作业（第一周）

1. 求下列复数的共轭：

(a) $e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$ (b) $(2-i)(1-i)$ (c) $\frac{1+i}{1-i}$ (d) $e^{i\pi}$ (e) i^{103}

2. 设 $A=A_1+iA_2$，A_1, A_2 两个 n 阶实方阵，$b=b_1+ib_2$

$b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$，$x=x_1+ix_2$，$x_1, x_2\in\mathbb{R}^n$，满足

$$Ax=b$$

求 $2n$ 阶矩阵 $\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$，其中 B_{ij} 是 n 阶实方阵，使得

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

（提示，当 $n=1$ 时，A, b 均为复数，一个复数对应一个 2 阶方阵）.

3. 设 A 是一个实方阵，证明：若 x 是 A 关于特征值 λ 的特征向量，则 $\bar{x}$ 是 A 关于 $\bar{\lambda}$ 的特征向量.

设 $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$，验证上述结论.

4. 应用 $(e^{i\theta})^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$ 和 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，

推导 3 倍角公式：$\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta.$$

5. (a) 为什么 e^i 和 i^e 的长度均为1？

(b) 确切地刻划 i^e.

6. (1) 证明：若 $Ax=\lambda x$，则 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix} = i\lambda\begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}$

(2) 应用(1)证明：若A是反对称阵(即A实方阵，且 $A^T=-A$)，则A的特征值是0或纯虚数.

(提示：$\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix}$ 是实对称阵，特征值是实数).

7. 证明：$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 这三个矩阵相似.

(提示：构造 $T: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$，使得T在三组不同基下矩阵分别是A, B, C).

8. 求下列复数的极分解形式：

$1+\sqrt{3}i$， $\cos 2\theta + i\sin 2\theta$， $-7i$， $5-5i$， $(1+i)^8$.