



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg  
*Hamburg University of Applied Sciences*

# Skript

## Theoretische Informatik 1

### Petrinetze

J. Padberg

März 2009

Dieses Skript basiert im wesentlichen auf dem Skript

# Petrinetze

Modellierung, Strukturierung und Kompositionalität

J. Padberg, U. Prange, H. Ehrig, C. Ermel, K. Hoffmann

Technische Universität Berlin

Fakultät IV

Institut für Softwaretechnik und Theoretische Informatik

**Unter Mitwirkung von:**

D. Baehrens  
O. Bouissou  
M. Gajewsky  
L. Grigoriu  
Ch. Hein  
F. Hermann  
B. Kolbeck  
T. Krüger  
L. Lambers  
M. Leconte  
T. Modica  
P. Schiller  
G. Tchilev  
E. Weiss  
F. Zintel

## **Skript zu den Lehrveranstaltungen:**

Teil I für Basisveranstaltung THI: Einführung in die Theoretische Informatik – Formale Spezifikation von Systemen

Teil II für Vertiefungsveranstaltung THI: Formale Modellierung und Kompositionalität prozessorientierter Systeme

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>1 Modellierung mit Petrinetzen</b>	<b>7</b>
1.1 Informelle Einführung von S/T-Netzen . . . . .	7
1.2 Formale Darstellung von S/T-Netzen . . . . .	12
1.3 Markierungs- und Erreichbarkeitsgraph . . . . .	13
1.4 Modellierung von Korrektheitseigenschaften . . . . .	16
1.5 S/T-Netze mit Kapazitäten . . . . .	17
<b>2 Prozesse und Prozessnetze</b>	<b>22</b>
2.1 Dining Philosophers und Prozessbegriff . . . . .	22
2.2 Elementare Netze . . . . .	24
2.3 Konflikte und Nebenläufigkeit . . . . .	25
2.4 Prozessnetze und Prozesse . . . . .	27
2.5 Schaltverhalten von Prozessnetzen . . . . .	28
2.6 Prozesse und Netzmorphismen . . . . .	31
<b>3 Nebenläufigkeit, Parallelität und Netzkomplementierung</b>	<b>37</b>
3.1 Nebenläufigkeit und Parallelität in S/T-Netzen . . . . .	37
3.2 Vergleich mit Konzepten in Elementaren Netzen . . . . .	41
<b>4 Analyse von Netzeigenschaften</b>	<b>44</b>
4.1 Beschränktheit und Stellen-Invarianten . . . . .	44
4.2 Lebendigkeit und Deadlocks . . . . .	47
4.3 Transitions-Invarianten . . . . .	50
4.4 Invarianten und Netzkomplementierung . . . . .	52
<b>5 Simulation und Verifikation von Netzen</b>	<b>55</b>
5.1 Matrix-Darstellung und Simulation von Netzen . . . . .	55
5.2 Berechnung von Invarianten . . . . .	59
5.3 Verifikation von Korrektheitsanforderungen . . . . .	62

<b>6</b>	<b>Analyse der schaltsemantischen Graphen</b>	<b>64</b>
6.1	Kondensationsgraph . . . . .	64
6.2	Der Überdeckungsgraph . . . . .	68
<b>A</b>		<b>75</b>
A.1	Grundlagen Graphen . . . . .	75
A.2	Grundbegriffe der Linearen Algebra . . . . .	77
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>78</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>81</b>

# Einleitung

Petrinetze gehören heute zu den „klassischen“ Modellen für nebenläufige und verteilte Systeme und gestatten die Modellierung von Systemen, in denen mehrere Komponenten unabhängig voneinander arbeiten, aber miteinander kommunizieren können. Petrinetze erlauben es, verteilte Systeme anschaulich (graphisch) und mathematisch fundiert zu spezifizieren (siehe z.B. [Rei85a, ERRW03] und viele andere). Dies ist hauptsächlich auf folgende Eigenschaften von Petrinetzen zurückzuführen:

- *Einfache Beschreibungssprache:* Petrinetze bestehen aus Stellen und Transitionen, einer Anfangsmarkierung und einfachen Schaltregeln und stellen damit einen einfachen und leicht verständlichen Beschreibungsformalismus dar.
- *Anschaulichkeit:* Die graphische Repräsentation des spezifizierten Systems als Petrinetz erlaubt es, die statischen und dynamischen Aspekte des Systems in natürlicher und damit leicht verständlicher Weise darzustellen.
- *Universalität:* Petrinetze werden zur Modellierung von Systemen aus den verschiedensten Bereichen eingesetzt, von ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen bis hin zur Entwicklung von Softwaresystemen.
- *Wohlfundierte Theorie:* Die mathematische Fundierung der Petrinetztheorie erlaubt die formale Verifikation von Netzeigenschaften (z. B. durch Invarianten- oder Erreichbarkeitsanalyse).
- *Simulationsfähigkeit:* Die Möglichkeit der Simulation des Prozessablaufs in einer Petrinetzspezifikation erlaubt die Validierung bezüglich der Anforderungen an das System. Die formale Analyse von Petrinetzen erlaubt die Verifikation von Systemeigenschaften.
- *Existenz von Werkzeugen:* Es gibt eine reichhaltige Auswahl von Tools für die verschiedensten Petrinetz-Klassen, die die Spezifikation, Simulation und Analyse von Petrinetzen unterstützen.

Petrinetze wurden von C. A. Petri in seiner berühmten Dissertation [Pet62] eingeführt, und werden seitdem in unzähligen Artikeln und Büchern aus theoretischen und praktischen Gesichtspunkten heraus untersucht. In den ersten zwanzig Jahren wurden hauptsächlich Low-Level-Netze beschrieben, wie z.B. Bedingungs/Ereignis-Netze, Elementare Netze und Stellen/Transitions-Netze (siehe z.B. [RT86]). Die ersten High-Level-Netze, sogenannte Prädikat-Transitions-Netze, wurden von Genrich und Lautenbach [GL81] entwickelt, um die Modellierung nebenläufiger und verteilter Systeme zu unterstützen. In den letzten zehn Jahren sind viele weitere Klassen von High-Level-Netzen aus ähnlichen Gründen eingeführt und untersucht worden, u. a. Coloured (Gefärbte) Petrinetze von Jensen [Jen81, Jen92, Jen94], Petrinetze mit individuellen Token von Reisig [Rei85b] und Kombinationen von Netzen mit algebraischen Spezifikationen, sowohl von Krämer und Schmidt [KS91] als

auch von Vautherin und Reisig [Vau87, RV87, Rei91], was zu vielen Varianten algebraischer Netze geführt hat (siehe z.B. [BCM88, Bil89, Hum89, REP93, EPR94a, PER95, KR96]), die auch algebraische High-Level-Netze genannt werden. Eine Übersicht über High-Level-Netze, ihre Theorie und Anwendungen ist in [JR91, Smi96] zu finden.

Aus algebraischer Sicht werden Methoden der linearen Algebra angewendet, um Invarianten für alle Arten von Petrinetzen zu berechnen. Darüberhinaus werden von Reisig in [Rei85b] Ringe und Moduln untersucht; Winskel [Win87] sowie Meseguer und Montanari [MM90] untersuchen Monoide, Algebren, Petrinetz-Morphismen und Petrinetz-Kategorien. Diese kategorielle Sicht auf Petrinetze ist der Ausgangspunkt für die Untersuchung von Kompositionalitätsproblemen in [Win87, Hum89, MM90, EPR94c] und von Netz-Transformationen in [REP93, PER95] im Sinne von Graphtransformationen und High-Level-Replacement-Systemen. Ein einheitlicher Ansatz für verschiedene Petrinetz-Klassen wurde mit kategoriellen Methoden in [EPR94b, Pad96, EJPR01] untersucht.

Dieses Skripts befasst sich mit den „klassischen“ Stellen/Transitions-Netzen (S/T-Netzen), wie sie in [Rei85a] verwendet werden. Anhand eines Modellierungsbeispiels führen wir die Grundbegriffe ein und stellen dazu die mengentheoretische Formalisierung vor. Wir definieren die Semantik von Netzen als Markierungs- bzw. Erreichbarkeitsgraphen und befassen uns mit Prozessen, Netzeigenschaften und Netz-Verifikation. Anschließend führen wir die linear algebraische Sichtweise von S/T-Netzen mit Hilfe von Vektoren und Matrizen ein. Dies gestattet eine effiziente Simulation von Petrinetzen unter Verwendung von Matrizenmultiplikation und die Berechnung von Invarianten als Lösung von linearen Gleichungssystemen.

# Kapitel 1

## Modellierung mit Petrinetzen

Wir werden uns in diesem Kapitel mit so genannten Stellen/Transitions-Netzen (kurz S/T-Netze, engl. *Place/Transition Nets*) befassen. S/T-Netze basieren auf einer einfachen Erweiterung der Konzepte *Zustand* und *Zustandsübergang*, wie sie von Automaten her bekannt sind. Die Erweiterung besteht darin, dass in S/T-Netzen sowohl die Zustände als auch die Zustandsübergänge auf verschiedene Knoten im Graphen verteilt sind. Dies gestattet eine explizite Unterscheidung von Parallelität und Sequentialität.

In Abschnitt 1.1 werden wir Grundbegriffe wie die graphische Repräsentation statischer Systemaspekte in S/T-Netzen und die dynamischen S/T-Netz-Aspekte, also die Modellierung von Prozessabläufen, anhand eines Beispiels einführen, um dann zu den bereits eingeführten Begriffen in Abschnitt 1.2 die mengentheoretische Formalisierung zu liefern. Damit können wir in Abschnitt 1.3 den Markierungsgraphen als Semantik eines (unmarkierten) S/T-Netzes und den Erreichbarkeitsgraphen als Semantik eines Netzes mit Anfangsmarkierung definieren. In Abschnitt 1.4 beschreiben wir am eingeführten Beispiel die Modellierung von Korrektheitsanforderungen. Die Verifikation dieser Eigenschaften erfolgt später in Kapitel 5. Zum Schluss dieses Kapitels in 1.5 stellen wir noch die sehr gebräuchliche Variante von S/T-Netzen vor, die nämlich eine Beschränkung der Anzahl der Token auf den Stellen erlaubt. diese Variante heißt S/T-Netze mit Kapazitäten die Kapazitäten.

### 1.1 Informelle Einführung von S/T-Netzen

Wir werden nun die Grundbegriffe von S/T-Netzen anhand eines Leser-Schreiber-Systems entwickeln. Dabei wird das Verhalten einer Menge von Betriebssystemprozessen beschrieben, die alle auf einen Speicherplatz lesend oder schreibend zugreifen können.

#### Das Leser-Schreiber-System

Der Graph in Abbildung 1.1 spezifiziert die Anforderungen der Prozesse zunächst zustandsorientiert, also indem die Zustände eines Prozesses als Knoten und die möglichen Zustandsübergänge als Kanten dargestellt werden. Wir sehen, dass ein Prozess immer zy-

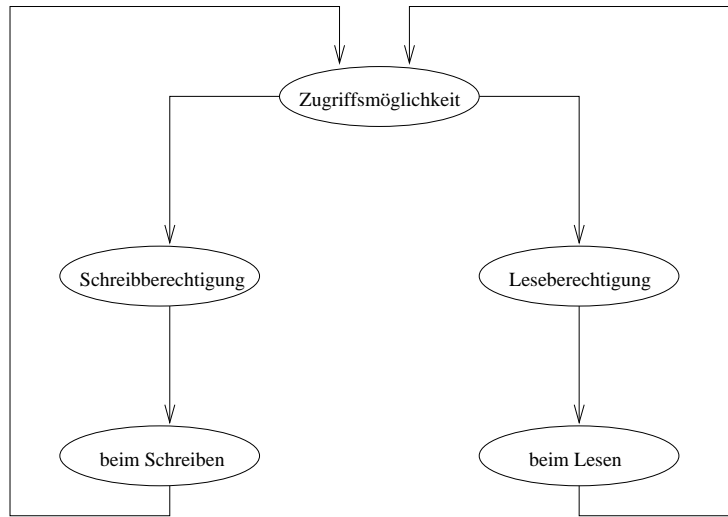


Abbildung 1.1: Zustandsorientierte Beschreibung des Leser-Schreiber-Systems

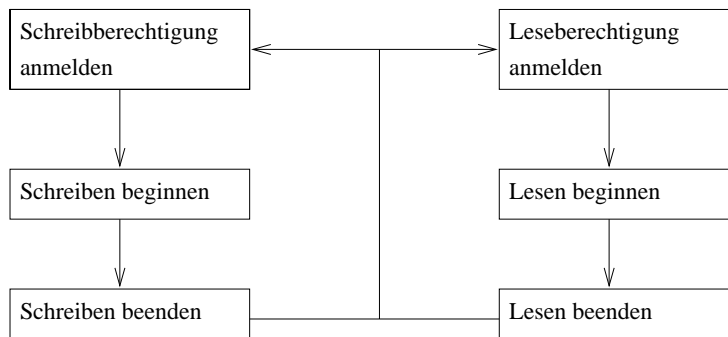


Abbildung 1.2: Aktionsorientierte Beschreibung des Leser-Schreiber-Systems

klisch abläuft und mit entsprechender Zugriffsmöglichkeit entweder zu einem lesenden oder zu einem schreibenden Prozess werden kann.

Andererseits können wir die Prozessanforderungen auch spezifizieren, indem wir (wie in Abbildung 1.2) die Aktionen, die von den Prozessen ausgeführt werden können, als Knoten auffassen und deren mögliche Abfolge durch Kanten beschreiben.

Beide Spezifikationen sind in gewisser Weise dual zu einander. So lassen sich die Kanten der zustandsorientierten Beschreibung in Abbildung 1.1 und die Knoten der aktionsorientierten Beschreibung in Abbildung 1.2 einander eindeutig zuordnen. Andersherum ist es etwas komplizierter, da der Zustandsknoten „Zugriffsmöglichkeit“ in Abbildung 1.1 der Hyperkante zwischen „Schreiben beenden“, „Lesen beenden“ und „Schreibberechtigung anmelden“, „Leseberechtigung anmelden“ entspricht. Trotzdem sind beide Sichten kompatibel und können in einer sowohl zustands- also auch aktionsorientierten Beschreibung kombiniert werden.



## Syntax von S/T-Netzen

Das S/T-Netz in Abbildung 1.3 zeigt diese Kombination, es ist also sowohl zustands- als auch aktionsorientiert. Die Zustände werden im S/T-Netz durch Kreise oder Ellipsen dargestellt und heißen *Stellen*. Die *Aktionen* des Leser-Schreiber-Systems werden durch Rechtecke gekennzeichnet und heißen *Transitionen*. In unserem Beispiel haben die Stellen und Transitionen folgende Interpretation:

- $Pz$  — Prozesse mit Zugriffsmöglichkeit
- $Plb$  — Prozess kann mit Lesen beginnen
- $Pl$  — Prozess liest
- $Psb$  — Prozess kann mit Schreiben beginnen
- $Ps$  — Prozess schreibt
- $Til$  — Aktionen lesender Prozesse ( $i = 1 \dots 3$ )
- $Tis$  — Aktionen schreibender Prozesse

Stellen und Transitionen bilden zusammen die *Knoten* des S/T-Netzes. Das Netz enthält außerdem eine Menge gerichteter *Kanten*, die jeweils entweder eine Stelle mit einer Transition oder eine Transition mit einer Stelle verbinden. Mehrfachkanten zwischen zwei Knoten gibt es nicht. Eine Kante kann mit einer natürlichen Zahl markiert sein, ihrem *Gewicht*. In unserem Beispiel ist das Gewicht aller Kanten gleich eins, was nach Vereinbarung weggelassen wird. Wir nennen die Stellen, von denen aus es eine Kante zu einer Transition gibt, *Vorbereich* und die Stellen, zu denen es eine Kante von der Transition gibt, *Nachbereich* der Transition.

Jede Stelle kann eine veränderliche Anzahl Marken, auch *Token* genannt, enthalten. Eine Verteilung von Token auf den Stellen heißt *Markierung* des S/T-Netzes. Abbildung 1.3 zeigt die *Anfangsmarkierung*, die ursprüngliche Tokenverteilung. Drei Token auf der Stelle  $Pz$  bedeuten also, dass es drei Prozesse mit Zugriffsmöglichkeit zum Speicher gibt, und dass momentan kein Prozess liest oder schreibt (sonst lägen Token auf den Stellen  $Pl$  oder  $Ps$ ) und auch kein Prozess mit Lesen oder Schreiben beginnen kann (sonst lägen Token auf den Stellen  $Plb$  oder  $Psb$ ).

## Das „Token-Spiel“

Bisher haben wir die Syntax von S/T-Netzen betrachtet, kommen wir nun zum dynamischen Verhalten. Ein S/T-Netz kann als ein Spielbrett betrachtet werden, auf dem die Token Spielfiguren darstellen, die nur auf Stellen gesetzt werden dürfen. Jede Transition stellt einen potentiellen Spielzug im „Token-Spiel“ dar: Ein Zug ist möglich, wenn jede Stelle im Vorbereich der Transition mindestens so viele Token enthält, wie das Gewicht der entsprechenden eingehenden Kante vorschreibt. Wir sagen dann auch, die Transition ist

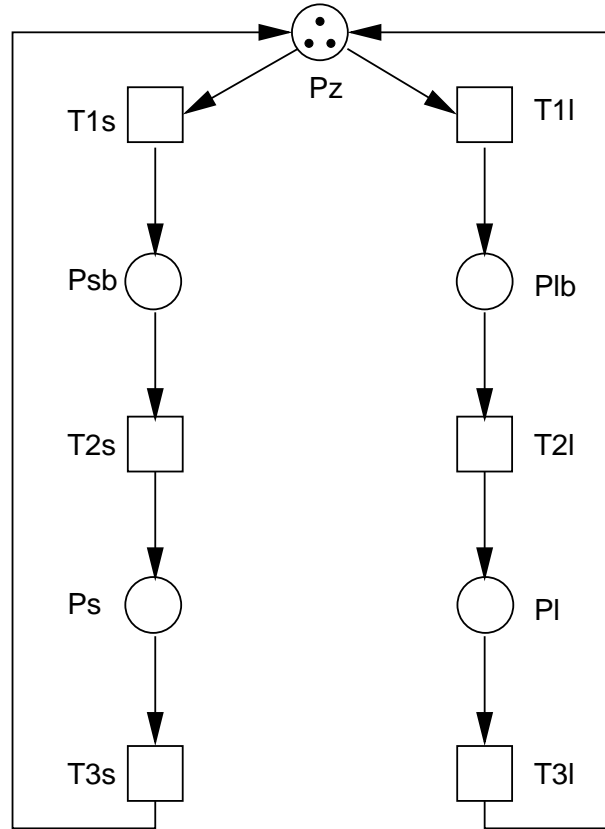


Abbildung 1.3: S/T-Netz des Leser-Schreiber-Systems

*aktiviert*. In der Anfangsmarkierung in Abbildung 1.3 sind die Transitionen  $T1s$  und  $T1l$  aktiviert, alle anderen nicht. Wenn eine Transition aktiviert ist, dann kann der entsprechende Zug stattfinden, die Transition kann *schalten*. Der Effekt des Schaltens einer Transition ist, dass Token aus dem Vorbereich entfernt werden und im Nachbereich hinzugefügt werden. Die Anzahl der entfernten bzw. hinzugefügten Token wird von den entsprechenden Kantengewichten bestimmt. So wird beim Schalten der Transition  $T1s$  in Abbildung 1.3 von der Stelle  $Pz$  ein Token entfernt und auf der Stelle  $Psb$  ein Token hinzugefügt: die Anfangsmarkierung  $M_0$  geht in eine *Folgemarkierung*  $M_1$  (zwei Token auf  $Pz$ , ein Token auf  $Psb$ ) über. In der Markierung  $M_1$  wiederum ist nun z.B. die Transition  $T2s$  aktiviert, die beim Schalten zur Markierung  $M_2$  (zwei Token auf  $Pz$ , ein Token auf  $Ps$ ) führt. Man sagt,  $M_2$  ist von  $M_0$  aus *erreichbar* (durch Hintereinanderschalten von  $T1s$  und  $T2s$ ).

Wir wollen nun das parallele Schalten mehrerer Transitionen betrachten. Sind zwei Transitionen aktiviert und gibt es so viele Token auf den gemeinsamen Stellen beider Vorbereiche, dass jede der Transitionen über „eigene“ Token verfügt, ohne sie mit der anderen Transition „teilen“ zu müssen, so sagen wir, die Transitionen können *parallel* schalten. In unserem bisherigen Leser-Schreiber-System können verschiedene Prozesse durch paralleles Schalten der Transitionen  $T1s$  und  $T1l$  bzw.  $T2s$  und  $T2l$  gleichzeitig lesen und schreiben. Angenommen, wir wollen nun aus Sicherheitsgründen nicht zulassen, dass mehrere Prozesse

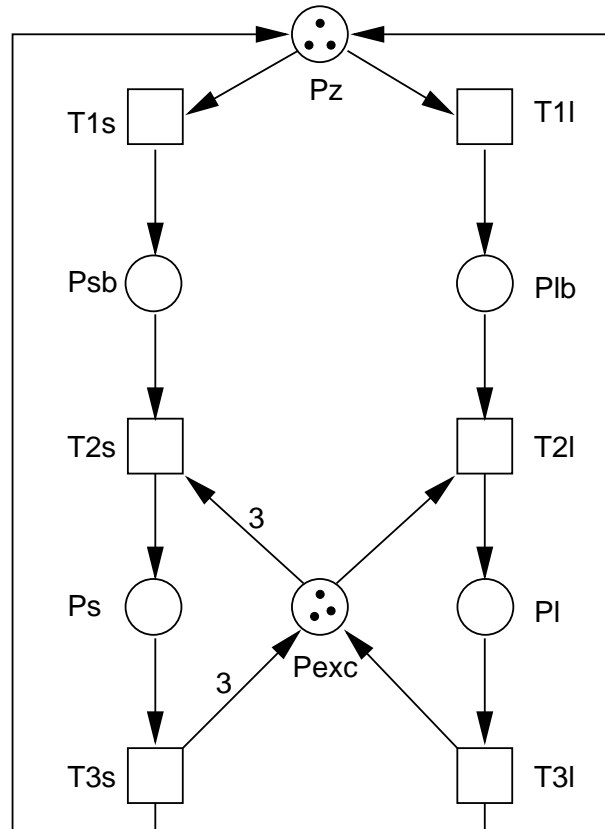


Abbildung 1.4: Leser-Schreiber-System mit gegenseitigem Ausschluss

gleichzeitig den gleichen Speicherbereich beschreiben. Erweitern wir also unser S/T-Netz aus Abbildung 1.3. Um zuverlässiges Verhalten gewährleisten zu können, wird die Lese- und Schreiberlaubnis der Prozesse an folgende Bedingungen geknüpft:

Wenn kein Prozess den Speicherplatz beschreibt, so dürfen beliebig viele Prozesse mit Zugriffsmöglichkeit lesend auf ihn zugreifen. Ein schreibender Zugriff ist für einen Prozess jedoch nur erlaubt, sofern kein anderer Prozess den Speicherplatz liest oder beschreibt. Das um dieses Prinzip des gegenseitigen Ausschlusses erweiterte Netz zeigt Abbildung 1.4.

Die neue Stelle  $P_{exc}$  sorgt zum einen dafür, dass sich Lesen und Schreiben wechselseitig ausschließen; zum anderen wird durch das Kantengewicht 3, das der Anzahl der Prozesse entspricht, sichergestellt, dass kein Prozess anfangen kann zu lesen oder zu schreiben, wenn gerade ein anderer Prozess schreibt. Es können aber bis zu 3 Prozesse parallel lesen, da in dieser Richtung das Kantengewicht nur 1 beträgt.

## Beschränkung des Tokenspiels

Eine syntaktische Erweiterung, die die Modellierung erheblich vereinfachen kann, sind Kapazitäten. S/T-Netze mit Kapazitäten sind S/T-Netze, deren Stellen zusätzlich eine mögliche Beschränkung der Tokenanzahl haben. In unserem Beispielnetz in Abbildung 1.4

sind die Kapazitäten aller Stellen unbeschränkt. Um diese Beschränkung beim „Token-Spiel“ zu bewahren, muss zusätzlich gefordert werden, dass jede Stelle im Nachbereich noch wenigstens soviel freie Kapazität hat, wie es das Gewicht der auslaufenden Kante verlangt.

## 1.2 Formale Darstellung von S/T-Netzen

Im folgenden werden die bisher eingeführten Grundbegriffe mengentheoretisch formalisiert und ergänzt. Als Anschauungsbeispiel für die formale Schreibweise dient uns wiederum das Leser-Schreiber-System aus Abbildung 1.4.

### Definition 1.1 (S/T-Netz)

Ein *S/T-Netz* ist ein 3-Tupel  $N = (P, T, W)$ , für das gilt:

1.  $P$  und  $T$  sind Mengen, deren Elemente *Stellen* (*places*) bzw. *Transitionen* genannt werden mit  $P \cap T = \emptyset$ .
2.  $W : (P \times T) \cup (T \times P) \rightarrow \mathbb{N}_0$  ordnet jeder Kante ihr *Kantengewicht* zu.

Zur einfacheren Darstellung gehen wir davon aus, dass  $P$  und  $T$  disjunkt sind. Dies ist keine wirkliche Einschränkung der Definition.

Ein Kantengewicht von 0, also  $W(x, y) = 0$  bedeutet, dass keine Kante vorliegt.

### Beispiel 1.2

Für das Netz aus Abbildung 1.4 ergibt sich somit die folgende formale Repräsentation:

$$\begin{aligned}
 P &= \{Pz, Psb, Ps, Plb, Pl, Pexc\} \\
 T &= \{T1s, T2s, T3s, T1l, T2l, T3l\} \\
 \text{und } W(x, y) &= \begin{cases} 1 & ; \text{ falls } (x, y) \in \{(Pz, T1s), (T1s, Psb), (Psb, T2s), (T2s, Ps), (Ps, T3s), \\ & (T3s, Pz), (Pz, T1l), (T1l, Plb), (Plb, T2l), (T2l, Pl), \\ & (Pl, T3l), (T3l, Pz), (T3l, Pexc), (Pexc, T2l)\} \\ 3 & ; \text{ falls } (x, y) \in \{(T3s, Pexc), (Pexc, T2s)\} \\ 0 & ; \text{ sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Beim Schalten fungieren die Transitionen als Regeln. Vorbereich und Nachbereich sind dann der linken bzw. rechten Regelseite vergleichbar.

### Definition 1.3 (Vorbereich, Nachbereich)

Für einen Knoten  $x \in P \cup T$  eines S/T-Netzes  $N = (P, T, W)$  bezeichnet

- $x = \{y \mid W(y, x) > 0\}$  den *Vorbereich* und
- $x\bullet = \{y \mid W(x, y) > 0\}$  den *Nachbereich* von  $x$ .

### Beispiel 1.4

In Abbildung 1.4 ist der Vorbereich • $T2s$  der Transition  $T2s$  mit  $\{Psb, Pexc\}$  und der Nachbereich  $Pz\bullet$  der Stelle  $Pz$  mit  $\{T1s, T1l\}$  gegeben.

**Definition 1.5 (Markierung)**

Sei  $N = (P, T, W)$  ein S/T-Netz wie in Definition 1.1.

1. Eine Abbildung  $M : P \rightarrow \mathbb{N}_0$  heißt *Markierung* von  $N$ .
2. Für zwei Markierungen  $M, M' : P \rightarrow \mathbb{N}_0$  gilt
  - $M \leq M'$  genau dann, wenn  $M(p) \leq M'(p)$  für alle  $p \in P$
3. Wir schreiben die Markierung  $M : P \rightarrow \mathbb{N}_0$  auch als  $n$ -Tupel  $(M(p_1), M(p_2), \dots, M(p_n))$  mit  $\{p_1, \dots, p_n\} = P$  für  $n = |P|$ .

**Definition 1.6 (Schaltverhalten)**

Sei  $N = (P, T, W)$  ein S/T-Netz.

1. Eine Transition  $t \in T$  heißt *M-aktiviert*, falls für alle  $p \in \bullet t : M(p) \geq W(p, t)$ .  
Dass  $t \in T$  *M-aktiviert* ist, können wir auch durch  $M[t\rangle$  notieren.
2. Eine *M-aktivierte* Transition  $t \in T$  bestimmt eine *Folgemarkierung*  $M'$  von  $M$  durch:  
 $M'(p) = M(p) - W(p, t) + W(t, p)$  für alle  $p \in P$ .

Wir sagen auch *t schaltet von M nach M'* und schreiben  $M[t\rangle M'$  oder  $M \xrightarrow{t} M'$ .

**Beispiel 1.7**

Die in Abbildung 1.4 dargestellte Markierung ist

$$M_0 ::= M_0(p) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } p \in \{Psb, Ps, Plb, Pl\} \\ 3 & , \text{ falls } p \in \{Pz, Pexc\} \end{cases}$$

Für  $(Pz, Psb, Ps, Plb, Pl, Pexc)$  wird  $M_0$  mit  $(3, 0, 0, 0, 3)$  notiert.

Die Transitionen  $T1s$  und  $T1l$  sind  $M_0$ -aktiviert. Die Folgemarkierung  $M_1$ , die durch Schalten von  $T1s$  erreicht wird, berechnet sich durch

$$\begin{array}{llll} M_1(Pz) & = & M_0(Pz) - W(Pz, T1s) & = 3 - 1 = 2, \\ M_1(Psb) & = & M_0(Psb) + W(Psb, T1s) & = 0 + 1 = 1, \\ M_1(Ps) & = & M_0(Ps) & = 0, \\ M_1(Plb) & = & M_0(Plb) & = 0, \\ M_1(Pl) & = & M_0(Pl) & = 0, \\ M_1(Pexc) & = & M_0(Pexc) & = 3. \end{array}$$

Wir schreiben daher  $M_0[T1s\rangle M_1$ .

## 1.3 Markierungs- und Erreichbarkeitsgraph

Markierungen bilden die Zustände eines Netzes. Der *Markierungsgraph* eines S/T-Netzes repräsentiert alle Markierungen, d.h. alle erlaubten Zustände des Netzes, zusammen mit den zwischen ihnen möglichen Schaltschritten und kann als Semantik eines S/T-Netzes angesehen werden. Die hier vorgestellten Graphen sind Graphen (siehe Anhang A.1), deren Knoten Markierungen und deren Kantenamen Transitionen entsprechen.

**Definition 1.8 (Markierungsgraph)**

Der *Markierungsgraph*  $MG = (MV, ME)$  eines S/T-Netzes  $N = (P, T, W)$  ist gegeben durch

- die Knoten (*engl. vertices*)  $MV = \{M \mid M : P \rightarrow \mathbb{N}_0 \text{ ist Markierung für } N\}$  und
- die Kanten (*eng. edges*)  $ME = \{M \xrightarrow{t} M' \mid t \in T \wedge M[t]M'\}$ , wobei die Kanten als 3-stellige Relation  $ME \subseteq MV \times T \times MV$  aufgefasst werden.

Zur Vereinfachung schreiben wir  $M \in MG$  und  $M \xrightarrow{t} M' \in MG$ . Außerdem notiert man mit  $M \xrightarrow{*} M' \in MG$  ( $M \xrightarrow{+} M' \in MG$ ) die Existenz eines (nichtleeren) Pfades von  $M$  nach  $M'$  in  $MG$ . Darüber hinaus kann ein Pfad der Länge  $n$  auch mit  $M \xrightarrow{(n)} M'$  notiert werden.

$[M\rangle$  bezeichnet die Menge aller von  $M$  aus erreichbaren Markierungen oder kürzer die *Erreichbarkeitsmenge* von  $M$  und ist gegeben durch

$$[M\rangle := \{M' \mid M \xrightarrow{*} M' \in MG\}.$$

Ihrer Interpretation entsprechend nennen wir die Knoten des Markierungsgraphen Markierungen und seine Kanten Schaltschritte. Beachtet, dass ein Schaltschritt durch das Tripel  $M \xrightarrow{t} M'$  gegeben ist und nicht nur durch  $t$ , da eine Transition in verschiedenen Schaltschritten vorkommen kann.

Da der Markierungsgraph *alle möglichen* Markierungen und Schaltschritte enthält, sind darunter auch solche, die aus der Sicht des modellierten Systems keinen Sinn ergeben. So sind in unserem Leser-Schreiber-Netz nur Markierungen sinnvoll, bei denen auf den Stellen  $Pz, Psb, Ps, Plb, Pl$  zusammen genau drei Token liegen, da sonst das Prinzip des gegenseitigen Ausschlusses nicht funktioniert. Im Markierungsgraphen dieses Netzes ergibt sich ein neuer isolierter Teilgraph für jede andere Tokenzahl auf diesen Stellen, die durch die Anfangsmarkierung des Netzes vorgegeben wird.

Da die meisten Systeme nur dann in der gewünschten Weise arbeiten, wenn sie beim Start richtig initialisiert, d.h. in einen definierten Startzustand gebracht werden, betrachten wir S/T-Netze auch oft in Zusammenhang mit einer solchen *Anfangsmarkierung*.

**Definition 1.9 (Markiertes Netz)**

Ein *markiertes Netz*  $N_{M_0} = (N, M_0)$  ist ein S/T-Netz  $N = (P, T, W)$  zusammen mit einer Markierung  $M_0 : P \rightarrow \mathbb{N}_0$  für  $N$ , die *Anfangsmarkierung* genannt wird.

Ein *markiertes Netz* wird auch so  $N_{M_0} = (P, T, W, M_0)$  notiert und gegebenenfalls wird auch der Index weggelassen.

**Beispiel 1.10**

Die Anfangsmarkierung des Netzes in Abbildung 1.4 ist  $M_0$ .

Wenn wir markierte Netze betrachten, sind wir nicht am gesamten Schaltverhalten interessiert, sondern nur an denjenigen Schaltvorgängen, die von der Anfangsmarkierung aus

möglich sind. Der *Erreichbarkeitsgraph* liefert uns genau diese Information. Wir definieren den Erreichbarkeitsgraph hier als Teilgraph des Markierungsgraphen, er kann aber wie dieser auch direkt aus dem Schaltverhalten abgeleitet werden.

**Definition 1.11 (Erreichbarkeitsgraph)**

Der *Erreichbarkeitsgraph*  $EG = (EG_V, EG_E)$  eines markierten Netzes  $N_{M_0}$  ist der kleinste Teilgraph des Markierungsgraphen  $MG = (MG_V, MG_E)$  für das unmarkierte Netz  $N$ , so dass gilt:

- Die Knoten  $EG_V = [M_0]$  sind alle von der Anfangsmarkierung aus zu erreichenden Markierungen.
- Für alle  $M \in EG_V$  und  $M \xrightarrow{t} M' \in MG_E$  ist auch  $M \xrightarrow{t} M' \in EG_E$ .

Der Erreichbarkeitsgraph ist ein Teilgraph des Markierungsgraphen, daher hat die in Definition 1.8 eingeführte Notation auch für den Erreichbarkeitsgraphen Gültigkeit.

**Beispiel 1.12**

Für das S/T-Netz in Abbildung 1.5 ist daneben der Erreichbarkeitsgraph angegeben.

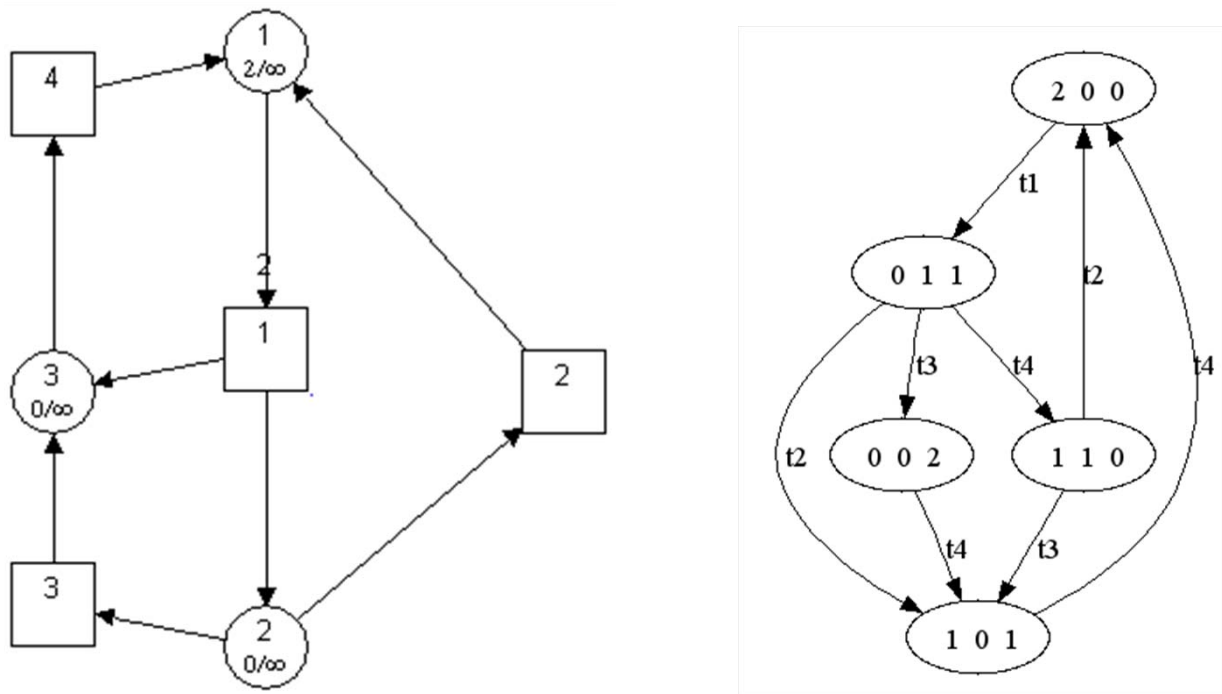


Abbildung 1.5: S/T Netz und sein Erreichbarkeitsgraph

## 1.4 Modellierung von Korrektheitseigenschaften

Bei der Modellierung eines S/T-Netzes müssen verschiedene Anforderungen an das System beachtet werden. Diese können wir in zwei Aspekte unterteilen:

- *Sicherheits-Anforderungen* sind Anforderungen an die Stellen bzw. Markierungen, z.B. obere und untere Schranken, die die Markierung einer Stelle nicht über- oder unterschreiten darf.
- *Lebendigkeits-Anforderungen* sind Anforderungen an die Transitionen bzw. an das Schaltverhalten und fordern z.B., dass das Hintereinanderschalten bestimmter Transitionen die Markierung bewahrt.

Wie diese Eigenschaften für ein S/T-Netz nachgewiesen werden können, wird in Kapitel 5 ausgeführt.

### Beispiel 1.13

Das Leser-Schreiber-System soll die folgenden Anforderungen erfüllen.

#### Sicherheits-Anforderungen

- $M(Pl) \leq 3$  : maximal 3 lesende Prozesse gleichzeitig
- $M(Ps) \leq 1$  : maximal 1 schreibender Prozess gleichzeitig
- $M(Pl) > 0 \Rightarrow M(Ps) = 0$ ,  $M(Ps) > 0 \Rightarrow M(Pl) = 0$  : kein gleichzeitiges Lesen und Schreiben
- $M(Pz) + M(Plb) + M(Pl) + M(Psb) + M(Ps) = 3$  : Prozesserhaltung, es gibt immer genau 3 Prozesse

#### Lebendigkeits-Anforderungen

- $M_0 \xrightarrow{T1s} M_1 \xrightarrow{T2s} M_2 \xrightarrow{T3s} M_0$  : Wiederherstellen des Anfangszustandes nach einem vollständigen Schreibprozess
- $M_0 \xrightarrow{T1l} M'_1 \xrightarrow{T2l} M'_2 \xrightarrow{T3l} M_0$  : Wiederherstellen des Anfangszustandes nach einem vollständigen Leseprozess
- $M_0 \xrightarrow{T1s} M''_1 \xrightarrow{T1l} M''_2 \xrightarrow{T2s} M''_3 \xrightarrow{T3s} M''_4 \xrightarrow{T2l} M''_5 \xrightarrow{T3l} M_0$  : Wiederherstellen des Anfangszustandes nach einem alternierenden Schreib- und Leseprozess (wobei es hier noch andere Möglichkeiten gibt, in welcher Reihenfolge die Transitionen schalten können)



## 1.5 S/T-Netze mit Kapazitäten

Für die Modellierung ist es wesentlich komfortabler, lassen sich obere Grenzen für die Anzahl der Token auf einer Stelle angeben. Diese obere Grenze nennt man Kapazitäten.

### Definition 1.14 (S/T-Netz mit Kapazitäten)

Ein *S/T-Netz* mit Kapazitäten ist ein 4-Tupel  $N = (P, T, W, K)$  für das gilt:

1.  $(P, T, W)$  ist S/T-Netz.
2.  $K : P \rightarrow \mathbb{N}_0^\omega$  erklärt eine (möglicherweise unbeschränkte) *Kapazität* für jede Stelle.

$\mathbb{N}_0^\omega$  bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen inklusive  $\omega$ , das für unendlich steht. Dabei gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  das folgende:

$$n < \omega = \omega + n = \omega - n = n \cdot \omega$$

### Definition 1.15 (Markierungen und Schaltverhalten mit Kapazitäten)

Sei  $N$  ein S/T-Netz mit Kapazitäten.

1. Für eine Markierung  $M : P \rightarrow \mathbb{N}_0$  muss für alle Stellen  $p \in P$  gelten:  $M(p) \leq K(p)$ .
2. Eine Transition  $t \in T$  ist *M-aktiviert*, falls für alle  $p \in \bullet t : M(p) \geq W(p, t)$  und **zusätzlich** für alle  $p \in t\bullet : M(p) + W(t, p) \leq K(p)$  gilt.

## Unbeschränkte Kapazitäten durch Netzkomplementierung

Wir betrachten nun eine Konstruktion, die uns zu einem beliebigen markierten Netz ein äquivalentes Netz mit unbeschränkten Kapazitäten liefert. Wir sehen zwei markierte Netze als äquivalent an, wenn ihre Erreichbarkeitsgraphen bijektiv sind. Die Bijektion von Graphen findet sich ebenfalls im Anhang A.1.

### Definition 1.16 (Netzkomplementierung mit unbeschränkten Kapazitäten)

Sei  $N = (P, T, W, K)$  ein S/T-Netz. Dann ist die *Netzkomplementierung* (mit unbeschränkten Kapazitäten)  $N' = (P', T, W')$  von  $N$  gegeben durch:

- $P' = P \uplus \bar{P}$  wobei  $\bar{P} = \{\bar{p} \mid p \in P \text{ mit } K(p) \neq \omega\}$
- $W'(x, y) = \begin{cases} W(x, y) & ; \text{ falls } x \in P \text{ oder } y \in P \\ W(p, t) & ; \text{ falls } (x, y) = (t, \bar{p}) \text{ und } \bar{p} \in \bar{P}. \\ W(t, p) & ; \text{ falls } x = (\bar{p}, t) \text{ und } \bar{p} \in \bar{P} \end{cases}$

Für eine Markierung  $M$  von  $N$  gibt es eine komplementierte Markierung  $M'$  von  $N'$ , die berechnet wird durch  $M' := M'(x) = \begin{cases} K(p) - M(p) & ; \text{ falls } x = \bar{p} \in \bar{P} \\ M(x) & ; \text{ sonst} \end{cases}$ .

Ein markiertes S/T-Netz  $N_{M_0}$  wird also durch das entsprechende markierte Netz  $N'_{M'_0}$  komplementiert.

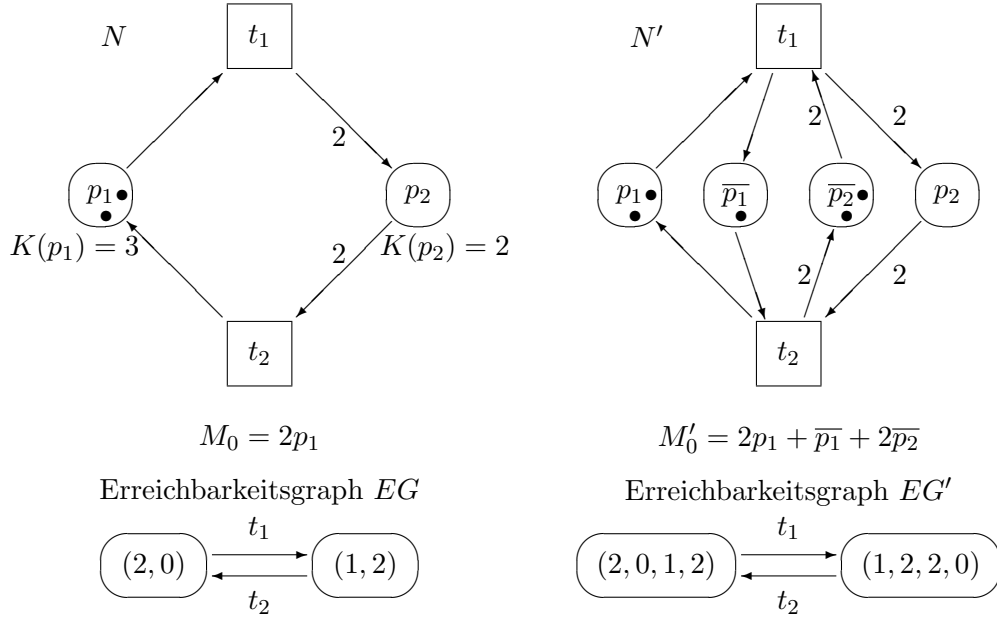


Abbildung 1.6: Netzkomplementierung und Isomorphie der Erreichbarkeitsgraphen

### Beispiel 1.17

In Abbildung 1.6 ist die Konstruktion der Netzkomplementierung  $N'_{M'_0}$  des Netzes  $N_{M_0}$  abgebildet. Die Erreichbarkeitsgraphen beider Netze sind bijektiv.

### Satz 1.18 (Bewahrung des Schaltverhaltens)

Sei  $N = (P, T, W, K, M_0)$  ein markiertes S/T-Netz mit Kapazitäten und  $N' = (P', T, W', M'_0)$  das zugehörige markierte Netz ohne Kapazitäten.  $MG$  und  $MG'$  seien die Markierungsgraphen zu  $N$  bzw.  $N'$ .

1. Dann ist jede Transition  $t \in T$ , die in  $N$  unter  $M_1$  aktiviert ist, auch in  $N'$  unter  $M'_1$  aktiviert.
2. Für jeden möglichen Schaltschritt  $M_1[t]M_2 \in MG$  gibt es einen möglichen Schaltschritt  $M'_1[t]M'_2 \in MG'$ , wobei  $M'_2(x) = \begin{cases} K(p) - M_2(p) & ; \text{ falls } x = \bar{p} \in \bar{P} \\ M_2(x) & ; \text{ sonst} \end{cases}$

### Beweis:

1. Sei  $t \in T$  unter  $M_1$  aktiviert, also  $M_1[t]$ , deshalb gilt für alle  $p \in \bullet t$  :  $M_1(p) \geq W(p, t)$  und  
 $\forall p \in t \bullet : M_1(p) + W(t, p) \leq K(p)$ .  
 Wir müssen zeigen, dass  $t$  auch in  $N'$  unter  $M'_1$  aktiviert ist.  
 Für  $x \in \bullet t$  können die folgenden beiden Fälle auftreten:

- $x = p \in P$ .  
Also ist  $M'_1(p) = M_1(p) \geq W(p, t) = W'(p, t)$ .
- $x = \bar{p} \in \bar{P}$ , also  $p \in t\bullet$ .  
Dann gilt:  $M'_1(\bar{p}) = K(p) - M_1(p) \geq W(t, p) = W'(\bar{p}, t)$ .

Da keine Kapazitätsbeschränkungen existieren, ist also  $t$  in  $N'$  unter  $M'_1$  aktiviert.

2. Sei  $M_2$  die Folgemarkierung von  $M_1$  mit  $M_2(p) = M_1(p) - W(p, t) + W(t, p)$ .

- Für  $x = p \in P$  gilt:  
 $M'_2(x) = M_2(x) = M_1(x) - W(x, t) + W(t, x) = M'_1(x) - W'(x, t) + W'(t, x)$ .
- Für  $x = \bar{p} \in \bar{P}$  gilt:  
 $M'_2(\bar{p}) = K(p) - M_2(p)$   
 $= K(p) - M_1(p) + W(p, t) - W(t, p)$   
 $= M'_1(\bar{p}) - W'(\bar{p}, t) + W'(t, \bar{p})$ .

Somit ist  $M'_2$  die Folgemarkierung von  $M'_1$  nach dem Schalten von  $t$ .

□

Der folgende Satz zeigt die Äquivalenz der Netze  $N$  und  $N'$ . Dafür wird gezeigt, dass die Erreichbarkeitsgraphen von  $N$  und  $N'$  bijektiv sind. Dafür benötigen wir aber zunächst Graphmorphismen (siehe Anhang Definition A.2).

### Satz 1.19 (Bijektion der Erreichbarkeitsgraphen)

Sei  $N'_{M'_0}$  das Netz mit unbeschränkten Kapazitäten zu einem markierten S/T-Netz  $N_{M_0}$ . Dann sind die Erreichbarkeitsgraphen  $EG$  und  $EG'$  der Netze  $N$  und  $N'$  bijektiv, d. h. es gibt einen bijektiven Graphmorphismus  $f : EG \rightarrow EG'$ .

**Beweis:** Wir definieren  $f$  und zeigen, dass  $f$  ein bijektiver Graphmorphismus ist.

- $f_V(M) = M'$  mit  $M'(x) := \begin{cases} K(p) - M(p) & ; \text{ falls } x = \bar{p} \in \bar{P} \\ M(x) & ; \text{ sonst} \end{cases}$
- $f_E(M_1 \xrightarrow{t} M_2) = f_V(M_1) \xrightarrow{t} f_V(M_2)$

#### 1. $f$ ist wohldefiniert

- $f_V$  ist wohldefiniert:  
Für alle  $M \in EG_V$  existiert ein Pfad  $M_0 \xrightarrow{t_1} \dots \xrightarrow{t_n} M$  in  $EG$ . Nach Satz 1.18 gibt es einen zugehörigen Pfad  $f_V(M_0) = M'_0 \xrightarrow{t_1} \dots \xrightarrow{t_n} M' = f_V(M)$  in  $EG'$ , also auch in  $EG'$ , d. h.  $M' \in EG'_V$ .
- $f_E$  ist wohldefiniert:  
Zu  $M_1 \xrightarrow{t} M_2 \in EG_E$  gibt es einen Schaltschritt  $f_V(M_1) \xrightarrow{t} f_V(M_2) \in EG'_E$ .  
Das folgt direkt aus Satz 1.18.

Also ist  $f$  ein Graphmorphismus.

## 2. $f$ ist injektiv

- $f_V$  ist injektiv:

Es seien  $M_1, M_2 \in EG_V$  mit  $f_V(M_1) = f_V(M_2)$ . Dann gilt für alle  $p \in P'$ :  $f_V(M_1)(p) = f_V(M_2)(p)$  daraus folgt für alle  $p \in P$ :  $f_V(M_1)(p) = f_V(M_2)(p)$  und aufgrund der Definition von  $f_V$  gilt dann  $M_1(p) = f_V(M_1)(p) = f_V(M_2)(p) = M_2(p)$  für alle  $p \in P$ .

- $f_E$  ist injektiv:

Es seien  $t, t', M_1, M_2, M_3, M_4$  so, dass  $f_E(M_1 \xrightarrow{t} M_2) = f_E(M_3 \xrightarrow{t'} M_4)$ , also  $f_V(M_1) \xrightarrow{t} f_V(M_2) = f_V(M_3) \xrightarrow{t'} f_V(M_4)$ . Durch Identifikation der Gleichung erhalten wir  $t = t'$  sowie  $f_V(M_1) = f_V(M_3)$  und da  $f_V$  injektiv ist, gilt  $M_1 = M_3$  und analog  $M_2 = M_4$ .

Also folgt  $M_1 \xrightarrow{t} M_2 = M_3 \xrightarrow{t'} M_4$ .

Damit ist  $f_E$  injektiv.

## 3. $f$ ist surjektiv

- $f_V$  ist surjektiv:

Also z.z. ist, dass für jede Markierung  $M' \in EG'$  existiert eine Markierung  $M \in EG$  mit  $f_V(M) = M'$ . Um das zu zeigen machen wir eine Induktion über die Anzahl der Schaltschritte, die zu der jeweiligen Markierung führen.

**Induktionsanfang** ( $n = 0$ ):

$M'_0 \in EG'$ : laut Voraussetzung gilt  $M'_0 = f_V(M_0)$

**Induktionsanker:** Für alle Markierungen  $M'_n$  mit  $M'_0 \xrightarrow{(n)} M'_n$  gibt es  $M_n \in EG$ , so dass  $M'_n = f_V(M_n)$ .

**Induktionsschritt** ( $n \mapsto n + 1$  Schaltschritte):

Sei  $M'_{n+1}$  gegeben mit  $M'_0 \xrightarrow{(n+1)} M'_{n+1}$ , dann gibt es mindestens ein  $M'_n$ , so dass  $M'_0 \xrightarrow{(n)} M'_n$  und danach  $M'_n[t] M'_{n+1}$ . Laut Induktionsanker gilt dann, dass es  $M_n \in EG$  mit  $M'_n = f_V(M_n)$  gibt.

Nun wird gezeigt, dass  $t$  durch  $M_n$  aktiviert ist:

Für alle  $p \in P$  gilt:

$$\begin{array}{ll} M_n(p) = f_V(M_n)(p) & \text{Def. von } f_V \\ = M'_n(p) & \text{nach Voraussetzung gilt } M'_n = f_V(M_n) \\ \geq W'(p, t) & \text{da } M'_n[t] \\ = W(p, t) & \text{Konstruktion von } N' \end{array}$$

Und für alle  $p \in P$  mit  $K(p) \neq \omega$  gilt:

$$\begin{aligned}
K(p) &= K(p) - M_n(p) + M_n(p) \\
&= f_V(M_n)(\bar{p}) + M_n(p) && \text{Def. von } f_V \\
&= M'_n(\bar{p}) + M_n(p) && \text{nach Voraussetzung gilt } M'_n = f_V(M_n) \\
&\geq W'(\bar{p}, t) + M_n(p) && \text{da } M'_n[t] \\
&= W(t, p) + M_n(p) && \text{Def. von } W'
\end{aligned}$$

Also gilt  $M_n[t]$ .

Sei nun  $M'_n \xrightarrow{t} M'_{n+1} \in EG'$  dann gibt es auch  $M_n \xrightarrow{t} M_{n+1} \in EG$ .

Dann gilt für  $p \in P$ :

$$\begin{aligned}
f_V(M_{n+1})(p) &= M_{n+1}(p) = M_n(p) - W(p, t) + W(t, p) \\
&= f_V(M_n)(p) - W(p, t) + W(t, p) = M'_n - W'(p, t) + W'(t, p) = M'_{n+1}(p)
\end{aligned}$$

Und es gilt für  $\bar{p} \in \bar{P}$ :

$$\begin{aligned}
f_V(M_{n+1})(\bar{p}) &= K(p) - M_{n+1}(p) = K(p) - (M_n(p) - W(p, t) + W(t, p)) \\
&= K(p) - M_n(p) + W(p, t) - W(t, p) = f_V(M_n)(\bar{p}) - W'(\bar{p}, t) + W'(t, \bar{p}) \\
&= M'_n(\bar{p}) - W'(\bar{p}, t) + W'(t, \bar{p}) = M'_{n+1}
\end{aligned}$$

Also gilt:  $f_V(M_{n+1}) = M'_{n+1}$ .

- $f_E$  ist surjektiv:

Für jedes  $M'_n \xrightarrow{t} M'_{n+1} \in EG'$  existiert  $f_V(M_n) \xrightarrow{t} f_V(M_{n+1}) \in EG$ , da  $f_V$  surjektiv ist.

$f$  ist wohldefiniert, injektiv und surjektiv  $\Rightarrow f$  ist bijektiv. □

# Kapitel 2

## Prozesse und Prozessnetze

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Prozessnetzen. Diese bilden die Grundlage für die Modellierung von Prozessen zu den im vorhergehenden Kapitel betrachteten Petri-Netzen. Dazu betrachten wir zuerst in Abschnitt 2.1 anhand eines Beispiels und dann in Abschnitt 2.2 formal elementare Netze als spezielle S/T-Netze. Nach der Einführung weiterer prozessrelevanter Begriffe wie Konflikt, Nebenläufigkeit und Kausalität in Abschnitt 2.3 definieren wir in Abschnitt 2.4 auf den elementaren Netzen aufbauend die Prozessnetze. Das Kapitel schließt in Abschnitt 2.5 mit einem charakteristischen Satz über das Schaltverhalten von Prozessnetzen, der ein Kriterium für das komplette Durchschalten eines Prozessnetzes aufzeigt, und in Abschnitt 2.6 mit einem Ausblick auf die Definition von Prozessen unter Verwendung von Netz-Morphismen.

### 2.1 Dining Philosophers und Prozessbegriff

In Abbildung 2.1 ist das Petrinetz der „Dining Philosophers“ dargestellt, welches wir als Beispiel betrachten wollen. Es modelliert vier Philosophen, die an einem runden Tisch sitzen und zwischen denen jeweils eine Gabel in Reichweite liegt. In den vier Quadranten der Darstellung „sitzt“ jeweils ein Philosoph, gut erkennbar durch den Kreislauf *Think – Take – Eat – Put*. Ein Philosoph kann entweder essen oder denken. Zum Essen benötigt er zwei Gabeln, die er durch Schalten der Transitionen *Take* oder *Put* jeweils vom Tisch aufnehmen oder wieder hinlegen kann. Die Stellen *Fork1* bis *Fork4* bezeichnen die Gabeln, welche genau dann auf dem Tisch liegen, wenn die entsprechende Stelle mit einem Token belegt ist. Ein Philosoph erreicht immer nur die ihm am nächsten liegenden beiden Gabeln. Bei der initialen Markierung

$$M_0 = \{Think1, Think2, Think3, Think4, Fork1, Fork2, Fork3, Fork4\}$$

liegen alle Gabeln auf dem Tisch und alle Philosophen denken.

Überlegen wir uns anhand des „Dining Philosophers“-Netzes die Bedeutung von Prozessen in Petrinetzen, so kommt uns folgende

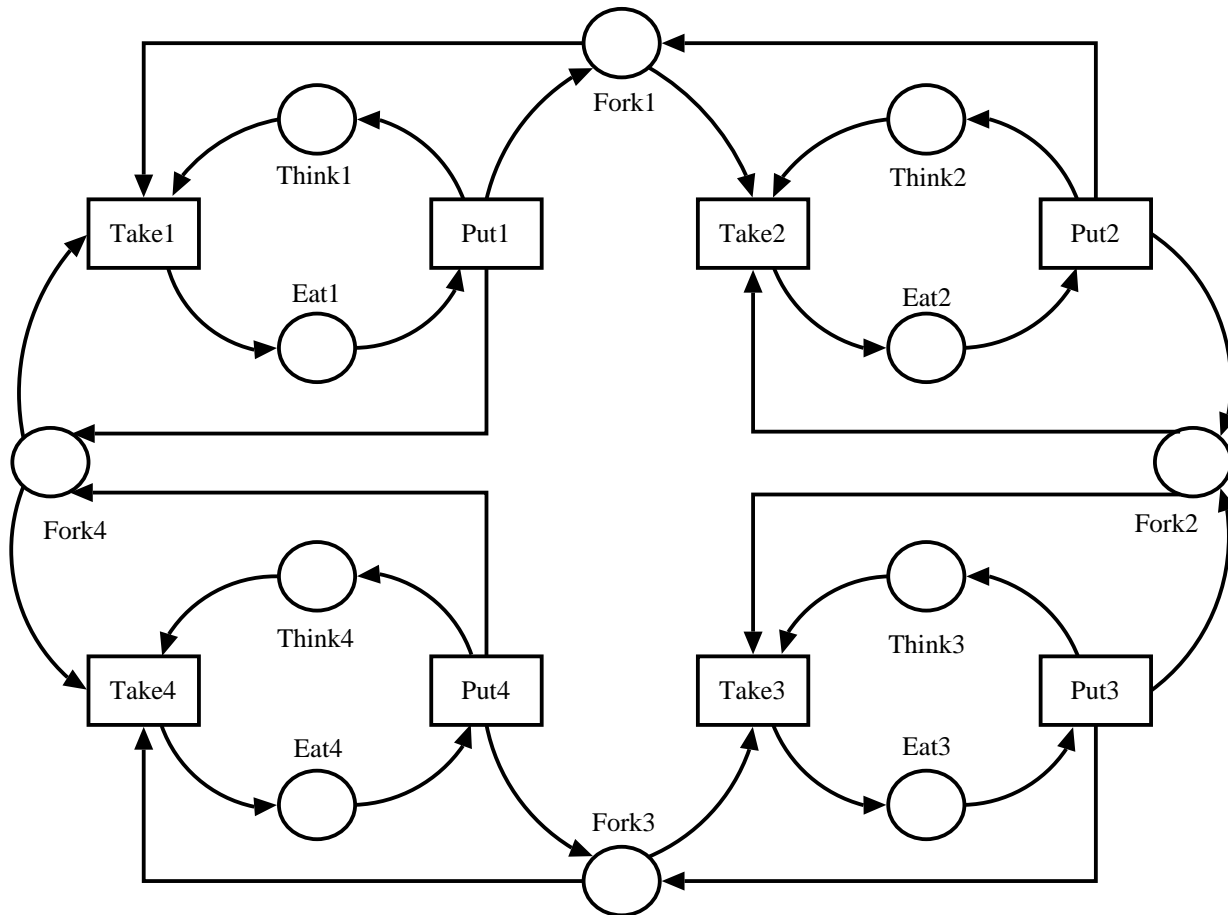


Abbildung 2.1: Petrinetz für „The Dining Philosophers“

**Konzeptionelle Idee:** Ein Prozess ist ein nebenläufiger Ablauf im Petrinetz, bei dem unabhängige Transitionen in beliebiger Reihenfolge schalten können.

### Beispiel 2.1

Folgende sechs *Schaltsequenzen* des „Dining Philosophers“-Netzes unterscheiden sich nur durch Vertauschung unabhängiger Transitionen und sollten als ein *Prozess* modellierbar sein:

$Take1 \bullet Put1 \bullet Take3 \bullet Put3 \bullet Take2 \bullet Put2$   
 $Take1 \bullet Take3 \bullet Put1 \bullet Put3 \bullet Take2 \bullet Put2$   
 $Take1 \bullet Take3 \bullet Put3 \bullet Put1 \bullet Take2 \bullet Put2$   
 $Take3 \bullet Put3 \bullet Take1 \bullet Put1 \bullet Take2 \bullet Put2$   
 $Take3 \bullet Take1 \bullet Put3 \bullet Put1 \bullet Take2 \bullet Put2$   
 $Take3 \bullet Take1 \bullet Put1 \bullet Put3 \bullet Take2 \bullet Put2$

Wir stehen nun noch vor dem Problem, die obigen Begriffe wie *Unabhängigkeit*, *Nebenläufigkeit* und schließlich auch *Prozesse* und *Prozessnetze* formal zu fassen und zu definieren.

## 2.2 Elementare Netze

Um eine Grundlage für die in Abschnitt 2.1 eingeführten und zu formalisierenden Begriffe zu haben, betrachten wir zunächst die elementaren Netze. Elementare Netze werden auch Bedingungs/Ereignis-Netze genannt und sind ein Spezialfall der Stellen/Transitions-Netze.

### Definition 2.2 (Elementares Netz)

Ein *elementares Netz* ist ein Tripel  $N = (P, T, F)$  mit

1. einer Menge  $P$  von Stellen oder Bedingungen,
2. einer Menge  $T$  von Transitionen oder Ereignissen,
3. einer Flussrelation  $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  von  $N$ .

### Beispiel 2.3

- Das „Dining Philosophers“ Netz (Abbildung 2.1) ist ein elementares Netz (wenn wir für alle Stellen eine Kapazität von 1 festlegen).
- Der Basisprozess von „The Dining Philosophers“ (Abbildung 2.2) für den ersten Philosophen ist ein elementares Netz. Man beachte, dass die Stellen auf der linken und rechten Seite nicht dieselben sind, sondern durch Anfügen von Strichen unterscheidbar sind!

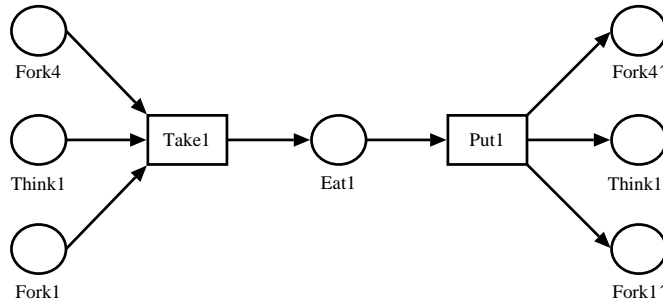


Abbildung 2.2: Elementares Netz für den Basisprozess aus „The Dining Philosophers“

Das elementare Netz  $N = (P, T, F)$  entspricht einem S/T-Netz  $N_{S/T} = (P, T, W_1, K_1)$ :

- mit der Kapazität  $K_1(p) = 1$  für alle  $p \in P$
- und dem Gewicht  $W_1(x, y) = 1$  für alle  $(x, y) \in F$  und  $W_1(x, y) = 0$  für alle  $(x, y) \notin F$

Die Markierungsfunktion  $M_1 : P \rightarrow \mathbb{N}_0$  wird zu einer Markierung  $M \subseteq P$  mit  $p \in M \Leftrightarrow M_1(p) = 1$ . Das Schaltverhalten elementarer Netze stellt sich nun folgendermaßen dar: Eine Transition  $t$  ist unter der Markierung  $M$  aktiviert, wenn alle Stellen im Vorbereich von  $t$  belegt und alle Stellen im Nachbereich von  $t$  frei sind, also  $M[t]M' \Leftrightarrow \bullet t \subseteq M$  und  $t\bullet \subseteq P \setminus M$ . Die Folgemarkierung  $M'$  ergibt sich dann durch  $M' = (M \setminus (\bullet t)) \cup (t\bullet)$ .



## 2.3 Konflikte und Nebenläufigkeit

### Konflikte

Ein Netz ist konfliktbehaftet, falls beim Schalten zweier verschiedener Transitionen die gleiche Stelle die Token für beide Transitionen liefert (Vorwärtskonflikt) oder aufnimmt (Rückwärtskonflikt). Konkret bedeutet diese Bedingung für den Vorwärtskonflikt, dass zwei verschiedene Paare  $(x, y)$  und  $(x, z)$  mit der selben Stelle  $x$  in der Flussrelation enthalten sind. Für einen Rückwärtskonflikt gilt diese Aussage mit den Paaren  $(y, x)$  und  $(z, x)$ .

#### Definition 2.4 (Konflikte in elementaren Netzen)

Sei  $N = (P, T, F)$  ein elementares Netz, dann gilt:

- $t_1 \neq t_2 \in T$  befinden sich in einem *Vorwärtskonflikt*, falls  $(\bullet t_1) \cap (\bullet t_2) \neq \emptyset$ , das heißt:  $\exists p \in P$  mit Nichtdeterminismus an der Stelle  $p$  (Abbildung 2.3).

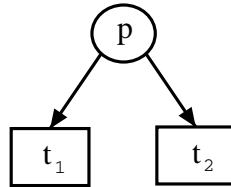


Abbildung 2.3: Vorwärtskonflikt

- $t_1 \neq t_2 \in T$  befinden sich in einem *Rückwärtskonflikt*, falls  $(t_1 \bullet) \cap (t_2 \bullet) \neq \emptyset$ , das heißt:  $\exists p \in P$  mit Rückwärtskonflikt an der Stelle  $p$  (Abbildung 2.4).

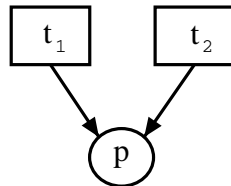


Abbildung 2.4: Rückwärtskonflikt

- $t_1 \neq t_2 \in T$  sind in *Konflikt*, falls sich  $t_1, t_2$  in einem Vorwärts- oder Rückwärtskonflikt befinden.

#### Beispiel 2.5

Bei „The Dining Philosophers“ (Abbildung 2.1) befinden sich die Transitionen *TAKE1* und *TAKE2* im Vorwärtskonflikt sowie *PUT1* und *PUT2* im Rückwärtskonflikt an der Stelle *FORK1*. Außerdem existieren noch drei weitere Vorwärts- und drei weitere Rückwärtskonflikte.

## Nebenläufigkeit

Sofern zwei Transitionen keine Stelle im Vor- und Nachbereich gemeinsam haben, sind sie unabhängig und können nebenläufig schalten. Neben der beliebigen Reihenfolge der Transitionen zueinander innerhalb einer Schaltsequenz ist auch das parallele, d.h. zeitgleiche Schalten möglich.

### Definition 2.6 (Nebenläufigkeit in elementaren Netzen)

Sei  $N = (P, T, F)$  ein elementares Netz. Die Transitionen  $t_1, t_2 \in T$  sind *nebenläufig*, falls  $(\bullet t_1 \cup t_1 \bullet) \cap (\bullet t_2 \cup t_2 \bullet) = \emptyset$ .

Nebenläufige Transitionen sind nicht im Konflikt und können deshalb parallel schalten, falls beide jeweils einzeln aktiviert sind.

### Beispiel 2.7

- „The Dining Philosophers“ (Abbildung 2.1): *TAKE1* und *TAKE3* sowie *TAKE2* und *TAKE4* sind nebenläufig. Andererseits sind *TAKE1* und *PUT1* nicht im Konflikt, aber auch nicht nebenläufig.
- Unendliche Netze (Abbildung 2.5, 2.6):  $N_1$  und  $N_2$  besitzen keine Konflikte. Je zwei Transitionen  $t_n$  und  $t_{n+m}$  mit  $m \geq 2$  sind nebenläufig.

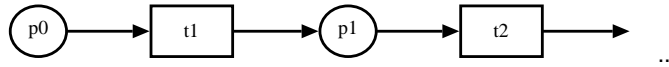


Abbildung 2.5: Unendliches Netz  $N_1$



Abbildung 2.6: Unendliches Netz  $N_2$

## Kausalrelation

Petrinetze können zyklenbehaftet sein. Um Prozessnetze zu beschreiben, bei denen unter anderem die Zyklenfreiheit vorausgesetzt wird, ist es notwendig, diese Eigenschaft genauer zu untersuchen. Die Kausalrelation eines Netzes beschreibt eine totale Ordnung über dessen Stellen und Transitionen. Sie ermöglicht es Zyklen zu lokalisieren.

### Definition 2.8 (Kausalrelation)

Sei  $N = (P, T, F)$  ein elementares Netz. Die *Kausalrelation*  $<_K$  von  $N$  für  $x, y \in P \cup T$  ist der transitive Abschluss von  $<_{K_0}$ , wobei

$$x <_{K_0} y, \text{ falls } x \in \bullet y.$$

Sie heißt

1. *finitär*, falls jedes  $y \in P \cup T$  nur endlich viele Vorgänger  $x$  mit  $x <_K y$  hat und
2. *azyklisch*, sofern kein  $x \in P \cup T$  mit  $x <_K x$  existiert.

Ist die Kausalrelation eines Netzes finitär oder azyklisch, so wird auch das Netz mit der entsprechenden Eigenschaft bezeichnet.

### Beispiel 2.9

- Das „Dining-Philosopher“-Netz (Abbildung 2.1) ist nicht azyklisch, aber finitär.
- Die Kausalrelation des Basisprozesses von „The Dining Philosophers“ (Abbildung 2.2) ist finitär und azyklisch.
- Die Netze  $N_1$  und  $N_2$  in Abbildung 2.5 und 2.6 sind azyklisch, aber nur  $N_1$  ist finitär.

## 2.4 Prozessnetze und Prozesse

Petrinetze in spezieller Form eignen sich zur Modellierung von Prozessen. Prozessnetze lassen sich folgendermaßen beschreiben:

### Definition 2.10 (Prozessnetz)

Sei  $N = (P, T, F)$  ein elementares Netz.  $N$  ist ein *deterministisches Prozessnetz* bzw. Prozessnetz, wenn gilt

1.  $N$  hat weder Vorwärts- noch Rückwärtskonflikte und
2. die Kausalrelation von  $N$  ist finitär und azyklisch.

Prozessnetze tragen noch eine weitere Bezeichnung, welche von der zugrunde liegende Kausalrelation herrührt: Kausalnetze, engl. Occurrence Nets. Bei nichtdeterministischen Prozessnetzen wird die Konfliktfreiheit bezüglich Vorwärtskonflikten nicht gefordert.

### Beispiel 2.11

Das kombinierte Prozessnetz von „The Dining Philosophers“ (Abbildung 2.7) ist ein Prozessnetz. Es besitzt echte Nebenläufigkeit (True Concurrency). *TAKE1* und *TAKE3* können zum einen in beliebiger Reihenfolge zueinander schalten, wodurch sequentielle Nebenläufigkeit (Interleaving) von äquivalenten Schaltsequenzen erreicht wird. Auf der anderen Seite ist aber auch das gleichzeitige und somit parallele Schalten möglich.

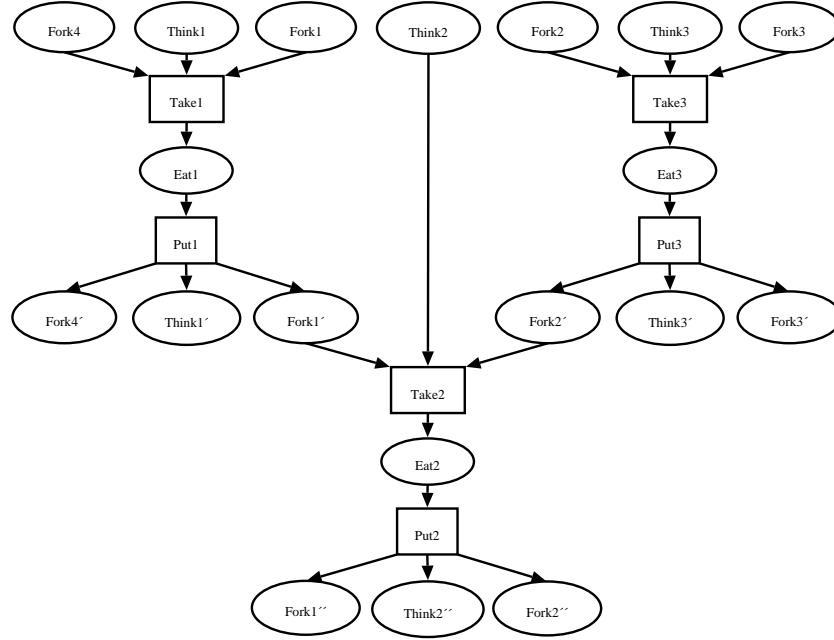


Abbildung 2.7: Kombiniertes Prozessnetz der „Dining Philosophers“

## 2.5 Schaltverhalten von Prozessnetzen

Charakteristisch für Prozessnetze ist ihr besonderes Schaltverhalten. Zur näheren Beschreibung benötigen wir die Begriffe Ein- und Ausgangsstellen. Bei einem elementaren Netz mit den Stellen  $P$  bezeichnet:

- die Menge  $E = \{p \in P \mid \bullet p = \emptyset\}$  die *Eingangsstellen* und
- die Menge  $A = \{p \in P \mid p \bullet = \emptyset\}$  die *Ausgangsstellen* des Netzes.

Der Satz über das Schaltverhalten besagt anschaulich:

Falls alle Eingangsstellen in einem endlichen Prozessnetz markiert sind, dann lassen sich alle Transitionen in geeigneter Reihenfolge jeweils einmal schalten, so dass danach alle Ausgangsstellen markiert sind. Ein ähnlicher Satz gilt auch für (abzählbar) unendliche Prozessnetze.

### Satz 2.12 (Schaltverhalten von Prozessnetzen)

Sei  $N = (P, T, F)$  eine endliches (deterministisches) Prozessnetz mit den Eingangsstellen  $E$  und den Ausgangsstellen  $A$  sowie der intialen Markierung  $M_0 = E$ .

Dann gilt: für jede totale Ordnung

$$t_1 < t_2 < \dots < t_n$$

der Transitionen  $T = \{t_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ , die mit der Kausalrelation  $<_K$  von  $N$  verträglich ist, d.h.:

$$t_i <_K t_j \Rightarrow t_i < t_j \quad (i, j \in \{1, \dots, n\}),$$

gibt es in  $N$  genau eine Schaltsequenz

$$M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} M_2 \xrightarrow{t_3} \dots \xrightarrow{t_n} M_n,$$

so dass die Transitionen  $t_i \in T$  in der vorgegebenen Reihenfolge schalten und die Endmarkierung  $M_n = A$  ist, d.h. genau die Ausgangsstellen des Netzes enthält.

### Beispiel 2.13

Das kombinierte Prozessnetz von „The Dining Philosophers“ (Abbildung 2.7) hat sechs verschiedene Schaltsequenzen, bei denen jede Transition genau einmal schaltet (vgl. Beispiel 2.1).

**Beweis:** Die totale Ordnung gibt die Reihenfolge vor, in der die Transitionen schalten. Zu zeigen bleibt, dass diese Schaltsequenz realisierbar ist:

$$E = M_0 \xrightarrow{t_1} \dots \xrightarrow{t_{k-1}} M_{k-1} \xrightarrow{t_k} M_k \xrightarrow{t_{k+1}} \dots \xrightarrow{t_n} M_n = A$$

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $n = 0$  ergibt sich:  $E = P = M_0 \xrightarrow{\lambda} M_0 = P = A$ , da  $T = \emptyset$ . Somit gilt der Satz über Prozessnetze für  $n = 0$ .

Für  $n > 0$  genügt es, die Gültigkeit für einen beliebigen Schaltschritt der Sequenz an der Stelle  $k \in \mathbb{N}$ , mit  $0 < k \leq n$  zu zeigen. Dazu wird für jeden Schaltschritt  $k$  ein neues Netz  $N_k$  konstruiert, wobei  $N_k$  aus  $N_{k-1}$  durch Wegnehmen der Transition  $t_k$  und der Stellen im Vorbereich von  $t_k$  entsteht, also

$$\begin{aligned} N_0 &= (P_0, T_0, F_0) = N \\ N_k &= (P_k, T_k, F_k) \text{ mit} \\ P_k &= P_{k-1} \setminus (\bullet t_k), \\ T_k &= T_{k-1} \setminus \{t_k\} \text{ und} \\ F_k &= F_{k-1} \cap ((P_k \times T_k) \uplus (T_k \times P_k)). \end{aligned}$$

Seien weiter  $E_k$  und  $A_k$  die Ein- und Ausgangsstellen des Netzes  $N_k$ . Ein solches Netz ist wiederum ein Prozessnetz und erfüllt die Voraussetzungen für die Anwendung des Satzes. Mit den beiden folgenden Sätzen folgt daraus seine allgemeine Gültigkeit.

### Satz 2.14

$t_k$  ist in  $N_{k-1}$  unter  $M_{k-1} = E_{k-1}$  aktiviert, d.h.  $\bullet t_k \subseteq M_{k-1}$  und  $t_k \bullet \subseteq P_{k-1} \setminus E_{k-1}$  mit dem Schaltschritt:  $M_{k-1} \xrightarrow{t_k} M_k$ .

### Satz 2.15

$N_k$  ist ein Teilnetz von  $N_{k-1}$  und damit ein endliches, deterministisches Prozessnetz mit den Eingangsstellen  $E_k$ , den Ausgangsstellen  $A_k$  und der initialen Markierung  $M_k = E_k$ .  $M_k$  erfüllt die Voraussetzungen des Satzes mit der totalen Ordnung  $t_{k+1} < t_{k+2} < \dots < t_n$ . Ferner sind  $E_k = (E_{k-1} \setminus (\bullet t_k)) \cup (t_k \bullet)$  und  $A_k = A$ .

Nach  $n \geq 1$  Schritten erhalten wir die Teilnetze  $N_1, \dots, N_n$  von  $N$  mit der Schaltsequenz  $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} M_2 \xrightarrow{t_3} \dots \xrightarrow{t_n} M_n$ , wobei  $M_n = E_n$  und  $A_n = A$ . Wegen  $T_n = \emptyset$  folgt  $E_n = P_n = A_n$  und damit  $M_n = E_n = A_n = A$ .  $\square$

**Beweis:** [Satz 2.14]

(a)  $\bullet t_k \subseteq M_{k-1} = E_{k-1}$

Sei  $p \in \bullet t_k$  und damit  $p <_K t_k$ . Wäre  $\bullet p \neq \emptyset$ , dann würde ein  $t \in T_{k-1}$  existieren, so dass  $t <_K p$ , und damit  $t <_K p <_K t_k$  wäre. Da  $<$  mit  $<_K$  verträglich ist, gilt  $t < t_k$ . Das ist ein Widerspruch, da  $<_K$  azyklisch bzw.  $t_k$  kleinstes Element bzgl.  $<$  ist. Demnach ist  $\bullet p = \emptyset$ , d.h.  $p \in E_{k-1} = M_{k-1}$ .

(b)  $t_k \bullet \subseteq P_{k-1} \setminus M_{k-1}$

Sei  $p \in t_k \bullet$ , dann ist  $p \notin M_{k-1} = E_{k-1}$ . Denn für  $p \in E_{k-1}$  gilt auch  $\bullet p = \emptyset$ , was im Widerspruch zu  $p \in t_k \bullet$  und damit zu  $t_k \in \bullet p$  steht.

□

**Beweis:** [Satz 2.15]

(a)  $N_k$  ist Teilnetz von  $N_{k-1}$

Es genügt zu zeigen, dass nach Wegfall der Stellen aus  $\bullet t_k$  in  $P_k$  die restlichen Transitionen  $t_{k+1}, \dots, t_n$  noch vollständige Vor- und Nachbereiche haben, d.h. für alle  $p \in \bullet t_k$  und alle  $i \in \{k+1, \dots, n\}$  gilt  $p \notin \bullet t_i$  und  $p \notin t_i \bullet$ .

**Gegenannahme:** Es existiert ein  $i \in \{k+1, \dots, n\}$  mit  $p \in \bullet t_i$  oder  $p \in t_i \bullet$ .

Im ersten Fall ist  $p \in (\bullet t_k) \cap (\bullet t_i)$  (Vorwärtskonflikt, Widerspruch).

Der zweite Fall würde bedeuten, dass  $t_i <_K p <_K t_k$  und damit  $t_i <_K t_k$ . Wegen der Verträglichkeit mit der totalen Ordnung ergibt sich  $t_i < t_k$  und somit wegen  $i \geq k+1$  erneut ein Widerspruch.

Damit ist  $N_k$  als Teilnetz von  $N_{k-1}$  ein endliches, deterministisches Prozessnetz.

(b)  $E_k = (E_{k-1} \setminus (\bullet t_k)) \cup (t_k \bullet)$

„ $\subseteq$ “ Sei  $p \in E_k$ , d.h.  $\bullet p = \emptyset$  in  $N_k$  und  $p \in P_k$ , und damit  $p \notin (\bullet t_k)$  in  $N_{k-1}$  (wegen  $P_k = P_{k-1} \setminus (\bullet t_k)$ ).

**1. Fall:**  $\bullet p = \emptyset$  in  $N_{k-1}$ , also  $p \in E_{k-1}$

$\Rightarrow p \in E_{k-1} \setminus (\bullet t_k)$

$\Rightarrow p \in (E_{k-1} \setminus (\bullet t_k)) \cup (t_k \bullet)$

**2. Fall:**  $\bullet p \neq \emptyset$  in  $N_{k-1}$

$\Rightarrow \exists t \in T_{k-1} : t \in (\bullet p)$

$\Rightarrow t = t_k$  (wegen  $\bullet p = \emptyset$  in  $N_k$  und  $T_{k-1} = T_k \cup \{t_k\}$ )

$\Rightarrow t_k \in (\bullet p)$  bzw.  $p \in (t_k \bullet)$

$\Rightarrow p \in (E \setminus (\bullet t_k)) \cup (t_k \bullet)$

„ $\supseteq$ “ Sei  $p \in (E_{k-1} \setminus (\bullet t_k)) \cup (t_k \bullet)$

**1. Fall:**  $p \in E_{k-1} \setminus (\bullet t_k)$

$\Rightarrow \bullet p = \emptyset$  in  $N_{k-1}$  und somit auch in  $N_k$ , da  $T_k \subseteq T_{k-1}$ .

Außerdem ist  $p \in P_k$  (wegen  $P_k = P_{k-1} \setminus (\bullet t_k)$  und  $p \notin \bullet t_k$ )

$\Rightarrow p \in E_k$ .

**2. Fall:**  $p \in t_k \bullet$

$\Rightarrow p \notin \bullet t_k$  (sonst Zyklus, Widerspruch zur Definition eines Prozessnetzes)  $\Rightarrow p \in P_k$   
 Annahme:  $p \notin E_k$ , d.h.  $\exists t \in (\bullet p)$  in  $N_k$  und  $t \neq t_k$   
 $\Rightarrow p \in (t \bullet) \cap (t_k \bullet)$  Rückwärtskonflikt (Widerspruch)  
 also  $p \in E_k$

(c)  $A_k = A_{k-1}$

„ $\subseteq$ “ Sei  $p \in A_k$ , d.h.  $p \in P_k = P_{k-1} \setminus (\bullet t_k)$  und  $p \bullet = \emptyset$  in  $N_k$ .  
 $\Rightarrow p \in P_{k-1}$  und  $p \notin \bullet t_k$   
 $\Rightarrow p \bullet = \emptyset$  in  $N_{k-1}$  (wegen  $T_{k-1} = T_k \cup \{t_k\}$ )  
 $\Rightarrow p \in A_{k-1}$   
 „ $\supseteq$ “ Sei  $p \in A_{k-1}$ , also  $p \in P_{k-1}$  und  $p \bullet = \emptyset$  in  $N_{k-1}$ .  $\Rightarrow p \notin \bullet t_k$   
 $\Rightarrow p \in P_k = P_{k-1} \setminus (\bullet t_k)$   
 $\Rightarrow p \bullet = \emptyset$  in  $N_k$  (wegen  $T_k \subseteq T_{k-1}$ )  
 $\Rightarrow p \in A_k$

Daraus folgt  $A_k = A$  für alle  $k = 0, \dots, n$ .

(d)  $M_k = E_k$

Nach Konstruktion gilt  $M_k = (M_{k-1} \setminus (\bullet t_k)) \cup (t_k \bullet)$ . Nach Voraussetzung gilt  $M_{k-1} = E_{k-1}$ , und demzufolge wegen (b)  $M_k = (E_{k-1} \setminus (\bullet t_k)) \cup (t_k \bullet) = E_k$ .

□

## 2.6 Prozesse und Netzmorphismen

Für die Formalisierung der Prozesse von S/T-Netzen wird außer den nun bekannten Prozessnetzen noch das Konzept der Netzmorphismen benötigt. Ein Netzmorphismus  $\pi : PN \rightarrow N$  von einem Prozessnetz  $PN$  in ein S/T-Netz  $N$  bildet die Stellen bzw. Transitionen von  $PN$  so auf die Stellen bzw. Transitionen von  $N$  ab, dass die Vor- und Nachbereiche der Transitionen verträglich sind. Ein Prozessnetz  $PN$  zusammen mit einem Netzmorphismus  $\pi$  wird als Prozess des Netzes  $N$  bezeichnet.

### Beispiel 2.16

Das kombinierte Prozessnetz in Abbildung 2.7 kann auf das S/T-Netz der Dining Philosophers in Abbildung 2.1 abgebildet werden. Der Netzmorphismus  $\pi$  wird definiert durch  $\pi(p) = \pi(p') = \pi(p'') = p$  für die Stellen und  $\pi(t) = t$  für alle Transitionen. Es werden also zum Beispiel die Stellen  $Fork1$ ,  $Fork1'$  und  $Fork1''$  im kombinierten Prozessnetz auf die Stelle  $Fork1$  abgebildet. Dieser Prozess stellt das (parallele) Essen der Philosophen 1 und 3 und anschließend das Essen des 2. Philosophen im Ausgangsnetz dar.

Im Folgenden werden wie Netzmorphismen nutzen, um die Einbettung des Prozessnetzes in das Ausgangsnetz zu beschreiben.

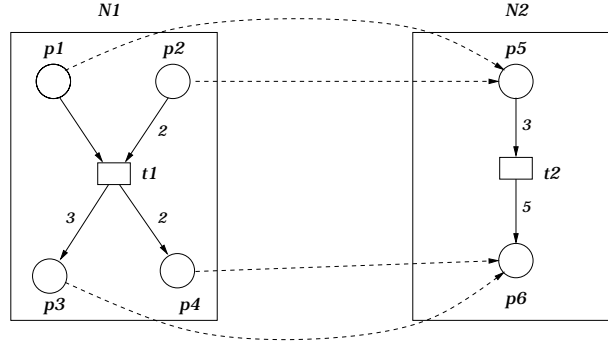


Abbildung 2.8: Beispiel eines S/T-Netzmorphismus

**Definition 2.17 (S/T-Netzmorphismen)**

Ein S/T-Netzmorphismus  $f : N \rightarrow N'$  für S/T-Netze  $N = (P, T, W)$  und  $N' = (P', T', W')$  ist ein Tupel  $f = (f_P, f_T)$  mit einer Stellen-Abbildung  $f_P : P \rightarrow P'$  und einer Transitions-abbildung  $f_T : T \rightarrow T'$ , so dass

1.  $\forall t \in T, p' \in P' : W'(p', f_T(t)) = \sum_{p \in f_P^{-1}(p')} W(p, t)$
2.  $\forall t \in T, p' \in P' : W'(f_T(t), p') = \sum_{p \in f_P^{-1}(p')} W(t, p)$  und

Zunächst definieren wir noch, wie Markierungen durch die Fortsetzung von  $f$  abgebildet werden.

**Definition 2.18 (Fortgesetzter Morphismus)**

Gegeben S/T-Netze  $N = (P, T, W)$  und  $N' = (P', T', W')$  und ein S/T-Morphismus  $f : N \rightarrow N'$  mit  $f = (f_P, f_T)$  dann wird eine Markierung  $M : P \rightarrow \mathbb{N}_0$  auf  $f_P(M) : P' \rightarrow \mathbb{N}_0$  abgebildet, wobei gilt:

$$\forall p' \in P' : f_P(M)(p') := \sum_{p \in f_P^{-1}(p')} M(p)$$

**Beispiel 2.19**

Betrachten wir die beiden S/T-Netze  $N_1$  und  $N_2$  in Abbildung 2.8. Dann bilden  $f_P := \{p1 \mapsto p5, p2 \mapsto p5, p3 \mapsto p6, p4 \mapsto p6\}$  und  $f_T := \{t1 \mapsto t2\}$  einen S/T-Netzmorphismus nach Definition 2.17. Der Morphismus "verklebt" hier gewissermaßen jeweils zwei Stellen zu einer. Die Kantengewichte zur benachbarten Transition werden dabei addiert. Darüber hinaus sind in Abbildung 2.9 zwei weitere Morphismen dargestellt.

Dagegen sind in Abbildung 2.10 jeweils zwei S/T-Netze dargestellt, zwischen denen kein Morphismus (in keine Richtung) existiert. Unabhängig davon, wie die Stellen und Transitionen abgebildet würden, wäre jeweils die Gleichheit des Bildes des Vorbereichs einer Transition und dem Vorbereich ihres Bildes verletzt, bzw. die Veträglichkeit bzgl. des Nachbereichs.



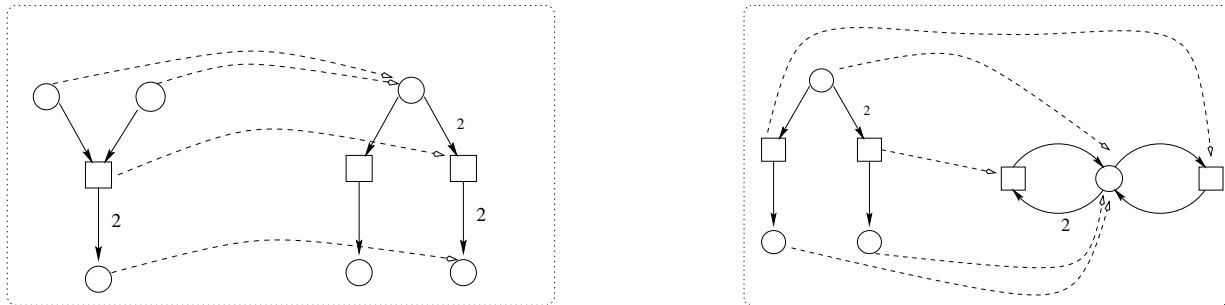


Abbildung 2.9: Weitere Beispiele von S/T-Netzmorphismen

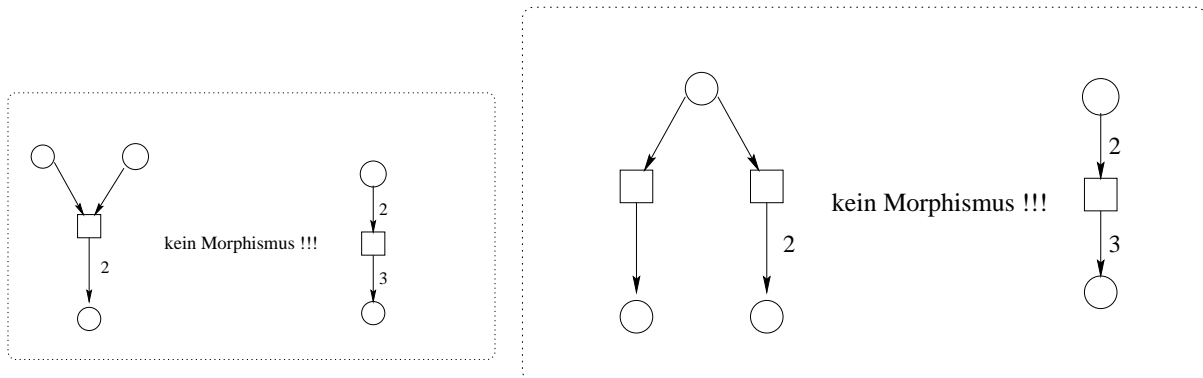


Abbildung 2.10: Keine S/T-Netzmorphismen

**Satz 2.20 (Morphismen bewahren Schaltverhalten)**

Für jeden Schaltschritt  $M_1 \xrightarrow{t} M_2$  in  $N$  mit

- (a)  $\forall p \in P: M_1(p) \geq W(p, t)$
- (b)  $\forall p \in P: M_2(p) = M_1(p) - W(p, t) + W(t, p)$ .

gibt es einen Schaltschritt  $f_P(M_1) \xrightarrow{f_T(t)} f_P(M_2)$  in  $N'$  mit

- (d)  $\forall p' \in P': f_P(M_1)(p') \geq W'(p', f_T(t))$  und
- (e)  $\forall p' \in P': f_P(M_2)(p') = f_P(M_1)(p') - W'(p', f_T(t)) + W'(f_T(t), p')$ .

**Beweis:**

für (a) $\implies$ (d):

$$\begin{aligned} \forall p' \in P': f_P(M_1)(p') &= \sum_{p \in f_P^{-1}(p')} M_1(p) \\ &\geq \sum_{p \in f_P^{-1}(p')} W(p, t) \\ &= W'(p', f_T(t)) \end{aligned}$$

für (b) $\implies$ (e):

$$\begin{aligned} \forall p' \in P': f_P(M_2)(p') &= \sum_{p \in f_P^{-1}(p')} M_2(p) \\ &= \sum_{p \in f_P^{-1}(p')} (M_1(p) - W(p, t) + W(t, p)) \\ &= \sum_{p \in f_P^{-1}(p')} M_1(p) - \sum_{p \in f_P^{-1}(p')} W(p, t) \\ &\quad + \sum_{p \in f_P^{-1}(p')} W(t, p) \\ &= f_P(M_1)(p') - W'(p', f_T(t)) + W'(f_T(t), p') \end{aligned}$$

□

Darüber hinaus müssen diese Morphismen für markierte S/T-Netze erweitert werden, indem die Anfangsmarkierung  $M_0 : P \rightarrow \mathbb{N}_0$  des Netzes  $N$  zur Anfangsmarkierung  $M'_0 : P' \rightarrow \mathbb{N}_0$  des Netzes  $N'$  in Beziehung gesetzt wird. Dabei werden zusätzliche Token auf „neuen“ Stellen erlaubt.

**Definition 2.21 (Morphismen für markierte S/T-Netze)**

Gegeben markierte S/T-Netze  $N_{M_0} = (P, T, W, M_0)$  und  $N'_{M'_0} = (P', T', W', M'_0)$  und ein S/T-Morphismus  $f : N \rightarrow N'$  mit  $f = (f_P, f_T)$  dann muss für die Anfangsmarkierungen gelten, dass:

$$\forall p \in P: M'_0(f_P(p)) = \sum_{\hat{p} \in f_P^{-1}(f_P(p))} M_0(\hat{p})$$

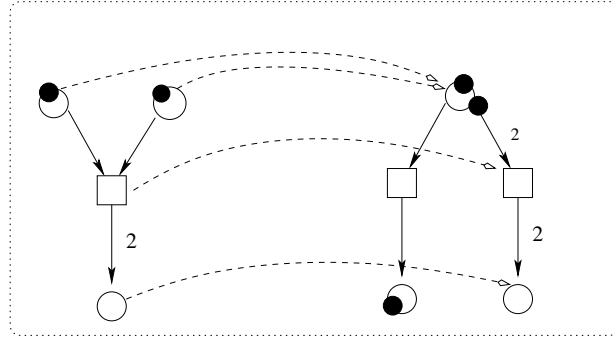


Abbildung 2.11: Beispiel eines Netzmorphismus für markierte S/T-Netze

### Beispiel 2.22

In Abbildung 2.11 ist ein Morphismen für markierte S/T-Netze dargestellt.

### Bemerkung 2.23

Die Bewahrung des Schaltverhaltens impliziert unmittelbar, dass jeder S/T-Netzmorphismus  $f: N \rightarrow N'$  einen Graph-Homomorphismus  $MG(f): MG(N) \rightarrow MG(N')$  induziert, der Markierungen/Knoten mittels  $f_P$  und Schaltschritte/Kanten mittels  $f_T$  und  $f_P$  übersetzt.

In dem Fall markierter S/T-Netze kann ebenfalls ein Erreichbarkeitsgraph-Homomorphismus konstruiert werden, der diese zusätzlichen Token allen Markierungen von  $MG(N)$  hinzufügt.

Nun wollen wir die Beziehung von S/T-Netzen zu Prozessnetzen untersuchen. Wenn wir ein Prozessnetz  $PN$  in als S/T-Netz betrachten, können wir einen Prozess als S/T-Netzmorphismus von  $PN$  in ein S/T-Netz  $N$  definieren. Dafür müssen wir zunächst sicher stellen, dass in dem Prozessnetz – auch als S/T-Netz ohne Kapazitäten aufgefasst – jede Stelle höchstens ein Token habe kann.

### Satz 2.24 (Prozessnetz als S/T-Netz)

Sei  $PN = (P, T, F)$  ein Prozessnetz, dann gibt es das entsprechende S/T-Netz  $PN_{ST} =$

$$(P, T, W) \text{ mit: } W(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für alle } (x, y) \in F \\ 0 & \text{für alle } (x, y) \notin F \end{cases}$$

Für alle erlaubten Anfangsmarkierungen – also solche die einen Teil der Eingangsstellen mit **einem** Token belegen – mit  $M_0(p) = 1$  für  $p \in E' \subseteq E$  und  $M_0(p) = 0$  für  $p \notin E'$  und für alle  $M \in [M_0]$  gilt:  $M(p) \leq 1$  für alle  $p \in P$ .

**Beweis:** Als Übung. □

Satz 2.20 gewährleistet dann, dass das Durchschalten des Prozessnetzes einer Schaltsequenz in  $N$  entspricht. Das Prozessnetz simuliert also eine Schaltsequenz in  $N$ .

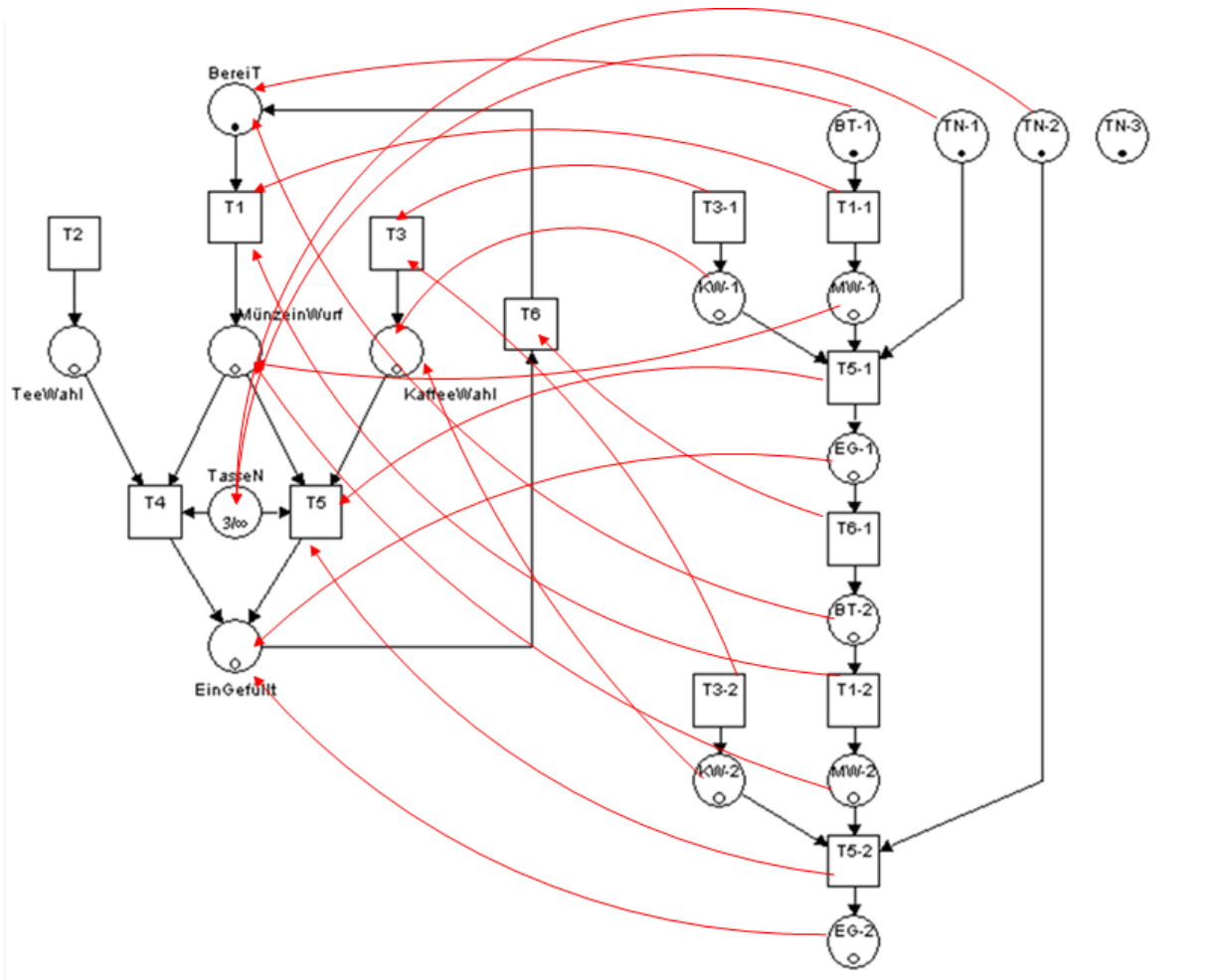


Abbildung 2.12: Ein Prozess

### Definition 2.25 (Prozess eines S/T-Netzes)

Sei  $N = (P, T, W)$  ein S/T-Netz und  $PN$  ein Prozessnetz, wobei wir das elementare Netz  $PN$  als S/T-Netz auffassen. Ein Prozess von  $N$  ist ein S/T-Netz Morphismus  $\pi : PN \rightarrow N$ .

### Beispiel 2.26

Schon in Beispiel 2.16 haben wir einen Prozess für das S/T-Netz der Dining Philosophers vorgestellt.

### Beispiel 2.27

In Abbildung 2.12 ist ein Prozess eines S/T-Netzes dargestellt. Die roten Pfeile illustrieren den Netzmorphismus  $\pi : PN \rightarrow N$ .

# Kapitel 3

## Nebenläufigkeit, Parallelität und Netzkomplementierung

In diesem Kapitel behandeln wir in Abschnitt 3.1 die zentralen Konzepte Konflikte, Nebenläufigkeit und Parallelität für S/T-Netze und vergleichen sie in Abschnitt 3.2 mit den entsprechenden Konzepten für elementare Netze. Die Netzkomplementierung im Abschnitt 1.5 gestattet es, zu jedem Netz mit beschränkten Kapazitäten ein äquivalentes Netz mit unbeschränkten Kapazitäten zu konstruieren.

### 3.1 Nebenläufigkeit und Parallelität in S/T-Netzen

In der Theorie paralleler und nebenläufiger Systeme gibt es zwei grundsätzliche Methoden, parallele Prozesse formal zu beschreiben. Die einfachere von beiden ist vielleicht der Implementierung von Multitasking-Betriebssystemen auf Rechnern mit von Neumann-Architektur abgeschaut und besteht darin, parallele Prozesse durch beliebige Verschachtelung ihrer Einzelaktionen zu simulieren. Dieses *Interleaving-Modell* führt also Parallelität auf Nichtdeterminismus zurück; einem parallelen Ablauf in der Realität entspricht eine Menge von Interleavingsequenzen im Modell. Zwei Einzelaktionen gelten als nebenläufig oder unabhängig, wenn sie mit dem gleichen Resultat in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden können. Betrachten wir das Netz aus Abbildung 1.4, so gilt dies z.B. für das Schalten der Transitionen  $T1s$  und  $T1l$  bei der im Bild angegebenen Markierung.

Nach dem Schalten der beiden Transitionen sind sie unter der resultierenden Markierung  $M_3$  wieder aktiviert. Das weitere Schalten von  $T1s$  ( $M_3[T1s]M_4$ ) und  $T1l$  ( $M_3[T1l]M_5$ ) ist nicht unabhängig, die Transitionen stehen in einem *Konflikt*. Das Schalten der einen Transition hat zur Folge, dass die andere anschließend nicht schalten kann, und umgekehrt.

#### Definition 3.1 (Konflikt)

Für eine Markierung  $M$  stehen zwei Transitionen  $t_1$  und  $t_2$  eines S/T-Netzes im *Konflikt* miteinander gdw. :

- $t_1$  und  $t_2$  sind  $M$ -aktiviert (siehe Definition 1.6.1) und

- $\exists p \in \bullet t_1 \cap \bullet t_2 : M(p) < W(p, t_1) + W(p, t_2)$

Das heißt, zwei Transitionen stehen im Konflikt, wenn beide aktiviert sind, und nach dem Schalten einer von beiden die andere nicht mehr aktiviert ist.

Der Grund für die Vertauschbarkeit des Schaltens von  $T1s$  und  $T1l$  aus dem Beispiel liegt offensichtlich darin, dass die betreffenden Transitionen weder um die Token in ihrem Vorbereich noch um freie Kapazitäten in ihrem Nachbereich konkurrieren müssen. Zwei Schaltschritte sind also *nebenläufig*, wenn jede Transition über „eigene Token“ im Vorbereich und „eigenen Freiraum“ im Nachbereich verfügt.

### Definition 3.2 (Nebenläufigkeit)

Für eine Markierung  $M$  sind zwei Transitionen  $t_1$  und  $t_2$  eines S/T-Netzes *nebenläufig* gdw. :

- $t_1$  und  $t_2$  sind  $M$ -aktiviert (siehe Definition 1.6.1) und
- $\forall p \in \bullet t_1 \cap \bullet t_2 : M(p) \geq W(p, t_1) + W(p, t_2)$

Das heißt, zwei Transitionen sind nebenläufig für eine Markierung  $M$ , wenn beide aktiviert sind und nicht im Konflikt stehen.

Wann können nun zwei Transitionen bei einer Markierung  $M$  in beliebiger Reihenfolge schalten? Die Antwort auf dieser Frage wird im folgenden Satz gegeben. Diese Eigenschaft wird als *Interleaving* oder auch als lokale Church-Rosser-Eigenschaft für das Nacheinanderschalten von zwei unabhängigen Transitionen  $t_1$  und  $t_2$  bezeichnet.

### Satz 3.3 (Nebenläufigkeit)

Wenn für eine Markierung  $M$  zwei Transitionen  $t_1$  und  $t_2$  eines S/T-Netzes nebenläufig sind, dann gilt auch:

$$\forall p \in P : M(p) \geq W(p, t_1) + W(p, t_2)$$

**Beweis:** 1. Wir zeigen, dass  $\forall p \in P : M(p) \geq W(p, t_1) + W(p, t_2)$ .

$\forall p \in \bullet t_1 \cap \bullet t_2 :$  trivial

$\forall p \in \bullet t_1 \setminus \bullet t_2 :$  Aus  $M(p) \geq W(p, t_1)$  und  $W(p, t_2) = 0$   
folgt  $M(p) \geq W(p, t_1) + W(p, t_2)$

□

$\forall p \in \bullet t_2 \setminus \bullet t_1 :$  symmetrisch

$\forall p \notin \bullet t_1 \cup \bullet t_2 :$  Aus  $W(p, t_1) = W(p, t_2) = 0$  folgt  $M(p) \geq W(p, t_1) + W(p, t_2)$

### Satz 3.4 (Interleaving)

Wenn für eine Markierung  $M$  zwei Transitionen  $t_1$  und  $t_2$  eines S/T-Netzes nebenläufig sind, dann können sie mit dem gleichen Resultat in beliebiger Reihenfolge schalten (vergleiche Abbildung 3.1).

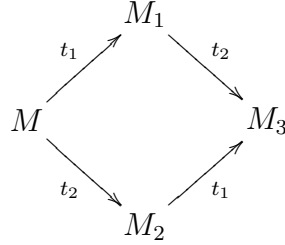


Abbildung 3.1: Interleaving

**Beweisübersicht** Wir zeigen:

1. sowohl  $t_1$  als auch  $t_2$  können unter der Markierung  $M$  schalten,
2. nach Schalten von  $t_1$  ist  $t_2$  aktiviert,
3. nach Schalten von  $t_2$  ist  $t_1$  aktiviert,
4. das Schalten von  $t_1$  und  $t_2$  in beliebiger Reihenfolge ergibt die gleiche Markierung.

**Beweis:** **Teil 1.** folgt direkt aus Definition 3.2, da  $t_1$  und  $t_2$   $M$ -aktiviert sind

**Teil 2.** Sei  $M[t_1]M_1$ , dann gilt  $\forall p \in \bullet t_2$  :

$$\begin{aligned}
 M_1(p) &= M(p) - W(p, t_1) + W(t_1, p) && \text{(Definition Folgemarkierung)} \\
 &\geq W(p, t_1) + W(p, t_2) - W(p, t_1) + W(t_1, p) && \text{(Satz 3.3)} \\
 &= W(p, t_2) + W(t_1, p) \\
 &\geq W(p, t_2) && (W(t_1, p) \geq 0)
 \end{aligned}$$

**Teil 3.** symmetrisch

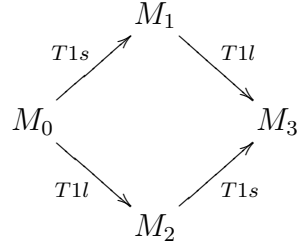
**Teil 4.** Sei  $M[t_1]M_1[t_2]M_3$  und  $M[t_2]M_2[t_1]M'_3$  dann gilt  $\forall p \in P$  :

$$\begin{aligned}
 M_3(p) &= M_1(p) - W(p, t_2) + W(t_2, p) && \text{(Definition Folgemarkierung } M_3) \\
 &= M(p) - W(p, t_1) + W(t_1, p) \\
 &\quad - W(p, t_2) + W(t_2, p) && \text{(Definition Folgemarkierung } M_1) \\
 &= M_2(p) - W(p, t_1) + W(t_1, p) && \text{(Definition Folgemarkierung } M_2) \\
 &= M'_3(p) && \text{(Definition Folgemarkierung } M'_3)
 \end{aligned}$$

□

### Beispiel 3.5

Für das S/T-Netz in Abbildung 1.4 erhalten wir das folgende Interleaving-Diagramm.



Das zweite Modell paralleler bzw. nebenläufiger Systeme wird, in Abgrenzung vom Obigen, als echte Nebenläufigkeit bezeichnet. Es zeichnet sich dadurch aus, dass sich die Parallelität realer Prozesse im Modell direkt widerspiegelt; im Falle der S/T-Netze z.B. durch gleichzeitiges Schalten von Transitionen.

**Definition 3.6 (Parallelschaltung)**

Sei  $N$  ein S/T-Netz mit Markierung  $M$  und Transitionen  $t_1, t_2 \in T$ . Die parallele Transition  $t_1 + t_2$  heißt  $M$ -aktiviert, falls  $\forall p \in P$  gilt:

$$M(p) \geq W(p, t_1) + W(p, t_2)$$

Die parallele Transition  $t_1 + t_2$  kann unter der Markierung  $M$  schalten (*Parallelschaltung*), falls  $t_1 + t_2$   $M$ -aktiviert ist. In diesem Fall ist die Folgemarkierung  $M'$  definiert durch

$$M'(p) = M(p) - W(p, t_1) - W(p, t_2) + W(t_1, p) + W(t_2, p) \quad (\forall p \in P)$$

Die Parallelschaltung wird bezeichnet mit  $M[t_1 + t_2]M'$  oder  $M \xrightarrow{t_1+t_2} M'$ .

Wir können nun folgenden Satz beweisen, mit dem gezeigt wird, dass die Konzepte von Nebenläufigkeit und Parallelität für S/T-Netze äquivalent sind.

**Satz 3.7 (Äquivalenz von Nebenläufigkeit und Parallelität)**

Sei  $N$  ein S/T-Netz mit Markierung  $M$  und Transitionen  $t_1, t_2 \in T$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent, wobei  $M_3 = M'$  gilt.

1.  $t_1$  und  $t_2$  sind nebenläufig für  $M$  mit dem Interleaving-Diagramm in Abbildung 3.1.
2. Die parallele Transition  $t_1 + t_2$  ist  $M$ -aktiviert mit Parallelschaltung  $M \xrightarrow{t_1+t_2} M'$ .

**Beweis:**

**1.  $\Rightarrow$  2.** Nach Satz 3.3 folgt aus der Nebenläufigkeit von  $t_1$  und  $t_2$  für  $M$ , dass  $t_1 + t_2$   $M$ -aktiviert ist. Nach dem Beweis von Satz 3.4 gilt  $M_3 = M'$ .

**2.  $\Rightarrow$  1.** Da  $t_1 + t_2$   $M$ -aktiviert ist, sind auch  $t_1$  und  $t_2$  einzeln  $M$ -aktiviert.  $t_1$  und  $t_2$  sind nebenläufig, denn es gilt:

$$\forall p \in \bullet t_1 \cap \bullet t_2 : M(p) \geq W(p, t_1) + W(p, t_2)$$

Darüberhinaus gilt  $M_3 = M'$ . □



### Beispiel 3.8

Für das S/T-Netz in Abbildung 1.4 gilt  $M_0 \xrightarrow{T1s+T1l} M' = M_3$ .

Durch die Möglichkeit parallelen Schaltens ergibt sich natürlich ein größerer Markierungsgraph als im sequentiellen Fall. Er enthält zwar die gleichen Knoten wie der sequentielle, d.h. paralleles Schalten liefert keine neuen erreichbaren Markierungen, aber dafür zusätzliche Kanten. Eine allgemeinere Definition des parallelen Schaltens von mehreren Transitionen und des entsprechenden Markierungsgraphen verschieben wir auf Kapitel 5, wo sich beides in natürlicher Weise aus der Matrix-Darstellung für S/T-Netze ergibt.

## 3.2 Vergleich mit Konzepten in Elementaren Netzen

Da jedes elementare Netz als ein S/T-Netz aufgefasst werden kann, müssen wir uns folgende Frage stellen: Ist die Definition für Nebenläufigkeit in einem S/T-Netz konsistent mit der Definition für Nebenläufigkeit in einem elementaren Netz? Der Begriff der Nebenläufigkeit für ein S/T-Netz in Definition 3.2 ist abhängig von einer bestimmten Markierung  $M$ . Die Definition für Nebenläufigkeit in einem elementaren Netz wurde aber unabhängig von einer bestimmten Markierung des elementaren Netzes formuliert. Wir können aber folgenden Satz beweisen.

### Satz 3.9 (Äquivalenz von Nebenläufigkeitskonzepten)

Sei  $N$  ein elementares Netz ohne Schleifentransitionen, wobei eine Transition  $t$  Schleifentransition heißt, falls gilt:  $\bullet t \cap t \bullet \neq \emptyset$ . Dann gilt: es existiert eine Markierung  $M$ , für die  $t_1$  und  $t_2$  nebenläufig sind  $\Leftrightarrow t_1$  und  $t_2$  sind nebenläufig im Sinne elementarer Netze, d.h.  $(\bullet t_1 \cup t_1 \bullet) \cap (\bullet t_2 \cup t_2 \bullet) = \emptyset$ .

**Beweis:** Erinnern wir uns daran, dass in einem elementaren Netz immer folgendes gilt:

$$\forall p \in P : K(p) = 1 \quad \text{und} \quad \forall f \in F : W(f) = 1$$

„ $\Rightarrow$ “ Wir müssen zeigen, dass  $(\bullet t_1 \cup t_1 \bullet) \cap (\bullet t_2 \cup t_2 \bullet) = \emptyset$

- Weil  $t_1$  und  $t_2$  nebenläufig sind unter der Markierung  $M$ , gilt:  $\forall p \in \bullet t_1 \cap \bullet t_2 : M(p) \geq W(p, t_1) + W(p, t_2) = 2$ . Wegen  $M(p) \leq 1$  folgt daraus, dass  $\bullet t_1 \cap \bullet t_2 = \emptyset$ .
- Analog gilt, dass  $\forall p \in t_1 \bullet \cap t_2 \bullet : M(p) + W(t_1, p) + W(t_2, p) = M(p) + 2 \leq K(p) = 1$ , also  $M(p) \leq -1$ . Daraus folgt, dass  $t_1 \bullet \cap t_2 \bullet = \emptyset$ .
- Wenn  $t_1$  und  $t_2$   $M$ -aktiviert sind, muss gelten  $\bullet t_1 \subseteq M$ ,  $\bullet t_2 \subseteq M$ ,  $t_1 \bullet \cap M = \emptyset$  und  $t_2 \bullet \cap M = \emptyset$ . Deswegen muss notwendigerweise gelten, dass  $\bullet t_1 \cap t_2 \bullet = \emptyset$  und  $t_1 \bullet \cap \bullet t_2 = \emptyset$ .
- Also folgt mit der Distributivität:  
 $(\bullet t_1 \cup t_1 \bullet) \cap (\bullet t_2 \cup t_2 \bullet) = (\bullet t_1 \cap \bullet t_2) \cup (t_1 \bullet \cap t_2 \bullet) \cup (\bullet t_1 \cap t_2 \bullet) \cup (t_1 \bullet \cap \bullet t_2) = \emptyset$ .

„ $\Leftarrow$ “ Gegeben ist jetzt  $(\bullet t_1 \cup t_1 \bullet) \cap (\bullet t_2 \cup t_2 \bullet) = \emptyset$  oder wegen der Distributivität  $(\bullet t_1 \cap \bullet t_2) = \emptyset, (t_1 \bullet \cap t_2 \bullet) = \emptyset, (\bullet t_1 \cap t_2 \bullet) = \emptyset, (t_1 \bullet \cap \bullet t_2) = \emptyset$ .

- Da  $(\bullet t_1 \cap \bullet t_2) = \emptyset$  und  $(t_1 \bullet \cap t_2 \bullet) = \emptyset$ , sind die Bedingungen  
 $\forall p \in \bullet t_1 \cap \bullet t_2 : M(p) \geq W(p, t_1) + W(p, t_2)$  und  
 $\forall p \in t_1 \bullet \cap t_2 \bullet : M(p) + W(t_1, p) + W(t_2, p) \leq K(p)$  auf jeden Fall erfüllt.
- Jetzt bleibt noch zu zeigen, dass es eine Markierung  $M$  gibt, für die  $t_1$  und  $t_2$   $M$ -aktiviert sind. Es muss also ein  $M$  geben, für dass folgende zwei Bedingungen gelten:  
 $(\bullet t_1 \cup \bullet t_2) \subseteq M$  und  $(t_1 \bullet \cup t_2 \bullet) \cap M = \emptyset$ .  
 Sei  $M = \bullet t_1 \cup \bullet t_2$ , dann gilt insbesondere  $(\bullet t_1 \cup \bullet t_2) \subseteq M$  und  $(t_1 \bullet \cup t_2 \bullet) \cap M = (t_1 \bullet \cup t_2 \bullet) \cap (\bullet t_1 \cup \bullet t_2) = (t_1 \bullet \cap \bullet t_1) \cup (t_1 \bullet \cap \bullet t_2) \cup (t_2 \bullet \cap \bullet t_1) \cup (t_2 \bullet \cap \bullet t_2) = \emptyset$  nach Voraussetzung und weil keine Schleifentransitionen existieren.

□

*Bemerkung:* In einem elementaren Netz kann eine Schleifentransition unter keiner Markierung aktiviert sein. Deshalb existiert für zwei Schleifentransitionen, die in einem elementaren Netz nebenläufig sind, keine Markierung, für die die Transitionen im Sinne von S/T-Netzen nebenläufig sind.

Analog können wir die Definition 3.1 für Konflikte untersuchen. Wie steht diese in Beziehung zu der Konfliktdefinition für ein elementares Netz?

### Satz 3.10 (Äquivalenz von Konfliktkonzepten)

Sei  $N$  ein elementares Netz ohne Schleifentransitionen und seien  $t_1$  und  $t_2$  nicht benachbart (d.h.  $t_1 \bullet \cap \bullet t_2 = \emptyset$  und  $t_2 \bullet \cap \bullet t_1 = \emptyset$ ), dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Es existiert eine Markierung  $M$ , für die  $t_1$  und  $t_2$  im Sinne von S/T-Netzen im Konflikt zueinander stehen.
2.  $t_1$  und  $t_2$  stehen in Konflikt im Sinne von elementaren Netzen, d.h. es gilt  $\bullet t_1 \cap \bullet t_2 \neq \emptyset$  (Vorwärtskonflikt) oder  $t_1 \bullet \cap t_2 \bullet \neq \emptyset$  (Rückwärtskonflikt).

**Beweis:** Erinnern wir uns daran, dass in einem elementaren Netz immer folgendes gilt:

$$\forall p \in P : K(p) = 1 \quad \text{und} \quad \forall f \in F : W(f) = 1$$

„ $\Rightarrow$ “ Nach Voraussetzung gilt: Es gibt eine Markierung  $M$ , so dass  $t_1$  und  $t_2$   $M$ -aktiviert sind, also  $M(p) = 1$  für alle  $p \in \bullet t_1 \cup \bullet t_2$  und  $M(p) = 0$  für alle  $p \in t_1 \bullet \cup t_2 \bullet$ . Da  $t_1$  und  $t_2$  im Konflikt stehen, gibt es eine Stelle  $p \in \bullet t_1 \cap \bullet t_2$  mit  $1 = M(p) < W(p, t_1) + W(p, t_2) = 2$  oder eine Stelle  $p \in t_1 \bullet \cap t_2 \bullet$  mit  $2 = M(p) + W(t_1, p) + W(t_2, p) > K(p) = 1$ . Also  $\bullet t_1 \cap \bullet t_2 \neq \emptyset$  oder  $t_1 \bullet \cap t_2 \bullet \neq \emptyset$ .

„ $\Leftarrow$ “ Erstens ist zu zeigen, dass es eine Markierung  $M$  gibt, für die  $t_1$  und  $t_2$   $M$ -aktiviert sind. Sei  $M = \bullet t_1 \cup \bullet t_2$ , dann ist  $M$  unter  $t_1$  und  $t_2$  aktiviert wegen  $\bullet t_1 \cup \bullet t_2 \subseteq M$  und  $(t_1 \bullet \cup t_2 \bullet) \cap M = (t_1 \bullet \cup t_2 \bullet) \cap (\bullet t_1 \cup \bullet t_2) = (t_1 \bullet \cap \bullet t_1) \cup (t_1 \bullet \cap \bullet t_2) \cup (t_2 \bullet \cap \bullet t_1) \cup (t_2 \bullet \cap \bullet t_2) = \emptyset$ , weil keine Schleifentransitionen existieren und weil  $t_1$  und  $t_2$  nicht benachbart sind.

Ausserdem gilt nach Voraussetzung  $\bullet t_1 \cap \bullet t_2 \neq \emptyset$  oder  $t_1 \bullet \cap t_2 \bullet \neq \emptyset$ . Im ersten Fall folgt für die Markierung  $M = \bullet t_1 \cup \bullet t_2$  des elementaren Netzes  $N$ :  $\exists p \in \bullet t_1 \cap \bullet t_2 :$

$M(p) = 1 < W(p, t_1) = W(p, t_2) = 2$ . Im zweiten Fall folgt, dass gilt  $\exists p \in t_1 \bullet \cap t_2 \bullet$ :  $M(p) + W(t_1, p) + W(t_2, p) = 2 > K(p) = 1$ . Insgesamt folgt also, dass  $t_1$  und  $t_2$  gemäß Definition 3.1 in Konflikt miteinander stehen.

□

# Kapitel 4

## Analyse von Netzeigenschaften

Nachdem die statischen und dynamischen Aspekte von S/T-Netzen dargestellt und formalisiert sind, werden wir nun eine Reihe von Netzeigenschaften betrachten, um dann ihre Eignung zur Analyse von Netzspezifikationen zu untersuchen.

Im diesem Kapitel befassen wir uns mit Eigenschaften von S/T-Netzen wie Beschränktheit, Unabhängigkeit, Lebendigkeit und Invarianten sowie deren gegenseitigen Beziehungen. Dabei besteht ein enger Zusammenhang zwischen Beschränktheit und Stellen-Invarianten einerseits und Lebendigkeit und Transitions-Invarianten andererseits.

In Abschnitt 4.1 definieren wir Beschränktheit und Stellen-Invarianten und stellen die Beziehung zwischen beiden Konzepten dar. In Abschnitt 4.2 analysieren wir Lebendigkeit und Deadlocks, und stellen dann in Abschnitt 4.3 den Zusammenhang zwischen Lebendigkeit und Transitions-Invarianten dar. In Abschnitt 4.4 werden all diese Eigenschaften in Netzen mit beschränkten Kapazitäten und ihren komplementierten Netzen untersucht.

### 4.1 Beschränktheit und Stellen-Invarianten

Wenn eine Stelle nicht durch eine Kapazität beschränkt ist, kann es passieren, dass ihre Tokenzahl (durch genügend langes Schalten) jede beliebige natürliche Zahl übersteigt. Eine solche *Unbeschränktheit* hat die Konsequenz, dass der Erreichbarkeitsgraph selbst eines endlichen Netzes (also mit endlichen Stellen- und Transitions Mengen) unendlich wird, wenn das Netz eine solche unbeschränkte Stelle enthält. Für Netze wie unser Leser-Schreiber-System wäre sie außerdem ein dringender Hinweis auf einen Modellierungsfehler.

#### **Definition 4.1 (Beschränktheit)**

Sei  $N_{M_0}$  ein markiertes Netz und  $EG$  sein Erreichbarkeitsgraph. Eine Stelle  $p \in P$  heißt *beschränkt*, falls es eine Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  gibt, so dass für alle Markierungen  $M \in EG$  gilt:  $M(p) \leq n$ . Das Netz  $N_{M_0}$  heißt beschränkt, falls alle Stellen  $p \in P$  beschränkt sind.

Beschränktheit von Stellen und markierten Netzen ist entscheidbar [Rei85a].

## Beispiel 4.2

Das Leser-Schreiber-Netz in Abbildung 1.4 mit der gegebenen Anfangsmarkierung ist beschränkt, da im Erreichbarkeitsgraphen die Markierung für keine Stelle größer als 3 wird.

Wie oben erwähnt, ist der Erreichbarkeitsgraph eines unbeschränkten Netzes unendlich, während für beschränkte Netze der Erreichbarkeitsgraph endlich ist.

## Satz 4.3 (Beschränktheit)

Für endliche markierte Netze  $N_{M_0}$  gilt:  $N_{M_0}$  ist beschränkt gdw. der Erreichbarkeitsgraph  $EG$  von  $N_{M_0}$  endlich ist.

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “  $N_{M_0}$  ist beschränkt und endlich, also gibt es eine Zahl  $m$ , so dass für alle Markierungen  $M \in EG$  und alle Stellen  $p \in P$  gilt:  $M(p) \leq m$ . Da  $P$  endlich ist, gibt es maximal  $(m+1)^{|P|}$  verschiedene Markierungen (= Knoten) in  $EG$ . Also ist  $EG$  endlich.

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $m = \max M(p)$  für alle  $M \in EG$  und  $p \in P$ . Das Maximum existiert, da  $EG$  und  $P$  endlich sind, also ist jede Stelle  $p \in P$  und somit auch  $N_{M_0}$  durch  $m$  beschränkt.  $\square$

Die Zahl der Prozesse in dem Leser-Schreiber-System in Abbildung 1.4 ist nicht nur nach oben hin begrenzt, sie ist sogar konstant. Auf das markierte Netz in Abbildung 1.4 bezogen heißt das, dass die gemeinsame Tokenzahl auf den Stellen  $\{Pz, Psb, Plb, Pl, Ps\}$  für alle erreichbaren Markierungen gleich ist. Eine solche Eigenschaft wird durch sogenannte *Stellen-Invarianten* (*P-Invarianten*) beschrieben. In unserem Fall ist die P-Invariante die folgende Abbildung  $\{(Pz, 1), (Psb, 1), (Plb, 1), (Pl, 1), (Ps, 1), (Pexc, 0)\}$ .

Darüberhinaus ist es manchmal sinnvoll, die Token auf bestimmten Stellen mehrfach zu zählen, wenn ein Token auf einer solchen Stelle mehrere Token auf anderen Stellen aufwiegt. In unserem Beispielnetz ergibt sich dadurch eine weitere Invariante,  $\{(Pz, 0), (Psb, 0), (Plb, 0), (Pl, 1), (Ps, 3), (Pexc, 1)\}$ , die ausdrückt, dass der Wert des Ausdrucks  $M(Pl) + 3 \cdot M(Ps) + M(Pexc)$  beim Schalten des Netzes konstant bleibt. Das bedeutet bei der angegebenen Anfangsmarkierung, dass die Existenz eines schreibenden Prozesses ( $M(Ps) = 1$ ) impliziert, dass sich kein Token auf  $Pexc$  und  $Pl$  befindet (da bei unserer Anfangsmarkierung  $M_0$  für  $M \in EG$  gilt:  $M_0(Pl) + 3 \cdot M_0(Ps) + M_0(Pexc) = M(Pl) + 3 \cdot M(Ps) + M(Pexc) = 3$ ). Weil also  $Pexc$  unmarkiert ist, kann kein Prozess unter diesen Umständen zu lesen anfangen ( $T2l$  braucht einen Token von  $Pexc$ , um schalten zu können). Umgekehrt kann kein Prozess anfangen zu schreiben, wenn bereits ein Prozess liest, denn dann ist  $M(Pexc) < 3$  und damit  $T2s$  nicht aktiviert. Daraus kann man schlußfolgern, dass die Existenz eines schreibenden Prozesses die eines lesenden Prozesses ausschließt.

P-Invarianten können auch Eigenschaften wie  $\forall M \in EG : M(P1) = M(P2) + M(P3)$  beschreiben (oder bei deren Beweis eine wichtige Rolle spielen). Z.B. wenn  $\{(P1, -1), (P2, 1), (P3, 1)\}$  P-Invariante in einem Netz  $N_{M_0}$  ist und  $M_0(P1) = M_0(P2) + M_0(P3)$ , dann gilt die genannte Eigenschaft.

Die folgende Definition der P-Invarianten entspricht nicht der Standard-Definition wie z.B. in [Rei85a], sondern den P-Vektoren im Satz 5.5. Die Einträge eines solchen P-Vektors sind die Koeffizienten, mit denen die Markierungen gewichtet werden. Im obigen Beispiel also  $1 \cdot M(Pl)$ ,  $3 \cdot M(Ps)$  und  $1 \cdot M(Pexc)$ .



Abbildung 4.1: Beschränktes Netz ohne positive P-Invariante für die Stelle  $p$

**Definition 4.4 (P-Invariante)**

Sei  $N$  ein S/T-Netz und  $MG$  der Markierungsgraph von  $N$ . Ein Stellenvektor  $I_P : P \rightarrow \mathbb{Z}$  heißt *P-Invariante* von  $N$ , falls für alle  $M \in MG$  gilt: wenn  $M \rightarrow M' \in MG$  dann  $\sum_{p \in P} I_P(p) \cdot M(p) = \sum_{p \in P} I_P(p) \cdot M'(p) < \infty$ .

Eine P-Invariante  $I_P$  eines Netzes  $N$  heißt *positiv*, falls für alle  $p \in P$  gilt  $I_P(p) \geq 0$ .

**Bemerkung:** Wenn man P-Invarianten für den Erreichbarkeitsgraphen definiert durch  $EG_{I_P} = \{I_P : P \rightarrow \mathbb{Z} \mid \forall M \in EG : \sum_{p \in P} I_P(p) \cdot M_0(p) = \sum_{p \in P} I_P(p) \cdot M(p)\}$ , gilt  $Inv_P \subseteq EG_{I_P}$ , wobei  $Inv_P$  die Menge der P-Invarianten von  $N$  ist. Nach [Rei85b] stimmen  $EG_{I_P}$  und  $Inv_P$  überein, falls jede Transition des Netzes ausgehend von  $M_0$  mindestens einmal schalten kann, eine Bedingung, die normalerweise erfüllt ist.

Abgesehen von ihrer unmittelbaren Interpretation sind positive P-Invarianten auch hinreichende Bedingungen für die Beschränktheit der echt in ihnen enthaltenen Stellen (die Stellen für die  $I_P(p) > 0$ ).

**Satz 4.5 (Beschränktheit und P-Invarianten)**

Sei  $N_{M_0}$  ein markiertes Netz. Für jede Stelle  $p \in P$  gilt: Wenn  $p$  echt einer positiven P-Invariante  $I_P$  angehört, d.h.  $I_P(p) > 0$  und  $I_P(p') \geq 0$  für alle  $p' \in P$ , so ist  $p$  beschränkt.  $N_{M_0}$  ist beschränkt, wenn jede Stelle  $p \in P$  einer solchen P-Invariante angehört.

**Beweis:** Sei  $I_P$  positiv und  $p$  mit  $I_P(p) > 0$  gegeben, dann gilt für alle Markierungen  $M \in EG$ :

$$\text{Es gibt ein } n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n := \sum_{p \in P} I_P(p) \cdot M_0(p) \stackrel{\text{Def. 4.4}}{=} \sum_{p \in P} I_P(p) \cdot M(p) \stackrel{I_P \text{ positiv}}{\geq} I_P(p) \cdot M(p).$$

Dann gilt  $M(p) \leq \frac{n}{I_P(p)}$ , also ist  $p$  beschränkt. Wenn jede Stelle einer positiven P-Invariante angehört, dann sind alle Stellen beschränkt und also auch  $N_{M_0}$ .  $\square$

Die Umkehrung von Satz 4.5 gilt auch für unbeschränkte Kapazitäten nicht, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt.

**Beispiel 4.6**

Das Netz in Abbildung 4.1 mit  $M_0(p) = 1$  ist beschränkt durch  $M(p) \leq 1$ , aber  $p$  gehört zu keiner positiven P-Invariante, da es nur die P-Invariante  $I_P$  mit  $I_P(p) = 0$  gibt.

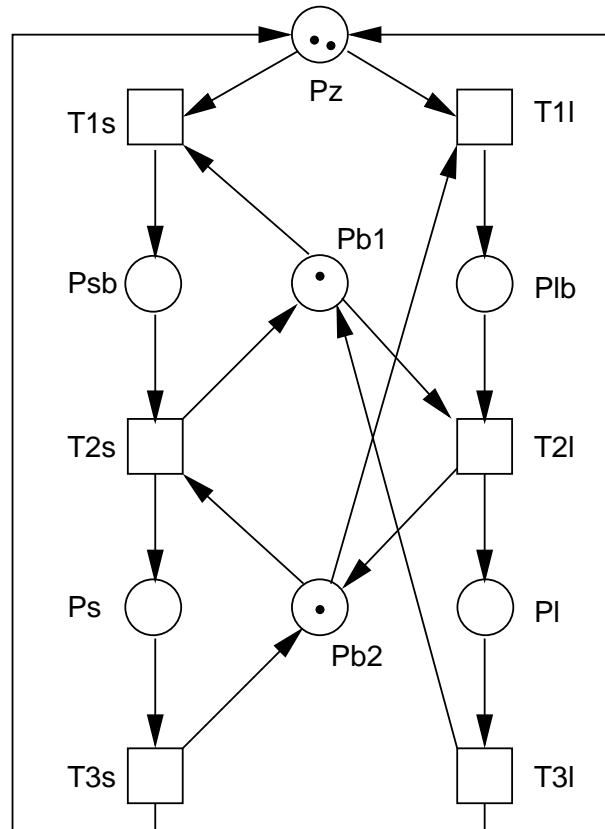


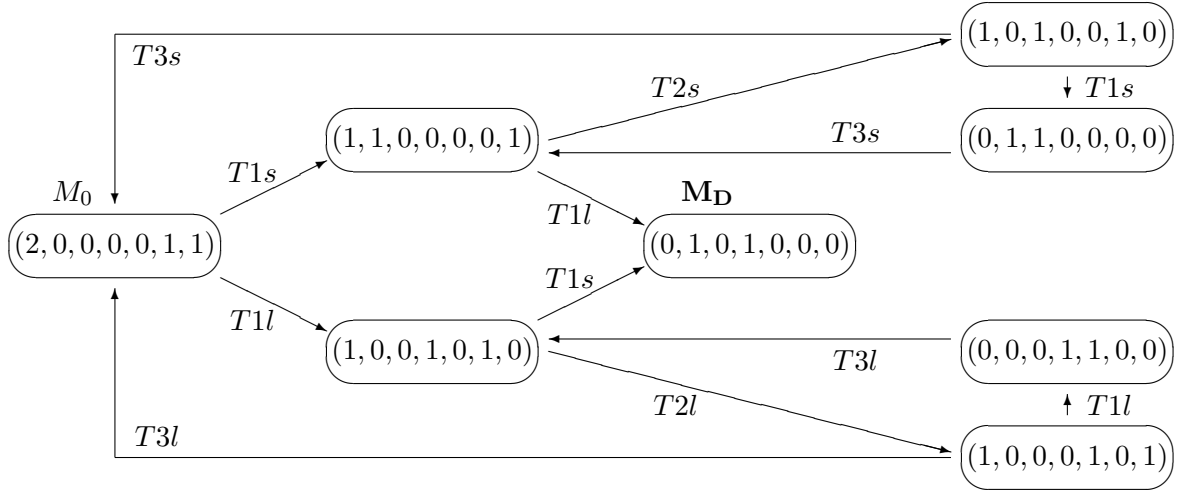
Abbildung 4.2: Deadlock-Modellierung

## 4.2 Lebendigkeit und Deadlocks

Nebenläufige Systeme haben Eigenschaften, die in sequentiellen Systemen nicht auftreten. So können sie z. B. gerade durch ihre Parallelität in einen Deadlock geraten. Ein Deadlock ist eine Situation, in der sich zwei oder mehrere Prozesse gegenseitig so behindern, dass das gesamte System blockiert ist.

Betrachten wir als Beispiel einer Modellierung einer solchen Situation eine Verallgemeinerung unseres Leser-Schreiber-Systems in Abbildung 4.2. Zwei Prozesse teilen sich zwei Betriebsmittel. Im ersten Schritt benötigt Prozess 1 das eine Betriebsmittel (den Token auf der Stelle  $Pb1$ ) und Prozess 2 das andere (den Token auf der Stelle  $Pb2$ ). Im zweiten Schritt benötigt Prozess 1 seinerseits das Betriebsmittel, das auf  $Pb2$  liegt, und legt das erste Betriebsmittel wieder auf  $Pb1$  zurück. Prozess 2 dagegen benötigt das Betriebsmittel von  $Pb1$  und legt das zweite Betriebsmittel auf  $Pb2$  zurück. Der dritte Schritt initialisiert das System erneut, indem er das jeweils benötigte Betriebsmittel wieder an die entsprechende Stelle zurückgibt und die Anfangsmarkierung wiederherstellt.

Das System läuft einwandfrei, solange beide Prozesse nacheinander ablaufen, d.h. solange es kein Interleaving oder paralleles Schalten zwischen  $T1s, T2s, T3s$  einerseits und



Abbildungung 4.3: Erreichbarkeitsgraph des Deadlock-Netzes  
(Markierungen von  $(Pz, Psb, Ps, Plb, Pl, Pb1, Pb2)$  in Matrix-Darstellung (siehe Kap. 5))

$T1l, T2l, T3l$  andererseits gibt. Die Schwierigkeit tritt dann auf, wenn die beiden unabhängig aktivierten Transitionen  $T1s$  und  $T1l$  im ersten Schritt parallel oder nacheinander geschaltet haben. Dann kann keine Transition mehr schalten, ein Deadlock ist entstanden. Das heißt, dass das System über „zu viel“ Unabhängigkeit verfügt, als dass es störungsfrei laufen könnte. Abbildung 4.3 zeigt den Erreichbarkeitsgraphen des Netzes in Abbildung 4.2. Der Deadlock  $M_D$  ist daran zu erkennen, dass von dem entsprechenden Knoten keine Kanten ausgehen.

Zu Analysezwecken ist es wichtig, solche und ähnliche Blockierungen ausfindig zu machen. Wir führen daher im folgenden eine Reihe von Lebendigkeitseigenschaften eines S/T-Netzes ein. Alle diese Eigenschaften beruhen darauf, dass gewisse Transitionen  $t$  von Markierungen  $M$  aus nie mehr, noch einmal oder immer wieder schalten können. Wir definieren also zunächst, wann eine Transition von einer Markierung aus erreichbar ist.

#### Definition 4.7 (Erreichbarkeit)

Sei  $N$  ein S/T-Netz und  $MG$  sein Markierungsgraph. Eine Transition  $t \in T$  heißt von  $M \in MG$  aus erreichbar, kurz  $M$ -erreichbar, falls in  $MG$  ein Pfad  $M \xrightarrow{*} M' \xrightarrow{t} M''$  existiert.

Eine Markierung  $M$  eines markierten Netzes  $N_{M_0}$  heißt *erreichbar*, falls  $M \in EG$ , oder anders ausgedrückt, falls  $M \in [M_0]$ , d. h. es gibt einen Pfad  $M_0 \xrightarrow{*} M \in MG$ .

Falls  $M$  eine erreichbare Markierung ist, liegt der Pfad  $M_0 \xrightarrow{*} M$  auch im Erreichbarkeitsgraphen. Wir brauchen also nicht extra zu sagen, ob sich die Aussage „ $t$  ist  $M$ -erreichbar“ auf den Erreichbarkeits- oder den Markierungsgraphen bezieht, da sich das aus der Herkunft von  $M$  ableiten lässt.



Auf den Begriff der Erreichbarkeit aufbauend definieren wir nun die Lebendigkeit von Markierungen, Transitionen und Netzen, die sich im Wesentlichen durch die unterschiedliche Quantifizierung von  $M$  und  $t$  unterscheiden.

**Definition 4.8 (Lebendigkeit)**

Sei  $N$  ein S/T-Netz und  $MG$  sein Markierungsgraph,  $M_0$  eine Anfangsmarkierung für  $N$  und  $EG$  der entsprechende Erreichbarkeitsgraph für  $N_{M_0}$ . Dann heißt

- eine Markierung  $M \in MG$  *lebendig* in  $N$  bzw.  $N_{M_0}$ , falls jede Transition  $t \in T$   $M$ -erreichbar ist.
- eine Transition  $t \in T$  *lebendig* in  $N_{M_0}$ , wenn sie für alle Markierungen  $M \in EG$   $M$ -erreichbar ist.
- das *markierte Netz*  $N_{M_0}$  *lebendig*, wenn alle Transitionen  $t \in T$  lebendig sind.

**Definition 4.9 (Deadlockfreiheit)**

Sei  $N_{M_0}$  ein markiertes S/T-Netz, dann heißt eine Markierung  $M \in MG$  *Deadlock*, wenn kein  $t \in T$   $M$ -aktiviert ist.  $N$  (bzw.  $N_{M_0}$ ) heißt *deadlockfrei*, falls  $N$  (bzw.  $N_{M_0}$ ) keinen Deadlock  $M \in MG$  (bzw.  $M \in EG$ ) besitzt.

**Beispiel 4.10**

Die Markierung  $M_D$  in Abbildung 4.3 ist ein Deadlock, alle anderen Markierungen sind lebendig.

Deadlocks sind Haltezustände des Netzes. Lebendige Markierungen sind solche, die noch keine Transition *endgültig* blockiert haben. „Lebendig“ ist hier also nicht das Gegenteil von „Deadlock“! Für die Analyse eines Netzes ist insbesondere die Lebendigkeit der Anfangsmarkierung interessant, da sie darüber Auskunft gibt, ob das Netz „überflüssige“ Transitionen enthält. Sie schließt das Auftreten von Deadlocks aber keinesfalls aus, wie das obige Beispiel zeigt. Stärker ist in dieser Hinsicht die Lebendigkeit einer Transition, die ausdrückt, dass diese nie für immer blockiert werden kann. In einem lebendigen markierten Netz schließlich kann keine Transition je blockiert werden.

Das Leser-Schreiber-Netz in Abbildung 1.4 ist lebendig, das Betriebsmittel-Netz in Abbildung 4.2 nicht, denn wenn  $T1s$  und  $T1l$  geschaltet haben, ist eine Markierung entstanden, unter der keine Transition mehr aktiviert ist.

Lebendigkeit für Transitionen und Netze ist bezüglich einer Anfangsmarkierung (d.h. mit Hilfe des Erreichbarkeitsgraphen) definiert, während die Lebendigkeit einer Markierung anhand des Markierungsgraphen beschrieben wird. Der folgende Satz zeigt den Zusammenhang zwischen der Lebendigkeit eines markierten Netzes und der von Markierungen.

**Satz 4.11 (Lebendigkeit)**

Sei  $N_{M_0}$  ein markiertes Netz und  $EG$  sein Erreichbarkeitsgraph. Dann gilt:  $N_{M_0}$  ist genau dann lebendig, wenn jede Markierung  $M \in EG$  lebendig ist.

**Beweis:**  $N_{M_0}$  ist lebendig  $\xLeftrightarrow{Def. 4.8} \forall t \in T : t \text{ ist lebendig} \xLeftrightarrow{Def. 4.8, 4.7} \forall t \in T : \forall M \in EG : \exists M \xrightarrow{*} M' \xrightarrow{t} M'' \in EG \xLeftrightarrow{(*)} \forall M \in EG : \forall t \in T : \exists M \xrightarrow{*} M' \xrightarrow{t} M'' \in MG \xLeftrightarrow{Def. 4.8, 4.7} \forall M \in EG : M \text{ ist lebendig.}$

(\*) gilt, da einerseits wegen  $EG \subseteq MG$  jeder Pfad in  $EG$  auch in  $MG$  ist, und andererseits aus  $M \in EG$  und  $M \xrightarrow{*} M' \xrightarrow{t} M'' \in MG$  schon  $M \xrightarrow{*} M' \xrightarrow{t} M'' \in EG$  folgt.  $\square$

### 4.3 Transitions-Invarianten

Betrachten wir noch einmal Abbildung 4.3, so fällt auf, dass der Erreichbarkeitsgraph mehrere Zyklen enthält. Solche Zyklen werden durch sogenannte *Transitions-Invarianten* (*T-Invarianten*) beschrieben. Die Markierungen, die auf diesen Zyklen liegen, können, nachdem sie einmal erreicht wurden, beliebig oft reproduziert werden.

#### Definition 4.12 (T-Invariante)

Es sei  $N = (P, T, W)$  ein S/T-Netz. Ein Transitionsvektor  $I_T : T \rightarrow \mathbb{N}_0$  heißt T-Invariante von  $N$ , falls es einen endlichen Pfad  $M_1 \xrightarrow{t_1} \dots \xrightarrow{t_n} M_{n+1} \in MG$  mit  $M_1 = M_{n+1}$ ,  $n \geq 0$  gibt, so dass  $I_T(t) = |\{i \mid t = t_i \wedge (1 \leq i \leq n)\}|$ , wobei die Betragstriche die Kardinalität der eingeschlossenen Menge bedeuten.

#### Bemerkung:

- Der Wert  $I_T(t)$  gibt an, wie oft  $t$  innerhalb der zyklischen Schaltfolge (die durch die T-Invariante  $I_T$  beschrieben wird) schaltet. Im Erreichbarkeitsgraphen eines markierten Netzes gibt es tatsächlich die von einer positiven T-Invariante beschriebene Schaltfolge nur bei entsprechender Anfangsmarkierung.
- Wie wir später sehen werden, können T-Invarianten für Netze mit unbeschränkten Kapazitäten mit den Mitteln der linearen Algebra gut berechnet werden. Da sich für jedes Netz mit beschränkten Kapazitäten eines mit unbeschränkten Kapazitäten konstruieren lässt, stellt das keine weitere Einschränkung dar.

Realisierbare T-Invarianten (die im Erreichbarkeitsgraphen vorzufinden sind) sind aus Modellierungssicht interessant, weil sie zyklische Schaltfolgen repräsentieren, die zum Erreichbarkeitsgraphen des Netzes gehören. In unserem Beispiel aus Abbildung 4.2 gibt es die realisierbaren T-Invarianten  $\{(T1s, 1), (T2s, 1), (T3s, 1), (T1l, 0), (T2l, 0), (T3l, 0)\}$  und  $\{(T1s, 0), (T2s, 0), (T3s, 0), (T1l, 1), (T2l, 1), (T3l, 1)\}$  sowie z.B.  $\{(T1s, 1), (T2s, 1), (T3s, 1), (T1l, 1), (T2l, 1), (T3l, 1)\}$  als Komposition der beiden, die Prozesse befinden sich also (solange sie sich nicht gegenseitig blockieren) in Endlosschleifen.

Für endliche und beschränkte markierte Netze, d. h. für solche mit endlichem Erreichbarkeitsgraphen, liefern T-Invarianten außerdem eine notwendige Bedingung für deren Lebendigkeit.

### Satz 4.13 (Lebendigkeit und T-Invarianten)

Für jedes endliche, beschränkte, markierte Netz  $N_{M_0}$  mit unbeschränkten Kapazitäten gilt: Wenn  $N_{M_0}$  lebendig ist, dann gibt es eine T-Invariante  $I_T$ , so dass alle Transitionen  $t \in T$  in  $I_T$  vorkommen (d.h.  $I_T$  ist echt positiv, also  $\forall t \in T : I_T(t) \geq 1$ )

**Beweis:** Es sei  $n := |P|$ ,  $k := |T|$  (da  $N$  endlich ist, sind auch  $P$  und  $T$  endlich) und  $T = \{t_1, \dots, t_k\}$ .

$N$  ist beschränkt, also gilt laut Definition 4.1:  $\exists m \in \mathbb{N}_0$  so dass  $\forall M \in EG, \forall p \in P : M(p) \leq m$ . Die Anzahl der Abbildungen  $M : P \rightarrow \{0, \dots, m\}$  ist durch  $(m+1)^n$  beschränkt. Somit ist die Anzahl  $|EG_V|$  der Markierungen im Erreichbarkeitsgraph auch beschränkt, also

$$(1) \quad |EG_V| \leq (m+1)^n.$$

$N_{M_0}$  ist lebendig, deshalb folgt aus Definition 4.7 und Definition 4.8:

$$(2) \quad \forall t \in T, \forall M \in EG : \exists M \xrightarrow{*} M' \xrightarrow{t} M'' \in EG.$$

Wir werden zeigen, dass es in  $EG$  einen Pfad  $M \rightarrow \dots \rightarrow M$  gibt, der das Schalten aller Transitionen in der Reihenfolge  $t_1, \dots, t_k$  enthält.

Wegen (2) gibt es eine Pfad  $M_0 \xrightarrow{*} M_{01} \xrightarrow{t_1} M'_{01}$  in  $EG$ . Von  $M'_{01}$  aus existiert dann ein Pfad  $M'_{01} \xrightarrow{*} M_{02} \xrightarrow{t_2} M'_{02}$ . Wenn wir dieses Argument weiterführen, bekommen wir eine Schaltsequenz

$$M_0 \xrightarrow{*} M_{01} \xrightarrow{t_1} M'_{01} \xrightarrow{*} M_{02} \xrightarrow{t_2} M'_{02} \xrightarrow{*} \dots \xrightarrow{*} M_{0k} \xrightarrow{t_k} M'_{0k},$$

in der die Transitionen  $t_1, \dots, t_k$  in dieser Reihenfolge schalten (aber nicht notwendigerweise direkt hintereinander).

Wir wenden (2) erneut an und bekommen einen Pfad  $M'_{0k} \xrightarrow{*} M_{11} \xrightarrow{t_1} M'_{11}$  in  $EG$ . Diese Vorgehensweise wiederholen wir beliebig oft, und erhalten so eine unendliche Schaltfolge  $M_0 \xrightarrow{*} M'_{0k} \xrightarrow{*} M'_{1k} \xrightarrow{*} M'_{2k} \xrightarrow{*} \dots$ . In jeder dieser Teilsequenzen schalten alle Transitionen  $t_1, \dots, t_k$  in dieser Reihenfolge.

Da die Menge der Markierungen nach (1) beschränkt ist, muss es zwei Markierungen  $M'_{ik}$  und  $M'_{jk}$  geben, für die gilt:  $M'_{ik} = M'_{jk}$  und  $i < j \in \mathbb{N}_0$ . Auf dem Pfad  $M'_{ik} \xrightarrow{*} M'_{jk}$  schaltet jede der Transitionen in  $T$  mindestens einmal.

Es sei  $I_T : T \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $I_T(t) :=$  die Anzahl der Schaltschritte, in denen  $t$  auf diesem Pfad geschaltet hat.  $I_T$  ist eine (realisierbare) T-Invariante, die alle Transitionen enthält.  $\square$

### Beispiel 4.14

Das Leser-Schreiber-Netz in Abbildung 1.4 ist lebendig. Es gibt die Schaltsequenz  $M_0 \xrightarrow{T1s} M_1 \xrightarrow{T2s} M_2 \xrightarrow{T3s} M_0 \xrightarrow{T1l} M'_1 \xrightarrow{T2l} M'_2 \xrightarrow{T3l} M_0$ , die der echt positiven T-Invariante  $I_T = \{(T1s, 1), (T2s, 1), (T3s, 1), (T1l, 1), (T2l, 1), (T3l, 1)\}$  entspricht.

Für das Netz in Abbildung 4.1 gibt es nur die triviale T-Invariante  $I_T = 0$ , also impliziert Satz 4.13, dass das Netz nicht lebendig ist.

Als Gegenbeispiel für die Implikation in die andere Richtung dient uns wieder das Deadlock-Netz in Abbildung 4.2 und sein Erreichbarkeitsgraph in Abbildung 4.3. Dort kommen alle Transitionen in der Invariante  $\{(T1s, 1), (T2s, 1), (T3s, 1), (T1l, 1), (T2l, 1), (T3l, 1)\}$  vor, obwohl das Netz nicht lebendig ist.

## 4.4 Invarianten und Netzkomplementierung

In Abschnitt 1.5 haben wir gezeigt, wie man durch Netzkomplementierung ein Netz mit beschränkten Kapazitäten in ein äquivalentes Netz mit unbeschränkten Kapazitäten umformen kann. Durch diese Äquivalenz der Netze können wir Eigenschaften wie Lebendigkeit, Beschränktheit und Invarianten von einem Netz auf das andere übertragen.

### Satz 4.15 (Eigenschaften der Netzkomplementierung)

Sei  $N'_{M'_0} = (P', T, F', W', M'_0)$  die Netzkomplementierung zu einem markierten Netz mit Kapazitäten  $N_{M_0} = (P, T, F, W, K, M_0)$  mit Kapazitäten,  $EG$  bzw.  $EG'$  die entsprechenden Erreichbarkeitsgraphen und  $f : EG \rightarrow EG'$  ein Isomorphismus. Dann gilt:

1.  $t \in T$  ist lebendig in  $N_{M_0}$  **gdw.**  $t \in T$  ist lebendig in  $N'_{M'_0}$ .
2. a)  $M \in EG$  ist lebendig **gdw.**  $f_V(M) \in EG'$  ist lebendig.  
b)  $M \in EG$  ist ein Deadlock **gdw.**  $f_V(M) \in EG'$  ist ein Deadlock.
3.  $N_{M_0}$  ist lebendig **gdw.**  $N'_{M'_0}$  ist lebendig.
4.  $I_T : T \rightarrow \mathbb{N}_0$  ist T-Invariante in  $N \Rightarrow I_T$  ist T-Invariante in  $N'$ .
5.  $\forall p \in P: I^p : P' \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $I^p(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = p, x = \bar{p} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$  ist P-Invariante von  $N'$ .
6.  $I_P : P \rightarrow \mathbb{Z}$  ist eine P-Invariante von  $N$  **gdw.**  $I'_P : P' \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $I'_P(x) := \begin{cases} I_P(x) & \text{für } x \in P \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$  ist eine P-Invariante von  $N'$ .
7.  $p \in P$  in  $N$  ist beschränkt **gdw.**  $p \in P \subseteq P'$  in  $N'$  ist beschränkt.
8.  $N_{M_0}$  ist beschränkt **gdw.**  $N'_{M'_0}$  ist beschränkt.

**Beweis:** Der Beweis beruht hauptsächlich auf der Isomorphie der Erreichbarkeitsgraphen (siehe Satz 1.19). Wir finden also für jede Markierung  $M' \in EG'$  genau eine Markierung  $M \in EG$  mit  $f_V(M) = M'$ , und genauso für jeden Pfad  $P'$  in  $EG'$  genau einen Pfad  $P$  in  $EG$  über die gleichen Transitionen, so dass  $f(P) = P'$ .

1.  $t \in T$  ist lebendig in  $N_{M_0} \Leftrightarrow \forall M \in EG : \exists M \xrightarrow{*} M_1 \xrightarrow{t} M_2 \in EG \xrightarrow{Iso. EG, EG'} \forall M' \in EG' : \exists M' \xrightarrow{*} M'_1 \xrightarrow{t} M'_2 \in EG' \Leftrightarrow t \in T$  ist lebendig in  $N'_{M'_0}$ .

2.a)  $M \in EG$  ist lebendig  $\Leftrightarrow \forall t \in T : \exists M \xrightarrow{*} M_1 \xrightarrow{t} M_2 \in EG \xleftrightarrow{Iso.EG,EG'}$   
 $\forall t \in T : \exists f_V(M) \xrightarrow{*} M'_1 \xrightarrow{t} M'_2 \in EG' \Leftrightarrow f_V(M) \in EG'$  ist lebendig.

2.b)  $M \in EG$  ist ein Deadlock  $\Leftrightarrow \forall t \in T : \nexists M \xrightarrow{t} M_1 \in EG \xleftrightarrow{Iso.EG,EG'}$   
 $\forall t \in T : \nexists f_V(M) \xrightarrow{t} M'_1 \in EG' \Leftrightarrow f_V(M) \in EG'$  ist ein Deadlock.

3.  $N_{M_0}$  ist lebendig  $\Leftrightarrow \forall t \in T : t$  ist lebendig in  $N_{M_0} \xleftrightarrow{1} \forall t \in T : t$  ist lebendig in  $N'_{M'_0} \Leftrightarrow N'_{M'_0}$  ist lebendig.

4.  $I_T : T \rightarrow \mathbb{N}_0$  ist T-Invariante in  $N \Leftrightarrow$

$\exists$  Pfad  $P = M \xrightarrow{*} M \in MG$  mit  $\forall t \in T : t$  kommt in  $P$   $I_T(t)$ -mal vor  $\xrightarrow{(*)}$

$\exists$  Pfad  $P' = f_V(M) \xrightarrow{*} f_V(M) \in MG'$  mit  $\forall t \in T : t$  kommt in  $P'$   $I_T(t)$ -mal vor  $\Leftrightarrow$   
 $I_T$  ist T-Invariante in  $N'$ .

(\*) folgt sofort aus der Isomorphie der Erreichbarkeitsgraphen von  $M$  und  $f_V(M)$ .

5. Für jede Stelle  $p \in P$  und jede Markierung  $f_V(M) = M' \in EG'$  gilt:  
 $\sum_{q \in P'} I^p(q) M'(q) = M'(p) + M'(\bar{p}) = M(p) + K(p) - M(p) = K(p)$ . Also ist  $I^p$  P-Invariante von  $N'$ .

6. Sei  $f_V(M) = M'$ ,  $f_V(M_1) = M'_1$  und  $M' \xrightarrow{t} M'_1 \in EG'$ , also  $M \xrightarrow{t} M_1 \in EG$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} & I_P \text{ ist P-Invariante von } N \\ \Leftrightarrow & \sum_{q \in P} I_P(q) M(q) = \sum_{q \in P} I_P(q) M_1(q) \\ \Leftrightarrow & \sum_{q \in P} I_P(q) M(q) + \sum_{q \in P' \setminus P} 0 \cdot M'(q) = \sum_{q \in P} I_P(q) M_1(q) + \sum_{q \in P' \setminus P} 0 \cdot M'_1(q) \\ \Leftrightarrow & \sum_{q \in P} I'_P(q) M'(q) + \sum_{q \in P' \setminus P} I'_P(q) M'(q) = \sum_{q \in P} I'_P(q) M'_1(q) + \sum_{q \in P' \setminus P} I'_P(q) M'_1(q) \\ \Leftrightarrow & \sum_{q \in P'} I'_P(q) M'(q) = \sum_{q \in P'} I'_P(q) M'_1(q) \\ \Leftrightarrow & I'_P \text{ P-Invariante von } N' \text{ (mit } I'_P(\bar{p}) = 0 \forall \bar{p} \in P' \setminus P). \end{aligned}$$

7.  $p \in P$  in  $N$  ist beschränkt  $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall M \in EG : M(p) \leq n \xleftrightarrow{Iso.EG,EG'} \\ & \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall M' = f_V(M) \in EG' : M'(p) = M(p) \leq n \Leftrightarrow \\ & p \in P \subseteq P' \text{ in } N' \text{ ist beschränkt.} \end{aligned}$$

8. „ $\Rightarrow$ “

$$\begin{aligned} & N_{M_0} \text{ ist beschränkt} \Leftrightarrow \forall p \in P \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall M \in EG : M(p) \leq n \xleftrightarrow{Iso.EG,EG'} \\ & \forall p \in P \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall M' = f_V(M) \in EG' : M'(p) = M(p) \leq n \xrightarrow{6.,4.5} \\ & \forall p \in P : p \text{ ist beschränkt und } \forall p \in P' \setminus P : p \text{ ist beschränkt} \Leftrightarrow N'_{M'_0} \text{ ist beschränkt.} \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “

$$N'_{M'_0} \text{ ist beschränkt} \Leftrightarrow \forall p \in P' \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall M' \in EG' : M'(p) \leq n$$

$\Rightarrow \forall p \in P \subseteq P' \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall M \in EG : M(p) = f_V(M)(p) \leq n \Leftrightarrow N_{M_0}$  ist beschränkt.  $\square$

**Bemerkung:**

- Die Rückrichtung von 4. gilt nur für solche T-Invarianten in  $N'$ , für die es einen zugehörigen Pfad  $M' \xRightarrow{*} M' \in MG'$  gibt, so dass  $M'$  einer Markierung  $M$  in  $MG$  entspricht, also  $M'(p) + M'(\bar{p}) = K(p)$  für alle Stellen  $p$  mit beschränkter Kapazität. D.h. für eine in  $N'$  realisierbare T-Invariante muss es keine Realisierung in  $N$  geben.
- Durch 5. und 6. werden alle P-Invarianten von  $N'$  erreicht, d.h. jede P-Invariante von  $N'$  lässt sich als Linearkombination von P-Invarianten der Form in 5. und 6. darstellen.

# Kapitel 5

## Simulation und Verifikation von Netzen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Darstellung von S/T-Netzen durch Matrizen und Vektoren. Das hat folgende Vorteile:

- Die Berechnung von Schaltsequenzen lässt sich durch eine Matrizen-Vektor-Berechnung ausdrücken und ist somit die Basis für automatische Berechnung.
- Paralleles Schalten lässt sich durch eine Vektoraddition ausdrücken.
- Invarianten können berechnet werden.  
Invarianten sind entweder Zustände, die sich im Laufe des Ablaufs nicht ändern, also invariant bleiben (Stellen-Invarianten, siehe Definition 4.4), oder Schaltsequenzen, die immer wieder durchlaufen werden können (Transitions-Invarianten, siehe Definition 4.12).

Beide stellen eine Methode zur Überprüfung der Korrektheit eines Netzes dar.

Für die Matrix-Darstellung müssen wir Netze mit unbeschränkten Kapazitäten voraussetzen. Dies stellt jedoch keine Einschränkung dar, weil jedes Netz mit Kapazitäten durch ein äquivalentes Netz ohne Kapazitäten ausgedrückt werden kann (siehe Definition 1.16 und Satz 1.19).

In Anhang A.2 wiederholen wir die nötigen Grundbegriffe der linearen Algebra. In Abschnitt 5.1 führen wir die Matrix-Darstellung von S/T-Netzen ein und untersuchen das Schaltverhalten. Die Berechnung von Invarianten in Abschnitt 5.2 führt dann in Abschnitt 5.3 zur Verifikation der in Abschnitt 1.4 formulierten Korrektheitsbedingungen.

### 5.1 Matrix-Darstellung und Simulation von Netzen

Im Folgenden werden wir für S/T-Netze eine Repräsentation entwickeln, die einen optimierten Zugriff auf die für das Schalten notwendigen Informationen bietet und die effiziente Analyse bestimmter Netzeigenschaften ermöglicht. Die *Matrix-Darstellung für S/T-Netze*

Tabelle 5.1: Matrix-Darstellung des Leser-Schreiber-Netzes

<u>pre/post</u>	T1s	T2s	T3s	T1l	T2l	T3l	$M_0$
Pz	1/0		0/1	1/0		0/1	3
Psb	0/1	1/0					
Ps		0/1	1/0				
Plb				0/1	1/0		
Pl					0/1	1/0	
Pexc		3/0	0/3		1/0	0/1	3

funktioniert rein syntaktisch und kommt daher einer Implementierung nahe. Außerdem erreichen wir eine Vereinfachung der Schreibweise und des Rechnens und bekommen oben-  
drin das parallele Schalten von Transitionen quasi geschenkt.

**Definition 5.1 (S/T-Netz in Matrix-Darstellung)**

Ein *S/T-Netz in Matrix-Darstellung*  $\underline{N} = (P, T, \underline{pre}, \underline{post})$  besteht aus einer endlichen Menge von Transitionen  $T$ , einer endlichen Menge von Stellen  $P$ , sowie zwei positiven Matrizen  $\underline{pre}, \underline{post} : P \times T \rightarrow \mathbb{N}_0$ .

Sei  $\underline{N} = (P, T, W)$  ein S/T-Netz. Dann ist die *Matrix-Darstellung*  $\underline{N}$  von  $N$  durch  $\underline{N} = (P, T, \underline{pre}, \underline{post})$  gegeben, für  $\underline{pre}$  und  $\underline{post} : P \times T \rightarrow \mathbb{N}_0$  mit

- $\underline{pre}(p, t) = W(p, t)$
- $\underline{post}(p, t) = W(t, p)$

Ein *markiertes Netz in Matrix-Darstellung*  $\underline{N}_{M_0}$  ist ein S/T-Netz in Matrix-Darstellung  $\underline{N}$  zusammen mit einem  $P$ -Vektor  $M_0 : P \rightarrow \mathbb{N}_0$  als Anfangsmarkierung.

Dabei gibt  $\underline{pre}$  an, wieviele Token die Transition  $t$  beim Schalten von  $p$  entnehmen muss, und  $\underline{post}$  beschreibt, wieviele Token  $t$  auf  $p$  ablegt. Die Matrix-Darstellung eines S/T-Netzes ist also nicht viel mehr als eine tabellarische Darstellung der Flussrelation zusammen mit den Kantengewichten. Da Markierungen Abbildungen  $M : P \rightarrow \mathbb{N}_0$  sind, können wir sie auch als Vektoren über der Stellenmenge des betreffenden Netzes schreiben. Tabelle 5.1 zeigt die Matrix-Darstellung des Leser-Schreiber-Netzes aus Abbildung 1.4.  $\underline{pre}$  und  $\underline{post}$  werden zusammen dargestellt, da sie beide die gleiche Zeilen- und Spaltenzahl haben. Alle fehlenden Einträge sind gleich 0. Die Anfangsmarkierung  $M_0$  wird als Spaltenvektor dargestellt.

Mit Hilfe von Addition, Subtraktion und Multiplikation von Matrizen bzw. Vektoren definieren wir nun das Schaltverhalten eines Netzes in Matrix-Darstellung. Wie angekündigt beinhaltet es schon das parallele Schalten endlich vieler Transitionen.

**Definition 5.2 (Schaltverhalten eines Netzes in Matrix-Darstellung)**

Sei  $\underline{N}$  ein S/T-Netz in Matrix-Darstellung wie in Definition 5.1 und  $M : P \rightarrow \mathbb{N}_0$  eine Markierung für  $N$ .



1. Ein *Schaltvektor* ist ein positiver Vektor  $v : T \rightarrow \mathbb{N}_0$ , der jeder Transition  $t \in T$  die Häufigkeit ihres Schaltens zuordnet.  $v$  heißt *M - aktiviert*, falls  $M \geq \underline{pre} \cdot v$ .
2. Ein *M-aktivierter* Schaltvektor  $v$  bestimmt eine *Folgemarkierung*  $M'$  von  $M$  durch  $M' = M - \underline{pre} \cdot v + \underline{post} \cdot v = M + (\underline{post} - \underline{pre}) \cdot v$ .

Die (ganzzzahlige) Matrix  $\underline{I} = \underline{post} - \underline{pre}$  heißt *Inzidenzmatrix* des Netzes  $N$ . Wir sagen auch  $v$  *schaltet von M nach M'* und schreiben  $M[v]M'$ .

### Beispiel 5.3

Unser Leser-Schreiber-System hat folgende Inzidenzmatrix:

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Da die Vor- und Nachbereiche jeder Transition dieses Netzes disjunkt sind, lässt sich die Matrix  $\underline{pre}$  rekonstruieren, indem einfach in  $\underline{I}$  alle positiven Einträge ausgeblendet, und das Vorzeichen der verbleibenden gewechselt wird. Analog erhält man  $\underline{post}$ , indem man alle negativen Einträge weglässt.

Untersuchen wir nun, inwiefern die obige Definition paralleles Schalten ermöglicht. Wir haben bereits in Abschnitt 3.1 festgestellt, dass in unserem Leser-Schreiber-Netz die Schaltschritte  $M_0[T1s]M_1$  und  $M_0[T1l]M_2$  nebenläufig sind, also unserer Intuition nach parallelisierbar sein sollten. Zunächst führen wir für jede Transition  $t \in T$  den *charakteristischen Vektor*  $c_t : T \rightarrow \mathbb{N}_0$  ein mit

$$c_t(x) = \begin{cases} 1 & ; \text{ falls } x = t \\ 0 & ; \text{ sonst} \end{cases}.$$

Den parallelen Schaltschritt von  $T1s$  und  $T1l$  wollen wir durch  $M_0[c_{T1s} + c_{T1l}]M_3$  beschreiben, wobei  $c_{T1s} + c_{T1l} : T \rightarrow \mathbb{N}_0$  den Schaltvektor beschreibt, der für  $T1s$  und  $T1l$  jeweils eine Eins und sonst nur Nullen enthält. Nach unserer Definition müssen wir nun zur Realisierung dieses Schaltvorganges zunächst überprüfen, ob  $\underline{pre} \cdot (c_{T1s} + c_{T1l}) \leq M_0$  gilt.

Die Multiplikation der  $\underline{pre}$ -Matrix mit dem Schaltvektor  $c_{T1s} + c_{T1l}$  kann man sich anschaulich so vorstellen, dass zunächst  $T1s$  und  $T1l$  durch die entsprechenden Spalten der  $\underline{pre}$ -Matrix ersetzt, und diese dann anschließend addiert werden. Wir rechnen also  $\underline{pre} \cdot (c_{T1s} + c_{T1l}) = \underline{pre} \cdot (1, 0, 0, 1, 0, 0) = (2, 0, 0, 0, 0, 0) < (3, 0, 0, 0, 0, 0) = M_0$ . Das Ergebnis ist ein Stellenvektor  $M : P \rightarrow \mathbb{N}_0$ , d.h. eine Markierung. Die  $\leq$ -Relation auf Vektoren ist komponentenweise definiert, d.h.  $\underline{pre} \cdot (c_{T1s} + c_{T1l}) \leq M_0$  ist erfüllt, wenn auf jeder Stelle  $p \in P$  wenigstens so viele Token liegen, wie  $T1s$  und  $T1l$  zusammen von dort abziehen wollen.

Das Schalten selbst erfolgt dadurch, dass zuerst  $\underline{pre} \cdot (c_{T1s} + c_{T1l})$  von der Markierung  $M_0$  abgezogen wird, d.h.  $T1s$  und  $T1l$  entnehmen *gleichzeitig* die Token aus ihrem Vorbereich, und anschließend wird zu der dadurch entstandenen Markierung  $\underline{post} \cdot (c_{T1s} + c_{T1l})$  hinzuaddiert, was das gleichzeitige Ablegen der Token auf den Nachbereichsstellen beschreibt. Wenn wir anstelle des Schaltvektors  $v$  nur *charakteristische Vektoren* von Transitionen zulassen, bekommen wir für Netze in Matrix-Darstellung genau das (sequentielle) Schaltverhalten nach Definition 1.6. Das sequentielle Schalten ist also ein Spezialfall des parallelen. Andersherum lässt sich jeder parallele Schaltschritt in beliebiger Reihenfolge sequentialisieren.

#### Satz 5.4 (Paralleles und Sequentielles Schalten)

Sei  $N$  ein S/T-Netz,  $MG$  sein Markierungsgraph und  $\underline{N}$  die Matrix-Darstellung von  $N$ . Dann gilt:

1. Für  $t \in T$  existiert ein Schaltschritt  $M[c_t]M'$  **gdw.**  $M \xrightarrow{t} M_1$  ist ein Schaltschritt in  $MG$  mit  $M_1 = M'$ .
2. Für einen Schaltvektor  $v : T \rightarrow \mathbb{N}_0$  und  $M \in MG$ , so dass  $v$   $M$ -aktiviert ist, gilt:  
Der parallele Schaltschritt  $M[v]M'$  existiert **gdw.** es gibt einen Pfad  $M_1 \xrightarrow{t_1} \dots \xrightarrow{t_k} M_{k+1}$  in  $MG$  mit  $M_1 = M$  und  $M_{k+1} = M'$  für jede Folge von Transitionen  $t_1, \dots, t_k$  mit  $c_{t_1} + \dots + c_{t_k} = v$ .

#### Beweis:

1. Wir zeigen zuerst dass gilt:  $t$  ist  $M$ -aktiviert  $\Leftrightarrow c_t$  ist  $M$ -aktiviert.

$$\begin{aligned}
t \text{ ist } M\text{-aktiviert} &\stackrel{\text{Def. 1.6}}{\Leftrightarrow} \forall p \in \bullet t : M(p) \geq W(p, t) \\
&\stackrel{\text{Def. pre}}{\Leftrightarrow} \forall p \in \bullet t : M(p) \geq \underline{pre}(p, t) \\
&\Leftrightarrow \forall p \in P : M(p) \geq \underline{pre}(p, t) \text{ (da } \forall p \in P \setminus \bullet t : \underline{pre}(p, t) = 0) \\
&\Leftrightarrow M \geq \underline{pre} \cdot c_t \stackrel{\text{Def. 5.2}}{\Leftrightarrow} c_t \text{ ist } M\text{-aktiviert.}
\end{aligned}$$

Nun muss noch gezeigt werden, dass  $M' = M_1$ .

Für alle  $p \in P$  gilt:  $M'(p) = M(p) - \underline{pre}(p, t) + \underline{post}(t, p) = M(p) - W(p, t) + W(t, p) = M_1(p)$ , also  $M' = M_1$ .

2. Beweis durch vollständige Induktion über die Anzahl  $k$  der charakteristischen Schaltvektoren in  $v$ , also  $k = \sum_{t \in T} v(t)$ .

Induktionsanfang:  $k = 0$ , also  $v = 0$

Für jede Markierung  $M$  gilt:  $M \geq 0 = \underline{pre} \cdot v$ , also ist  $v$   $M$ -aktiviert und  $M \xrightarrow{0} M$  ist Pfad in  $MG$ .

Induktionsannahme: Sei  $v$   $M$ -aktiviert mit  $v = c_{t_1} + \dots + c_{t_n}$ . Es gibt den Schaltschritt  $M[v]M' \Leftrightarrow$  für jede Folge  $t_1 \dots t_n$  gilt: der Pfad  $M_1 \xrightarrow{t_1} \dots \xrightarrow{t_n} M_{n+1}$  ist in  $MG$ .

Induktionsschritt:  $n \mapsto n + 1$ .

" $\Leftarrow$ trivial

" $\Rightarrow$ SSei  $v = c_{t_1} + \dots + c_{t_{n+1}}$  Schaltvektor und  $M = M_1[v]M'_{n+2}$ .

Wir wählen einen beliebigen charakteristischen Vektor  $c_{t_i}$ ,  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ . Dieser ist unter  $M_1$  aktiviert, da  $c_{t_i} \leq v$  und deshalb  $\underline{pre} \cdot c_{t_i} \leq \underline{pre} \cdot v \leq M_1$ . Sei  $M_2$  Folgemarkierung von  $M_1$  unter  $c_{t_i}$ , dann ist  $v' = c_{t_1} + \dots + c_{t_{i-1}} + c_{t_{i+1}} \dots c_{t_{n+1}} = v - c_{t_i}$  unter  $M_2$  aktiviert, denn

$$\begin{aligned} M_2 &= M_1 - \underline{pre} \cdot c_{t_i} + \underline{post} \cdot c_{t_i} \\ &= M_1 - \underline{pre}(v - v') + \underline{post} \cdot c_{t_i} \\ &= M_1 - \underline{pre} \cdot v + \underline{pre} \cdot v' + \underline{post} \cdot c_{t_i} \\ &\geq \underline{pre} \cdot v' + \underline{post} \cdot c_{t_i} && \text{da } M_1 - \underline{pre} \cdot v \geq 0 \\ &\geq \underline{pre} \cdot v' && \text{da } \underline{post} \cdot c_{t_i} \geq 0 \end{aligned}$$

Da  $v'$  ein Vektor ist, der sich in  $n$  charakteristische Vektoren zerlegen lässt, also die Induktionsannahme gilt, haben wir  $M_1 \xrightarrow{t_1} \dots \xrightarrow{t_{n+1}} M_{n+2}$

Es gilt also:

$$M_{n+2} = M_1 + \sum_{i=1}^{n+2} (\underline{post} - \underline{pre})c_{t_i} = M_1 + (\underline{post} - \underline{pre}) \sum_{i=1}^{n+2} c_{t_i} = M_1 + I \cdot v = M'_{n+2}$$

□

## 5.2 Berechnung von Invarianten

Eines der grundlegenden Analyseverfahren für S/T-Netze ist die Berechnung von Invarianten mit den Mitteln der linearen Algebra. Wir werden diese Berechnungsmethode einführen und die Zusammenhänge zu den Invarianten im Erreichbarkeits- und Markierungsgraphen zeigen.

### P-Invarianten

Eine P-Invariante ist ein Stellenvektor  $I_P : P \rightarrow \mathbb{N}_0$ , so dass für alle  $M \xrightarrow{t} M' \in MG$  gilt:  $\sum_{p \in P} I_P(p) \cdot M(p) = \sum_{p \in P} I_P(p) \cdot M'(p)$ . Die obigen Summen repräsentieren das Skalarprodukt von Vektoren, wir schreiben daher kürzer  $I_P^T \cdot M = I_P^T \cdot M'$ . Mit der Definition der Folgemarkierung  $M' = M + \underline{I} \cdot c_t$  wird daraus  $I_P^T \cdot M = I_P^T \cdot (M + \underline{I} \cdot c_t) = I_P^T \cdot M + I_P^T \cdot \underline{I} \cdot c_t$ . Durch Subtraktion von  $I_P^T \cdot M$  erhalten wir  $I_P^T \cdot \underline{I} \cdot c_t = 0$ .

Gesucht sind also alle Stellenvektoren  $I_P$ , so dass das Produkt jeder Spalte der Matrix  $\underline{I}$  mit  $I_P^T$  0 ergibt. Das ist äquivalent zu der Aussage, dass  $I_P^T \cdot \underline{I} = \underline{0}^T$  gilt, wobei  $\underline{0} : T \rightarrow \mathbb{Z}$  der Nullvektor über  $T$  ist. Um dieser Bedingung die Form eines linearen Gleichungssystems zu geben, transponieren wir beide Seiten der Gleichung und erhalten  $(I_P^T \cdot \underline{I})^T = (\underline{0}^T)^T$  und daraus  $\underline{I}^T \cdot I_P = \underline{0}$ .

P-Invarianten sind also alle ganzzahligen Lösungsvektoren des obigen linearen Gleichungssystems.

### Satz 5.5 (P-Invarianten)

Sei  $\underline{N}$  ein S/T-Netz in Matrix-Darstellung und  $\underline{I}$  seine Inzidenzmatrix. Ein Stellenvektor  $I_P$  ist eine P-Invariante von  $\underline{N}$  **gdw.**  $I_P$  ist eine ganzzahlige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\underline{I}^T \cdot x = \underline{0}.$$

**Beweis:**  $\sum_{p \in P} I_P(p) \cdot M(p) = \sum_{p \in P} I_P(p) \cdot M'(p)$  für  $M \xrightarrow{t} M'$  entspricht in Matrix-Darstellung

$I_P^T \cdot M = I_P^T \cdot M'$ . Dann gilt:

$I_P$  ist P-Invariante

$$\Leftrightarrow \forall M \xrightarrow{t} M' \in MG : I_P^T \cdot M = I_P^T \cdot M'$$

$$\Leftrightarrow \forall M \xrightarrow{t} M' \in MG : \underline{0}^T = I_P^T (M' - M)$$

$$\Leftrightarrow \forall M \xrightarrow{t} M' \in MG : \underline{0}^T = I_P^T (\underline{I} \cdot c_t + M - M')$$

$$\Leftrightarrow \forall M \xrightarrow{t} M' \in MG : \underline{0}^T = I_P^T \cdot \underline{I} \cdot c_t$$

$$\stackrel{*}{\Leftrightarrow} \underline{0}^T = I_P^T \cdot \underline{I}$$

$$\Leftrightarrow \underline{I}^T \cdot I_P = \underline{0}$$

(\*) " $\Leftarrow$ " trivial

" $\Rightarrow$ " Sei  $\underline{0}^T = I_P^T \cdot \underline{I} \cdot c_t$  für alle  $M \xrightarrow{t} M'$ . Für jede Transition  $t$  gibt es eine Markierung  $M$  so dass  $t$   $M$ -aktiviert ist (z.B.  $M = \underline{pre} \cdot c_t$ ). Angenommen  $I_P^T \cdot \underline{I} \neq \underline{0}^T$ . Dann gibt es einen Eintrag  $I_P^T \cdot \underline{I}(t) \neq 0$ , also auch  $I_P^T \cdot \underline{I} \cdot c_t \neq 0$ . Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

Da es für lineare Gleichungssysteme effiziente Lösungsverfahren gibt, können wir mit Satz 5.5 P-Invarianten von Netzen ohne Kapazitätsbeschränkung berechnen. Für Netze mit beschränkter Kapazität müssen wir vorher das dazugehörige Netz mit unbeschränkten Kapazitäten konstruieren. Satz 4.15 sichert uns dann zu, dass wir mit den P-Invarianten des Netzes mit unbeschränkten Kapazitäten auch alle P-Invarianten des Ursprungsnetzes ermitteln.

### Beispiel 5.6 (P-Invarianten für das Leser/Schreiber System)

$$\underline{I}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung des Gleichungssystems  $\underline{I}^T \cdot x = \underline{0}$  :

Durch Zeilenaddition erhalten wir :

$$\begin{array}{cccccc}
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_1' = z_1 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -3 & z_2' = z_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_3' = z_3 + z_1 + z_2 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 & z_4' = z_4 + z_3 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & z_5' = z_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_6' = z_6 + z_4 + z_5
\end{array}$$

Also

$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 &= 0 \\
-x_2 + x_3 - 3x_6 &= 0 \\
-x_3 + x_4 + 3x_6 &= 0 \\
-x_4 + x_5 - x_6 &= 0
\end{aligned}$$

damit können  $x_5$  und  $x_6$  als beliebig angenommen werden, also

$$\begin{aligned}
x_4 &= x_5 - x_6 \\
x_3 &= x_4 + 3x_6 = x_5 + 2x_6 \\
x_2 &= x_3 - 3x_6 = x_5 - x_6 \\
x_1 &= x_2 = x_5 - x_6
\end{aligned}$$

Für  $x_5 = 1, x_6 = 0$  erhalten wir  $x_4 = 1, x_3 = 1, x_2 = 1$  und  $x_1 = 1$ , also als P-Invariante den Stellenvektor  $I_{S_1} = (1, 1, 1, 1, 1, 0)^T$ .

Für  $x_5 = 1, x_6 = 1$  erhalten wir  $x_4 = 0, x_3 = 3, x_2 = 0$ , und  $x_1 = 0$ , also als P-Invariante den Stellenvektor  $I_{S_2} = (0, 0, 3, 0, 1, 1)^T$ .

Lösungen dieses Systems, d.h. P-Invarianten, sind also die Stellenvektoren  $(1, 1, 1, 1, 1, 0)^T$  und  $(0, 0, 3, 0, 1, 1)^T$  sowie alle ganzzahligen Linearkombinationen davon. (Zur Interpretation der P-Invarianten siehe Abschnitt 5.3.)

## T-Invarianten

Eine T-Invariante ist ein Transitionenvektor, der einen Zyklus im Markierungsgraphen beschreibt. Das bedeutet, dass die Anfangsmarkierung wiederhergestellt wird, weil sich die Wirkungen der einzelnen Transitionen gegenseitig aufheben.

### Satz 5.7 (T-Invarianten)

Sei  $\underline{N}$  ein S/T-Netz ohne Kapazitäten,  $\underline{N}$  in Matrix-Darstellung und  $\underline{I}$  seine Inzidenzmatrix. Ein  $T$ -Vektor  $I_T$  ist positive T-Invariante von  $\underline{N}$  **gdw.**  $I_T$  ist eine positive, ganzzahlige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$(1) \quad \underline{I} \cdot x = \underline{0}.$$

**Beweis:** Sei  $I_T$  eine positive ganzzahlige Lösung des Gleichungssystems (1). Es sei  $M \geq \underline{pre} \cdot I_T$ .

Sei  $I_T$  nun T-Invariante, d.h. es existiert ein Zyklus  $M \xrightarrow{t_1} \dots \xrightarrow{t_k} M$  und  $I_T(t) = |\{i \mid t = t_i \wedge 1 \leq i \leq k\}|$ . Letztere Bedingung ist äquivalent zu  $I_T = c_{t_1} + \dots + c_{t_k}$ . Nach Satz 5.4.2 und der Definition der Folgemarkierung gilt:  $M + \sum_{i \in \{1, \dots, k\}} \underline{I} \cdot c_{t_i} = M$ , d.h.  $\sum_{i \in \{1, \dots, k\}} \underline{I} \cdot c_{t_i} = \underline{0}$ . Mit der Distributivität zwischen Addition und Multiplikation folgt  $\underline{I} \cdot \sum_{i \in \{1, \dots, k\}} c_{t_i} = \underline{0}$  und daraus  $\underline{I} \cdot I_T = \underline{0}$ .  $\square$

### Beispiel 5.8 (T-Invarianten für das Leser/Schreiber System)

Das Gleichungssystem zur Berechnung der T-Invarianten sieht im Falle des Leser-Schreiber-Netzes wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Als Lösungen ergeben sich  $(1, 1, 1, 0, 0, 0)^T$  und  $(0, 0, 0, 1, 1, 1)^T$  sowie ebenfalls alle ganzzahligen Linearkombinationen. (Zur Interpretation der T-Invarianten siehe Abschnitt 5.3.)

## 5.3 Verifikation von Korrektheitsanforderungen

In Abschnitt 1.4 haben wir verschiedene Korrektheitsanforderungen formuliert. Mit dem Wissen aus diesem Kapitel ist es uns möglich, diese nun zu verifizieren. Dabei stellen wir die folgende Korrelation fest:

- Sicherheits-Anforderungen können durch P-Invarianten verifiziert werden.
- Lebendigkeits-Anforderungen können durch T-Invarianten verifiziert werden.

### Beispiel 5.9

Für das Leser-Schreiber-System aus Kapitel 1 haben wir in Beispiel 1.13 verschiedene Korrektheitsanforderungen aufgestellt. Durch Interpretation der P- und T-Invarianten des Netzes können wir diese jetzt verifizieren.

#### Sicherheits-Anforderungen

In Beispiel 5.6 haben wir als P-Invarianten alle ganzzahligen Linearkombinationen der Vektoren  $(1, 1, 1, 1, 1, 0)^T$  und  $(0, 0, 3, 0, 1, 1)^T$  berechnet. Es gilt also für jede Folgemarkierung  $M$  von  $M_0$ :

- (1)  $M(Pz) + M(Psb) + M(Ps) + M(Plb) + M(Pl) = M_0(Pz) + M_0(Psb) + M_0(Ps) + M_0(Plb) + M_0(Pl) = 3$
- (2)  $3 \cdot M(Ps) + M(Pl) + M(Pexc) = 3 \cdot M_0(Ps) + M_0(Pl) + M_0(Pexc) = 3$

Somit gelten die geforderten Sicherheits-Anforderungen:

- $M(Pl) \leq 3$  (folgt aus (1))
- $M(Ps) \leq 1$  (folgt aus (2))
- $M(Pl) > 0 \Rightarrow M(Ps) = 0, M(Ps) > 0 \Rightarrow M(Pl) = 0$  (folgt aus (2))
- $M(Pz) + M(Plb) + M(Pl) + M(Psb) + M(Ps) = 3$  (1)

### Lebendigkeits-Anforderungen

Mit den in Beispiel 5.8 berechneten T-Invarianten zeigen wir jetzt die Lebendigkeits-Anforderungen. Die berechneten Vektoren  $(1, 1, 1, 0, 0, 0)^T$  und  $(0, 0, 0, 1, 1, 1)^T$  entsprechen Schaltsequenzen. (Allerdings geben die Vektoren keinen Hinweis darauf, in welcher Reihenfolge die Transitionen schalten müssen.) D.h., es existieren Markierungen (in diesem Fall  $M_0$ ), so dass gilt:

$$(1) \quad M_0 \xrightarrow{T1s} M_1 \xrightarrow{T2s} M_2 \xrightarrow{T3s} M_0 \text{ (vollständiger Schreibprozess)}$$

$$(2) \quad M_0 \xrightarrow{T1l} M'_1 \xrightarrow{T2l} M'_2 \xrightarrow{T3l} M_0 \text{ (vollständiger Leseprozess)}$$

Die Linearkombination  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)^T = (1, 1, 1, 0, 0, 0)^T + (0, 0, 0, 1, 1, 1)^T$  führt dann zu dem alternierenden Schreib- und Leseprozess  $M_0 \xrightarrow{T1s} M_1 \xrightarrow{T2s} M_2 \xrightarrow{T3s} M_0 \xrightarrow{T1l} M'_1 \xrightarrow{T2l} M'_2 \xrightarrow{T3l} M_0$ .

# Kapitel 6

## Analyse der schaltsemantischen Graphen

### 6.1 Kondensationsgraph

Dieses Kapitel wird im Laufe des Semesters hoffentlich noch nachgereicht.



## 6.2 Der Überdeckungsgraph

Dieses Kapitel basiert im wesentlichen auf [Abe90] und [KK07]. Der Erreichbarkeitsgraph eines S/T-Netzes, das unbeschränkte Stellen hat, ist unendlich. Um diese unendliche Darstellung zu vermeiden, soll ein endlicher Überdeckungsgraph konstruiert werden. Dieser Überdeckungsgraph approximiert den Erreichbarkeitsgraphen, indem regelmäßige, unendliche Teilstrukturen durch verallgemeinerte Markierungen in endliche Teilgraphen überdeckt werden. Die grundlegenden Ergebnisse dazu wurden bereits in [KM69] erzielt.

Dafür definieren wir zunächst, was Überdeckung bedeutet. Die „kleiner-gleich“-Relation haben wir auf Markierungen übertragen, indem  $M \leq M'$  genau dann gilt, wenn  $M(p) \leq M'(p)$  für alle Stellen  $p \in P$  (siehe auch Def. 1.5).

Eine verallgemeinerte Markierungen  $\overline{M}$  (auch  $\omega$ -Markierung genannt) überdeckt eine Markierung  $M \trianglelefteq \overline{M}$ , indem  $\overline{M}(p) = \omega > M(p)$  ausdrückt, dass die Stelle  $p$  unbeschränkt ist, aber für alle beschränkten Stellen gleich ist. Dann wird  $p$  auch  $\omega$ -Stelle genannt.

### Definition 6.1 (Verallgemeinerte Markierung)

Eine verallgemeinerte Markierung  $\overline{M}$  eines S/T-Netz  $N = (P, T, W)$  ist eine Abbildung  $\overline{M} : P \rightarrow \mathbb{N}_0^\omega$  mit diesen Rechenregeln:

$$n \cdot \omega = \omega + n = \omega - n = \omega \text{ und } n < \omega \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

Für verallgemeinerte Markierungen gilt ebenso wie für Markierungen allgemein:

$\overline{M} \leq \overline{M}'$  genau dann, wenn für alle  $p \in P$  gilt  $\overline{M}(p) \leq \overline{M}'(p)$ .

$\Omega(\overline{M}) := \{p \in P \mid \overline{M}(p) = \omega\}$  ist die Menge der unbeschränkten Stellen.

Durch die Rechenregeln in Definition 6.1 ist das Schaltverhalten auch für verallgemeinerte Markierungen wohldefiniert.

### Definition 6.2 (Überdeckende Markierung)

Eine verallgemeinerte Markierung  $\overline{M}$  überdeckt  $M$  genau dann, wenn für alle  $p \in P$  gilt  $\overline{M}(p) = \omega$  oder  $\overline{M}(p) = M(p)$ , geschrieben  $\overline{M} \trianglerighteq M$ .

### Satz 6.3 (Endlich viele, kleinere, erreichbare Markierungen)

Eine (verallgemeinerte) Markierung hat nur endlich viele, erreichbare Markierungen, die kleiner sind.

**Beweis:** Für eine (verallgemeinerte) Markierung  $\overline{M}$  ist zeigen:

$$|\{\overline{M}' \mid \overline{M}' \in [\overline{M}] \text{ und } \overline{M} \geq \overline{M}'\}| \in \mathbb{N}_0$$

Nun gilt für jede (verallgemeinerte) Markierung mit  $\overline{M}(p) = \omega$ , dass für jede erreichbare Markierung  $\overline{M}' \in [\overline{M}]$  auch schon  $\overline{M}'(p) = \omega$  gilt, denn  $\omega + n = \omega - n = \omega$ .

Dann sei  $Var_{\overline{M}} : P \rightarrow \mathbb{N}_0$  die Anzahl der möglichen Markierungen an der Stelle  $P$ , so dass

$$\overline{M} \text{ größer ist, also } Var_{\overline{M}}(p) = \begin{cases} \overline{M}(p) + 1 & , \text{ falls } \overline{M}(p) \neq \omega \\ 1 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Denn für  $\overline{M}(p) \neq \omega$  kann  $\overline{M}'(p) \in \{0, 1, \dots, \overline{M}(p)\}$  sein, also  $\overline{M}(p) + 1$  Möglichkeiten. Und für  $\overline{M}(p) = \omega$  ist  $\overline{M}'(p) = \omega$ , also gibt es nur diese eine Möglichkeit.

Genauer ist also

$$|\{\overline{M}' | \overline{M} \xrightarrow{*} \overline{M}' \text{ und } \overline{M} \geq \overline{M}'\}| = \prod_{p \in P} Var_{\overline{M}}(p) \in \mathbb{N}_0$$

wobei  $\prod_{p \in P} Var_{\overline{M}}(p) = Var_{\overline{M}}(p_1) \cdot Var_{\overline{M}}(p_2) \cdot \dots \cdot Var_{\overline{M}}(p_n)$  für  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ .  $\square$

Eine verallgemeinerte Markierung überdeckt alle Markierungen, die – bis auf die  $\omega$ -Stellen – gleich sind und die an den  $\omega$ -Stellen beliebig viele, also  $k \in \mathbb{N}_0$  Token haben. Diese heißen dann  $k$ -Markierungen.

**Definition 6.4 ( $k$ -Markierung)**

$M^k$  ist  $k$ -Markierung von  $\overline{M}$ , genau dann wenn

- $M^k(p) \geq k$  für alle  $p \in \Omega(\overline{M})$  und
- $M^k(p) = \overline{M}(p)$  für alle  $p \in P \setminus \Omega(\overline{M})$

**Folgerung 6.5**

1. Sei  $M^k$  eine  $k$ -Markierung von  $\overline{M}$ , dann  $\overline{M} \geq M^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ .
2. Sei  $M$  eine Markierung mit  $\overline{M} \geq M$ , dann gibt es  $k \in \mathbb{N}_0$ , so dass  $M = M^k$  eine  $k$ -Markierung von  $\overline{M}$  ist.

Ein überdeckender Graph für ein S/T-Netz liegt vor, wenn einerseits das gesamte Schaltverhalten des Netzes abgebildet wird und andererseits die verallgemeinerten Markierungen das unbeschränkte Wachsen der Tokenmenge auf eine Stelle repräsentieren. Das heißt, nur unbeschränkte Stellen sind in einem überdeckenden Graph auch  $\omega$ -Stellen.

**Definition 6.6 (Überdeckender Graph)**

Ein Überdeckungsgraph  $UG = (UV, UE)$  für ein markiertes S/T-Netz  $N = (P, T, W, M_0)$  ist ein Graph mit der Knotenmenge  $UV \subseteq \{\overline{M} | \text{ist verallgemeinerte Markierung von } N\}$  und  $UE \subseteq UV \times T \times UV$ , so dass folgendes gilt:

1. Zu jeder Schaltsequenz in  $N$  existiert ein Pfad in  $UG(N)$ :  
Für jede Schaltsequenz  $M_0[t_1]M_1[t_2]\dots[t_n]M_n$  gibt es einen Pfad  $M_0 \xrightarrow{t_1} \overline{M}_1 \xrightarrow{t_2} \dots \xrightarrow{t_n} \overline{M}_n$  mit  $\overline{M}_i \geq M_i$  für  $1 \leq i \leq n$ .
2. Jeder Knoten von  $UG(N)$  überdeckt mindestens eine erreichbare Markierung, wobei die  $\omega$ -Stellen unbeschränkt sind:  
Für jedes  $\overline{M} \in UV$  und jedes  $k \in \mathbb{N}_0$  gibt es ein erreichbares  $M \in [M_0]$ , so dass  $M$  eine  $k$ -Markierung von  $\overline{M}$  ist.

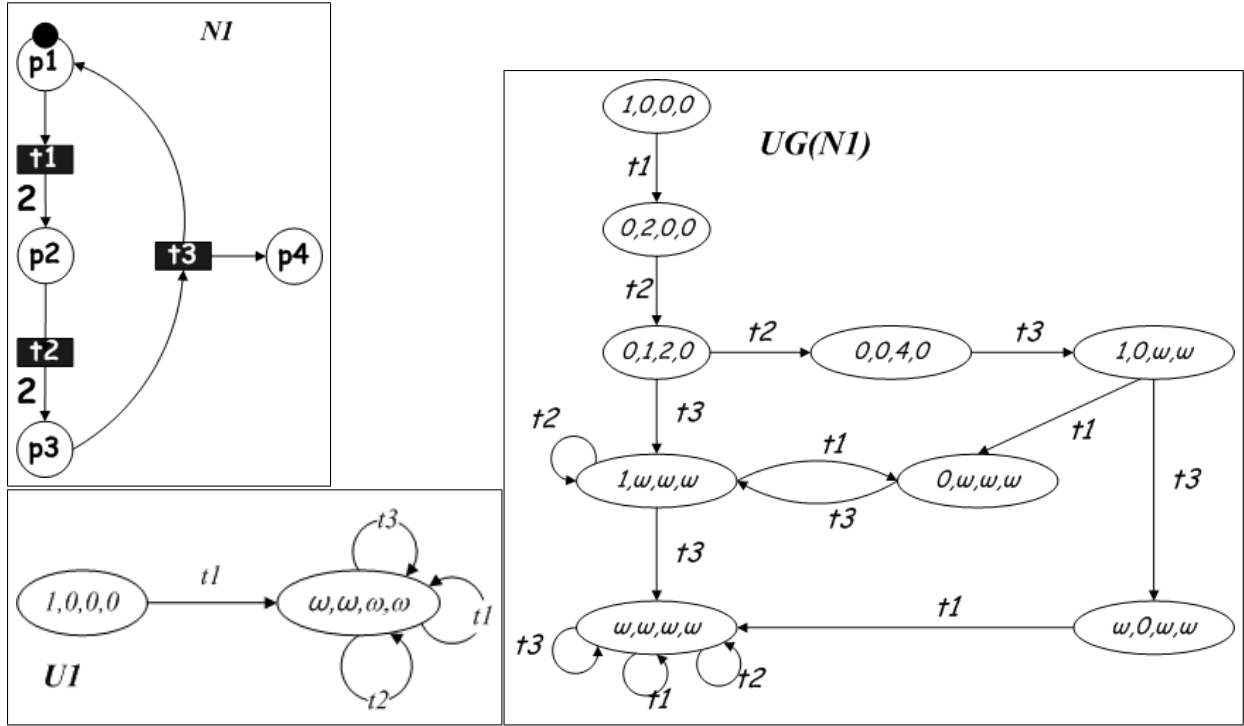


Abbildung 6.1: S/T Netz und überdeckende Graphen

### Beispiel 6.7

Für das S/T-Netz  $N1$  in Abbildung 6.1 gibt es u.a. diese überdeckenden Graphen:

1. der Erreichbarkeitsgraph  $EG$  (nicht abgebildet)
2. der Überdeckungsgraph (siehe Konstruktion 6.8)  $UG(N1)$  in Abbildung 6.1
3. ein überdeckender Graph  $U1$  in Abbildung 6.1

Die folgende Konstruktion ergibt einen konkreten Überdeckungsgraphen, ist nicht unbedingt eindeutig:  $N$  kann mehrere verschiedene Überdeckungsgraphen haben, denn bei dem Aufbau des Überdeckungsgraphen können verschiedene Transitionen ausgewählt werden. Abhängig von der Reihenfolge der Auswahl der Transitionen können unterschiedliche Überdeckungsgraphen konstruiert werden.

Dieses Verfahren terminiert, wenn für jede verallgemeinerte Markierung  $\overline{M}$  und jede  $\overline{M}$ -aktivierte Transition  $t$  eine entsprechende Kante in  $\overline{M}$  beginnt.

### Konstruktion 6.8 ( des Überdeckungsgraphen $UG(N)$ )

Gegeben ein markiertes S/T-Netz  $N = (P, T, W, M_0)$  dann wird der Überdeckungsgraph  $UG$  rekursiv berechnet:

1. Wir wählen als Anfangsgraph  $UG_0 = (UV_0, UE_0)$  mit  $UV_0 = \{M_0\}$  und  $UE_0 = \emptyset$ .

2. Sei  $UG_i = (UV_i, UE_i)$  und  $\overline{M} \in UV_i$  eine verallgemeinerte Markierung, so dass  $\overline{M}[t]\overline{M}''$ , aber keine Kante  $\overline{M} \xrightarrow{t} \in UE_i$  existiert:

$$\overline{M}'(p) = \begin{cases} \omega & ; \text{ falls ein Knoten } Y \text{ in } M_0 \xrightarrow{*} Y \xrightarrow{*} \overline{M}'' \\ & \text{so dass } Y \leq \overline{M}'' \text{ und } Y(p) < \overline{M}''(p) \\ \overline{M}''(p) & ; \text{ sonst} \end{cases}$$

Dann ist  $UV_{i+1} = UV_i \cup \{\overline{M}'\}$  und  $UE_{i+1} = UE_i \cup \{\overline{M} \xrightarrow{t} \overline{M}'\}$ .  
Also  $UG_{i+1} = (UV_{i+1}, UE_{i+1})$

3. Wenn für alle verallgemeinerte Markierungen  $\overline{M} \in UV_m$  mit  $\overline{M}[t]\overline{M}''$  auch schon eine Kante  $\overline{M} \xrightarrow{t} \in UE_m$  existiert, dann definiert dieses Maximum den Überdeckungsgraph  $UG(N) := (UV_m, UE_m)$ .

Der Überdeckungsgraph  $UG(N1)$  in Abbildung 6.1 entspricht dieser Konstruktion.

**Satz 6.9 (Eigenschaften des Überdeckungsgraphs  $UG(N)$ )**

$UG(N)$  der Überdeckungsgraph eines S/T-Netzes  $N$  ist wohl-definiert. Es gilt:

1.  $UG(N)$  ist ein Graph über  $T$ .
2.  $UG(N)$  ist endlich.
3.  $UG(N)$  ist ein überdeckender Graph:
  - Zu jeder Schaltsequenz in  $N$  existiert ein Pfad in  $UG(N)$ .
  - Jeder Knoten von  $UG(N)$  überdeckt mindestens eine erreichbare Markierung.

**Beweis:**

1.  $UG(N)$  ist ein Graph über  $T$ :

Denn  $UV_m$  besteht aus verallgemeinerten Markierungen und aufgrund der Konstruktion gilt  $UE_m \subseteq UV_m \times T \times UV_m$ .

2.  $UG(N)$  ist endlich:

**Beweis durch Widerspruch:** Sei  $UG(N)$  unendlich. Dann gibt es einen unendlichen, zyklensfreien Pfad  $M_0 \xrightarrow{t_1} \overline{M}_1 \xrightarrow{t_2} \dots$

Wegen Satz 6.3 gilt aber für jede Markierung  $\overline{M}_i$  des Pfades existiert eine erreichbare Markierung  $\overline{M}_j \in [\overline{M}_i]$  mit  $\overline{M}_j \geq \overline{M}_i$  und da der Pfad keine Zyklen hat, sind die Markierungen paarweise unterschiedlich<sup>1</sup>, also  $\overline{M}_j > \overline{M}_i$ .

Dann ist aber aufgrund der Konstruktion auch  $|\Omega(\overline{M}_j)| > |\Omega(\overline{M}_i)|$ , denn für ein  $p \in P$  muss  $\overline{M}_j(p) = \omega \neq \overline{M}_i$  gelten. Also gibt es kein größtes  $\Omega(\overline{M}_m)$ .

---

<sup>1</sup>Aus  $n_1 \neq n_2$  folgt  $\overline{M}_{n_1} \neq \overline{M}_{n_2}$

Aber für alle verallgemeinerten Markierungen  $\overline{M}$  gilt  $\Omega(\overline{M}) \leq |P|$ , also ist der Pfad entweder nicht unendlich oder nicht zyklisch.

## WIDERSPRUCH

3.  $UG(N)$  ist ein überdeckender Graph:

- Zu jeder Schaltsequenz in  $N$  existiert ein Pfad in  $UG(N)$ .

**Beweis durch Induktion** über die Länge der Schaltsequenz:

Für jede Schaltsequenz  $M_0[t_1]M_1[t_2]\dots[t_n]M_n$  gibt es einen Pfad in  $UG(N)$  mit  $M_0 \xrightarrow{t_1} \overline{M}_1 \xrightarrow{t_2} \dots \xrightarrow{t_n} \overline{M}_n$  mit  $\overline{M}_i \supseteq M_i$  für  $1 \leq i \leq n$ .

**Induktionsanfang**  $n = 0$ :  $M_0 \in UV_0$  also auch  $M_0 \in UG(N)$  und  $M_0 \supseteq M_0$ .

**Induktionsbehauptung:** Für  $M_0[t_1]M_1[t_2]\dots[t_{n-1}]M_{n-1}$  gibt es einen Pfad in  $UG(N)_{n-1}$  mit  $M_0 \xrightarrow{t_1} \overline{M}_1 \xrightarrow{t_2} \dots \xrightarrow{t_{n-1}} \overline{M}_{n-1}$  mit  $\overline{M}_i \supseteq M_i$  für  $1 \leq i \leq n-1$ .

**Induktionsschritt**  $n-1 \mapsto n$ : Für  $M_{n-1}[t]M_n$  gilt  $\overline{M}_{n-1}$  aktiviert  $t$ , denn laut Induktionsbehauptung gilt  $\overline{M}_{n-1} \supseteq M_{n-1}$ . Also gibt es  $\overline{M}_{n-1} \xrightarrow{t} \overline{M}_n$ . Laut Konstruktion ist entweder  $\overline{M}_n(p) = \omega > M_n(p)$  oder  $\overline{M}_n(p) = M_n(p)$ . Also  $\overline{M}_n \supseteq M_n$ .

- Jeder Knoten von  $UG(N)$  überdeckt mindestens eine erreichbare Markierung, wobei die  $\omega$ -Stellen unbeschränkt sind.

Wir brauchen eine **geschachtelte Induktion** über die rekursiv aufgebauten Überdeckungsgraphen  $UG_i$  und dann über die Anzahl der  $\omega$ -Stellen:

Für jedes  $\overline{M} \in UG(N)$  und jedes  $k \in \mathbb{N}_0$  gibt es ein erreichbares  $M \in [M_0]$ , so dass  $M$  eine  $k$ -Markierung von  $\overline{M}$  ist.

**Induktionsanfang**  $n = 0$ :  $M_0 \in UV_0$ , wegen  $\Omega(M_0) = \emptyset$  ist  $M_0 \in [M_0]$   $k$ -Markierung von sich selbst.

**Induktionsbehauptung:** Für  $\overline{M}_{n-1} \in UV_{n-1}$  und jedes  $k \in \mathbb{N}_0$  gibt es eine  $k$ -Markierung  $M_{n-1}^k \in [M_0]$ .

**Induktionsschritt**  $n-1 \mapsto n$ : Für  $\overline{M}_n \in UV_n$  gibt es eine Kante  $\overline{M}_{n-1} \xrightarrow{t} \overline{M}_n \in UE_n$  und für alle  $p \in \Omega(\overline{M}_n)$  gilt:

**Induktionsanfang:** Für  $\Omega(\overline{M}_n) = \emptyset$  gilt:  $\overline{M}_{n-1}[t]\overline{M}_n$ , also  $\overline{M}_n \in [M_0]$ .

**Induktionsbehauptung:**

Für  $\Omega(\overline{M}_n) \setminus \{q\}$  gibt es  $k$ -Markierung  $M_n^k \in [M_0]$  mit  $\overline{M}_n \supseteq M_n^k$ .

**Induktionsschritt:** Für  $q \in \Omega(\overline{M}_n)$  gilt, dass es aufgrund der Konstruktion von  $\overline{M}_n$  einen Pfad  $M_0 \xrightarrow{*} Y \xrightarrow{t_1} \dots \xrightarrow{t_{n-1}} \overline{M}_{n-1} \xrightarrow{t_n} \overline{M}_n$  in  $UG_n(N)$  gibt.

Für  $p \notin \Omega(\overline{M}_n)$  und  $\overline{M}_{n-1}[t_n]\widehat{M}_n$  gilt  $\widehat{M}_n(p) = \overline{M}_n(p) = Y(p)$ , denn  $\overline{M}_n \geq Y$  und aus  $\widehat{M}_n(p) > Y(p)$  würde  $p \in \Omega(\overline{M}_n)$  folgen.

Sei nun  $m = \max\{W(p, t_i) | p \in P \text{ und } t_i \in \{t_1, \dots, t_{n+1}\}\}$  die maximale Anzahl von Token, die auf dem Pfad von einer Stelle abgezogen werden. Dann gibt es für  $Y$  eine  $k + k \cdot m \cdot n$ -Markierung  $Y^{k+k \cdot m \cdot n} \in [M_0]$ , so dass  $t_1, \dots, t_n$   $k$ -mal durchlaufen wird:

$$Y^{k+k \cdot m \cdot n} [t_1] \dots [t_n] M'_0 [t_1] \dots [t_n] \dots [t_1] \dots [t_n] M'_n$$

Offensichtlich ist  $M'_n \in [M_0]$ .

Es gilt

– für  $p \in P \setminus \Omega(\overline{M_n})$ :

$$M'_n(p) = \overline{M_n}(p), \text{ denn für alle } M'_i(p) = \overline{M_n}(p).$$

– für  $p \in \Omega(\overline{M_n}) \setminus \{q\}$ :

$$\begin{aligned} M'_n(p) &= Y^{k+k \cdot m \cdot n} + k \cdot (\sum_{i=1}^n W(t_i, p) - \sum_{i=1}^n W(p, t_i)) \\ &\geq k + k \cdot m \cdot n + k \cdot \sum_{i=1}^n W(t_i, p) - k \cdot \sum_{i=1}^n W(p, t_i) \\ &\geq k + k \cdot m \cdot n + k \cdot \sum_{i=1}^n W(t_i, p) - k \cdot m \cdot n \\ &\geq k + k \cdot \sum_{i=1}^n W(t_i, p) \\ &\geq k \end{aligned}$$

– für  $p = q$ :

$$\begin{aligned} M'_n(q) &= Y(q) + k \cdot (\sum_{i=1}^n W(t_i, q) - \sum_{i=1}^n W(q, t_i)) \geq Y(q) + k \geq k \\ \text{denn } Y(q) &< \widehat{M_n}(q) \text{ also } \sum_{i=1}^n W(t_i, p) - \sum_{i=1}^n W(p, t_i) \geq 1. \end{aligned}$$

Also ist  $M'_n$   $k$ -Markierung für  $\overline{M_n}$ .

□

### Folgerung 6.10

1. Jede erreichbare Markierung wird von  $UG(N)$  überdeckt.
2. Jeder Knoten von  $UG(N)$  ohne  $\omega$  ist eine erreichbare Markierung von  $N$ .
3. Jede Senke in  $UG(N)$  ohne  $\omega$  ist ein Deadlock.

## Transfer des Überdeckungsgraphen durch Morphismen

Die Konstruktion des Überdeckungsgraph terminiert zwar, kann aber sehr aufwendig ein. Deswegen ist es von großem Vorteil, wenn bereits erstellte Überdeckungsgraphen auch für veränderte S/T-Netze genutzt werden können. Wir haben Netzmorphismen, die Netze auf einander abbilden in Abschnitt 2.6 kennengelernt. Im folgenden werden sie zur inkrementellen Konstruktion der Überdeckungsgraphen genutzt.

### Konstruktion 6.11 (Inkrementelle Überdeckungsgraph)

Gegeben sei S/T-Netzmorphismus  $f : N_1 \rightarrow N_2$  und der Überdeckungsgraph des Netzes  $N_1$  mit  $UG(N_1) = (UV(N_1), UE(N_1))$ .

Dann lässt sich  $UG(N_1)$  übertragen, indem:

1. wir starten mit:  

$$\widehat{UG}(N_2) = (\widehat{UV}_0, \widehat{UE}_0) \text{ mit } \widehat{UV}_0 = \{f(v) | v \in UV(N_1)\} \text{ und}$$

$$\widehat{UE}_0 = \{f(v_1) \xrightarrow{f_T(t)} f(v_2) | v_1 \xrightarrow{t} v_2 \in UE(N_1)\}$$
2. und setzen dann die Konstruktion 6.8 für  $N_2$  mit  $\widehat{UG}(N_2)$  fort.

Das Ergebnis ist dann der inkrementelle Überdeckungsgraph  $UG_f(N_2)$ .

**Satz 6.12 (Eigenschaften des inkrementellen Überdeckungsgraphs  $UG_f(N_2)$ )**

Für einen Nezmorphismes  $f : N_1 \rightarrow N_2$  mit  $N_i = (P_i, T_i W_i)$  für  $i = 1, 2$  ist der inkrementellen Überdeckungsgraph  $UG_f(N_2)$  wohl-definiert.

Es gilt:

1.  $UG_f(N_2)$  ist ein Graph über  $T_2$ .
2.  $UG_f(N_2)$  ist endlich.
3.  $UG_f(N_2)$  ist ein überdeckender Graph:
  - Zu jeder Schaltsequenz in  $N_2$  existiert ein Pfad in  $UG_f(N_2)$ .
  - Jeder Knoten von  $UG_f(N_2)$  überdeckt mindestens eine erreichbare Markierung für  $N_2$ .

Der Beweis ist in weiten Teilen analog zu dem Beweis von Satz 6.9.

# Anhang A

## A.1 Grundlagen Graphen

### Definition A.1 (Graph)

Ein *Graph*  $G = (V, E)$  über einer Menge von Kantennamen  $L$  (*engl. labels*) ist gegeben durch

- die Menge der Knoten (*engl. vertices*)  $V$  und
- die Menge der Kanten (*eng. edges*)  $E \subseteq V \times L \times V$ .

Wir schreiben  $v \xrightarrow{l} v' \in E$  oder auch  $v \xrightarrow{l} \in E$ , wenn  $v'$  nicht von Bedeutung ist.

Außerdem notiert man mit  $v \xrightarrow{*} v' \in G$  (bzw.  $v \xrightarrow{+} v' \in G$ ) die Existenz eines (nichtleeren) Pfades von  $v$  nach  $v'$  in  $G$ .

Darüber hinaus kann ein Pfad der Länge  $n$  auch mit  $v \xrightarrow{(n)} v'$  notiert werden.

### Definition A.2 (Graphmorphismus)

Gegeben seien für  $i \in \{1, 2\}$  die Graphen  $G_i = (V_i, E_i, )$  über  $L$  mit  $E_i \subseteq V_i \times L \times V_i$ , wobei  $L$  die Kantennamen sind.

Dann ist  $f = (f_V, f_E)$  mit den Abbildungen  $f_V : V_1 \rightarrow V_2$  und  $f_E : E_1 \rightarrow E_2$  ein Graphmorphismus, sofern gilt, dass  $f_E(v, l, v') = (f_V(v), l, f_V(v'))$ .

$f = (f_V, f_E)$  ist injektiv, (surjektiv beziehungsweise bijektiv), genau dann wenn  $f_V$  und  $f_E$  injektiv (surjektiv beziehungsweise bijektiv) sind.



## A.2 Grundbegriffe der Linearen Algebra

Vektoren und Matrizen werden in der Regel mit natürlichen Zahlen indiziert, d.h. eine ganzzahlige  $n \times k$ -Matrix ist eine Tabelle mit  $n$  Zeilen und  $k$  Spalten, also eine Abbildung  $\underline{m} : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, k\} \rightarrow \mathbb{Z}$ . Wir verwenden stattdessen beliebige endliche Indexmengen, da diese in unserem Fall direkt durch die Mengen  $P$  und  $T$  eines Netzes gegeben sind; eine ganzzahlige  $A \times B$ -Matrix ist also in unserem Falle eine Abbildung  $\underline{m} : A \times B \rightarrow \mathbb{Z}$ . Um die Matrizen tabellarisch darzustellen und auf die üblichen Konstruktionen zurückzugreifen, numerieren wir die Elemente der Indexmengen einfach durch, d.h. wir definieren eine bijektive Abbildung  $f : A \rightarrow \{1, \dots, |A|\}$ , wobei  $|A|$  die Kardinalität der Indexmenge  $A$  bezeichnet.

Vektoren sind einspaltige bzw. einzeilige Matrizen, d.h. Abbildungen  $v : A \times \{*\} \rightarrow \mathbb{Z}$  (Spaltenvektoren) bzw.  $v : \{*\} \times A \rightarrow \mathbb{Z}$  (Zeilenvektoren). Da das kartesische Produkt einer Menge  $A$  mit der einelementigen Menge  $\{*\}$  isomorph zur ursprünglichen Menge  $A$  ist, betrachten wir stattdessen den  $A$ -Vektor  $v$  als eine Abbildung  $v : A \rightarrow \mathbb{Z}$  und sehen ihn als Spaltenvektor an.

Viele der von uns betrachteten Matrizen und Vektoren sind positiv ganzzahlig, d.h. ihr Bildbereich ist  $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z}$ . So sind sowohl Markierungen  $M : P \rightarrow \mathbb{N}_0$  als auch Transitionsinvarianten  $I_T : T \rightarrow \mathbb{N}_0$  positive  $P$ - bzw.  $T$ -Vektoren.

Vektoren wie auch Matrizen können addiert sowie untereinander und mit ganzen Zahlen multipliziert werden. Für  $A$ -Vektoren  $v_1, v_2$  ist

- ihre *Summe*  $v_1 + v_2$  der  $A$ -Vektor  $v$  mit  $v(a) = v_1(a) + v_2(a)$ ,
- ihr *Produkt*  $v_1 \cdot v_2$  die ganze Zahl  $\sum_{a \in A} v_1(a) \cdot v_2(a)$ .
- das *skalare Vielfache*  $z \cdot v_1$  für  $z \in \mathbb{Z}$  der  $A$ -Vektor  $v$  mit  $v(a) = z \cdot v_1(a)$ .
- $v_1 \geq v_2$  falls für alle  $a \in A$  gilt:  $v_1(a) \geq v_2(a)$ .

Analog ist für  $A \times B$ -Matrizen  $\underline{m}_1, \underline{m}_2$  und eine  $B \times C$ -Matrix  $\underline{m}_3$

- die *Summe*  $\underline{m}_1 + \underline{m}_2$  die  $A \times B$ -Matrix  $\underline{m}$  mit  $\underline{m}(a, b) = \underline{m}_1(a, b) + \underline{m}_2(a, b)$ .
- das *Produkt*  $\underline{m}_2 \cdot \underline{m}_3$  die  $A \times C$ -Matrix  $\underline{m}$  mit  $\underline{m}(a, c) = \sum_{b \in B} \underline{m}_2(a, b) \cdot \underline{m}_3(b, c)$ .
- das *skalare Vielfache*  $z \cdot \underline{m}_1$  die  $A \times B$ -Matrix  $\underline{m}$  mit  $\underline{m}(a, b) = z \cdot \underline{m}_1(a, b)$ .

Die links- bzw. rechtsseitige Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor erhalten wir, indem wir den Vektor in der oben beschriebenen Weise als einzeilige bzw. einspaltige Matrix auffassen. Weiterhin lässt sich mit Hilfe der Skalarmultiplikation und der Addition auch die Subtraktion von Matrizen bzw. Vektoren definieren.

Für die Verknüpfungen gelten die üblichen Gesetze, d.h. die Addition von Matrizen ist kommutativ und assoziativ, Skalarmultiplikation und Addition sind distributiv. Die Matrixmultiplikation ist assoziativ (aber nicht kommutativ!) und Matrixmultiplikation und Addition

sind distributiv, d.h.  $(\underline{m}_1 + \underline{m}_2) \cdot \underline{m} = (\underline{m}_1 \cdot \underline{m}) + (\underline{m}_2 \cdot \underline{m})$  und  $\underline{m} \cdot (\underline{m}_1 + \underline{m}_2) = (\underline{m} \cdot \underline{m}_1) + (\underline{m} \cdot \underline{m}_2)$ . Für Vektoren ist darüberhinaus das Skalarprodukt kommutativ.

Matrizen lassen sich transponieren. In der tabellarischen Darstellung werden dabei Zeilen zu Spalten und Spalten zu Zeilen, d.h. aus einer  $A \times B$ -Matrix  $\underline{m}$  wird eine  $B \times A$ -Matrix  $\underline{m}^T$  mit  $\underline{m}^T(b, a) = \underline{m}(a, b)$ . Die Transposition eines (Spalten-) Vektors  $v$  liefert den Zeilenvektor  $v^T$  der durch dieselbe Abbildung  $v : A \rightarrow \mathbb{Z}$  gegeben ist, d.h.  $v^T(a) = v(a)$ .

Es gilt  $(\underline{m}^T)^T = \underline{m}$  sowie  $(v^T)^T = v$ . Die Transposition ist mit der Addition und der Skalarmultiplikation verträglich. Für das Produkt von Matrizen gilt  $(\underline{m}_1 \cdot \underline{m}_2)^T = \underline{m}_2^T \cdot \underline{m}_1^T$ .

# Literaturverzeichnis

- [Abe90] D. Abel. *Petrinetze für Ingenieure*. Springer, 1990.
- [BCM88] E. Battiston, F. De Cindio, and G. Mauri. OBJSA nets: a class of high-level nets having objects as domains. In G. Rozenberg, editor, *Advances in Petri nets*, volume 340 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 20–43. Springer Verlag Berlin, 1988.
- [Bil89] J. Billington. Many-sorted High-Level Nets. In *Proc. 3rd Int. Workshop on Petri Nets and Performance Models*, pages 166–179. IEEE Computer Society Press, Kyoto, 1989.
- [EJPR01] H. Ehrig, G. Juhás, J. Padberg, and G. Rozenberg, editors. *Advances in Petri Nets: Unifying Petri Nets*, volume 2128 of *LNCS*. Springer, 2001.
- [EPR94a] H. Ehrig, J. Padberg, and L. Ribeiro. Algebraic High-Level Nets: Petri Nets Revisited. In *Recent Trends in Data Type Specification*, pages 188–206. Springer Verlag, 1994. LNCS 785.
- [EPR94b] H. Ehrig, J. Padberg, and G. Rozenberg. Behaviour and realization construction for Petri nets based on free monoid and power set graphs. In *Workshop on Concurrency, Specification & Programming*. Humboldt University, 1994. Extended version as Technical Report of University of Leiden.
- [EPR94c] H. Ehrig, J. Padberg, and G. Rozenberg. Behaviour and Realization Construction for Petri NetsBased on Free Monoid and Power Set Graphs. Technical report, Technical University Berlin TR 94-15, 1994.
- [ERRW03] H. Ehrig, W. Reisig, G. Rozenberg, and H. Weber, editors. *Advances in Petri Nets: Petri Net Technology for Communication Based Systems*. LNCS 2472. Springer, 2003.
- [GL81] H.J. Genrich and K. Lautenbach. System Modelling with High-Level Petri Nets. *Theoretical Computer Science*, 13:109–136, 1981.
- [Hum89] U. Hummert. *Algebraische High-Level Netze*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, 1989.

- [Jen81] K. Jensen. Coloured Petri Nets and the Invariant Method. *Theoretical Computer Science*, 14:317–336, 1981.
- [Jen92] K. Jensen. *Coloured Petri Nets. Basic Concepts, Analysis Methods and Practical Use*, volume 1: Basic Concepts. Springer Verlag, EATCS Monographs in Theoretical Computer Science edition, 1992.
- [Jen94] K. Jensen. *Coloured Petri Nets - Basic Concepts, Analysis Methods and Practical Use*, volume 2: Analysis Methods. Springer Verlag, EATCS Monographs in Theoretical Computer Science edition, 1994.
- [JR91] K. Jensen and G. Rozenberg, editors. *High-Level Petri-Nets: Theory and Application*. Springer Verlag, 1991.
- [KK07] Barbara König and Vitali Kozioura. Incremental construction of coverability graphs. *Information Processing Letters*, 103:203–209, 2007.
- [KM69] R.M. Karp and R.E. Miller. Parallel program schemata. *Journal of Computer and System Sciences*, 3(2):147–195, 1969.
- [KR96] E. Kindler and W. Reisig. Algebraic System Nets for Distributed Algorithms. Technical report, Humboldt University of Berlin, 1996.
- [KS91] B. Krämer and H. W. Schmidt. Types and Modules for Net Specifications. In K. Jensen and G. Rozenberg, editors, *High-Level Petri Nets: Theory and Application*, pages 171–188. Springer, 1991.
- [MM90] J. Meseguer and U. Montanari. Petri Nets are Monoids. *Information and Computation*, 88(2):105–155, 1990.
- [Pad96] J. Padberg. *Abstract Petri Nets: A Uniform Approach and Rule-Based Refinement*. PhD thesis, Technical University Berlin, 1996. Shaker Verlag.
- [PER95] J. Padberg, H. Ehrig, and L. Ribeiro. Algebraic high-level net transformation systems. *Mathematical Structures in Computer Science*, 5:217–256, 1995.
- [Pet62] C.A. Petri. *Kommunikation mit Automaten*. PhD thesis, Schriften des Institutes für Instrumentelle Mathematik, Bonn, 1962.
- [Rei85a] W. Reisig. *Petri Nets*, volume 4 of *EATCS Monographs on Theoretical Computer Science*. Springer Verlag, 1985.
- [Rei85b] Wolfgang Reisig. *Systementwurf mit Netzen*. Springer-Verlag, Springer Compass, 1985.
- [Rei91] W. Reisig. Petri Nets and Algebraic Specifications. *Theoretical Computer Science*, 80:1–34, 1991.

- [REP93] L. Ribeiro, H. Ehrig, and J. Padberg. Formal development of concurrent systems using algebraic high-level nets and transformations. In *Proc. VII Simpósio Brasileiro de Engenharia de Software*, pages 1–16, Rio de Janeiro, oct. 1993. Tech-report no. 93-13, TU Berlin.
- [RT86] G. Rozenberg and P.S. Thiagarajan. Petri nets: Basic notions, structure, behaviour. In *Current Trends in Concurrency*, pages 585–668. Lecture Notes in Computer Science 224, Springer, 1986.
- [RV87] W. Reisig and J. Vautherin. An algebraic approach to high level Petri nets. In *Proceedings of the 8th European Workshop on Petri Nets, Zaragoza*, 1987.
- [Smi96] E. Smith. A Survey on High-Level Petri Nets. In *Bull. EATCS, Vol. 59*, pages 267–293, 1996.
- [Vau87] J. Vautherin. Parallel System Specification with Coloured Petri Nets. In G. Rozenberg, editor, *Advances in Petri Nets 87*, pages 293–308. Springer Verlag, 1987. Lecture Notes in Computer Science 266.
- [Win87] G. Winskel. Petri nets, algebras, morphisms, and compositionality. *Information and Computation*, 72:197–238, 1987.

# Index

- $<_K$ , Kausalrelation, 26
- $M[t]M'$ , Schaltschritt, 13
- $M : P \rightarrow \mathbb{N}_0$ , Markierung, 13
- $UG(N)$ , Überdeckungsgraph, 70
- $[M]$ , Erreichbarkeitsmenge, 14
- $\mathbb{N}_0^\omega$ , 17
- $\bullet x$ , Vorbereich, 12
- $\omega$ , unendlich, 17
- $\omega$ -Markierung, 68
- $k$ -Markierung, 69
- $x\bullet$ , Nachbereich, 12
- Überdeckender Graph, 69
- Überdeckungsgraph, 70
  - inkrementeller, 73
- Ausgangsstellen, 28
- Azyklisch, 26
- Beschränktheit, 44
- Deadlock, 49
- Eingangsstellen, 28
- Elementares Netz, 24
- Erreichbarkeit, 48
- Erreichbarkeitsgraph, 15
- Finitär, 26
- Fortgesetzter Morphismus, 32
- Graph, 75
- Graphmorphismus, 75
- Kapazitäten, 17
- Kapazitäten
  - Markierung, 17
- Kausalrelation, 26
- Konflikt, 37
- Konflikt: elementares Netz, 25
- Lebendigkeit, 49
- Markiertes Netz, 14
- Markierung, 13
  - überdeckend, 68
  - verallgemeinerte, 68
- Markierungsgraph, 14
- Morphismen für markierte S/T-Netze, 34
- Nachbereich, 12
- Nebenläufigkeit, 38
- Nebenläufigkeit: elementares Netz, 26
- Netzkomplementierung, 17
- P-Invariante, 46, 60
- Prozess, 35
- Prozessnetz, 27
- S/T-Netz
  - formale Darstellung, 12
  - Matrix-Darstellung ( $\underline{N}$ ), 56
- S/T-Netzmorphismus, 32
- Satz: Überdeckungsgraph, 71, 74
- Satz: Beschränktheit und P-Invarianten, 46
- Satz: Endlich viele, kleinere, erreichbare Markierungen, 68
- Satz: Interleaving, 39
- Satz: Lebendigkeit, 49
- Satz: Lebendigkeit und T-Invarianten, 51
- Satz: Morphismen bewahren Schaltverhalten, 34
- Satz: Netzkomplementierung, 52
- Satz: Prozessnetz als S/T-Netz, 35
- Satz: Schaltverhalten von Prozessnetzen, 28

Satz: Äquivalenz Nebenläufigkeit und Parallelität, 40

Schaltschritt, 13

T-Invariante, 50, 61

Vorbereich, 12