Verfahren für parabolische und hyperbolische Randwertprobleme in der finiten Differenzenmethode

Differenzenquotienten

Näherung von Ableitungen aus Taylorentwicklung

- **Erste Ableitung**
  - **Zwei-Punkt-Vorwärtsdifferenzenquotient**
    $U_i^{(1)} \approx \frac{U_{i+1}-U_i}{h} - O(h)$
  - **Zwei-Punkt-Rückwärtsdifferenzenquotient**
    $U_i^{(1)} \approx \frac{U_i - U_{i-1}}{h} - O(h)$
  - **Zentraler Zwei-Punkt-Differenzenquotient**
    $U_{i-1} - U_{i+1} \Rightarrow U_i^{(1)} \approx \frac{U_{i+1}-U_{i-1}}{h} - O(h^2)$
- **Zweite Ableitung**
  - **Zentraler Drei-Punkt-Differenzenquotient**
    $U_{i-1} + U_{i+1} \Rightarrow U_i^{(2)} = \frac{U_{i+1}-2U_i+U_{i+1}}{h^2} - O(h^2)$

Grundtypen von PDEs 2ter Ordnung

- **elliptische PDE**
  $\gamma \Delta u = f$
  Prototyp: Potentialgleichung
  Beschreibt Gleichgewicht
- **parabolische PDE**
  $\beta \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma \Delta u = f$
  Prototyp: Wärmeleitungsgleichung
  Beschreibt Streben zum Gleichgewicht
- **hyperbolische PDE**
  $\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \Delta u = f$
  Prototyp: Wellengleichung
  Beschreibt Wellenausbreitung

Parabolische PDEs

- **Eindimensional** $\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
  Gesucht: $U(t,x)$
  Anfangsbedingung:
  $u(0,x) = f(x)$
  Randbedingungen:
  $(1-c_1)u(t,0) - c_1 u_x(t,0) = g_1(t)$
  $(1-c_2)u(t,a) - c_2 u_x(t,a) = g_2(t)$
  mit $0 < x < a$, $0 \le t \le T$ und $0 \le c_k \le 1$
  $c_k = 0 \to$ Dirichlet-Rand, $c_k = 1 \to$ Neumann-Rand
  Schrittweiten:
  $\Delta t = \frac{T}{m} \to t_k = k\Delta t$, $\Delta x = \frac{a}{n+1} \to x_j = j\Delta x$
  mit $0 \le k \le m$, $0 \le j \le (n+1)$
  - **Explizites Euler-Vorwärtsverfahren**
    $U_j^{k+1} = \gamma U_{j-1}^k + (1+2\gamma)U_j^k + \gamma U_{j+1}^k$
    Verstärkungsparamter: $\gamma = \frac{\beta \Delta x}{\Delta x^2} > 0$
    Stabilität: $\gamma \le \frac{1}{2} \to \Delta t \le \frac{\Delta x^2}{2\beta}$
    Fehlerordnung: $O(\Delta t + \Delta x^2)$
  - **Implizites Euler-Rückwärtsverfahren**
    $U_j^k = -\gamma U_{j-1}^{k+1} + (1+2\gamma)U_j^{k+1} - \gamma U_{j+1}^{k+1}$
    Stabilität: stabil für $\gamma > 0$
    Fehlerordnung: $O(\Delta t + \Delta x^2)$
  - **Crank-Nicolson-Verfahren**
    $-\gamma U_{j+1}^{k+1} + 2(1+\gamma)U_j^{k+1} - \gamma U_{j-1}^{k+1}$
    $= \gamma U_{j+1}^k + 2(1-\gamma)U_j^k + \gamma U_{j-1}^k$
    Stabilität: stabil für $\gamma > 0$
    Fehlerordnung: $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$

  Für alle drei Verfahren:
  $j = 0$: $U_0^k = \frac{g_1(t_k)\cdot \Delta x + c_1 \cdot U_1^k}{c_1 + (1-c_1)\Delta x}$
  $j = n+1$: $U_{n+1}^k = \frac{g_2(t_k)\cdot \Delta x + c_2 \cdot U_n^k}{c_2 + (1-c_2)\Delta x}$
  $k = 0$: $U_j^0 = f(x)$

- **Zweidimensional** $\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$
  Gesucht: $U(t,x,y)$
  Anfangsbedingung:
  $u(0,x,y) = f(x,y)$; $(x,y) \in R$
  Randbedingungen (Dirichlet):
  $u(t,x,y) = g(t,x,y)$; $(x,y) \in \delta R$
  mit $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 \le t \le T$
  Schrittweiten:
  $\Delta t = \frac{T}{m} \to t_k = k\Delta t$, $\Delta x = \frac{a}{n+1} \to x_j = j\Delta x$,
  $\Delta y = \frac{b}{p+1} \to x_i = i\Delta y$
  mit $0 \le k \le m$, $0 \le j \le (n+1), 0 \le i \le (p+1)$
  - **Alternating Direction Implicit (ADI) Verfahren**
    $-\gamma_y(U_{j,i-1}^{k+1} + U_{j,i+1}^{k+1}) + (1+2\gamma_y)U_{ji}^{k+1} =$
    $\gamma_x(U_{j-1,i}^k + U_{j+1,i}^k) + (1-2\gamma_y)U_{ji}^k$
    $-\gamma_x(U_{j-1,i}^{k+2} + U_{j+1,i}^{k+2}) + (1+2\gamma_x)U_{ji}^{k+2} =$
    $\gamma_y(U_{j,i-1}^{k+1} + U_{j,i+1}^{k+1}) + (1-2\gamma_x)U_{ji}^{k+1}$
    mit $\gamma_x = \frac{\beta \Delta t}{\Delta x^2}$, $\gamma_y = \frac{\beta \Delta t}{\Delta y^2}$
    Stabilität: stabil für $\gamma_x, \gamma_y > 0$
    Fehlerordnung: $O(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2)$
    Zeitliche Auflösung in $2\Delta t \to$ Zeitintervalle halbieren

Hyperbolische PDEs

- **Eindimensional** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial u}{\partial x}$
  Gesucht: $U(t,x)$
  Anfangsbedingung:
  $u(0,x) = f(x)$, $u_t(0,x) = g(x)$
  Randbedingungen (Dirichlet):
  $u(t,0) = c_1 = 0$, $u(t,a) = c_2 = 0$
  mit $0 < x < a$, $0 \le t \le T$
  Schrittweiten:
  $\Delta t = \frac{T}{m} \to t_k = k\Delta t$, $\Delta x = \frac{a}{n+1} \to x_j = j\Delta x$
  mit $0 \le k \le m$, $0 \le j \le (n+1)$
  - **Explizite zentrale Differenzen**
    für $k=0$: $U_j^1 = \frac{1}{2}[\gamma f_{j-1} + 2(1-\gamma) f_j + \gamma f_{j+1}] + \Delta t \cdot g_j$
    sonst: $U_j^{k+1} = \gamma U_{j-1}^k + 2(1-\gamma) U_j^k + \gamma U_{j+1}^k - U_j^{k-1}$
    mit $\gamma = \frac{\beta \Delta t^2}{\Delta x^2}$, $f_j = f(x_j)$, $g_j = f(x_j)$
    Stabilität: $\gamma \le 1 \to \Delta t^2 \le \frac{\Delta x^2}{\beta}$
    Fehlerordnung: $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$

- **Zweidimensional** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$
  Gesucht: $U(t,x,y)$
  Anfangsbedingung:
  $u(0,x,y) = f(x,y)$, $u_t(0,x,y) = g(x,y)$; $(x,y) \in R$
  Randbedingungen (Dirichlet):
  $u(t,0,y) = c_1 = 0$, $u(t,a,y) = c_2 = 0$, $u(t,x,0) = c_3 = 0$,
  $u(t,x,b) = c_4 = 0$
  mit $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 \le t \le T$
  Schrittweiten:
  $\Delta t = \frac{T}{m} \to t_k = k\Delta t$, $\Delta x = \frac{a}{n+1} \to x_j = j\Delta x$,
  $\Delta y = \frac{b}{p+1} \to x_i = i\Delta y$
  mit $0 \le k \le m$, $0 \le j \le (n+1), 0 \le i \le (p+1)$
  - **Explizite zentrale Differenzen**
    für $k=0$: $U_{ji}^1 = \frac{1}{2}[\gamma_x(f_{j-1,i} + f_{j+1,i}) +$
    $2(1-\gamma_x-\gamma_y) f_{j,i} + \gamma_y(f_{j,i-1} + f_{j,i+1})] + \Delta t \cdot g_{ji}$
    sonst: $U_{ji}^{k+1} = \gamma_x(U_{j-1,i}^k + U_{j+1,i}^k) +$
    $2(1-\gamma_x-\gamma_y) U_{jo}^k + \gamma_y(U_{j,i-1}^k + U_{j,i-1}^k) - U_{ij}^{k-1}$
    mit $\gamma_x = \frac{\beta \Delta t^2}{\Delta x^2}$, $\gamma_y = \frac{\beta \Delta t^2}{\Delta y^2}$, $f_{ji} = f(x_j, y_i)$,
    $g_{ji} = f(x_j, y_i)$
    Stabilität: $\frac{\gamma_x \gamma_y}{\gamma_x + \gamma_y} \le \frac{1}{4} \to \Delta t^2 \le \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{4\beta}$
    Fehlerordnung: $O(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2)$

Probleme

- Komplexe Geometrien → mathematisch sehr kompliziert
- Sprünge in Funktionen, z.B. verschiedene Materialien bei Wärmeleitung oder Überschallknall (Wellengleichung)

Vergleich der Verfahren

Verfahren	**Typ**	**Dim.**	**Stabilität**	**Fehlerordnung**
Zentrale Differenzen	elliptisch	1	immer	$O(\Delta x^2)$
Euler-Vorwärts	parabolisch	1	$\gamma \le \frac{1}{2}$	$O(\Delta t + \Delta x^2)$
Euler-Rückwärts	parabolisch	1	immer	$O(\Delta t + \Delta x^2)$
Crank-Nicolson	parabolisch	1	immer	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$
ADI	parabolisch	2	immer	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2)$
Zentrale Differenzen	hyperbolisch	1	$\gamma \le 1$	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2)$
Zentrale Differenzen	hyperbolisch	2	$\frac{\gamma_x \gamma_y}{\gamma_x + \gamma_y} \le \frac{1}{4}$	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2)$

Quellen:
SCHILLING, Robert J.; HARRIS, Sandra L. (2000): *Applied numerical methods for engineers using MATLAB and C*. Brooks-Cole Pub Co.
SCHWARZ, Hans R.; KÖCKLER, Norbert. (2009): *Numerische Mathematik*. Vieweg + Teubner.

Link:
Weitere Infos sowie Beispiele und MATLAB-Quellcode unter `http://www.janbeneke.de/SciComp` .