第十四周作业

1. 设 A 是 n 阶复正规阵，且存在正整数 k，$A^k = O_{n\times n}$.

证明：$A = O_{n\times n}$

2. 设 $\omega = e^{i\frac{2\pi}{4}}$，$F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{pmatrix}$. 证明：

(1) $F_4^{-1} = \frac{1}{4}\overline{F_4}$；

(2) 令 $C_4 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}$（4阶循环阵），令

$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$，则

$$C_4 F_4 = F_4 \begin{pmatrix} p(1) & & & \\ & p(\omega) & & \\ & & p(\omega^2) & \\ & & & p(\omega^3) \end{pmatrix};$$

(3) C_4 是一个复正规阵.

3. 设 $V = \left\{ c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{i(2x)} + c_{-1} e^{i(-x)} + c_{-2} e^{i(-2x)} \,\middle|\, c_0, c_1, c_2, c_{-1}, c_{-2} \in \mathbb{C} \right\}$

$\forall f(x), g(x) \in V$，定义 $(f(x), g(x)) = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

则 V 是一个酉空间.

证明：(1) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}$ 是 V 的一组标准正交基.

(2) 设 $W=\{c_0+c_1e^{ix}+c_{-1}e^{i(-x)} \mid c_0,c_1,c_{-1}\in\mathbb{C}\}$

$\forall f(x)\in V$，求 $f(x)$ 在 W 上正交投影.

4. 设 $T:\mathbb{C}^3\longrightarrow\mathbb{C}^3$ 是一个复正规变换，且

$$T\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix},\qquad T\left[\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \exists a,b,c\in\mathbb{C}$$

证明：$a+b+c=0$.

5. 设 $A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ 0 & A_3\end{pmatrix}$ 是一个实正规阵，A_1 也是一个实正规阵.

问：A_3 是否实正规阵?

6. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & i & 1\\ -i & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$，求 Hermite 二次型 $f=x^HAx$ 的规范形.

7. 设 A,B 均是正定 Hermite 阵，证明：

(1) AB 的特征值均 >0.

(2) 若 $AB=BA$，则 AB 是正定 Hermite 阵.

8. 设 A 是 Hermite 阵. 证明：存在 $t>0$，$A+tI_n$ 是正定 Hermite 阵

9. 求 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 的奇异值分解和极分解.

提示：

2. (3) $C_4F_4 = F_4\begin{pmatrix} p(1) & & & \\ & p(w) & & \\ & & p(w^2) & \\ & & & p(w^3) \end{pmatrix}$，$U=\frac{1}{2}F_4$ 是酉阵

$\Rightarrow U^HC_4U$ 是对角阵.

4. 若 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$，则 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 T 的不同特征值的特征向量，故正交.

7.

(1) 设 $A = C^HC$，$(C^H)^{-1}ABC^H = CBC^H$ 是一个正定阵

8. 设 A 的特征值是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则 $A+tI_n$ 的特征值是 $\lambda_1+t,\cdots,\lambda_n+t$.