第九周作业

1. 求微分方程组 $\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)$ 的一般解：

(1) $A=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 4\\ -12 & 3 & 8\\ -6 & 1 & 5\end{pmatrix}$；　　(2) $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ -2 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

2. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，证明：

(1) $\cos A=\frac{1}{2}(e^{iA}+e^{-iA})$， $\sin A=\frac{1}{2i}(e^{iA}-e^{-iA})$

(2) $\cos^2 A+\sin^2 A=I_n$.

（提示：$\cos A$，e^{iA}，e^{-iA} 按幂级数展开比较，

(2) 由 (1) 可得）

3. 计算 $\sin(e^{CI_n})$ 和 $\cos(e^{CI_n})$，其中 c 是非零常数.

（提示： $e^{CI_n}=e^{c}\cdot I_n$ ）

4. 在 $\mathbb{R}^2$ 中，$\forall \vec{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$，$\vec{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$ 定义二元函数

$$f(\vec{\alpha},\vec{\beta})=a_1b_1-a_1b_2-a_2b_1+2a_2b_2$$

判断 f 是否 $\mathbb{R}^2$ 上一个内积？

5. $\mathbb{C}^3$ 中取标准内积，设 $\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ i\end{pmatrix}$，$\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\ i\\ 1\end{pmatrix}$，求 $\vec{\beta}\in\mathbb{C}^3$

满足 $\vec{\beta}\perp\vec{\alpha}_1$，且 $\vec{\beta}$ 是 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 的线性组合，$|\vec{\beta}|=1$.

6. 设 V 是内积空间，$\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$. 证明:

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=2|\vec{\alpha}|^2+2|\vec{\beta}|^2.$$

7. 设 V 是 n 维内积空间, $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ 是一组基.
设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$，若 $(\vec{\alpha}, \vec{e}_i)=(\vec{\beta}, \vec{e}_i)$ $i=1, \cdots, n$
证明: $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

8. 设 $V=\mathbb{R}^n$, 取标准内积, $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ 是一组基.
$c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$，求证: 存在唯一的 $\vec{\alpha} \in V$, 使 $(\vec{\alpha}, \vec{e}_i)=c_i$ $i=1, \cdots, n$.

(提示: 设 $\vec{\alpha}=x_1 \vec{e}_1+\cdots+x_n \vec{e}_n$，$(\vec{\alpha}, \vec{e}_i)=c_i$ 将给出一个
线性方程组，证明系数矩阵可逆, $\vec{\alpha}$ 存在 $\Leftrightarrow$ 此方程组有解)