一道几何题的复数证明

习题 若有两个圆在点α相切，其中圆C_1在圆C_2内部, 在两个圆之间有一串圆与圆C_1, C_2相切，且互相相切于点a, b, c, d, $\cdots$, 如图上.

证明这些切点a, b, c, d, $\cdots$ 共圆.

证明： 令$f(z)=\frac{1}{z-\alpha}$. 由于$f(z)$是$1-1$线性分式映射，且把点α映成∞, 因而把圆周C_1, C_2分别映成两条平行直线，同时将C_1, C_2之间的圆周映成与两条平行直线相切而且互相相切的圆周, 如图下. 很明显，这些圆周具有相同的直径，且它们之间的切点$f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$, $\cdots$,共线, 记为直线Γ. 这条线位于像$f(C_1)$, $f(C_2)$之间. 因为$f(z)$是$1-1$的映射，这些点的原像a, b, c, d, $\cdots$,均落在逆映射$f^{-1}(\Gamma)$上，由于$f^{-1}(\Gamma)$是一个圆周，因而点a, b, c, d, $\cdots$共圆.$\square$