第八章 群

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

主观题 10分

Setting

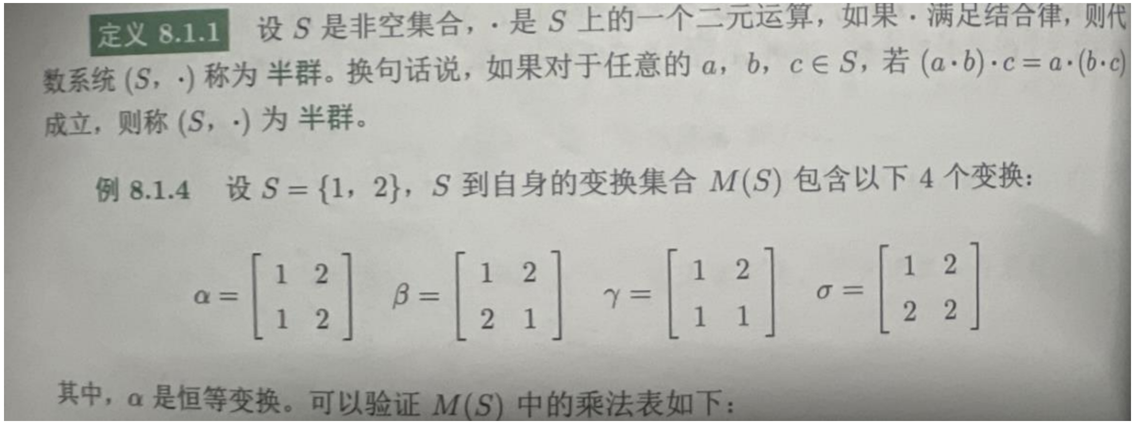
为什么代数结构这部分的定义的代数结构、半群和群等概念均要求集合是非空的？欢迎投稿。

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

问题解答

- 为什么循环幺群要求幂次为非负整数，而循环群的幂次是整数就行？
  - 因为循环幺群中的元素不一定可逆，此时负数幂次没有定义。循环群中的元素都可逆，此时可以定义负数幂次
- 没看懂8.1.4的例子：这是变换群的记号，这节课会介绍



定义 8.1.1 设 S 是非空集合，$\cdot$ 是 S 上的一个二元运算，如果 $\cdot$ 满足结合律，则代数系统 $(S, \cdot)$ 称为**半群**。换句话说，如果对于任意的 a，b，$c \in S$，若 $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ 成立，则称 $(S, \cdot)$ 为**半群**。

例 8.1.4 设 $S = \{1, 2\}$，S 到自身的变换集合 $M(S)$ 包含以下 4 个变换：

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

其中，α 是恒等变换。可以验证 $M(S)$ 中的乘法表如下：

- 希望教学节奏稍慢一些，能更好的接受知识点
- 可以多出几道练习题加深理解
- 讲的很好，希望课上多来一些像本节课这样较难的练习题

上次作业分析

- 整体完成情况较好，有两道证明题需要注意

15. 已知代数系统$(S,*)$和$(P,\cdot)$，其中$S=\{a,b,c\}$，$P=\{1,2,3\}$，二元运算分别定义为：

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	b	c

$\cdot$	1	2	3
1	1	2	1
2	1	2	2
3	1	2	3

试证它们是同构的。

- 证明代数系统$(S,*)$和$(P,\cdot)$同构，除了构造双射函数$f:S\rightarrow P$外，还需要验证其保持运算，即$f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$

上次作业分析

2. 设$(S,\cdot)$是半群，证明$S\times S$对于下面规定的结合法$\cdot$作成一个半群

$$(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2)=(a_1\cdot b_1,a_2\cdot b_2),$$

当S有单位元时，$S\times S$也有单位元。

- 证明(e,e)是$S\times S$单位元时，需要同时验证(e,e)同时为左右单位元，即$\forall a,b\in S$，$(e,e)(a,b)=(a,b)$和$(a,b)(e,e)=(a,b)$

内容回顾：群的定义

定义8.2.1　　封结幺逆

- 设G是非空集合，$\cdot$是G上的二元运算，若代数系统$(G,\cdot)$满足
  1. 适合结合律，即$\forall a,b,c \in G$,有$(ab)c = a(bc)$
  2. 存在单位元e，使得$\forall a \in G, ae = ea = a$
  3. G中的元素都是可逆元。即$\forall a \in G$,都$\exists a^{-1} \in G$，使得$aa^{-1} = a^{-1}a = e$
- 则称代数系统$(G,\cdot)$是一个群，或记为$(G,\cdot,e)$。
- 为了方便起见，常用G表示群$(G,\cdot,e)$

关于子群的说法，下面说法正确的是

$$\boxed{HH = \{h_1h_2 | h_1 \in H, h_2 \in H\}}$$

A 对于群G和其子群H，有$HH = H$

B 对于群G和其子集H，若$HH = H$，则H是G的子群

C 存在群G是其两个真子群的并

D 存在群G是其三个真子群的并

提交

解答

$HH = \{h_1h_2|h_1 \in H, h_2 \in H\}$

- 对于群G和其子群H，有$HH = H$ ✔
  - 子群的运算具有封闭性，故$HH \subseteq H$。又$H = eH \subseteq HH$，故$H = HH$
- 对于群G和其子集H，若$HH = H$，则H是G的子群 ✘
  - $G = (\mathbb{Q} - \{0\}, *)$，$H$为全体奇数，其满足$HH = H$但不构成子群
- 存在群G是其两个真子群的并 ✘
  - 反证，假设$G = H \cup K$，H, K是G的真子群
  - 存在$h \in \mathrm{H}, h \notin K$；　$k \in K, k \notin H$
  - 此时$hk \notin H$ (否则$k = h^{-1}(hk) \in H$) 同理$hk \notin K$，则$hk \notin G$，矛盾
- 由存在群G是其三个真子群的并 ✔
  - $G = K_4 = \{e, a, b, c\}, H_1 = \{e, a\}, H_2 = \{e, b\}, H_3 = \{e, c\}$

内容回顾：群的性质

性质1　设$(G,\cdot)$为群，则$\forall a\in G$，a的左逆元也是a的右逆元.

性质2　设$(G,\cdot)$为群，则G的左单位元e也是右单位元.

性质3 设$(G,\cdot)$为群，则$\forall a,b\in G$，方程$a\cdot x=b$和$y\cdot a=b$在G中的解唯一.

内容回顾：群的性质

性质4 设$(G, \cdot)$为群，则

(1) $\forall a \in G$，$(a^{-1})^{-1}=a$;

(2) $\forall a,b \in G$，$(a \cdot b)^{-1}=b^{-1} \cdot a^{-1}$.

性质5 群$(G, \cdot)$中的乘法满足消去律，即$\forall a,b,c \in G$ 有

(1) 若 $a \cdot b = a \cdot c$，则 $b = c$(左消去律)

(2) 若 $b \cdot a = c \cdot a$，则 $b = c$(右消去律)

内容回顾：群的性质

性质6 设G 为群，则G中的幂运算满足：

(1) $\forall a \in G$，$a^n a^m = a^{n+m}$，$n, m \in Z$

(2) $\forall a \in G$，$(a^n)^m = a^{nm}$，$n, m \in Z$

(3) 若G为交换群，则 $(ab)^n = a^n b^n$.

性质7 **G为群，$a \in G$且 $|a| = r$. 设k是整数，则**

(1) $a^k = e$当且仅当$r \mid k$.

(2) $O < a^{-1} > = O < a >$.

内容回顾：群、群的基本性质

定理8.2.6

- H是G的子群的充要条件是：
  1. H对G的乘法运算是封闭的，即$\forall a, b \in H$，都有$ab \in H$
  2. H中有单位元e'，且$e' = e$
  3. $\forall a \in H$，都有$a^{-1} \in H$，且a^{-1}是a在G中的逆元

内容回顾：满足子群的条件

封闭性、单位元、逆元素

非空的

封幺逆

内容回顾：群、群的基本性质

定理8.2.7

- G的非空子集H是G的子群的充要条件是$\forall a,b \in H$，都有$ab^{-1} \in H$

设置

请计算群$(\mathbb{Q}-\{0\},*)$中各元素的阶
其中$\mathbb{Q}$是有理数

作答

Setting

关于群的元素的阶，下列说法正确的是

A 有限群的元素的阶都是有限的

B 所有元素的阶都是有限的群必为有限群

C 存在无限群，其元素的阶都是有限的

D 存在无限群，其元素的阶都是无限的

Submit

解答

- A: 有限群的元素的阶都是有限的
- B: 所有元素的阶都是有限的群必为有限群
- C: 存在无限群，其元素的阶都是有限的
- D: 存在无限群，其元素的阶都是无限的

解答

- A 正确，否则无限阶元的若干次幂就构成了一个无限集合
- B 错误 C正确，如($P(M)$,⊕)：除单位元外所有元素阶均为2的群
- D 错误，单位元的阶只能为1

内容回顾：循环群定义

- 若群G中存在一个元素a，使得G中的任意元素g，都可以表示成a的幂的形式，即
$$G = \{a^k | k \in Z\},$$
- 则称G是循环群，记作$G = \langle a \rangle$，a称为G的生成元。

由一个元素生成的群

内容回顾：关于循环群的一个结论

- 所有的循环群都同构于(Z,+)或$(Z_n, +)$

- 当$o(a)$=∞时， $G \cong$ (Z,+)无限循环群
- 当$o(a)$=n时， $G \cong (Z_n, +)$ n阶循环群

内容回顾：循环群 群的同构

定理8.3.1

- 设$G=\langle a\rangle$，则
- 1. 若$o\langle a\rangle=\infty$，则G中只有生成元a或a^{-1}
- 2. 若$o\langle a\rangle=n$，则G中有$\varphi(n)$个生成元
  - 其中$\varphi(n)$是欧拉函数，它表示小于n且与n互素的正整数个数。

循环群中，若某元素的幂次与n互素，则可以作为另一生成元！

8.3 循环群 群的同构

定理8.3.1 若$o\langle a\rangle=\infty$，则G中只有生成元a或a^{-1}

- 证明：
  - 当$o\langle a\rangle=\infty$时，显然a是生成元。同时，$\forall a^k\in G$，$a^k=(a^{-1})^{-k}$，因此a^{-1}也是G的一个生成元
  - 假设还有另外一个生成元b，则不妨设$b=a^j$
  - 由于b也是生成元，则a可以写为$a=b^t$
  - 则必有$a=b^t=(a^j)^t=a^{jt}$，由消去律，$a^{jt-1}=e$
  - a为无限阶，则必有$jt-1=0$，故只能有$j=t=1$或$j=t=-1$

内容回顾：定理8. 3. 1

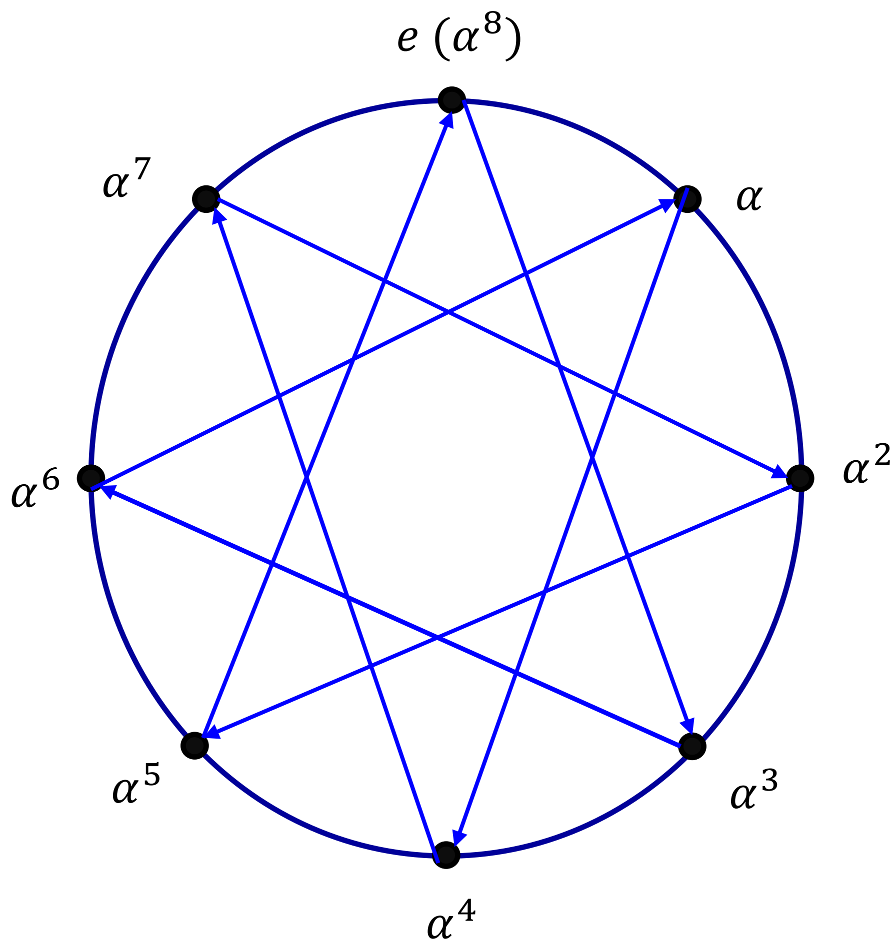
定理8. 3. 1 若$o\langle a\rangle = n$，则G中有$\varphi(n)$个生成元

- 证明（续）：
  - 当$o\langle a\rangle = n$时，若$G = \langle a\rangle = \langle a^r\rangle$，则存在$p$使$a = (a^r)^p$，即$a^{rp-1} = e$
  - 故存在q，使得$rp - 1 = qn$ 裴蜀定理
  - 即$(r, n) = 1$ 证毕！

裴蜀定理：a, b互质的充分必要条件是存在整数x, y使ax+by=1

循环群中，若某元素的幂次与n互素，则可以作为另一生成元！

内容回顾：举例



多选题 1分

设置

关于无限群，下面说法正确的是

A 存在无限群，其只有有限个子群

B 存在无限群，其每个元素的阶都有限

C 存在无限群，除一个元素外，其余所有元素的阶都无限

D 存在无限群，除两个元素外，其余所有元素的阶都无限

提交

解答

- 存在无限群，其只有有限个子群 ✗
  - 若存在无限阶元a，则$\langle a\rangle, \langle a^2\rangle, \langle a^3\rangle, \ldots$均为不同子群，有无限个
  - 若不存在无限阶元，记 $S=\{\langle x\rangle | x\in G\}$，即每个元素生成的子群。不存在无限阶元意味着$\langle x\rangle$均为有限集。若$G$只有有限个子群，则$G=\bigcup S$为有限个有限集的并，必为有限集，矛盾
- 存在无限群，其每个元素的阶都有限 ✓
  - $(P(\mathbb{N}),\oplus)$
- 存在无限群，除一个元素外，其余所有元素的阶都无限 ✓
  - $(\mathbb{Z},+)$
- 存在无限群，除两个元素外，其余所有元素的阶都无限 ✓
  - $(\mathbb{Q}-\{0\},*)$

8.3 循环群和群的同构:循环群的子群性质

- 思考:

循环群G的子群H是否仍然是循环群? YES!

分析:子群H的生成元?

G的子群H,可以写为$H=\{e,a^{k_1},a^{k_2},\cdots,a^{k_m},\cdots\}$

不妨设H所有元素的幂次中,k_1是最小值

则对于H中其他元素a^{k_m}幂次进行分析,一定有$k_m=l\cdot k_1+r$,其中$0\le r<k_1$。

故$a^{k_m}=a^{r+l\cdot k_1}=a^r a^{l\cdot k_1}$ $\Rightarrow$ $a^r=a^{k_m}(a^{l\cdot k_1})^{-1}$ $\Rightarrow$

$a^r\in H$

$r=0$

最小次幂是生成元

8.3 循环群和群的同构:循环群的子群性质

- 思考:

  G为循环群时,G的子群是什么特征?

  – 若G为无限循环群:

  假设子群H生成元是a^k,则该生成元的阶数一定为∞

  否则若存在正整数q,使得$(a^k)^q = e$,将说明a为有限阶元,矛盾!

  – 若G为无限循环群,则其非平凡子群也为无限循环群!

8.3 循环群和群的同构:循环群的子群性质

- 思考：

  G为循环群时， G的子群是什么特征？

  – 若G为n阶循环群：

    假设子群H生成元是a^{k_1}，设其阶数为d

    由于$(a^{k_1})^n = (a^n)^{k_1} = (e)^{k_1} = e$（定理8.2.5）

    则必定有$d|n$

  – 若G为n阶循环群，则其子群生成元阶数为n 因数！

定理8.2.5 设a是群G中的一个r阶元素，k是正整数，则

1. $a^k = e$，当且仅当 $r|k$

8.3 循环群和群的同构

定理8.3.2

- 设$G = \langle a \rangle$是循环群，则

  1. G的子群H都是循环群。
  2. 若G是无限群，则子群$H(H \neq \{e\})$也是无限群，若G是有限群时，设$|G| = n$，且a^k是H中a的**最小正幂**，则$|H| = n/k$。

8.3 循环群 群的同构

- 证明：1. G的子群H都是循环群
  - H是G子群，则H中的元素可以表示成a的方幂的形式
  - 设a^k是H中a的最小正幂，任取$a^s \in H, s = pk + r(0 \leq r < k)$,所以$a^r = a^{s-pk} = a^s a^{-pk} = a^s (a^k)^{-p} \in H$
  - a^k是最小正幂，故$r = 0$，即$a^s = (a^k)^p$，故$H = \langle a^k \rangle$

定理8.3.2

- 设$G = \langle a \rangle$是循环群，则
  1. G的子群H都是循环群。
  2. 若G是无限群，则子群$H(H \neq \{e\})$也是无限群，若G是有限群时，设$|G| = n$，且a^k是H中a的最小正幂，则$|H| = n/k$。

8.3 循环群 群的同构

定理8.3.2

- 证明：

  2.1 若G是无限群，则$H(H \neq \{e\})$也是无限循环群

  - 反证法
  - 设$a^k(k \neq 0)$是H的一个生成元，且a^k是n阶元
  - $(a^k)^n = e$，即$a^{kn} = e$，与a是无限阶元矛盾
  - a^k是无限阶元
  - H是无限阶循环群

定理8.3.2

- 设$G = \langle a \rangle$是循环群，则

  1. G的子群H都是循环群。
  2. 若G是无限群，则子群$H(H \neq \{e\})$也是无限群，若G是有限群时，设$|G| = n$，且a^k是H中a的最小正幂，则$|H| = n/k$。

8.3 循环群 群的同构

- 证明：

  2.2 $|G|=n$, 且a^k是H中的a的最小正幂，则$|H|=n/k$

  - $O\langle a\rangle = n$，即$a^n=e$
  - a^k是循环群H中a的最小正幂（即$H=\langle a^k\rangle$）
  - 存在最小正整数m，使$(a^k)^m = e = a^n$，即$km=n$
  - a^k的阶$m=n/k$，即$|H|=n/k$。

定理8.3.2

- 设$G=\langle a\rangle$是循环群，则

  1. G的子群H都是循环群。
  2. 若G是无限群，则子群$H(H\neq\{e\})$也是无限群，若G是有限群时，设$|G|=n$，且a^k是H中a的最小正幂，则$|H|=n/k$。

8.3 循环群 群的同构

问题：

- n阶循环群，对于n的某个因子，可有几个子群
- 例如：10阶循环群，因子为2、5，则对应生成元阶为2的循环子群有几个？

定理8.3.3：设G是n阶循环群，则对于n的每一个正因子d，G有且只有一个d阶子群

- 证明：由于d为n的正因子，可知$H=\langle a^{\frac{n}{d}}\rangle$是$G$的$d$阶子群。

  假设存在$H_1=\langle a^m\rangle$也是G的d阶子群，且a^m是H_1中最小正幂元。

  显然，$a^{md}=(a^m)^d=e$，则有$n|md \Longrightarrow \frac{n}{d}|m$

  令$m=\frac{n}{d}\cdot t(t\in Z)$　则有：

  $$a^m=a^{\frac{n}{d}\cdot t}=(a^{\frac{n}{d}})^t\in H$$

  此时可以看出，a^m是H_1的生成元，但是却是H中的一个元素。因此必然有$H_1\subseteq H$。但是二者的阶数又相等，因而$H_1=H$。

n阶循环群，n的因子有几个，子群就有几个！

多选题 1分

Setting

群$(Z_{14}, +)$的子群为

A Z_{14}

B $\langle \overline{2} \rangle$

C $\langle \overline{7} \rangle$

D $\langle \overline{0} \rangle$

Submit

8.3 循环群 群的同构

定义8.3.2

- 设$(G,\cdot)$和$(G',*)$是两个群，

  $f: G \to G'$是双射，如果$\forall a, b \in G$都有

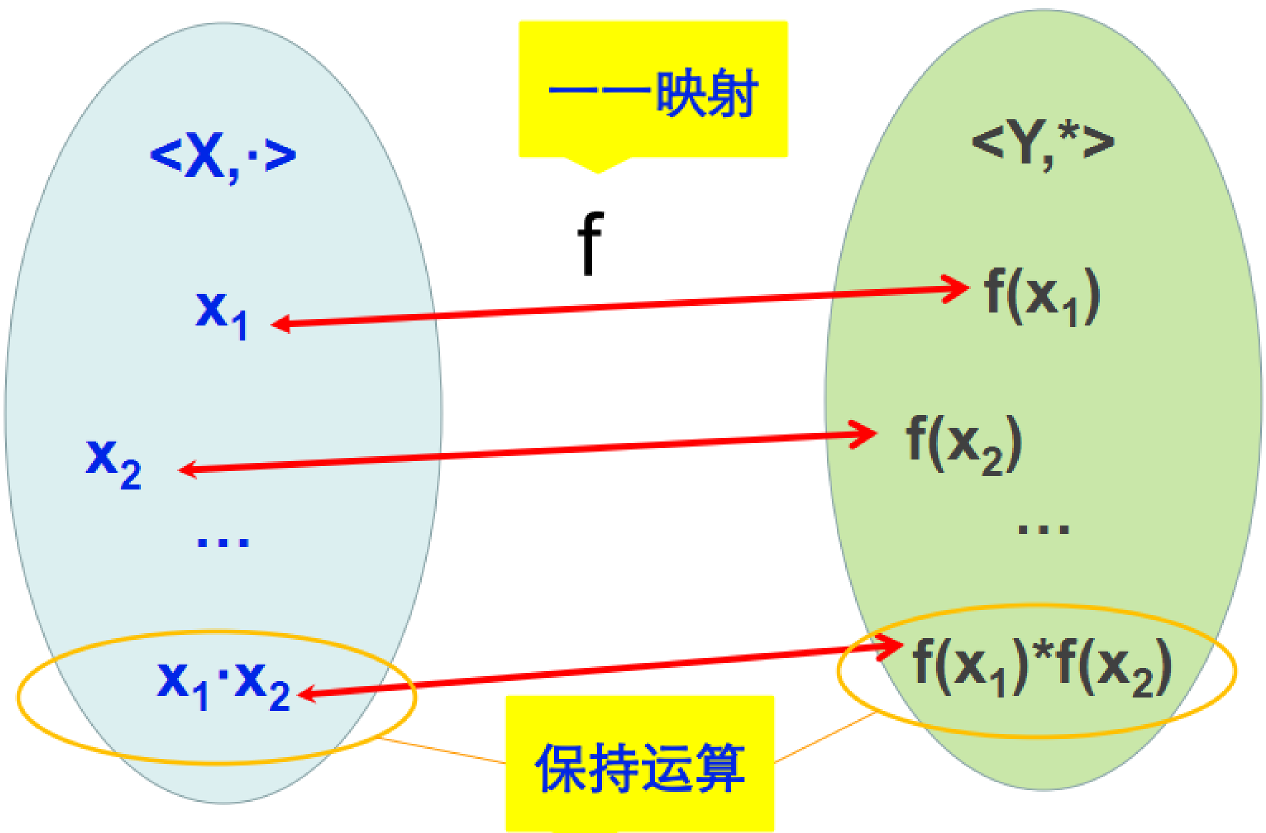
$$f(ab) = f(a) * f(b)$$

- 则称f是G到G'的一个同构，记作$G \cong G'$

群同构的充分条件：1. 双射 2. 保持运算！

8.3 循环群 群的同构

同构示意图



8.3 循环群 群的同构

例：

- 设$G=(R^+,\times), G'=(R,+)$，令$f: x\rightarrow lnx$

  则f是从G到G'的一个双射，且$\forall x,y\in G$

  $f(x\times y)=\ln(xy)=lnx+lny=f(x)+f(y)$

  因此，$G\cong G'$

8.3 循环群 群的同构

定理8.3.4

- 设G是循环群，a为生成元
- 1. 若$O\langle a\rangle = \infty$，则$G$与$(\mathrm{Z}, +)$同构
- 2. 若$O\langle a\rangle = n$，则G与$(Z_n, +)$同构

8.3 循环群 群的同构

- 证明： 1. 若$O\langle a\rangle=\infty$，则G与$(\mathrm{Z},+)$同构
  - 对于$O\langle a\rangle=\infty, \forall m,n\in Z^{+}(m\neq n)$，一定有$a^m\neq a^n$
  - 否则若$a^m=a^n$，就有$a^{(m-n)}=e$
  - 无限循环群中，任何两个不等的元素幂次也不等
  - 构造群G到Z的映射关系$f\colon a^k\to k$
  - $\forall x\in G, x=a^k, f(x)=f\left(a^k\right)=k\in Z$说明$f$为映射
  - $\forall a^m,a^n\in G(a^m\neq a^n)$ $m\neq n$ $f(a^m)\neq f(a^n)$
  - $\forall k\in Z$，必定$\exists a^k\in G$，使得$f\left(a^k\right)=k$
  - 因此f是双射！

8.3 循环群 群的同构

定理8.3.4

- 证明（续）： 1. 若$O\langle a\rangle=\infty$，则G与$(\mathrm{Z},+)$同构
  - 群G到Z的映射关系$f: a^k \rightarrow k$为双射
  - 考察$\forall x, y \in G$,其中$x=a^m, y=a^n$

    $$f(xy)=f(a^m a^n)=f(a^{m+n})=m+n$$

    $$=f(x)+f(y)$$
  - 因此f是G到Z的一个同构映射
  - $G \cong Z$

2. 若$O\langle a\rangle = n$，则G与$(Z_n, +)$同构

- 证明 由于$G = O\langle a\rangle$，故G中所有元素为$e, a^1, a^2, \cdots, a^{n-1}$
- Z_n中所有元素为$\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{n-1}$
- 易证，映射f是从G到Z_n的双射！
- 群G到Z_n的映射关系$f: a^k \to \overline{k} (0 \le k < n)$
- 考察$\forall x, y \in G$，其中$x = a^{m_1}, y = a^{m_2} (0 \le m_1 \le m_2 < n)$
- $f(xy) = f(a^{m_1}a^{m_2}) = f(a^{m_1+m_2}) = f\left(a^{(m_1+m_2) mod\, n}\right) = (m_1 + m_2) mod\, n = f(x) + f(y)$
- 因此，f是G到Z_n的一个同构映射！
- $G \cong Z_n$ 证毕！

8.3 循环群 群的同构

定理8.3.4

- 设G是循环群，a为生成元
- 1. 若$O\langle a\rangle=\infty$，则G与$(\mathrm{Z},+)$同构
- 2. 若$O\langle a\rangle=n$，则G与$(Z_n,+)$同构

任何两个阶相同的循环群同构！

8.3 循环群 群的同构

定理8.3.5

- 设G是一个群，$(G',*)$是一个代数系统，如存在G到G'的双射f，且保持运算，即$\forall a,b \in G$，有
$$f(ab) = f(a) * f(b)$$
则G'也是一个群。

依据同构映射，可以做群的判定！

8.3 循环群 群的同构

- 小结：
  - 循环群的定义
  - 生成元相关定理、性质
  - 子群相关定理、性质
  - 群的同构概念
  - 循环群的同构性质
  - 利用同构做群的判定

第八章 群

8. 1 半群

8. 2 群、群的基本性质

8. 3 循环群 群的同构

8. 4 变换群和置换群 Cayley定理

8. 5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

8. 6 正规子群与商群

8. 7 群的同态、同态基本定理

8. 8 群的直积

三维空间中有多少种正多面体

- 我们的证明方式是利用欧拉公式：

$$v + f - e = 2$$

- 假设每个面的边数为n，每个顶点发射的边数为m：

$$\frac{vm}{2} = \frac{fn}{2} = e$$

- 因此带入v=2e/m以及f=2e/n，我们有：

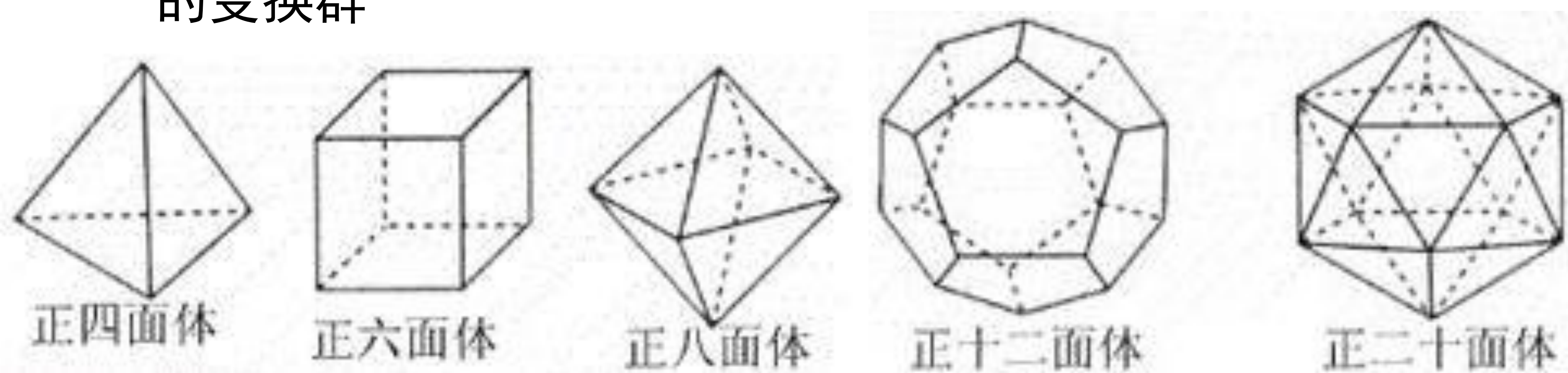
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e} > \frac{1}{2}$$

- 其中m,n>2，且为正整数

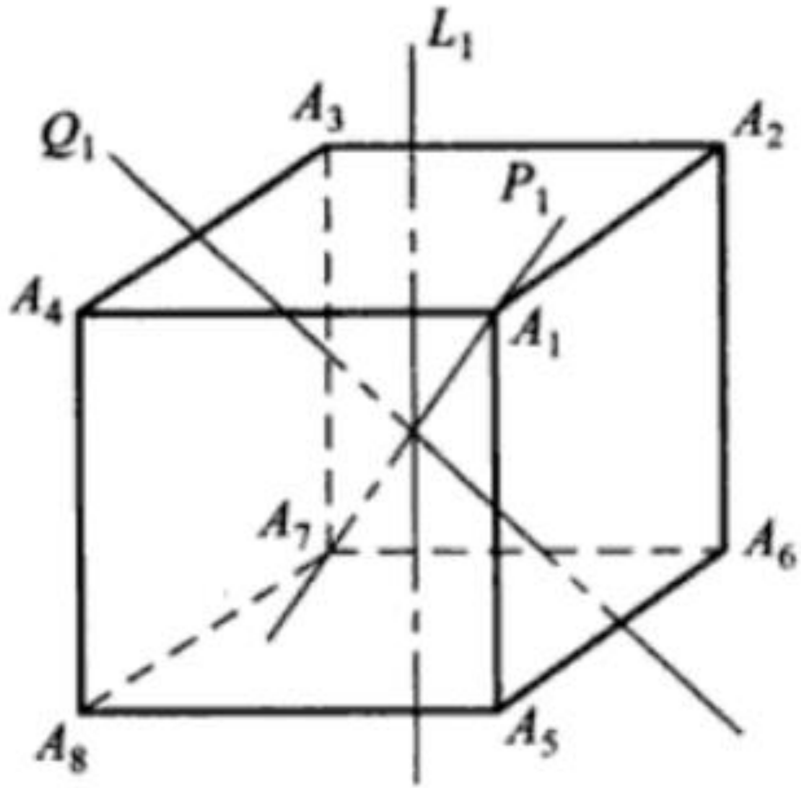
三维空间中有多少种正多面体

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}>\frac{1}{2}$$

- 该方程解有限：(3, 3)，(3, 4)，(4, 3)，(3, 5)，(5, 3)
- 因此只有五种正多面体
- 在本节课中，我们将会学到正多面体的旋转群都是三维旋转群SO3的子群
- SO3是将三维物体绕一定旋转轴旋转一定角度的变换组成的变换群

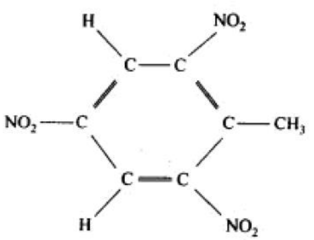


旋转



变换群的实际应用

- 排列组合里面的计数问题
  - 使用两种颜色的珠子串成含有五个珠子的项链，旋转72度或翻转后对应的是同一个项链，问一共有多少种不同的项链
  - 苯环上的碳原子可连接H、$\mathrm{CH_3}$或NO_2，问可形成多少种不同的物质



(TNT)

  - 求包含四个顶点且不同构的无向图个数
    - 同构是指图之间的同构

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定义8.4.0

- 设$A=\{a_1,a_2,\cdots\}$是一个非空集合，A到A的一个映射f称为A的一个变换，记做

$$f\colon\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ f(a_1) & f(a_2) & \cdots \end{bmatrix}$$

- 其中，恒等变换记为I

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 思考：

  变换有什么特点？

  – 定义域和值域为同一个集合

  – 如果变换是满射，则一定是单射吗？是双射吗？

有限集合上的变换，如果变换是满射，则一定是单射，也是是双射；无限集合上则不一定

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 记集合A上全部变换的集合为$M(A)$
  - 若$|A| = n$，则$|M(A)| = n^n$

- 如果变换是双射的话，我们称之为一一变换。

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 对于A中的两个变换f,g，定义A的另一个变换gf为：

$$gf(a) = g\big(f(a)\big) \qquad \forall a \in A$$

- 称为变换f与g的乘积（或乘法运算）

- 对于代数系统$(M(A),\cdot)$：
  - 变换乘法运算符合结合律
  - $fI = If = f$

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定义8.4.1

- 非空集合A的所有一一变换关于变换的乘法所作成的群叫做A的一一变换群，用$E(A)$表示，$E(A)$的子群叫做变换群

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 当集合A为有限集合时，即$|A| = n$时，A中的一个一一变换称为一个n元置换，由置换构成的群称为置换群。

- 思考：

  置换群与变换群的区别？

  变换群 一个集合A的一一变换所组成的群

  置换群 一个有限集合A的一一变换所组成的群

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 对于n元置换，可表示为：

$$\sigma\colon\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

- 显然，$\sigma(1),\sigma(2),\cdots\sigma(n)$就是$1\sim n$的一个排列。
- 反之， $1\sim n$ 的一个排列，唯一对应一个 n 元置换，则共有$n!$个n元置换。
- 用S_n表示这$n!$个n元置换的集合

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 例
  - $A=\{1,2,3\}$，则$S_3=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_6\}$，其中

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix},\ \sigma_2=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{bmatrix},\ \sigma_3=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{bmatrix},$$

$$\sigma_4=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix},\sigma_5=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix},\ \sigma_6=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix},$$

  - 计算置换乘法$\sigma_2\sigma_4$： $i\rightarrow\sigma_2(\sigma_4(i))$
  - $\sigma_2\big(\sigma_4(1)\big)=\sigma_2(2)=3,\cdots$

$$\sigma_2\sigma_4=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}$$

用S_n表示这$n!$个n元置换的集合

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定义8.4.2

- S_n对于置换乘法构成群，称为n次对称群（了解）。
- S_n的子群称为n元置换群。

对于n元置换，可表示为：

$$\sigma:\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

显然，$\sigma(1), \sigma(2), \cdots \sigma(n)$就是$1\sim n$的一个排列。

反之，$1\sim n$ 的一个排列，唯一对应一个 n 元置换，则共有$n!$个n元置换。

用S_n表示这$n!$个n元置换的集合

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 对于一个置换σ，如果满足

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \cdots, \sigma(i_l) = i_1$$

- 则称$(i_1, i_2, \cdots, i_l)$是一个长度为l的轮换
- 当$l = 1$时，称为恒等置换
- 当$l = 2$时，称为对换

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 例：
  - 置换

$$\sigma=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\sigma(1)=3$$
$$\sigma(3)=2$$
$$\sigma(2)=4$$
$$\sigma(4)=1$$

  - 因此，该置换可写为轮换的形式：(1,3,2,4)

    (3,2,4,1)　　(2,4,1,3)　　(4,1,3,2)

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 例：
  - 置换 $\sigma=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 4 & 1 & 7 & 6 & 5 & 2 & 3\end{bmatrix}$

$$\begin{cases}\sigma(1)=4\\ \sigma(4)=6\\ \sigma(6)=2\\ \sigma(2)=1\end{cases} \Rightarrow (4,6,2,1)$$

$$\begin{cases}\sigma(3)=7\\ \sigma(7)=3\end{cases} \Rightarrow (7,3)$$

$$\{\sigma(5)=5 \Rightarrow (5)$$

  - 因此，该置换可写为：(4,6,2,1)(7,3)(5)
  - 通常，恒等置换不写入置换的表达式中

$$(4,6,2,1)(7,3)$$

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定义8.4.3

- 设α,β是S_n中的两个轮换，如果α和β中的元素都不相同，则称α和β是不相交的。

定理8.4.1

- 设α,β是两个不相交的轮换，则$\alpha\beta=\beta\alpha$。

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

例

- $\alpha = (1\ 3\ 6), \beta = (2\ 5)$, 不相交
- 对于$\beta(i) = i, \alpha\beta(i) = \alpha(i), \beta\alpha(i) = \alpha(i)$
- 对于$\alpha(i) = i, \alpha\beta(i) = \beta(i), \beta\alpha(i) = \beta(i)$
- 对任意$i, \alpha\beta(i) = \beta\alpha(i), \alpha\beta = \beta\alpha$

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 思考：

  置换群和轮换的关系？

  – 轮换是某种特定形式的置换。

  – 轮换的乘积，仍然是置换。

  – 置换是否一定是轮换的乘积？

    如果是，有多少种表现形式？

S_n对于置换乘法构成群，称为n次对称群（了解）。
S_n的子群称为n元置换群。

用S_n表示这$n!$个n元置换的集合

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定理8.4.2

- S_n中任意一个n元置换，一定可以表示成不相交轮换的乘积的形式，并且表示法是唯一的。即：
  $\forall \sigma \in S_n, \sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_t$
- 假如 $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_t = \tau_1, \tau_2 \cdots \tau_l$
- 则有 $\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_t\} = \{\tau_1, \tau_2 \cdots \tau_l\}$

- 事实上，一个置换如果写为可相交的轮换的乘积，表达式将是无穷多个

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

例

- S_4的全部置换可用轮换及其乘积表示为:
- 1. 都不变: $e = (i)$
- 2. 两个元素变: $(1\ 2), (3, 4), (1\ 3), (2\ 4), (1\ 4), (2\ 3)$
- 3. 三个元素变: $(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3),$
  $(1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)$
- 4. 四个元素变: $(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4),$
  $(1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)$
- 5. 四个元素变: $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$

主观题 10分

设置

请讨论S_5 各种置换类型的数目。

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

解答

- 120个置换
- 都不变： $e=(i)$ 1个
- 2个元素变： $C_5^2=10$个
- 3个元素变： $\mathrm{A}_5^3/3=20$个
- 4个元素变
  - $(ab)(cd)$形: $C_5^2*C_3^2/2=15$个
  - $(abcd)$形: $A_5^4/4=30$个
- 5个元素变
  - $(abc)(de)$形: $C_5^3*2=20$个
  - $(abcde)$形: $\mathrm{A}_5^5/5=24$个

有无更一般的解法?

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

引理8.4.1

- 设$\sigma=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$是$S_n$上的$k$阶轮换，$k>1$，则

$$\sigma=(i_1\ \ i_2)(i_2\ \ i_3)\cdots(i_{k-2}\ \ i_{k-1})\ (i_{k-1}\ \ i_k)$$

$$\sigma=(i_1\ \ i_k)(i_1\ \ i_{k-1})\cdots(i_1\ \ i_3)\ (i_1\ \ i_2)$$

- 比如，任意一个轮换 σ ，都可以表示为对换的乘积，且可以无穷多个。例如：

$$\sigma=(1\ 2\ 3\ 4)=(2\ 3)(3\ 4)(4\ 1)=(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$$

多选题 1分

设置

对于轮换$\sigma=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$，下列计算正确的是

A $\sigma=(i_k i_1)(i_{k-1} i_1)\cdots(i_3 i_1)(i_2 i_1)$

B $\sigma=(i_1 i_2)(i_2 i_3)\cdots(i_{k-1} i_k)$

C $\sigma=(i_2 i_3)\cdots(i_{k-1} i_k)(i_k i_1)$

D $\sigma^{-1}=(i_1 i_2)(i_1 i_3)\cdots(i_1 i_{k-1})(i_1 i_k)$

提交

轮换$\sigma=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$

解答

- $\sigma=(i_k i_1)(i_{k-1} i_1)\cdots(i_3 i_1)(i_2 i_1)$ ✔
  - $\sigma(i_1)=(i_k i_1)\cdots(i_3 i_1)(i_2 i_1)i_1=(i_k i_1)\cdots(i_3 i_1)i_2=i_2$
  - $\sigma(i_2)=(i_k i_1)\cdots(i_3 i_1)(i_2 i_1)i_2=(i_k i_1)\cdots(i_3 i_1)i_1=(i_k i_1)\cdots i_3=i_3$
  - $\cdots$
- $\sigma=(i_1 i_2)(i_2 i_3)\cdots(i_{k-1} i_k)$ ✔
  - $\sigma(i_1)=(i_1 i_2)(i_2 i_3)\cdots(i_{k-1} i_k)i_1=(i_1 i_2)i_1=i_2$
  - $\sigma(i_2)=(i_1 i_2)(i_2 i_3)\cdots(i_{k-1} i_k)i_2=(i_1 i_2)(i_2 i_3)i_2=i_3$
  - $\cdots$
- $\sigma=(i_2 i_3)\cdots(i_{k-1} i_k)(i_k i_1)$ ✔
  - $\sigma=(i_1,i_2,\cdots,i_k)=(i_2,i_3,\cdots,i_k,i_1)$，然后代入B选项
- $\sigma^{-1}=(i_1 i_2)(i_1 i_3)\cdots(i_1 i_{k-1})(i_1 i_k)$ ✔
  - 根据A选项，有$(i_1 i_2)(i_1 i_3)\cdots(i_1 i_{k-1})(i_1 i_k)(i_k i_1)(i_{k-1} i_1)\cdots(i_3 i_1)(i_2 i_1)=e$

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 对于一个n元置换：
  - 表示成不相交轮换的乘积时，表示法是唯一的
  - 表示为对换乘积时，表示法并不唯一
  - 对换的个数也不是确定的

- 问题：
  - 一个置换表示为对换乘积时，确定的是什么？

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定义8.4.4

- 设$i_1 i_2 \cdots i_n$是$1,2,\cdots,n$的一个排列，若$i_k > i_l$且$k < l$，则称$i_k i_l$是一个逆序
- 排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数

- 例如：25431的逆序数？
  - 21, 54, 53, 51, 43, 41, 31共7个
  - 25431的逆序数为7

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

引理8.4.2

- 设$\sigma \in S_n$且$\sigma(j) = i_j, j = 1,2,\cdots,n$，则在$\sigma$的对换表示中，对换个数的奇偶性与排列$\pi = i_1 i_2 \cdots i_n$的逆序数奇偶性相同，记为$N(\sigma)$
- 如果$N(\sigma)$为奇数，则称σ为奇置换，否则称之为偶置换。

多选题 1分

设置

下面描述正确的

- 设$\sigma \in S_n$且$\sigma(j) = i_j, j = 1,2,\cdots,n$，则在$\sigma$的对换表示中，对换个数的奇偶性与排列$\pi = i_1 i_2 \cdots i_n$的逆序数奇偶性相同，记为$N(\sigma)$
- 如果$N(\sigma)$为奇数，则称σ为奇置换，否则称之为偶置换。

A 任意两个偶置换的乘积仍然是偶置换

B 任意两个奇置换的乘积是偶置换

C 任意两个奇置换的乘积是奇置换

D 一个奇置换和一个偶置换的乘积是奇置换

提交

设置

下面描述正确的是

A 置换σ是偶置换当且仅当σ^{-1}是偶置换

B 置换σ是偶置换当且仅当置换$\tau^{-1}\sigma\tau$是偶置换

C 轮换$\sigma=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$的阶是$k$

D 轮换$\sigma=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$是偶置换当且仅当$k$是偶数

提交

解答

- 置换σ是偶置换当且仅当σ^{-1}是偶置换 ✓
  - 将置换σ写为对换的乘积$(i_1 j_1)(i_2 j_2)\ldots(i_k j_k)$，则$\sigma^{-1} = (i_k j_k)\ldots(i_2 j_2)(i_1 j_1)$。故$N(\sigma) = N(\sigma^{-1})$
- 置换σ是偶置换当且仅当置换 $\tau^{-1}\sigma\tau$是偶置换 ✓
  - $N(\tau^{-1}\sigma\tau) \equiv N(\tau^{-1}) + N(\sigma) + N(\tau) \equiv N(\tau) + N(\sigma) + N(\tau) \equiv N(\sigma) \bmod 2$
- 轮换$\sigma = (i_1, i_2, \cdots, i_k)$的阶是$k$ ✓
  - $\sigma(i_1) = i_2, \sigma^2(i_1) = \sigma(i_2) = i_3, \ldots, \sigma^{k-1}(i_1) = i_k, \sigma^k(i_1) = i_1$
  - 故σ的阶至少为k。不难验证$\sigma^k = e$，故σ的阶是k
- 轮换$\sigma = (i_1, i_2, \cdots, i_k)$是偶置换当且仅当$k$是偶数 ✗
  - $\sigma = (i_k i_1)(i_{k-1} i_1)\cdots(i_3 i_1)(i_2 i_1), N(\sigma) = k - 1$

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定理8.4.3

- n次交换群S_n中所有偶置换的集合，对于S_n中的置换乘法构成子群，记为A_n，称为交错群，若$n \geq 2$，则$|A_n| = \frac{1}{2}n!$

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定理8.2.7：G的非空子集H是G的子群的充要条件是 $\forall a, b \in H$，都有$ab^{-1} \in H$

定理8.4.3

- 证明：
  - S_n是有限群，任意两个偶置换的乘积仍然是偶置换
  - 由定理8.2.7得S_n中所有偶置换构成S_n的一个子群
  - 偶置换数n_1，奇置换数n_2
  - 某奇置换去乘不同偶置换，得到互异奇置换，$n_1 \le n_2$
  - 某奇置换去乘不同奇置换，得到互异偶置换，$n_1 \ge n_2$
  - $n_1 = n_2, A_n = \frac{1}{2} n!$

设$\sigma \in S_n$且$\sigma(j) = i_j, j = 1,2,\cdots,n$，则在$\sigma$的对换表示中，对换个数的奇偶性与排列$\pi = i_1 i_2 \cdots i_n$的逆序数奇偶性相同，记为$N(\sigma)$

如果$N(\sigma)$为奇数，则称σ为奇置换，否则称之为偶置换。

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

记集合A上全部变换的集合为$M(A)$

– 若$|A| = n$，则$|M(A)| = n^n$

如果变换是双射的话，我们称之为一一变换。

定理8.4.4（Cayley定理）

- 任意群G与一个变换群同构。

- 证明：首先构造一个变换群：
  - 任取$a \in G$ 定义G上的一个变换$f_a: x \to ax, \forall x \in G$
  - 定义$\overline{G} = \{f_a | a \in G\}$，想办法证明其为变换群
  - 再想办法证明$(G,\cdot) \cong (\overline{G},\circ)$

一一变换？

非空集合A的所有一一变换关于变换的乘法所作成的群叫做A的一一变换群，用$E(A)$表示，$E(A)$的子群叫做变换群

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定理8.4.4（Cayley定理）

- 证明（续）：证$f_a: x \to ax$是双射

考察$\forall b \in G$，是否存在$x \in G$，使得$f_a(x) = b$

实际上，群G中方程$ax = b$有唯一解

因此f_a是满射（有解）、单射（唯一解）⟹f_a是双射。

– 以下证明$\overline{G} = \{f_a | a \in G\}$关于变换乘法成群

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定理8.4.4（Cayley定理）

- 证明（续）：证$\overline{G}=\{f_a|a\in G\}$关于变换乘法成群
  - $\forall f_a, f_b \in \overline{G}, (f_a f_b)(x) = f_a\big(f_b(x)\big) = f_a(bx) = abx = f_{ab(x)}$

封闭性 – $\forall f_a, f_b \in \overline{G} \iff a, b \in G \Longrightarrow ab \in G \Longrightarrow f_{ab} \in \overline{G}$

结合律 – 结合律自证

单位元 – $f_e: x \to ex$，是变换中的单位元

逆元素 – 由于f_a是一一变换，因此必定存在逆元素

$f_a{}^{-1}: x \to a^{-1}x \qquad f_a{}^{-1} = f_{a^{-1}}$

因此 $\overline{G}$ 关于变换乘法成群，即它是一个变换群！

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定理8.4.4（Cayley定理）

- 证明（续）：证G和$\overline{G}$同构
  - 构造映射关系$\varphi: a \to f_a$

单射 – $\forall a, b, x \in G, a \neq b \Longrightarrow ax \neq bx \Longrightarrow f_a \neq f_b \Longrightarrow \varphi(a) \neq \varphi(b)$

满射 – $\forall f_a \in \overline{G}$，一定存在$a \in G$，使得$\varphi(a) = f_a$

保持运算 – $\varphi(ab) = f_{ab} = f_a f_b = \varphi(a)\varphi(b)$

  - 因此，$G \cong \overline{G}$ 证毕！

S_n对于置换乘法构成群，称为n次对称群（了解），
S_n的子群称为n元置换群。

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定理8.4.4（Cayley定理）任意群G与一个变换群同构

- 任何一个群G，都与一个变换群同构

推论：

- 设G是n阶有限群，则G与S_n的一个子群同构。
- 任何一个有限群G，都与一个置换群同构

对于n元置换，可表示为：

$$\sigma: \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

显然，$\sigma(1), \sigma(2), \cdots \sigma(n)$就是$1 \sim n$的一个排列。

反之，$1 \sim n$ 的一个排列，唯一对应一个 n 元置换，则共有$n!$个n元置换。

用S_n表示这$n!$个n元置换的集合

Cayley定理探讨

- 每个群都可以看作是一些元素的置换

- Cayley 定理提供了一种方法，可以将任意群的抽象概念具体化为置换群。这使得我们能够通过置换的方式来研究群的性质，因为置换群往往更容易理解和操作。

- 有助于深入理解和可视化更复杂的代数结构，例如环、域

定理8.4.4（Cayley定理）任意群G与一个变换群同构

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 小结：
  - 变换、一一变换
  - 一一变换群、变换群、对称群、置换群
  - 置换：轮换、对换、恒等变换
  - 逆序、逆序数、置换的逆序数性质
  - Cayley定理

第八章 群

8.1 半群

8.2 群、群的基本性质

8.3 循环群 群的同构

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

8.6 正规子群与商群

8.7 群的同态、同态基本定理

8.8 群的直积

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

- 群内的子群反映了群的结构和性质，因此我们需要进一步研究有关群内子群的性质
- G是一个群，H是G的一个子群，利用H可以在G的元素之间确定一个二元关系R

$$a R b \text{ 当且仅当 } ab^{-1} \in H$$

R是G中的一个二元关系，是等价关系

因此由等价关系就可以确定G的一个划分，其划分块就是子群H的陪集

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

定义8.5.1

- 设H是群G的一个子群，对任意的$a \in G$，集合

$$aH = \{ah|h \in H\}$$

- 称为子群H在G中的一个左陪集。同理，H在G中的一个右陪集是

$$Ha = \{ha|h \in H\}$$

思考：左陪集和右陪集是否相等？

单选题 1分

设置

判断题：左陪集和右陪集是否相等

A 相等

B 不相等

C 不一定

D 不确定

提交

实例

设 $G=S_3$，H={e,(1 2)}，取a为e，(1 3)和(2 3)时，

eH=H={e,(1 2)},

(1 3)H={(1 3),(1 2 3)}, (1 3)(1 2)= (3 1 2)

(2 3)H={(2 3),(1 3 2)},

He=H,

H(1 3)={(1 3),(1 3 2)},

H(2 3)={(2 3),(1 2 3)},

$$G = eH \cup (1\ 3)H \cup (2\ 3)H$$

显然一般情况下

$$aH \neq Ha$$

轮换计算的一个小技巧

$\forall i, j,$ 当 $a_i \neq b_j$ 时

$$(a_1, \cdots a_n, c)(c, b_1, \cdots b_m) = (a_1, \cdots a_n, c, b_1, \cdots b_m)$$

- 例，计算(132)(13)(24)

$$(132)(13)(24) = (213)(13)(24) = (21)(13)(13)(24)$$

$$= (21)(24) = (12)(24) = (124)$$

实例

$G = (\mathrm{Z}, +)$, $H = \{\mathrm{km} \mid \mathrm{k} \in \mathrm{Z}\}$, H是G的子群，因为G是交换群，H的左、右陪集相等，它们是

$$0+H = H+0 = \{\mathrm{km} \mid \mathrm{k} \in \mathrm{Z}\},$$

$$1+H = H+1 = \{1+\mathrm{km} \mid \mathrm{k} \in \mathrm{Z}\},$$

$$2+H = H+2 = \{2+\mathrm{km} \mid \mathrm{k} \in \mathrm{Z}\},$$

$$\ldots$$

$$\mathrm{m}-1+H = H+\mathrm{m}-1 = \{\mathrm{m}-1+\mathrm{km} \mid \mathrm{k} \in \mathrm{Z}\},$$

每个陪集正好与一个同余类对应

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

定理8.5.1

- 设H是G的子群，则H的左陪集具有下述性质

1. $H=eH, a\in aH$。

因H为G的子群，故消去律成立。则$\forall h_1,h_2\in H$，若$h_1\neq h_2$，则$\forall a\in G$必定有$ah_1\neq ah_2$，故aH中没有共同元素，故$|aH|=|H|$

2. $|aH|=|H|$。

H的任意一个左陪集，其元素个数与H相同

3. $a\in H\Leftrightarrow aH=H$。

$\Rightarrow$: 因为$a\in H$，所以$aH=\{ah|h\in H\}\subseteq H$

$\forall h\in H, h=(aa^{-1})h=a(a^{-1}h)\in aH$ 故$H\subseteq aH$，故$aH=H$

$\Leftarrow$: $a=ae\in aH=H$

子群中任意一个元素和子群自身作用，得到的左陪集仍为子群自身

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

4. $\forall x \in aH$，都有$xH = aH$，并叫a是aH的一个陪集代表

- 证明：左陪集中任意一个元素和子群H作用，得到的左陪集不变

$\forall x \in aH$，必定有$x = ah_1$，其中$h_1 \in H$

$\forall xh \in xH$，有$xh = (ah_1)h = a(h_1h) = ah'$，其中$h' \in H$

因此$ah' \in aH$ 即$\forall xh \in xH$，有$xh \in aH$ 即$xH \subseteq aH$

$\forall ah' \in aH, \because x = ah_1, \therefore a = x{h_1}^{-1}$

故$ah' = \left(x{h_1}^{-1}\right)h' = x\left({h_1}^{-1}h'\right) \in xH$ 即$aH \subseteq xH$

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

5. $aH = bH \Leftrightarrow a \in bH$或$b \in aH$

$$\Leftrightarrow b^{-1}a \in H\text{或}a^{-1}b \in H$$

- 证明：
  - 充分性：由性质1可知，$a \in aH = bH$
  - 故 $\exists h' \in H$，使得$a = bh'$ 即$b^{-1}a = h' \in H$
  - 必要性：因$b^{-1}a \in H$ 所以$\exists h_1 \in H$ 使得$b^{-1}a = h_1$
  - 即 $a = bh_1$，即$a \in bH$。 由性质4，$bH = aH$
  - 性质的另一半，显然！ 思考：说明了什么？

左陪集中任意一个元素和子群H作用，得到的左陪集不变

> 4. $\forall x \in aH$，都有$xH = aH$，并叫a是aH的一个陪集代表

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

6. $\forall a, b \in G$，若非$aH = bH$，必有$aH \cap bH = \emptyset$

- 证明：
  - 假如 $aH \cap bH \neq \emptyset$，则必定$\exists x \in aH \cap bH$
  - 也就是$x \in aH$，同时$x \in bH$
  - 则根据性质4，一定有$xH = aH = bH$

同一子群的两个左陪集要么相等、要么交集为空！

思考：该性质意味着什么？

$$G = \bigcup_{a \in G} aH$$

aH是G的一个划分

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

定理8.5.1

- 设H是G的子群，则H的左陪集具有下述性质

1. $H = eH, a \in aH$。2. $|aH| = |H|$。

H的任意一个左陪集，其元素个数与H相同

3. $a \in H \Leftrightarrow aH = H$。

子群中任意一个元素和子群自身作用，得到的左陪集仍为子群自身

4. $\forall x \in aH$，都有$xH = aH$，并叫a是aH的一个陪集代表

左陪集中任意一个元素和子群H作用，得到的左陪集不变

5. $aH = bH \Leftrightarrow a \in bH$或$b \in aH$

$\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$或$a^{-1}b \in H$

同一子群的两个左陪集要么相等、要么交集为空！

6. $\forall a, b \in G$，若非$aH = bH$，必有$aH \cap bH = \emptyset$

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

定理8. 5. 2

- 设G是有限群，H是G的子群，则存在一个正整数k，满足

$$G = a_1H \cup a_2H \cup \cdots \cup a_kH$$

- 其中 $a_iH \cap a_jH = \emptyset, i \neq j, i, j = 1,2, \cdots, k$

- 思考：
  – 单位元e在哪个陪集中？

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

定义8. 5. 2

- 群G关于其子群H的左陪集的个数，称为H在G中的**指数**，记作$[G:H]$。

- 观察G的子群$H = \{e\}$：
  - H的左陪集个数为$|G|$
  - $[G:H] = [G:1] = |G|$

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

Lagrange定理

- 设G是有限群，H是G的子群，则

$$[G:1] = [G:H][H:1]$$

$$G = a_1H \cup a_2H \cup \cdots \cup a_mH$$

$$|G| = m|H| = [G:H]|H|$$

有限群中，子群的阶只能是群的阶的因子！

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

推论1

- 设有限群G的阶为n，则G中任意元素的阶都是n的因子，且适合$x^n = e$。

- 证明：
  - $\forall a \in G$，可以得到G的循环子群$H = \langle a \rangle$
  - 则根据Lagrange定理，$p|H| = |G| = n$（p为正整数）
  - 又有$a^{|H|} = e$ $\Longrightarrow$ $a^n = a^{p|H|} = (a^{|H|})^p = e^p = e$

$$\boxed{|G| = m|H| = [G:H]|H|}$$

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

推论2

- 阶为素数p的群G是循环群。

- 证明：
  - 取G中一非单位元a，可以得到G的循环子群$H=\langle a\rangle$
  - 根据推论1，a的阶为p的因子，因此只能为p，所以$O\langle a\rangle = p$
  - 所以$G = \langle a\rangle$

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

推论3

- 设A, B是群G的两个有限子群，则

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$$

其中$AB = \{ab|a \in A, b \in B\} = \bigcup_{a \in A} aB$。

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

设A,B是群G的两个有限子群，则

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$$

推论3

- 证明:
  - 因为B是G的子群，所以aB是B的左陪集
  - 令$S_1 = \{aB|a \in A\} = \{a_1B, a_2B, \cdots, a_mB\}$，$D = A \cap B$
  - 故$A = \bigcup aD$，令$S_2 = \{aD|a \in A\} = \{a_1D, a_2D, \cdots, a_mD\}$
  - 构造S_1与S_2的一一映射关系$\sigma: a_iB \to a_iD$
  - $\forall a_i, a_j \in A$，若$a_iB = a_jB$，必有$a_i^{-1}a_j \in B$（定理8.5.1）
  - 且$a_i^{-1}a_j \in A$，故$a_i^{-1}a_j \in A \cap B = D \Leftrightarrow a_iD = a_jD$
  - 故σ是映射，且是单射，也是满射

5. $aH = bH \Leftrightarrow a \in bH$或$b \in aH$

$\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$或$a^{-1}b \in H$

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

设A, B是群G的两个有限子群，则
$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$$

推论3

- 证明（续）：

$S_1 = \{a_1B, a_2B, \cdots, a_mB\}$ $S_2 = \{a_1D, a_2D, \cdots, a_mD\}$

  - $\sigma: a_iB \to a_iD$为双射。
  - 显然$|S_1| = |S_2| = k = [A:D] = |A|/|D|$
  - 因此$|AB| = |\bigcup_{a\in A} aB| = |S_1||B| = k|B|$,
  - 两式合并，即得$|AB| = \frac{|A||B|}{|A\cap B|}$ 证毕！

$$AB = \{ab|a \in A, b \in B\} = \bigcup_{a\in A} aB$$

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

- 推论1　设有限群G的阶为n，则G中任意元素的阶都是n的因子，且适合$x^n = e$。
- 推论2　阶为素数p的群G是循环群。
- 推论3　设A, B是群G的两个有限子群，则

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$$

利用Lagrange定理可以确定一个群内的可能存在的子群、元素的阶等，从而搞清一个群的结构

根据$|G|$的因子来确定可能存在子群的阶数或元素的阶数

Lagrange定理

- 设G是有限群，H是G的子群，则

$$[G:1] = [G:H][H:1]$$

$$G = a_1H \cup a_2H \cup \cdots \cup a_mH$$

$$|G| = m|H| = [G:H]|H|$$

主观题 10分

设置

证明：6阶群一定存在一个3阶子群

提示：根据元素的阶分情况讨论

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

证明：6阶群一定存在一个3阶子群

- 对于6阶群G，非单位元的元素的阶只可能为2,3,6
- 如果存在6阶元a，则子群$\langle a^2 \rangle$为3阶子群
- 如果存在3阶元a，则子群$\langle a \rangle$为3阶子群
- 然后用反证法，证明G不能只由单位元和2阶元构成
  - 如果G只由单位元和2阶元构成，即每个元素的逆都是自身。则$ab = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1} = ba$，故$G$为交换群（上周作业题）
  - 此时取两个2阶元a, b，其生成的子群为$\{e, a, b, ab\}$为一个四阶子群。拉格朗日定理说明子群的阶一定是群的阶的因子。但4不是6的因子，矛盾
  - 因此，G不能只由单位元和2阶元构成
- 综上， 6阶群G必有3阶子群。

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

- 小结：
  - 左陪集
  - 左陪集6个性质
  - 群的陪集分解
  - Lagrange定理
  - 几个重要推论

谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn