# 利用Liouville 证明代数学基本定理

**代数学基本定理** 设$n$是不小于1的正整数. 则每个复系数多项式

$$p_n(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_{n-1} z + c_n$$

在$C$中有一个零点.

**Liouville Theorem** Every bounded entire function is constant.

**代数学基本定理的证明**

**证明** 假设$p_n(z)$没有零点，令$f(z) = \frac{1}{p_n(z)}$, 则有$f'(z) = \frac{-p_n'(z)}{p_n^2(z)}$处处存在，因而$f(z)$是处处解析的非常数函数. 因当$|z|$充分大时，

$$|p_n(z)| = |z^n(1 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots + \frac{c_n}{z^n})| \geq |z^n|(1 - |\frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots + \frac{c_n}{z^n}|) \geq |z^n|(1 - \frac{1}{2}) = \frac{|z|^n}{2}$$

故

$$|p_n(z)| \to +\infty, \quad 若\ |z| \to +\infty.$$

从而有$\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$，因而$f(z)$ 有界，由Liouville 定理, 必有$f(z) \equiv$常数$(= 0)$. 但是这与$f(z)$的定义矛盾. 因而$f(z)$不是处处解析的函数，不难看出，$f(z)$不解析的点即是$p_n(z)$的零点. 从而证明了代数学基本定理. □

**参考文献**


1.J.B.Conway, Functions of One Complex Variable, Springer 1973.

2.J.Bak and D.J.Newman, Complex Analysis, Undergraduate Texts in Mathematics, 2010.