ثانوية برجا الرسمية 07/623581	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع: العلوم العامة 2022/2023	عدد المسائل: خمس
اعداد وتأليف الأستاذ: أحـمـد دمـج 70/773620	مسابقة في مادة الرياضيات	المدة: ثلاث ساعات

ملاحظات هامة ـ يستطيع الطالب الاجابة عن الأسئلة بالترتيب الذي يناسبه.
- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو إختزان المعلومات او رسم البيانات.

نموذج رقم : 8

I- (2 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant,** la réponse qui lui correspond.

N^0	Questions	Réponses		
		(a)	(b)	(c)
1)	Soit $f(x) = \ln(2x-3)$. $f(2) + f'(2) =$	0	1	2
2)	$\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - \ln(0{,}7)\, e^x) =$	$+\infty$	$-\infty$	$\ln(0{,}7)$
3)	L'équation : $x\ln(x-1) - x = 0$	n'admet pas des racines	admet une seule racine	admet deux racines distinctes
4)	Soit $z = 2i + \left(\sqrt{3}+i\right)^{15}$.	z est un réel	z est imaginaire pur	$\lvert z\rvert = 2 + 2^{15}$

II- (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

Pour tout point M d'affixe $z \neq 1$, on associe le point M′ d'affixe z′ tel que $z' = \frac{1+z}{1-z}$.

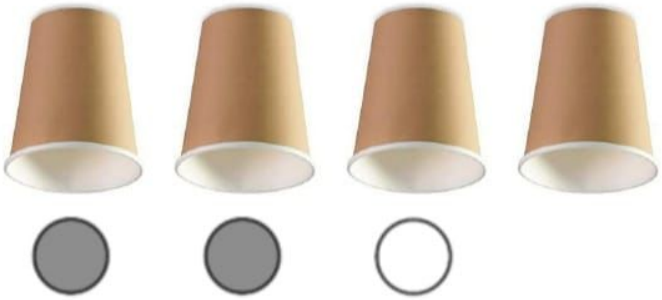
Soient A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.

1) Dans cette partie, soit $z = 2 + 3i$.
   a) Trouver la forme algébrique de z'.
   b) Calculer $|z'|$.
2) a) Vérifier que $\frac{z'-z_A}{z'-z_B} = z$.
   b) Montrer que si M varie sur l'axe des ordonnés alors M′ varie sur un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.
3) Dans cette partie, soit $z = e^{i\theta}$ où θ est un réel non nul.
   a) Montrer que z' est imaginaire pur.
   b) Montrer que $z' = i\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

III- (6 points)

On donne :

- Quatre gobelets en carton :
  deux boules noires sont cachées au-dessous de deux gobelets, une boule blanche est cachée au-dessous d'un gobelet et aucune boule au-dessous d'un gobelet parmi ces quatre gobelets.
- Une urne U contient six boules : quatre noires et deux blanches.



On tire au hasard un gobelet :

- Si on obtient une boule noire au-dessous du gobelet tiré alors on la met dans U puis on tire simultanément et au hasard trois boules de U.
- Si on obtient une boule blanche au-dessous du gobelet tiré alors on la met dans U puis on tire au hasard et successivement sans remise trois boules de U.
- Si on n'obtient pas de boule au-dessous du gobelet tiré alors on tire au hasard et successivement avec remise trois boules de U.

On considère les événements :

N « la boule obtenue au-dessous du gobelet tiré est noire »

B « la boule obtenue au-dessous du gobelet tiré est blanche »

V « il n'y pas de boule au-dessous du gobelet tiré »

D « on obtient exactement deux boules blanches parmi les trois boules tirées de U »

1) Calculer $P(D/N)$ et $P(D \cap N)$.

2) Montrer que $P(D \cap B) = \frac{3}{35}$.

3) Montrer que $P(D/V) = \frac{2}{9}$ et calculer $P(D)$.

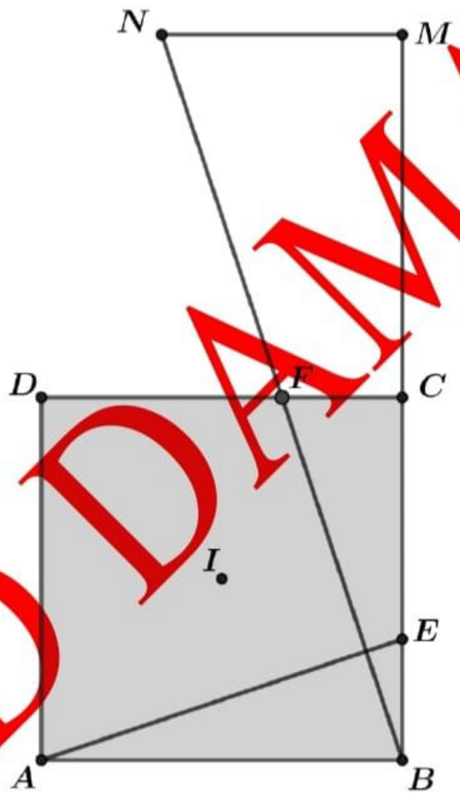
4) On sait que parmi les trois boules tirées de U on a exactement deux boules blanches.

   Calculer la probabilité qu'au-dessous du gobelet tiré on ait une boule.

IV- (6 points)

Dans la figure ci-dessous on donne :

- ABCD un carré direct de centre I et de côté 3.
- Le point E appartient au segment [BC] tel que BE = 1.
- Le point F appartient au segment [DC] tel que CF = 1.
- M est le symétrique de B par rapport à C.
- N est le symétrique de B par rapport à F.



Soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) a) Determiner R(A) et R(B).

   b) Montrer que R(E) = F.

   c) En déduire que les segments [AE] et [BF] sont égaux et perpendiculaires.

2) Soit S la similitude plane directe qui transforme A en B et E en N.

   a) Calculer un angle et le rapport de S.

   b) Montrer que S(B) = M.

3) Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(A\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

   a) Écrire la forme complexe de S.

   b) Déduire l'affixe du point W, centre de S.

   c) Montrer que les trois points A, W et M sont alignés.

V- (10 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = e^x - x + 1$.

1) Dresser le tableau de variations de g.
2) En déduire que pour tout réel x, $g(x) > 0$.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $h(x) = (x+1)e^x + 1$.

1) Dresser le tableau de variations de h.
2) En déduire que pour tout réel x, $h(x) > 0$.

Partie C

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \frac{x^2}{e^x - x + 1}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un

repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).
2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

   b) Vérifier que $f(x) + x + 1 = \frac{h(x)}{g(x)}$.

   c) Montrer que la droite (d) d'équation $y = -x - 1$ est une asymptote à (C).

   d) Étudier la position relative de (C) et (d).
3) Montrer que $f'(x) = \frac{(-x^2+2x)(e^x+1)}{(g(x))^2}$.
4) Dresser le tableau de variations de f.
5) Tracer (d) et (C).
6) Soit (C') l'image de (C) par l'homothétie h(O , -2). Écrire les équations de asymptotes de (C').