

Odsjek za računarstvo i informatiku Kurs: Multimedijalni sistemi Godina studija: I godina MoE studija Semestar: I	Profesor: vanr. prof. dr. Haris Šupić, dipl. ing. el. Asistent: Dinko Osmanković, PhD
Tutorijal	Tema: DCT, kompresija podataka

## Tutorijal za II parcijalni ispit iz MMS-a

1. Izračunati DCT koeficijente za matricu:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

### Rješenje:

DCT matrica  $Y$  se dobiva kao  $Y = DCT(X) = CXC^T$ , gdje je  $Y$  matrica koeficijenata DCT-a koji se dobivaju primjenom relacije:

$$Y_{pq} = \alpha_p \alpha_q \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} X_{mn} \cos \frac{\pi(2m+1)p}{2M} \cos \frac{\pi(2n+1)q}{2N}, 0 \leq p \leq M-1 \wedge 0 \leq q \leq N-1 \quad (2)$$

gdje su:

$$\alpha_p = \begin{cases} 1/\sqrt{M}, & p = 0 \\ \sqrt{2/M}, & 1 \leq p \leq M-1 \end{cases} \quad \alpha_q = \begin{cases} 1/\sqrt{N}, & q = 0 \\ \sqrt{2/N}, & 1 \leq q \leq N-1 \end{cases} \quad (3)$$

Matrično se  $C$  može zapisati kao:

$$C = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \cdots & 1/\sqrt{2} \\ \cos \frac{\pi}{2n} & \cos \frac{3\pi}{2n} & \cdots & \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n} \\ \cos \frac{2\pi}{2n} & \cos \frac{6\pi}{2n} & \cdots & \cos \frac{2(2n-1)\pi}{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} & \cos \frac{(n-1)3\pi}{2n} & \cdots & \cos \frac{(n-1)(2n-1)\pi}{2n} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Obzirom da je matrica  $X$  dimenzija  $4 \times 4$  najbolje je koristiti i DCT blok istih dimenzija, dok se za veće matrice koriste uglavnom  $4 \times 4$  i  $8 \times 8$ . Matrica  $C$  sada postaje:

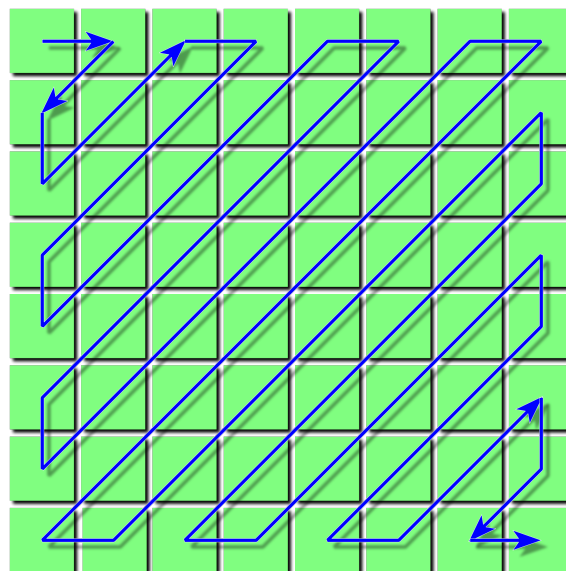
$$C = \sqrt{\frac{2}{4}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \cos \frac{\pi}{8} & \cos \frac{3\pi}{8} & \cos \frac{5\pi}{8} & \cos \frac{7\pi}{8} \\ \cos \frac{2\pi}{8} & \cos \frac{6\pi}{8} & \cos \frac{10\pi}{8} & \cos \frac{14\pi}{8} \\ \cos \frac{3\pi}{8} & \cos \frac{9\pi}{8} & \cos \frac{15\pi}{8} & \cos \frac{21\pi}{8} \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ b & c & -c & b \\ a & -a & -a & a \\ c & -b & b & -c \end{bmatrix} \quad (5)$$

gdje su  $a = \cos \frac{\pi}{4} = 1/\sqrt{2}$ ;  $b = \cos \frac{\pi}{8}$ ;  $c = \cos \frac{3\pi}{8}$ . Matrica  $Y$  se dobiva kao:

$$Y = CXC^T = a \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ b & c & -c & b \\ a & -a & -a & a \\ c & -b & b & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} a \begin{bmatrix} a & b & a & c \\ a & c & -a & -b \\ a & -c & -a & b \\ a & -b & a & -c \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ova matrica se komprimira nekim algoritmom kompresije, najčešće RLE koji se odvija na sljedeći način. Elementi matrice se pretvaraju u niz dijagonalnim (zig-zag) kretanjem kroz matricu. Takvo kretanje je prikazano na slici 1.

Slika 1: Zig-zag kretanje



U ovom zadatku se matrica na ovaj način transformira u sljedeći niz:

$$L = [3, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0] \quad (7)$$

RLE kodirani niz se formira na način da se zapiše prvo broj sukcesivnih pojavljivanja simbola, a zatim simbol. Vrijedi:

$$L_C = [1, 3, 2, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 5, 0, 1, -1, 4, 0] \quad (8)$$

Inverznu DCT je lako dobiti i vrijedi  $X = C^T Y C$ .

2. Zadana je sljedeća kvantizacijska matrica:

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 100 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Izračunati kvantizirane matrice, dekvantizirane matrice i error matrice za sljedeće ulazne matrice:

$$(a) \quad X_1 = \begin{bmatrix} 24 & 24 \\ 24 & 24 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad X_2 = \begin{bmatrix} 32 & 28 \\ 28 & 54 \end{bmatrix}$$

**Rješenje:**

(a) Kvantizirana matrica se računa prema formuli:

$$X_q = [\lfloor x_{ij}/q_{ij} \rfloor] \quad (10)$$

gdje su  $x_{ij}$  i  $q_{ij}$  elementi matrica  $X$  i  $Q$ , respektivno. Za ovaj zadatak vrijedi:

$$X_q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Dekvantizirana matrica se dobiva množenjem po elementima matrica  $X_q$  i  $Q$ . Vrijedi:

$$\overline{X} = [\lfloor x q_{ij} \rfloor] = \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Error matrica se dobiva kao:

$$E = X - \overline{X} = \begin{bmatrix} 24 & 24 \\ 24 & 24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 24 \end{bmatrix} \quad (13)$$

(b) U ovom slučaju vrijedi:

$$X_q = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} 30 & 20 \\ 20 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 45 \end{bmatrix} \quad (16)$$

3. Posmatranjem sekvence od 62 poruke koju je emitirao neki ergodični izvor bez memorije, ustanovljeno je da se 10 puta pojavila poruka A, 24 puta poruka B, 8 puta poruka C, 12 puta poruka D i 8 puta poruka E. Kodirajte poruke koje emitira ovaj izvor prvo Shannon-Fano kodom, a zatim Huffmanovim kodom.

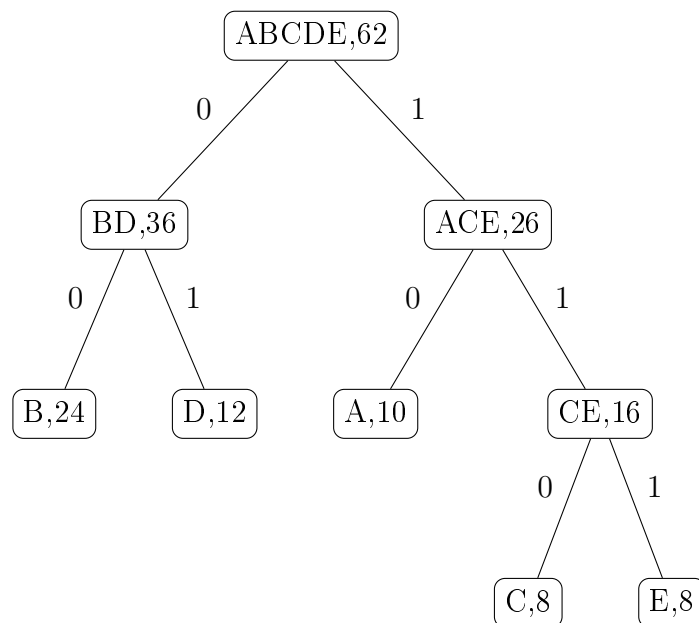
### Rješenje:

Konstrukcija Shannon-Fano koda prikazana je u sljedećoj tabeli:

Znak	Frekvencija			
B	24	36/0	24/00	
D	12		12/01	
A	10	26/1	10/10	
C	8		16/11	8/110
E	8			8/111

Ovaj kod se može predstaviti i u obliku binarnog stabla:

Slika 2: Stablo za Shannon-Fano kod

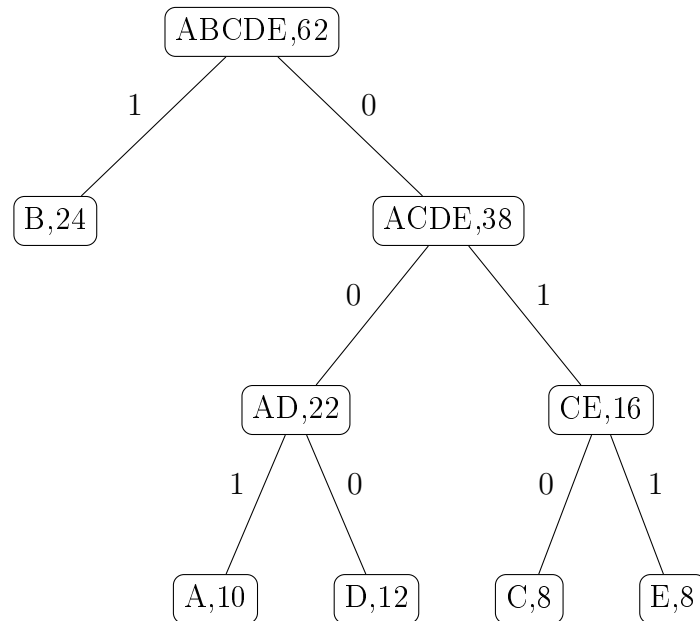


Dakle, Shannon-Fano kod daje kodiranje  $A \rightarrow 00$ ,  $B \rightarrow 01$ ,  $C \rightarrow 10$ ,  $D \rightarrow 110$  i  $E \rightarrow 111$ . Ukupan broj potrebnih bita za kodiranje ovih simbola je 12.

Konstrukcija Huffmanovog koda je prikazana u sljedećoj tabeli:

Početak		Iteracija 1		Iteracija 2		Iteracija 3		Kraj
B	24	B	24	B	24	D/00	38	D/000
D	12	C/0	16	D/0	22	A/01		A/001
A	10	E/1		A/1		C/10		C/010
C	8	D	12	C/0	16	E/11	24	E/011
E	8	A	10	E/1		B		B/1

Slika 3: Stablo za Huffmanov kod



I ovaj kod se može predstaviti i u obliku binarnog stabla:

Dakle, Huffmanov kod daje kodiranje  $A \rightarrow 001$ ,  $B \rightarrow 1$ ,  $C \rightarrow 010$ ,  $D \rightarrow 000$  i  $E \rightarrow 011$ . Ukupan broj bita potreban za kodiranje ovih simbola je 13.

U oba slučaja, kod koji je određen nije jedinstven, ali broj bita mora biti isti (12, odnosno 13) za sve varijante. Drugim riječima, postoji izomorfizam između svih stabala dobivenih Shannon-Fano, odnosno Huffmanovim algoritmom.

4. Korištenjem LZW algoritma enkodirati sljedeći string:

**BABAABAAA#**

a zatim dekodirati sekvencu

**<66><65><256><257><65><260>#**.

**Rješenje:**

LZW algoritam kompresije se može zapisati pseudo kodom na sljedeći način:

Odvijanje algoritma je prikazano u sljedećoj tabeli:

Kod	Ključ	Kod	Ključ
66	B	256	BA
65	A	257	AB
256	BA	258	BAA
257	AB	259	ABA
65	A	260	AA
260	AA		

Izlaz iz enkodera se čita iz prve kolone i on je **<66><65><256><257><65><260>**.

LZW algoritam dekompresije se može zapisati pseudo kodom na sljedeći način:

---

**Ulaz:** String za enkodiranje, rjecnik

```
1: novi_string ← ""
2: while ch ← s[i] != '#' do
3:   if novi_string + ch in rjecnik then
4:     novi_string = novi_string + ch
5:   else
6:     enkodirati novi_string u izlaz
7:     dodati novi_string + ch u rjecnik
8:     novi_string ← ch
9:   end if
10: end while
11: ispisati novi_string u izlaz
```

---

---

**Ulaz:** String za dekodiranje, rjecnik

```
1: novi_string ← ""
2: pročitati prethodni_kod i dekodirati ga
3: while ch ← s[i] != '#' do
4:   if ch in rjecnik then
5:     kljuc ← rjecnik[ch]
6:     dodati kljuc u rjecnik
7:     novi_string ← kljuc
8:   end if
9: end while
10: ispisati novi_string u izlaz
```

---

Ključ	Kod	Ključ
B		
A	256	BA
BA	257	AB
AB	258	BAA
A	259	ABA
AA	260	AA

Odvijanje algoritma je prikazano u sljedećoj tabeli: