高等线性代数选讲样题二

注：请将所有解答写在另发的“答题纸”（即本科生专用试卷）上，填空题请写题号和答案，解答题请写清步骤。

1. (每空3分，27分) 填空题：

   (1) 设$f(x) = x^4+3x-2$, $g(x) = 3x^3-x^2-7x+4$, 则存在多项式$u(x) =$ ____和$v(x) =$ ____，使得$u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$.

   (2) 写一个二次方程____,使得它的根是方程$x^2 + bx + c = 0$的根的平方.

   (3) 设$A, B \in M_n(\mathbb{C})$, 且$AB - BA$的秩等于1. 则$(AB - BA)^{2023} =$ ____.

   (4) 设$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 设$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$是一个线性变换满足$T(x) = Ax$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$. 写出$\mathbb{R}^3$的所有$T$-不变子空间____.

   (5) 设$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$，其中$a \neq 0$, 则$A^{2023} =$ ____.

   (6) 设T_1, T_2是n维酉空间V上的自伴随算子, 下列四个线性变换: T_1T_2, $i(T_1T_2 - T_2T_1)$, $i(T_1T_2 + T_2T_1)$和$T_1T_2 - T_2T_1$, 仍然是自伴随算子的是____. 这里$i^2 = -1$.

   (7) 设V是实数域上3维线性空间，有一组基v_1, v_2, v_3. 设v_1^*, v_2^*, v_3^*是它的对偶基，则V中基$v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3$的对偶基是____.

   (8) 设V是由实数域上次数小于3的多项式全体组成的线性空间，定义双线性型$g(f_1(x), f_2(x)) = \int_0^1 f_1(x)f_2(x)dx$, 则$g$在基$1, x, x^2$下的表示矩阵是____.

2. (10分) 设$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 求$A$的极小多项式.

3. (18分) 设$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & a & 7 \\ 0 & 2 & 0 & a \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求$A$的Jordan标准形$J$，其中$a$是参数. 当$a=0$时，求可逆阵$P$,使得$P^{-1}AP = J$.

4. (10分)设$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中$i^2 = -1$. 求酉阵$P$, 使得$P^H AP$是对角阵.

5. (10分) 设$V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$是一个如下定义内积的欧式空间：$\forall f(x), g(x) \in V$, $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. 设$W = \{a_1 x + a_2 x^2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$是它的子空间.

   (1) 应用Gram-Schimidt正交化方法，求由V的一组基$1, x, x^2$得到的一组标准正交基;

   (2) 求W的一组标准正交基.

6. (10分) 设$V = M_n(\mathbb{R})$并取Frobenius内积，即$\forall A, B \in V, (A, B) = tr(AB^T)$. 设$P, Q \in V$是可逆矩阵，定义线性变换$T : V \to V$是$T(A) = PAQ$, $\forall A \in V$. 证明：T是正交变换当且仅当存在非零实数c, 使得$P^T P = cI_n, Q^T Q = c^{-1} I_n$.

7. (6分) 判断是否存在$A \in M_4(\mathbb{R})$, 使得$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 2023 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$并证明相应结论.

8. (9分) 设$A = (a_{ij})_{n \times n}$是$n$阶复矩阵，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是它的$n$个特征值（可能有相同特征值）.

   (1) 应用Schur定理证明：$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \le tr(AA^H) = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2$;

   (2) (1)中等号成立当且仅当A是复正规阵;

   (3) 应用(2)的结论证明：若A, B是n阶复正规矩阵，则AB是复正规矩阵当且仅当BA是复正规矩阵.