}$</p> <p>En se référant au graphe, $\tau_2 = 20 \text{ ms}$.</p>	1,5

B-3.2.	$\tau_2 = (R_0 + R_2) C ; 0,020 = (100 + R_2) \cdot 4 \cdot 10^{-5}$, soit : $R_2 = 400 \Omega$	1
B-4.	On a : $u_C = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}$ et les valeurs extrêmes de u_C sont 100V et 200 V. $100 = 200 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}$, soit : $t = \tau_2 \cdot \ln 2 = 0,020 \cdot \ln 2 = 0,0139 \text{ s} \approx 14 \text{ ms}$	1

Exercice 4 (10 points)		
1. 2.	$\vec{F}_{T/S} = G \frac{m \cdot M_T}{(R_T + z)^2} \vec{n}$ 	0,5 0,5 0,5 0,5
3.	En assimilant le poids à la force d'interaction gravitationnelle au niveau du sol ($z = 0$) : $\vec{P} = \vec{F}_{T/S}$ donc $m \vec{g} = G \frac{m \cdot M_T}{(R_T + z)^2} \vec{n}$ donc $\vec{g} = G \frac{M_T}{(R_T + z)^2} \vec{n}$	1
4.	Appliquons la 2^{ème} loi de Newton au système {satellite} dans le référentiel géocentrique considéré galiléen : $\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$ Le système n'est soumis qu'à la force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}_{T/S}$ donc: $G \frac{m \cdot M_T}{(R_T + z)^2} \vec{n} = m \vec{a}$; $\vec{a} = G \frac{M_T}{(R_T + z)^2} \vec{n}$	1
5. 6.	Dans le repère de Frenet, $\vec{a} = \frac{V^2}{R_T + z} \vec{n} + \frac{dV}{dt} \vec{t}$ En égalant les deux expressions de \vec{a} , on obtient : - selon \vec{t} : $\frac{dV}{dt} = 0$, donc $v = \text{constante}$: le mouvement est uniforme (et circulaire) ; - Selon \vec{n} : $G \frac{M_T}{(R_T + z)^2} = \frac{V^2}{R_T + z} \Leftrightarrow V^2 = \frac{G \cdot M_T}{(R_T + z)}$ et $V = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{(R_T + z)}}$	1 1,5
7.	La vitesse étant constante, le mouvement est alors périodique de période T. ainsi, on peut écrire, pour une révolution: $V = \frac{\text{périmètre}}{T} = \frac{2\pi(R_T + z)}{T}$ et $T = \frac{2\pi(R_T + z)}{V} = \frac{2\pi(R_T + z)}{\sqrt{\frac{G \cdot M_T}{(R_T + z)}}} \Rightarrow$ Ainsi : $T = \frac{2\pi(R_T + z)^{3/2}}{\sqrt{G \cdot M_T}}$ $T = 2\pi \times \frac{((6371 + 490) \times 10^3)^{3/2}}{\sqrt{6,67 \times 10^{-11} \times 5,98 \times 10^{24}}} = 5,65 \times 10^3 \text{ s} = 1,57 \text{ h}$ Ainsi, en un jour (soit 24 h), les satellites parcourent 24/1,57 soit environ 15 fois leur orbite conformément à l'information de l'énoncé.	1,5
8.	En reprenant les réponses aux questions 3. et 4. : L'expression du vecteur accélération d'un satellite est : $\vec{a} = G \frac{M_T}{(R_T + z)^2} \vec{n} = \vec{g}$ (champ de pesanteur à l'altitude z). Les vecteurs accélération de chaque satellite sont donc égaux à \vec{g} (notés \vec{g}_1 et \vec{g}_2 sur le sujet). • Pour le satellite de tête, le vecteur accélération $\vec{a}_1 = \vec{g}_1$ est dirigé dans le sens du mouvement ce qui est caractéristique d'un mouvement circulaire accéléré : la vitesse du 1^{er} satellite augmente . • Pour le 2 ^{ème} satellite, le vecteur accélération $\vec{a}_2 = \vec{g}_2$ est centripète ce qui est caractéristique d'un mouvement circulaire uniforme : la vitesse du 2^{ème} satellite ne varie pas . Conclusion : la distance L entre les deux satellites augmente	2

Exercice 1 [10 points] Transfert d'énergie et interaction

Une petite boule (A), de masse m_A , est lancée à la vitesse \vec{v}_A sur une petite boule (B), de masse $m_B = \alpha m_A$, initialement immobile. On suppose que le choc est élastique et que les vitesses \vec{v}'_A et \vec{v}'_B respectivement de (A) et (B), juste après le choc, restent colinéaires à \vec{v}_A .

1. Déterminer, en fonction de α et de \vec{v}_A , les expressions de \vec{v}'_A et \vec{v}'_B .

2.1. Exprimer, en fonction de α , le coefficient de transfert $\eta = \frac{E_{C(B) \text{ finale}}}{E_{C(\text{initiale totale de A et B})}}$, quotient de l'énergie cinétique transférée à (B) par l'énergie cinétique initiale totale de (A) et (B).

2.2. Identifier la valeur de α pour laquelle ce transfert est maximal et préciser la situation correspondante.

3. La durée Δt du choc est courte afin de considérer que $\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \approx \frac{d\vec{p}}{dt}$. Déterminer pendant Δt :

3.1. l'expression de la variation de la quantité de mouvement $\Delta \vec{p}_A$ de (A) et celle $\Delta \vec{p}_B$ de (B) en fonction de m_A , α et \vec{v}_A .

3.2. l'expression de la force $\vec{F}_{A/B}$ exercée par (A) sur (B) en fonction de Δt , m_A , α et \vec{v}_A .

Exercice 2 [17 points]

Circuit RC série

Le circuit électrique, représenté par la figure 1, est constitué d'un générateur idéal de tension de f.é.m. $E = 200 \text{ V}$, de deux conducteurs ohmiques (R_1) et (R_2) de résistances respectives R_1 et R_2 , d'un conducteur ohmique (R) de résistance R réglable, d'un condensateur (C) de capacité C , initialement déchargé, et d'un commutateur K .

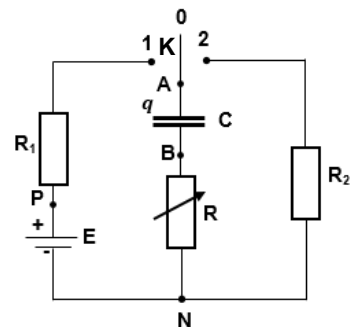


Fig. 1

A-I. Étude théorique de la charge

À l'instant $t_0 = 0$, on place le commutateur K sur la position 1. À un instant t , le circuit est parcouru par un courant d'intensité i , $u_C = u_{AB}$ est la tension aux bornes de (C) qui porte une charge $q = Cu_C$.

1. Établir l'équation différentielle régissant la variation de i en fonction de t .

2. La solution de cette équation étant de la forme $i = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}}$, montrer que les expressions de A et τ_1 sont $A = \frac{E}{R+R_1}$ et $\tau_1 = (R+R_1) C$.

3. Dédurre l'expression de u_C en fonction de E , t et τ_1 .

A-II. Étude expérimentale de la charge

Expérience 1: On veut déterminer expérimentalement la valeur de C et celle de R_1 . Pour cela, on donne à R différentes valeurs et on mesure, pour chacune de ces valeurs, la durée Δt au bout de laquelle (C) est pratiquement complètement chargé. Un dispositif (D) nous a permis d'obtenir le tracé de la courbe d'évolution de Δt en fonction de R (Fig. 2).

1. Justifier théoriquement l'allure de la courbe $\Delta t = f(R)$.

2. En se référant au graphe, déterminer C et en déduire R_1 .

Expérience 2: Au cours de cette expérience, on fixe la valeur de R à une valeur R_0 constante et à l'aide du dispositif (D), on a obtenu le tracé de la courbe d'évolution de $\frac{di}{dt}$ en fonction de i (Fig. 3).

1. Déterminer, à partir du graphe, la valeur de τ_1 .

2. Calculer R_0 .

3. Déterminer, alors, la valeur initiale i_0 de i .

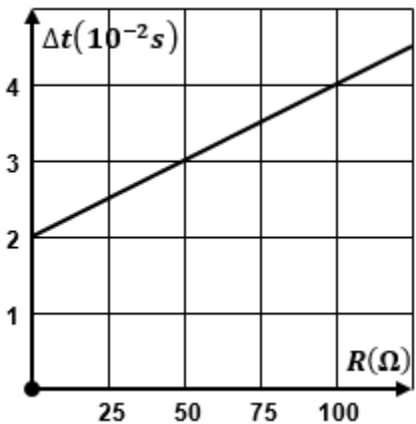


Fig. 2

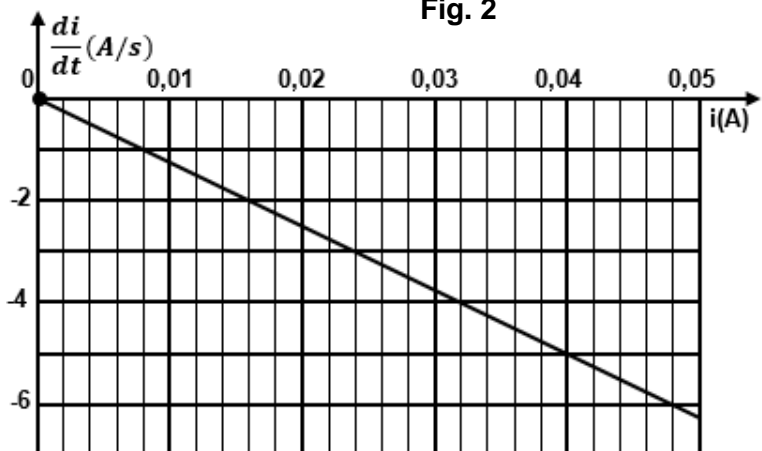


Fig. 3

B- Étude de la décharge

Lorsque l'intensité du courant s'annule dans le circuit, on bascule le commutateur K sur la position 2 à un instant choisi comme une nouvelle origine des temps ($t_0 = 0$) ; (C) commence à se décharger à travers (R) et (R_2). À un instant t, le circuit est parcouru par un courant d'intensité i, dans le sens réel, et (C) est chargé de $q = C.u_C = C.u_{AB}$.

1. Établir l'équation différentielle régissant la variation de i en fonction de t.

2. Vérifier que $i = \frac{E}{R+R_2} e^{\frac{-t}{\tau_2}}$ est la solution de l'équation

différentielle précédente avec $\tau_2 = (R + R_2) C$.

3. À l'aide de (D), on a obtenu le tracé des courbes d'évolution de l'énergie électrique E_c emmagasinée par (C) en fonction du temps pour deux valeurs différentes de R.

$E_{C1} \rightarrow$ pour $R = R_{01}$ et $E_{C2} \rightarrow$ pour $R = R_{02}$

En se référant aux graphes de la figure 4 :

3.1. comparer, en le justifiant, les valeurs de R_{01} et R_{02} .

3.2. calculer, entre les instants $t_0 = 0$ et t_1 , l'énergie dissipée par effet Joule par le circuit pour $R = R_{01}$ et $R = R_{02}$, et puis, conclure.

3.3. comparer les énergies dissipées par le circuit pour $R = R_{01}$ et $R = R_{02}$ entre les instants $t_0 = 0$ et t_2 .

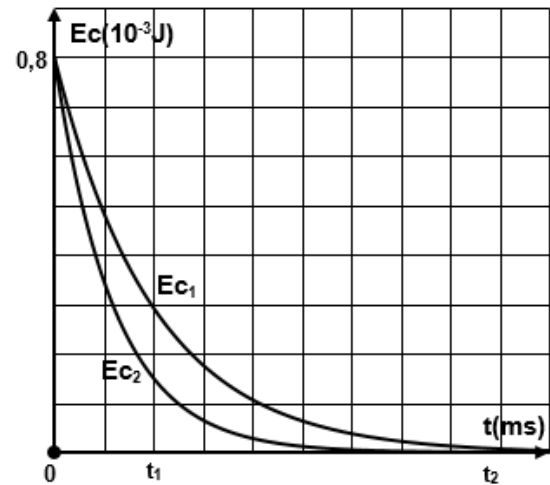
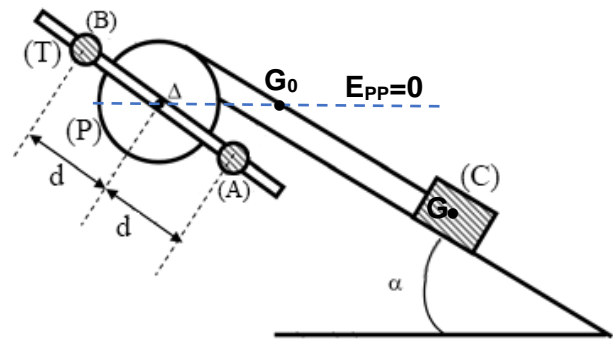


Fig. 4

Exercice 3 [15 points]

Plan incliné et système en mouvement de rotation

Le système (S), représenté par le schéma ci-contre, comprend une tige (T) homogène solidaire d'une poulie (P) de rayon $r = 0,20$ m mobile autour d'un axe horizontal (Δ) passant par son centre. Le moment d'inertie de l'ensemble [(P), (T)] par rapport à (Δ) est I_0 . Sur (T) peuvent coulisser deux particules (A) et (B), chacune de masse m, fixées à égale distance d de (Δ). Le moment d'inertie de l'ensemble [(T), (P), (A), (B)] est $I_A = I_0 + 2md^2$. Un fil inextensible, de masse négligeable, enroulée sur la gorge de (P) porte, à l'autre extrémité, une particule (C), de masse $M = 0,20$ kg et de centre d'inertie G, pouvant glisser le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant un angle $\alpha = 30^\circ$ avec l'horizontale.



Prendre :

- le fil ne glisse pas sur la gorge de la poulie;
- les forces de frottement sont supposées négligeables;
- le plan horizontal contenant G_0 , position de G à la date $t_0 = 0$, et l'axe de rotation (Δ), est le niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur (Figure ci-dessus);
- $g = 10 \text{ m/s}^2$.

On abandonne (S) sans vitesse à la date $t_0 = 0$. À une date t, l'abscisse de G est x, les mesures algébriques de sa vitesse et de son accélération sont respectivement v et a, l'abscisse angulaire de (P) est θ , sa vitesse angulaire est θ' et son accélération angulaire est θ'' . On donne à d différentes valeurs, et à l'aide d'un dispositif approprié, on mesure, pour chaque valeur de d, la valeur v_1 de v au bout d'une distance $x_1 = 0,50$ m parcourue par G.

Les mesures sont groupées dans le tableau ci-dessous :

d(m)	0	0,10	0,20	0,30	0,40
v_1 (m/s)	1,49	1,41	1,24	1,05	0,89
a(m/s ²)		1,99		1,10	0,79
θ'' (rad/s ²)	11,10			5,50	3,95
I_A (kg.m ²)		0,0121		0,0284	0,0426

1.1. Montrer qu'à une date t , l'expression de l'énergie mécanique du système [(S), Terre], est donnée par:

$$E_m = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2 - M g r \theta \sin \alpha$$

1.2. Établir, en considérant le système [(S), Terre], l'expression de θ'' et en déduire la nature du mouvement de la poulie.

2. Compléter le tableau de mesures précédent.

3. En déduire la valeur de I_0 et celle de m .

4. On fixe chaque masselotte à la distance $d = 0,10$ m. (C) est libéré du repos à la date $t_0 = 0$. À la date $t_1 = 5,0$ s, on coupe le fil, et, à partir de t_1 , date choisie comme une nouvelle origine des temps, ($t_0 = 0$), (P) subit l'action d'un couple résistant. À une date t , (P), de vitesse angulaire θ' , subit l'action d'un couple résistant de moment $\mathcal{M} = -K \cdot \theta'$, avec $K = 1,10 \cdot 10^{-3}$ SI. (P) s'arrête après avoir effectué 5 tours.

Le plan horizontal contenant (Δ) est le niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur.

4.1. Établir l'équation différentielle en θ' , associée au système [(P), (T), (A), (B), Terre], sachant que $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{M} \theta'$, où \mathcal{M} est la somme des moments des forces et couples extérieurs appliqués à ce système à la date t .

4.2. La solution de cette équation différentielle est de la forme: $\theta' = a + b \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Déterminer la valeur de chacune des constantes a , b et τ .

4.3. Déterminer, en considérant le système [(P), (T), (A), (B), Terre], la durée au bout de laquelle (P) s'arrête.

Exercice 4 [18 points] Étude du mouvement d'une bille

On dispose d'une bille (B) de masse $m = 200$ g, assimilée à une particule, et d'une piste formée d'une partie rectiligne rugueuse (AB), de longueur $AB = 4,5$ m, inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale, et d'une partie rectiligne lisse (BC) horizontale (Fig. 1).

(B) est lancée, de A, à la date $t_0 = 0$, avec une vitesse \vec{V}_0 . Elle passe, à une date t , par un point M tel que $AM = \ell$. En B, on suppose que la valeur de sa vitesse V_B ne change pas lorsque (B) passe de (AB) à (BC).

Arrivant avec la vitesse \vec{V}_C au point C, situé à une altitude

$h = 3,2$ m du sol, la bille quitte la partie (BC) et tombe, en chute libre, sur le sol rigide en D (Fig. 1).

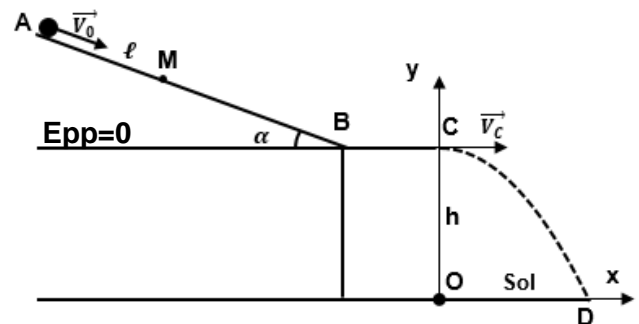


Fig. 1

Prendre:

- le plan horizontal passant par B comme niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur.
- $g = 10$ m/s².

A- Mouvement de la bille entre A et C

Les courbes de la figure 2 montrent les variations de l'énergie mécanique E_m et celle de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} du système (bille, Terre) en fonction de ℓ .

En se référant aux figures, (Fig. 1) et (Fig. 2):

1.1. montrer, qu'au point M, l'expression de E_{pp} est:

$$E_{pp}(M) = (9 - 2\ell) \sin \alpha \quad (E_{pp} \text{ en J et } \ell \text{ en m}).$$

1.2. déduire la valeur de l'angle α .

2. déterminer V_0 et montrer que $V_B = 3,0$ m/s.

3. déterminer la valeur f de la force de frottement \vec{f} , supposée constante, entre A et B.

4. déterminer la valeur de la vitesse de la bille lors de son arrivée en C.

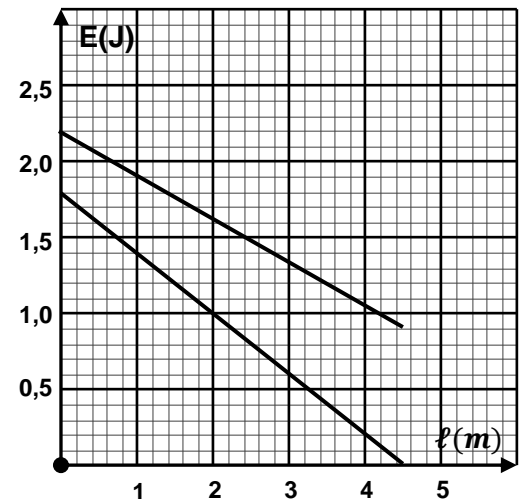


Fig. 2

B- Mouvement à partir de C

Après avoir quitté le point C, la bille effectue une chute libre dans le plan vertical Oxy contenant \vec{V}_C de valeur $V_C = 3,0 \text{ m/s}$. On suppose que la bille quitte le point C à une date t_0 prise comme une nouvelle origine des temps $t_0 = 0$. À un instant t , les coordonnées de la bille sont x et y .

1. En appliquant la deuxième loi de Newton $\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$, déterminer, en fonction du temps t , l'expression de la composante horizontale $P_x = m \cdot V_x$ et celle de la composante verticale $P_y = m V_y$ de la quantité de mouvement \vec{P} de la bille.
2. Dédire que les équations horaires x et y du mouvement de la bille dans le repère Oxy sont données respectivement par $x = 3 t$ et $y = -5 t^2 + 3,2$ (x et y en m et t en s).
- 3.1. Déterminer la durée que met la bille pour passer de C en D, juste avant d'atteindre le sol rigide.
- 3.2. Déterminer V_{yD} ainsi que la valeur V_D et la direction de la vitesse \vec{V}_D de la bille au point D.

C- Coefficient de restitution et rebondissements successifs

Afin de déterminer le coefficient de restitution de la collision de la bille avec le sol, on mesure la durée de chaque rebondissement.

En D, la bille rebondit, juste après le choc sur le sol, avec une vitesse dont la composante verticale s'écrit $\vec{V}_{y1} = q |V_{yD}| \vec{j}$ où q , une constante, est dite coefficient de restitution ($0 < q < 1$).

On prend l'instant juste après le choc comme une origine des temps ($t_0 = 0$) et le point d'impact comme une origine des espaces.

- 1.1. Justifier que l'expression, juste après le choc, de la composante verticale $P_y = m \cdot V_y$ de la quantité de mouvement \vec{P} de la bille $P_y = -mg t + mV_{y1}$.

- 1.2. En déduire que la bille atteint sa hauteur maximale au bout d'une durée $\tau = \frac{V_{y1}}{g} = \frac{q|V_{yD}|}{g}$.

- 1.3. Préciser que la durée Δt_1 du premier rebondissement de la bille est telle que :

$$\Delta t_1 = \frac{2 V_{y1}}{g} = q \frac{2|V_{yD}|}{g}$$

2. Le rebondissement se réalise à plusieurs reprises. Montrer qu'après le $n^{\text{ème}}$ rebondissement, la bille remonte avec une vitesse dont la composante verticale s'écrit : $V_{yn} = q^n \cdot |V_{yD}| = q^{n-1} \cdot |V_{y1}|$.
3. En déduire que, la durée du $n^{\text{ème}}$ rebondissement s'écrit : $\Delta t_n = q^{n-1} \Delta t_1$.
4. La figure ci-dessous montre l'évolution de $\ell_n(\Delta t_n)$ en fonction de n .

Déterminer la valeur de q et celle de Δt_1 .

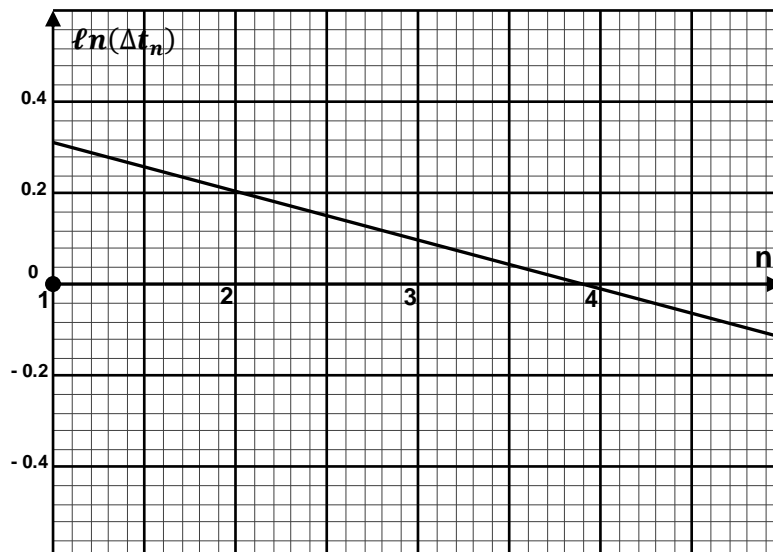
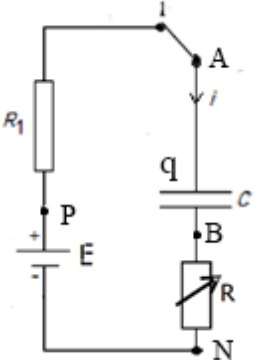


Fig. 3

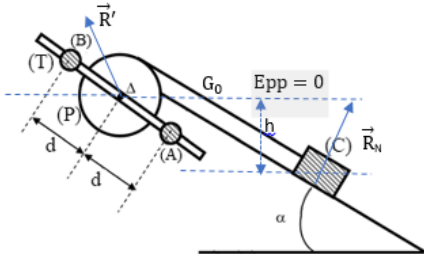
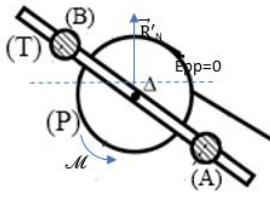
Exercice 1 (10 points)		
1.	Choc élastique, conservation de la quantité de mouvement: $m_A \vec{V}_A + m_B \vec{V}_B = m_A \vec{V}'_A + m_B \vec{V}'_B$ $m_A V_A + 0 = m_A V'_A + \alpha m_A V'_B$ $V_A - V'_A = \alpha V'_B \quad (1)$	0,5
	Choc élastique, conservation de l'énergie cinétique: $\frac{1}{2} m_A V_A^2 + 0 = \frac{1}{2} m_A V'^2_A + \frac{1}{2} m_B V'^2_B$ $m_A V_A^2 + 0 = m_A V'^2_A + \alpha m_A V'^2_B$ $V_A^2 - V'^2_A = \alpha V'^2_B \quad (2)$	0,5
	$\frac{(2)}{(1)} = \frac{V_A^2 - V'^2_A}{V_A - V'_A} = \frac{\alpha V'^2_B}{\alpha V'_B}$ $V_A + V'_A = V'^2_B \quad (3)$	0,5
	$(1) + (3) \Rightarrow 2 V_A = (\alpha + 1) V'_B \Rightarrow V'_B = \frac{2V_A}{1+\alpha};$ <p>Finalemment $\vec{V}'_B = \frac{2\vec{V}_A}{1+\alpha}$</p> $(3) \Rightarrow V'_A = V'_B - V_A = \frac{2V_A}{1+\alpha} - V_A = \frac{2V_A - (1+\alpha)V_A}{1+\alpha} = \frac{(1-\alpha)V_A}{1+\alpha};$ <p>Finalemment $\vec{V}'_A = \frac{(1-\alpha)\vec{V}_A}{1+\alpha}$</p>	1 & 1
2.1	Le coefficient de transfert $\eta = \frac{\frac{1}{2} m_B V'^2_B}{\frac{1}{2} m_A V_A^2 + 0} = \frac{\alpha m_A V'^2_B}{m_A V_A^2} = \frac{4 \cdot \alpha \cdot V_A^2}{(1+\alpha)^2 \cdot V_A^2} = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$	1
2.2	le coefficient de transfert η est maximal pour $\frac{d\eta}{d\alpha} = 0$ $(1+\alpha)^2 - \alpha \cdot 2(1+\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\alpha + \alpha^2 - 2\alpha - 2\alpha^2 = 0 \Rightarrow 1 - \alpha^2 = 0$ Par suite $\alpha = \pm 1$ et comme $\alpha > 0$, alors $\alpha = 1$. ($\frac{d\eta}{d\alpha} > 0$, $\alpha < 1$ et $\frac{d\eta}{d\alpha} < 0$, $\alpha > 1$).	1,5
	Identifier la valeur de α pour laquelle ce transfert est maximal. C'est le cas d'un choc de plein fouet (choc frontal) avec des boules de même masse qui donne $V'_B = V_A$ et $V'_A = 0$, donc avec un transfert total de l'énergie.	1
3.1.	La variation de la quantité de mouvement $\Delta \vec{P}_A$ de (A) est donnée par : $\Delta \vec{P}_A = \vec{P}'_A - \vec{P}_A = m_A \left[\frac{(1-\alpha)\vec{V}_A}{1+\alpha} - \vec{V}_A \right] \text{ et } \Delta \vec{P}_A = - \frac{(2\alpha m_A)}{1+\alpha} \vec{V}_A$	1
	La variation de la quantité de mouvement $\Delta \vec{P}_B$ de (B) est donnée par : $\Delta \vec{P}_B = \vec{P}'_B - \vec{P}_B = m_B \vec{V}'_B = \alpha m_A \frac{2\vec{V}_A}{1+\alpha} \text{ et } \Delta \vec{P}_B = \frac{(2\alpha m_A)}{1+\alpha} \vec{V}_A$	1
3.2.	Les forces autres que la force $\vec{F}_{A/B}$ exercée par (A) sur (B) se compensent ; alors d'après la deuxième loi de Newton : $\vec{F}_{A/B} = \frac{d\vec{P}_B}{dt} \approx \frac{\Delta \vec{P}_B}{\Delta t} = \frac{(2\alpha m_A)\vec{V}_A}{(1+\alpha)\Delta t}.$	1

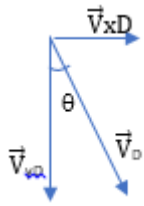
Exercice 2 (17 points)

A.I-1.	<p>Loi d'additivité des tensions $u_{PN} = u_{PA} + u_{AB} + u_{BN}$. avec $u_{AB} = u_C$ et d'après la loi d'Ohm: $u_{PA} = R_1 i$ et $u_{BN} = R i$.</p> <p>$E = R_1 i + u_C + R i = (R_1 + R) i + u_C \quad \forall t$</p> <p>$i$ se dirige vers l'armature chargée de $q \Rightarrow i = \frac{dq}{dt}$</p> <p>comme $q = C u_C$ alors $i = C \frac{du_C}{dt}$.</p> <p>On fait la dérivée par rapport au temps :</p> <p>$0 = (R_1 + R) \frac{di}{dt} + \frac{du_C}{dt} \Rightarrow (R_1 + R) \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$</p> <p>Et $\frac{di}{dt} + \frac{1}{(R_1+R)C} i = 0 \quad \forall t$.</p>	<p style="text-align: center;"></p> <p style="text-align: right;">0,5</p> <p style="text-align: right;">1</p>
A.I-2.	<p>À la date $t_0 = 0$, $u_C = 0$ et $i_0 = A \Rightarrow E = (R_1 + R) i_0 = (R_1 + R) A$ et $A = \frac{E}{(R_1 + R)}$</p> <p>En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient :</p> <p>$-\frac{A}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{1}{(R_1+R)C} A e^{-\frac{t}{\tau_1}} = 0 \Leftrightarrow A e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left(-\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{(R_1+R)C}\right) = 0$ valable quel que soit t, alors :</p> <p>$\left(-\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{(R_1+R)C}\right) = 0$ et $\tau_1 = (R_1 + R) C$.</p>	<p style="text-align: right;">1</p> <p style="text-align: right;">1</p>
A.I-3.	<p>Sachant que $E = (R_1 + R) i + u_C$,</p> <p>alors $u_C = E - (R_1 + R)i = E - (R_1 + R) \frac{E}{(R_1 + R)} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$</p> <p>$u_C = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}})$.</p>	<p style="text-align: right;">0,5</p>
A.II (1^e)-1.	<p>Pratiquement, $\Delta t = 5 \tau_1 =$ durée au bout de laquelle la charge du condensateur est complète.</p> <p>$\Delta t = 5 \tau_1 = 5 (R_1 + R) C = 5 C R + 5 R_1 C$, c'est l'équation de la forme $\Delta t = a R + b$,</p> <p>où $b = 5 R_1 C$ et $a = 5 C$ la pente de la droite portant la courbe</p>	<p style="text-align: right;">1</p>
A.II (1^e)-2.	<p>La pente s'écrit : $a = 5 C = \frac{(4-2) \times 10^{-2}}{100}$</p> <p>et $C = 0,4 \times 10^{-4} = 4 \times 10^{-5} \text{ F}$ ou $40 \mu\text{F}$</p>	<p style="text-align: right;">1</p> <p style="text-align: right;">1</p>
A.II (2^e)-1.	<p>De l'équation différentielle, on tire $\frac{di}{dt} = -\frac{i}{\tau_1}$.</p> <p>$-\frac{1}{\tau_1}$ est alors la pente p de la droite portant la courbe</p> <p>$p = -\frac{1}{\tau_1} = \frac{-5-0}{0,04-0} = -125$ et $\tau_1 = \frac{1}{125} = 0,008 \text{ s}$</p>	<p style="text-align: right;">1</p> <p style="text-align: right;">0,5</p>
A.II (2^e)-2.	<p>Sachant que $\tau_1 = (R_1 + R_0) C$.</p> <p>Alors $R_0 = \frac{\tau_1}{C} - R_1 = \frac{0,008}{40 \times 10^{-6}} - 100 = 100 \Omega$.</p>	<p style="text-align: right;">0,5</p>
A.II (2^e)-3.	<p>À la date $t_0 = 0$, $u_{C0} = 0$, soit : $E = (R_1 + R_0) i_0$,</p> <p>ainsi : $i_0 = \frac{E}{(R_1 + R_0)} = \frac{200}{(100+100)} = 1 \text{ A}$.</p>	<p style="text-align: right;">1</p>

Exercice 2 (17 points)		
B-1.	<p>À la fin de la charge $u_C = E$. Soit, à la date $t_0 = 0$, $u_{C0} = E$. À une date t, i, dans le sens réel, se dirige vers l'armature chargée de $(-q)$. $i = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{du_C}{dt}$ et $\frac{du_C}{dt} = -\frac{i}{C}$.</p>	1
	<p>Loi d'additivité des tensions: $u_{AN} = u_{AB} + u_{BN}$ avec $u_{AB} = u_C$ et D'après la loi d'Ohm: $u_{AN} = R_2 i$ et $u_{BN} = -R i$. $R_2 i = -R i + u_C$, $u_C = (R_2 + R) i$; Dérivons par rapport au temps: $\frac{du_C}{dt} = (R_2 + R) \frac{di}{dt} = -\frac{i}{C}$ L'équation différentielle est alors: $\frac{di}{dt} + \frac{1}{(R+R_2)C} i = 0$</p>	1
B-2.	<p>Vérification : $i = \frac{E}{(R+R_2)} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$; $\frac{di}{dt} = -\frac{E}{\tau_2(R+R_2)} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$</p> <p>Remplaçons dans l'équation différentielle: $-\frac{E}{\tau_2(R+R_2)} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \frac{1}{(R+R_2)C} \frac{E}{(R+R_2)} e^{-\frac{t}{\tau_2}} = \frac{E}{(R+R_2)} \left[-\frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{(R+R_2)C} \right] = 0 \quad \forall t$; we get: $\tau_2 = (R + R_2)C$</p>	1,5
B-3.1.	<p>$EC_1 = \frac{1}{2} C u_{C1}^2$; $u_{C1} = E e^{-\frac{t}{\tau_{21}}}$; $\tau_{21} = (R_2 + R_{01}) C$ $EC_2 = \frac{1}{2} C u_{C2}^2$; $u_{C2} = E e^{-\frac{t}{\tau_{22}}}$; $\tau_{22} = (R_2 + R_{02}) C$</p> <p>$R_{01} ?? R_{02}$ Dans le cas R_{01}, la décharge prend beaucoup plus de temps que dans le cas R_{02}.</p> <p>Ainsi, puisque $\tau_{21} > \tau_{22}$, alors $R_{01} > R_{02}$</p>	1
B-3.2.	<p>Pour R_{01}: entre $t_0 = 0$ et t_1 $E_{th1} = 0,8J - 0,3J = 0,5J$</p>	0,5
	<p>Pour R_{02}: entre $t_0 = 0$ et t_1 $E_{th2} = 0,8J - 0,15J = 0,65J$</p>	0,5
	<p>$E_{th2} > E_{th1}$ avec $R_{01} > R_{02}$</p>	0,5
B-3.3.	<p>Pour $t_0 = 0 \Rightarrow (EC_1)_0 = (EC_2)_0 = \frac{1}{2} CE^2$. Pour t_2, on a une décharge complète $\Rightarrow E_{th1} = E_{th2} = \frac{1}{2} CE^2$</p>	1

Exercice 3 (15 points)

1.1.	<p>Soit le système (S) formé de {(P) ;(T) ; (A et B) ; fil ;(C)}</p> <p>Considérons le système [(S), Terre]</p> <p>A la date t, l'énergie mécanique du système est :</p> $E_m = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M v^2 - M g h$ <p>Le fil ne glisse pas, alors $x = r \theta$ et $v = r \dot{\theta}$ et $a = r \ddot{\theta}$. De même $h = x \sin \alpha$</p> $E_m = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2 - M g r \theta \sin \alpha$		0,5 1																													
1.2.	<p>Pas de forces dissipatives, alors il y a conservation de l'énergie mécanique du système.</p> <p>Alors: $\frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2 - M g r \theta \sin \alpha = 0$</p> <p>$\frac{1}{2}(I_A + M r^2) \dot{\theta}^2 = M g r \theta \sin \alpha$ (Dérivons l'équation en fonction du temps):</p> <p>$\frac{1}{2}(I_A + M r^2) 2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = M g r \dot{\theta} \sin \alpha$; comme $\dot{\theta} \neq 0$ au cours du temps, alors:</p> $\ddot{\theta} = \frac{M g r \sin \alpha}{I_A + M r^2} = \text{constante.}$ <p>Le mouvement de la poulie est un mouvement de rotation uniformément accéléré.</p>	2																														
2.	<p>$a = \frac{v_1^2}{2x_1} = \frac{1,49^2}{2 \times 0,5} = 1,49^2 = 2,22 \text{ m/s}^2.$</p> <p>$\ddot{\theta} = \frac{a}{r} = 5 a.$ $I_A + 0,008 = \frac{0,2}{\ddot{\theta}} \Rightarrow I_A = \frac{0,2}{\ddot{\theta}} - 0,008$</p> <table border="1"><tr><td>d(m)</td><td>0</td><td>0.10</td><td>0.20</td><td>0.30</td><td>0.40</td></tr><tr><td>v₁(m/s)</td><td>1.49</td><td>1.41</td><td>1.24</td><td>1.05</td><td>0.89</td></tr><tr><td>a(m/s²)</td><td>2.22</td><td>1.99</td><td>1.54</td><td>1.10</td><td>0.79</td></tr><tr><td>θ''(rad/s²)</td><td>11.10</td><td>9.95</td><td>7.70</td><td>5.50</td><td>3.95</td></tr><tr><td>I_A(kg.m²)</td><td>0.010</td><td>0.0121</td><td>0.0180</td><td>0.0284</td><td>0.0426</td></tr></table>	d(m)	0	0.10	0.20	0.30	0.40	v ₁ (m/s)	1.49	1.41	1.24	1.05	0.89	a(m/s ²)	2.22	1.99	1.54	1.10	0.79	θ''(rad/s ²)	11.10	9.95	7.70	5.50	3.95	I _A (kg.m ²)	0.010	0.0121	0.0180	0.0284	0.0426	2,5
d(m)	0	0.10	0.20	0.30	0.40																											
v ₁ (m/s)	1.49	1.41	1.24	1.05	0.89																											
a(m/s ²)	2.22	1.99	1.54	1.10	0.79																											
θ''(rad/s ²)	11.10	9.95	7.70	5.50	3.95																											
I _A (kg.m ²)	0.010	0.0121	0.0180	0.0284	0.0426																											
3.	<p>$I_A = I_0 + 2 m d^2$: Pour $d = 0$, $(I_A)_0 = I_0 = 0,010 \text{ kg.m}^2.$</p> <p>$(I_A)_1 = I_0 + 2 m d^2 = 0,010 + m \times 0,02 = 0,0121 \text{ kg.m}^2$</p> <p>et $m = \frac{0,0021}{0,02} = 0,105 \text{ kg}.$</p>	1 1																														
4.1.	<p>Système [(P), (T), (A), (B), Terre]</p> <p>$E_{pp} = 0$ et $E_m = E_c = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2$</p> <p>Et $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{M} \dot{\theta} \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = I_A \dot{\theta} \ddot{\theta}$;</p> <p>D'où: $I_A \dot{\theta} \ddot{\theta} = -K \dot{\theta} \cdot \dot{\theta}$ ($\dot{\theta} \neq 0$ au cours du mouvement)</p> <p>On obtient, $\ddot{\theta} + \frac{K}{I_A} \cdot \dot{\theta} = 0$</p>		2,5																													
4.2.	<p>$\dot{\theta}' = a + b e^{-t/\tau} \Rightarrow \ddot{\theta} = -b/\tau e^{-t/\tau}$</p> <p>$-b/\tau e^{-t/\tau} + \frac{K}{I_A} a + \frac{K}{I_A} b e^{-t/\tau} = 0 \Rightarrow \frac{K}{I_A} a + b e^{-t/\tau} (-1/\tau + \frac{K}{I_A}) = 0$</p> <p>Par identification, on obtient: $a = 0$, $-\frac{K}{I_A} = -\frac{1}{\tau}$ et $\tau = \frac{I_A}{K} = \frac{0,0121}{1,10 \times 10^{-3}}$, d'où $\tau = 11 \text{ s}.$</p> <p>On a: $d = 0,10 \text{ m} \Rightarrow I_A = I_{A1} = 0,0121 \text{ kg.m}^2.$</p> <p>$\ddot{\theta} = 9,95 \text{ rad/s}^2$; $\theta_0 = 0$, alors $b = \dot{\theta}'_0 = \dot{\theta}'_1 = 49,75 \text{ rad/s}$</p>	2																														
4.3.	<p>Par intégration: $\theta = -11 \times 49,75 e^{-t/11} + \text{constante.}$</p> <p>Or à $t_0 = 0$, $\theta = 0$ alors constante = 547,25</p> <p>Par suite, $\theta = 547,25 (1 - e^{-t/11})$</p> <p>Arrêt : 5 tours $\Rightarrow \theta = 5 \times 2\pi = 10 \pi \text{ rad};$</p> <p>D'où: $10 \pi = 547,25 (1 - e^{-t/11});$</p> <p>$t = -11 \ln (0,9426) = 0,65 \text{ s}$</p>	2,5																														

Exercice 4 (18 points)		
A-1.1.	<p>L'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_{PP} du système (bille, Terre) est donnée par: $E_{PP}(M) = m g h_M$ où $h_M = MB \cdot \sin \alpha = (AB - \ell) \sin \alpha$.</p> <p>Et $h_A = (4,5 - \ell) \times \sin \alpha$. Ainsi, $E_{PP}(M) = 0,2 \times 10 \times (4,5 - \ell) \times \sin \alpha = (9 - 2\ell) \sin \alpha$ (E_{PP} en J et ℓ en m).</p>	1,5
A-1.2.	<p>À la date $t_0 = 0$, $\ell = 0$ et $E_{PP}(0) = 1,8$ J. Ainsi, $1,8 = 9 \sin \alpha$ et $\sin \alpha = 0,2$ alors $\alpha = 11,5^\circ$.</p>	1,5
A-2.	<p>On a $E_C = E_m - E_{PP}$. Au point A ($\ell=0$) $E_C(A) = 2,2 - 1,8 = 0,4$ J. $E_C(A) = \frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2} \times 0,2 \times V_0^2 = 0,4$ et $V_0 = \sqrt{4} = 2$ m/s.</p> <p>Au point B, $E_C(B) = 0,9 - 0 = 0,9$ J. $E_C(B) = \frac{1}{2} m V_B^2 = \frac{1}{2} \times 0,2 \times V_B^2 = 0,9$ et $V_B = \sqrt{9} = 3,0$ m/s.</p>	1 1
A-3.	<p>La variation de l'énergie mécanique entre A et B vaut le travail de la force de frottement car le travail de la réaction normale du support est nul : $\Delta E_m = W_{AB}(\vec{f})$</p> <p>Ainsi, $W_{AB}(\vec{f}) = E_m(B) - E_m(A) = 0,9 - 2,2 = -1,3$ J On a $W_{AB}(\vec{f}) = -f \cdot AB \Rightarrow$ et la valeur f de la force de frottement est : $f = \frac{1,3}{4,5} = 0,29$ N.</p>	1,5
A-4.	<p>Entre B et C, on a la conservation de l'énergie mécanique [partie (BC) lisse].</p> <p>Comme $E_{PP} = 0$, alors on a la conservation de l'énergie cinétique, par suite la même vitesse de B en C et $V_C = 3,0$ m/s.</p>	0,5
B-1.	<p>At $t_0 = 0$, $V_{0x} = V_C = 3,0$ m/s et $V_{0y} = 0$ $x_0 = 0$ et $y_0 = h = 3,2$ m La seule force exercée sur (B) est le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -m g \vec{j}$.</p> <p>D'après la deuxième loi de Newton, $\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = -m g \vec{j}$; par intégration: La quantité de mouvement $\vec{P} = -m g t \vec{j} + \vec{D}$. À $t_0 = 0$, $\vec{P}(0) = m \vec{V}_C = m V_C \vec{i}$ et $\vec{P} = -m g t \vec{j} + m V_C \vec{i}$. Ainsi : $P_x = m V_C$ et $P_y = -m g t$</p>	1,5
B-2.	<p>Comme $V_x = V_C =$ constante, et comme $V_x = \frac{dx}{dt} = V_C =$ constante, alors $x = V_C t + C_x$. At $t_0 = 0$, $x = x_0 = C_x = 0$ et $x = 3 t$ (x en m et t en s) Comme $P_y = m V_y = -m g t$, alors $V_y = -g t$.</p> <p>Comme $V_y = \frac{dy}{dt} = -g t$, alors $y = -\frac{1}{2} g t^2 + C_y$. À $t_0 = 0$, $y_0 = h = C_y \Rightarrow y = -\frac{1}{2} g t^2 + h$ et $y = -5 t^2 + 3,2$ (y en m et t en s)</p>	1
B-3.1.	<p>Au point D, $y_D = 0$ et $-5t^2 + 3,2 = 0$ et $t = \sqrt{\frac{3,2}{5}} = \pm 0,8$s, soit : $t = +0,8$ s..</p>	1
B-3.2.	<p>$V_{yD} = -10 \times 0,8 = -8,0$ m/s.</p> <p>$V_D = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{3^2 + 8^2} = 8,54$ m/s. $\tan \theta = \frac{3}{8} = 0,375$ et $\theta = 20,6^\circ$.</p> 	1,5

C-1.1.	<p>On a, d'après la deuxième loi de Newton, $\frac{d\vec{P}}{dt} = -m g \vec{j}$</p> <p>$\Rightarrow \frac{dP_y}{dt} = -m g$ et $P_y = -m g t + C$.</p> <p>À $t_0 = 0$, $P_{y0} = mV_{y1} = C$ et $P_y = -m g t + m V_{y1}$.</p> <p>Soit $V_y = -gt + V_{y1}$</p>	1
C-1.2.	<p>La bille atteint sa hauteur maximale à la date τ: $V_y = 0$, alors $V_y = -g \cdot \tau + V_{y1} = 0$;</p> <p>Par suite: $\tau = \frac{V_{y1}}{g} = \frac{q V_{yD} }{g}$.</p>	0,5
C-1.3.	<p>Du fait de la symétrie du mouvement, la durée de la montée est égale à celle de la descente et la durée du premier rebondissement Δt_1 est donnée par: $\Delta t_1 = 2\tau$ et</p> <p>$\Delta t_1 = \frac{2 V_{y1}}{g} = \frac{2q V_{yD} }{g} = q \frac{2 V_{yD} }{g}$</p>	0,5
C-2.	<p>Au cours du second rebondissement, on a : $V_{y2} = q V_{y1}$ car q est une constante, alors</p> <p>$V_{y2} = q^2 V_{yD}$;</p> <p>Soit $V_{yn} = q^n V_{yD} = q^{n-1} \cdot V_{y1}$.</p>	1
C-3.	<p>La durée $\Delta t_1 = \frac{2 V_{y1}}{g}$ et la durée $\Delta t_2 = \frac{2 V_{y2}}{g} = q \frac{2 V_{y1} }{g} = q \Delta t_1$ ($\Delta t_3 = \frac{2 V_{y3}}{g} = q \frac{2 V_{y2} }{g} = q \Delta t_2 = q^2 \Delta t_1$) et celle du $n^{\text{ième}}$ rebondissement est alors :</p> <p>$\Delta t_n = \frac{2 V_{yn} }{g} = q^{n-1} \cdot \frac{2 V_{y1}}{g}$ et $\Delta t_n = q^{n-1} \cdot \Delta t_1$.</p> <p>Par suite, la formule $\Delta t_n = q^{n-1} \Delta t_1$.</p> <p>Elle est vérifiée quelle que soit la valeur de n.</p>	1
C-4.	<p>Comme $\Delta t_n = q^{n-1} \Delta t_1$, alors $\ln(\Delta t_n) = (n-1) \ln q + \ln(\Delta t_1) = n \ln(q) - \ln(q) + \ln(\Delta t_1)$.</p> <p>Par suite, $\ln(q)$ est la pente de la droite portant la courbe :</p> <p>$\ln(q) = \frac{-0,31}{2,9} = -0,107$</p> <p>et $q = 0,90$</p> <p>Pour $n = 1$, $\ln(\Delta t_n) = \ln(\Delta t_1) = 0,31$ et $\Delta t_1 = 1,36$ s</p>	2