Jordan标准形 (I)

4.1 子空间的直和

本小节细节内容参看：高等代数3.9节

定义: 设V是一个有限维复向量空间，$W_1, \cdots, W_k$是V的子空间. 令

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_k = \{w_1 + \cdots + w_k \mid w_i \in W_i, i = 1, \cdots, k\}$$

这是V的子空间，称为$W_1, \cdots, W_k$的和. 若

$$\dim_{\mathbb{C}} W_1 + \dim_{\mathbb{C}} W_2 + \cdots + \dim_{\mathbb{C}} W_k = \dim_{\mathbb{C}} W_1 + \cdots + W_k$$

则称这个和是直和，记作：$W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$.

例如：$V = \mathbb{C}^2, W_1 = x$轴，$W_2 = y$轴，则$\mathbb{C}^2 = W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$.

4.1 子空间的直和

定理：设V是一个有限维复向量空间，$W_1, \cdots, W_k$是V的子空间. 则

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_k = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$$

当且仅当

若$0 = w_1 + +w_k, w_i \in W_i, i = 1, \cdots, k$，则$w_1 = w_2 = \cdots = w_k = 0$.（即零向量写成$W_1$到$W_k$中向量之和只有一种方式:$0 = 0 + \cdots + 0$.）

例如：$k = 2, W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$当且仅当$W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

若$W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$, 设$w \in W_1 \cap W_2$, 则$0 = w - w$. 因此$W_1 + W_2$不是直和。反之，若$W_1 + W_2$不是直和，则$0 = w_1 + w_2$, $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$不全为0,因此$0 \neq w_1 = -w_2 \in W_1 \cap W_2$.

4.2 不变子空间

本小节细节内容参看：高等代数4.5节

定理: n维复向量空间V上的线性变换σ在V的不同基下的矩阵是相似矩阵.

目标：给定一个线性变换，刻画它在不同基下的相似矩阵中最“简单”的矩阵，以及相应的基.

方法：关于子空间的维数做归纳，这要求上述线性变换能限制到子空间上，这样的子空间就是不变子空间。

4.2 不变子空间

定义: 设$\sigma \in \mathcal{L}(V,V)$, W是V的子空间. 若$\forall \alpha \in W, \sigma(\alpha) \in W$, 则称$W$是线性变换$\sigma$的不变子空间.

将σ的作用限制在其不变子空间W上, 记为$\sigma|_W$, 称为σ在W上的限制. 由于W是σ的不变子空间, $\sigma|_W : W \to W$是W上的线性变换.

基本性质：不变子空间的直和还是不变子空间.

基本例子：$\mathrm{Im}\sigma = \{v \in V \mid v = \sigma(w), w \in V\}$,

$\mathrm{Ker}\sigma = \{v \in V, \sigma(v) = 0\}$.

4.2 不变子空间

对线性变换$\sigma : V \to V$的非平凡不变子空间W, 若存在σ的另一不变子空间U, 且U恰为W的补空间. 于是

$$V = W \oplus U.$$

取V的基$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$, 使$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$为$W$的基, $\mathbf{v}_{k+1}, \cdots, \mathbf{v}_n$为$U$的基,则

$$\sigma(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_k \mathbf{v}_{k+1} \cdots \mathbf{v}_n) = (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_k \mathbf{v}_{k+1} \cdots \mathbf{v}_n) \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{pmatrix}.$$

4.2 不变子空间

其中A_1是$\sigma|_W$在W的基$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$下的矩阵;

A_2是$\sigma|_U$在U的基$\mathbf{v}_{k+1}, \cdots, \mathbf{v}_n$下的矩阵.

一般地, 不变子空间W没有不变补空间U时, 可取V的基使σ的矩阵表示形如 $\begin{pmatrix} A_1 & B \\ \mathbf{0} & A_2 \end{pmatrix}$. 其中$A_1$是$\sigma|_W$的矩阵表示.

重复以上的过程，将W再分解成更小的不变子空间和补空间直和，我们得到了Schur定理。

4.3 Schur定理

定理： 设A是n阶复方阵，则存在可逆阵P, $P^{-1}AP$是一个上三角阵.

定理证明过程等价于归纳地构造$\mathbb{C}^n$的一个不变子空间的包含链：

$$W_1 \subseteq W_2 \subseteq \cdots \subseteq W_n = \mathbb{C}^n,$$

其中， $\dim_{\mathbb{C}} W_i = i, i = 1 \cdots, n$. 我们取$W_n$的一组基$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$满足$\alpha_1, \cdots, \alpha_i$是$W_i$的基，则令$P = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $P^{-1}AP$是一个上三角阵。

4.4 根子空间（或广义特征子空间）

回到任意线性变换$\sigma : V \to V$, 特征子空间$V_\lambda = \{v \in V \mid \sigma(v) = \lambda v\}$是$\sigma$-不变子空间.

定理： 设$\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$定义为$\sigma(v) = Av$. 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$是$A$(或$\sigma$)的全部互异特征值， 则$A$可对角化当且仅当

$$\mathbb{C}^n = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}.$$

若A不可对角化，我们需要考虑更大的不变子空间。

定义: 令$G_\lambda = \{v \in V \mid$ 存在$m \geq 0$, 使得$(\sigma - \lambda\epsilon)^m v = 0\}$称为是属于特征值$\lambda$的根子空间.

$v \neq 0 \in G_\lambda$称为λ的根向量或广义特征向量.

显然，$V_\lambda \subseteq G_\lambda$.

注：ϵ是V上恒等变换.

4.4 根子空间（或广义特征子空间）

性质：根子空间G_λ是线性变换$\sigma - \lambda\epsilon$的不变子空间，
进而也是σ-不变子空间.

命题： 当$\mu \neq \lambda$时，$(\sigma - \mu I)|_{G_\lambda}$是可逆的.

命题： 属于不同特征值的根向量线性无关.

定理： 设$\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$定义为$\sigma(v) = Av$. 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$是$A$(或$\sigma$)的全部互异特征值， 则

$$\mathbb{C}^n = G_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus G_{\lambda_s}.$$

这个直和分解称为根子空间分解.