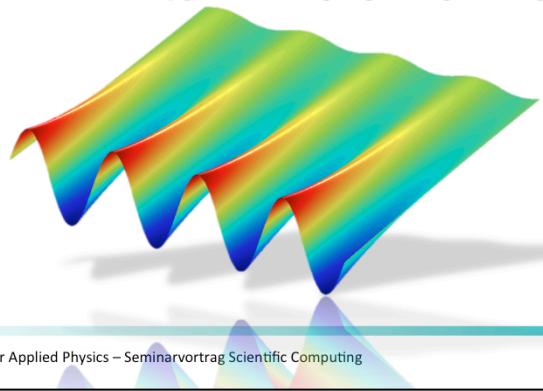


Seminarvortrag

Scientific Computing

RheinAhr Campus

Verfahren für parabolische und
hyperbolische Randwertprobleme in der
finiten Differenzenmethode



Jan Beneke
Javed Razzaq

22. Juni 2011

Master Applied Physics – Seminarvortrag Scientific Computing

Gliederung

- Einleitung
- Parabolische PDEs
- Hyperbolische PDEs
- Gegenüberstellung
- Probleme

Gliederung

- Einleitung
- Parabolische PDEs
- Hyperbolische PDEs
- Gegenüberstellung
- Probleme

Einleitung

Grundtypen von PDEs

RheinAhr Campus

- Elliptisch $c\Delta u = f$
 - Potentialgleichung:
Beschreibung eines Gleichgewichts
- Parabolisch $b \frac{\partial}{\partial t} u - c\Delta u = f$
 - Wärmeleitungsgleichung:
Streben zu einem Gleichgewicht
- Hyperbolisch $a \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - c\Delta u = f$
 - Wellengleichung:
Wellenausbreitung

$$a, b, c = \text{const}$$

PDEs lassen sich in die folgenden drei Grundtypen unterteilen: (bekannt aus Vorlesung)

- elliptisch
 - Prototyp: Potentialgleichung
 - Beschreibt ein Gleichgewicht
- parabolisch
 - Prototyp: Wärmeleitungsgleichung
 - Beschreibt streben zum Gleichgewicht
- hyperbolisch
 - Prototyp: Wellengleichung
 - Beschreibt Wellenausbreitungs

Einleitung

Differenzenquotienten

RheinAhr Campus

Näherung durch Taylor-Entwicklung

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!} + E_n(x - x_0)$$

$E_n(x - x_0)$ \triangleq Abbruchfehler

Finite Differenzen Methode basiert auf der Näherung der Ableitungen durch Taylorentwicklungen.

Das erste vernachlässigte Glied bestimmt dabei den Abbruchfehler, also den Fehler der durch die Näherung entsteht.

Einleitung

Differenzenquotienten

RheinAhr Campus

Fehler \triangleq erstem vernachlässigtem Glied

$$E_n(x - x_0) \triangleq \frac{u^{(n)}(\psi)(x - x_0)^n}{n!} \quad \text{mit } \psi = \text{const} \in [x_0, x]$$

Fehlerordnung

$$O(h^n) \approx \alpha h^n \quad \text{mit } h = (x - x_0) \quad \alpha = \text{const}$$

Der Abbruchfehler errechnet sich ...

Die Fehlerordnung $O(h^n)$ ergibt sich aus einem Faktor alpha und h^n , bei $h = (x - x_0)$.

Fehlerordnung sagt aus wie schnell der Fehler gegen Null geht.

Um so mehr Glieder berücksichtigt werden um zu schneller strebt der Fehler gegen Null.

Einleitung

Differenzenquotienten

RheinAhr Campus

1. Ableitung

- Zwei-Punkt-Vorwärtsdifferenzenquotient
- Zwei-Punkt-Rückwärtsdifferenzenquotient
- Zentraler Zwei-Punkt-Differenzenquotient

Diskretisierung der Punkte

$$x \rightarrow x_i \quad u(x) \rightarrow u(x_i) \equiv U_i$$

Zur Näherung der ersten Ableitung existieren 3 verschiedene Differenzenquotienten ...

Dazu müssen wir unsere Funktion an diskreten Punkten betrachten. x wird zu x an der Stelle i (x_i) und damit wird $u(x)$ zu $u(x_i)$ bzw. U_i .

Einleitung

Differenzenquotienten

RheinAhr Campus

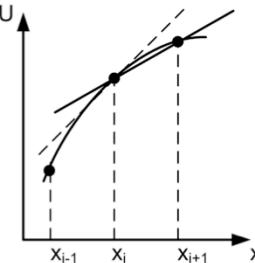
1. Ableitung:

Zwei-Punkt-Vorwärtsdifferenzenquotient

$$U_{i+1} = U_i + U_i^{(1)}h + U_i^{(2)} \frac{h^2}{2} + U_i^{(3)} \frac{h^3}{6} + \dots$$

Abbruch nach 3.Glied

$$\Rightarrow U_i^{(1)} \approx \frac{U_{i+1} - U_i}{h} - O(h)$$



Wenn wir U an der Stelle i nähern möchten, gibt es die Möglichkeit U an der Stelle $i+1$ durch eine Taylor-Entwicklung zu beschreiben. Wir gucken also vorwärts.

Bricht man die Taylor-Entwicklung nun am 3. Glied ab und stellt sie nach der ersten Ableitung von U_i um, ergibt die der Zwei-Punkt-Vorwärtsdifferenzenquotient.

Wir haben also die Tangente durch x_i durch eine Sekante genähert.

Einleitung

Differenzenquotienten

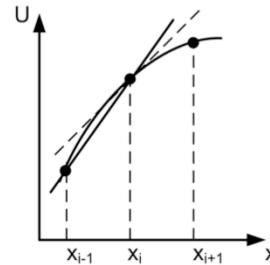
1. Ableitung:

Zwei-Punkt-Rückwärtsdifferenzenquotient

$$U_{i-1} = U_i - U_i^{(1)}h + U_i^{(2)} \frac{h^2}{2} - \dots$$

Abbruch nach 3.Glied

$$\Rightarrow U_i^{(1)} \approx \frac{U_i - U_{i-1}}{h} - O(h)$$



Wir können nun analog auch „rückwärts“ schauen und nach U_{i-1} entwickeln.

Der Abbruch nach dem dritten Glied führt nun zum Zwei-Punkt-Rückwärtsdifferenzenquotient.

Zu beachten ist, dass die Fehlerordnung mit $O(h)$ recht hoch ist, also linear gegen Null strebt.

Einleitung

Differenzenquotienten

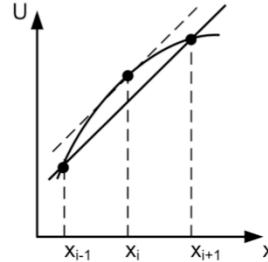
RheinAhr Campus

1. Ableitung:
Zentraler Zwei-Punkt-Differenzenquotient

$$U_{i-1} - U_{i+1}$$

Abbruch nach 4.Glied

$$\Rightarrow U_i^{(1)} \approx \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{h} - O(h^2)$$



Nun kann man die ersten Ableitung aber auch aus dem Mittel des Vorwärts- und des Rückwärts-Differenzenquotienten bilden und erst nach dem vierten Glied abbrechen. Also die Sekante durch die beiden umliegenden Punkte x_{i-1} und x_{i+1} legen.

So ergibt sich die Fehlerordnung $O(h^2)$, die quadratisch gegen Null strebt.

Einleitung

Differenzenquotienten

RheinAhr Campus

2. Ableitung:
Zentraler Drei-Punkt-Differenzenquotient

$$U_{i-1} + U_{i+1}$$

Abbruch nach 5.Glied

$$\Rightarrow U_i^{(2)} \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} - O(h^2)$$

Um die zweite Ableitung zu Nähern, kann man die Summe aus Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzenquotienten bilden und diese erst nach dem 5. Glied abbrechen. Wie aus der Vorlesung bekannt schaut man sich hier alle drei relevanten Punkte an.

Die Fehlerordnung zeigt sich hier wieder quadratisch.

Gliederung

- Einleitung
- Parabolische PDEs
- Hyperbolische PDEs
- Gegenüberstellung
- Probleme

Parabolische PDEs

Form

RheinAhr Campus

- Eindimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv u_t = \beta u_{xx}$$

- Zweidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \equiv u_t = \beta (u_{xx} + u_{yy})$$

$$\beta = const$$

Wir wollen zunächst auf die Lösung parabolischer PDEs durch FDM eingehen.

Parabolische PDEs besitzen die erste Ableitung in der Zeit und die zweite Ableitung in alle vorhandenen Raumrichtungen.

Parabolische PDEs – 1D Lösungsverfahren

RheinAhr Campus

Eindimensionale Lösungsverfahren

- Explizites Euler-Vorwärtsverfahren
- Implizites Euler-Rückwärtsverfahren
- Crank-Nicolson-Verfahren

Zur Lösung parabolischer PDEs im eindimensionalen gibt es drei numerische Lösungsmethoden der FDM.

Parabolische PDEs – 1D Bedingungen

RheinAhr Campus

Anfangsbedingung

$$u(0, x) = f(x)$$

Randbedingungen

$$\begin{aligned} (1 - c_1)u(t, 0) - c_1 u_x(t, 0) &= g_1(t) & 0 < x < a \\ (1 - c_2)u(t, a) - c_2 u_x(t, a) &= g_2(t) & \text{mit} \quad 0 \leq c_k \leq 1 \end{aligned}$$

$c_k = 0 \rightarrow$ Dirichlet

$c_k = 1 \rightarrow$ Neumann

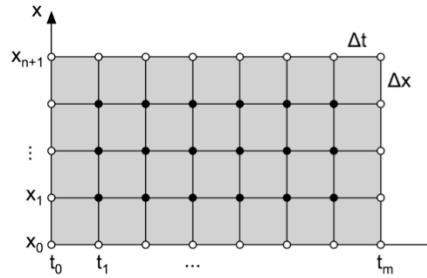
Hierzu wird eine Anfangsbedingung für den Startzeitpunkt $t = 0$ benötigt.

Die benötigten Randbedingungen gestalten sich hier aufwändiger als im Eliptischen und werden durch das dargestellte Gleichungssystem beschrieben. Dabei können nicht nur Dirichlet- und Neumannränder auftreten sondern auch Mischformen.

Parabolische PDEs – 1D Problemstellung

RheinAhr Campus

Gesucht: Numerische Lösung $U(t, x)$ im Zeitintervall $0 \leq t \leq T$ über einem gleichmäßigen Punktgitter aus $m+1$ Werten für t und $n+2$ Werten für x



Schrittweiten:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{T}{m} & \Delta x &= \frac{a}{n+1} & 0 \leq k \leq m \\ t_k &= k\Delta t & x_j &= j\Delta x & 0 \leq j \leq (n+1) \end{aligned}$$

Wir suchen nun also die numerische Lösung der Funktion $U(t, x)$ im Zeitintervall von 0 bis T und auf der Länge a . Wobei wir ein gleichmäßiges Punktgitter mit $m+1$ Werten in t und mit $n+2$ Werten im Ort aufspannen.

Die Punkte haben auf dem Gitter in Richtung t einen Abstand von Δt , das entspricht T / m . Analog ist in x Δx die Länge durch die Anzahl von Elementen+1.

Zur übersichtlicheren Indizierung führen wir hier t_k und x_j ein, wobei k und j Laufindizes sind.

Parabolische PDEs – 1D

Explizites Euler-Vorwärtsver.

RheinAhr Campus

Erste zeitliche Ableitung aus Zwei-Punkt-Vorwärtsdifferenzenquotient

$$U_t(t_k, x_j) = \frac{U_j^{k+1} - U_j^k}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

Zweite räumliche Ableitung aus zentralem Drei-Punkt-Differenzenquotient

$$U_{xx}(t_k, x_j) = \frac{U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

Wir betrachten zunächst das Explizite Euler-Vorwärtsverfahren.

Man beachte die neue Notation, tiefgestellter Index beschreibt den Ort und hochgestellter Index beschreibt die Zeit.

Die zeitliche Ableitung lässt sich aus dem Zwei-Punkt-Vorwärtsdifferenzenquotient nähern.

Die zweite räumliche Ableitung nähern wir aus dem zentralen Drei-Punkt-Differenzenquotient.

Parabolische PDEs – 1D

Explizites Euler-Vorwärtsver.

RheinAhr Campus

Nähert man nun $\partial u / \partial t = U_t$ und $\partial^2 u / \partial x^2 = U_{xx}$ ergibt sich

$$\frac{U_j^{k+1} - U_j^k}{\Delta t} = \beta \left(\frac{U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k}{\Delta x^2} \right) \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} 0 \leq k \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{array}$$

Auflösen nach U_j^{k+1} („Punkt in der Zukunft“)

$$U_j^{k+1} = \gamma U_{j-1}^k + (1 - 2\gamma) U_j^k + \gamma U_{j+1}^k$$

$$\text{mit Verstärkungsparameter } \gamma = \frac{\beta \cdot \Delta t}{\Delta x^2} > 0$$

Aus den Näherungen ergibt sich die parabolische PDE also mit ...

Diese lässt sich nun auflösen nach U_j^{k+1} also einen „Punkt in der Zukunft“. Er ergibt sich aus der Betrachtung von drei Punkten zum jetzigen Zeitpunkt an verschiedenen Orten.

Zur Vereinfachung führen wir den Verstärkungsparameter gamma ein.

Parabolische PDEs – 1D

Explizites Euler-Vorwärtsver.

RheinAhr Campus

Die Randwerte für U_0^k und U_{n+1}^k lassen sich aus Zwei-Punkt-Vorwärts- und Zwei-Punkt-Rückwärts-differenzenquotienten nähern

$$U_0^k = \frac{g_1(t_k) \cdot \Delta x + c_1 \cdot U_1^k}{c_1 + (1 - c_1) \Delta x} \quad U_{n+1}^k = \frac{g_2(t_k) \cdot \Delta x + c_2 \cdot U_n^k}{c_2 + (1 - c_2) \Delta x}$$

Weiter wird eine Anfangswertfunktion benötigt

$$U_j^0 = f(x)$$

Die Randwerte für U_0^k und U_{n+1}^k lassen sich aus Zwei-Punktvorwärts- und rückwärtsdifferenzenquotienten nähren.

Des weiteren wird auch die Anfangswertfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$ benötigt.

Parabolische PDEs – 1D

Explizites Euler-Vorwärtsver.

RheinAhr Campus

Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1-2\gamma & \gamma & & & \\ \gamma & 1-2\gamma & \gamma & & \\ & \gamma & 1-2\gamma & \gamma & \\ & & \gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ & & & \gamma & 1-\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1^k \\ U_2^k \\ U_3^k \\ U_4^k \\ U_5^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma g_1(t_k) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \Delta x g_2(t_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^{k+1} \\ U_2^{k+1} \\ U_3^{k+1} \\ U_4^{k+1} \\ U_5^{k+1} \end{pmatrix}$$

für $0 \leq k \leq m$ und $n = 5$

Unterer Rand (U_0^k): $c_1 = 0$ (Dirichlet)

Oberer Rand (U_6^k): $c_2 = 1$ (Neumann)

Hieraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem für $n = 5$.

Es ist symmetrisch und lässt sich numerisch leicht lösen.

Parabolische PDEs – 1D

Explizites Euler-Vorwärtsver.

RheinAhr Campus

Aus Vergleich von analytischer und numerischer Lösung ergibt sich

$$\gamma \leq \frac{1}{2}$$

Somit folgt die Stabilitätsbedingung

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\beta}$$

Vergleicht man die analytische Lösung einer Funktion mit ihrer Numerischen lässt sich feststellen, dass gamma kleiner, gleich $\frac{1}{2}$ sein sollte, damit das System stabil ist.

Es lässt sich also folgende Stabilitätsbedingung finden, die die Schrittweiten von einander abhängig macht ...

Parabolische PDEs – 1D

Implizites Euler-Rückwärtsver.

RheinAhr Campus

Verbesserung der Stabilität durch Näherung von $\partial^2 u / \partial x^2$
bei t_{k+1} anstatt t_k

$$U_{xx}(t_{k+1}, x_j) = \frac{U_{j+1}^{k+1} - 2U_j^{k+1} + U_{j-1}^{k+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

Somit ergibt sich für $0 \leq k \leq m$ und $1 \leq j \leq n$

$$\frac{U_j^{k+1} - U_j^k}{\Delta t} = \beta \left(\frac{U_{j+1}^{k+1} - 2U_j^{k+1} + U_{j-1}^{k+1}}{\Delta x^2} \right)$$

→ kann nicht explizit für U_j^{k+1} gelöst werden!

Nun ist es wünschenswert die Stabilität zu verbessern, also die Schrittweiten voneinander zu entkoppeln.

Hierin besteht die Motivation des Impliziten Euler-Rückwärtsverfahrens.

Wir betrachten nun die Näherung für die zweite räumliche Ableitung nicht am Zeitpunkt k sondern am Zeitpunkt $k+1$, also einem „Punkt in der Zukunft“.

Die sich so ergebende Näherung kann nicht explizit nach $U_{j,k+1}$ aufgelöst werden.

Parabolische PDEs – 1D

Implizites Euler-Rückwärtsver.

RheinAhr Campus

Auflösen nach U_j^k ergibt

$$-\gamma U_{j-1}^{k+1} + (1+2\gamma) U_j^{k+1} - \gamma U_{j+1}^{k+1} = U_j^k$$

Der Verstärkungsparameter sowie die Anfangs- und Randwerte bleiben unverändert.

Das Verfahren ist für alle $\gamma > 0$ stabil!

Es findet sich aber eine Lösung für U_j^k

gamma sowie Anfangs- und Randwertfunktionen bleiben Unverändert.

Das Verfahren ist nun für alle gamma stabil!

Parabolische PDEs – 1D

Implizites Euler-Rückwärtsver.

RheinAhr Campus

Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1+\gamma & -\gamma & & & \\ -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma & & \\ & -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma & \\ & & -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma \\ & & & -\gamma & 1+2\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1^{k+1} \\ U_2^{k+1} \\ U_3^{k+1} \\ U_4^{k+1} \\ U_5^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^k \\ U_2^k \\ U_3^k \\ U_4^k \\ U_5^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma g_1(t_k) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \Delta x g_2(t_k) \end{pmatrix}$$

für $0 \leq k \leq m$ und $n = 5$

Unterer Rand (U_0^k): $c_1 = 0$ (Dirichlet)

Oberer Rand (U_6^k): $c_2 = 1$ (Neumann)

Es ergibt sich folgendes symmetrisches Gleichungssystem für $n = 5$.

Es ist schwieriger zu berechnen aber immer stabil!

Parabolische PDEs – 1D

Crank-Nicolson-Verfahren

RheinAhr Campus

Aus Mittelung der beiden vorherigen Verfahren ergibt sich das Crank-Nicolson-Verfahren.

$$\frac{U_j^{k+1} - U_j^k}{\Delta t} = \frac{\beta}{2} \left(\frac{U_{j+1}^{k+1} - 2U_j^{k+1} + U_{j-1}^{k+1}}{\Delta x^2} + \frac{U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k}{\Delta x^2} \right) \quad \begin{array}{l} 0 \leq k \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{array}$$

Sortieren der Gleichung ergibt

$$-\gamma U_{j+1}^{k+1} + 2(1+\gamma)U_j^{k+1} - \gamma U_{j-1}^{k+1} = \gamma U_{j+1}^k + 2(1-\gamma)U_j^k + \gamma U_{j-1}^k$$

Bisher haben wir die Fehlerordnung der Näherungen nicht betrachtet.

Die räumlichen Näherungen hatten jeweils eine Fehlerordnung von $O(\Delta x^2)$.

Die zeitliche Näherung hatte allerdings nur eine Fehlerordnung von $O(\Delta t)$.

Diesen Missstand kann man im Crank-Nicolson-Verfahren aufheben.

Wie sich der zentrale Zwei-Punkt-Differenzenquotienten durch eine Mittelung aus Vorwärts- und Rückwärtquotienten ergibt, kann auch hier solche Mittelung aus dem expliziten und dem impliziten Euler-Verfahren von Nutzen sein.

Es ergibt sich eine Näherung der PDE in der sowohl die zeitliche als auch die räumliche Näherung eine Fehlerordnung von Δt^2 besitzt.

Eine Umsortierung ergibt die folgende Lösung.

Parabolische PDEs – 1D

Crank-Nicolson-Verfahren

RheinAhr Campus

Der Verstärkungsparameter sowie die Anfangs- und Randwerte bleiben unverändert.

Das Verfahren ist weiterhin für alle $\gamma > 0$ stabil!

gamma sowie Anfangs- und Randwerte bleiben weiterhin unverändert.
Dieses Verfahren ist für alle gamma stabil.

Parabolische PDEs – 1D

Crank-Nicolson-Verfahren

RheinAhr Campus

Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccccc} 2(1+\gamma) & -\gamma & & & \\ -\gamma & 2(1+\gamma) & -\gamma & & \\ & -\gamma & 2(1+\gamma) & -\gamma & \\ & & -\gamma & 2(1+\gamma) & -\gamma \\ & & & -\gamma & 2(1+\gamma) \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} U_1^{k+1} \\ U_2^{k+1} \\ U_3^{k+1} \\ U_4^{k+1} \\ U_5^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{array}{l} 0 \leq k \leq m \\ n = 5 \\ U_0^k : c_1 = 0 \\ U_6^k : c_2 = 1 \end{array} \\
 & \left(\begin{array}{ccccc} 2(1-\gamma) & \gamma & & & \\ \gamma & 2(1-\gamma) & \gamma & & \\ & \gamma & 2(1-\gamma) & \gamma & \\ & & \gamma & 2(1-\gamma) & \gamma \\ & & & \gamma & 2(1-\gamma) \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} U_1^k \\ U_2^k \\ U_3^k \\ U_4^k \\ U_5^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma[g_1(t_k) + g_1(t_{k+1})] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma\Delta x[g_2(t_k) + g_2(t_{k+1})] \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Master Applied Physics – Seminarvortrag Scientific Computing

Jan Beneke, Javed Razzaq

27

Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem für $n = 5$.

Zur Vereinfachung betrachten wir hier einen unten liegenden Dirichlet-Rand und einen oben liegenden Neumann-Rand an.

Man sieht dass das Gleichungssystem zunehmend komplizierter wird. Es lässt sich aber mittel LU-Zerlegung recht gut lösen.

Parabolische PDEs – 1D Vergleich

RheinAhr Campus

Verfahren	Stabilität	Fehlerordnung
Euler-Vorwärts	$\gamma \leq 0,5$	$O(\Delta t + \Delta x^2)$
Euler-Rückwärts	immer	$O(\Delta t + \Delta x^2)$
Crank-Nicolson	immer	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$



Stabilität ist nur beim Euler-Vorwärts ein Hinderungsgrund und die Fehlerordnung verweist klar auf das Crank-Nicolson-Verfahren als praktischstes Verfahren.

Parabolische PDEs

Beispiel in 1D

RheinAhr Campus

Wärmefluss in einem infinitesimal dünnem Stab

→ Lösung einer parabolischen PDE mittels Crank-Nicolson

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ mit Temperaturleitfähigkeit } \beta = 10^{-5}$$

Zeitspanne $T = 6 \cdot 10^3$ mit Gittergröße $m = 50$

Länge des Stabs $a = 1$ mit Gittergröße $n = 39$

$$\text{Verstärkungsparameter } \gamma = \frac{\beta \cdot T \cdot (n+1)^2}{m} = 1,92$$

⇒ **stabil**, da $\gamma > 0$

Als praktisches Beispiel für eine eindimensionale parabolische PDE betrachten wir nun den zeitlich abhängigen Wärmefluss in einem sehr dünnen Stab der Länge 1 in der Zeitspanne von t=0 bis 6000. Das Material des Stabs besitzt die Temperaturleitfähigkeit von $\beta = 10^{-5}$.

Aus den Gittergrößen $m = 50$ und $n = 39$ ergibt sich ein Verstärkungsparameter von 1,92. Er ist also größer Null, somit ist das anzuwendende Crank-Nicolson-Verfahren stabil.

Parabolische PDEs

Beispiel in 1D

RheinAhr Campus

Wärmeleitung in einem infinitesimal dünnem Stab
→ Lösung einer parabolischen PDE mittels Crank-Nicolson

Anfangsbedingung

$$u(0, x) = f(x) = 2x + \sin(2\pi x)$$

Randbedingungen

$$u(t, 0) = g_1(t) = 0 \quad \text{und} \quad u(t, a) = u(t, 1) = g_2(t) = 2$$

Zudem nehmen wir eine Anfangsbedingung von $2x + \sin(2\pi x)$ an. Es überlagern sich also ein linearer und einen periodischen Anteil.

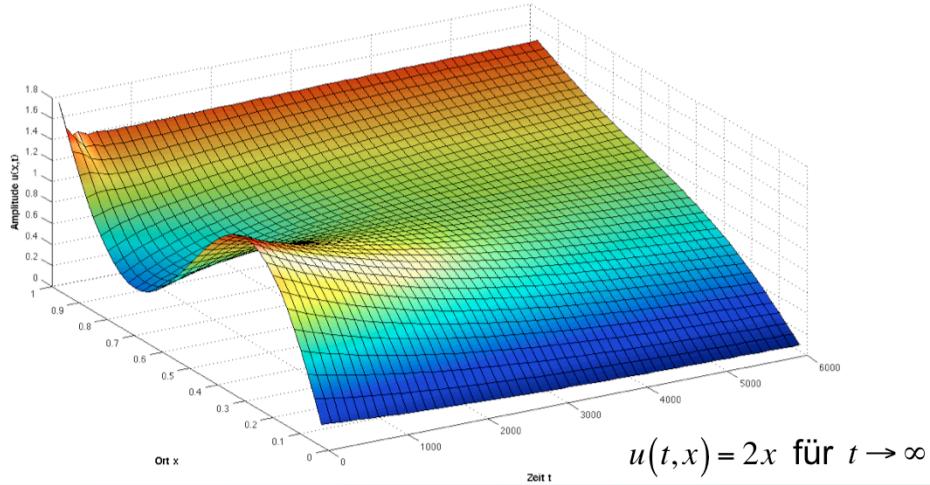
Die Ränder sind beides Dirichlet-Ränder, wobei sie die Werte 0 am Ort $x = 0$ und 2 am Ort $x = a$ vergeben. Es existiert keine Wärmeleitung nach außen.

Parabolische PDEs

Beispiel in 1D

RheinAhr Campus

Wärmeleitung in einem Stab



Master Applied Physics – Seminarvortrag Scientific Computing

Jan Beneke, Javed Razzaq

31

Am Anfang sieht man gut die Überlagerung der periodischen und linearen Anteile der Anfangsbedingung. Mit fortschreitender Zeit nähert sich die Lösung immer weiter dem linearen Anteil $2x$ an.

Parabolische PDEs – 2D Lösungsverfahren

RheinAhr Campus

Zweidimensionale Lösungsverfahren

- Alternating Direction Implicit (ADI) Verfahren

Die 1D Verfahren sind auf 2D erweiterbar, dabei werden aber die Gleichungssysteme sehr unhandlich und sind nicht mehr triagonal.

Somit existiert für zweidimensionale parabolische PDEs nur ein Verfahren, das Alternating Direction Implicit Verfahren, kurz ADI-

Parabolische PDEs – 2D ADI-Verfahren

RheinAhr Campus

Gesucht: Numerische Lösung für $U(t, x, y)$ auf dem

$$\text{Gebiet } R = \{(x, y) \mid 0 < x < a, 0 < y < b\}$$

Anfangsbedingung $u(0, x, y) = f(x, y)$, $(x, y) \in R$

Dirichlet-Randbedingung $u(t, x, y) = g(t, x, y)$, $(x, y) \in \delta R$

Schrittweiten

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{T}{m} & \Delta x &= \frac{a}{n+1} & \Delta y &= \frac{b}{p+1} & 0 \leq k \leq m \\ t_k &= k\Delta t & x_j &= j\Delta x & x_i &= i\Delta y & 0 \leq j \leq (n+1) \\ & & & & & & 0 \leq i \leq (p+1) \end{aligned}$$

Wir suchen nun die numerische Lösung für $U(t, x, y)$ also auf einem zweidimensionalen Gebiet der Größe $a * b$.

Dazu benötigen wir wieder eine Anfangsbedingung und Randbedingungen, die wir hier der Übersichtlichkeit halber auf Dirichlet-Randbedingungen reduzieren.

Die Schrittweiten werden analog erweitert um delta x und um x mit dem Index i.

Parabolische PDEs – 2D ADI-Verfahren

RheinAhr Campus

$$U_t = \beta(U_{xx} + U_{yy})$$

aus Crank-Nicolson

für t_k

aus Differenzenquotienten

für t_{k+1}

$$\frac{U_{ji}^{k+1} - U_{ji}^k}{\Delta t} = \beta \left(\frac{U_{j+1,i}^k - 2U_{ji}^k + U_{j-1,i}^k}{\Delta x^2} + \frac{U_{j,i+1}^{k+1} - 2U_{ji}^{k+1} + U_{j,i-1}^{k+1}}{\Delta y^2} \right)$$

für $0 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq p$

→ Problem: U_{xx} wird zeitlich vor U_{yy} berechnet

Das ADI-Verfahren ähnelt sehr dem Crank-Nicolson-Verfahren.

Die zeitliche Näherung würde übernommen.

Die zweite Ableitung nach x wird am Zeitpunkt t_k und die zweite Ableitung nach y an t_{k+1} aus den Differenzenquotienten genähert.

Es ergibt sich das Problem, dass U_{xx} zeitlich vor U_{yy} berechnet wird.

Parabolische PDEs – 2D ADI-Verfahren

RheinAhr Campus

$$\frac{U_{ji}^{k+1} - U_{ji}^k}{\Delta t} = \beta \left(\frac{U_{j+1,i}^k - 2U_{ji}^k + U_{j-1,i}^k}{\Delta x^2} + \frac{U_{j,i+1}^{k+1} - 2U_{ji}^{k+1} + U_{j,i-1}^{k+1}}{\Delta y^2} \right)$$

→ Lösung: Zweiter Term in dem U_{yy} vor U_{xx} berechnet wird

$$\frac{U_{ji}^{k+2} - U_{ji}^{k+1}}{\Delta t} = \beta \left(\frac{U_{j+1,i}^{k+2} - 2U_{ji}^{k+2} + U_{j-1,i}^{k+2}}{\Delta x^2} + \frac{U_{j,i+1}^{k+1} - 2U_{ji}^{k+1} + U_{j,i-1}^{k+1}}{\Delta y^2} \right)$$

Um dieses zu kompensieren, wird gleichzeitig ein zweiter Term berechnet, in dem U_{yy} vor U_{xx} berechnet wird.

Parabolische PDEs – 2D ADI-Verfahren

RheinAhr Campus

Vereinfachen der Terme mit $\gamma_x = \frac{\beta\Delta t}{\Delta x^2}$ und $\gamma_y = \frac{\beta\Delta t}{\Delta y^2}$

$$-\gamma_y (U_{j,i-1}^{k+1} + U_{j,i+1}^{k+1}) + (1 + 2\gamma_y) U_{ji}^{k+1} = \gamma_x (U_{j-1,i}^k + U_{j+1,i}^k) + (1 - 2\gamma_x) U_{ji}^k$$

$$-\gamma_x (U_{j-1,i}^{k+2} + U_{j+1,i}^{k+2}) + (1 + 2\gamma_x) U_{ji}^{k+2} = \gamma_y (U_{j,i-1}^{k+1} + U_{j,i+1}^{k+1}) + (1 - 2\gamma_y) U_{ji}^{k+1}$$

Vorsicht: ADI-Verfahren löst in Zeitschritten von $2\Delta t$
wegen t_{k+2} also $\{U^0, U^2, U^4, \dots\}$

Verfahren stabil für alle $\gamma_x, \gamma_y > 0$ und $O(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2)$

Die beiden Terme lassen sich natürlich wie folgt, unter Zuhilfenahme von gamma_x und gamma_y, vereinfachen.

Zu beachten bleibt, dass das ADI-Verfahren nur in Zeitschritten von $2 \Delta t$ auflöst. Dies lässt sich umgehen wenn man einfach die Zeitintervalle halbiert.

Auch diese Verfahren ist immer stabil und besitzt eine quadratische Fehlerordnung.

Parabolische PDEs

Beispiel in 2D

RheinAhr Campus

Wärmeleitung in einer infinitesimal dünnen Platte

→ Lösung einer parabolischen PDE mittels ADI-Verfahren

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \text{ mit Temperaturleitfähigkeit } \beta = 10^{-4}$$

Zeitintervall $T = 5000$ mit Gittergröße $m = 50$

Kantenlänge der Platte $a = b = 4$ mit $n = p = 39$

$$\text{Verstärkungsparameter } \gamma_x = \gamma_y = \frac{\beta \cdot \Delta t}{\Delta x^2} = 0,625$$

Als praktisches Beispiel dient hier die Wärmeleitung in einer sehr dünnen quadratischen Platte der Seitenlänge 4 im mit der Temperaturleitfähigkeit von 10^{-4} im Zeitintervall von 0 bis 5000.

Die Verstärkungsparameter sind größer Null; Das System ist stabil.

Parabolische PDEs

Beispiel in 2D

RheinAhr Campus

Wärmeleitung in einer infinitesimal dünnen Platte
→ Lösung einer parabolischen PDE mittels ADI-Verfahren

Anfangsbedingung

$$u(0, x, y) = f(x, y) = 0$$

Randbedingung

$$u(t, x, y) = g(t, x, y) = e^y \cos(x) - e^x \cos(y)$$

Die Anfangsbedingung ist 0, die Platte ist also nicht erwärmt.

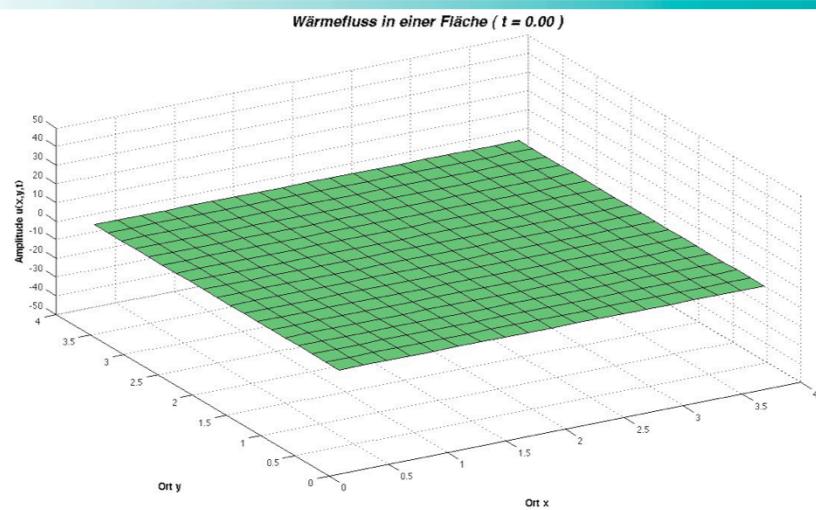
Und die Dirichlet-Randbedingung folgt der Funktion ... somit ist die Isolierung am Rand der Platte ungleichmäßig.

Trotzdem keine Neumann-Bedingung: Es wird also keine Wärmeabgegeben, sie verteilt sich lediglich ungleichmäßig.

Parabolische PDEs

Beispiel in 2D

RheinAhr
Campus



Master Applied Physics – Seminarvortrag Scientific Computing

Jan Beneke, Javed Razzaq

39

Gliederung

- Einleitung
- Parabolische PDEs
- Hyperbolische PDEs
- Gegenüberstellung
- Probleme

Hyperbolische PDEs

Form

RheinAhr Campus

- Eindimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv u_{tt} = \beta u_{xx}$$

- Zweidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \equiv u_{tt} = \beta (u_{xx} + u_{yy})$$

$$\beta = const$$

Bei den hyperbolischen PDEs existiert nun eine zweite Ableitung nach der Zeit.

Hyperbolische PDEs – 1D Lösungsverfahren

RheinAhr Campus

Eindimensionale Lösungsverfahren

- Explizite zentrale Differenzen

Für eindimensionale hyperbolische PDEs existiert nur das Verfahren der expliziten zentralen Differenzen.

Hyperbolische PDEs – 1D

Explizite zentrale Differenzen

RheinAhr Campus

Gesucht: Numerische Lösung für $U(t, x)$ im Intervall
 $0 \leq t \leq T$ über den eine Länge a

Anfangsbedingungen $u(0, x) = f(x)$ $0 < x < a$
 $u_t(0, x) = g(x)$

Dirichlet-Randbedingung $u(t, 0) = c_1 = 0$
 $u(t, a) = c_2 = 0$

Schrittweiten $\Delta t = \frac{T}{m}$ $\Delta x = \frac{a}{n+1}$ $0 \leq k \leq m$
 $t_k = k\Delta t$ $x_j = j\Delta x$ $0 \leq j \leq (n+1)$

Master Applied Physics – Seminarvortrag Scientific Computing

Jan Beneke, Javed Razzaq

43

Auch hier suchen wir wieder die numerische Lösung für $U(t, x)$ in der Zeit T über die Länge a .

Die Anfangsbedingungen bestehen nun aus einem Zustand bei $t = 0$ und einer Angabe der Ableitung dieses Zustands.

Die Randbedingungen setzen wir zur Vereinfachung also Dirichlet-Rändern ein und geben ihnen direkt den Wert Null.

Hyperbolische PDEs – 1D

Explizite zentrale Differenzen

RheinAhr Campus

$$U_{tt} = \beta U_{xx}$$

Zentraler Drei-Punkt-Differenzenquotient

$$\frac{U_j^{k+1} - 2U_j^k + U_j^{k-1}}{\Delta t^2} = \beta \left(\frac{U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k}{\Delta x^2} \right)$$

Umstellen mit $\gamma = \beta \Delta t^2 / \Delta x^2$ ergibt

$$U_j^{k+1} = \gamma U_{j-1}^k + 2(1-\gamma)U_j^k + \gamma U_{j+1}^k - U_j^{k-1}$$

→ Problem: U^{k-1} zum Zeitpunkt $k=0$

Die beiden zweiten Ableitungen, sowohl in der Zeit als auch im Ort, lassen sich mit dem zentralen Drei-Punkt-Differenzenquotienten nähern und entsprechend nach U_j^{k+1} umstellen.

Nun ist das Problem, dass U^{k-1} zum Zeitpunkt $K=0$ nicht bekannt ist

Hyperbolische PDEs – 1D

Explizite zentrale Differenzen

RheinAhr Campus

Lösung: Wert für $t_{-1} = -\Delta t$ aus Anfangsbedingungen

Aus Näherung der ersten Ableitung

$$\frac{U_j^1 - U_j^{-1}}{2\Delta t} = g(x_j) \quad 1 \leq j \leq n$$
$$\Leftrightarrow U_j^{-1} = U_j^1 - 2\Delta t \cdot g(x_j)$$

Durch Substitution erhält man für $k = 0$

$$U_j^1 = \frac{1}{2} [\gamma f_{j-1} + 2(1-\gamma)f_j + \gamma f_{j+1}] + \Delta t \cdot g_j \quad f_j = f(x_j)$$
$$g_j = g(x_j)$$

Der Wert lässt sich allerdings für $t_{-1} = -\Delta t$ aus den Anfangsbedingungen nähern.

Hierzu nähert man zunächst die Randbedingungen über einen Bereich von 2 Δt .

Durch Substitution erhält man nun einen eigenen Term für U_j zum Zeitpunkt $k = 0$.

Hyperbolische PDEs – 1D

Explizite zentrale Differenzen

RheinAhr Campus

Gleichungssystem für $1 \leq k \leq m$ und $n = 5$:

$$\begin{pmatrix} 2(1-\gamma) & \gamma & & & \\ \gamma & 2(1-\gamma) & \gamma & & \\ & \gamma & 2(1-\gamma) & \gamma & \\ & & \gamma & 2(1-\gamma) & \gamma \\ & & & \gamma & 2(1-\gamma) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1^k \\ U_2^k \\ U_3^k \\ U_4^k \\ U_5^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_1^{k-1} \\ U_2^{k-1} \\ U_3^{k-1} \\ U_4^{k-1} \\ U_5^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^{k+1} \\ U_2^{k+1} \\ U_3^{k+1} \\ U_4^{k+1} \\ U_5^{k+1} \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich nun folgendes Gleichungssystem für $n = 5$.

Hyperbolische PDEs – 1D

Explizite zentrale Differenzen

RheinAhr Campus

Gleichungssystem für $k = 0$ und $n = 5$:

$$\begin{pmatrix} 2(1-\gamma) & \gamma & & & \\ \gamma & 2(1-\gamma) & \gamma & & \\ & \gamma & 2(1-\gamma) & \gamma & \\ & & \gamma & 2(1-\gamma) & \gamma \\ & & & \gamma & 2(1-\gamma) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_4^1 \\ U_5^1 \end{pmatrix}$$

Allerdings existiert auch ein eigenes Gleichungssystem für $k = 0$

Hyperbolische PDEs – 1D

Explizite zentrale Differenzen

RheinAhr Campus

Aus Vergleich von analytischer und numerischer Lösung ergibt sich

$$\gamma \leq 1$$

Somit folgt die Stabilitätsbedingung

$$\Delta t^2 \leq \frac{\Delta x^2}{\beta}$$

Vergleicht man analytische und numerische Lösung so muss der Verstärkungsfaktor gamma kleiner oder gleich 1 sein, damit die Lösung als stabil gilt.

Daraus ergibt sich die Stabilitätsbedingung, die delta t und delta x quadratisch koppelt.

Hyperbolische PDEs

Beispiel in 1D

RheinAhr Campus

Schwingung einer beidseitig befestigten dünnen Saite
→ Lösung einer hyperb. PDE mittels zentraler Differenzen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ mit Wellenkoeffizienten } \beta = 4$$

Zeitspanne $T = 1$ mit Gittergröße $m = 80$

Länge der Saite $a = 2$ mit Gittergröße $n = 39$

$$\text{Verstärkungsparameter } \gamma = \frac{\beta \cdot \left(\frac{T}{m}\right)^2}{\left(\frac{a}{n+1}\right)^2} = 0,25$$

⇒ **stabil**, da $\gamma < 1$

Also praktisches Beispiel für eine hyperbolischen PDE eignet sich hier die beidseitig eingespannte Saite eines Musikinstruments.

Die Saite besitzt die Länge 2 und Wellenkoeffizienten (Ausbreitungsgeschwindigkeit) beta = 4.

Gamma ergibt sich zu $1/4$ ist also kleiner 1 und somit ist die Lösung stabil.

Hyperbolische PDEs

Beispiel in 1D

RheinAhr Campus

Schwingung einer beidseitig befestigten dünnen Saite

→ Lösung einer hyperb. PDE mittels zentraler Differenzen

Anfangsbedingungen

$$u(0, x) = f(x) = 0,1 \cdot \sin(\pi x) \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 2$$
$$u_t(0, x) = f_t(x) = 0,2\pi \cdot \sin(\pi x)$$

Randbedingungen

$$u(t, 0) = g_1(t) = 0$$

$$u(t, 2) = g_2(t) = 0$$

Die Anfangsbedingung für $t = 0$ ist hier eine Sinus-Schwingung mit Vorfaktor, genauso die Bedingung für die erste Ableitung bei $t = 0$.

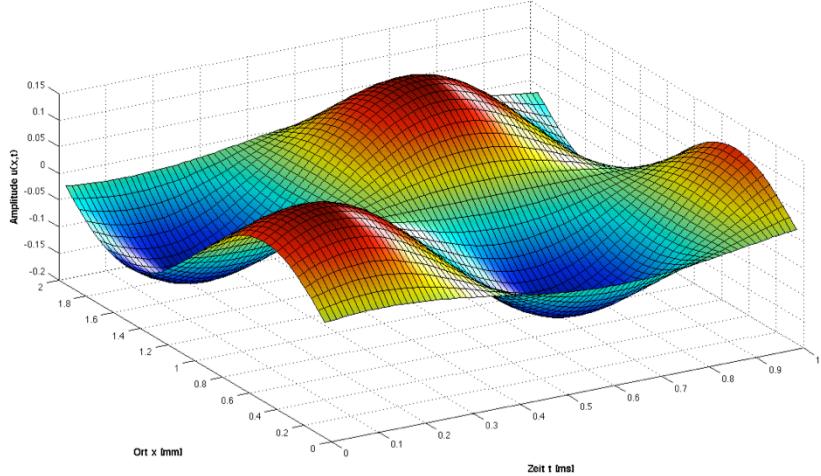
Wir betrachten also eine klassische harmonische Schwingung; Wobei die Randbedingungen uns sagen, dass diese Schwingung zwischen festen Enden passiert.

Hyperbolische PDEs

Beispiel in 1D

RheinAhr
Campus

Schwingende Saite



Hyperbolische PDEs – 2D Lösungsverfahren

RheinAhr Campus

Zweidimensionale Lösungsverfahren

- Explizite zentrale Differenzen

Analog lässt sich eine hyperbolische PDE auch im zweidimensionalen mit den expliziten Differenzen lösen.

Hyperbolische PDEs – 2D

Explizite zentrale Differenzen

RheinAhr Campus

Gesucht: Numerische Lösung für $U(t, x, y)$ über die Kanten a und $b \rightarrow$ analog zu 1D

$$U_{ji}^{k+1} = \gamma_x (U_{j-1,i}^k + U_{j+1,i}^k) + 2(1 - \gamma_x - \gamma_y) U_{ji}^k + \gamma_y (U_{j,i-1}^k + U_{j,i+1}^k) - U_{ij}^{k-1}$$

→ auch hier: U^{k-1} zum Zeitpunkt $k=0$

$$\text{Lösung: } U_{ij}^{-1} = U_{ij}^1 - 2\Delta t \cdot g(x_j, y_i)$$

$$U_{ji}^1 = \frac{1}{2} [\gamma_x (f_{j-1,i} + f_{j+1,i}) + 2(1 - \gamma_x - \gamma_y) f_{ji} + \gamma_y (f_{j,j-1} + f_{j,j+1})] + \Delta t \cdot g_{ji}$$

Hier ist nun also die numerische Lösung für $U(t, x, y)$ auf a und b gesucht.

Das Vorgehen ist vollkommen analog zum eindimensionalen.

Auch hier muss U^{k-1} zum Zeitpunkt $k=0$ speziell betrachtet werden und es ergibt sich ein eigener Term für U_{ij}^1 .

Hyperbolische PDEs

Beispiel in 2D

RheinAhr Campus

Schwingung einer eingespannten Membran

→ Lösung einer hyperb. PDE mittels zentraler Differenzen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \text{ mit Koeffizienten } \beta = 0,25$$

Zeitspanne $T = 2$ mit Gittergröße $m = 40$

Länge der Saite $a = b = 2$ mit Gittergröße $n = p = 39$

Auch hier Stabilitätskriterium erfüllt.

Als Beispiel dient diesmal die Schwingung einer eingespannten quadratischen Membran mit den Kantenlängen 2 und dem Wellengleichungskoeffizienten beta = 0,25. Die betrachtete Zeit reicht von 0 bis 2.

Hyperbolische PDEs

Beispiel in 2D

RheinAhr Campus

Schwingung einer eingespannten Membran

→ Lösung einer hyperb. PDE mittels zentraler Differenzen

Anfangsbedingungen

$$u(0, x, y) = f(x, y) = 0,1 \cdot \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y / 2) \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 2$$
$$u_t(0, x, y) = f_t(x, y) = 0 \quad 0 \leq y \leq 2$$

Randbedingungen

$$u(t, 0, y) = g_1(t) = 0 \quad u(t, x, 0) = g_3(t) = 0$$

$$u(t, a, y) = u(t, 2, y) = g_2(t) = 0 \quad u(t, x, a) = u(t, x, 2) = g_4(t) = 0$$

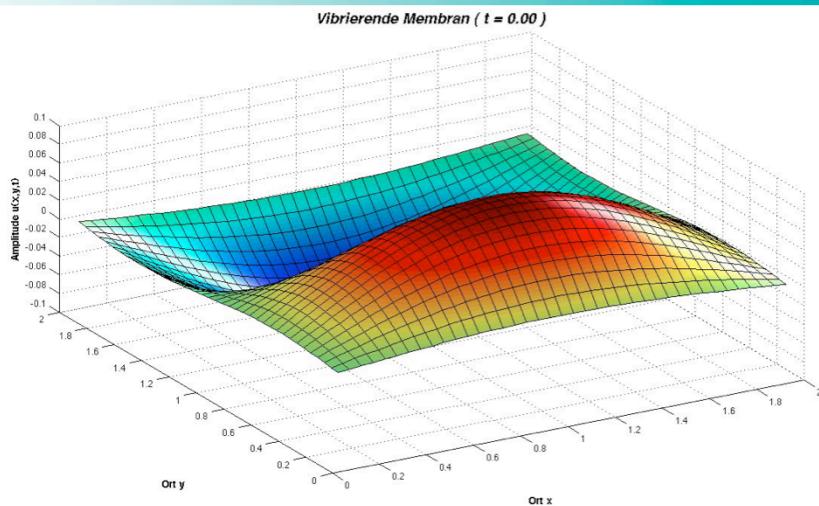
Die Anfangsbedingung verknüpften harmonischen Schwingungen.

Da die Membran eingespannt ist sind die Dirichlet-Ränder gleich Null.

Hyperbolische PDEs

Beispiel in 2D

RheinAhr
Campus



Master Applied Physics – Seminarvortrag Scientific Computing

Jan Beneke, Javed Razzaq

56

Gliederung

- Einleitung
- Parabolische PDEs
- Hyperbolische PDEs
- Gegenüberstellung
- Probleme

Gegenüberstellung

Verfahren	Typ	Dim.	Stabilität	Fehlerordnung
Zentrale Differenzen*	elliptisch	1	immer	$O(\Delta x^2)$
Euler-Vorwärts	parabolisch	1	$\gamma \leq 0,5$	$O(\Delta t + \Delta x^2)$
Euler-Rückwärts	parabolisch	1	immer	$O(\Delta t + \Delta x^2)$
Crank-Nicolson	parabolisch	1	immer	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$
ADI	parabolisch	2	immer	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2)$
Zentrale Differenzen	hyperbolisch	1	$\gamma \leq 1$	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$
Zentrale Differenzen	hyperbolisch	2	$\gamma_x, \gamma_y \leq 0,5$	$O(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2)$

* bekannt aus Vorlesung

Beim Euler-Vorwärts haben wir ein relativ überschaubares Gleichungssystem, jedoch eine eingeschränkte Stabilität und eine Fehlerordnung, die nur linear ist (Zeit).

Im Euler-Rückwärts ist die Stabilität verbessert, jedoch wird das LGS komplizierter und die Fehlerordnung ist noch nicht verbessert.

Crank-Nicelson hat nun auch die Fehlerordnung verbessert. Hier streben beide Fehler quadr. gegen Null, jedoch wird das LGS noch umfangreicher.

In 2D ist ADI ähnlich Crank Nicolson also immer stabil und quadr. Fehlerordnung.

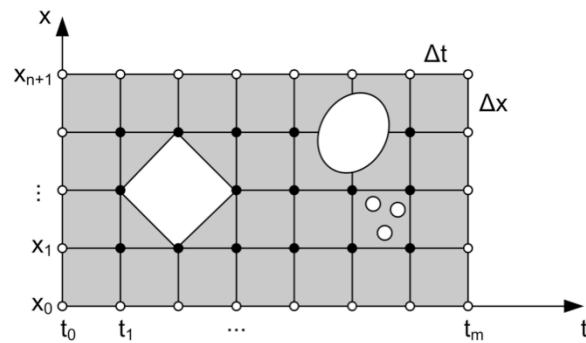
Bei hyperbol ist 1D un 2D ähnlich. Hier streben beide Fehlerordnungen quadr gegen Null und die Stabilität ist eingeschränkt.

Gliederung

- Einleitung
- Parabolische PDEs
- Hyperbolische PDEs
- Gegenüberstellung
- Probleme

Probleme

Komplexe Geometrien



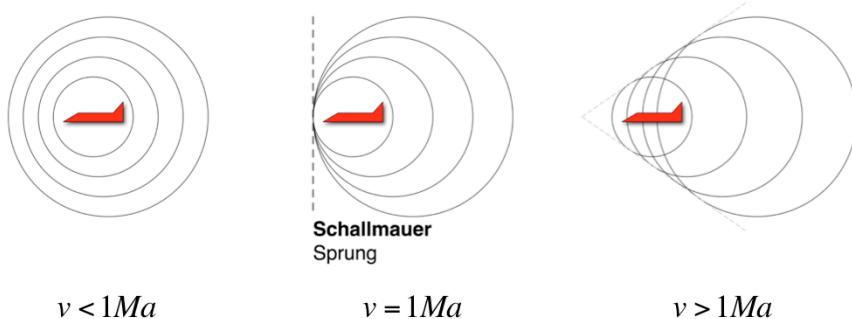
→ Vortrag: Finite Differenzen Methoden in 2D (3D)

Bei komplexen geometrien wird math. Aufwand um einiges größer, als bei homogenen Punktgitter.

Probleme

Sprünge in der Funktion

Beispiel: Überschallknall



Master Applied Physics – Seminarvortrag Scientific Computing

Jan Beneke, Javed Razzaq

61

Sprünge sind generell schlecht! (vgl. Übung: Sprung im Material bei Wärmeleitung -> Fehlerordnung verschlechtert)

Beispiel für Sprung bei Wellenausbreitung ist z.B. Schallmauer: wenn Flugzeug unter Schallgrenze fliegt breiten sich Wellen gemäß Doppler aus

Bei erreichen der Schallmauer sammeln sich am Bug alle Wellen zur gleichen Zeit, wodurch ein Sprung entsteht der dann zum bekannten „Überschallknall“ führt

Vielen Dank

weitere Infos und Quellcode unter

<http://www.janbeneke.de/SciComp>

und im Handout