

KOLEKCIJA ZADATAKA IZ LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Za sve postavljene zadatke obavezno trebate sastaviti matematski model polaznog i njemu dualnog problema, te nakon obavljenog rješavanja, izvući *sve informacije* koje se mogu izvući iz optimalnih vrijednosti promjenljivih polaznog modela i odgovarajućih dualnih promjenljivih (uključujući i izravnavajuće promjenljive). Zadatke rješavajte na više različitih načina. Tu spadaju simpleks metod, rješavanje dualnog problema simpleks metodom, te dualni simpleks metod primijenjen bilo na polazni bilo na dualni problem u slučajevima kada se dualni simpleks metod može primijeniti. Isprobajte razne strategije pivotiranja. Za dvodimenzionalne probleme, probleme koji se mogu svesti na dvodimenzionalne redukcijom dimenzionalnosti, te za probleme čiji je dualni problem dvodimenzionalan (ili se može svesti na dvodimenzionalni), obavezno riješite problem (polazni ili dualni) i grafičkim metodom, te uočite koje su se vršne tačke posjećivale pri rješavanju problema raznim varijantama simpleks metoda. Ukoliko ste grafički riješili problem, rješenja njemu dualnog problema (ili rješenja polaznog problema ukoliko ste grafički rješavali dualni problem) nađite korištenjem principa oslabljene komplementarnosti.

- Kompanija za proizvodnju stakla proizvodi visokokvalitetne staklene proizvode i namjerava pokrenuti proizvodnju dva nova proizvoda. Proizvodi se prave u tri različita odjeljka u kojem provode određeno vrijeme. Prvi proizvod treba odjeljak 1 i odjeljak 3 i to 1 h i 3 h respektivno. Drugi proizvod treba 2 h odjeljak 2 i isto toliko odjeljak 3. Zbog zauzetosti odjeljaka usljed pravljenja ostalih proizvoda, odjeljak 1 ima 4 slobodna sata, odjeljak 2 ima 12 slobodnih sati i odjeljak 3 ima 18 slobodnih sati. Svi proizvedeni novi proizvodi mogu se prodati a cijena prvog iznosi 3 KM, a drugog 5 KM po komadu. Odrediti optimalni plan proizvodnje da bi se ostvarila najveća zarada.

Rješenje:

- Potrebno je proizvesti 2 komada prvog i 6 komada drugog proizvoda, pri čemu će ukupno ostvarena zarada iznositi 36 KM.
 - U odjeljku 1 će ostati 2 sata slobodna za druge potrebe, dok će kapaciteti odjeljaka 2 i 3 biti iskorišteni u potpunosti.
 - Po svakom satu povećanja kapaciteta odjeljaka 2 odnosno 3, može se očekivati povećanje zarade od $3/2$ odnosno 1 KM respektivno, do neke granice. Mala promjena kapaciteta odjeljaka 1 ne mijenja zaradu.
 - Oba proizvoda su rentabilna za proizvodnju.
- Fabrika može proizvoditi tri proizvoda P_1 , P_2 i P_3 , pri čemu se koriste tri sirovine S_1 , S_2 i S_3 . Za proizvodnju prvog proizvoda koriste se dvije količinske jedinice prve i tri količinske jedinice druge sirovine. Za proizvodnju drugog proizvoda koriste se dvije količinske jedinice prve, tri količinske jedinice druge i jedna količinska jedinica treće sirovine. Za proizvodnju trećeg proizvoda potrebno je dvije količinske jedinice prve sirovine i jedna količinska jedinica treće sirovine. Dobit od jedne količinske jedinice prvog proizvoda je dvije novčane jedinice, od drugog tri novčane jedinice, a od trećeg jedna novčana jedinica. Ako su količine sirovina za planski period ograničene na četiri količinske jedinice za prvu sirovinu, dvije za drugu i tri za treću, potrebno je napraviti optimalni plan proizvodnje koji de uz zadana ograničenja ostvariti najveću novčanu dobit.

Rješenje:

- Proizvod P_1 , ne treba proizvoditi, a treba proizvoditi $2/3$ odnosno $4/3$ količinskih jedinica proizvoda P_2 odnosno P_3 , pri čemu će ukupno ostvarena zarada iznositi $10/3$ novčanih jedinica.
- Sirovine S_1 i S_2 su iskorištene u potpunosti, dok na kraju proizvodnje ostaje 1 količinska jedinica sirovine S_3 .
- Po svakoj dodatnoj količinskoj jedinici sirovina S_1 i S_2 može se očekivati povećanje zarade od $1/2$ odnosno $2/3$ novčanih jedinica respektivno, do neke granice. Mala promjena u raspoloživoj količini sirovine S_3 ne utiče na zaradu.
- Proizvod P_1 nije rentabilan za proizvodnju i cijena mu se treba povećati barem za 1 novčanu jedinicu po jednoj količinskoj jedinici da bi postao rentabilan, dok su proizvodi P_2 i P_3 rentabilni za proizvodnju.

- Fabrika proizvodi dva proizvoda. Za proizvodnju oba proizvoda koristi se jedna sirovina čija količina je ograničena na 20 kg u planskom periodu. Za pravljenje svakog kilograma prvog proizvoda potroši se 250 grama sirovine, a za pravljenje svakog kilograma drugog proizvoda potroši se 750 grama sirovine. Dobit od prvog proizvoda je 3 KM po kilogramu, a od drugog 7 KM po kilogramu. Potrebno je napraviti plan proizvodnje koji maksimizira dobit, pri čemu je potrebno povesti računa da je količina proizvoda koji se mogu plasirati na tržište ograničena. Prvog proizvoda može se prodati maksimalno 10 kg, a drugog 9 kg.

Rješenje:

- Potrebno je proizvesti 10 kg prvog i 9 kg drugog proizvoda, pri čemu će ukupno ostvarena zarada iznositi 93 KM.
- Sirovine nisu iskorištene u potpunosti, tako da na kraju proizvodnje ostaje 10 kg i 750 grama sirovine koja se koristi za proizvodnju. Kapaciteti tržišta su u potpunosti iskorišteni, odnosno plasirana je maksimalna količina oba proizvoda koja se može plasirati na tržište.
- Po svakom kilogramu koji se dodatno može plasirati na tržište može se očekivati povećanje zarade od 3 KM odnosno 7 KM za prvi odnosno drugi proizvod, do neke granice. Mala promjena raspoložive količine sirovine ne utiče na zaradu.
- Oba proizvoda su rentabilna za proizvodnju.
- Kompanija za proizvodnju slatkiša proizvodi visokokvalitetne čokoladne proizvode i namjerava pokrenuti proizvodnju dva nova slatkiša. Proizvodi se prave u tri različita odjeljka u kojem provode određeno vrijeme. Prvi proizvod zahtijeva 1 h proizvodnje u odjeljku 1 i 3 h proizvodnje u odjeljku 3 po jednom komadu. Drugi proizvod zahtijeva 1 h proizvodnje u odjeljku 2 i 2 h proizvodnje u odjeljku 3 po jednom komadu. Odjeljak 1 ima na raspolaganju 3 slobodna sata, odjeljak 2 ima 6 slobodnih sati i odjeljak 3 ima 18 slobodnih sati. Svi proizvedeni novi proizvodi mogu se prodati a cijena prvog iznosi 2 KM, a drugog 4 KM po komadu.

Rješenje:

- Potrebno je proizvesti 2 komada prvog i 6 komada drugog slatkiša, pri čemu će se ostvariti zarada od 28 KM.
- Kapacitet prvog odjeljka nije u potpunosti iskorišten i ostaje raspoloživ još 1 sat, dok su kapaciteti drugog i trećeg odjeljka u potpunosti iskorišteni.
- Po svakom dodatnom satu raspoloživosti odjeljka 2 odnosno 3 može se očekivati povećanje zarade od 8/3 odnosno 2/3 KM, do neke granice. Mala promjena kapaciteta prvog odjeljka ne utiče na zaradu.
- Oba slatkiša su rentabilna za proizvodnju.
- Neka fabrika proizvodi geveznice i kataklingere, pri čemu je prodajna cijena geveznica 150 KM po kubnom metru, a kataklintera 40 KM po kilogramu. Za proizvodnju jednog kubnog metra geveznica potrebna su 3 kilograma cincozni i 9 vrećica šnaus-mufni, dok su za proizvodnju jednog kilograma kataklintera potrebna 2 litra kalamute i 4 vrećice šnaus-mufni. Fabrika raspolaže zalihama od 36 kilograma cincozni, 54 litara kalamute i 144 vrećice šnaus-mufni. Potrebno je naći optimalni plan proizvodnje koji će maksimizirati moguću zaradu koja će se ostvariti prodajom, u skladu sa raspoloživim zalihama.

Rješenje:

- Potrebno je proizvesti 12 m³ geveznica i 9 kg kataklintera, pri čemu će se ostvariti zarada od 2160 KM.
- Cincozne i šnaus-mufne će biti iskorištene u potpunosti, dok će na kraju proizvodnje ostati 36 litara kalamute.
- Po svakom dodatnom kilogramu cincozni, odnosno svakoj dodatnoj vrećici šnaus-mufni, može se očekivati povećanje zarade od 20 KM odnosno 10 KM respektivno, do neke granice. Mala promjena u raspoloživoj količini kalamute ne utiče na zaradu.
- I geveznice i kataklingeri su rentabilni za proizvodnju.

- Tri proizvoda pakuju se u jednu kutiju zapremine 8 m^3 . Gustine proizvoda su 1 kg/m^3 , 2 kg/m^3 i 3 kg/m^3 , a prodajne cijene 8 KM/kg , 5 KM/kg i 4 KM/kg respektivno. Potrebno je odrediti koliko metara kubnih svakog od proizvoda treba smjestiti u kutiju da bi se ostvarila maksimalna vrijednost kutije. Težina kutije pri tome ne smije preći 12 kg .

Rješenje:

- Optimalno rješenje nije jedinstveno, a u svakom slučaju ostvaruje se optimalna vrijednost kutije od 72 KM . Postoje dva optimalna bazna rješenja. Prema jednom baznom rješenju, treba smjestiti 6 m^3 prvog proizvoda i 2 m^3 trećeg proizvoda, dok drugi proizvod ne treba uopće smještati. Prema drugom baznom rješenju, treba smjestiti po 4 m^3 prvog i drugog proizvoda, dok treći proizvod ne treba uopće smještati. Svako rješenje koje leži na duži koja spaja ova dva optimalna bazna rješenja je također optimalno rješenje (nebazno). Drugim riječima, za svako $t \in [0, 1]$ rješenje u kojem se pakuje $6(1-t) + 4t \text{ m}^3$ prvog proizvoda, $4t \text{ m}^3$ drugog proizvoda i $2(1-t) \text{ m}^3$ trećeg proizvoda je također optimalno.
- Pri svakom optimalnom rješenju, i zapreminski i težinski kapacitet kutije su iskorišteni u potpunosti.
- Po svakom dodatnom kubnom metru dozvoljenog zapreminskog kapaciteta kutije, odnosno po svakom dodatnom kilogramu težinskog kapaciteta kutije, može se očekivati povećanje vrijednosti kutije od 6 KM odnosno 2 KM respektivno, do neke granice.
- Postoje optimalna rješenja po kojima je utovar sva tri proizvoda rentabilan (mada bazna rješenja nisu takva).
- Tri proizvoda pakuju se u jednu kutiju zapremine 12 m^3 . Gustine proizvoda su $1/3 \text{ kg/m}^3$, $1/2 \text{ kg/m}^3$ i 1 kg/m^3 , a prodajne cijene 4 KM/kg , 5 KM/kg i 8 KM/kg respektivno. Potrebno je odrediti koliko kilograma svakog od proizvoda treba smjestiti u kutiju da bi se ostvarila maksimalna vrijednost kutije. Težina kutije pri tome ne smije preći 8 kg .

Rješenje:

- Prvi i drugi proizvod ne treba pakovati, nego treba pakovati samo 8 kg trećeg proizvoda, čime će se ostvariti zarada od 64 KM .
- U kutiji će ostati još 4 m^3 slobodnog prostora, dok će težinski kapacitet kutije biti iskorišten u potpunosti.
- Po svakom dodatnom kilogramu težinskog kapaciteta kutije može se očekivati povećanje vrijednosti kutije od 8 KM , do neke granice. Mala promjena zapreminskog kapaciteta kutije ne utiče na promjenu njene vrijednosti.
- Prvi i drugi proizvod nisu isplativi za pakovanje, i da bi postali isplativi, njihova cijena se treba povećati barem za 4 KM/kg odnosno 5 KM/kg respektivno, dok je treći proizvod isplativ za pakovanje.
- Fabrika pravi tri vrste mješavina grickalica. Za različite mješavine potrebno je različito vrijeme pripreme mješavine. Za prvu je potrebno 0.125 sati, za drugu 0.15 sati, a za treću 0.1 sata za svaku kesicu. Svaka kesica je iste zapremine koja iznosi pola litra. Troškovi proizvodnje kesica su 3 KM za prvu, 3.5 KM za drugu i 3 KM za treću mješavinu. Mješavine se skladište u prostor veličine 0.15 m^3 i šalju u prodaju jednom sedmično. Mašina za miješanje može raditi do 40 sati sedmično. Potrebno je napraviti sedmični plan proizvodnje kojim se ostvaruje maksimalna zarada (vodeći računa i o troškovima proizvodnje) ako su prodajne cijene jedne kesice 7 KM za prvu, 8.2 KM za drugu i 6.5 KM za treću mješavinu.

Rješenje:

- Prvu mješavinu uopće ne treba praviti, dok treba napraviti 200 kesica druge i 100 kesica treće mješavine, čime se ostvaruje zarada od 1290 KM .
- I skladišni kapaciteti i vremenski kapacitet mašine za miješanje su iskorišteni u potpunosti.
- Po svakom dodatnom satu dozvoljenog rada mašine odnosno svakom dodatnom litru skladišnog prostora može se očekivati povećanje zarade od 24 KM odnosno 2.2 KM respektivno, do neke granice.
- Prva mješavina nije rentabilna za proizvodnju i trebalo bi joj povećati cijenu za barem 0.1 KM po kesici da joj proizvodnja postane rentabilna, dok su druga i treća mješavina rentabilne za proizvodnju.

- Neka radionica namještaja želi da proizvodi stolice, stolove i ormare, koje ima namjeru prodavati po cijeni od 25 KM, 60 KM i 100 KM po komadu, respektivno. U proizvodnji će biti angažirana dva majstora: stolar i lakirer. Za izradu jedne stolice potreban je jedan sat rada stolara, jedan sat rada lakirera i 3 kg drveta. Izrada stola zahtijeva tri sata rada stolara, dva sata rada lakirera i 8 kg drveta, dok izrada ormara zahtijeva pet sati rada stolara, tri sata rada lakirera i 14 kg drveta. Naknada za rad stolara iznosi 10 KM po satu, a za lakirera 7 KM po satu rada. Drvo ne košta ništa, jer se nabavlja iz interne pilane. Plan je da se sedmično utroši najviše 100 kg drveta. Pored toga, stolar ne smije raditi više od 40 sati, a lakirer više od 30 sati sedmično. Napraviti optimalni sedmični plan proizvodnje koji će obezbijediti najveću zaradu (pri čemu pod zaradom smatramo ukupan prihod od prodaje umanjen za neophodne troškove).

Rješenje:

- Potrebno je proizvesti 24 stolice i 2 ormara, dok stolove uopće ne treba proizvoditi, pri čemu će se ostvariti ukupna zarada od 250 KM.
 - Radno vrijeme stolara neće biti iskorišteno u potpunosti i preostaje mu 6 slobodnih sati, dok će radno vrijeme lakirera i pretpostavljene sedmične isporuke drveta biti iskorištene u potpunosti.
 - Po svakom dodatnom radnom satu lakirera odnosno pri svakom dodatnom utrošenom kilogramu drveta može se očekivati povećanje zarade od 5 KM odnosno 1 KM respektivno, do neke granice. Mala promjena u radnom vremenu stolara ne utiče na zaradu.
 - Stolovi nisu rentabilni za proizvodnju i cijena im se treba povećati za barem 2 KM po komadu da bi postali rentabilni, dok su stolice i ormari rentabilni za proizvodnju.
- Fabrika pravi tri vrste proizvoda (A, B i C). Pri proizvodnji, tri grupe mašina M_1 , M_2 i M_3 su kritične, jer su dostupne samo određeni broj sati. Broj raspoloživih sati za prvu, drugu i treću grupu mašina iznosi zbirno 630, 1680 i 2520 sati respektivno. Normativi vremena izrade ovih proizvoda u satima po kilogramu, prihod u KM po kilogramu i troškovi proizvodnje po kilogramu dati su u sljedećoj tabeli:

Proizvod	A	B	C
M_1	1	1	1
M_2	2	3	1
M_3	2	4	7
Prihod [KM/kg]	400	450	500
Troškovi proizvodnje [KM/kg]	300	325	400

Odredite optimalni plan proizvodnje koji garantira maksimalnu zaradu (tj. razliku između prihoda i troškova proizvodnje) ukoliko se zna da na tržištu nema potrebe za više od 39 kilograma proizvoda A.

Rješenje:

- Treba proizvesti 39, 516 i 54 kilograma proizvoda A, B i C respektivno, što će dati ukupnu zaradu od 73800 KM.
 - Na prvoj grupi mašina će ostati neiskorišten 21 sat, dok će druga i treća grupa mašina biti iskorištene u potpunosti. Na tržište će se plasirati tačno onoliko proizvoda A koliko je maksimalno dozvoljeno.
 - Po svakom dodatnom raspoloživom satu na drugoj odnosno trećoj grupi mašina, može se očekivati povećanje zarade od 475/17 odnosno 175/17 KM, do neke granice. Male izmjene u raspoloživim satima prve grupe mašina ne utiču na zaradu. Po svakom dodatnom kilogramu proizvoda A koji se smije plasirati na tržište, može se očekivati povećanje zarade od 400/17 KM, do neke granice.
 - Sva tri proizvoda su rentabilna za proizvodnju.
- Zadržavajući sve prethodno navedene činjenice i parametre iz prethodnog zadatka, fabrika je dobila mogućnost da pored postojećeg tehnološkog postupka za proizvodnju proizvoda A (navedenog u prethodnoj tabeli) paralelno iskoristi i drugi (alternativni) tehnološki postupak. S ovim tehnološkim postupkom moguće je napraviti kilogram proizvoda A uz 8 sati rada mašina iz grupe M_1 i 6 sati rada mašine iz grupe M_3 , dok se mašine iz grupe M_2 ne koriste ovog tehnološkog postupka. Troškovi izrade s ovim tehnološkim postupkom su za 20 KM/kg skuplji u odnosu na standardni tehnološki postupak. Napravite novi optimalni plan proizvodnje uz ove nove okolnosti.

Rješenje:

- Treba proizvesti 39, 531 i 43 kilograma proizvoda A, B i C respektivno, što će dati ukupnu zaradu od 74235 KM. Od toga, 22 kilograma proizvoda A treba proizvesti regularnim tehnološkim postupkom, a 17 kilograma alternativnim tehnološkim postupkom.
 - Sve grupe mašina će biti iskorištene u potpunosti. Na tržište će se plasirati tačno onoliko proizvoda A koliko je maksimalno dozvoljeno.
 - Po svakom dodatnom raspoloživom satu na prvoj, drugoj odnosno trećoj grupi mašina, može se očekivati povećanje zarade od 145/7, 170/7 odnosno 175/17 KM, do neke granice. Po svakom dodatnom kilogramu proizvoda A koji se smije plasirati na tržište, može se očekivati povećanje zarade od 15 KM, do neke granice.
 - Sva tri proizvoda su rentabilna za proizvodnju.
- Teretni brod prebacuje dvije vrste tereta. Zbog prirode tereta, za svaku utovarenu tonu prve vrste tereta brodovlasnik treba platiti taksu od 500 KM, dok za svaku utovarenu tonu druge vrste tereta brodovlasnik dobija “kaparu” (predujam) od 200 KM. Gotovina kojim brodovlasnik raspolaže na početku utovara iznosi 3000 KM i brodovlasnik nema načina da u trenutku utovara nabavi veću količinu novca. Naravno, novac koji se dobije kao predujam zbog utovara druge vrste tereta može se koristiti za plaćanje takse za prvu vrstu tereta. Utovar prve vrste tereta traje pola sata po toni, a druge vrste tereta 15 minuta po toni. Ukupno vrijeme koje je na raspolaganju za utovar je najviše 12 sati, a u jednom trenutku može se utovarati samo jedna vrsta tereta. Zarada od prevoza prve vrste tereta iznosi 2000 KM po toni, a od drugog 100 KM po toni (ne računajući kaparu koju je već dobio). Odrediti broj paketa prve i druge vrste koji treba utovariti na brod da bi se ostvarila najveća dobit.

Rješenje:

- Treba utovariti 14 tona prve i 20 tona druge vrste tereta, pri čemu će se ostvariti dobit od 27000 KM.
 - I raspoloživo vrijeme za utovar i gotovina kojom brodovlasnik raspolaže na početku utovara biće iskorišteni u potpunosti.
 - Po svakom dodatnom satu raspoloživog vremena za utovar i svakoj dodatnoj KM raspoložive gotovine može se očekivati povećanje zarade od 2000 KM odnosno 1 KM respektivno, do neke granice.
 - Utovar obje vrste tereta je rentabilan.
- Na tržištu dionica su se pojavile dvije nove kompanije. Način ulaganja u ove kompanije je različit, ali obje podrazumjevaju da posjedovanje njihovih dionica obavezuje dioničare da ulože i svoj rad proporcionalan broju dionica. Jedinična cijena dionice prve kompanije je 100 KM i ona očekuje prosječno pet sati rada od ulagača po svakoj dionici koju posjeduje. Druga kompanija ima nešto drugačiji pristup. Sa željom da stimulira dioničare, ona ih samo obavezuje da rade u prosjeku tri sata dnevno za svaku dionicu koju posjeduju. Dionice im ne samo da ne naplaćuje, već naprotiv daje im po 200 KM po svakoj dionici koju preuzmu. Očekivani prihod u budućnosti od svake od dionica u periodu za koji se vrši planiranje je 2000 KM za dionice prve, a 1500 KM za dionice druge kompanije (po jednoj dionici). Ulagrač ima ukupno 100 KM za kupovinu dionica pri čemu novac dobiven od preuzimanja dionica druge kompanije može iskoristiti za kupovinu dionica prve kompanije. Ulagrač ne može odvojiti više od šest sati dnevno u prosjeku za rad u kompanijama. Potrebno je napraviti plan ulaganja kojim se ostvaruje najveću očekivanu dobit (pri čemu treba voditi računa i o troškovima ulaganja).

Rješenje:

- Ulagrač neće kupovati dionice prve kompanije, nego će uzeti 2 dionice druge kompanije, čime će ostvariti očekivanu dobit od 3400 KM.
- Planirani dnevni rad će biti u potpunosti iskorišten, dok će nakon preuzimanja dionica ostati gotovine u iznosu od 500 KM.
- Po svakom dodatnom satu dnevnog rada koji ulagač može prihvatiti, moglo bi se očekivati povećanje dobiti od 1700/3 KM, do neke granice. Mala promjena u raspoloživoj gotovini za kupovinu dionica ne utiče na dobit.
- Kupovina dionica prve kompanije nije isplativa i da bi postala isplativa, očekivani prihod od njih bi morao porasti za barem 2800/3 KM po dionici.

- Student završne godine fakulteta želi nastaviti školovanje na prestižnom fakultetu. Pored dobrih ocjena, za upis mu je potreban i novac za školarinu. Jedna od mogućnosti zarade je putem investiranja u dvije perspektivne kompanije. Investiranje u kompaniju A je putem kupovine dionica čija je jedinična cijena 2000 KM i ličnim angažovanjem putem rada u kompaniji po sat dnevno u prosjeku za svaku dionicu koju kupi. Dionice kompanije B se ne kupuju, nego naprotiv za njih student dobiva 1000 KM po svakoj dionici koju preuzme, ali nose obavezu rada u kompaniji po tri sata dnevno u prosjeku za svaku preuzetu dionicu. Student ima 2000 KM na raspolaganju za investiranje. Novac koji dobije preuzimanjem dionica kompanije B može iskoristiti za kupovinu dionica kompanije A. Što se vremena tiče, student ne može organizirati da radi više od osam sati dnevno u prosjeku ukupno u obje kompanije. Kako su obje kompanije perspektivne, student može očekivati prilično dobar povrat uloženog novca i vremena do vremena kad će mu novac biti potreban za upis. Konkretno, očekivana dobit od svake dionice kompanije A koju posjeduje je 20000 KM, a 10000 KM od svake dionice kompanije B. Potrebno je napraviti plan kupovine dionica koji će studentu osigurati maksimalnu dobit.

Rješenje:

- Student treba uzeti po dvije dionice kompanija A i B, čime će ostvariti očekivanu dobit od 58000 KM.
- Planirani dnevni rad i raspoloživa sredstva za investiranje će biti u potpunosti iskorišteni.
- Po svakom dodatnom satu dnevnog rada koji ulagač može prihvatiti i svakoj dodatnoj KM raspoloživoj za investiranje, moglo bi se očekivati povećanje dobiti od 40000/7 KM odnosno 43/7 KM respektivno, do neke granice.
- Isplativa je kupovina dionica obje kompanije.
- Dva tipa vitamina V_1 i V_2 mogu se konzumirati putem dva tipa tableta, T_1 i T_2 , čije su cijene redom 24 odnosno 25 feninga po tableti. Dnevno treba konzumirati minimalno 17 jedinica vitamina V_1 i 11 jedinica vitamina V_2 . Tableta T_1 sadrži 1 jedinicu vitamina V_1 i 4 jedinice vitamina V_2 . Tableta T_2 sadrži 5 jedinica vitamina V_1 i jednu jedinicu vitamina V_2 . Potrebno je utvrditi koliko tableta i kojih treba da se utroši svakog dana da se zadovolje dnevne potrebe za vitaminima uz minimalne troškove.

Rješenje:

- Potrebno je utrošiti 2 tablete T_1 i 3 tablete T_2 dnevno, što daje dnevni trošak od 123 feninga.
- Uz ovakvo korištenje tableta, unosi se tačno onoliko vitamina V_1 i V_2 koliko je minimalno potrebno.
- Pri smanjenju minimalnih dnevnih količina vitamina V_1 i V_2 za jednu jedinicu, može se očekivati smanjenje dnevnih troškova za 4 odnosno 5 feninga respektivno, do neke granice.
- Oba tipa tableta su isplativa za upotrebu.
- Za oplemenjivanje tla koriste se dvije vrste vještačkog đubriva, koje imaju dvije vrste aktivnih sastojaka N i P. U svakom kilogramu prve vrste đubriva nalazi se po 15 grama sastojaka N i P, dok se u svakom kilogramu druge vrste đubriva nalazi 20 grama sastojka N i 10 grama sastojka P. Da bi parcela koja se razmatra bila na odgovarajući način oplemenjena, neophodno je najmanje 100 grama N i 70 grama P. Cijena prvog đubriva je 5 KM/kg, a drugog 2 KM/kg. Potrebno je odrediti koliko kilograma jednog i drugog đubriva treba kupiti da bi se zadovoljile potrebe uz najmanju cijenu.

Rješenje:

- Prvu vrstu đubriva ne treba kupovati, nego treba kupiti samo 7 kg druge vrste đubriva, pri čemu će troškovi kupovine biti 14 KM.
- Parcela će biti oplemenjena sa 40 grama sastojka N više nego što je neophodno, dok će sastojka P biti tačno onoliko koliko treba.
- Pri svakom gramu smanjenja zahtjeva za neophodnom količinom sastojka P, može se očekivati pad troškova za 0.2 KM, do neke granice. Mala promjena u zahtjevima za neophodnom količinom sastojka N ne utiče na troškove.
- Prva vrsta đubriva nije isplativa za nabavku, i da bi bila isplativa, cijena mu treba pasti za barem 2 KM/kg, dok je druga vrsta đubriva isplativa za nabavku.

- Za oplemenjivanje tla koriste se dvije vrste vještačkog đubriva, koje imaju dvije vrste aktivnih sastojaka P i K. U svakom kilogramu prve vrste đubriva nalazi se po 20 grama sastojka P i 10 grama sastojka K, dok se u svakom kilogramu druge vrste đubriva nalazi po 15 grama sastojka P i K. Da bi parcela koja se razmatra bila na odgovarajući način oplemenjena, neophodno je najmanje 105 grama P i 75 grama K. Cijena prvog đubriva je 4 KM/kg, a drugog 6 KM/kg. Potrebno je odrediti koliko kilograma jednog i drugog đubriva treba kupiti da bi se zadovoljile potrebe uz najmanju cijenu.

Rješenje:

- Optimalno rješenje nije jedinstveno, a u svakom slučaju troškovi iznose 30 KM. Prema jednom baznom rješenju, treba nabaviti po 3 kg obje vrste đubriva. Prema drugom baznom rješenju, treba nabaviti 7.5 kg prve vrste đubriva, dok drugu vrstu đubriva ne treba uopće nabavljati. Svako rješenje koje leži na duži koja spaja ova dva optimalna bazna rješenja je također optimalno rješenje (nebazno). Drugim riječima, za svako $t \in [0, 1]$ rješenje u kojem se kupuje $3(1-t) + 7.5t$ kg prve vrste đubriva i $3(1-t)$ kg druge vrste đubriva je također optimalno.
- Prema prvom baznom rješenju, parcela će biti oplemenjena sa tačno onoliko sastojaka P i K koliko je neophodno. Prema drugom baznom rješenju, parcela će biti oplemenjena sa 45 grama više sastojka P nego što je neophodno, a tačno sa onoliko sastojka K koliko je neophodno. U općem slučaju, parcela će biti oplemenjena sa $45t$ grama više sastojka P nego što je neophodno, dok će količina sastojka K uvijek biti onolika koliko je neophodno.
- Pri svakom gramu smanjenja zahtjeva za neophodnom količinom sastojka K, može se očekivati pad troškova za 0.4 KM, do neke granice. Mala promjena zahtjeva za neophodnom količinom sastojka P ne utiče na troškove.
- Postoje optimalna rješenja po kojima je nabavka obje vrste đubriva isplativa (recimo, jedno od dva bazna rješenja je takvo).
- Potrebno je povezati dva električna postrojenja električnim kablom. Postrojenja su međusobno udaljena 200 metara (što znači da kabel mora biti barem toliko dugačak). Za to je moguće koristiti neki od dva kabla različitih karakteristika ili njihovu kombinaciju. Radi konfiguracije ostatka mreže, ukupan otpor pomenutog kabla mora biti barem 5 oma. Prvi dostupni tip kabla ima otpor od 0.03 oma po metru i cijenu od 0.2 KM po metru. Drugi dostupni tip kabla ima otpor od 0.02 oma po metru i cijenu od 0.3 KM po metru. Potrebno je utvrditi sa koliko metara svakog od kablova se zadovoljavaju postavljeni uslovi uz minimalne troškove.

Rješenje:

- Potrebno je koristiti 200 metara prvog tipa kabla, dok drugi tip kabla ne treba koristiti, pri čemu će ukupni troškovi iznositi 40 KM.
- Ukupna dužina kabla iznosiće tačno koliko treba, dok će ukupni otpor biti za 1 om veći nego što je neophodno.
- Po svakom metru smanjenja neophodne dužine kabla, može se očekivati pad troškova od 0.2 KM, do neke granice. Mala promjena u zahtjevima na ukupni otpor kabla ne utiče na troškove.
- Prvi kabl je isplativ za korištenje, dok drugi kabl nije isplativ za korištenje, i cijena bi mu trebala pasti za barem 0.1 KM po metru da bi postao isplativ.
- Student priprema ispite. Zbog nedostatka vremena cilj mu je da utroši najmanje vremena za učenje, ali da položi sve ispite. Uvjet za polaganje svakog od ispita je barem 50 osvojenih poena. Ispiti su različite težine. Ispit iz programiranja je najlakši i za svaki sat vremena odvojen na učenje programiranja student može računati na pet poena na ispitu iz programiranja. Ispit iz algoritama je nešto teži i za svaki sat učenja algoritama student može računati na četiri poena na ispitu iz algoritama. Pored toga, ispit iz algoritama se oslanja i na znanje programiranja, tako da svaki sat proveden na učenju programiranja donosi i po jedan poen na ispitu iz algoritama. Optimizacija je predmet slične težine kao i algoritmi i svaki sat učenja optimizacije donosi poena boda na ispitu iz optimizacije. Kako se ispit iz optimizacije oslanja na znanje iz programiranja i algoritama, učenje ovih predmeta doprinosi poenima na ispitu iz optimizacije. Svaki sat proveden na učenju programiranja donosi jedan, a svaki sat proveden na učenju algoritama dva poena na ispitu iz optimizacije. Potrebno je napraviti plan učenja za studenta koji će ga savjetovati koliko sati treba da provede na učenju svakog od predmeta, tako da ukupno vrijeme učenja bude minimalno.

Rješenje:

- Student treba da po 10 sati uči programiranje i algoritme, a 5 sati optimizaciju, što ukupno predstavlja 25 sati.
 - Uz ovakav plan učenja, na svakom od predmeta dobiće tačno onoliko poena koliko je minimalno potrebno (tj. po 50 poena).
 - Po svakom smanjenju praga prolaznosti za 1 poen na ova tri predmeta, neophodno vrijeme učenja smanjuje se za 1/8 sata za programiranje, 1/8 sata za algoritme i 1/4 sata za optimizaciju.
 - Sva tri predmeta je neophodno učiti.
- Za pravilnu ishranu potrebno je unositi minimalno po 10 jedinica hranljivih komponenata A i B. Trenutno je moguće nabaviti samo dva prehrambena proizvoda P_1 i P_2 . Proizvod P_1 sadrži po dvije jedinice komponente A i B po jednoj količinskoj jedinici proizvoda P_1 . Proizvod P_2 sadrži četiri jedinice komponente A i šest jedinica komponente B po jednoj količinskoj jedinici proizvoda P_2 . Jedinичne cijene proizvoda su tri novčane jedinice za P_1 i pet novčanih jedinica za P_2 . Potrebno je napraviti plan ishrane, odnosno nabavke prehrambenih proizvoda, koji će uz najmanje troškove zadovoljiti specificirane potrebe.

Rješenje:

- U prehrani je potrebno koristiti samo proizvod P_2 , i to 2.5 količinske jedinice, dok proizvod P_1 ne treba koristiti, čime će se postići troškovi od 12.5 novčanih jedinica.
 - Ovakvom prehranom biće uneseno tačno onoliko jedinica hranjive komponente A koliko je neophodno, dok će količina unesene hranjive komponente B biti za 5 jedinica veća nego što je neophodno.
 - Po svakom smanjenju neophodnog zahtjeva za komponentom A za jednu jedinicu, može se očekivati smanjenje troškova za 1.25 novčanih jedinica, do neke granice. Mala promjena u zahtjevima za neophodnu količinu komponente B ne utiče na troškove.
 - Proizvod P_1 nije isplativ za korištenje i da bi postao isplativ, cijena bi mu se morala spustiti za barem 0.5 novčanih jedinica, dok je proizvod P_2 isplativ za korištenje.
- Kod radio terapije, doza radijacije treba biti dovoljno velika da uništi maligne ćelije i dovoljno mala da poštedi zdrave ćelije u organizmu. Nakon analize utvrđeni su potrebni parametri za konkretnu terapiju. Uzimaju se četiri oblasti: zdrava anatomija, kritično tkivo, region tumora i centar tumora. Koriste se dvije vrste zraka. U tački ulaska prve zrake, sa jediničnim nivoom radijacije, prosječna apsorpcija zdrave anatomije je 0.4 kilorada, kritičnog tkiva 0.3 kilorada, regiona tumora 0.5 kilorada i centra tumora 0.6 kilorada. Analogni parametri za drugi tip zrake su 0.5, 0.1, 0.5 i 0.4 kilorada respektivno. Potrebno je minimizirati prosječnu apsorpciju za zdravu anatomiju. Za kritično tkivo nivo apsorpcije ne smije prelaziti 2.7 kilorada, za regiju tumora mora biti tačno 6 kilorada a za centar barem 6 kilorada.

Rješenje:

- Doze zraka 1 i 2 trebaju iznositi 7.5 odnosno 6.5 kilorada respektivno, pri čemu će se postići ozračenje zdravog tkiva od 5.25 kilorada.
 - Apsorpcija u kritičnom tkivu biće tačno na dozvoljenoj granici, dok će apsorpcija u centru tumora biti za 0.3 kilorada veća nego što je neophodno.
 - Po svakom kiloradu smanjenja dozvoljene apsorpcije u kritičnom tkivu odnosno u regionu tumora, količina apsorpcije u zdravoj anatomiji smanjiće se respektivno za –0.5 kilorada (tj. povećaće se za 0.5 kilorada) odnosno 1.1 kilorada, do neke granice. Mala promjena u zahtjevima na minimalnu količinu apsorpcije u centru tumora ne utiče na količinu ozračenja zdravog tkiva.
 - Obje vrste zraka je potrebno koristiti.
- Riješiti problem iz prethodnog zadatka pomoću Simpleks metode ako je apsorpcija kritičnog tkiva smanjena sa 2.7 na 1.8 kilorada.

Rješenje:

Nakon ove izmjene, problem više nema dopustivih rješenja.

- Poslastičarna pravi dvije vrste kolača čija tri glavna sastojka su brašno, mlijeko i jaja. Za potrebu proizvodnje kolača svaki dan se može nabaviti 40 kilograma brašna, 50 jaja i 20 litara mlijeka. Za proizvodnju jedne tepsije prvog kolača potrebno je 4 kilograma brašna, 3 jajeta i 2 litra mlijeka. Za proizvodnju jedne tepsije drugog kolača potrebno je 2 kilograma brašna, 4 jajeta i 3 litra mlijeka. Kako je mlijeko kvarljivo potrebno je svu dnevnu količinu nabavljenog mlijeka utrošiti za dnevnu proizvodnju. Eventualni višak ostala dva artikla, brašna i jaja, moguće je vratiti dobavljaču na kraju dana. Potrebno je utvrditi plan proizvodnje kolača kojim se ostvaruje maksimalna zarada, ako se na svakoj tepsiji bilo kojeg od kolača zaradi po 30 KM.

Rješenje:

- Potrebno je proizvoditi samo prvi kolač, i to 10 tepsija, dok drugi kolač ne treba proizvoditi, pri čemu će se ostvariti zarada od 300 KM.
- Na kraju proizvodnje, brašno će biti u potpunosti iskorišteno (kao i mlijeko koje mora biti u potpunosti iskorišteno), dok će preostati višak od 20 jaja koji se može vratiti dobavljaču.
- Kako je rješenje degenerirano (na kraju algoritma, jedna bazna promjenljiva ima vrijednost 0), dualni problem nema jedinstveno rješenje (jedno moguće rješenje glasi $y_1 = 3.75$, $y_2 = 0$, $y_3 = 7.5$, $y_4 = 0$, $y_5 = 0$), tako da nije lako izvući korisne informacije na osnovu optimalnih vrijednosti dualnih promjenljivih.
- Jedan student je odlučio da sebi organizuje zdravu prehranu jedući samo svoja dva omiljena jela, šnicle i krompir. Pod zdravom prehranom misli se na onu u kojoj dnevno unosi u organizam bar 40 jedinica proteina, manje od 60 jedinica masnoća i tačno 50 jedinica ugljikohidrata. Svaka šnicla košta 4 KM, a u sebi sadrži 5 jedinica ugljikohidrata, 20 jedinica proteina i 15 jedinica masnoća. Porcija krompira sadrži 15 jedinica ugljikohidrata, 5 jedinica proteina i 2 jedinice masnoća, a košta 2 KM. Potrebno je utvrditi potreban broj šnicli i porcija krompira koji obezbjeđuje zdravu dnevnu prehranu uz najniže troškove. Broj šnicli i porcija krompira ne mora biti cijeli, odnosno može biti bilo kakav realan pozitivan broj.

Rješenje:

- Student treba da pojede 14/11 šnicli i 32/11 porcija krompira, što će ga koštati 120/11 KM.
- Unesena količina proteina će biti tačno onolika koliko je neophodno (kao i količina ugljikohidrata koja je fiksirana), dok će količina masnoća biti za 386/11 jedinica manja od maksimalno dozvoljene.
- Po svakom smanjenju neophodne količine proteina odnosno ugljikohidrata za jedinicu, može se očekivati smanjenje troškova prehrane za 2/11 odnosno 4/55 KM, do neke granice. Mala promjena u maksimalno dozvoljenoj količini masnoća ne utiče na troškove prehrane.
- I šnicle i krompiri su isplativi sa aspekta sastavljanja obroka.
- Nekoj fabrici je svakog mjeseca potrebno barem 600 tona uglja. Cjelokupna količina uglja treba da sadrži tačno 15 % sumpora. Fabrika nabavlja ugalj iz tri rudnika R_1 , R_2 i R_3 po nabavnim cijenama od 100, 120 odnosno 130 KM po toni respektivno. Sadržaj sumpora u uglju iz pojedinih rudnika je 3 %, 6 % odnosno 18 % za rudnike R_1 , R_2 i R_3 respektivno. Odrediti plan nabavke uglja koji daje minimalne troškove.

Rješenje:

- Treba nabaviti 120 tona uglja iz rudnika R_1 i 480 tona uglja iz rudnika R_3 , dok iz rudnika R_2 ne treba nabavljati ugalj, pri čemu će troškovi nabavke iznositi 74400 KM.
- Nabavljena količina uglja će biti jednaka minimalnoj zahtijevanoj količini.
- Po svakom smanjenju minimalne neophodne količine uglja za 1 tonu, odnosno povećanju minimalne količine sumpora u uglju za 1 tonu (ne za 1 % nego za 1 tonu), može se očekivati smanjenje troškova za 124 KM, odnosno za –200 KM (tj. povećanje troškova za 200 KM), do neke granice.
- Nabavka uglja iz rudnika R_2 nije isplativa i da bi postala rentabilna, njegova cijena bi trebala opasti za najmanje 14 KM po toni, dok je nabavka uglja iz rudnika R_1 i R_3 isplativa.

- Izrađeni su projekti za izgradnju dva prigradska naselja A i B. Odobrena su ukupna namjenska sredstva za izgradnju njihovih puteva, vodovoda i kanalizacije u iznosu od 70, 150 i 105 miliona KM respektivno. Za obezbjeđenje stambenog prostora, na svakih 1000 stanovnika kod naselja A treba uložiti za puteve 1 milion KM, za vodovod 5 miliona KM, te za kanalizaciju 3.5 miliona KM. Za naselje B analogni troškovi iznose 1.75, 2 i 3 miliona KM respektivno. Dalje, zahtijeva se da ta dva naselja zajedno mogu primiti barem 25000 stanovnika. Odredite optimalni plan raspodjele namjenskih sredstava da se obezbijedi ukupan stambeni prostor za maksimalan broj stanovnika.

Rješenje:

- Naselje A se neće graditi, nego će se graditi samo naselje B za 35000 stanovnika, što je ujedno i ukupan broj stanovnika koji će biti podmiren.
- Za izgradnju puteva i vodovoda ostaće neutrošenih 8.75 odnosno 80 miliona KM respektivno, dok će biti utrošena sva planirana sredstva za kanalizaciju. Moći će se prihvatiti 10000 stanovnika više u odnosu na minimalno traženi broj.
- Po svakom dodatnom milionu KM sredstava za kanalizaciju, moguće je obezbijediti prostor za 1000/3 stanovnika više, do neke granice. Mala izmjena planiranih sredstava za puteve i vodovode ne utiče na broj stanovnika koji će biti podmiren.
- Priroda funkcije cilja je takva da se ne mogu izvući nikakve korisne informacije iz optimalnih vrijednosti izravnavajućih dualnih promjenljivih ($y_5 = 1/6$ i $y_6 = 0$), s obzirom da koeficijenti u funkciji cilja ne dozvoljavaju nikakve promjene.
- Neko poljoprivredno dobro snabdijeva jabukama tri pijace A, B i C. Dobro dnevno može da isporuči maksimalno 600 kg jabuka. Na pijace A i B mora se isporučiti ukupno 10 kg jabuka više nego na pijacu C, dok se na pijace B i C mora isporučiti ukupno najmanje 100 kg jabuka. Ukoliko troškovi prevoza od dobra do pijaca A, B i C iznose respektivno 10, 15 i 10 feninga po kilogramu, odrediti kako treba da izgleda optimalan plan isporuke jabuka da ukupni troškovi transporta budu minimalni.

Rješenje:

- Na pijacu A ne treba isporučivati jabuke, dok na pijace B i C treba isporučiti respektivno 55 odnosno 45 kg jabuka, pri čemu će troškovi transporta iznositi 12 KM i 75 feninga.
- Dobro će isporučiti 500 kg jabuka manje nego što može isporučiti, dok će na pijace B i C zajedno biti isporučena tačno najmanja zahtijevana količina.
- Po svakom smanjenju tražene razlike između količina jabuka na pijacama A i B u odnosu na pijacu C odnosno po svakom smanjenju minimalne količine jabuka na pijacama B i C zajedno za 1 kg, može se očekivati smanjenje troškova za 2.5 odnosno za 12.5 feninga, do neke granice. Mala promjena u količini jabuka kojima raspolaže dobro ne utiče na troškove transporta.
- Isporuka jabuka na pijacu A nije isplativa i da bi postala isplativa cijena transporta do te pijace treba da se spusti za barem 7.5 feninga po kilogramu, dok je isporuka jabuka na pijace B i C isplativa.
- Odredite kako će se promijeniti optimalni plan isporuke iz prethodnog zadatka ukoliko se pojavi novo ograničenje da se na pijacu A mora isporučiti najmanje 50 kg jabuka

Rješenje:

- Na pijace A, B i C treba isporučiti respektivno 50, 30 odnosno 70 kg jabuka, pri čemu će troškovi transporta iznositi 16 KM i 50 feninga (dakle, troškovi su se povećali za 3 KM i 75 feninga).
- Dobro će isporučiti 450 kg jabuka manje nego što može isporučiti, dok će na pijacu A te na pijace B i C zajedno biti isporučena tačno najmanja zahtijevana količina.
- Po svakom smanjenju tražene razlike između količina jabuka na pijacama A i B u odnosu na pijacu C, zatim po svakom smanjenju minimalne količine jabuka na pijacama B i C zajedno, te po svakom smanjenju minimalne količine jabuka na pijaci A za 1 kg, može se očekivati smanjenje troškova za 2.5, 12.5, te 7.5 feninga respektivno, do neke granice. Mala promjena u količini jabuka kojima raspolaže dobro ne utiče na troškove transporta.
- Isporuka jabuka na sve tri pijace je isplativa.

- Neko poljoprivredno dobro snabdijeva jabukama tri pijace A, B i C. Dobro dnevno može da isporuči maksimalno 1000 kg jabuka. Na pijace B i C zajedno mora se isporučiti tačno 100 kg jabuka više nego na pijacu A, dok se na pijace A i B mora isporučiti ukupno najmanje 100 kg jabuka. Ukoliko troškovi prevoza od dobra do pijaca A, B i C iznose respektivno 20, 25 i 20 feninga po kilogramu, odrediti kako treba da izgleda optimalan plan isporuke jabuka da ukupni troškovi transporta budu minimalni.

Rješenje:

- Na pijace A i B treba isporučiti respektivno 250 odnosno 350 kg jabuka, dok na pijacu C ne treba isporučivati jabuke, pri čemu će troškovi transporta iznositi 137 KM i 50 feninga.
- Dobro će isporučiti 400 kg jabuka manje nego što može isporučiti, dok će na pijace A i B zajedno biti isporučena tačno najmanja zahtijevana količina.
- Po svakom smanjenju tražene razlike između količina jabuka na pijacama B i C u odnosu na pijacu A odnosno po svakom smanjenju minimalne količine jabuka na pijacama A i B zajedno za 1 kg, može se očekivati smanjenje troškova za 2.5 odnosno za 22.5 feninga, do neke granice. Mala promjena u količini jabuka kojima raspolaže dobro ne utiče na troškove transporta.
- Isporuka jabuka na pijacu C nije isplativa i da bi postala isplativa cijena transporta do te pijace treba da se spusti za barem 17.5 feninga po kilogramu, dok je isporuka jabuka na pijace A i B isplativa.
- Odredite kako će se promijeniti optimalni plan isporuke iz prethodnog zadatka ukoliko se pojavi novo ograničenje da se na pijacu C mora isporučiti najmanje 100 kg jabuka.

Rješenje:

- Na pijace A, B i C treba isporučiti respektivno 300, 300 odnosno 100 kg jabuka, pri čemu će troškovi transporta iznositi 155 KM (dakle, povećali su se za 17 KM i 50 feninga).
- Dobro će isporučiti 300 kg jabuka manje nego što može isporučiti, dok će na pijace A i B zajedno te na pijacu C biti isporučena tačno najmanja zahtijevana količina.
- Po svakom smanjenju tražene razlike između količina jabuka na pijacama A i B u odnosu na pijacu C, zatim po svakom smanjenju minimalne količine jabuka na pijacama B i C zajedno, te po svakom smanjenju minimalne količine jabuka na pijaci A za 1 kg, može se očekivati smanjenje troškova za 2.5, 22.5, te 17.5 feninga respektivno, do neke granice. Mala promjena u količini jabuka kojima raspolaže dobro ne utiče na troškove transporta.
- Isporuka jabuka na sve tri pijace je isplativa.
- Neka fabrika proizvodi tri tipa detrdženata D_1 , D_2 i D_3 . Sa trgovačkom mrežom ugovorena je isporuka tačno 100 kg detrdženata bez obzira na tip. Odlučeno je da se za proizvodnju ovih detrdženata radnici moraju uposliti na najmanje 120 radnih sati, a zna se da je za proizvodnju neophodno uložiti 2, 1 odnosno 1 radni sat po kilogramu detrdženata D_1 , D_2 i D_3 respektivno. Također se raspolaže sa 110 \$ za uvoz odgovarajućeg repromaterijala. Po jednom kilogramu detrdženta treba nabaviti repromaterijala u iznosu od 2 \$, 1.5 \$ i 0.5 \$ respektivno za detrdžente D_1 , D_2 i D_3 . Odrediti optimalni plan proizvodnje ukoliko se zna da prodajne cijene ovih detrdženata iznose 20, 10 odnosno 5 KM po kilogramu respektivno za detrdžente D_1 , D_2 i D_3 .

Rješenje:

- Potrebno je proizvesti 40 kg detrdženta D_1 i 60 kg detrdženta D_3 , dok detrdžent D_2 ne treba proizvoditi, pri čemu će se ostvariti zarada od 1100 KM.
- U proizvodnji će radnici biti angažirani 20 radnih sati više nego što je minimalno planirano, dok će sva raspoloživa sredstva za uvoz repromaterijala biti iskorištena.
- Za svaki dodatni 1 \$ planiran za uvoz repromaterijala može se očekivati porast zarade od 10 KM, do neke granice. Mala promjena u ugovorenoj količini detrdženta koji se treba isporučiti te minimalom broju radnih sati na koje je potrebno uposliti radnike ne utiču na zaradu.
- Proizvodnja detrdženta D_2 nije rentabilna i da bi postala rentabilna, cijenu bi mu trebalo povećati za barem 5 KM po kilogramu. Proizvodnja detrdženata D_1 i D_3 je rentabilna.

- Neka fabrika proizvodi tri tipa istovrsnog proizvoda A, B i C. Ugovoreno je da se trgovačkoj mreži isporuči tačno 300 tona tog proizvoda bez obzira na tip. Za potrebe proizvodnje treba koristiti određene hemikalije u iznosu od 3, 4 i 2 litra respektivno po jednoj toni proizvoda A, B i C respektivno, pri čemu su odobrena sredstva za uvoz 1000 litara te hemikalije. Također je odlučeno da u procesu proizvodnje radnike treba uposliti na najmanje 120 radnih sati, a zna se da je za proizvodnju neophodno uložiti 2, 1 odnosno 3 radna sata po kilogramu proizvoda A, B i C respektivno. Odrediti optimalni plan proizvodnje ukoliko se zna da prodajne cijene ovih proizvoda iznose 1000, 2000 odnosno 800 KM po toni respektivno za proizvode A, B i C.

Rješenje:

- Potrebno je proizvesti 200 tona proizvoda B i 100 tona proizvoda C, dok proizvod A ne treba proizvoditi, pri čemu će se ostvariti zarada od 48000 KM.
- U proizvodnji će radnici biti angažirani 380 radnih sati više nego što je minimalno planirano, dok će sva raspoloživa sredstva za nabavku hemikalije biti iskorištena.
- Za svaku dodatnu tonu proizvoda koji treba ukupno isporučiti možemo očekivati porast zarade od –400 KM (tj. pad zarade od 400 KM), do neke granice. Obratimo pažnju da ovdje imamo primjer paradoksa tipa “manje-za-više”! Dalje, za svaki dodatni litar hemikalije koji se nabavi može se očekivati porast zarade od 600 KM, do neke granice. Mala promjena u minimalom broju radnih sati na koje je potrebno uposliti radnike ne utiče na zaradu.
- Proizvodnja proizvoda A nije rentabilna i da bi postala rentabilna, cijenu bi mu trebalo povećati za barem 400 KM po toni. Proizvodnja proizvoda B i C je rentabilna.
- Fabrika auspuha za dalekovode i šarenih geveznica proizvodi crvene, zelene i plave geveznice, koje koštaju respektivno 20 \$, 70 \$ i 20 \$ po kilogramu. Za proizvodnju ova tri tipa geveznica potrebno je po jednom kilogramu upotrijebiti respektivno jedan, dva odnosno jedan kataklinger, a na raspolaganju nam je ukupno 2000 kataklintera. Također, za proizvodnju ova tri tipa geveznica, po jednom kilogramu treba upotrijebiti respektivno 6 litara, 1 litar odnosno 2 litra kalamute, a tehnološki proces zahtijeva da u proizvodnji mora biti utrošeno barem 2800 litara kalamute. Pored toga, zahtijevi tržišta nameću da crvenih i zelenih geveznica zajedno treba proizvesti tačno 1000 kg više nego plavih geveznica.

Rješenje:

- Treba proizvesti 300 kg crvenih, 800 kg zelenih i 100 kg plavih geveznica, što daje ukupnu zaradu od 64000 \$.
- Po obavljenoj proizvodnji, biće utrošeni svi kataklingeri, dok će kalamute biti utrošeno tačno onoliko litara koliko minimalno zahtijeva tehnološki proces.
- Po svakom dodatnom kataklingeru koji je na raspolaganju, odnosno svakom dodatnom litru kalamute koji se zahtijeva u tehnološkom procesu, može se očekivati povećanje zarade od $100/3$ \$ odnosno $-10/3$ \$ (tj. smanjenje zarade od $10/3$ \$) respektivno, do neke granice. Što se tiče ograničenja na razliku u broju crvenih i zelenih u odnosu na plave geveznice, po svakom dodatnom kilogramu razlike može se očekivati povećanje zarade od $20/3$ \$, do neke granice.
- Sva tri tipa geveznica su rentabilna za proizvodnju.
- Neki tokar proizvodi proizvode A i B čije su prodajne cijene cijene 30 odnosno 25 KM po komadu. On zahtijeva od poslodavca da mu obezbijedi angažman od barem 10 sati sedmično. Proizvod A zahtijeva 1 sat mašinskog rada i 2 sata ručnog rada po proizvedenom kilogramu, dok proizvod B zahtijeva 5 sati mašinskog rada i 1 sat ručnog rada po proizvedenom kilogramu. Pored toga, poznato je da proizvodna mašina ne smije da radi više od 25 sati sedmično. Pronaći plan proizvodnje koji ispunjava sve postavljene zahtjeve, a koji je takav da će poslodavca najmanje koštati.

Rješenje:

- Tokara treba angažirati da proizvede 5 komada proizvoda A i nijedan komad proizvoda B, što će poslodavca koštati 150 KM.

- Tokar će biti angažiran da radi minimalno zahtijevano vrijeme, a proizvodna mašina će moći da radi još 20 sati za druge potrebe.
- Po svakom smanjenju zahtijevanog angažmana tokara za 1 sat, očekivani troškovi poslodavca umanjuju se za 15 KM, do neke granice. Male izmjene u dopuštenom vremenu rada mašine ne utiču na troškove.
- Poslodavcu se ne isplati naručivati od tokara proizvod B dok mu cijena ne opadne za barem 10 KM. Narudžba proizvoda A je isplativa (sa aspekta poslodavca).