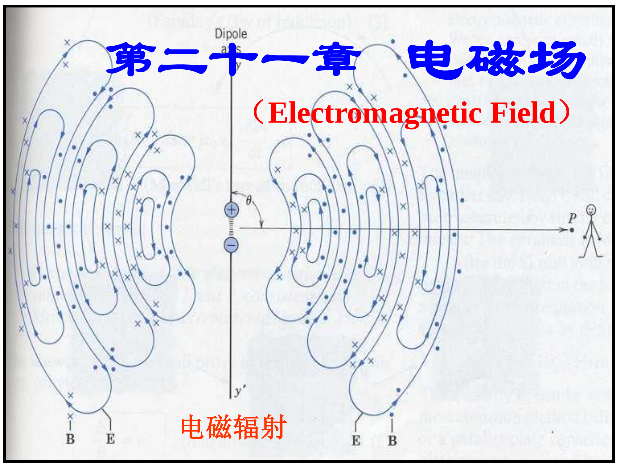
第二十一章 电磁场

（Electromagnetic Field）



电磁辐射

前 言

本章将全面介绍电磁场的基本规律——

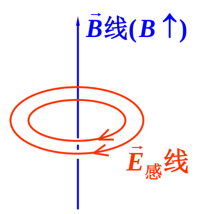
麦克斯韦电磁场方程组，并阐明电磁波的性质

和电磁场的物质性、统一性及相对性。

本章目录

§ 21.1 位移电流（displacement current）

感生电场总结：



•有旋电场

$$\oint_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$$

•无源场

$$\boxed{\oint_S \vec{E}_{感}\cdot d\vec{s} = 0}$$

与导体回路的材料无关

与该处有无导体回路无关。

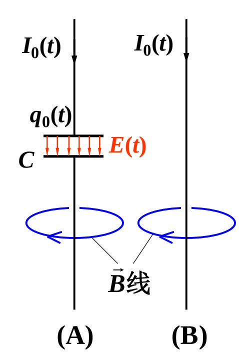
变化的磁场可以激发电场。

变化的电场是否也可以激发磁场呢？

物质世界对称的 美

图（A）、（B） 两种情况导线周围的磁场相同，说明电容器C中的变化电场也像电流那样能激发磁场。

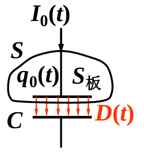
下面进行定量的分析：



麦克斯韦认为：

高斯定理也适用于变化电场

（这是一种假设性的推广）。



$$\left.\begin{array}{l}\oint_S \vec{D}(t)\cdot \mathrm{d}\vec{s} = q_0(t) \\ 对C：I_0 = \dfrac{\mathrm{d}q_0}{\mathrm{d}t}\end{array}\right\} \Rightarrow I_0 = \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{S_{板}} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

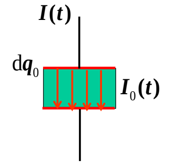
定义：位移电流 $I_d = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_S \vec{j}_d \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

位移电流密度 $\boxed{\vec{j}_d = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$

引入 I_d 后，在以上情况下有 $I_0 = I_d$ 。

7

在非稳恒情况下 $I_0 + I_d$ 是连续的。



8

在非稳恒情况下 $I_0 + I_d$ 是连续的。

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum I_{0内} \longrightarrow \oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum (I_0 + I_d)_{内}$$

（稳恒） （非稳恒）

即 $\boxed{\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S (\vec{j}_0 + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot \mathrm{d}\vec{s}}$ —全电流定律

$\vec{j}_0$ 和 $\vec{j}_d (= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})$ 可同时存在于同一处。

位移电流在产生磁场上与传导电流虽有相同的效果，但本质上是不同的。位移电流不产生焦耳热，也不产生化学效应（如电解）。

9

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \longrightarrow \vec{j}_d = \underbrace{\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{电场变化} + \underbrace{\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}_{微观上的电荷移动}$$

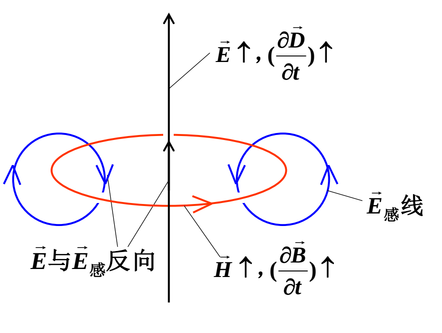
在空间没有传导电流的情况下，有：

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$$

类比：$\oint_L \vec{E}_{感}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$

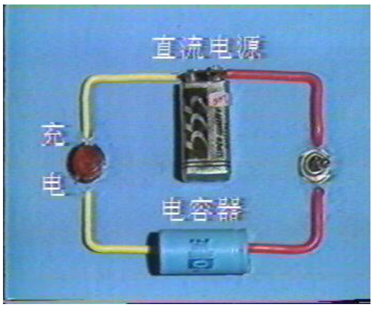
二者形式上是对称的。公式中差了一个负号

10



磁场的增加要以电场的削弱为代价。

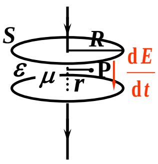
11



位移电流解说

12

[例] 一极板半径为R的平板电容器均匀充电，
电容器内部充满均匀介质，



已知：R，ε，μ 和 $\dfrac{dE}{dt}$ ，

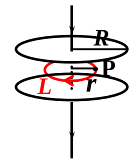
忽略边缘效应。

求：I_d 和 B_p ($r < R$)

解： 对称性分析 $I_d=\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{s} = \int_S \varepsilon \frac{dE}{dt}\, ds$

$$= \varepsilon \frac{dE}{dt}\pi R^2$$

过P点垂直轴线作一圆环回路L，



$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = H\cdot 2\pi r = \sum I_{d内}$$

全电流定律

$$= \pi r^2 \varepsilon \frac{dE}{dt}$$

$$\therefore \quad \boxed{H_P = \frac{\varepsilon r}{2}\frac{dE}{dt}}$$

$$\boxed{B_P = \mu H_P = \frac{\mu \varepsilon r}{2}\cdot\frac{dE}{dt}}$$

§ 21.2麦克斯韦（电磁场）方程组
（Maxwell equations）

麦克斯韦对已有规律作了假设性的推广，得到了普遍的电磁场方程组。它的正确性得到了实践的肯定。 这是麦克斯韦继提出了感生电场、位移电流概念之后，对电磁场规律研究的又一大贡献。

设空间既有自由电荷和传导电流，又有变化的电场和磁场，同时还有电介质和磁介质。

一. 麦克斯韦方程组的积分形式

$$\left.\begin{aligned}&\oint_L \vec{E}_{静}\cdot d\vec{l} = 0\\ &\oint_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}\end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}} \quad (1)$$

$$\oint_S \vec{D}_{静}\cdot d\vec{s} = \int_V \rho_0\, dV \rightarrow \boxed{\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_V \rho_0\, dV} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}&\oint_L \vec{H}_{静}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j}_0\cdot d\vec{s}\\ &\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{s}} \quad (3)$$

$$\oint_S \vec{B}_{静}\cdot d\vec{s} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0} \quad (4)$$

(1) — (4)是积分形式的麦克斯韦方程组(Maxwell equations)。方程组形式上的不对称，是由于没有单独的磁荷，也没有相应于传导电流的“磁流”。

该方程组在宏观领域证明是完全正确的，但在微观领域并不完全适用。那里需要考虑量子效应，从而建立更为普遍的量子电动力学。

除(1) — (4)外还有洛仑兹力公式：

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}} \quad (5)$$

对各向同性介质还有如下三个补充关系：

$$\boxed{\left.\begin{aligned}&\vec{D} = \varepsilon\vec{E}\\ &\vec{B} = \mu\vec{H}\\ &\vec{j}_0 = \sigma\vec{E}\end{aligned}\right\}} \quad (6)$$

可以证明（自己证）：

$$\boxed{\oint_S \vec{j}_0\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho_0\, dV}$$

这正是电荷守恒定律的积分形式。

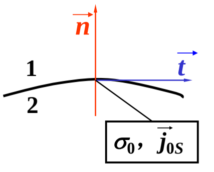
二. 麦克斯韦方程组的微分形式及界面关系

利用数学中的斯托克斯定理和高斯定理可证明

$$\left.\begin{aligned}
&\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} \rightarrow \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && (1)'\\
&\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_V \rho_0\, dV \rightarrow \nabla\cdot\vec{D} = \rho_0 && (2)'\\
&\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{s} \rightarrow \nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} && (3)'\\
&\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0 \rightarrow \nabla\cdot\vec{B} = 0 && (4)'
\end{aligned}\right\}$$

——麦克斯韦方程组的微分形式

在界面处，场不连续，微分关系不能用了，要代之以界面关系：



$$\begin{cases}
E_{1t} = E_{2t} & (1)''\\
D_{1n} - D_{2n} = \sigma_0 & (2)''\\
H_{1t} - H_{2t} = (\vec{j}_{0S}\times\vec{e}_n)\cdot\vec{e}_t & (3)''\\
B_{1n} = B_{2n} & (4)''
\end{cases}$$

(1)′—(4)′和(1)″—(4)″ 构成了完备的方程组，在一定初始条件和边界条件下，就可以求解电磁场了。

§ 21.3 电磁波（electromagnetic wave）

一. 电磁波的波动方程

麦克斯韦1865年预言了电磁波，1886年赫兹（Hertz） 用实验证实了电磁波的存在。

设在均匀无限大媒质中，$\rho_0 = 0$，$\vec{j}_0 = 0$，再考虑到 $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$、$\vec{B} = \mu\vec{H}$，由麦克斯韦方程组有：

$$\begin{cases}
\nabla\times\vec{E} = -\mu\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} & (1)\\
\nabla\cdot\vec{E} = 0 & (2)\\
\nabla\times\vec{H} = \varepsilon\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (3)\\
\nabla\cdot\vec{H} = 0 & (4)
\end{cases}$$

$\vec{E}$、$\vec{H}$ 的规律 极对称

麦克斯韦方程组背后的数学(图片来源: fotopedia.com)

有诗曰：

玉肩生香　秀色可餐

大道至简　天机可参

电有点源　磁无单极

电动生磁　磁动生电

（该诗文引自网络）

由(1)、(2)、(3)、(4)可得到电磁波的方程：

$$\begin{cases}
\nabla^2\vec{E} = \varepsilon\mu\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} & (A)\\
\nabla^2\vec{H} = \varepsilon\mu\dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} & (B)
\end{cases}$$

* [证(A): $\dfrac{\partial}{\partial t}(3) \rightarrow \nabla\times(\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}) = \varepsilon\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ (C)

由(1)和(C) → $-\dfrac{1}{\mu}\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = \varepsilon\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

由矢量微分公式 $\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}$

和(4)，则(C)成为：$\nabla^2\vec{E} = \varepsilon\mu\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$，得证。]

设： $\vec{E}=\vec{E}(x,t)$、$\vec{H}=\vec{H}(x,t)$

由(A)、(B)可得到 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的一维波动方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}=\dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} & (5) \\ \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2}=\dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} & (6) \end{cases}$$

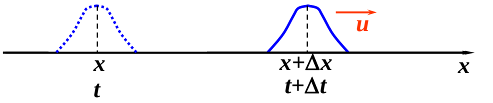
其中 $\boxed{u=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}$ （波速） (7)

波动方程(5)、(6)的一般解的函数形式为：

$$\begin{cases} \vec{E}(x,\ t)=\vec{E}_1(t-\dfrac{x}{u})+\vec{E}_2(t+\dfrac{x}{u}) & (8) \\ \vec{H}(x,\ t)=\vec{H}_1(t-\dfrac{x}{u})+\vec{H}_2(t+\dfrac{x}{u}) & (9) \end{cases}$$

(8)、(9)分别代入(5)、(6)就可证明满足方程。

(8)、(9)中的 $\vec{E}$、$\vec{H}$ 具有传播的性质：



以（ $t-x/u$）为变量的是沿$+x$方向传播的波，

以（ $t+x/u$）为变量的是沿$-x$方向传播的波。

例如对 $\vec{E}_1(t-\dfrac{x}{u})$， 令 $u=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ 则有：

$$\vec{E}_1(x+\Delta x,\ t+\Delta t)=\vec{E}_1(t+\Delta t-\frac{x+\Delta x}{u})$$

$$=\vec{E}_1(t+\Delta t-\frac{x}{u}-\Delta t)\quad=\vec{E}_1(t-\frac{x}{u})=\vec{E}_1(x,\ t)$$

即t时刻在 x 处的 $\vec{E}_1$，经过时间间隔 Δt 后，以速度 u 沿 x 方向传到了 $x+\Delta x$ 的位置。

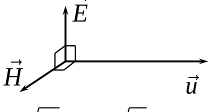
沿 x 方向传播的平面简谐波的方程为：

$$\begin{cases} \vec{E}(x,\ t)=\vec{E}_0\cos\omega(t-\dfrac{x}{u}) \\ \vec{H}(x,\ t)=\vec{H}_0\cos\omega(t-\dfrac{x}{u}) \end{cases}$$

二. 电磁波的性质

1. $\vec{E}\perp\vec{H}$

2. $\vec{E}\times\vec{H}\,//\,\vec{u}$ —波传播方向



即电磁波是横波

（transverse wave）

3. $\sqrt{\mu}H=\sqrt{\varepsilon}E$

4. 波速：$u=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}=\dfrac{c}{n}$

n为介质的折射率，$n=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}\approx\sqrt{\varepsilon_r}$（非铁磁质）

三. 电磁波的能量和动量

1.能量密度（energy density）

电磁场能量密度： $w=w_e+w_m$

对各向同性介质： $w=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2+\dfrac{1}{2}\mu H^2$

对电磁波： $H=\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}E$，

$$w_m=\frac{1}{2}\mu H^2=\frac{1}{2}\mu\cdot\frac{\varepsilon}{\mu}E^2=w_e$$

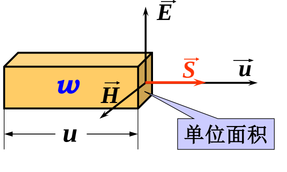
$$\therefore\quad w=2w_e=\varepsilon E^2=\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H\cdot E=\frac{EH}{u}$$

2. 能流密度（energy flow density）

能流密度S：单位时间内，通过垂直波传播方向的单位面积的能量。

能流密度矢量：

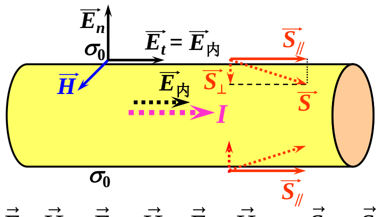
$$\vec{S}=S\cdot\vec{e}_u=wu\cdot\vec{e}_u=EH\cdot\vec{e}_u=\vec{E}\times\vec{H}$$



也叫坡印廷矢量

（Poynting vector）

在输电线上电磁能量是沿导线由电磁场传输的：



$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \vec{E}_n\times\vec{H} + \vec{E}_t\times\vec{H} \quad = \vec{S}_{//} + \vec{S}_\perp$$

$\vec{S}_{//} = \vec{E}_n\times\vec{H}$ 沿导线由电源传向负载；

$\vec{S}_\perp = \vec{E}_t\times\vec{H}$ 沿导线径向由外向内传播，以补偿导线上的焦耳热损耗。

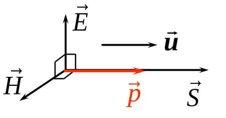
31

3. 动量密度 （momentum density）

电磁波的质量密度 $m = \dfrac{w}{c^2} = \dfrac{EH}{c^2 u}$

电磁波的动量密度 $\vec{p} = m\vec{u}$

$$= \frac{1}{c^2}\vec{E}\times\vec{H}$$



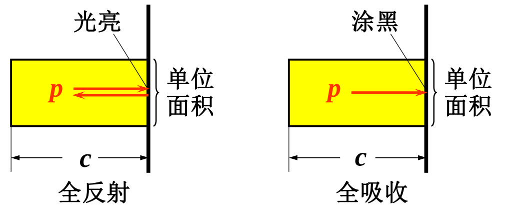
$$= \frac{\vec{S}}{c^2}$$

$$p = \frac{EH}{c^2}$$

32

辐射压强（光压）p_r

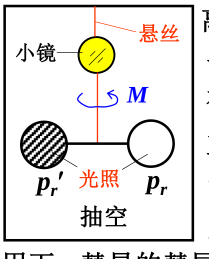
设真空中电磁波⊥入射：



$p_r = 2p\cdot c = 2\dfrac{EH}{c}$ $\qquad$ $p_r' = p\cdot c = \dfrac{EH}{c}$

33

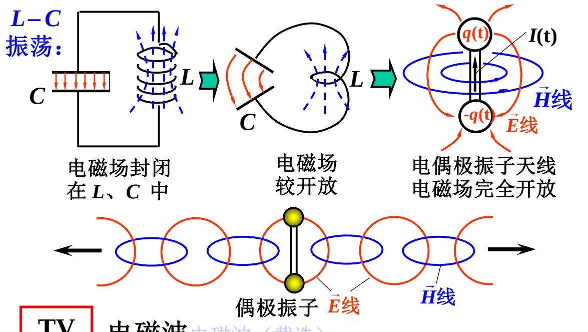
1899年列别捷夫首次测定了光压。



离100W灯泡1m，$p_r \sim 10^{-5}$ N/m^2 一般很难观察到光压。但光压在极大和极小的尺度上却起到重要的作用。如：恒星光压与引力相平衡，使恒星保持一定的体积；在太阳辐射压的作用下，彗星的彗尾总是向背离阳光的方向伸展；光子与自由电子碰撞产生的康普顿效应也表明，电磁波确实存在动量。

34

§ 21.4 电磁辐射(electromagnetic radiation)

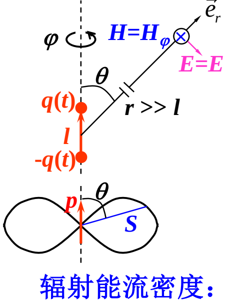


TV 电磁波 电磁波（截选）.mpg

演示 电磁波的辐射和接收

35

在开放的空间中，电磁场的变化和相互激发可以传播开去，形成脱离开场源的电磁辐射。



解麦克斯韦方程，在辐射区（$r>>l$，$r>>\lambda$）有：

$$E = E_\theta = \frac{\ddot{p}\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \propto \frac{1}{r},$$

$$\ddot{p} = \frac{d^2 p}{dt^2}$$

$$H = H_\varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_\theta$$

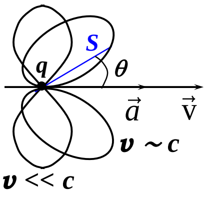
辐射能流密度： $S = EH = \dfrac{(\ddot{p})^2\sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2} \propto \dfrac{1}{r^2}$

36

电荷振动造成 p 的变化：$\ddot{p}=q\dfrac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2}=qa$

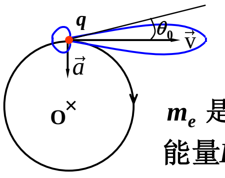
这说明电荷加速运动就会辐射电磁场。

▲在直线加速器中 $\vec{a}\,//\,\vec{v}$， 能流密度 S 的分布如图示：



带电粒子速度 υ 越高，能量辐射越向前倾。

▲在环形加速器中 $\vec{a}\perp\vec{v}$，S的分布如图示。



计算表明，对电子有：

辐射角宽度 $\theta_0 \approx m_e c^2 / E$

m_e 是电子静质量，E是电子能量

能量E↑→ 辐射角宽度θ_0↓

BEPC： E = 2.8 GeV，$\theta_0 \sim 2\times10^{-4}$ rad；

有一种同步加速器专门产生这种辐射

— 同步辐射 （synchrotron radiation），

这是一种新型光源，强度极高、方向性好。

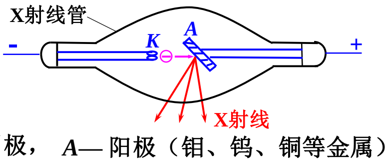
北京正负电子对撞机（BEPC）

（储存环周长240m，电子最大能量 2.8GeV）

▲韧致辐射（deceleration ridiation ）

带电粒子射入物质中要引起电离，损失能量，从而产生加速度。这样形成的辐射叫韧致辐射。

电子打入金属靶产生的韧致辐射就是X射线。



K — 阴极， A— 阳极（钼、钨、铜等金属）

A— K 间加几万伏高压，以加速阴极发射的热电子

X射线波长 λ： 10^{-1} — 10^2Å

*△ § 21.5 A–B效应

长直密绕载流螺线管外$\vec{B}=0$，但 $\vec{E}_{感}\neq 0$，从近距作用的观点看，必须承认螺线管外有磁场。也就是说， 除$\vec{B}$之外一定还有其他的物理量能描写磁场。

在矢量运算中有恒等式： $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})\equiv 0$

$\because \vec{B}$ 满足 $\nabla\cdot\vec{B}=0$， $\therefore$ 一定存在一个矢量函数 $\vec{A}$，

使得有关系式： $\boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}}$

$\vec{A}$ — 磁场的矢量势

由 $\vec{B}=\int_L \dfrac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{4\pi r^2}=\nabla\times\vec{A}$， 可得到 $\vec{A}=\int_L \dfrac{\mu_0 I}{4\pi r}\mathrm{d}\vec{l}$ 。

$$\oint_L \vec{E}_{感}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S(\nabla\times\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{s}$$

$$\underset{\text{斯托克斯定理}}{=}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_L \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint_L\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

由于L可以任选，所以上式必然给出如下关系：

$$\boxed{\vec{E}_{感}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

理论计算给出，在长直密绕载流螺线管外虽 $\vec{B}=0$，但是却有$\vec{A}\neq 0$。这说明长直密绕载流螺线管外存在着磁场的作用。也说明 $\vec{A}$ 有其实际的物理意义。现代的实验也证实了这一点。同样，电场中的电势 φ 也具有实际的物理意义。

φ 和 $\vec{A}$都有直接的物理效应，称为A–B效应。A–B效应在量子理论中有着重要的意义。在量子电动力学的普遍理论中，标量势φ和矢量势 $\vec{A}$ 是较电场强度 $\vec{E}$ 和磁感强度 $\vec{B}$ 更基本的物理量。

43

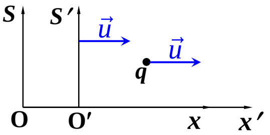
*§ 21.6 电场和磁场的相对性

电场和磁场也有相对性。

例如：

S'中只有静电场，

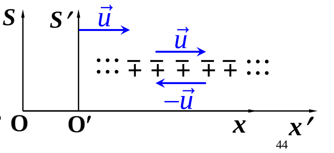
S 中电场磁场皆有。



再如：

S 中只有磁场，

S'中电场磁场皆有。



44

一. 基本依据

1. 电量的相对论不变性。

2. 电场强度定义： $\boxed{\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q_0}}$ （q_0 静止）

电场力 $\boxed{\vec{F}=q\vec{E}}$ （q 可以运动）

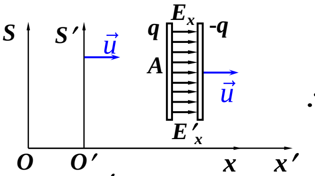
3. 高斯定理（律）： $\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}}$

（q可以运动，$\vec{E}$ 可以随时间变化）

二. 电场的相对论变换

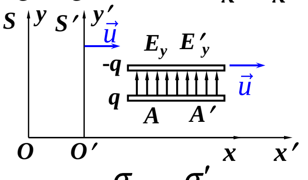
只由一个特例来分析：

45



$\because\ \sigma=\dfrac{q}{A}=\sigma'$

$\therefore\ E_x \underset{高}{=} \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}=\dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}=E'_x$



$\because\ q=q'$

$A=A'\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}=\dfrac{A'}{\gamma}$

$\therefore\ \sigma=\dfrac{q}{A}=\dfrac{q'}{A'/\gamma}=\gamma\sigma'$

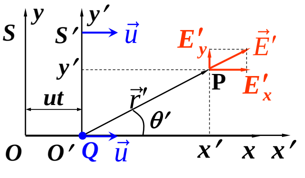
$\therefore\ E_y=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}=\gamma\dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}=\gamma E'_y$，同理 $E_z=\gamma E'_z$

46

普遍的 $\vec{E}'$（静止电荷的场强）和 $\vec{E}$（运动电荷的场强）的变换关系也是：

$$\boxed{\begin{aligned}E_x&=E'_x\\E_y&=\gamma E'_y\\E_z&=\gamma E'_z\end{aligned}}\qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

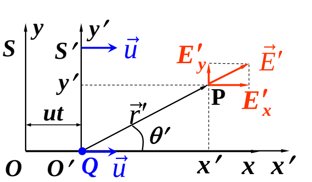
三. 匀速运动点电荷的电场



S'中静电场强：

$$\vec{E}'=\frac{Q\cdot\vec{e}_{r'}}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}$$

47



$$\vec{E}'=\frac{Q\cdot\vec{e}_{r'}}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}$$

设场点P在 $x'o'y'$ 平面内($z'=0$)，则在

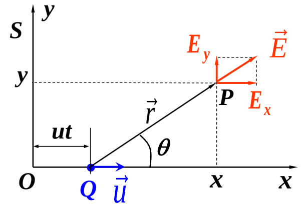
$$S系中：\left.\begin{aligned}E_x&=E'_x=\frac{Q\,x'}{4\pi\varepsilon_0(x'^2+y'^2)^{3/2}}\\E_y&=\gamma E'_y=\frac{\gamma\,Q\,y'}{4\pi\varepsilon_0(x'^2+y'^2)^{3/2}}\end{aligned}\right\}\quad(A)$$

$$洛仑兹变换\quad\left.\begin{aligned}x'&=\gamma(x-ut)\\y'&=y\end{aligned}\right\}\quad(B)$$

48

(B)→(A) 得：

$$\vec{E}=\frac{1-\frac{u^2}{c^2}}{(1-\frac{u^2}{c^2}\sin^2\theta)^{3/2}}\cdot\frac{Q\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overset{令}{=}K(\frac{u}{c},\theta)\cdot\frac{Q\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



$\sin\theta=\frac{y}{r}$，

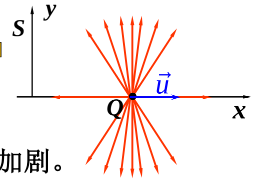
在 u，r 一定时，

$\theta\downarrow\rightarrow K(\frac{u}{c},\theta)\downarrow\rightarrow E\downarrow$

Q不变，由高斯定理知，$\vec{E}$线的总条数不变，

$\because\theta\downarrow\rightarrow K(\frac{u}{c},\theta)\downarrow\rightarrow E\downarrow$

$\therefore\vec{E}$ 线向横向集中。



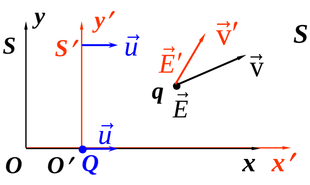
$u\uparrow\rightarrow\vec{E}$ 线向横向集中加剧。

$\frac{u}{c}\rightarrow 0$时，$K(\frac{u}{c},\ \theta)\rightarrow 1$，$\vec{E}\rightarrow\frac{Q\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

（静电场）

四. 磁场的引入、匀速运动点电荷的磁场

由运动电荷的电场可进一步讨论运动电荷之间的作用，从而引入磁场的概念。



S'：Q 静止→静电场$\vec{E}'$

q速度 $\vec{v}'$，只受电场力

$$\vec{F}'=q\vec{E}' \qquad (1)$$

S：q速度 $\vec{v}$，Q 速度 $\vec{u}$，q 受作用力 $\vec{F}=?$

由《力学》公式，有：

$$\left.\begin{aligned}F_x&=\frac{F_x'+\frac{u}{c^2}\vec{F}'\cdot\vec{v}'}{1+\frac{u}{c^2}v_x'}\\F_y&=\frac{F_y'}{\gamma(1+\frac{u}{c^2}v_x')}\\F_z&=\frac{F_z'}{\gamma(1+\frac{u}{c^2}v_x')}\end{aligned}\right\}\ (2)$$

由洛仑兹速度变换，有：

$$\left.\begin{aligned}v_x'&=\frac{v_x-u}{1-\frac{uv_x}{c^2}}\\v_y'&=\frac{v_y}{\gamma(1-\frac{u}{c^2}v_x)}\\v_z'&=\frac{v_z}{\gamma(1-\frac{u}{c^2}v_x)}\end{aligned}\right\}\ (3)$$

电场变换关系：
$$\left.\begin{aligned}E_x'&=E_x\\E_y'&=E_y/\gamma\\E_z'&=E_z/\gamma\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

将(1)、(3)、(4)式代入(2)式，经整理得：

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times(\frac{\vec{u}}{c^2}\times\vec{E})$$

令 $\boxed{\vec{B}=\frac{\vec{u}}{c^2}\times\vec{E}}$ 称 $\vec{B}$ 为磁感强度

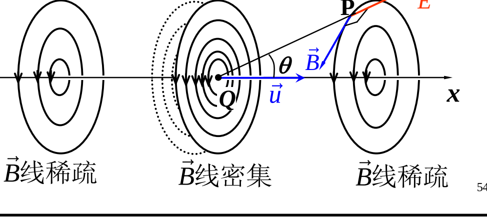
则 $\boxed{\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}}$ —— 洛仑兹力公式

∴ 匀速运动点电荷的 $\vec{B}$ 与 $\vec{E}$ 的关系式为：

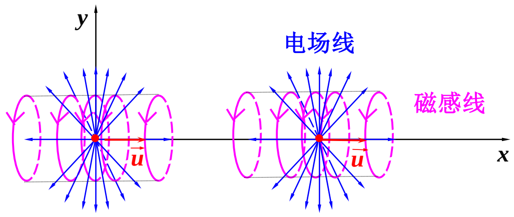
$$\vec{B}=\frac{\vec{u}}{c^2}\times\vec{E}=\frac{1-\frac{u^2}{c^2}}{(1-\frac{u^2}{c^2}\sin^2\theta)^{3/2}}\cdot\frac{Q\vec{u}\times\vec{e}_r}{c^2\cdot4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$=K(\frac{u}{c},\ \theta)\frac{Q\vec{u}\times\vec{e}_r}{4\pi c^2\varepsilon_0 r^2}$$

$\vec{B}$线分布：



高速运动点电荷的$\vec{E}$、$\vec{B}$ 相当于一个随电荷一起运动的电磁脉冲。

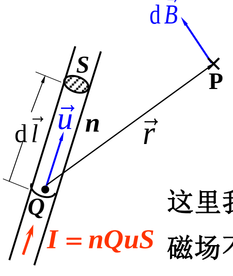


当 $u << c$ 时： $\vec{B} = \dfrac{Q\vec{u}\times\vec{e}_r}{4\pi c^2\varepsilon_0 r^2}$

引入常量 $\mu_0 = \dfrac{1}{c^2\varepsilon_0}$， 即 $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$，

则有 $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 Q\vec{u}\times\vec{e}_r}{4\pi r^2}$

把一段导线线元 $\mathrm{d}\vec{l}$ 中运动电荷产生的磁场相叠加，就得到毕 — 萨定律：



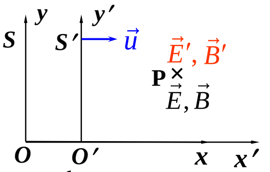
$$\mathrm{d}\vec{B} = nS\,\mathrm{d}l\cdot\frac{\mu_0 Q\vec{u}\times\vec{e}_r}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{4\pi r^2}$$

—— 毕 — 萨定律

这里我们看到，在一定的条件下，磁场不过是电场的相对论效应。

有关磁的规律，如 $\vec{B}$、$\vec{F}_m\ldots$ 都可由电场相应量的相对论变换给出。

五. 电磁场的相对论变换



S'： $\vec{E}'$，$\vec{B}'$
S： $\vec{E}$，$\vec{B}$ } 在同一点P

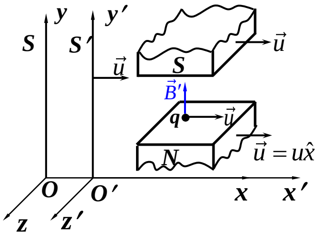
由相对论变换可以得到：

$$\begin{cases} E_x = E'_x \\ E_y = \gamma(E'_y + uB'_z) \\ E_z = \gamma(E'_z - uB'_y) \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x = B'_x \\ B_y = \gamma(B'_y - E'_z u/c^2) \\ B_z = \gamma(B'_z + E'_y u/c^2) \end{cases}$$

电磁场是个统一的整体，它有 6 个分量，它们与参考系的选择有关，从而具有相对性。

电场、磁场在运动方向上的分量相等，在垂直于运动的方向上的分量互相不能分开。

最后由电磁场变换说明第十七章中提到的一个问题：“洛仑兹力公式中的速度应是电荷相对观测者的速度”只有承认这一点，才能给出图示电荷q在两个参考系中所受电磁力的合力皆为零的结果，从而不出现矛盾。



S'：q 静止，$\vec{B}' = B'\hat{y}$，

$\vec{v}' = 0 \rightarrow \vec{F}'_m = 0$

$\vec{E}' = 0 \rightarrow \vec{F}'_e = 0$

$\therefore\ \vec{F}' = \vec{F}'_m + \vec{F}'_e = 0$

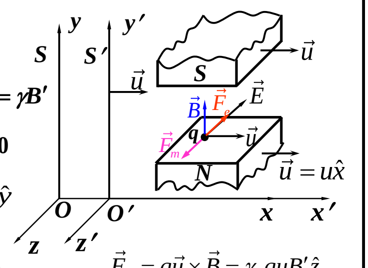
S：q 运动，$\vec{v} = \vec{u}$，

$$\begin{cases} B_x = B'_x = 0 \\ B_y = \gamma(B'_y - \dfrac{u}{c^2}E'_z) = \gamma B' \\ B_z = \gamma(B'_z + \dfrac{u}{c^2}E'_y) = 0 \end{cases}$$

外磁场：$\vec{B} = \gamma B'\hat{y}$

$$\begin{cases} E_x = E'_x = 0 \\ E_y = \gamma(E'_y + uB'_z) = 0 \\ E_z = \gamma(E'_z - uB'_y) = -\gamma uB' \end{cases}$$

外电场：$\vec{E} = -\gamma uB'\hat{z}$



$\vec{F}_m = q\vec{u}\times\vec{B} = \gamma\ quB'\hat{z}$

$\vec{F}_e = q\vec{E} = -\gamma\ quB'\hat{z} = -\vec{F}_m$

$\therefore\ \vec{F} = \vec{F}_m + \vec{F}_e = 0$

电磁学全部结束