第 4 次计算题作业 – 答案

1、如果太阳成为 AGB 星时其半径和质量分别为目前的 200 倍和 0.7 倍，那么太阳成为 AGB 星时其表面的逃逸速度是多少？逃逸速度的变化如何影响 AGB 时期的太阳表面的质量损失？（16-37）

已知太阳表面的逃逸速度为$v_{esc,\odot} = 617\ \mathrm{kms^{-1}}$，由恒星表面的逃逸速度公式：

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$R = 200R_\odot, \qquad M = 0.7M_\odot$$

$$v_{esc,AGB} = \sqrt{\frac{0.7}{200}}\ v_{esc,\odot} = 36.5\ \mathrm{kms^{-1}}$$

逃逸速度大大降低将使 AGB 时期的太阳表面质量大量损失。

2、蟹状星云目前的半径为 1pc。如果它是公元 1054 年爆发的一颗 II 型超新星的遗迹，那么它的膨胀速率大约是多少？（假设它匀速膨胀是合理的。）(00-00)

$$R = 1\ \mathrm{pc} = 3.26\ \mathrm{ly} = 3.0857\times10^{16}\ \mathrm{m}, \qquad \tau = (2023-1054)\ \mathrm{years} = 3.058\times10^{10}\ \mathrm{s}$$

$$\text{径向膨胀速度} = \frac{1\ \mathrm{pc}}{3.058\times10^{10}\ \mathrm{s}} = \frac{3.0857\times10^{16}\ \mathrm{m}}{3.058\times10^{10}\ \mathrm{s}} = 1.009\times10^{6}\ \mathrm{ms^{-1}}$$

3、假设一颗白矮星的起始质量为 $0.6M_{Sun}$，它以每年$10^{-9}M_{Sun}$ 的吸积率从其伴星吸积气体。这颗白矮星要以 Ia 型超新星爆炸的话大约需要多少年？这个时长与太阳的主序寿命相比如何？（16-40）

当到达钱德拉塞卡极限~$1.4M_\odot$时就会以 Ia 超新星爆炸：

$$t = \frac{1.4M_\odot - 0.6M_\odot}{10^{-9}M_\odot/\mathrm{years}} = 8.0\times10^{8}\ \mathrm{years}$$

$$\frac{t}{\tau_{MS,\odot}} = \frac{8.0\times10^{8}\ \mathrm{years}}{1.0\times10^{10}\ \mathrm{years}} = 0.08$$

4、 对于银河系，20 倍太阳质量的主序恒星与平均质量为 0.5 倍太阳质量恒星的数量之比约为 1:50000。20 倍太阳质量恒星的光度是太阳的 10000 倍，而 0.5 倍太阳质量恒星的光度只是太阳的 0.08 倍。

(a) 一颗 20 倍太阳质量恒星的光度是 5 万颗 0.5 倍太阳质量恒星总光度的多少倍？

(b) 5 万颗 0.5 倍太阳质量恒星的总质量是一颗 20 倍太阳质量恒星质量的多少倍？

(c) 哪一类恒星（小质量或大质量）对银河系质量的贡献大？哪一类恒星（小质量或大质量）对银河系光度的贡献大？（17-39）

(a) 由题，$L_{20\odot} = 10000L_\odot$，$L_{0.5\odot} = 0.08L_\odot$

$$\therefore \frac{L_{20\odot}}{50000L_{0.5\odot}} = \frac{10000L_\odot}{50000\times0.08L_\odot} = 2.5$$

(b)

$$\frac{50000M_{0.5\odot}}{M_{20\odot}}=\frac{50000\times 0.5M_\odot}{20M_\odot}=1250$$

（c）可见小质量恒星对银河系质量的贡献比大质量恒星的多很多，而大质量对银河系的光度贡献较大。

5、造父变星的光度和光变周期之间的关系近似为 L=335P，其中光度 L 以太阳光度为单位，周期 P 以天为单位。造父变星 A 的周期是 5.4 天，视差为 0.0033 角秒。造父变星 B 看起来仅有造父变星 A 亮度的 1/1000，周期为 54 天。

（a）造父变星 B 的距离是多少（以 pc 为单位）？

（b）造父变星 B 的距离可以用视差法测定吗？对你的答案做出合理的解释。(17-42)

（a）$P_A=5.4\text{ days}, p_A=0.0033'', P_B=54\text{ days}, b_B=b_A/1000$

$$d_A=\frac{1}{0.0033''}=303.03\text{ pc}$$
$$\frac{L_B}{L_A}=\frac{335P_B}{335P_A}=\frac{54}{5.4}=10$$
$$L=4\pi d^2\times b$$
$$\therefore d_B=\sqrt{\frac{L_B}{L_A}\times\frac{b_A}{b_B}}d_A=\sqrt{10\times 1000}d_A=100\times 303.03\text{ pc}=30303\text{ pc}$$

（b）由上面的计算结果可知$p_B=0.000033''$，这显然要求观测仪器要有非常高的分辨能力，才能在地球绕太阳平均轨道半径后观测到该造父变星 B 的视差p_B。因此，可以说造父变星 B 无法用视差法测定。

6、太阳的主序寿命为 100 亿年。如果主序恒星的光度与恒星质量的四次方成正比，那么形成于 4 亿年前和 20 亿年前的星团中刚刚离开主序带的恒星的质量分别是多少（以太阳质量为单位）？ (00-00)

$$L\propto M^4,\qquad \tau_1=4\times 10^8\text{ years},\qquad \tau_2=2\times 10^9\text{ years},\qquad \tau_\odot=10^{10}\text{ years}$$
$$\frac{\tau}{\tau_\odot}=\frac{\tau}{10^{10}\text{ years}}=\frac{M/L}{M_\odot/L_\odot}=\frac{M/M^4}{M_\odot/M_\odot^4}=\frac{M_\odot^3}{M^3}$$
$$M_1=\left(\frac{\tau_\odot}{\tau_1}\right)^{1/3}M_\odot=\left(\frac{10^{10}}{4\times 10^8}\right)^{1/3}M_\odot=2.924M_\odot$$
$$M_2=\left(\frac{\tau_\odot}{\tau_2}\right)^{1/3}M_\odot=\left(\frac{10^{10}}{2\times 10^9}\right)^{1/3}M_\odot=1.710M_\odot$$

7、月球的质量为 $3.7\times 10^{-8}\,M_{\text{Sun}}$。假设月球突然坍缩为一个黑洞（实际不会发生）。

（a）月球黑洞的史瓦西半径是多少？

（b）月球坍缩为黑洞这个事件会影响月球对地球的潮汐吗？对你的答案做出解释。

（c）你认为这个事件会产生引力波吗？对你的答案做出解释。(18-42)

（a）$M_{\text{moon}}=7.349\times 10^{22}\text{ kg}$

$$R_{BH}=\frac{2GM_{\text{moon}}}{c^2}=1.090\times 10^{-4}\text{ m}=0.1090\text{ mm}$$

（b）不会，因为潮汐力和月球引力（即月球质量、距离）有关，质量不变则潮汐不变。

（c）会，因为任意的引力塌缩的事件都会产生引力波。

8、假设一个飞船环绕一个黑洞运行，飞船到黑洞的距离为 1AU，轨道周期为 0.5 年。要计算黑洞的质量，你需要做出哪些假设？在做出假设之后计算黑洞的质量。（18-45）

假设飞船轨道为圆形，则轨道速度$v = 2\pi d/P$为：

$$\frac{v}{v_{\mathrm{Earth}}} = \frac{d/(1\ \mathrm{AU})}{P/(1\ \mathrm{year})} = \frac{1}{0.5} = 2$$

假设黑洞附近遵循牛顿定律，并假设飞船不受该黑洞引力以外的影响（即假设了黑洞是史瓦西黑洞），则有：

$$v_{\mathrm{circ}} = \sqrt{\frac{GM}{d}}$$

$$\frac{M}{M_\odot} = \frac{dv^2}{d_{\mathrm{Earth}} v_{\mathrm{Earth}}^2} = (1)(2)^2 = 4\ M_\odot$$

黑洞应有表面逃逸速度大于或等于光速：

$$\sqrt{\frac{2GM_{BH}}{R}} \geq c$$

即该飞船的轨道半径应该大于或等于史瓦西半径：

$$R_g = \frac{2GM_{BH}}{c^2} = \frac{2 \times G \times 8 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}}{(3 \times 10^8\ \mathrm{ms^{-1}})^2} = 1.186 \times 10^4\ \mathrm{m}$$

显然这里$d \gg R_g$，验证了以上 3 个假设对黑洞质量的计算结果的合理性。

9、假设银河系中，恒星形成的平均速率为每年 10 颗。同时假设所有质量大于 8 倍太阳质量的恒星（银河系中大约有 0.36%的这类恒星）都会爆发成为超新星。请估计银河系中 II 型超新星产生的速率。（00-00）

$$v_{\mathrm{Star}} = 10/\mathrm{year}, \qquad n_{\mathrm{supernova}} = 0.36\%$$

银河系中形成的恒星有 0.0036 概率爆发为 IIa 超新星，产生速率为：

$$10/\mathrm{year} \times 0.0036 = 0.036/\mathrm{year}$$

10、　计算一个 2m 高的人站立在一个 1 倍太阳质量黑洞的视界面上时其头顶与脚底的加速度之差（称为潮汐加速度）。对 400 万倍（银河系中心黑洞）和 60 亿倍（第一张黑洞照片的黑洞）太阳质量的黑洞重复以上计算。将这些潮汐加速度与地球表面的引力加速度进行对比。（00-00）

$$M_1 = M_\odot, \qquad h = 2\ \mathrm{m}, \qquad M_2 = 4 \times 10^6 M_\odot, \qquad M_3 = 6 \times 10^9 M_\odot, \qquad g = 9.8\ \mathrm{ms^{-2}}$$

$$\text{黑洞中心到脚底的距离} = R_g = \frac{2GM}{c^2}$$

$$a_{tidal} = \frac{2GM(\Delta d)}{R_g^3} = \frac{2GMh}{\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^3} = \frac{hc^6}{4G^2M^2} = \frac{2\ \mathrm{m} \times (3 \times 10^8\ \mathrm{ms^{-1}})^6}{4G^2M_\odot^2(M/M_\odot)^2} = \frac{2.046 \times 10^{10}}{(M/M_\odot)^2}\ \mathrm{ms^{-2}}$$

$$a_{tidal,1} = \frac{2.046 \times 10^{10}}{1^2}\mathrm{ms^{-2}} = 2.046 \times 10^{10}\ \mathrm{ms^{-2}} \approx 2.0 \times 10^9 g$$

$$a_{tidal,2} = \frac{2.046 \times 10^{10}}{(4 \times 10^6)^2}\mathrm{ms^{-2}} = 1.279 \times 10^{-3}\ \mathrm{ms^{-2}} \approx 1.3 \times 10^{-4} g$$

$$a_{tidal,3} = \frac{1.023 \times 10^{10}}{(6 \times 10^9)^2} \text{ms}^{-2} = 5.683 \times 10^{-10} \text{ms}^{-2} \approx 5.8 \times 10^{-11} g$$