

Propagationssimulation optischer Wellenfronten basierend auf der skalaren Beugungstheorie

Projektarbeit

im Modul

Fourier and Short Wavelength Optics

im Studiengang Applied Physics

Fachhochschule Koblenz, RheinAhrCampus Remagen

Fachbereich Mathematik und Technik

vorgelegt von

Jan-Maximilian Beneke

Remagen, 7. April 2012

Referent: Prof. Dr. Wilhein

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Skalare Beugung	1
3	Propagationstheorie	1
3.1	Monochromatisches Feld	1
3.2	Darstellung des Phasenfeld	2
3.3	Analytische diffraktive Lösungen	3
3.3.1	Rayleigh–Sommerfeld-Lösung	3
3.3.2	Fresnel-Näherung	5
3.3.3	Fraunhofer-Näherung	6
3.3.3.1	Beispiel: Analytische Fraunhofer- Lösung	6
4	Propagationssimulation	9
4.1	Fresnel-Propagatoren	9
4.1.1	TF-Propagator	9
4.1.2	IR-Propagator	10
4.1.3	Beispiel: Quadratisches Strahlenbündel	11
4.1.4	Abtastbedingungen	15
4.1.5	Propagatorgenauigkeit	18
4.2	Fraunhofer-Propagator	22
4.2.1	Beispiel: Quadratisches Strahlenbündel	23
5	Resümee und Ausblick	25
	Literatur	27
	Abbildungsverzeichnis	27
	Tabellenverzeichnis	27
	Quellcodeverzeichnis	28

1 Einleitung

Eine der grundlegenden Aufgaben im Zusammenhang mit Fourier-Optik ist die Beschreibung der Entwicklung einer Wellenfront während sie sich von einem Ort zu einem anderen ausbreitet. Zudem unterliegt die Beugung dem Verhalten propagierender Wellen. Die ausführliche Beugungstheorie bildet die Grundlage zur numerischen Modellierung der optischen Propagation auf Computersystemen. Somit wird es möglich die Wellenfrontausbreitung durch numerische Simulationen vorauszusagen.

2 Skalare Beugung

Beugung beschreibt das Verhalten einer optischen Wellenfront wenn die laterale Ausdehnung begrenzt ist, wie beispielsweise bei einer Blende. Abstrahierend lässt sich sagen, dass sich das Licht an Grenzflächen nicht mehr absolut geradlinig ausbreitet [1].

Beugungseffekte werden insbesondere relevant, wenn die beschränkende Apertur der Größenordnung einiger Wellenlängen entspricht [2]. Gleichwohl sind diffraktive Effekte besonders bei hochauflösenden und Feinstrukturanwendungen - die Auflösung eines optischen Systems ist beugungsbegrenzt [3] - sowie bei langen Propagationswegen relevant.

Das Verhalten einer optischen Wellenfront unter Propagation wird durch die Maxwell-Gleichungen fundamental beschrieben. Allgemein besteht eine Kopplung zwischen dem elektrischen Feld $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ und dem magnetischen Feld $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$ sowie unter den jeweiligen Komponenten von \vec{E} und \vec{H} .

Angenommen das Wellenfeld durchdringt ein dielektrisches Medium, dass linear, isotrop, homogen, nicht dispersiv und nicht magnetisch ist, so sind die vektoriellen Ausdrücke Maxwells entkoppelt und elektrische sowie magnetische Elemente können unabhängig von einander beobachtet werden [4]. Die skalare Beugung bezieht sich auf die Propagation unter diesen idealen Bedingungen.

Trotz der großen Zahl an Näherungen lässt sich die skalare Beugung gut zur Beschreibung der Propagation im freien Raum (FSO Propagation), also die Transmission durch ein Vakuum oder eine Atmosphäre, verwenden. Zudem können skalare Lösungen eine gute Näherung für viele weitere Problemstellungen, wie zum Beispiel das Transmittieren durch nicht ideale Materialien, sein [5].

Die im nächsten Kapitel folgenden analytischen Lösungen der Beugungstheorie sowie die anschließende numerische Simulation basieren ausnahmslos auf dem Prinzip der skalaren Beugung und unterliegen somit den zugehörigen Einschränkungen.

3 Propagationstheorie

An dieser Stelle sollen einige Begriffe und Definitionen zum optischen Wellenfeld eingeführt werden, bevor analytische Lösungen der Propagation folgen.

3.1 Monochromatisches Feld

Ein monochromatisches, skalaras Feld lässt sich als

$$u(\vec{x}, t) = A(\vec{x}) \cos(2\pi\nu t - \phi(\vec{x})) \quad (1)$$

ausdrücken, wobei $A(\vec{x})$ die Amplitude und $\phi(\vec{x})$ die Phase abhängig vom Ort $\vec{x} = (x, y, z)$ und der zeitlichen Frequenz ν ist. Dieses Modell beschreibt ein propagierendes transversales optisches Feld mit konstanter Polarisation.

Für eine in z -Richtung propagierende Wellenfront ist

$$u(z, t) = A(z) \cos(2\pi\nu t - kx) \quad (2)$$

mit der Wellenzahl k , definiert als

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (3)$$

wo λ die Vakuumwellenlänge ist. Zudem ist $\nu = \frac{c}{\lambda}$, mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c . Somit ist die Welle unabhängig von x und y , also in diese Richtungen unendlich ausgebreitet. Breitet sich das Feld aus Gl. 1 in einem linearen Medium aus (vergleiche: Bedingungen für skalare Beugung aus Kap. 2) bleibt die Frequenz ν des resultierenden Felds unverändert. Somit ist es nicht nötig, den zeitlichen Term explizit mitzuführen. Es bietet sich die Substitution durch einen komplexen Phasenterm aus der Kosinusfunktion an. Die resultierende Funktion

$$U(\vec{x}) = A(\vec{x})e^{i\Phi(\vec{x})} \quad (4)$$

beschreibt die räumliche Verteilung des Felds. Für das Feld aus Gl. 2 folgt somit

$$U(z) = A(z)e^{ikz} \quad (5)$$

Unter der Annahme, dass z die Propagationsrichtung ist, kann aus Gl. 4 jede Abhängigkeit von z entfernt werden. Somit beschreibt

$$U_1(x, y) = A_1(x, y)e^{i\Phi_1(x, y)} \quad (6)$$

das Feld in der x, y -Ebene an einer bestimmten Stelle „1“ auf der z -Achse.

Da das optische Feld mit einer Frequenz $> 10^{14} \text{ Hz}$ oszilliert, kann es von keinem momentan verfügbaren Detektor erfasst werden. Stattdessen kann der zeitliche Mittelwert der quadrierten Amplituden, die Intensität

$$I_1(x, y) = \frac{1}{Z} U_1(x, y) U_1(x, y)^* \approx |U_1(x, y)|^2, \quad (7)$$

detektiert werden. $Z = 377\Omega$ ist der Wellenwiderstand im Vakuum und wird oftmals vernachlässigt.

3.2 Darstellung des Phasenfeld

Der Brechungsindex n ist das Verhältnis der Vakuumlichtgeschwindigkeit c zur Lichtgeschwindigkeit c_{med} im Medium.

Für Licht, dass eine Strecke d in einem Medium mit Brechungsindex n zurücklegt lässt sich die optische Weglänge

$$L = nd \quad (8)$$

definieren.

Das Produkt aus optischer Weglänge L und Wellenzahl k findet Verwendung in der Phasenverteilung des Wellenfelds

$$U(d) = Ae^{iknd} \quad (9)$$

und beschreibt das Feld somit abhängig von der Weglänge d , die das Licht bei der Ausbreitung durch das Medium zurücklegt. Dieser Zusammenhang wurde bereits in Gl. 5 dargestellt, dabei repräsentiert z die zurückgelegte Strecke im Medium und der Brechungsindex beträgt $n = 1$, also eine Propagation im Vakuum.

Die Phasenverteilung eines optischen Feld kann auch als Funktion der transversalen Koordinaten

$$e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \quad (10)$$

dargestellt werden. Dies nennt man einen „Chirp“-Term, er beschreibt die Phasenveränderung als die Quadrate der transversalen Positionen x und y und findet in vielen Situationen der Modellierung von kontrahierenden oder expandierenden Feldern Verwendung.

Aus dem zeitabhängigen Term $e^{-i2\pi\nu t}$ des Realteils der Gl. 4

$$u(\vec{x}, t) = \text{Re}\{U(\vec{x})e^{-i2\pi\nu t}\} \quad (11)$$

lässt sich schließen, dass die Phase des Feldes mit fortschreitender Zeit negativer wird. Diese Annahme bestätigt die Projektion des Phasenprofils des Chirp-Terms auf die x -Achse. Zu sehen in Abb. 1. Somit lässt sich sagen, dass das Zentrum des Profils das Wellenfeld „an-

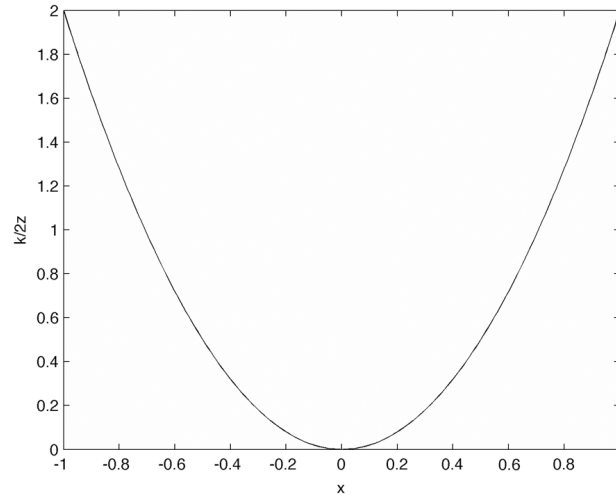


Abbildung 1: Projektion des Phasenprofils des Chirp-Terms (Gl. 10) auf die x -Achse

führt“, also vorausseilt. Umso weiter ein Punkt vom Zentrum entfernt ist, umso mehr eilt er er nach. Diese Anschauung wird später in der Propagationsimulation von Nutzen sein.

3.3 Analytische diffraktive Lösungen

3.3.1 Rayleigh–Sommerfeld-Lösung

Es soll monochromatisches Licht von einer zweidimensionalen Ebene (Quellebene), mit den räumlichen Variablen ξ und ν , in z -Richtung propagiert werden (Abb. 2). Der ausgeleuchtete Bereich der Quellebene wird dabei durch Σ beschrieben und die Feldverteilung wird durch $U_1(\xi, \nu)$ angegeben. Das Feld $U_2(x, y)$ der Beobachtungsebene in Abstand z lässt sich mittels Rayleigh-Sommerfeld-Beugungsintegral

$$U_2(x, y) = -i\frac{z}{\lambda} \iint \Sigma U_1(\xi, \nu) \frac{e^{ikr_{12}}}{r_{12}^2} d\xi d\nu, \quad (12)$$

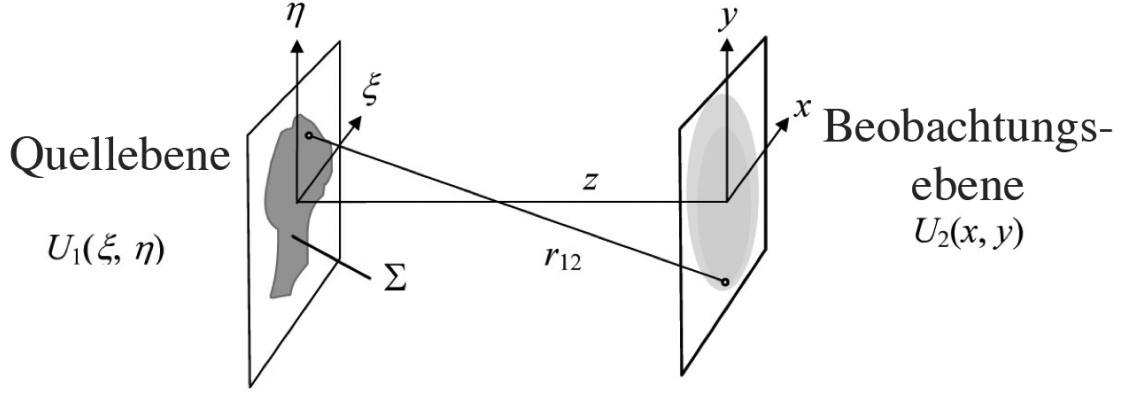


Abbildung 2: Propagationsgeometrie für parallele Quell- und Beobachtungsebenen [2]

als Näherung des Kerhoffschen Beugungsintegrals [6], bestimmen. Dabei wird über das Gebiet Σ integriert und r_{12} beschreibt den Abstand zwischen dem Ort in der Quellebene und dem Ort in der Beobachtungsebene. Sind Quell- und Beobachtungsebene parallel zueinander, ergibt sich der Abstand mit

$$r_{12} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \nu)^2} . \quad (13)$$

Gl. 12 geht von dem Huygens-Fresnel-Prinzip aus, das besagt, dass die Quelle aus einer Ansammlung unendlich vieler fiktiver Punktquellen besteht. Jede Punktquelle erzeugt dabei eine Kugelwellenfront am individuellen Ort (ξ, ν) . Die Beiträge aller Punktquellen werden in den Punkten (x, y) der Beobachtungsebene überlagert. Allgemein ist Rayleigh-Sommerfeld-Integral ein Superpositionsintegral.

Werden Quell- und Beobachtungsebene parallel definiert, wie in Abb. 2, ergibt sich das Faltungsintegral

$$U_2(x, y) = \iint U_1(\xi, \nu) h(x - \xi, y - \nu) d\xi d\nu , \quad (14)$$

mit dem allgemeinen Rayleigh-Sommerfeld-Impuls

$$h(x, y) = -i \frac{z}{\lambda} \frac{e^{ikr}}{r^2} \quad (15)$$

und dem Abstand

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} . \quad (16)$$

Die Faltung zweier Funktionen $g(\xi, \nu)$ und $h(x - \xi, y - \nu)$ lässt sich, dank des Faltungstheorems der Fourier-Analyse, als das Produkt der beiden Fourier-Transformierten $G(f_x, f_y)$ und $H(f_x, f_y)$ darstellen. Somit lässt sich Gl. 14 auch schreiben als

$$U_2(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} \{ U_1(x, y) \} \mathcal{F} \{ h(x, y) \} \} . \quad (17)$$

Die Variablen wurden hierbei für Quell- und Beobachtungsebene mit x und y angegeben. Eine äquivalente Darstellung von Gl. 17 ist

$$U_2(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} \{ U_1(x, y) \} H(f_x, f_y) \} , \quad (18)$$

wobei die Rayleigh-Sommerfeld-Transferfunktion mit

$$H(f_x, f_y) = e^{ikz \sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2}} \quad (19)$$

gegeben ist. Zur Lösung der Gl. 19 wird häufig eine Winkelspektrumanalyse verwendet (ASPW: Angular Spectrum of Plane Waves).

Neben den Forderungen der skalaren Beugung muss $r \gg \lambda$ und $\sqrt{f_x^2 + f_y^2} < \frac{1}{\lambda}$ gelten. Die Rayleigh–Sommerfeld-Lösung ist das genaueste, aber auch bei weitem aufwändigste, in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren.

3.3.2 Fresnel-Näherung

Die Quadratwurzel in Gl. 13 bzw. Gl. 16 erschwert den analytischen Umgang mit der Rayleigh–Sommerfeld-Lösung und erhöht den benötigten Aufwand bei einer Computersimulation. Die Verwendung von Näherungen erleichtert die Handhabung.

Bei Betrachtung der binominalen Erweiterung

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \dots, \quad (20)$$

wobei $b < 1$, ergibt sich bei Abbruch nach dem zweiten Glied für Gl. 13

$$r_{12} \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x-\xi}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y-\nu}{z} \right)^2 \right]. \quad (21)$$

Diese Näherung wird in den Phasenterm von Gl. 12 eingeführt, was parabolischen Elementarwellen, statt wie bisher Kugelwellen, entspricht. Nähert man zudem $r_{12} \approx z$ ergibt sich der Ausdruck der Fresnel-Beugung mit

$$U_2(x, y) = -i \frac{e^{ikz}}{\lambda z} \iint U_1(\xi, \nu) e^{i \frac{k}{2z} [(x-\xi)^2 + (y-\nu)^2]} d\xi d\nu. \quad (22)$$

Auch dieser Ausdruck entspricht, wie Gl. 14, einer Faltung wobei die Impulsantwort

$$h(x, y) = -i \frac{e^{ikz}}{\lambda z} e^{i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2)} \quad (23)$$

und die Transferfunktion

$$H(f_x, f_y) = e^{ikz} e^{i\pi \lambda z (f_x^2 + f_y^2)} \quad (24)$$

ist. Analog zu Gl. 17 und Gl. 18 lässt sich auch hier das Faltungstheorem der Fourier-Analyse anwenden.

Die Genauigkeit der Fresnel-Näherung leidet bei kurzen Abständen durch die angewandten Näherungen. Durch das Zulassen einer Abweichung von maximal 1 rad der Phase lässt sich die Bedingung

$$z^3 \gg \max \left(\frac{\pi}{4\lambda} [(x-\xi)^2 + (y-\nu)^2] \right) \quad (25)$$

ableiten.

Für Quellfelder mit geringer räumlicher Variation kann die Fresnel-Näherung auch bei Verstoß gegen das Kriterium aus Gl. 25 hohe Genauigkeiten liefern.

Ein lockereres Kriterium ist die Fresnel-Zahl

$$N_F = \frac{w^2}{\lambda z}, \quad (26)$$

mit der Halbwertsbreite w der Apertur des Quellfeldes (Radius der Apertur).

Ist $N_F \lesssim 1$ wird davon ausgegangen, dass sich die Beobachtungsebene im Fresnel-Bereich befindet und die Fresnel-Näherung somit nutzbare Ergebnisse liefert.

3.3.3 Fraunhofer-Näherung

Die Fresnel-Näherung aus Gl. 22 lässt sich auch als

$$U_2(x, y) = -i \frac{e^{ikz}}{\lambda z} e^{i \frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \cdot \iint U_1(\xi, \nu) e^{i \frac{k}{2z}(\xi^2+\nu^2)} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\nu)} d\xi d\nu \quad (27)$$

schreiben.

Fraunhofer-Beugung, bzw. die Beugung im Fernfeld, erreicht man mathematisch, indem man den Chrip-Term in Gl. 27 mit 1 nähert und die Bedingung

$$z \gg \max \left(\frac{k(\xi^2 + \nu^2)}{2} \right) \quad (28)$$

ansetzt. Es ergibt sich die Fraunhofer-Näherung:

$$U_2(x, y) = -i \frac{e^{ikz}}{\lambda z} e^{i \frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \cdot \iint U_1(\xi, \nu) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\nu)} d\xi d\nu \quad (29)$$

Das Kriterium aus Gl. 28 benötigt typischerweise lange Propagationsstrecken relativ zur Quellgröße.

Neben dem Multiplikator in Gl. 29 kann der Ausdruck als einfache Fourier-Transformation des Quellfeldes, mit der Variablensubstitution

$$f_\xi \rightarrow \frac{x}{\lambda z} \quad \text{bzw.} \quad f_\nu \rightarrow \frac{y}{\lambda z}, \quad (30)$$

betrachtet werden. Somit wird eine simple Lösung durch einfache Fourier-Transformation und einen dynamischen Vorfaktor ermöglicht.

Die Fresnel-Näherung kann für einfache Verteilungen oftmals auch verwendet werden, wenn das Kriterium aus Gl. 28 verletzt wird. Dies gilt beispielsweise für eine mit einer ebenen Welle beleuchteten Blende.

Die für gewöhnlich hinreichende Bedingung ist eine Fresnel-Zahl (Gl. 26) $N_F \ll 1$.

3.3.3.1 Beispiel: Analytische Fraunhofer- Lösung

Ausgehend von einer, mit einer ebenen Einheitswelle beleuchteten, Kreisblende beträgt das komplexe Feld direkt in der Ebene der Blende, also der Quellebene,

$$U_1(\xi, \nu) = \text{circ} \left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \nu^2}}{w} \right). \quad (31)$$

Dabei ist

$$\text{circ} \left(\sqrt{\xi^2 + \nu^2} \right) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sqrt{\xi^2 + \nu^2} < \frac{1}{2w} \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } \sqrt{\xi^2 + \nu^2} = \frac{1}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (32)$$

die Kreisfunktion. Somit ist die Fourier-Transformierte von Gl. 33, die für die Fraunhofer-Lösung benötigt wird,

$$\mathcal{F} \{U_1(\xi, \nu)\} = w^2 \frac{J_1 \left(2\pi w \sqrt{f_\xi^2 + f_\nu^2} \right)}{w \sqrt{f_\xi^2 + f_\nu^2}}. \quad (33)$$

J_1 ist die erste Besselfunktion [2].

Mit der Variablensubstitution aus Gl. 30 und einer Umstellung analog zu Gl. 29 ergibt sich

$$U_2(x, y) = -i \frac{e^{ikz}}{\lambda z} e^{i \frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \cdot w^2 \frac{J_1 \left(2\pi \frac{w}{\lambda z} \sqrt{x^2+y^2} \right)}{\frac{w}{\lambda z} \sqrt{x^2+y^2}}. \quad (34)$$

Die resultierende Intensität

$$I_2(x, y) = \left(\frac{w^2}{\lambda z} \right) \left[\frac{J_1 \left(2\pi \frac{w}{\lambda z} \sqrt{x^2+y^2} \right)}{\frac{w}{\lambda z} \sqrt{x^2+y^2}} \right]^2 \quad (35)$$

eignet sich gut zur numerischen Umsetzung, auch wenn einige der $\frac{w}{\lambda z}$ Terme noch gekürzt werden könnten.

Angenommen die Blende besitzt einen Radius, bzw. eine Halbwertsbreite, von $w = 1mm$ und wird mit der ebenen Welle eines frequenzverdoppelten Nd:YAG-Lasers, mit der Wellenlänge $\lambda = 532nm$, beleuchtet.

Die Bedingung aus der Fresnel-Zahl (Gl. 26) fordert $\frac{w^2}{\lambda z} < 0,1$ bzw. $z > 10 \frac{w^2}{\lambda}$ und somit in diesem Beispiel $z > 18,8m$. Wir wählen $z = 50m$.

Die numerische Umsetzung der Gl. 35 zeigt der Quellcode 1,

```

1 L = 0.2;           % Seitenlänge (m)
  M = 250;           % Anzahl Abtastungen
3  dx = L/M;         % Abtastungsintervall
  x = -L/2:dx:L/2-dx; % x-Koordinate
  y = x;             % y-Koordinate
5  [X,Y] = meshgrid(x,y);
7
  w = 1e-3;          % Halbwertsbreite (Blendenradius) (m)
9  lambda = .532e-6; % Wellenlänge (m)
  z = 50;             % Propagationsweite (m)
11 k = 2*pi/lambda;  % Wellenzahl
  lz = lambda*z;
13
  % Berechnen der Intensität
15 I2 = (w.^2./lz).^2 .* (jinc(w./lz .* sqrt( X.^2 + Y.^2 ))).^2;
```

Quellcode 1: MATLAB-Code zur Berechnung der Intensitätsverteilung aus Gl. 35

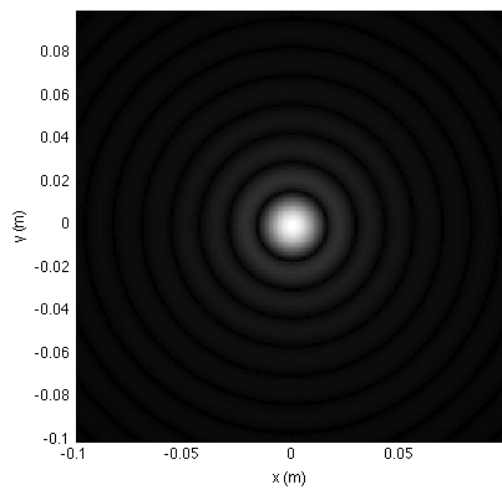
der die Funktion `jinc()` (Code 2), zur Berechnung des Verhältnisses $\frac{J_1(2\pi x)}{x}$, aufruft.

```

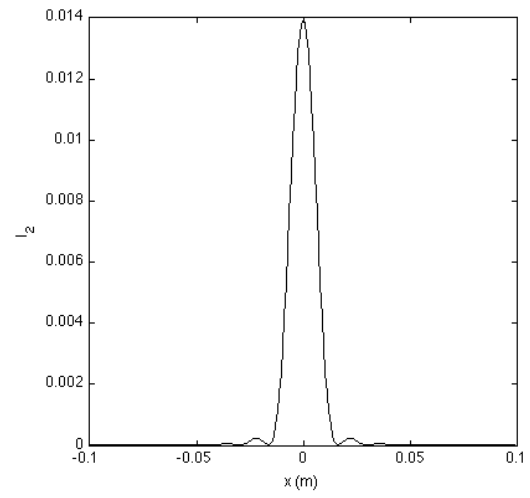
1 function [out] = jinc(x)
3 % Maske aller Elemente in x, die ungleich Null sind
  mask = (x~=0);
5
  % Initialisieren mit pi (Werte für x = 0)
7 out = pi * ones(size(x));
9
  % Berechne Werte für alle x != 0
  out(mask) = besselj(1,2*pi*x(mask))./(x(mask));
```

Quellcode 2: MATLAB-Funktion zur Berechnung von $\frac{J_1(2\pi x)}{x}$

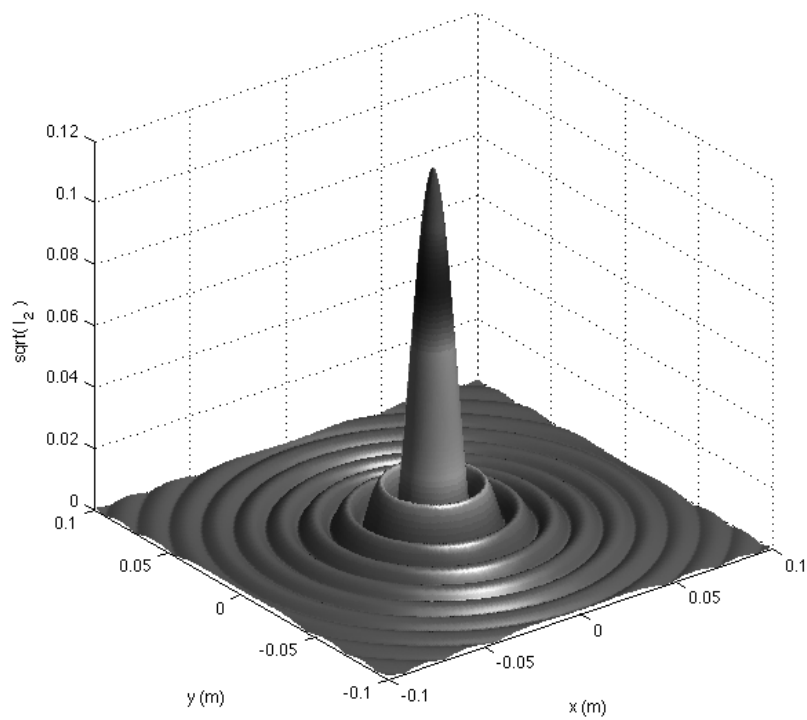
Die resultierende Intensitätsverteilung zeigt Abb. 3(a) und Abb. 3(b) zeigt den zugehörigen Profilschnitt in x -Richtung. Ein dreidimensionaler Plot, der zur besseren Darstellbarkeit die Quadratwurzel der Intensität $\sqrt{I_2(x, y)}$ abbildet, ist in Abb. 3(c) zu finden.



(a)



(b)



(c)

Abbildung 3: Fraunhofer-Intensitätsverteilung (a), zugehöriges Profil in x -Richtung (b) sowie dreidimensionale normierte Darstellung (c)

4 Propagationssimulation

Die analytischen Fresnel- und Fraunhofer-Lösungen aus Kap. 4 sollen in diesem Kapitel numerisch implementiert werden. Dabei werden nur Algorithmen aufgezeigt, die auf schneller Fourier-Transformation (FFT) basieren. Zudem wird nur der monochromatische Fall berücksichtigt.

Die hier aufgezeigten Algorithmen werden beispielsweise zur Modellierung der Ausbreitung von Laserstrahlung verwendet.

4.1 Fresnel-Propagatoren

Propagationssimulationen auf Basis der Fresnel'schen Beugung sind in der Praxis, da sie zu vielen Anwendungsszenarien passen, sehr weit verbreitet und zudem relativ einfach umzusetzen.

Grundlegend lassen sich Fresnel-Propagatoren auf zwei Arten, abhängig von der Faltungsvariable h bzw. der Fourier-Transformierten H , implementieren.

4.1.1 TF-Propagator

Der Fresnel-Propagator, auf Basis der Transferfunktion (TF), nutzt Gl. 18

$$U_2(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} \{ U_1(x, y) \} H(f_x, f_y) \} \quad (\text{Wiederh. 18})$$

und die Fresnel'sche Transferfunktion aus Gl. 24

$$H(f_x, f_y) = e^{ikz} e^{i\pi\lambda z(f_x^2 + f_y^2)} . \quad (\text{Wiederh. 24})$$

Die nachfolgende Funktion (Code 3) zeigt die Implementierung des TF-Propagators.

```
function [u2] = prop_fresnelTF(u1, L, lambda, z)
2 % prop_fresnelTF
% Propagator auf Basis der Fresnel-Lösung mittel Transferfunktion (TF)
4 % u1      - Feld in Quellebene
% L        - Seitenlänge von Quell- und Beobachtungsfeld (m)
6 % lambda  - Wellenlänge (m)
% z        - Propagationsweite
8 % u2      - Feld in Beobachtungsebene

10 [M,N] = size(u1);           % Quellfeldgröße
dx = L / M;                   % Abtastintervall
12 k = 2 * pi / lambda;        % Wellenzahl

14 fx = -1/(2*dx) : 1/L : 1/(2.*dx)-1/L; % Frequenzkoordinaten
fy = fx;
16 [FX,FY] = meshgrid(fx,fy);

18 % Transferfunktion
H = exp( -j * pi * lambda * z * ( FX.^2 + FY.^2 ) );
20
% Shift der Transferfunktion
22 H = fftshift( H );

24 % Shift und Fourier-Transformation des Quellfelds
U1 = fft2( fftshift( u1 ) );
26
% Multiplikation im Fourier-Raum
28 % (Faltung von u1 mit h)
U2 = H .* U1;
30
% Inverse Fourier-Transformation und Rückshift
32 u2 = ifftshift( ifft2( U2 ) );
```

Quellcode 3: MATLAB-Funktion des TF-Propagators

Die Funktion `fft2()` führt eine zweidimensionale FFT durch. `ifft2()` ist entsprechend die inverse FFT. Da ein FFT-Algorithmus Funktionen lediglich periodische verarbeiten kann [7], muss das zentrierte Quellfeld `u1` und die Transferfunktion `H`, mit der Funktion `fftshift()`, quadrantenweise vertauscht, „geshiftet“, werden [8]. Der inverse Shift, also die Zentrierung, wird durch die Funktion `ifftshift()` bewerkstelligt.

4.1.2 IR-Propagator

Ein weiterer Propagationsansatz basiert auf Gl. 17

$$U_2(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} \{ U_1(x, y) \} \mathcal{F} \{ h(x, y) \} \} \quad (\text{Wiederh. 17})$$

und der zugehörigen Impulsantwort (IR) aus Gl. 23

$$h(x, y) = -i \frac{e^{ikz}}{\lambda z} e^{i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2)} . \quad (\text{Wiederh. 23})$$

Auch wenn Gl. 18 und Gl. 17, unter Berücksichtigung der diskreter Abtastung und Transformation, analytisch identische Ergebnisse liefern, können beide Ansätze zu verschiedenen Ergebnissen führen.

Die Implementierung ähnelt stark der des TF-Propagators und wird in der folgenden Funktion dargestellt (Code 4).

```
function [u2] = prop_fresnelIR(u1, L, lambda, z)
2 % prop_fresnelIR
% Propagator auf Basis der Fresnel-Lösung mittels Impulsantwort (IR)
4 % u1      - Feld in Quellebene
% L        - Seitenlänge von Quell- und Beobachtungsfeld (m)
6 % lambda  - Wellenlänge (m)
% z        - Propagationsweite
8 % u2      - Feld in Beobachtungsebene

10 [M,N] = size(u1);           % Quellfeldgröße
dx = L / M;                   % Abtastintervall
12 k = 2 * pi / lambda;        % Wellenzahl

14 fx = -1/(2*dx) : 1/L : 1/(2.*dx)-1/L; % Frequenzkoordinaten
fy = fx;
16 [FX,FY] = meshgrid(fx,fy);

18 % Impuls
h = 1 / (j * lambda * z) * exp(j * k / (2 * z) * (X.^2 + Y.^2));
20
% Transferfunktion
22 H = fft2( fftshift( h )) * dx^2;

24 % Shift der Transferfunktion
H = fftshift( H );
26
% Shift und Fourier-Transformation des Quellfelds
28 U1 = fft2( fftshift( u1 ));

30 % Multiplikation im Fourier-Raum
% (Faltung von u1 mit h)
32 U2 = H .* U1;

34 % Inverse Fourier-Transformation und Rückshift
u2 = ifftshift( ifft2( U2 ));
```

Quellcode 4: MATLAB-Funktion des IR-Propagators

Zu beachten ist, dass die Transferfunktion `H` mit `dx^2` normiert werden muss. Alle restlichen Normierungen sind bereits in den FFT-Funktionen enthalten.

Es wird sich noch zeigen, dass die Anwendungsbereiche für den IR-Ansatz stärker limitiert sind als der TF-Ansatz. Dennoch ist er besonders für Propagationen über sehr große Distanzen geeignet.

4.1.3 Beispiel: Quadratisches Strahlenbündel

Beispielshalber soll ein Strahlenbündel mit der Wellenlänge $\lambda = 532nm$ (Nd:YAG-Laser) von einer quadratischen Quellfläche mit den Seitenlängen $L = L_1 = L_2 = 0,5m$ aus über eine Distanz von $z = 2000m$ durch ein Vakuum propagiert werden.

An der Stelle $z = 0m$ wird der Strahl durch eine quadratische Apertur mit Radius (Halbwertsbreite) $w = 51mm$ vignettiert. Das Strahlprofil bei $z = 0m$ zeigt die Abb. 4.

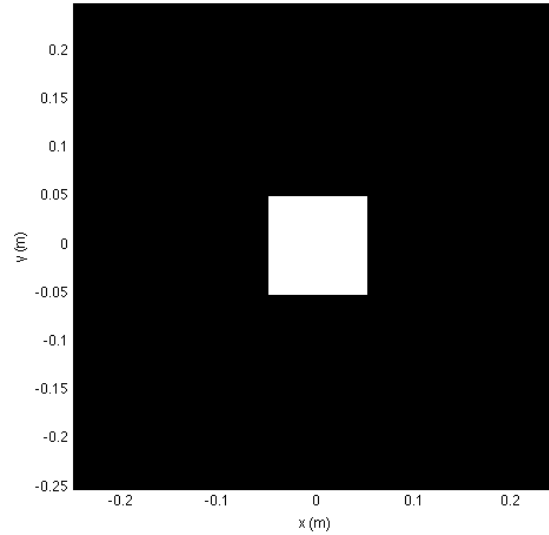


Abbildung 4: Intensitätsverteilung quadratisches Strahlenbündel

Die Fresnel-Zahl beträgt hier $N_F = \frac{w^2}{\lambda z} \approx 2,4$, was gut zur Fresnel-Näherung passt.

Der Algorithmus (Code 5) generiert zunächst das vignettierte Strahlenbündel in `u1` und gibt diese jeweils an den TF- und den IR-Propagator weiter. Die Abtastrate wurde dabei mit $M = 25$ festgelegt. Das Abtastintervall beträgt somit $dx = \frac{L}{M} = 0,002m^{-1}$. Die Aperturöffnung wird also an 51 Stellen abgetastet.

```

1 % sqr_beam_fresnel
  % Fresnelpropagation eines quadratischen Strahlenbündels
3
4 L = 0.5; % Seitenlänge von Quell- und Beobachtungsfeld (m)
5 M = 250; % Anzahl Abtastungen
  dx = L/M; % Abtastintervall
7 x = -L/2:dx:L/2-dx; % Quellkoordinaten
  y = x;
9
10 lambda = 532*10^-9; % Wellenlänge (m)
11 k = 2*pi/lambda; % Wellenzahl
  w = 0.051; % Quellradius (m)
13 z = 2000; % Propagationsweite (m)
15
16 % Quellfeld (Rechteckiges Strahlenbündel)
  [X,Y] = meshgrid(x,y);
17 u1 = rect(X/(2*w)) .* rect(Y/(2*w));
19
20 % Intensität des Quellfeld
  I1 = abs(u1.^2);
21
22 % TF-Propagation
23 u2 = prop_fresnelTF(u1,L,lambda,z);
25
26 % Resultierende Intensitätsverteilung
  I2 = abs(u2.^2);
27
28 % IR-Propagation
29 u2 = prop_fresnelIR(u1,L,lambda,z);
31
32 % Resultierende Intensitätsverteilung
  I2 = abs(u2.^2);

```

Quellcode 5: MATLAB-Beispiel: Quadratisches Strahlenbündel (Fresnel)

In Abb. 5 ist zum Einen die Intensitätsverteilung (Abb. 5(a)) und das Intensitätsprofil entlang der x -Achse (Abb. 5(b)), zum Anderen das zugehörige Amplituden- (Abb. 5(c)) und Phasenprofil (Abb. 5(d)) der TF-Propagation gezeigt. Analog zeigt Abb. 6 die Ergebnisse für die IR-Propagation bei $z = 2000m$.

Abb. 5 und Abb. 6 zeigen fast identische Ergebnisse. An ihnen lässt sich nun die Form der optischen Wellenfront ablesen. Besonders die Intensitäts- und somit Wellenfrontprofile, jeweils in (b) zu sehen, lassen eine intuitive Interpretation zu. Wie bereits erwähnt ist die zeitliche Phaseninformation gegeben durch $e^{-i2\pi\nu t}$ (Die Phase wird negativer mit zunehmender Zeit). Die Abb. zeigt deutlich, dass die Intensität zwar becherförmig verteilt, das Zentrum aber deutlich abgeflacht ist. Das Zentrum wird somit langsamer negativ als die restliche Wellenfront. Nichtsdestotrotz ist der größte Teil der Wellenfront weiterhin in der Mitte anzutreffen, wenn auch anders verteilt.

Die diskrete Abtastung des Quellfeldes, der Transferfunktion oder der Impulsantwort und die periodischen Eigenschaften der FFT kann zu einer Vielzahl von Artefakten im Propagationsergebnis führen. Die meisten Störungen kommen hierbei von der Chirp-Funktion (Gl. 10).

Hierzu zeigt Abb. 7 die Intensitätsprofile sowohl für die TF- wie auch für die IR-Fresnelpropagation, dabei variieren die Propagationsabstände z von $1000m$ bis zu $20000m$.

Bei $z = 1000m$ und $2000m$ erscheinen sowohl TF- als auch IR-Ergebnisse nahezu identisch und plausibel, wobei scheinbar einige konstruktive und destruktive Interferenzeffekte auftreten. Bei $z = 4000m$ erscheinen im TF-Profil Störungen, die im IR-Profil nicht auftreten. Gravierender werden die Abweisungen bei $z = 20000m$, hier scheint sich das TF-Profil immer weiter einer Stufenform anzunähern. Das IR-Ergebnis ist dagegen glatt. Nach der Fraunhofer-Theorie sollte das Profil bei großen Abständen einem sinc^2 gleichen. Dies ist am ehesten für das IR-Ergebnis der Fall. Das TF-Ergebnis auf Basis der Transferfunktion

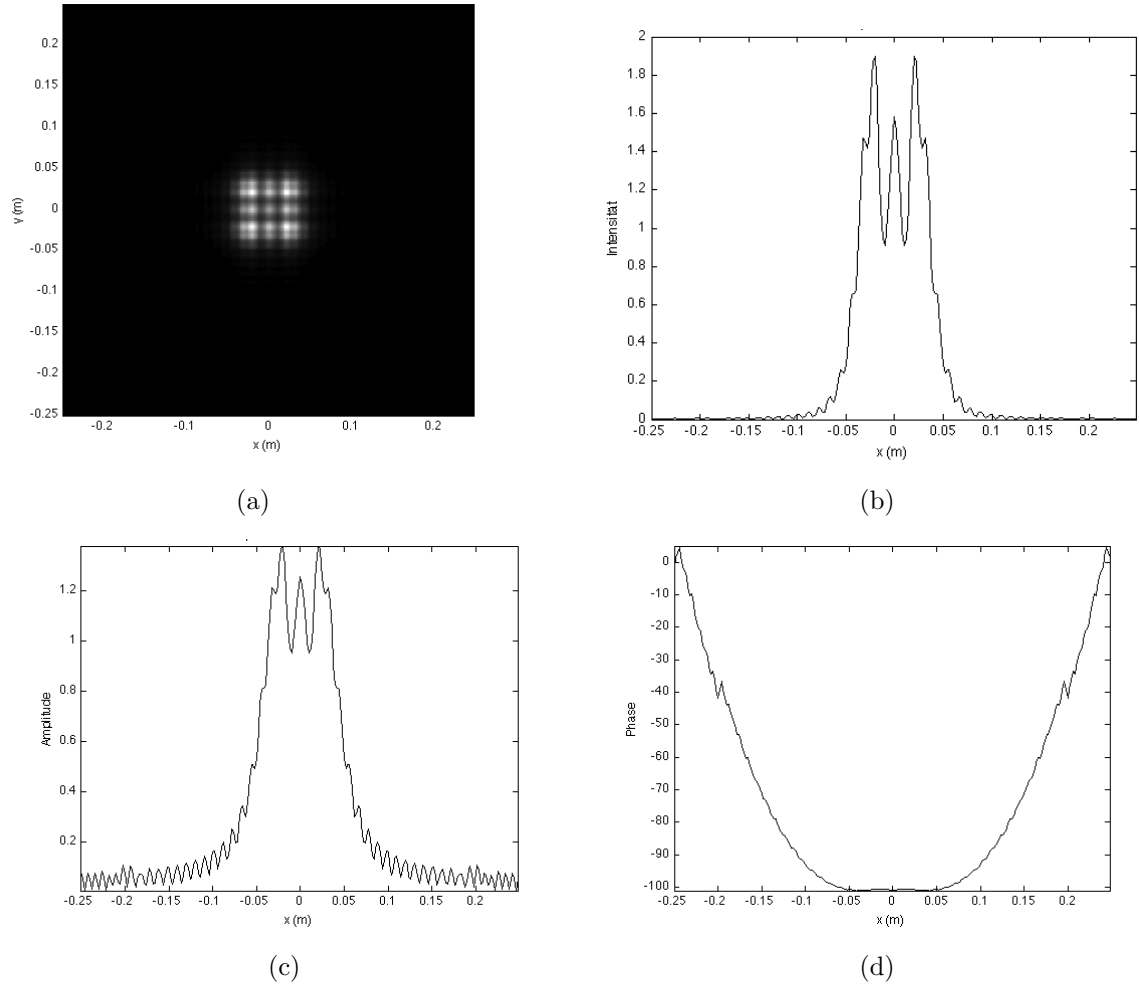


Abbildung 5: Ergebnis des TF-Propagators bei $z = 2000m$: (a) zeigt die Intensitätsverteilung, (b) das Intensitätsprofil, (c) das Amplitudenprofil und (d) das Phasenprofil

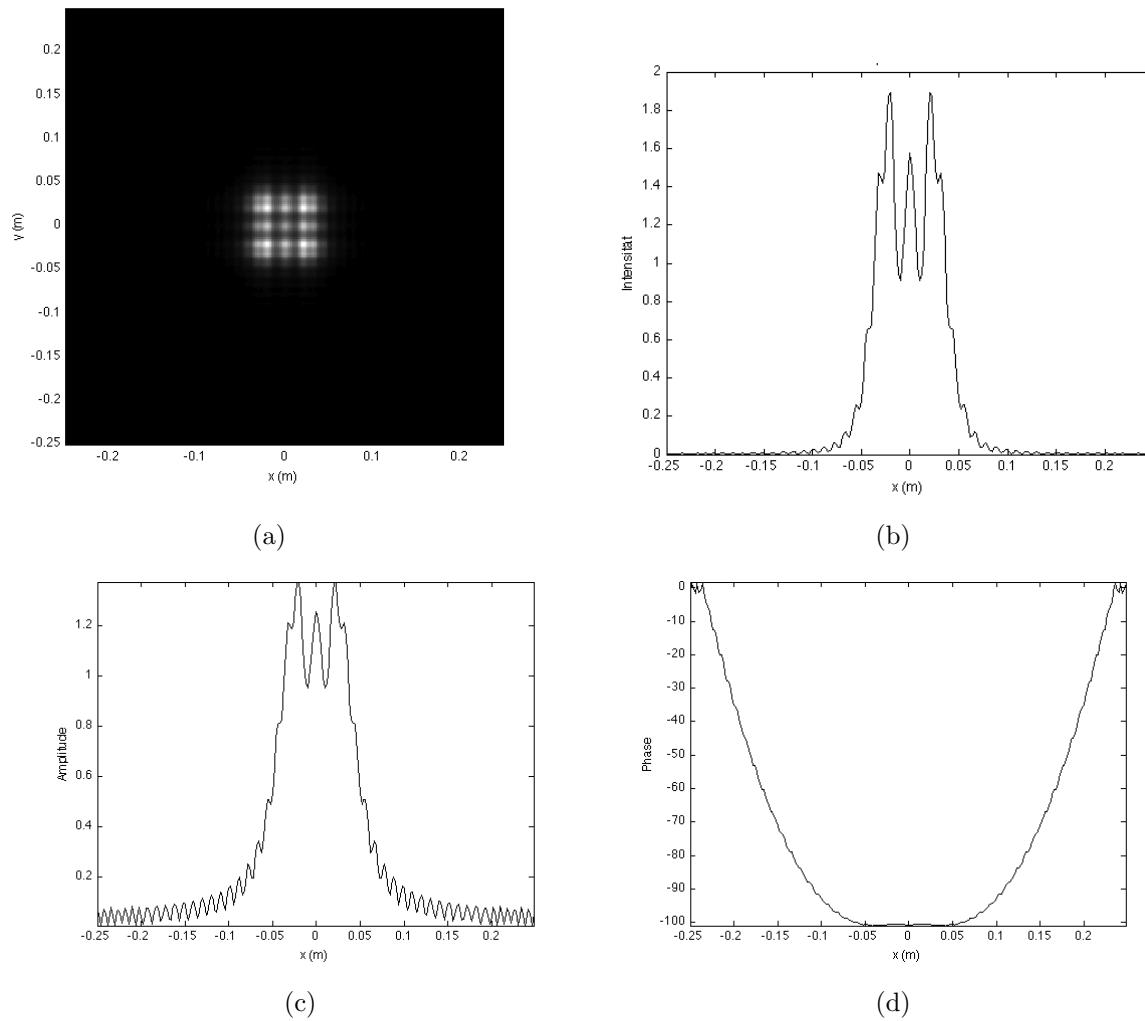


Abbildung 6: Ergebnis des IR-Propagators bei $z = 2000m$: (a) zeigt die Intensitätsverteilung, (b) das Intensitätsprofil, (c) das Amplitudenprofil und (d) das Phasenprofil

versagt hier anscheinend. Gleiche Schlüsse lässt Abb. 8 zu.

4.1.4 Abtastbedingungen

In den unteren Darstellungen von Abb. 7 und Abb. 8 sind deutliche Artefakte zu erkennen, die durch die diskrete Abtastung zu begründen sind.

Ein offensichtliches erstes Kriterium besagt, dass die Breite der genutzten Quellfläche L größer sein sollte als die maximale lineare Breite des relevanten Quellfeldes D_1 , hier die Breite des quadratischen Strahlenbündels bei $z = 0m$,

$$D_1 < L, \quad (36)$$

optimal ist ein kleines Vielfaches von D_1 (z.B. $2D_1$, $3D_1$, etc.). So lassen sich sehr einfach erste Artefakte am Bildrand vermeiden.

Die Chirp-Funktion von H , $e^{-i\pi\lambda z(f_X^2 + f_Y^2)}$, gilt als angemessen abgetastet (oversampled) wenn

$$\Delta x \geq \frac{\lambda z}{L} \quad (37)$$

gilt. Dieser Zusammenhang ergibt sich durch Betrachtung des Aliasings der Chirp-Funktion vom Übergang aus der Frequenzdomäne in die Ortsdomäne [2]. Für die Chirp-Funktion von h , $e^{ik(2z)^{-1}(x^2 + y^2)}$, gilt

$$\Delta x \leq \frac{\lambda x}{L} \quad (38)$$

als optimal. Die Gl. 37 und 38 zeigen, dass die Oversampling-Bedingungen für h und H gegensätzlich sind. Dennoch gibt es eine Übereinstimmung beider Gl., das kritische Sampling, bei dem

$$\Delta x = \frac{\lambda x}{L} \quad (39)$$

zutrifft. Oversampling ist, im Gegensatz zum Undersampling, generell positiv. Werden Gl. 37 oder 38 verletzt, entstehen Artefakte, die die Phasenverteilung der Chirp-Funktion repräsentieren.

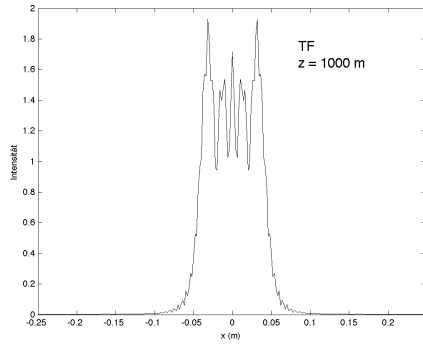
Aus den Bedingungen Gl. 37 bis 39 lassen sich drei Regime ableiten, die in Tab. 1 aufgelistet sind. Für jedes Regime lässt sich zudem ein Kriterium aufstellen, dass die effektive Bandbreite B_1 des Quellfeldes aufgreift.

Regime	Sampling	Bandbreite	Ansatz
$\Delta x > \frac{\lambda z}{L}$	TF: overs. IR: unders.	$B_1 \leq \frac{1}{2\Delta x}$	TF: bevorzugt IR: periodische Wiederholungen
$\Delta x = \frac{\lambda z}{L}$	TF: kritisch TF: kritisch	$B_1 \leq \frac{1}{2\Delta x}$ $B_1 \leq \frac{L}{2\lambda x}$	TF u. IR identisch
$\Delta x < \frac{\lambda z}{L}$	TF: unders. IR: overs.	$B_1 \leq \frac{L}{2\lambda x}$	TF wenn Bandbreite erfüllt, sonst IR Oft stark fehlerbehaftet

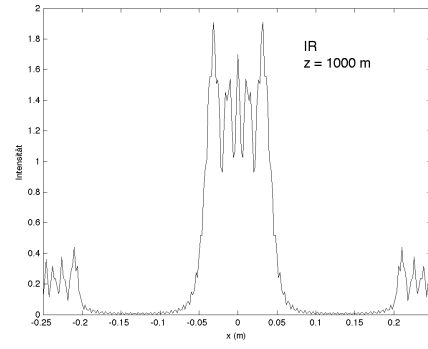
Tabelle 1: Sampling-Regime und Bedingungen

Der kritische Abtastbereich lässt sich alternativ auf mit

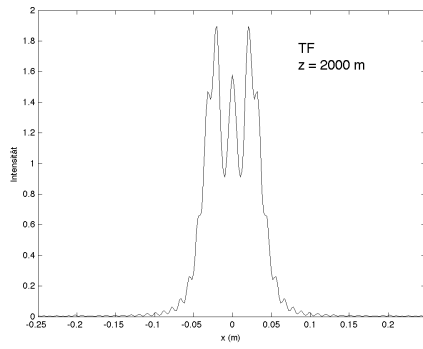
$$M = \frac{\lambda z}{\Delta x^2} = \frac{L^2}{\lambda z} \quad (40)$$



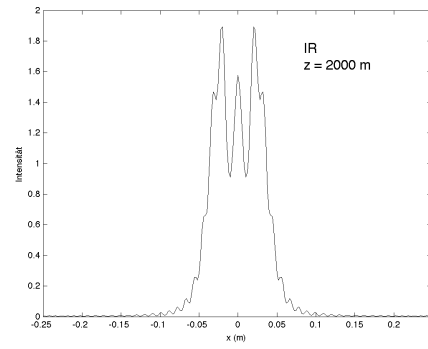
(a)



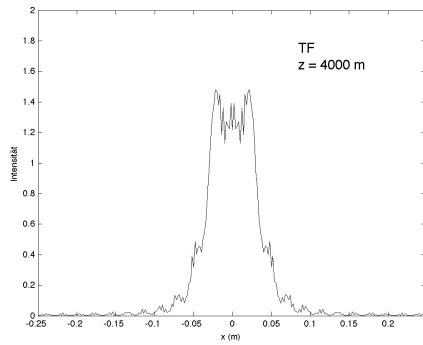
(e)



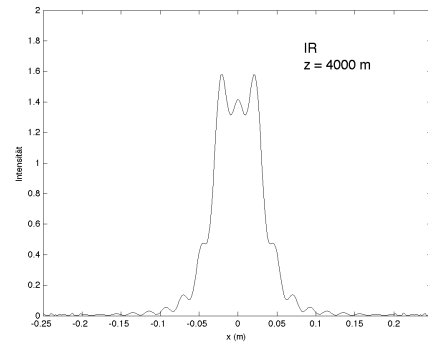
(b)



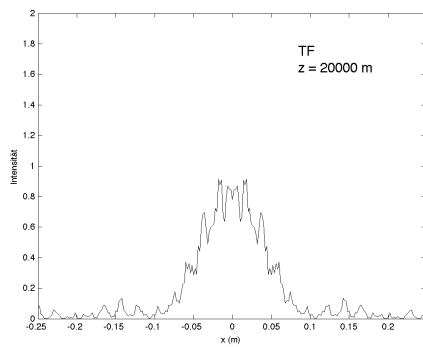
(f)



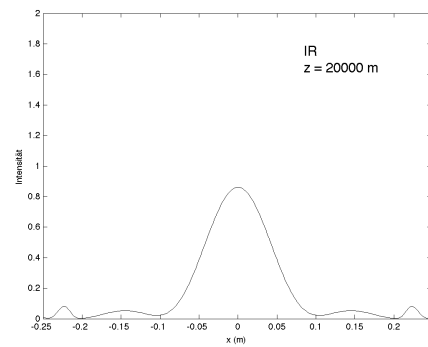
(c)



(g)

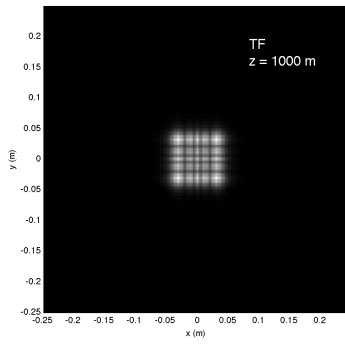


(d)

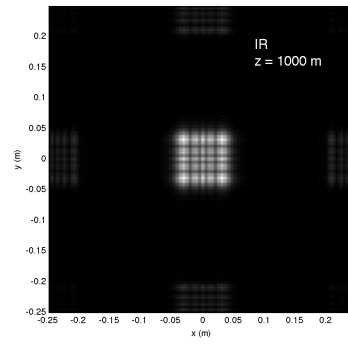


(h)

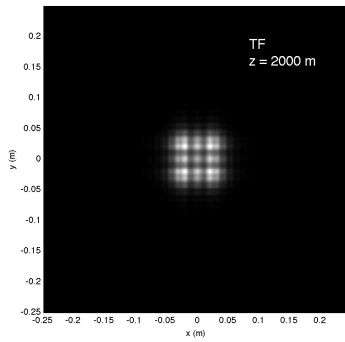
Abbildung 7: Intensitätsprofile TF-/ IR-Propagator mit variablem z



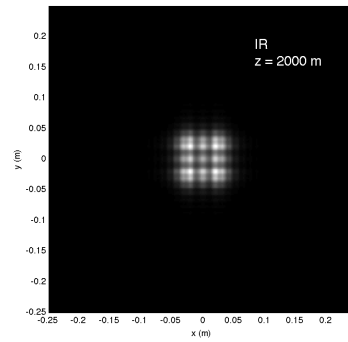
(a)



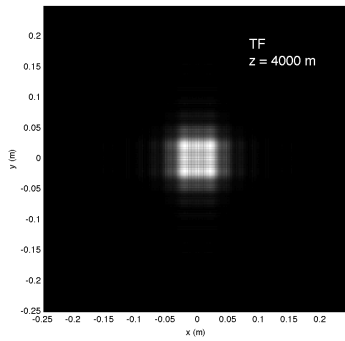
(e)



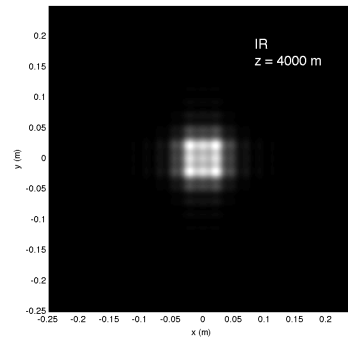
(b)



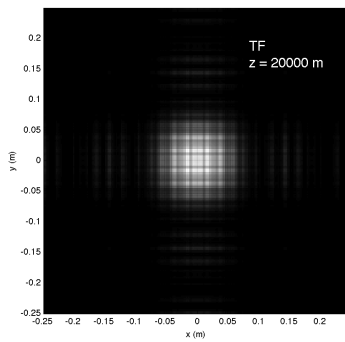
(f)



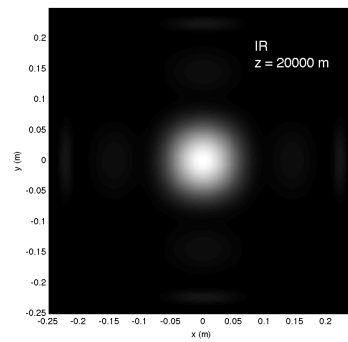
(c)



(g)



(d)



(h)

Abbildung 8: Intensitätsverteilungen TF-/ IR-Propagator mit variablem z

formulieren [9].

In dem hier vorliegenden Beispiel ist das Quellfeld mit

$$U_1(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{2w}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{2w}\right) \quad (41)$$

definiert, wobei $w = 51\text{mm}$ beträgt. Somit ist $D_1 = 2w = 102\text{mm}$, was wiederum leicht in $L = 0,5\text{m}$ passt. Für das Beispiel ergibt sich eine effektive Bandbreite von

$$B_1 \approx \frac{5}{w} = 98 \frac{\text{Schwingungen}}{m} \quad [2]. \quad (42)$$

Nun sollen die Kriterien aus Tab. 1 mit den Propagationen bei den Distanzen $z = (1000m, 2000m, 4000m, 20000m)$ verglichen werden:

1. $z = 1000m$: H ist um Faktor 2 oversampled, Limitierungen der Beobachtungsebene können vernachlässigt werden, somit passt TF hier gut. IR kann zu periodischen Wiederholungen des Ergebnisbildes führen.
2. $z = 2000m$: Kritisches Sampling. TF und IR liefern identische, gute Ergebnisse.
3. $z = 4000m$: H ist um Faktor 2 undersampled und die Quellbandbreite ist etwas größer als die effektive Bandbreite B_1 , das Bandbreiten-Kriterium ist somit zum Großteil erfüllt. Trotzdem stören kleinere Zacken das Ergebnis von TF. IR liefert keine erkennbaren Artefakte.
4. $z = 20000m$: H ist um Faktor 10 undersampled und die Bandbreite beträgt $0,1B_1$. TF zeigt dadurch deutliche Stufen-Artefakte. Der IR-Ansatz liefert eine glatte Lösung, unterdrückt dabei aber Frequenzanteile die unter der verfügbaren Bandbreite liegen. Es entstehen verdächtige „Hügel“ am Rand der Funktion.

4.1.5 Propagatorgenauigkeit

Die analytische Fresnel-Lösung lautet [1]

$$U_2(x, y) = \frac{e^{ikz}}{2i} \{ [C(\alpha_2) - C(\alpha_1)] + i [S(\alpha_2) - S(\alpha_1)] \} \cdot \{ [C(\beta_2) - C(\beta_1)] + i [S(\beta_2) - S(\beta_1)] \}, \quad (43)$$

wobei C und S die Fresnel-Integrale

$$C(\Psi) = \int_0^\Psi \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt \quad \text{und} \quad S(\Psi) = \int_0^\Psi \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt \quad (44)$$

sind und weiter

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\sqrt{2/(\lambda z)}(w+x), & \alpha_2 &= -\sqrt{2/(\lambda z)}(w-x), \\ \beta_1 &= -\sqrt{2/(\lambda z)}(w+y), & \beta_2 &= -\sqrt{2/(\lambda z)}(w-y) \end{aligned} \quad (45)$$

gilt.

Auch die analytische Lösung wurde, für den Vergleich mit den beiden Näherungen, implementiert (Code 6) und führt zu den Intensitätsverteilungen in Abb. 9.

z (m)	$\frac{\lambda z}{\Delta x L}$	Abtastung		max. Abw. (%)	
		TF (H)	IR(h)	TF (H)	IR(h)
1000	0,5	overs.	unders.	4,0	23,6
2000	1	kritisch	kritisch	1,0	0,9
4000	2	unders.	overs.	13,4	1,0
20000	10	unders.	overs.	23,1	8,7

Tabelle 2: Abtastregime des Beispiels

```

2 % ...
% Quellfeld (Rechteckiges Strahlenbündel)
4 [X,Y] = meshgrid(x,y);
u1 = rect(X/(2*w)) .* rect(Y/(2*w));
6
% Intensität des Quellfeld
8 I1 = abs(u1.^2);

10 % TF-Propagation
u2_tf = prop_fresnelTF(u1,L,lambda,z);
12 I2_tf = abs(u2_tf.^2);

14 % IR-Propagation
u2_ir = prop_fresnelIR(u1,L,lambda,z);
16 I2_ir = abs(u2_ir.^2);

18 % Analytische Lösung
a_12 = sqrt(2/(lambda * z));
20 alpha_1 = -a_12 * ( w + X);
alpha_2 = a_12 * ( w - X);
22 beta_1 = -a_12 * ( w + Y);
beta_2 = a_12 * ( w - Y);
24 u2_an = -j*exp(j * k * z)/2 .* ...
( ( mfun('FresnelC',alpha_2) - mfun('FresnelC',alpha_1) ) + ...
26 j * ( mfun('FresnelS',alpha_2) - mfun('FresnelS',alpha_1) ) ) .* ...
( ( mfun('FresnelC',beta_2) - mfun('FresnelC',beta_1) ) + ...
28 j * ( mfun('FresnelS',beta_2) - mfun('FresnelS',beta_1) ) );
I2_an = abs(u2_an.^2);
30
% Maximalabweichung
32 max_I_tf = max( max( abs( I2_an(M/2+1,:) - I2_tf(M/2+1,:)) ) / ...
max( max( abs( I2_an(M/2+1,:)) ) );
34 max_I_ir = max( max( abs( I2_an(M/2+1,:) - I2_ir(M/2+1,:)) ) / ...
max( max( abs( I2_an(M/2+1,:)) ) );

```

Quellcode 6: MATLAB-Beispiel: Vergleich analytische Lösung und Näherungen (Fresnel)

Abb. 10 zeigt zudem die Intensitäts-, Amplituden- und Phasen-Profile der Näherungen sowie der analytischen Lösung. Hieraus sind die teilweise gravierenden Unterschiede zwischen den Näherungen, sowie zur analytischen Lösung, ersichtlich. So hat bei $z = 1000m$ beispielsweise die IR-Näherung einen maximalen Abweichung von 23,6% zum analytischen Intensitäts-Profil, wogegen die TF-Näherung lediglich einen maximalen Fehler von 4,0% aufweist. Bei der weitesten Propagationsstrecke $z = 20000m$ kehrt sich das Verhältnis um. Die TF-Näherung weicht nun bis zu 23,1%, die IR-Näherung höchstens 8,7%, ab. Hier zeigt auch die IR-Näherung, besonders im Randbereich, ernstzunehmende Artefakte. In der Nähe der kritischen Abtastung, bei $z = 2000m$, sind die Fehler mit 1,0% für TF und 0,9% für IR fast identisch und passen gut mit den analytischen Ergebnissen überein.

Tab. 2 fasst die Gegebenheiten bei verschiedenen Propagationsabständen z zusammen.

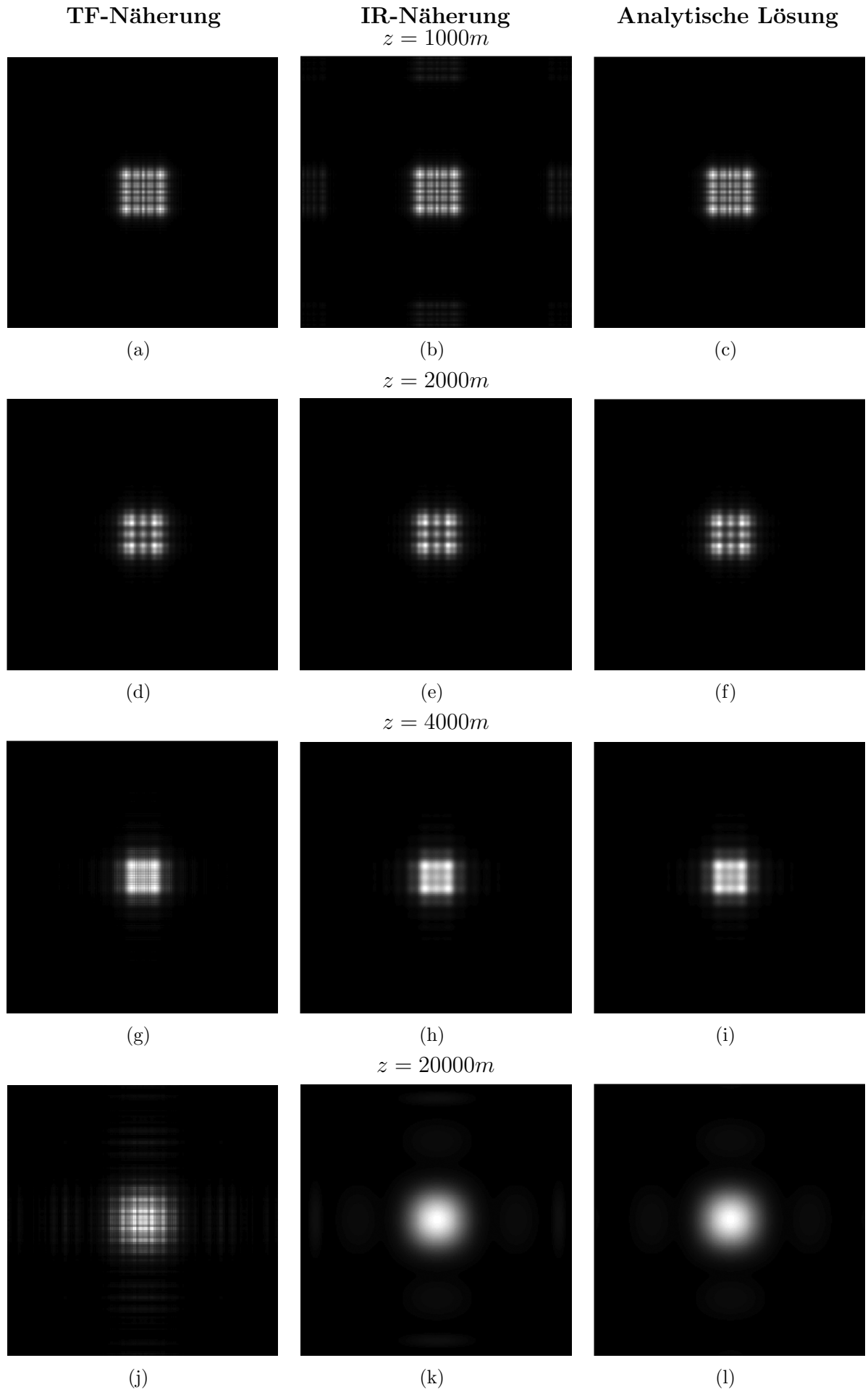


Abbildung 9: Intensitätsverteilungen TF-/ IR-Näherung und analytische Lösung

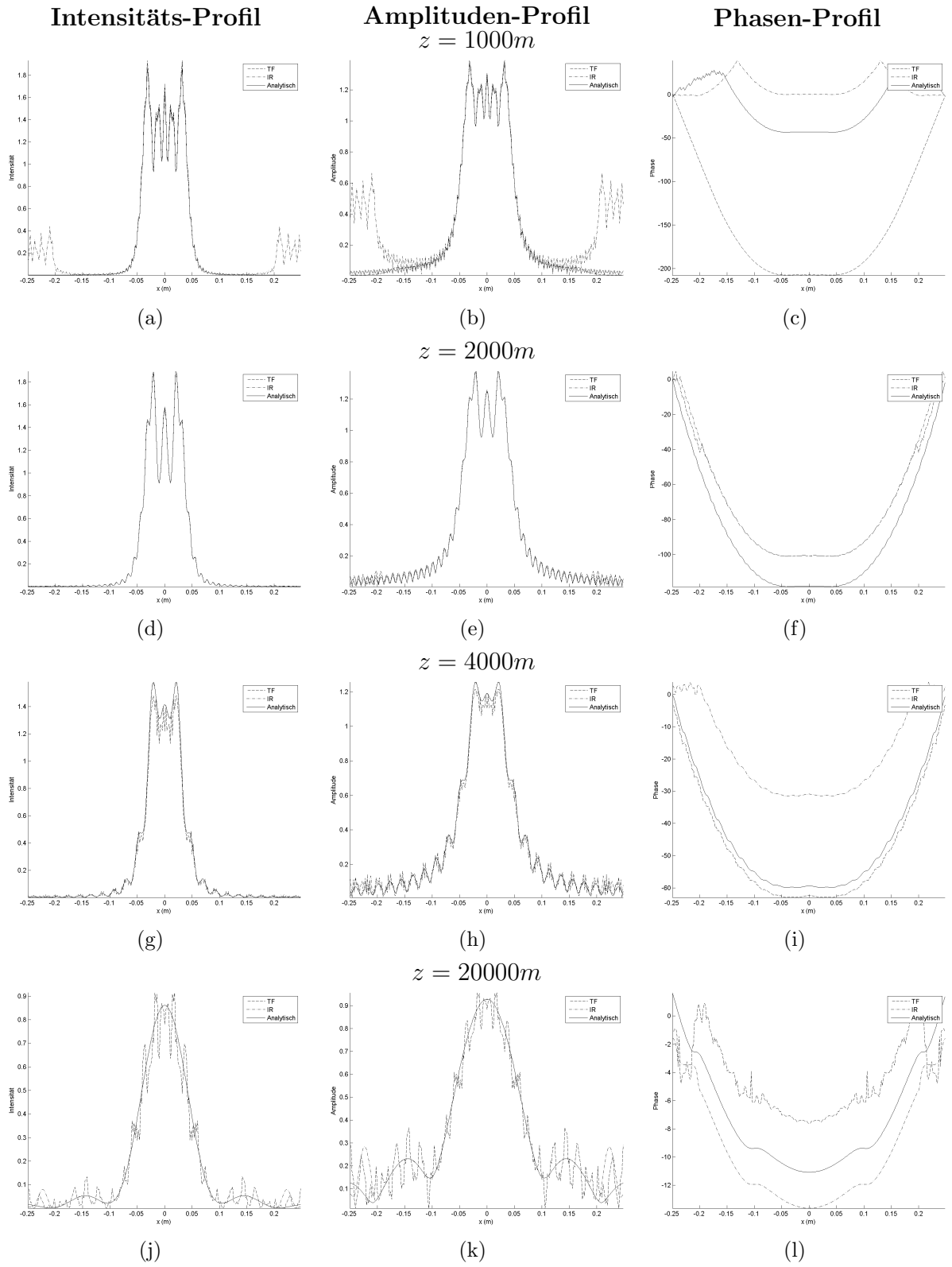


Abbildung 10: Profile TF-/ IR-Näherung und analytische Lösung

4.2 Fraunhofer-Propagator

Die Fraunhofer-Näherung aus Gl. 29

$$U_2(x, y) = -i \frac{e^{ikz}}{\lambda z} e^{i \frac{k}{2z} (x_2^2 + y_2^2)} \cdot \iint U_1(x_1, y_1) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda z} (x_2 x_1 + y_2 y_1)} dx_1 dy_1 \quad (\text{Wiederh. 29})$$

wurde hier für die numerische Implementierung angepasst, indem die Koordinaten der Quellebene den Index 1 und die Koordinaten der Beobachtungsebene den Index 2 erhalten haben. Durch die Verwendung der FFT zeigt sich, dass die Variablen der Quell- und Beobachtungsebene nicht identisch sind. Aus der Gl. 30 - hier angepasst auf die neue Indizierung -

$$\lambda z f_{x_1} \rightarrow x_2 \quad (\text{Wiederh. 30})$$

und aus dem Frequenz-Abtasttheorem der diskreten Fourier-Transformation

$$\Delta f_x = \frac{1}{L_x} \quad (46)$$

ergeben sich, mit Seitenlänge L_2 und dem Abtastintervall Δx_2 , die Parameter der Quellebene (Index 1)

$$L_2 = \frac{\lambda z}{\Delta x_1} \quad \text{und} \quad \Delta x_2 = \frac{\lambda z}{L_1}. \quad (47)$$

Somit lassen sich die Koordinaten in der x -Richtung der Beobachtungsebene mit

$$x_2 = \left[\frac{-L_2}{2} : \Delta x_2 : \frac{L_2}{2} - \Delta x_2 \right] = \lambda z \left[\frac{-1}{2\Delta x_1} : \frac{1}{L_1} : \frac{1}{2\Delta x_1} - \frac{1}{L_1} \right] \quad (48)$$

angeben. Wird kritische Abtastung verwendet ($\Delta x_1 = \lambda z / L_1$), ergibt sich aus Gl. 47, dass beide Seitenlängen $L_2 = L_1$ gleich sind. In jedem anderen Fall gilt, dass L_1 und L_2 verschieden sind.

Nachfolgend ist die Implementierung der Fraunhofer-Näherung als MATLAB-Funktion angegeben (Code 7), die, im Gegensatz zu vorangegangenen Funktionen, die Seitenlänge der Beobachtungsebene L_2 ausgibt.

```

1 function [u2,L2] = prop_fraunh(u1, L1, lambda, z)
2 % prop_fraunh
3 % Propagator der Fraunhofer-Lösung
4 % u1      - Feld in Quellebene
5 % L1      - Seitenlänge des Quellfelds (m)
6 % lambda  - Wellenlänge (m)
7 % z       - Propagationsweite
8 % u2      - Feld in Beobachtungsebene
9 % L2      - Seitenlänge des Beobachtungsfeld (m)

11 [M,N] = size(u1);                % Quellfeldgröße
12 dx1 = L1 / M;                    % Abtastintervall Quellfeld
13 k = 2 * pi / lambda;              % Wellenzahl

15 L2 = lambda * z / dx1;            % Seitenlänge des Beobachtungsfeld
16 dx2 = lambda * z / L1;            % Abtastintervall Beobachtungsfeld
17 x2 = -L2/2 : dx2 : L2/2-dx2;     % Ortskoordinaten Beobachtungsfeld
18 y2 = x2;
19 [X2,Y2] = meshgrid(x2,y2);

21 % Berechne Näherung
22 c = 1 / (j * lambda * z) * exp(j * k / (2*z) * (X2.^2 + Y2.^2));
23 u2 = c .* ifftshift(fft2(fftshift(u1))) * dx1^2;
```

Quellcode 7: MATLAB-Funktion des Fraunhofer-Propagators

4.2.1 Beispiel: Quadratisches Strahlenbündel

Für das Beispiel aus Kap. 4.1.3 ergibt sich somit das folgende Skript zur Propagation eines quadratischen Strahlenbündels mittels Fraunhofer-Näherung.

```

1  % sqr_beam_fraunh
   % Fraunhofer-Propagation eines quadratischen Strahlenbündels
3
   L = 0.5;                % Seitenlänge von Quell- und Beobachtungsfeld (m)
5  M = 250;                % Anzahl Abtastungen
   dx = L/M;              % Abtastintervall
7  x = -L/2:dx:L/2-dx;    % Quellkoordinaten
   y = x;
9
   lambda = 532*10^-9;     % Wellenlänge (m)
11 k = 2*pi/lambda;       % Wellenzahl
   w = 0.011;             % Quellradius (m)
13 z = 2000;              % Propagationsweite (m)

15 % Quellfeld (Rechteckiges Strahlenbündel)
   [X,Y] = meshgrid(x,y);
17 u1 = rect(X/(2*w)) .* rect(Y/(2*w));

19 % Intensität des Quellfeld
   I1 = abs(u1.^2);
21
   % TF-Propagation
23 [u2,L2] = prop_fraunh(u1,L,lambda,z);

25 dx2 = L2/M;
   x2 = -L2/2 : dx2 : L2/2-dx2;
27 y2 = x2;

29 % Resultierende Intensitätsverteilung
   I2 = abs(u2.^2);

```

Quellcode 8: MATLAB-Beispiel: Quadratisches Strahlenbündel (Fraunhofer)

Der angepasste Quellradius $w = 11\text{mm}$ und die Propagationsdistanz $z = 2000\text{m}$ ergeben eine Fresnel-Zahl $N_F \approx 0,12$, die passend ist für den Fraunhofer-Bereich. Abb. 11 zeigt die zugehörigen Ergebnisse. Hier zeigt die Intensität (Abb. 11(a) und 11(b)) deutlich das erwartete sinc^2 -Verhalten.

Auch die Fraunhofer-Näherung soll nun mit der analytischen Lösung verglichen werden. Die analytische Fraunhofer-Lösung, für ein quadratisches Strahlenbündel, lautet [1]

$$\mathcal{F} \left\{ \text{rect} \left(\frac{x_1}{2w} \right) \text{rect} \left(\frac{y_1}{2w} \right) \right\} = 4w^2 \text{sinc}(2wf_{x_1}) \text{sinc}(2wf_{y_1}) . \quad (49)$$

Mit den Substitutionen $f_{x_1} = x_2/\lambda z$ und $f_{y_1} = y_2/\lambda z$ und der Multiplikation mit der zugehörigen Chirp-Funktion ergibt sich das Fraunhofer-Feld

$$U_2(x_2, y_2) = -i \frac{e^{ikz}}{\lambda z} e^{i \frac{k}{2z}(x_2^2 + y_2^2)} \cdot 4w^2 \text{sinc}(2wf_{x_1}) \text{sinc}(2wf_{y_1}) \quad (50)$$

und daraus die zugehörige Intensität

$$I_2(x_2, y_2) = |U_2(x_2, y_2)|^2 = \left(\frac{4w^2}{\lambda z} \right)^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{2w}{\lambda z} x_2 \right) \text{sinc}^2 \left(\frac{2w}{\lambda z} y_2 \right) . \quad (51)$$

Zur Bestimmung der maximalen Abweichung der Näherung von der analytischen Lösung wird der Quellcode 8 um die folgenden Zeilen (Code 9) erweitert.

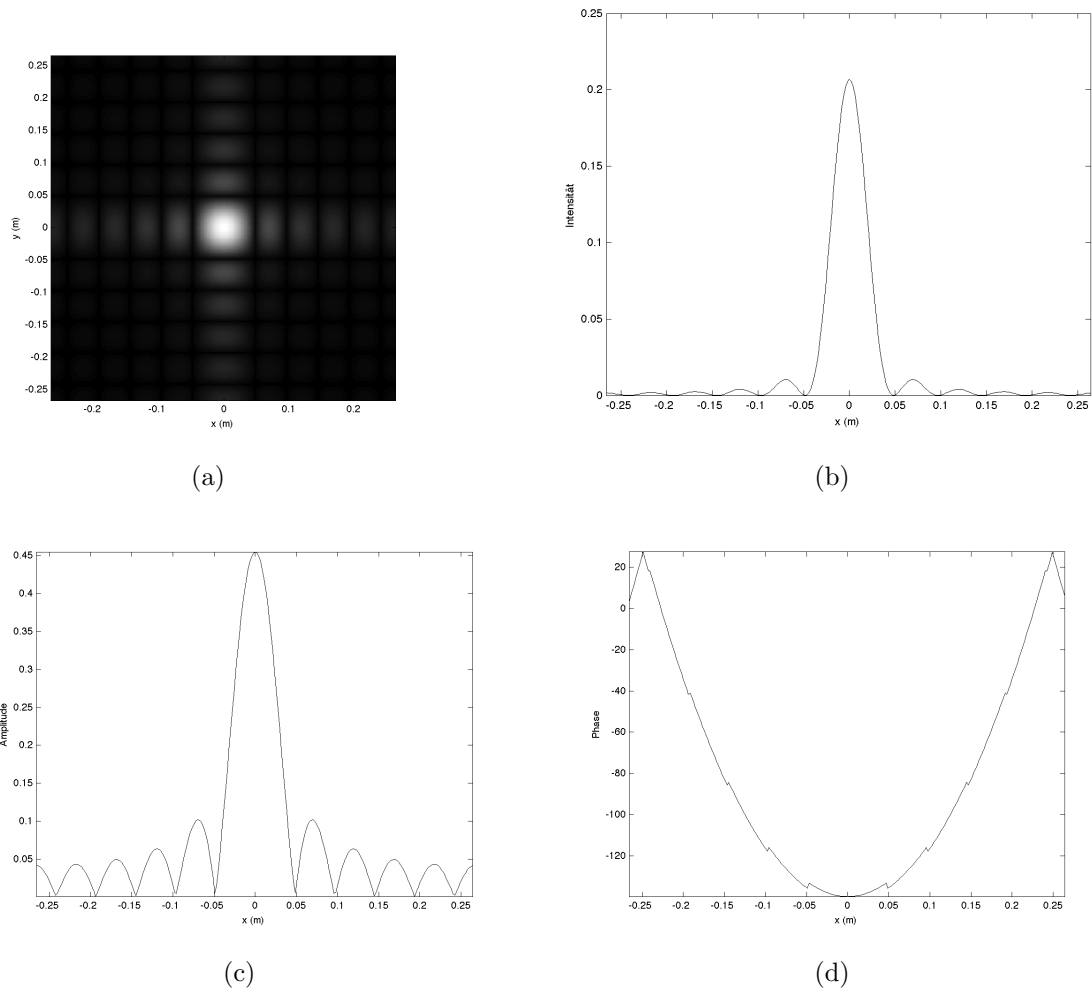


Abbildung 11: Ergebnis des Fraunhofer-Propagators bei $z = 2000m$: (a) zeigt die Intensitätsverteilung, (b) das Intensitätsprofil, (c) das Amplitudenprofil und (d) das Phasenprofil

```

% Analytische Lösung
2 [X2,Y2] = meshgrid(x2,y2);
  I2_an = 16*w.^4./(lambda*z).^2 .* ...
4   sinc((2.*w.*X2)/(lambda.*z)).^2 .* ...
   sinc((2.*w.*Y2)/(lambda.*z)).^2;
6
% Maximale Abweichung
8 max(max(abs( I2_an(M/2+1,:) - I2(M/2+1,:)))) / max(max(abs(I2_an(M/2+1,:))))

```

Quellcode 9: MATLAB-Beispiel: Vergleich mit analytischer Lösung (Fraunhofer)

Die maximale Abweichung beträgt 0,49% der Intensitätsamplitude (Abb. 12) und kann somit als sehr genau betrachtet werden, was zum größten Teil an den perfekt gewählten Parametern liegt.

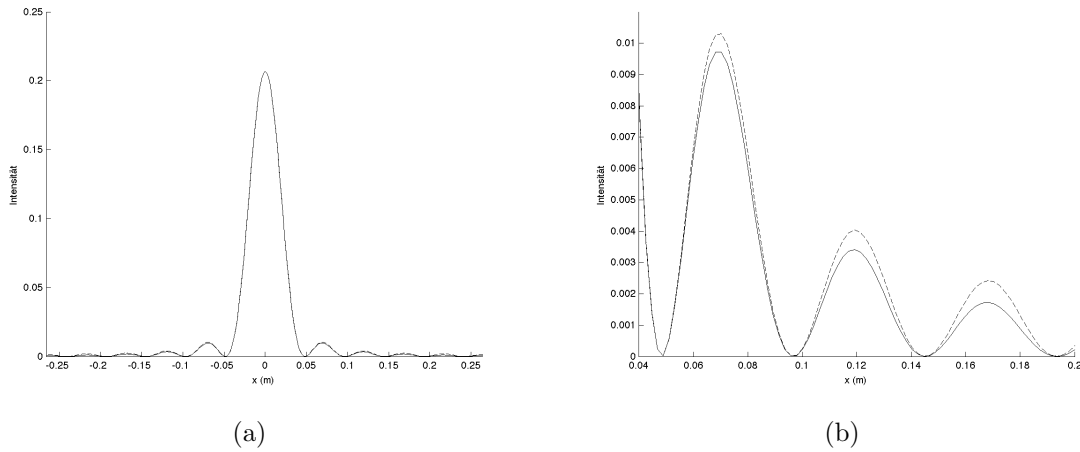


Abbildung 12: Vergleich der Fraunhofer-Näherung mit der analytischen Lösung. (b) zeigt dabei den Ausschnitt $x = [0,04m; 0,20m]$

Da in der Intensitätsbetrachtung keine komplexen Komponenten mehr vorhanden sind, ist das einzige einzuhaltende Kriterium die Bandbreite $B_1 \leq 1/2\Delta x_1$.

Ist jedoch das Fraunhofer-Feld von Interesse, so ergibt sich, analog zur Betrachtung in Kap. 4.1.4, die Abtastbedingung

$$\Delta x_1 \geq \frac{\lambda z}{L_1} \quad (52)$$

nach Gl. 47. Kann diese Bedingung (Gl. 52) nicht erfüllt werden ergeben sich Alias-Effekte durch den vorangestellten Chirp-Term. Wenn nun die Forderungen aus der Fresnel-Zahl $N_F = w^2/\lambda z \ll 1$ für das Fraunhofer-Regime in Betracht gezogen werden, ergibt sich die Bedingung

$$L_1 \gg \frac{w^2}{\Delta x_1}, \text{ bzw. } M \gg \frac{w^2}{\Delta x_1^2}, \quad (53)$$

die besagt, dass die Abtastanzahl M sehr viel größer sein muss als das Quadrat der Abtastzahl über die Quellfeldapertur $w^2/\Delta x_1^2$. M wird somit sehr groß.

Glücklicherweise kann die Fraunhofer-Phase oftmals vernachlässigt werden.

5 Resümee und Ausblick

Die analytische Lösung einer Propagation ist sehr aufwendig und für viele Fälle sogar unmöglich. Zudem ist die numerische Berechnung von analytischen Lösungen sehr zeitintensiv.

Die zur Verfügung stehenden Propagationsnäherungen ermöglichen die relativ schnelle Berechnung einer Wellenfrontausbreitung, auch bei komplexen Geometrien. Dabei ist lediglich darauf zu achten, dass in der Quellebene ein ausreichend großer Bildbereich genutzt wird (Gl. 36).

Die drei behandelten Propagatoren auf Basis der Fresnel-, oft auch Faltungsmethode (CVM) genannt, und Fraunhofer-Näherungen, oft auch als DFT bezeichnet, sind dabei für verschiedene Regime, also für verschiedenen Propagationsdistanzen z und Wellenlängen λ , geeignet:

- *Rayleigh-Sommerfeld-Näherung (ASPW¹)*: $N_F \gg 1$ (geometrische Optik)
Sehr kurze z oder sehr kleine λ
- *Fresnel-Näherung (CVM)*: $N_F \approx 1$ (Fresnel-Beugung)
 - *Transferfunktions-Näherung (TF)*:
Kurze z oder kleine λ
 - *Impulsantwort-Näherung (IR)*:
Lange z oder große λ
- *Fraunhofer-Näherung (DFT)*: $N_F \ll 1$ (Fraunhofer-Beugung, Fernfeld)
Sehr lange z oder sehr große λ

Eine gute Hilfe zur Einschätzung der Regime ist die Fresnel-Zahl $N_F = w^2/\lambda z$, mit mittlerem Blendenradius w .

Um Alias-Effekte zu vermeiden sollte zudem die Bandweite des Quellfeldes B_1 und die korrelierte effektive Bandbreite berücksichtigt werden (Kap. 4.1.4).

In dieser Arbeit wurden alle Felder als quadratisch angenommen, dies ist in der Praxis meistens nicht der Fall, bedarf aber nur kleinerer Änderungen. Ebenso wurde ausschließlich im Vakuum propagiert, also unter idealen Bedingungen, auch dies ist in der Praxis oft nicht hilfreich und lässt sich mit relativ geringem Aufwand anpassen.

In der wissenschaftlichen Praxis werden die vorgestellten Verfahren beispielsweise zur Laser-Strahl-Propagation oder digitalen Holographie verwendet.

Für diese Zwecke ist es hilfreich auch optische Bauteile wie Linsen oder Beugungsgitter zu modellieren. Ebenso kann es hilfreich sein die Ausbreitung von Strahlenbündeln zu simulieren, deren Quell- und Beobachtungsebenen nicht parallel liegen. Dies kann gerade bei abbildenden Anwendungen von Vorteil sein.

Ein weiterer großer Bereich in der numerischen Fourier-Optik ist die Simulation bzw. der Ausgleich von Wellenfrontabberationen oder die Simulation teilkohärenter und nicht-monochromatischer Strahlen.

Alle in dieser Arbeit vorkommenden MATLAB-Skripte sind online unter <http://www.janbeneke.de/fourier> zu finden.

¹Winkelspektrumanalyse der Rayleigh-Sommerfeld-Transferfunktion (In dieser Arbeit nicht behandelt).

Literatur

- [1] GOODMAN, Joseph: *Introduction to Fourier Optics*. 2. Roberts and Company Publishers, 2004
- [2] VOELZ, David: *Tutorial Texts in Optical Engineering*. Bd. TT89: *Computational Fourier Optics: A MATLAB Tutorial*. SPIE Press, 2011
- [3] BERGMANN, L. ; SCHÄFER, C.: *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 3, Optik*. 9th. Berlin, Germany : Walter de Gruyter, 1993. – ISBN 3-11-012973-6
- [4] BORN, Max ; WOLF, Emil: *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. 7. 1999
- [5] HECHT, E.: *Optik*. 4. München, Deutschland : Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2005. – ISBN 3-48-627359-0
- [6] HEURTLEY, John C.: calar Rayleigh-Sommerfeld and Kirchhoff diffraction integrals: A comparison of exact evaluations for axial points. In: *J. Opt. Soc. Am.* 63 (1973), aug, Nr. 8, S. 1003–1008
- [7] GONZALEZ, Rafael C. ; WOODS, Richard E.: *Digital Image Processing*. 2. Prentice Hall, 2002
- [8] BENEKE, Jan-M.: *Deterministische Echtzeit-Phasenrekonstruktion mittels GPGPU*, Fachhochschule Köln, Bachelorthesis, dec 2010
- [9] SCHMIDT, J. D.: *Numerical Simulation of Optical Wave Propagation with Examples in MATLAB*. SPIE Press, 2010

Abbildungsverzeichnis

1	Phasenprofil des Chrip-Term	3
2	Propagationsgeometrie	4
3	Fraunhofer-Intensitätsverteilung	8
4	Fraunhofer-Intensitätsverteilung	11
5	Ergebnis TF-Propagator $z = 2000m$	13
6	Ergebnis IR-Propagator $z = 2000m$	14
7	Intensitätsprofile TF-/ IR-Propagator mit variablem z	16
8	Intensitätsverteilungen TF-/ IR-Propagator mit variablem z	17
9	Intensitätsverteilungen TF-/ IR-Näherung und analytische Lösung	20
10	Profile TF-/ IR-Näherung und analytische Lösung	21
11	Ergebnis Fraunhofer-Propagator $z = 2000m$	24
12	Vergleich der Fraunhofer-Näherung mit der analytischen Lösung	25

Tabellenverzeichnis

1	Sampling-Regime und Bedingungen	15
2	Abtastregime des Beispiels	19

Quellcodeverzeichnis

1	MATLAB-Code zur Berechnung der Intensitätsverteilung aus Gl. 35	7
2	MATLAB-Funktion zur Berechnung von $\frac{J_1(2\pi x)}{x}$	7
3	MATLAB-Funktion des TF-Propagators	9
4	MATLAB-Funktion des IR-Propagators	10
5	MATLAB-Beispiel: Quadratisches Strahlenbündel (Fresnel)	12
6	MATLAB-Beispiel: Vergleich analytische Lösung und Näherungen (Fresnel) .	19
7	MATLAB-Funktion des Fraunhofer-Propagators	22
8	MATLAB-Beispiel: Quadratisches Strahlenbündel (Fraunhofer)	23
9	MATLAB-Beispiel: Vergleich mit analytischer Lösung (Fraunhofer)	25