Jordan标准形 (IV)

7.1 幂零变换的Jordan标准形

定理: 对任意幂零线性变换$T:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^m$,空间$V$必定可分解为$\sigma$的不变线性子空间的直和$\mathbb{C}^m=C_{v_1}\oplus\cdots\oplus C_{v_t}$, 其中$C_{v_i}$是极大循环子空间.

设T在标准基下矩阵是A. 设$dim_{\mathbb{C}}C_{v_i}=m_i$, $i=1,\cdots,t$. 假设$m_1\geq m_2\geq\cdots\geq m_t$. 固定$i=1,\cdots,t$, 设$\{T^{m_i-1}(v_i),T^{m_i-2}(v_i),\cdots,T(v_i),v_i\}$是 C_{v_i}的循环基. 注意$m=m_1+\cdots+m_t$, 令$P=(T^{m_1-1}(v_1),\cdots,v_1,T^{m_2-1}(v_2),\cdots,v_2,\cdots,T^{m_t-1}(v_t),\cdots,v_t)$, 则 $P^{-1}AP=J=diag(J_1,\cdots,J_t)$, 其中$J$称为$A$的Jordan标准形, $J_i=\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&&0\end{pmatrix}_{m_i\times m_i}$ 称为Jordan块. 这里$i=1,\cdots,t$.

7.1 幂零变换的Jordan标准形

由J的结构得到$r(A^k)=r(J^k), k\in\mathbb{N}$. $J^{m_1}=0$.

$m-r(A)=m-r(J)$=阶数≥ 1的Jordan块个数

=全部Jordan块个数=循环子空间个数.

$r(A)-r(A^2)=r(J)-r(J^2)$=阶数≥ 2的Jordan块个数.

$\cdots,$

$r(A^{m_1-1}-r(A^{m_1}))$=阶数$\geq m_1$的Jordan块个数.

7.1 幂零变换的Jordan标准形

定理：符号如上，则T的Jordan标准形结构如下： 阶数等于k的Jordan块个数是

$$r(J^{k-1}) - 2r(J^k) + r(J^{k+1}),$$

其中$k = 1, 2, \cdots, m_1$.

推论：T的极小多项式$m_A(\lambda) = \lambda^{m_1}$.

7.2 一般线性变换的Jordan标准形

对任何线性变换$\sigma : V \to V$, 若它的全部互异特征值是$\mu_1, \cdots, \mu_s \in \mathbb{C}$, 则空间$V$是该线性变换的根子空间的直和:

$$\boxed{V = G_{\mu_1} \oplus \cdots \oplus G_{\mu_s}.}$$

固定$i = 1, 2, \cdots, s$,由于$(\sigma - \mu_i I)|_{G_{\mu_i}}$为幂零变换. 应用关于幂零线性变换的讨论,每个根子空间$G_{\mu_i} = \bigoplus_{j=1}^{t_i} C_{v_{ij}}$,其中$C_{v_{ij}}$是$\sigma - \mu_i I$-不变的循环子空间,则存在一组基使得$(\sigma - \mu_i I)|_{C_{v_{ij}}}$的矩阵
表示是特征值为零的Jordan块$(*)$. 于是, $\sigma|_{C_{v_{ij}}}$在这组基下的矩阵表示是一个特征值为μ_i的Jordan块.

7.2 一般线性变换的Jordan标准形

综上所述，我们又证明了

定理：对任意线性变换$\sigma : V \to V$, 若它的特征值都在$\mathbb{F}$中,

则存在空间V的一组基, 在该基下σ的矩阵为Jordan矩阵, 形如

$$J = \begin{pmatrix} J_{\mu_1,1} & & & \\ & J_{\mu_1,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\mu_s,t_s} \end{pmatrix}, \quad J_{\mu_i,j} = \begin{pmatrix} \mu_i & 1 & & & \\ & \mu_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \mu_i \end{pmatrix}_{n_{ij}\times n_{ij}}.$$

其中$dim_{\mathbb{C}} C_{v_{ij}} = n_{ij}$.

7.2 一般线性变换的Jordan标准形

换言之,

定理: 设$\mathbf{F}$为代数闭域, V为$\mathbf{F}$上的有限维线性空间,

$\sigma : V \to V$为线性变换.则存在σ的Jordan基$v_1, \cdots, v_n$,

使得σ在旧基下的矩阵A经基底变换,可化为Jordan矩阵J,

即存在非退化矩阵P, 使得$P^{-1}AP = J$.

7.2 一般线性变换的Jordan标准形

设$A \in M_n(\mathbb{C})$. $|\lambda I_n - A| = (\lambda - \mu_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \mu_s)^{n_s}$.

n_i是代数重数， 令$dim_{\mathbb{C}} N(A - \mu_i I_n) = l_i,\ i = 1, \cdots, s$.

$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$

设$P^{-1}AP = J, J = diag(J_{\mu_1}, \cdots, J_{\mu_s}), J_{\mu_i} = diag(J_{\mu_i, n_{i1}}, \cdots, J_{\mu_i, n_{il_i}})$,

$$
\text{其中} J_{\mu_i, n_{it}} = \begin{pmatrix} \mu_i & 1 & & & \\ & \mu_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \mu_i \end{pmatrix}_{n_{it} \times n_{it}}
$$

(关于特征值μ_i的阶数n_{it}的Jordan块)

7.3 一般线性变换的Jordan标准形的结构

Jordan标准形的结构：关于特征值μ_i的t阶Jordan块的个数等于

$rank(A-\mu_i I_n)^{t-1}-2rank(A-\mu_i I_n)^t+rank(A-\mu_i I_n)^{t+1}$.

令$d_k=dimN(A-\mu_i)^k$, 则$0=d_0<d_1<\cdots<d_{r_i}=n_i$,以上等式等于

$2d_k-d_{k-1}-d_{k+1}$.

关于特征值μ_i,最大Jordan块阶数是r_i.

关于特征值μ_i,Jordan块个数是l_i.

关于特征值μ_i,所有Jordan块阶数之和是$n_i=n_{i1}+\cdots+n_{il_i}$.

7.4 过渡矩阵

全部的Jordan块和Jordan链有一个一一对应.

$J_{\mu_i,n_{it}}$对应Jordan链$(A-\mu_i I_n)^{n_{it}-1}v_{it},\cdots,(A-\mu_1 I_n)v_{it},v_{it}$.

令P_{it}是Jordan链向量构成的矩阵，则$AP_{it}=P_{it}J_{\mu_i,n_{it}}$， $1\leq t\leq l_i$.

令$P_i=(P_{i1},P_{i2},\cdots,P_{il_i})$, 则$AP_i=P_iJ_{\mu_i}$.

令$P=(P_1,\cdots,P_s)$,则$AP=PJ$.

7.5 极小多项式（II）

设$A \in M_n(\mathbb{C})$. $f(x) = |xI_n - A|$.

(1)$m_A(x)|f(x)$

(2)设λ_0是特征值，则$m_A(\lambda_0) = 0$.

(3)相似矩阵有相同特征多项式和极小多项式.

(4)设$A = diag A_1, \cdots, A_s$， 则$m_A(x)$是$m_{A_1}(x), \cdots, m_{A_s}(x)$的最小公倍式.

(5)A可对角化当且仅当$m_A(x)$无重根.

定理 设$m_A(x) = (x - \mu_1)^{m_1} \cdots (x - \mu_s)^{m_s}$.

则m_i等于关于μ_i的Jordan块的最大阶数r_i.