第二章：命题逻辑的等值和推理演算

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

作业问题：代入规则

- 代入的时候不能交换命题变项的顺序：
  - $P \to P$ 作代入$\dfrac{P}{(P \vee Q)}$可以得到$(P \vee Q) \to (P \vee Q)$，
  - 但是不能直接得到 $(P \vee Q) \to (Q \vee P)$
- 下列说法也是不对的：
  - 由代入规则，$(P \vee Q) \to (P \vee Q)$ $\boxed{\text{等价于}}$ $P \to P$

命题

- 这盆茉莉花真香（没有感叹号）
  – 雨课堂有bug，把感叹号给弄没有了。

“这盘茉莉花真香”如果作为感叹句表达对茉莉花的赞叹则不是命题，如作为陈述句表达茉莉花香这一事实则可以作为命题看待，其真值取决于茉莉花是否真香，是一个确定的值但未知。

陶文华

作业问题：真值表规范

- 请按照书上的规范书写

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

- 下列写法是不正确的

$(P \vee Q) \rightarrow (P \vee Q)$	真值
1 1 1 1	1
1 0 1 0	1
0 1 0 1	1
0 0 0 0	1

作业问题：自然语句的形式化

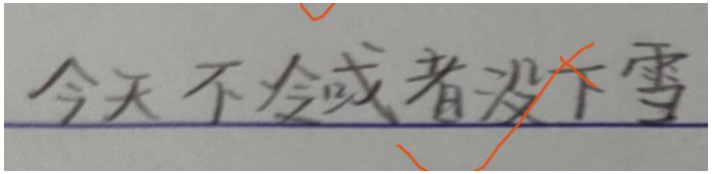
- 自然语句叙述的时候不能做等价转化，要直接叙述原公式的含义

P 表示今天很冷, Q 表示正在下雪.

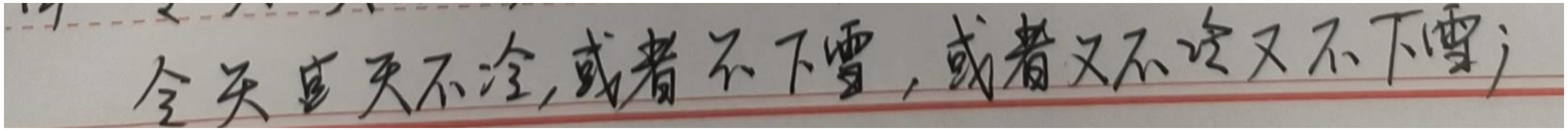
(2)用自然语句叙述下列公式:

¬(P∧Q) , ¬P∨¬Q

  - $\neg(P \land Q)$：今天并非“很冷且下雪”



  - $\neg P \lor \neg Q$：今天不冷或者今天没有下雪

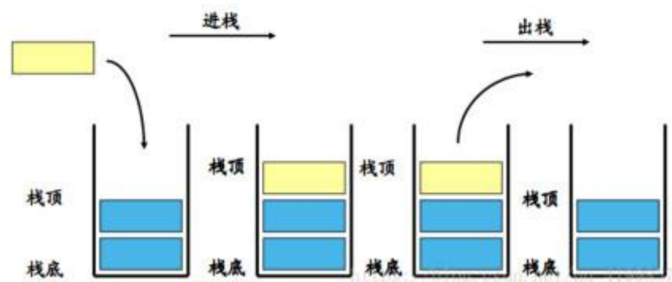


作业注意事项

- 有同学写在了书上，有点难以看清，下次请另找一张白纸来写。
- 建议提交图片，注意不要作为附件（不能批注）
  - 要用手机照照片提交
- 注意提交的题号，这次有同学交错题了

问题与总结

- 感觉→和日常的“推出”不一样，如何理解
  - 蕴涵联结词描述命题间的推理关系，与自然语句中的“如果……那么……”相类似
  - 但是在数理逻辑中，也允许讨论两个无关的命题之间的蕴涵关系
- 波兰式说的栈是啥意思
  - 一种满足先入后出的数据结构



- 等值公式：除了那十个公式可以直接用，后面的公式可以直接用吗？
  - 所有的书上出现过的公式都可以使用

主要内容

2.1 等值定理

2.2 等值公式

2.3 命题公式与真值表的关系

2.4 联接词的完备集

2.5 对偶式

2.6 范式

2.7 推理形式

2.8 基本的推理公式

2.9 推理演算

2.10 归结推理法

用途3：解决实际问题

例7：在某次研讨会的中间休息时间，3名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人判断如下：

甲：王教授不是苏州人，是上海人。

乙：王教授不是上海人，是苏州人。

丙：王教授既不是上海人，也不是杭州人。

听完这3人的判断后，王教授笑着说，你们3人中**有一人说得全对，有一人说对了一半，另一人说得全不对**。试用逻辑演算分析王教授到底是哪里人。

甲：王教授不是苏州人，是上海人。
乙：王教授不是上海人，是苏州人。
丙：王教授既不是上海人，也不是杭州人

解 设命题

P: 王教授是苏州人.

Q: 王教授是上海人.

R: 王教授是杭州人.

P, Q, R中必有一个真命题，两个假命题.

甲的判断为 $\neg P \wedge Q$

乙的判断为 $P \wedge \neg Q$

丙的判断为 $\neg Q \wedge \neg R$

甲：王教授不是苏州人，是上海人。 甲的判断为 $\neg P \wedge Q$

乙：王教授不是上海人，是苏州人。 乙的判断为 $P \wedge \neg Q$

丙：王教授既不是上海人，也不是杭州人 丙的判断为 $\neg Q \wedge \neg R$

甲的判断全对为 $B_1 = \neg P \wedge Q$

甲的判断对一半为 $B_2 = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

甲的判断全错为 $B_3 = P \wedge \neg Q$

乙的判断全对为 $C_1 = P \wedge \neg Q$

乙的判断对一半为 $C_2 = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

乙的判断全错为 $C_3 = \neg P \wedge Q$

丙的判断全对为 $D_1 = \neg Q \wedge \neg R$

丙的判断对一半为 $D_2 = (\neg Q \wedge R) \vee (Q \wedge \neg R)$

丙的判断全错为 $D_3 = Q \wedge R$

一人说得全对，有一人说对了一半，另一人说得全不对

$(B\ C\ D)_1$:说得全对； $(B\ C\ D)_2$：说对一半；

$(B\ C\ D)_3$:说得全不对

由王教授所说：下面的命题为真命题

$$E = (B_1 \wedge C_2 \wedge D_3) \vee (B_1 \wedge C_3 \wedge D_2) \vee$$
$$(B_2 \wedge C_1 \wedge D_3) \vee (B_2 \wedge C_3 \wedge D_1) \vee$$
$$(B_3 \wedge C_1 \wedge D_2) \vee (B_3 \wedge C_2 \wedge D_1)$$

又 $B_1 \wedge C_2 \wedge D_3 = (\neg P \wedge Q) \wedge ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge (Q \wedge R)$

$$= (\neg P \wedge Q) \wedge ((\neg P \wedge \neg Q \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge Q \wedge R))$$

$$= (\neg P \wedge Q) \wedge (P \wedge Q \wedge Q \wedge R)$$

$$= \mathrm{F}$$

$B_1 = \neg P \wedge Q$

$B_2 = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

$B_3 = P \wedge \neg Q$

$C_1 = P \wedge \neg Q$

$C_2 = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

$C_3 = \neg P \wedge Q$

$D_1 = \neg Q \wedge \neg R$

$D_2 = (\neg Q \wedge R) \vee (Q \wedge \neg R)$

$D_3 = Q \wedge R$

$$B_1 \wedge C_3 \wedge D_2 = \neg P \wedge Q \wedge \neg R$$

$$B_2 \wedge C_1 \wedge D_3 = F$$

$$B_2 \wedge C_3 \wedge D_1 = F$$

$$B_3 \wedge C_1 \wedge D_2 = P \wedge \neg Q \wedge R$$

$$B_3 \wedge C_2 \wedge D_1 = F$$

P：王教授是苏州人.
Q：王教授是上海人.
R：王教授是杭州人.

故

$$E = (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$$

因为王教授不能既是上海人，又是杭州人，所以P, R必有一个假命题，即 $P \wedge R \Leftrightarrow 0$. 于是

$E = \neg P \wedge Q \wedge \neg R$ 为真命题，即

王教授是上海人，甲说得全对，丙说对了一半，而乙全说错了。

例：推导比赛名次（自学）

- **A,B,C,D 4人做百米竞赛，观众甲、乙、丙预报比赛的名次为：**

  甲：C第一，B第二；

  乙：C第二，D第三；

  丙：A第二，D第四

比赛结束后发现甲、乙、丙每人报告的情况都是各对一半，试问实际名次如何（无并列者）？

甲：C第一，B第二
乙：C第二，D第三
丙：A第二，D第四

解：A_i,B_i,C_i,D_i表示A,B,C,D第i名，$i=1,2,3,4$

① $(C_1\wedge\neg B_2)\vee(\neg C_1\wedge B_2)=T$

② $(C_2\wedge\neg D_3)\vee(\neg C_2\wedge D_3)=T$

③ $(A_2\wedge\neg D_4)\vee(\neg A_2\wedge D_4)=T$

①∧② = T 由于C不能既第一又第二，B和C不能都第二，所以

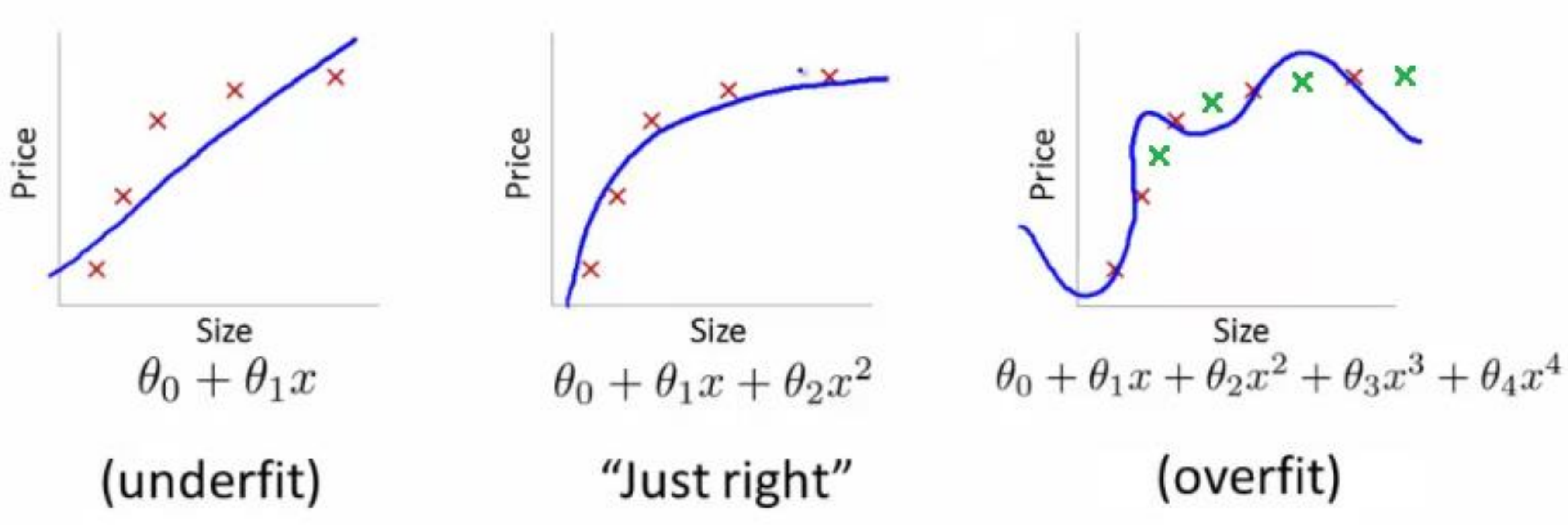
④ $(C_1\wedge\neg B_2\wedge\neg C_2\wedge D_3)\vee(\neg C_1\wedge B_2\wedge\neg C_2\wedge D_3)=T$

③∧④ = T 由于A，B不能同时第二，D不能第三又第四，所以 $A_2\wedge\neg D_4\wedge C_1\wedge\neg B_2\wedge\neg C_2\wedge D_3=T$

所以C第一，A第二，D第三，B第四.

2.3 命题公式与真值表的关系

- 对任一依赖于命题变元$P_1, P_2, \ldots, P_n$的命题公式 A来说，可根据$P_1, P_2, \ldots, P_n$的真值，给出A的真值，从而建立起由$P_1, P_2, \ldots, P_n$到 A的真值表。
- 反之，若给定了由$P_1, P_2, \ldots, P_n$到 A的真值表，可以用下述方法写出命题公式A对$P_1, P_2, \ldots, P_n$的逻辑表达式：



2.3 命题公式与真值表的关系

例1：从取1的行来列写

$$A = (\neg P_1 \wedge \neg P_2) \vee (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_2)$$

$$B =$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

P_1	P_2	$P_1 \wedge P_2$	$P_1 \wedge \neg P_2$	$\neg P_1 \wedge P_2$	$\neg P_1 \wedge \neg P_2$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

P_1	P_2	A	B
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	0

2.3 命题公式与真值表的关系

1. 从取1的行来列写

考查命题公式 A的真值表中取1的行，若取1的行数共有m行，则命题公式 A可以表示成如下形式：

$$A = Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_m$$

其中 $Qi = (R_1 \wedge R_2 \wedge \ldots \wedge R_n)$，

$R_i = P_i$ 或 $\neg P_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$

若该行的$P_i = 1$，则$R_i = P_i$；否则$R_i = \neg P_i$

P_1	P_2	$P_1 \wedge P_2$	$P_1 \wedge \neg P_2$	$\neg P_1 \wedge P_2$	$\neg P_1 \wedge \neg P_2$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

例2：从取0的行来列写

$$A = (\neg P_1 \vee P_2)$$

$$B = (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2)$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

P_1	P_2	$P_1 \vee P_2$	$P_1 \vee \neg P_2$	$\neg P_1 \vee P_2$	$\neg P_1 \vee \neg P_2$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0

P_1	P_2	A	B
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	0

2.3 命题公式与真值表的关系

2. 从取0的行来列写

考查真值表中取0的行，若取0的行数共有k行，则命题公式A可以表示成如下形式：

$$A = Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_k$$

其中 $Q_i = (R_1 \vee R_2 \vee \cdots \vee R_n)$，

$R_i = P_i$ 或 $R_i = \neg P_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

若该行的 $P_i = 1$，则 $R_i = \neg P_i$ 若该行的 $P_i = 0$，则 $R_i = P_i$.

P_1	P_2	$P_1 \vee P_2$	$P_1 \vee \neg P_2$	$\neg P_1 \vee P_2$	$\neg P_1 \vee \neg P_2$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0

0		0		1
1	=	1	$\wedge$	1
1		1		1
0		1		0

进一步理解

- **从取1的行来列写**

$A = (\ \wedge\ )_1 \vee (\ \wedge\ )_2 \vee \ldots \vee (\ \wedge\ )_m$

- **故从取0的行来列写**

$\neg A = (\ \wedge\ )_1 \vee (\ \wedge\ )_2 \vee \ldots \vee (\ \wedge\ )_l$ 从而

$A = (\vee)_1 \wedge (\vee\ )_2 \wedge \ldots \wedge (\vee\ )_l$

其中$(\vee)_1$中每一项也相应取反，因此

若该行的 $P_i = 1$，则 $R_i = \neg P_i$

若该行的 $P_i = 0$，则 $R_i = P_i$.

两个重要的命题联结词

与非联接词

与非联接词是二元命题联结词。两个命题P和Q用与非联接词“↑”联结起来，构成一个新的复合命题，记作$P\uparrow Q$。读作P和Q的“与非”。当且仅当P和Q的真值都是1时，$P\uparrow Q$的真值为0，否则$P\uparrow Q$的真值为1。

$$P\uparrow Q = \neg (P\wedge Q)$$

（真值表）

P	Q	$P\uparrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

两个重要的命题联结词

或非联接词

或非联接词是二元命题联结词。两个命题P和Q用或非联接词“$\downarrow$”联结起来，构成一个新的复合命题，记作$P \downarrow Q$。读作P和Q的“或非”。当且仅当P和Q的真值都是0时，$P \downarrow Q$的真值为1，否则$P \downarrow Q$的真值为0。

$$P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$$

（真值表）

P	Q	$P \downarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

异或联结词

- 不可兼或。$P\bar{\vee}Q = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$
  - 当且仅当P和Q的值不一样的时候，的真值为1；
  - 当P和Q的值相同，异或结果为0。

P	Q	$P\bar{\vee}Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2.4 联接词的完备集

2.4.1 真值函项

对所有的合式公式加以分类，将等值的公式视为同一类，从中选一个作代表称之为真值函项。每一个真值函项就有一个联结词与之对应。

举例：N=2时的所有真值函项

N = 2时的所有真值函项

P	Q	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		F	$\wedge$		P		Q	$\bar{\vee}$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\neg Q$		$\neg P$	$\rightarrow$	$\uparrow$	T

$g_0 = F$ $\quad g_1 = P \wedge Q$ $\quad g_6 = P \bar{\vee} Q$ $\quad g_7 = P \vee Q$

$g_8 = P \downarrow Q$ $\quad g_9 = P \leftrightarrow Q$ $\quad g_{13} = P \rightarrow Q$ $\quad g_{14} = P \uparrow Q$

$g_{15} = T$ $\quad g_3 = P$ $\quad g_5 = Q$ $\quad g_{10} = \neg Q$ $\quad g_{12} = \neg P$

尚余

$g_2 = P \wedge \neg Q$ $\qquad g_4 = \neg P \wedge Q$

$g_{11} = P \vee \neg Q = Q \rightarrow P$

对于二值逻辑，

n个命题变元$P_1, P_2, \ldots, P_n$可定义

2^{2^n}个 n元联接词

若推广到多值逻辑结果如何

m^{m^n} ？

2.4 联接词的完备集

2.4.2 联接词的完备集

C是一个联结词的集合，如果任何n元$(n\geq 1)$真值函项都可以由仅含C中的联结词构成的公式表示，则称C是完备的联结词集合，或说C是联结词的完备集。

联结词的完备集

定理2.4.1

{ ¬， ∨， ∧}是完备的联结词集合。

- 从前面介绍的由真值表列写命题公式的过程可知，任一公式都可由¬， ∨， ∧表示，从而{¬, ∨, ∧}是完备的。
- 一般情形下，该定理的证明应用数学归纳法，施归纳于联结词的个数来论证。

定理2.4.1 $\{\neg, \vee, \wedge\}$是完备的联结词集合

另一证法，因为任何n（$n\geq1$）元真值函数都与唯一的一个主析取范式（后面介绍）等值，而在主析取范式中仅含联结词$\neg, \vee, \wedge$，所以$S = \{\neg, \vee, \wedge\}$是联结词的完备集。

多选题 1分

Setting

以下哪些联结词集是完备集

A $S_1 = \{\neg, \wedge\}$

B $S_2 = \{\neg, \vee\}$

C $S_3 = \{\uparrow\}$

D $S_4 = \{\wedge, \vee\}$

Submit

联结词的完备集

推论：　以下联结词集都是完备集：

（1）　$S_1 = \{\neg, \wedge\}$

（2）　$S_2 = \{\neg, \vee\}$

（3）　$S_3 = \{\neg, \rightarrow\}$

（4）　$S_4 = \{\uparrow\}$

（5）　$S_5 = \{\downarrow\}$

证明{↑}，{↓}都是联结词完备集

- 已知{$\neg$, $\vee$, $\wedge$}是完备集，证明其中每个联结词都可以由↑来表示

$\neg P = \neg(P \wedge P)$

$\quad = P \uparrow P$

$P \wedge Q = \neg\neg(P \wedge Q) = \neg(P \uparrow Q) = (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$

$P \vee Q = \neg(\neg P \wedge \neg Q) = \neg P \uparrow \neg Q = (P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)$

证毕

一些重要的全功能联结词集合

- $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$可以构成功能联结词集合。使用上述全功能联结词集合表达的命题公式类的系统常称为Boole代数系统。
- $\{\neg, \rightarrow\}$也可构成全功能联结词集合。该全功能联结词集合在研究逻辑系统的演绎与推理，以及在程序系统的研究中经常遇到。
- $\{\uparrow\}$，$\{\downarrow\}$是全功能联结词集合。在大规模集成电路中有广泛的应用。

2.5 对偶式

8. 同一律： $P \vee F = P$ $P \wedge T = P$

对偶式

将给定的命题公式 $\boldsymbol{A}$ 中出现的∨, ∧, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{F}$ 分别以∧, ∨, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{T}$ 代换，得到公式 $\boldsymbol{A}^*$，则称 $\boldsymbol{A}^*$ 是公式 $\boldsymbol{A}$ 的对偶式，或说 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^*$ 互为对偶式。

在以下定理2.5.1~定理2.5.6中，记

$$A = A(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

$$A^- = A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

有关对偶式的定理

- 定理2.5.1 数学归纳法

$$\neg(A^*) = (\neg A)^*, \quad \neg(A^-) = (\neg A)^-$$

- 定理2.5.2

$$(A^*)^* = A, \quad (A^-)^- = A$$

- 定理2.5.3 数学归纳法

$$\neg A = A^{*-}$$

2. 5 对偶式

证明定理2.5.3： $\neg A = A^{*-}$

用数学归纳法,施归纳于A中出现的联结词个数n。

基始: 设n = 0, A中无联结词,便有

$A = P$, 从而 $\neg A = \neg P$

但 $A^{*-} = \neg P$

$\therefore$ n = 0时定理成立。

归纳： 设n≤k时定理成立，

往证n = k+1时定理也成立。

$\because$ n = k+1≥1, A 中至少有一个联结词，可分为 三种情形：

$A = \neg A_1$, $A = A_1 \wedge A_2$, $A = A_1 \vee A_2$

其中A_1, A_2中联结词个数≤k。

定理2.5.1：$\neg(A^*) = (\neg A)^*$， $\neg(A^-) = (\neg A)^-$

2. 5 对偶式

依归纳法假设，$\neg A_1 = A_1^{*-}$, $\neg A_2 = A_2^{*-}$

当 $A = \neg A_1$时 $\neg A = \neg(\neg A_1)$

$= \neg(A_1^{*-})$ 归纳法假设

$= \neg(((A_1^*)^-))$

$= (\neg(A_1^*))^-$ 定理 2.5.1 (2)

由定理2.5.1 (2)先取逆再取非 = 先取非再取逆

$= (\neg A_1)^{*-}$

由定理2.5.1 (1)先取对偶再取非 = 先取非再取对偶

$= A^{*-}$ 由条件$A = \neg A_1$

$\neg A = A^{*-}$

依归纳法假设，$\neg A_1 = A_1{}^{*-}$, $\neg A_2 = A_2{}^{*-}$

2.5 对偶式(自学)

当 $A = A_1 \wedge A_2$时

$\neg A = \neg(A_1 \wedge A_2)$

$= \neg A_1 \vee \neg A_2$ 摩根律

$= A_1{}^{*-} \vee A_2{}^{*-}$ 归纳法假设

$= (A_1{}^{*} \vee A_2{}^{*})^{-}$ A^{-}定义

$= (A_1 \wedge A_2)^{*-}$ A^{*}定义

$= A^{*-}$ 定理证毕

类似可证明$A = A_1 \vee A_2$ 的情况

该定理实为摩根律的另一种形式。

它将$\neg$、$*$、$^{-}$有机地联系起来。

$\neg A = A^{*-}$

有关对偶式的定理(续)

- 定理2.5.4
  若$A = B$，必有$A^* = B^*$（对偶原理）
- 定理2.5.5
  若$A \to B$ 永真，必有$B^* \to A^*$永真
- 定理2.5.6
  A与A^-同永真，同可满足；
  $\neg A$与A^*同永真，同可满足。

代入规则

- 定理2.5.3
  $\neg A = A^{*-}$

等价否定等值式：$P \leftrightarrow Q = \neg P \leftrightarrow \neg Q$

2.5 对偶式

定理 2.5.4　若 A = B 必有 A* = B*

证明: 因为 A = B 等价于 A↔B 永真。

从而 ¬A↔¬B　永真。

依定理2.5.3，¬A = A*⁻，¬B = B*⁻

于是　A*⁻ ↔ B*⁻　　永真

必有　A*↔ B*　　永真　　代入规则

故　A* = B*

定理2.5.6
A与A^-同永真，同可满足；

主观题 10分

设置

请写出下面定理的证明思路

定理2.5.5 若$A \rightarrow B$ 永真，必有 $B^* \rightarrow A^*$ 永真

作答

2.5 对偶式(自学)

- 定理2.5.5 若$A \rightarrow B$ 永真，必有 $B^* \rightarrow A^*$ 永真
- 证

$$A \rightarrow B$$

$= \quad \neg B \rightarrow \neg A$ 命题与逆否命题等值

$= \quad B^{*-} \rightarrow A^{*-}$ 定理2.5.3

$= \quad B^* \rightarrow A^*$ 代入规则

- 定理2. 5. 3

$$\neg A = A^{*-}$$

A为重言式 $\Rightarrow$ A*必为矛盾式

- 若A为重言式,则A*必为矛盾式.

  如果$A = \mathrm{T}$，由对偶原理可知：$A^* = (\mathrm{T})^* = \mathrm{F}$

- 例如,

定理2.5.4
若$A = B$，必有$A^* = B^*$（对偶原理）

设 $A = P\vee(\neg P\vee(Q\wedge\neg \mathrm{Q}))$,

则 $A^* = P\wedge(\neg P\wedge(Q\vee\neg Q))$

$$A \Leftrightarrow P\vee(\neg P\vee 0) \Leftrightarrow P\vee\neg P \Leftrightarrow 1,$$

$$\boldsymbol{A^* \Leftrightarrow 0.}$$

做作业的感受

- 是否喜欢蕴含联结词？

仅包含∧，∨，¬联结词的命题公式

例1：从取1的行来列写

P	Q	A	B
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	F

$$A = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

$$\boxed{B = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)}$$

P	Q	A	B
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	F

$$A = (\neg P \vee Q)$$

$$\boxed{B = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)}$$

2.6 范式（Normal Form）

2.6.1 **文字与互补对：** 命题变项及其否定式(如P与$\neg P$）统称**文字**。

且P与$\neg P$ 称为**互补对**。

2.6.2 合取式：由文字的合取所组成的公式称为**合取式**。由有限个文字构成的合取式称作简单合取式。

2.6.3 析取式：由文字的析取所组成的公式称为**析取式**。由有限个文字构成的析取式称作简单析取式。

逻辑表达式或命题的某种标准或规范表示方式更容易进行分析或比较

补充：析取式与合取式

- 令$A_1,A_2,\ldots,A_s$表示s个简单析取式或s个简单合取式。
- 设A_i是含n个文字的简单析取式，若A_i中既含某个命题变项P_j，又含它的否定式$\neg P_j$， 即$P_j \vee \neg P_j$，则A_i为重言式。
- 反之，若A_i为重言式，则它必同时含某个命题变项和它的否定式，否则，若将A_i中的不带否定符号的命题变项都取0值，带否定号的命题变项都取1值，此赋值为A_i的成假赋值，这与A_i是重言式相矛盾。
- 类似的讨论可知，若A_i是含n个命题变项的**简单合取式**，且A_i为矛盾式，则A_i中必同时含某个命题变项及它的否定式，反之亦然。

补充：析取式与合取式

定理

(1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含有某个命题变项及它的否定式(一个互补对)。

$$A = P \vee \neg P \vee Q$$

(2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含有某个命题变项及它的否定式(一个互补对)。

$$A = P \wedge \neg P \wedge Q$$

2.6 范式

2.6.4 析取范式

析取范式是形如

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$$

的公式，其中$A_i\,(i = 1,\ldots,n)$为合取式。

2.6.5 合取范式

合取范式是形如

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$$

的公式，其中$A_i\,(i = 1,\ldots,n)$为析取式。

布尔代数简化

在逻辑编程和人工智能中用于推理

求范式举例

- 例1 求$P\leftrightarrow Q$ 的析取范式与合取范式：

$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$----析取范式

$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)$----合取范式

范式不唯一，例如

$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P\vee Q)\wedge(Q\vee\neg Q)\wedge(P\vee\neg Q)$

例2 求 $(P\to Q)\leftrightarrow R$的析取范式与合取范式

（1） 先求合取范式

$(P\to Q) \leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow (\neg P\lor Q) \leftrightarrow R$ (消去→)

$\Leftrightarrow ((\neg P\lor Q) \to R) \land (R\to(\neg P\lor Q))$ (消去↔)

$\Leftrightarrow (\neg(\neg P\lor Q)\lor R)\land(\neg R\lor(\neg P\lor Q))$ (消去→)

$\Leftrightarrow ((P\land\neg Q)\lor R)\land(\neg P\lor Q\lor\neg R)$ (否定符内移)

$\Leftrightarrow (P\lor R)\land(\neg Q\lor R)\land(\neg P\lor Q\lor\neg R)$ (∨对∧的分配律)

例2：求析取范式

$(P\rightarrow Q) \leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow ((P\wedge\neg Q)\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)$ （消去$\leftrightarrow$）

$\Leftrightarrow ((P\wedge\neg Q) \wedge (\neg P\vee Q\vee\neg R)) \vee (R \wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R))$

$\Leftrightarrow \cancel{(P\wedge\neg Q\wedge\neg P)}\vee\cancel{(P\wedge\neg Q\wedge Q)}\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee$

$(R\wedge\neg P)\vee(R\wedge Q)\vee\cancel{(R\wedge\neg R)}$ （$\wedge$对$\vee$的分配律）

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$ （补余律和同一律）

$\boxed{P\leftrightarrow Q = (P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee Q)}$ 从取假来描述双条件

2.6.6 范式存在定理

任一命题公式都存在与之等值的合取范式和析取范式。但命题公式的合取范式和析取范式并不唯一。

求范式的具体步骤

- 利用等值公式中的等值式和蕴涵等值式将公式中的→、↔用联结词¬、∧、∨来取代；

$$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$$

$$P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$ (多用于求析取范式)

$$P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$$ (多用于求合取范式)

- 利用摩根律将否定号¬移到各个命题变元的前端；
- 利用结合律、分配律、吸收律、等幂律、交换律等将公式化成其等值的析取范式和合取范式。

由于范式一般不唯一，所以有必要进一步研究<u>主范式</u>。

$(P\to Q)\leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow ((P\wedge\neg Q)\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)$ （消去$\leftrightarrow$）

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q\wedge\neg P)\vee(P\wedge\neg Q\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee$

$(R\wedge\neg P)\vee(R\wedge Q)\vee(R\wedge\neg R)$ （$\wedge$对$\vee$的分配律）

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$ （补余律和同一律）

缺点是什么？

命题变元出现次数无约束

命题变元顺序无约束

例1：从取1的行来列写

$A = (\neg P_1 \wedge \neg P_2) \vee (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_2)$

$B = (\neg P_1 \wedge \neg P_2) \vee (\neg P_1 \wedge P_2)$

P_1	P_2	A	B
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	0

每一项都有什么特点？

例2：从取0的行来列写

$A = (\neg P_1 \vee P_2)$

$B = (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2)$

P_1	P_2	A	B
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	0

主范式——极小项和极大项

2.6.7 极小项

n 个命题变项 $P_1, P_2,\ldots,P_n$ 组成的合取式：

$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n$

其中 $Q_j = P_j$，或$\neg P_j$。即每个命题变项与它的否定式不同时出现，但二者之一必出现且仅出现一次。则称合取式$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n$为极小项，并以$m_i$表示。

2.6.8 极大项

n 个命题变项$P_1,P_2,\ldots,P_n$组成的析取式：

$Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_n$

其中 $Q_j = P_j$，或$\neg P_j$。即每个命题变项与它的否定式不同时出现，但二者之一必出现且仅出现一次。则称析取式$Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_n$为极大项，并以$M_i$表示。

i是什么？

P_1	P_2	极小项	名称	极大项	名称
0	0	$\neg P_1 \wedge \neg P_2$	m_0	$P_1 \vee P_2$	M_3
0	1	$\neg P_1 \wedge P_2$	m_1	$P_1 \vee \neg P_2$	M_2
1	0	$P_1 \wedge \neg P_2$	m_2	$\neg P_1 \vee P_2$	M_1
1	1	$P_1 \wedge P_2$	m_3	$\neg P_1 \vee \neg P_2$	M_0

主范式——极小项的性质

（1）任一含有n 个命题变项的公式，所有可能的极小项的个数和该公式的解释个数相同，都是2^n。

（2）排列顺序与P_1，P_2，⋯，P_n一致；

	P_1	P_2	A	B	
M_3	0	0	1	1	m_0
M_2	0	1	1	1	m_1
M_1	1	0	0	0	m_2
M_0	1	1	1	0	m_3

（3）每个极小项只在一个解释下为真。每种解释对应的一个n位二进制数，转化为十进制数为i，极小项$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n$以$m_i$表示

（4）极小项两两不等值，并且 $m_i \wedge m_j = F$（$i \neq j$）。

（5）任一含有n 个命题变项的公式，都可由k 个($k \leqslant 2^n$)极小项的析取来表示。

A是由k个极小项的析取来表示，剩余2^n-k极小项的析取是$\neg A$

（6）恰由2^n个极小项的析取构成的公式必为重言式。即

$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = T$

从取1的行来列写

$$A = (\neg P_1 \wedge \neg P_2) \vee (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_2)$$

$$B = (\neg P_1 \wedge \neg P_2) \vee (\neg P_1 \wedge P_2)$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix}} \vee \boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\\0\end{matrix}} \vee \boxed{\begin{matrix}0\\0\\0\\1\end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

P_1	P_2	$P_1 \wedge P_2$	$P_1 \wedge \neg P_2$	$\neg P_1 \wedge P_2$	$\neg P_1 \wedge \neg P_2$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

P_1	P_2	A	B	
0	0	1	1	m_0
0	1	1	1	m_1
1	0	0	0	m_2
1	1	1	0	m_3

主范式——极大项的性质

(1) 任一含有n 个命题变项的公式，所有可能的极大项的个数与该公式的解释个数相同，都是2^n。

(2) 排列顺序与$P_1, P_2,..., P_n$一致，

极大项$Q_1 \vee Q_2 \vee ... \vee Q_n$以$M_i$表示；

(3) 每个极大项只在一个解释下为假。

	P_1	P_2	A	B	
M_3	0	0	1	1	m_0
M_2	0	1	1	1	m_1
M_1	1	0	0	0	m_2
M_0	1	1	1	0	m_3

(4) 极大项两两不等值，并且$M_i \vee M_j = \mathrm{T}$ $(i \neq j)$。

(5) 任一含有n个命题变项的公式，都可由k个$(k \leq 2^n)$极大项的合取来表示。

A是由k个极大项的合取来表示，剩余2^n-k极大项的合取是$\neg A$

(6) 恰由2^n个极大项的合取构成的公式必为矛盾式。即

$\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = \mathrm{F}$

从取0的行来列写

$$A = (\neg P_1 \vee P_2)$$

$$B = (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2)$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

P_1	P_2	$P_1 \vee P_2$	$P_1 \vee \neg P_2$	$\neg P_1 \vee P_2$	$\neg P_1 \vee \neg P_2$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0

	P_1	P_2	A	B	
M_3	0	0	1	1	m_0
M_2	0	1	1	1	m_1
M_1	1	0	0	0	m_2
M_0	1	1	1	0	m_3

主析取范式与主合取范式

主析取范式

设由n 个命题变项构成的析取范式中所有的合取式都是极小项，则称该析取范式为主析取范式（仅由极小项构成的析取范式称为主析取范式）。

主合取范式

设由n个命题变项构成的合取范式中所有的析取式都是极大项，则称该合取范式为主合取范式（仅由极大项构成的合取范式称为主合取范式）。

主范式

主析取范式定理

任一含有n个命题变项的公式，都存在唯一的与之等值的且恰仅含这n个命题变项的主析取范式。

主合取范式定理

任一含有n个命题变项的公式，都存在唯一的与之等值的且恰仅含这n个命题变项的主合取范式。

主析取范式与主合取范式的求法

求主析取范式的方法

1. 先求析取范式
2. 再填满变项

主析取范式与主合取范式的求法

1 $P \leftrightarrow Q =$ （$P \wedge Q$）$\vee$（$\neg P \wedge \neg Q$)

m_3 m_0

$= m_0 \vee m_3 = \vee_{0,3}$

2.填满命题变项

$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$

因为 $\neg P = \neg P \wedge$（$Q \vee \neg Q$）

$=$（$\neg P \wedge Q$）$\vee$（$\neg P \wedge \neg Q$)

因为 $Q = Q \wedge (P \vee \neg P)$

$=$（$P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

$P \rightarrow Q = (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

m_1 m_0 m_3

$= m_0 \vee m_1 \vee m_3$

$= \vee_{0,1,3}$

填满变项的简便方法

$$\neg P \vee Q$$

$$= m^{0x} \vee m^{x1}$$

$$= m_0 \vee m_1 \vee m_3$$

0	**0**			
0	**1**		**0**	**1**
0	**1**			
1	**1**			

极小项和极大项的关系

- $\neg m_i = M_{(2^n-1-i)} = M_{(i)补}$　　$\neg M_i = m_{(2^n-1-i)} = m_{(i)补}$

公式	名称
$\neg P_1 \wedge \neg P_2$	m_0
$\neg P_1 \wedge P_2$	m_1
$P_1 \wedge \neg P_2$	m_2
$P_1 \wedge P_2$	m_3

公式	名称
$\neg P_1 \vee \neg P_2$	M_0
$\neg P_1 \vee P_2$	M_1
$P_1 \vee \neg P_2$	M_2
$P_1 \vee P_2$	M_3

P_1	P_2	极小项	名称	*极大项*	名称
0	0	$\neg P_1 \wedge \neg P_2$	m_0	$P_1 \vee P_2$	M_3
0	1	$\neg P_1 \wedge P_2$	m_1	$P_1 \vee \neg P_2$	M_2
1	0	$P_1 \wedge \neg P_2$	m_2	$\neg P_1 \vee P_2$	M_1
1	1	$P_1 \wedge P_2$	m_3	$\neg P_1 \vee \neg P_2$	M_0

例1：从取1的行来列写

$A = (\neg P_1 \wedge \neg P_2) \vee (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_2)$

$B = (\neg P_1 \wedge \neg P_2) \vee (\neg P_1 \wedge P_2)$

P_1	P_2	A	B	
0	0	1	1	m_0
0	1	1	1	m_1
1	0	0	0	
1	1	1	0	

例2：从取0的行来列写

P_1	P_2	A	B	
0	0	1	1	
0	1	1	1	
1	0	0	0	M_1
1	1	1	0	M_0

$A = (\neg P_1 \vee P_2)$

$B = (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2)$

主析取范式与主合取范式转换

- 主范式之间的转换

令 $A = \vee m_{il}$ 则 $\neg A = \vee m_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ \ldots,ik\})}$

$A = \wedge M_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ \ldots,ik\})补} = \wedge_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ \ldots,ik\}补)}$

令 $A = \wedge M_{il}$ 则 $\neg A = \wedge M_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ \ldots,ik\})}$

$A = \vee_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ \ldots,ik\})补} = \vee_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ \ldots,ik\}补)}$

A是由k个极大项的合取来表示，剩余2^n-k极大项*的*合取是$\neg A$

$\neg m_i = M_{(2^n-1-i)} = M_{(i)补}$ $\neg M_i = m_{(2^n-1-i)} = m_{(i)补}$

主范式的求法与举例

$(P\vee\neg Q)\rightarrow(\neg P\leftrightarrow(Q\wedge\neg R))$ 求主析与主合取范式

原式 $=\neg(P\vee\neg Q)\vee((\neg P\wedge(Q\wedge\neg R))\vee(P\wedge(\neg Q\vee R)))$

$=(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge R)$

$=m^{01X}\vee m^{010}\vee m^{10X}\vee m^{1X1}$

∴主析范式 $=\vee_{2,3,4,5,7}$

主合范式 $=\wedge_{(\{0,1,\ldots 7\}-\{2,3,4,5,7\}\text{补})}$

$=\wedge_{(\{0,1,\ldots,7\}-\{5,4,3,2,0\})}$

$=\wedge_{1,6,7}$

$(P\vee\neg Q)\rightarrow(\neg P\leftrightarrow(Q\wedge\neg R))$

列写真值表验算

P_1	P_2	极小项	名称	极大项	名称
0	0	$\neg P_1\wedge\neg P_2$	m_0	$P_1\vee P_2$	M_3
0	1	$\neg P_1\wedge P_2$	m_1	$P_1\vee\neg P_2$	M_2
1	0	$P_1\wedge\neg P_2$	m_2	$\neg P_1\vee P_2$	M_1
1	1	$P_1\wedge P_2$	m_3	$\neg P_1\vee\neg P_2$	M_0

P	Q	R	$P\vee\neg Q$	$Q\wedge\neg R$	$\neg P\leftrightarrow(Q\wedge\neg R)$	原式	
0	0	0	1	0	0	0	M_7
0	0	1	1	0	0	0	M_6
0	1	0	0	1	1	1	m_2
0	1	1	0	0	0	1	m_3
1	0	0	1	0	1	1	m_4
1	0	1	1	0	1	1	m_5
1	1	0	1	1	0	0	M_1
1	1	1	1	0	1	1	m_7

主析范式 $= \vee_{2,3,4,5,7}$

主合范式 $= \wedge_{1,6,7}$

设置

$A = \vee_{0,1,4,5,7}$，求主合取范式

A $\wedge_{1,4,5}$

B $\wedge_{1,4,6}$

C $\wedge_{2,3,5}$

D $\wedge_{1,3,5}$

提交

主析与主合之间的转换(简化方法)

已知 $A = \wedge_{1,4,5}$

$= \vee_{(\{0,1,\ldots\ldots,7\}-\{1,4,5\}补)}$

$= \vee_{(\{0,1,\ldots\ldots,7\}-\{6,3,2\})}$

$= \vee_{0,1,4,5,7}$

例：求主范式

$$P \rightarrow Q$$

主合范式 $= \neg P \vee Q \qquad\qquad M_1$

$= \wedge_1$

主析范式 $= \vee_{(\{0,1,2,3\} - \{1\}补)}$

$= \vee_{(\{0,1,2,3\} - \{2\}}$

$= \vee_{0,1,3}$

2.6 空公式 （补充）

求$P \vee \neg P$的主析取和主合取范式

主析取范式： $P \vee \neg P$

主合取范式： **空公式**

结论：永真式的主合取范式为空公式

矛盾式的主析取范式为空公式

主(析取)范式的用途

- 求公式的成真赋值与成假赋值
- 判断公式的类型
- 判断两个命题公式是否等值
- 解决实际问题

求公式的成真(假)赋值

- 若公式A中含有n个命题变项
  - 若A的主析取范式含s个极小项，则A有s个成真赋值
  - 其余2^n-s个赋值都是成假赋值

$$(P\lor\neg Q)\rightarrow(\neg P\leftrightarrow(Q\land\neg R))$$

P	Q	R	$P\lor\neg Q$	$Q\land\neg R$	$\neg P\leftrightarrow(Q\land\neg R)$	原式	
0	0	0	1	0	0	0	M_7
0	0	1	1	0	0	0	M_6
0	1	0	0	1	1	1	m_2
0	1	1	0	0	0	1	m_3
1	0	0	1	0	1	1	m_4
1	0	1	1	0	1	1	m_5
1	1	0	1	1	0	0	M_1
1	1	1	1	0	1	1	m_7

判断公式的类型

- A为重言式当且仅当A的主析取范式含全部2^n个极小项
- A为矛盾式当且仅当A的主析取范式不含任何极小项
- A为可满足式当且仅当A的主析取范式中至少含一个极小项

结论：永真式的主合取范式为空公式
矛盾式的主析取范式为空公式

判断公式的类型–例1

$$\neg(P\rightarrow Q)\wedge Q$$

$$= \neg(\neg P \vee Q)\wedge Q$$

$$= (P\wedge\neg Q)\wedge Q$$

$$= \mathrm{F}$$

矛盾式

判断公式的类型-例2

$P \to (P \vee Q)$

$= \neg P \vee (P \vee Q)$

$= (\neg P \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee (P \wedge (\neg Q \vee Q)) \wedge$

$(Q \wedge (\neg P \vee P))$

$= (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee$

$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$

$= \bigvee_{0,1,2,3}$

重言式

单选题 1分

Setting

判断公式的类型： $(P \vee Q) \to R$

A 矛盾式

B 重言式

C 可满足

D 都不是

Submit

判断公式的类型–例3

$(P \vee Q) \rightarrow R$

$= \neg (P \vee Q) \vee R$

$= (\neg P \wedge \neg Q) \vee R$

$= m^{00x} \vee m^{xy1}$

$= \bigvee_{0,\,1,\,3,\,5,\,7}$

000
001
001
011
101
111

可满足

判断两个命题是否等值

- $(P \to Q) \to R$与$(P \wedge Q) \to R$

$$(P \to Q) \to R = \bigvee_{1,3,4,5,7}$$

$$(P \wedge Q) \to R = \bigvee_{0,1,2,3,4,5,7}$$

$$\boldsymbol{(P \to Q) \to R \neq (P \wedge Q) \to R}$$

解决实际问题：例1

范式在逻辑设计方面有广泛的应用.

- 例1.某科研所要从3名科研骨干A,B,C中挑选1~2名出国进修。由于工作需要，选派是要满足以下条件.

（1）若A去，则C同去。

（2）若B去，则C不能去。

（3）若C不去，则A或B可以去。

解：令P、Q、R分别表示派A、B、或C去.

由已知条件可得公式

$$(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow \neg R) \wedge (\neg R \rightarrow (P \vee Q))$$

- $(P \to R) \wedge (Q \to \neg R) \wedge (\neg R \to (P \vee Q))$

该公式的成真赋值就是可行的选派方案

$$(P \to R) \wedge (Q \to \neg R) \wedge (\neg R \to (P \vee Q))$$

$$= (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge (R \vee P \vee Q))$$

$$= (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee$$

$$(P \wedge \neg Q \wedge R)$$

$=\vee_{1,\ 2,\ 5}$　　因而有3种选派方案

(1) C去，A，B都不去

(1) B去，A，C都不去

(1) A，C同去，B不去

解决实际问题：例2

范式在逻辑设计方面有广泛的应用.

- 例2.　安排课表，教语言课的教师希望将课程安排在第一或第三节；教数学课的教师希望将课程安排在第二或第三节；教原理课的教师希望将课程安排在第一或第二节. 如何安排课表，使得三位教师都满意.

解：令l_1、l_2、l_3分别表示语言课排在第一、第二、第三节.

m_1、m_2、m_3分别表示数学课排在第一、第二、第三节.

p_1、p_2、p_3分别表示原理课排在第一、第二、第三节.

三位教师都满意的条件是：

$(l_1 \vee l_3) \wedge (m_2 \vee m_3) \wedge (p_1 \vee p_2)$ **为真.**

三位教师都满意的条件是：

$(l_1 \vee l_3) \wedge (m_2 \vee m_3) \wedge (p_1 \vee p_2)$ **为真.**

将上式写成析取范式（用分配律）得：

$$((l_1 \wedge m_2) \vee (l_1 \wedge m_3) \vee (l_3 \wedge m_2) \vee (l_3 \wedge m_3)) \wedge (p_1 \vee p_2)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{(l_1 \wedge m_2 \wedge p_1)} \vee \cancel{(l_1 \wedge m_3 \wedge p_1) \vee}$$

$$(l_3 \wedge m_2 \wedge p_1) \vee \cancel{(l_3 \wedge m_3 \wedge p_1) \vee}$$

$$\cancel{(l_1 \wedge m_2 \wedge p_2)} \vee (l_1 \wedge m_3 \wedge p_2) \vee$$

$$\cancel{(l_3 \wedge m_2 \wedge p_2)} \vee \cancel{(l_3 \wedge m_3 \wedge p_2)}$$

$$\Leftrightarrow (l_3 \wedge m_2 \wedge p_1) \vee (l_1 \wedge m_3 \wedge p_2)$$

可以取$(l_3 \wedge m_2 \wedge p_1)$、$(l_1 \wedge m_3 \wedge p_2)$**为1，得到两种排法.**

课后练习题（程序设计，选做）

1. 任给一命题公式，由命题公式列出真值表（通过键盘输入公式并进行适当的语法检查，然后根据公式列出（显示）相应的真值表。
2. 由已知的真值表列写命题公式。
3. 任给一命题公式，计算命题公式的主析取范式和主合取范式

2.7 推理形式

主要内容：

- 介绍推理形式的结构以及重言蕴涵的概念；
- 给出基本推理公式以及证明推理公式的几种不同方法和途径；

2.7 推理形式

推理形式：

将以自然语句描述的推理关系引入符号，抽象化并以条件式的形式表示出来得到推理形式，推理形式由**前提**和**结论**部分组成。

前提真，结论必真的推理形式为正确的推理形式。

重言蕴含：

给定两个公式 A，B，如果当A取值为真时，B 就必取值为真，便称 **A重言（永真）蕴涵B**，或称B是A的逻辑推论。并用符号$A \Rightarrow B$表示。

2.7 推理形式

2.7.1 重言蕴含：

需注意**重言蕴含⇒**与**普通蕴含→**的区别

A重言蕴含B记作，$A \Rightarrow B$

注意："⇒"不是逻辑联接词

A ⇒ B 当然也不同于A→B！

例1. 如果今天是周五，那么我来上课。

今天是周五，

所以我来上课。

设 P：今天是周五，Q：今天我来上课

$$(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$$

前提真，结论也为真，是正确的推理。

重言蕴含举例

例2. 如果今天是五，那么我来上课

今天不是周五

所以我来不上课

$$(P\rightarrow Q)\wedge\neg P\Rightarrow\neg Q$$

P	Q	$P\rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	0	0

前提真，结论假！

不是正确的推理！

2.7.3 重言蕴含几个结果

(1) 如果$A \Rightarrow B$成立，若A为重言式，则B也是重言式。

(2) 若 $A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$同时成立，必有$A = B$; 反之亦然。

(3) 若$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow C$同时成立，则有$A \Rightarrow C$

(4) 若 $A \Rightarrow B$且$A \Rightarrow C$同时成立，则$A \Rightarrow B \wedge C$ ($A \Rightarrow B \vee C$?)√

(5) 若$A \Rightarrow C$且$B \Rightarrow C$同时成立，则$A \vee B \Rightarrow C$

- $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) = (P \vee Q) \rightarrow R$ 前提析取合并

重言蕴含的充要条件

定理2.8.1

$A \Rightarrow B$成立的充分必要条件是$A \rightarrow B$为重言式。

定理2.8.2

$A \Rightarrow B$成立的充分必要条件是$A \wedge \neg B$为矛盾式。

定理2.8.2

$A \Rightarrow B$成立的充分必要条件是**$A \wedge \neg B$为矛盾式**。

证明:

由定理2.8.1和命题公式等值式

$A \rightarrow B = \neg A \vee B = \neg (A \wedge \neg B)$，因此，

“$A \rightarrow B$是重言式”即等价于“$A \wedge \neg B$是矛盾式”

注意：$A \Rightarrow B$ 中 A自身不能必假！

若A永假，则$A \rightarrow B$ 肯定永真，虽然$A \Rightarrow B$ 也成立，但已失去意义！

2.8 基本的推理公式

证明 $A \Rightarrow B$ 的几种方法:

1. 证 $A \rightarrow B$ 是重言式
2. 证 $A \land \neg B$ 为矛盾式
3. 真值表法
4. 证 $\neg B \Rightarrow \neg A$ 即反证法
5. 解释法
6. ……

基本推理公式

1. $P \wedge Q \Rightarrow P$，但 $P \vee Q \not\Rightarrow P$　化简律

2. $\neg(P\rightarrow Q) \Rightarrow P$　　1式的直接推论 $P\wedge \neg Q \Rightarrow P$

3. $\neg(P\rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$　　1式的直接推论 $P\wedge \neg Q \Rightarrow \neg Q$

4. $P \Rightarrow P\vee Q$　　析取引入律，附加律

5. $\neg P \Rightarrow P\rightarrow Q$　　2式的逆否，4式的推论。

6. $Q \Rightarrow P\rightarrow Q$　　3式的逆否，4式的推论。

7. $\neg P\wedge(P\vee Q) \Rightarrow Q$　　非 P，而PVQ又成立，只有Q成立

8. $P\wedge(P\rightarrow Q) \Rightarrow Q$　　*假言推理，分离规则，7式的变形

9. $\neg Q\wedge(P\rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$　7式的变形

$$\frac{P}{Q} \qquad \frac{Q}{\neg P}$$

基本推理公式

10. $(P\to Q)\wedge(Q\to R) \Rightarrow P\to R$ *三段论

11. $(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R) \Rightarrow P\leftrightarrow R$ 类似10式

12. $(P\to R)\wedge(Q\to R)\wedge(P\vee Q) \Rightarrow R$ 10式的推论

13. $(P\to Q)\wedge(R\to S)\wedge(P\vee R) \Rightarrow Q\vee S$ 10式的推论

14. $(P\to Q)\wedge(R\to S)\wedge(\neg Q\vee\neg S) \Rightarrow \neg P\vee\neg R$ 10式的推论

15. $(Q\to R) \Rightarrow ((P\vee Q)\to(P\vee R))$ P=F时左=右，P=T时右=T

16. $(Q\to R) \Rightarrow ((P\to Q)\to(P\to R))$ P=T时左=右，P=F时右=T

16个公式？

- $P \wedge Q \Rightarrow P$ 合取化简式
- $P \Rightarrow P \vee Q$ 析取附加式（引入式）
- $P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$ *假言推理，分离规则
- $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$ *三段论

证明： $(P \to R) \wedge (Q \to R) \wedge (P \vee Q) \Rightarrow R$

$(P \to R) \wedge (Q \to R) \wedge (P \vee Q)$ 前提析取合并

$= ((P \vee Q) \to R)) \wedge (P \vee Q)$ 分离规则

$\Rightarrow R$

- $(P \to R) \wedge (Q \to R) = (P \vee Q) \to R$ 前提析取合并

证明： $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\vee R) \Rightarrow Q\vee S$

$(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\vee R)$

$= (P\rightarrow Q)\wedge\mathbf{(R\rightarrow S)\wedge(\neg P\rightarrow R)}$

$\boxed{\Rightarrow} (P\rightarrow Q)\wedge (\neg P\rightarrow S)$

$= (\neg Q\rightarrow \neg P)\wedge (\neg P\rightarrow S)$

$\Rightarrow \neg Q\rightarrow S$

$= Q\vee S$

证明： $(P\to Q)\wedge(R\to S)\wedge(\neg Q\vee\neg S) \Rightarrow \neg P\vee\neg R$

$$(P\to Q)\wedge(R\to S)\wedge(\neg Q\vee\neg S)$$

$$= (P\to Q)\wedge(R\to S)\wedge(S\to\neg Q)$$

$$\boxed{\Rightarrow} (P\to Q)\wedge(R\to\neg Q)$$

$$= (\neg Q\to\neg P)\wedge(R\to\neg Q)$$

$$\Rightarrow R\to\neg P$$

$$= \neg P\vee\neg R$$

例：判断下列推理是否正确。

若一个数是实数，则它是复数；若一个数是虚数，则它也是复数；一个数既不是实数，又不是虚数，所以它不是复数。

P：一个数是实数

R：一个数是虚数

Q：一个数是复数

则原题可符号化为：

$P \rightarrow Q$，$R \rightarrow Q$，$\neg P \wedge \neg R \Rightarrow \neg Q$

$$P\to Q,\ R\to Q,\ \neg P\land\neg R\Rightarrow\neg Q$$

证明：令

$S=(P\to Q)\land(R\to Q)\land(\neg P\land\neg R)\to\neg Q$

则

$S=\neg((\neg P\lor Q)\land(\neg R\lor Q)\land(\neg P\land\neg R))\lor\neg Q$

$=(P\land\neg Q)\lor(R\land\neg Q)\lor P\lor R\lor\neg Q$

$= P\lor R\lor\neg Q$ 吸收律 $A\lor(A\land B) = A$

当Q取T，P、R取F时，S为F，即S不是重言式，

所以，推理不成立。

少了一个条件：一个复数不是实数就是虚数

两个重要的定理引出两种推论方法

定理2.8.1

$A \Rightarrow B$成立的充分必要条件是**$A \to B$为重言式（直接推导）**。

定理2.8.2

$A \Rightarrow B$成立的充分必要条件是**$A \land \neg B$为矛盾式（反证法）**。

2.9 推理演算

- 出发点：

  直观地看出由前提A到结论B 的推演过程，且便于在谓词逻辑中使用。

- 方法

  （1）引入几条推理规则

  （2）利用基本推理公式

从前提A_1，A_2，…，A_n 出发，配合使用推理规则和基本推理公式，逐步推演出结论B。

2.9 推理演算

主要的推理规则：

（1）前提引入规则；推理过程中可随时引入前提

（2）结论引入规则；中间结论可作为后续推理的前提

（3）代入规则；仅限于重言式中的命题变项

（4）置换规则；利用等值公式对部分公式进行置换

（5）分离规则；由A及$A \rightarrow B$成立，可将B分离出来

（6）条件证明规则。$A_1 \land A_2 \Rightarrow B$与$A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$等价

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \land Q) \rightarrow R$$

条件证明规则。$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$与$A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$等价

例1 证明P→R是P→Q，Q→R的逻辑推论。

证明:

1. P→Q　　前提引入
2. P　　附加前提引入（条件证明规则）
3. Q　　1、2分离
4. Q→R　　前提引入
5. R　　3、4分离

注：此题可直接使用推理公式10（三段论），
以简化证明步骤。

(P→Q)∧(Q→R) => P→

教材 例3: 证明 $(P\vee Q)\wedge(P\to R)\wedge(Q\to S) \Rightarrow S\vee R$

证明：

1. $P\vee Q$ 前提引入
2. $\neg P\to Q$ 1 置换
3. $Q\to S$ 前提引入
4. $\neg P\to S$ 2、3 三段论
5. $\neg S\to P$ 4置换
6. $P\to R$ 前提引入
7. $\neg S\to R$ 5、6三段论
8. $S\vee R$ 7置换

由该例可见，将$P\vee Q$置换成$\neg P\to Q$更便于推理

推理演算举例：

$$(\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow\neg(R\vee S))\wedge((Q\rightarrow P)\vee\neg R)\wedge R \Rightarrow (P\leftrightarrow Q)$$

1.	$(Q\rightarrow P)\vee\neg R$	**前提引入**
2.	$R\rightarrow(Q\rightarrow P)$	1**置换**
3.	R	**前提引入**
4.	$Q\rightarrow P$	2、3**分离**
5.	$\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow \neg(R\vee S)$	**前提引入**
6.	$(R\vee S)\rightarrow(P\rightarrow Q)$	5**置换**
7.	$R\vee S$	3 + **基本公式4**
8.	$P\rightarrow Q$	6、7**分离**
9.	$P\leftrightarrow Q$	4、8

(注：教材中的证明用了15个步骤，这里用一种更为简洁的方法)

推理演算举例：条件证明规则

例题6: $P\rightarrow(Q\rightarrow S), \neg R \vee P, Q \Rightarrow R\rightarrow S$

证明	(1) R	附加前提引入
	(2) $\neg R \vee P \ = R\rightarrow P$	前提引入
	(3) P	(1)(2)分离规则
	(4) $P\rightarrow(Q\rightarrow S)$	前提引入
	(5) $Q\rightarrow S$	(3)(4)分离规则
	(6) Q	前提引入
	(7) S	(5)(6)分离规则
	(8) $R\rightarrow S$	条件证明规则

例3：请根据下面事实，找出凶手：

1. 清洁工或者秘书谋害了经理。
2. 如果清洁工谋害了经理，则谋害不会发生在午夜前。
3. 如果秘书的证词是正确的，则谋害发生在午夜前。
4. 如果秘书的证词不正确，则午夜时屋里灯光未灭。
5. 如果清洁工富裕，则他不会谋害经理。
6. 经理有钱且清洁工不富裕。
7. 午夜时屋里灯灭了。

令 A:清洁工谋害了经理。 B:秘书谋害了经理。

C:谋害发生在午夜前。 D:秘书的证词是正确的.

E:午夜时屋里灯光灭了。H:清洁工富裕.

G:经理有钱.

命题符号为：

$A \vee B,\ A \rightarrow \neg C,\ D \rightarrow C,\ \neg D \rightarrow \neg E,\ H \rightarrow \neg A,\ G \wedge \neg H,\ E$

$\Rightarrow ?$

$A \vee B, A \to \neg C, B \to C, D \to C\ \neg D \to \neg E, H \to \neg A, G \wedge \neg H, E \Rightarrow ?$

解:

(1) E	前提引入
(2) $\neg D \to \neg E$	前提引入
(3) D	(2) 逆否之后和(1) 分离
(4) $D \to C$	前提引入
(5) C	(3)(4)分离
(6) $A \to \neg C$	前提引入
(7) $\neg A$	(6) 逆否之后和(5) 分离
(8) $A \vee B$ $(\neg A \to B)$	前提引入
(9) B	(7)(8)分离

结果是秘书谋害了经理

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn