离散数学(1)
Discrete Mathematics

第十章 关系

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

第十章　关系

10.1 二元关系
10.2 关系矩阵和关系图
10.3 关系的逆、合成、（限制和象）
10.4 关系的性质
10.5 关系的闭包
10.6 等价关系和划分
10.7 相容关系和覆盖
10.8 偏序关系

复习：有序对

- 由两个元素x和y（允许$x=y$）按给定次序排列组成的二元组称为一个有序对或序偶，记作$<x, y>$，其中 x 是它的第一元素，y 是它的第二元素。
- 用集合的形式，有序对$<x, y>$定义为

$$< x, y > = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

- 有序对$<x, y>$具有以下性质：

1. 当$x \neq y$时，$<x, y> \neq <y, x>$。
2. $<x, y> = <u, v>$的充要条件是 $x = u$ 且 $y = v$。

复习：笛卡儿积(Cartesian product)

- 设A, B为集合，用A中元素为第一元素， B中元素为第二元素构成有序对。所有这样的有序对组成的集合称为A和B的笛卡儿积，记作$A\times B$。
  A和B的笛卡儿积的符号化表示为
  $A \times B = \{<x, y>|x \in A \wedge y \in B\}$
- $A=\{\varnothing\}$,
- $P(A)\times A = \{<\varnothing,\varnothing>, <\{\varnothing\},\varnothing>\}$

复习：笛卡尔积及其性质

- 不适合交换律 $A\times B\neq B\times A\quad(A\neq B, A\neq\emptyset, B\neq\emptyset)$
- 不适合结合律 $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)\quad(A\neq\emptyset, B\neq\emptyset)$
- 对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

- 若A或B中有一个为空集，则$A\times B$就是空集.

$$A\times\emptyset=\emptyset\times B=\emptyset$$

- 若$|A|=m, |B|=n,$则 $|A\times B|=mn$

单选题

设A，B，C，D是任意集合，判断下列命题是否正确？

❖ $A\times B=A\times C \Rightarrow B=C$

A 正确

B 不正确

提交

设置

复习：二元关系(Binary Relations)

10.1.1 二元关系（有序对的集合）

- 如果一个集合满足以下条件之一：

1. 集合非空，且它的元素都是有序对;
2. 集合是空集；

   则称该集合为一个二元关系，记作R。

- 二元关系也简称关系。

复习：二元关系(Binary Relations)

定义10.1.1　A到B的二元关系

- 设A, B为集合，$A \times B$ 的**任一子集**所定义的二元关系称为A到B 的二元关系。
- 特别当 $A = B$ 时，$A \times A$的**任一子集**称为A上的一个二元关系。
- 例4 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, $R_1=\{<0,2>\}$, $R_2=A\times B$, $R_3=\varnothing$, $R_4=\{<0,1>\}$.
- 那么 R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B 的二元关系,
- R_3和R_4同时也是 A上的二元关系.

复习：n元关系

定义10.1.2　n元关系（n元组的集合）

- 若 $n \in N$ 且 $n > 1$，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是n个集合，则

  $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

的任一子集称为从 A_1到 A_n上的一个n元关系。

复习：三个特殊的关系

恒等关系、全域关系和空关系

- 对任意的集合A,

  A上的**恒等关系**I_A定义为 $I_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$

  A上的**全域关系**(全关系)E_A定义为

  $$E_A = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \wedge y \in A\}$$

- 对任意的集合A,

  空集Φ是$A\times A$的子集，定义为A上的空关系。

- 例如, A={1,2}, 则
  - E_A={<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>}
  - I_A={<1,1>,<2,2>}

单选题

设置

思考：若 $|A| = n$

A 上共可定义多少个不同的二元关系？

A 2n

B n^2

C 2^n^2

D $2n^2$

提交

复习：定义域和值域(domain & range)

- 设R是A到B的二元关系

(1)R中所有有序对的第一元素构成的集合称为R的定义域，记作***dom*(R)**。形式化表示为：

$$dom(R)=\left\{x \,\middle|\, (\exists y)(\langle x, y\rangle \in R)\right\}$$

复习：定义域和值域(domain & range)

(2)R中所有有序对的第二元素构成的集合称为R的值域，记作***ran(R)***。形式化表示为：

$$ran(R) = \{ y \mid (\exists x)(\langle x, y \rangle \in R) \}$$

(3)R的定义域和值域的并集称为R的域***(field)***，记作***fld(R)***。形式化表示为：

$$fld(R) = dom(R) \cup ran(R)$$

复习：关系的逆、合成、限制和象

定义10.3.1　关系的逆、合成、限制和象

- 对X到Y的关系R，Y到Z的关系S，定义:

（1）R的**逆(inversion)**R^{-1}为Y到X的关系

$$R^{-1}=\{\langle x,y\rangle \mid \langle y,x\rangle\in R\}$$

- 例1　令A={1,2,3,4},

R={<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>}

R^{-1}={<2,1>, <3,2>, <4,1>, <2,2>}

- 显然有：设R是任意的关系, 则$(R^{-1})^{-1}=R$

10.3　关系的逆、合成、限制和象

(2)R与S的**合成(composite relation)** $S \circ R$（也称之为**关系的左复合**）为X到Z的关系

$$S \circ R = \{\langle x, y\rangle | (\exists z)(\langle x, z\rangle \in R \land \langle z, y\rangle \in S)\}$$

先R后S，先右后左

复习：关系的运算

优先顺序：

- 逆运算优先于其他运算
- 关系运算优先于集合运算
- 没有规定优先权的运算以括号决定运算顺序

复习：关系的运算

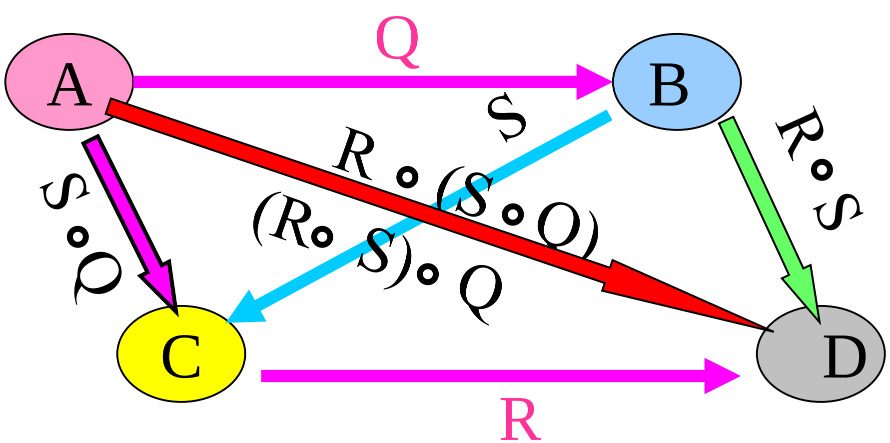
- 定理：设R，S，Q是任意的关系

  ①$(R\circ S)\circ Q = R\circ(S\circ Q)$

  ②$(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}$

令 $Q\subseteq A\times B$　　$S\subseteq B\times C$　　$R\subseteq C\times D$

可以形象表示:



关系的运算

- 定理:
  - $R\uparrow(A\cup B) = R\uparrow A\cup R\uparrow B$
  - $\mathrm{R}[\mathrm{A}\cup B] = R[A]\cup R[B]$
  - $R\uparrow(A\cap B) = R\uparrow A\cap R\uparrow B$
  - $\mathrm{R}[A\cap B]\subseteq R[A]\cap R[B]$

复习：SoR的关系矩阵

设A是有限集合，|A|=n。关系R和S都是A上的关系，R和S的关系矩阵M(R) = $[r_{ij}]$ 和 M(S) = $[s_{ij}]$都是n×n的方阵。于是R与S的合成 SoR 的关系矩阵

M(SoR)=$[W_{ij}]$ n×n

可以用下述的矩阵逻辑乘计算（类似于矩阵乘法）。记作M(SoR)=M(R)·M(S)

其中

$$w_{ij} = \mathop{\vee}_{k=1}^{n} (r_{ik} \wedge s_{kj})$$

复习：关系的矩阵运算是布尔运算

- 只涉及0和1。

  布尔加：0+0=0，1+1=1，0+1=1+0=1

  布尔乘：1*1=1，1*0=0*1=0*0=0

复习：关系的性质

- 自反性
  - $\forall a \in A$，有$\langle a,a\rangle \in R$，则R为A上的**自反关系**
- 反自反性
  - $\forall a \in A$，有$\langle a,a\rangle \notin R$，R为A上的**反自反关系**

- 例 $A=\{a,b,c\}$
  - $R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle c,a\rangle\}$
  - $R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$

单选题

设置

$$R_3=\{<a,a>,<b,c>\}$$

A R_3不是自反的，也不是反自反的。

B R_3是自反的，不是反自反的。

C R_3不是自反的，是反自反的。

D R_3是自反的，也是反自反的。

提交

复习：关系的性质

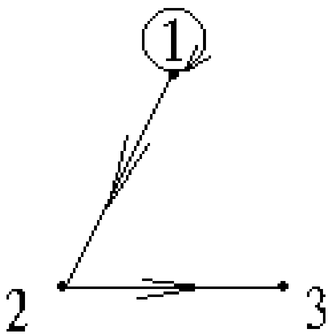
- 关系矩阵的特点？
  - 自反关系的关系矩阵的对角元素均为1
  - 反自反关系的关系矩阵的对角元素均为0
- 关系图的特点？
  - 自反关系的关系图中每个顶点都有环
  - 反自反关系的关系图中每个顶点都没有环
- 定理：R是A上的关系，则：
  - R是自反关系的充要条件是$I_A \subseteq R$
  - R是反自反关系的充要条件是$R \cap I_A = \Phi$

复习：对称关系R

- $\forall a,b \in A$,如果$<a,b> \in R$,则必有$<b,a> \in R$
- 例
  - $R_1 = \{<1,1>,<2,3>,<3,2>\}$
  - R_1是对称的
  - $R_2 = \{<1,1>,<3,3>\}$
  - R_2是对称的
  - $R_3 = \{<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,1>\}$
  - R_3不是对称的

多选题

- $R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>\}$



A 自反

B 反自反

C 反对称

D 传递

E 对称

提交

复习：对称关系

- 关系矩阵特点？
  - 对称关系的关系矩阵是对称矩阵
- 关系图特点？
  - 如果两个顶点之间有边，一定是一对方向相反的边（无单边）
- 定理： R在A上对称当且仅当$R=R^{-1}$

证明：必要性 $<x,y>\in R \Leftrightarrow <y,x>\in R \Leftrightarrow <x,y>\in R^{-1}$

充分性$<x,y>\in R \Leftrightarrow <y,x>\in R^{-1} \Leftrightarrow <y,x>\in R$

复习：反对称关系R

- $\forall a,b \in A$,如果$<a,b> \in R$且$<b,a> \in R$,则必有$a = b$
- $\forall a,b \in A$,如果$a \neq b$, $<a,b> \in R$,则必有$<b,a> \notin R$

- 例: $A = \{a,b,c\}$
  - $R = \{<a,a>,<b,b>\}$
  - $S = \{<a,b>,<a,c>\}$
  - $T = \{<a,c>,<b,a>,<a,b>\}$
  - R, S是反对称的, T不是反对称的

10.4 关系的性质

- 例: 实数集合上≤关系是反对称关系
  - ∀x,y∈实数集,如x≠y,且x≤y,则y≤x不成立
- 例：≥,<,>关系,均是反对称关系

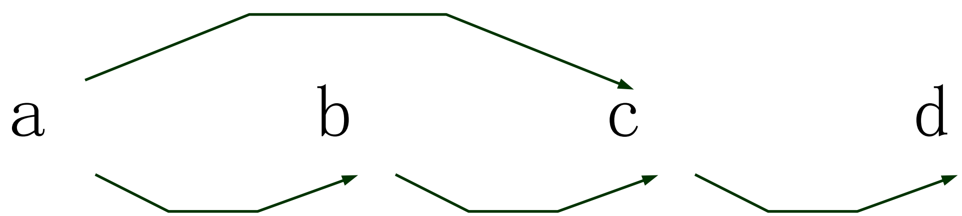
- 反对称关系矩阵和关系图特点？
  - 若r_{ij}=1，且i≠j，则r_{ji}=0
  - 如果两个顶点之间有边，一定是一条有向边（无双向边）
- 定理：R在A上反对称当且仅当R∩$R^{-1} \subseteq I_A$

复习：传递关系

- ∀a,b,c∈A,如果<a,b>∈R,<b,c>∈R, 必有<a,c>∈R
- 例
  - $R_1=\{<x,y>,<z,x>,<z,y>\}$
  - 是传递关系
  - $R_2=\{<a,b>,<c,d>\}$
  - 是传递关系
  - $R_3=\{<a,b>,<b,a>\}$
  - 不是传递关系

复习：传递关系

- 传递关系关系图特点？
  - 如果结点a能通过有向弧组成的有向路径通向结点x,则a必须有有向弧直接指向x,否则R就不是传递的
- 例：R={<a,b>,<b,c>,<c,d>,<a,c>}



- **定理**：R在A上传递当且仅当$R\circ R\subseteq R$

复习：关系的性质

自　反： $\forall x(x \in X \to xRx)$

反自反： $\forall x(x \in X \to x\not{R}x)$

对　称： $\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \to yRx)$

反对称： $\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \wedge yRx \to x = y)$

传　递：

$$\forall x \forall y \forall z(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \to xRz)$$

10.4 关系的性质

- 设A是集合，R_1和R_2是A上的关系
  - 若R_1，R_2是自反和对称的，则$R_1 \cup R_2$也是自反的和对称的
  - 若R_1和R_2是传递的，则$R_1 \cap R_2$也是传递的

10.4 关系的性质

- 设A是集合，R_1和R_2是A上的关系
  - 若R_1，R_2是自反的和对称的，则$R_1 \cup R_2$也是自反的和对称的

证明：R_1，R_2是自反的$\Rightarrow \mathrm{I}_A \subseteq R_1$，$\mathrm{I}_A \subseteq R_2$

所以$\mathrm{I}_A \subseteq R_1 \cup R_2$

R_1，R_2是对称的$\Rightarrow R_1 = R_1^{-1}$和$R_2 = R_2^{-1}$

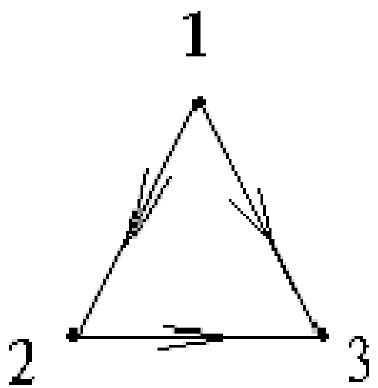
所以$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = R_1 \cup R_2$

R是自反关系的充要条件是$\mathrm{I}_A \subseteq R$

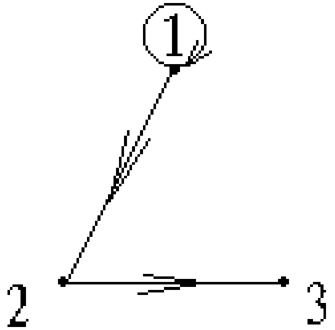
R在A上对称当且仅当$R=R^{-1}$

10.4 关系的性质

- 例： X={1,2,3}，判断关系的性质
- $R_1=\{<1,2>,<2,3>,<1,3>\}$
  - 反自反
  - 反对称
  - 可传递



- R2={<1,1>,<1,2>,<2,3>}
  - 反对称



	自反 Reflexive （10.4.1）	反自反 Irreflexive （10.4.1）	对称 Symmetric （10.4.2）	反对称 Antisymmetric （10.4.2 ）	传递 Transitive （10.4.3 ）
定义要点	$x \in A \to xRx$	$x \in A \to x \not{R} x$ $\langle x, x \rangle \notin R$	$xRy \to yRx$ $\langle x, y \rangle \in R \to$ $\langle y, x \rangle \in R$	$xRy \wedge x \neq y$ $\to y \not{R} x$ $xRy \wedge yRx$ $\to x = y$	$xRy \wedge yRz$ $\to xRz$ $\langle x, y \rangle \in R \wedge$ $\langle y, z \rangle \in R \to$ $\langle x, z \rangle \in R$
关系矩阵的特点	$r_{ii} = 1$;主对角元均为1	$r_{ii} = 0$;主对角元均为0	对称矩阵 $r_{ij} = r_{ji}$	若$r_{ij} = 1 \wedge i \neq j$ $\to r_{ji} = 0$	无直观特点或难以直接判断
关系图的特点	每个结点都有自圈	每个结点都没有自圈	若两个结点之间有边，一定是一对方向相反的边	若两个结点之间有边，一定是一条有向边	若从结点x_i到x_j有边，x_j到x_k有边，则从x_i到x_k一定有边

运算性质

- 已知 R, R_1, R_2是A上满足相应性质的关系,
- 问题：经过并，交，补，求逆，合成运算后是否还具有原来的性质？

运算 \ 性质	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

注： √表示经过左端的运算仍保持原来的性质， ×则表示原来的性质不再满足。

需按纵列理解，不能按横向。如不存在一个关系，它既是自反的又是反自反的。

$R_1 \circ R_2$: 反自反性

- A = {1,2,3}

  $R_1=\{<1,2>,<2,3>\}$

  $R_2=\{<2,1>,<3,2>\}$

  $R_1 \circ R_2=\{<2,2>,<3,3>\}$

传递性

$R_1 = \{<1,2>, <2,3>, <1,3>\}$

$R_2 = \{<3,1>, <1,2>, <3,2>\}$

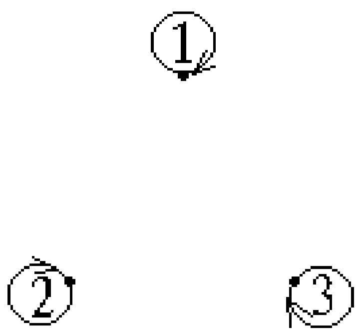
$R_1 \circ R_2 = \{<3,2>, <3,3>, <1,3>\}$

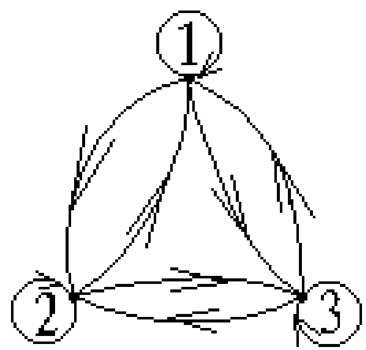
几个主要关系的性质

性质 / 关系	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
恒等关系 I_A					
全域关系 E_A					
A**上的空关系** Φ					
N**上的整除关系**					
包含关系 $\subseteq$					
真包含关系 $\subset$					

10.4 关系的性质

- $R_3=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$
- 自反，对称，反对称，可传递的

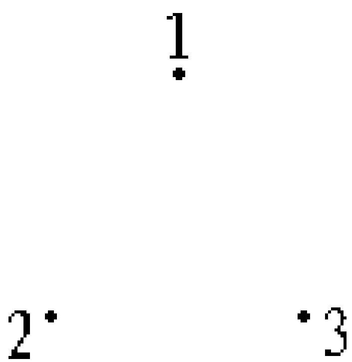




- $R_4= E_x$
- 自反，对称，可传递的

10.4 关系的性质

- $X=\{1,2,3\}$, $R_5=\varnothing$
  - 反自反的，对称的，反对称的，可传递的



- 若$X=\varnothing$，X上的空关系
  - 自反的，反自反的，对称的，反对称的，可传递的

第十章　关系

10.1 二元关系

10.2 关系矩阵和关系图

10.3 关系的逆、合成、(限制和象)

10.4 关系的性质

10.5 关系的闭包

10.6 等价关系和划分

10.7 相容关系和覆盖

10.8 偏序关系

10.5.1 多个关系的合成举例

例

$A = \{a, b, c, d\}$

$R^{\circ} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$

$R^1 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$

$R^2 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, d\rangle\}$

$R^3 = \{\langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle\} = R^2 \circ R$

$R4 = R^3 \circ R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, d\rangle\} = R^2$

……

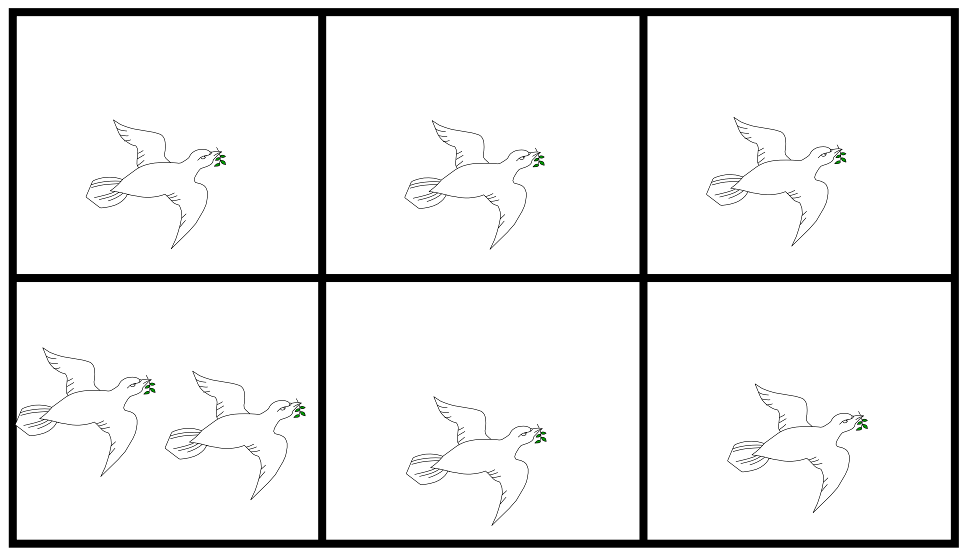
- 对于此例 $R^2 = R^4 = R^6 = \cdots, \quad R^3 = R^5 = R^7 = \cdots,$
  是否具有普遍规律？

10.5 关系的闭包(closure)

定理10.5.1

- 设A是有限集合，$|A| = n$，R是A上的关系，则存在自然数s和$t, s \neq t$使得 $R^s = R^t$。

鸽巢原理



10.5 关系的闭包(closure)

定理10.5.3 有限集合上关系的幂序列具有周期性

- 设A是有限集合，R是A上的关系，若存在自然数s和t（$s < t$），使得 $R^s = R^t$，则

(1) $R^{s+k} = R^{t+k}$，其中 $k \in N$；

(2) $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中 $k, i \in N$ $p = t - s$；

(3) 令$B = \{R^0, R^1 \dots R^{t-1}\}$，则$R$的各次幂均为$B$的元素，即对任意的 $q \in N$，有 $R^q \in B$

10.5 关系的闭包(closure)

定理10.5.3 有限集合上关系的幂序列具有周期性

- 例 $A = \{a, b, c, d\}$,

  $R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$

  $R^2 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, d\rangle\} = R^4$

- 对应 $s = 2,\ t = 4,$

  $R^{2+k} = R^{4+k}, R^{2+2k+i} = R^{2+i}$

  $B = \{R^0,\ R^1,\ R^2,\ R^3\},$

- R的幂中不相同的只有以上4种。

10.5 关系的闭包(closure)

定理10.5.3 有限集合上关系的幂序列具有周期性

- 设A是有限集合，R是A上的关系，若存在自然数s和t

  $(s < t)$，使得 $R^s = R^t$，则

(1) $R^{s+k} = R^{t+k}$，其中 $k \in N$；

证明：

$$R^{s+k} = R^s \cdot R^k$$
$$= R^t \cdot R^k$$
$$= R^{t+k}$$

有限集合上关系的幂序列具有周期性

- 设A是有限集合，R是A上的关系，若存在自然数s和t $(s < t)$，使得 $R^s = R^t$，则

(2) $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中 $k, i \in N$ $p = t - s$；

证明：数学归纳法。对k进行归纳：

$k = 0$: $R^{s+0+i} = R^{s+i}$

假设$k = n$时有$R^{s+np+i} = R^{s+i}$

则当$k = n + 1$时，

$$R^{s+(n+1)p+i} = R^{s+np+p+i} = R^{s+np+i} \cdot R^p$$
$$= R^{s+i} \cdot R^p = R^{s+(t-s)+i} = R^{t+i} = R^{s+i}$$

$R^m \circ R^n = R^{m+n}$

有限集合上关系的幂序列具有周期性

- 设A是有限集合，R是A上的关系，若存在自然数s和t $(s < t)$，使得 $R^s = R^t$，则

(3) 令$B = \{R^0, R^1 \dots R^{t-1}\}$，则$R$的各次幂均为$B$的元素，即对任意的 $q \in N$，有 $R^q \in B$

证什么？

$R^{s+k\,p+i} = R^{s+i}$

证明：$q < t$：则$R^q \in B$

$q \geq t$：则有$q > s$。一定存在$q = s + kp + i$，

其中$0 \leq i \leq p - 1$，$R^q = R^{s+\mathrm{k}p+i} = R^{s+i}$

$s + i \leq s + p - 1 = t - 1$，所以$R^q \in B$

$p = t - s$

定义10.5.2　闭包的定义

- 设R是非空集合A上的关系，如果A上有另一个关系R'满足：

（1）R'是自反的（对称的或传递的）；　**满足性质**

（2）$R \subseteq R'$；　**包含关系**

（3）对A上任何自反的（对称的或传递的）

关系R''，$R \subseteq R'' \rightarrow R' \subseteq R''$。　**最小的那个**

- 则称关系R'为R的自反（对称或传递）闭包　**闭包**
- 一般将R的自反闭包记作$r(R)$，

对称闭包记作$s(R)$，传递闭包记作$t(R)$。

JavaScript 数学 计算机 计算机科学 Scheme 计算理论 计算机语言 离散数学 闭包

离散数学中的闭包和计算机语言中的闭包有联系吗？

添加评论 分享

查看全部 5 个回答

8

朱兆龙

InsaneGuy、赵望野、winter 等人赞同

简单的说，这两个概念几乎没有联系（也许有，但是我没有发现）。我简单的解释一下两个闭包在两个领域中的含义：

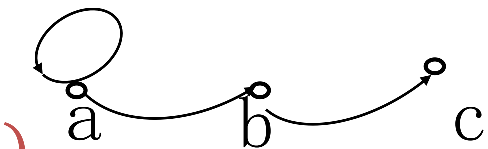
1，在离散数学（具体的说是抽象代数）里，如果对一个集合中的每个元素执行某个运算操作，得到的结果还是这个集合的元素，那么就说该集合在这个运算操作下构成闭包。例如，整数集合在减法运算下构成闭包；但是自然数在减法运算下不构成闭包。

2，在编程语言里，也称为词法闭包或者函数闭包，它表示的是一个函数，以及一个定义这个函数时的环境（环境里记录了非本地变量的值）。例如（横线是为了对齐）：

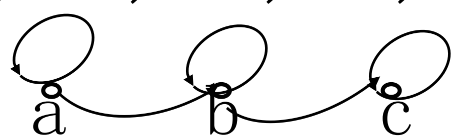
```
def counter():
```

10.5 关系的闭包(closure)

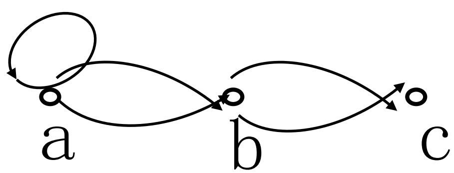
- 例$A = \{a, b, c\}$，$R = \{< a, a >, < a, b >, < b, c >\}$



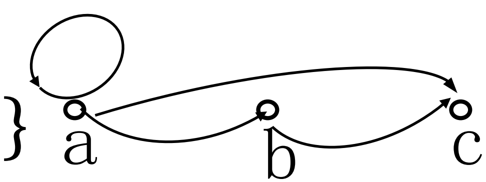
  - 自反闭包$r(R)$
  - $\{< a, a >, < a, b >, < b, c >, < b, b >, < c, c >\}$



  - 对称闭包$s(R)$
  - $\{< a, a >, < a, b >, < b, a >, < b, c >, < c, b >\}$



  - 传递闭包$t(R)$
  - $\{< a, a >, < a, b >, < b, c >, < a, c >\}$



10.5 关系的闭包(closure)

- 自反闭包$r(R)$，

  是具有自反性的R的“最小”超集合

- 对称闭包$s(R)$，

  是具有对称性的R的“最小”超集合

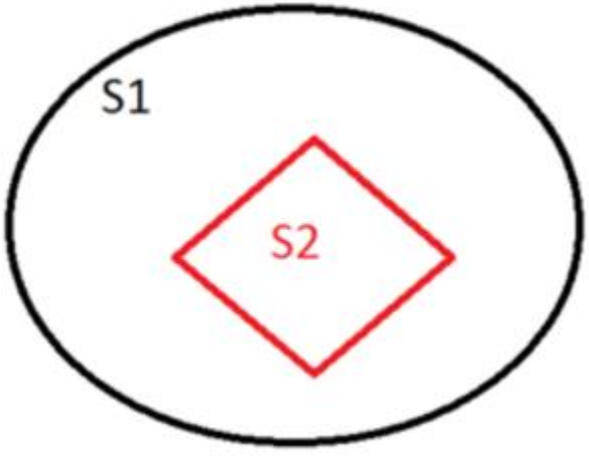
- 传递闭包$t(R)$，

  是具有传递性的R的“最小”超集合

若R已经是自反(对称、传递)的，那么R的自反(对称、传递)闭包就是它自身。

超集合(Superset)

- 定义：如果一个集合S2中的每一个元素都在集合S1中，且集合S1中可能包含S2中没有的元素，则集合S1就是S2的一个超集。S1是S2的超集，若S1中一定有S2中没有的元素，则S1是S2的真超集，S2是S1的真子集。



定理10.5.4 闭包的性质1

- 对非空集合A上的关系R，

（1）R是自反的 $\Leftrightarrow r(R)=R$；

（2）R是对称的 $\Leftrightarrow s(R)=R$；

（3）R是传递的 $\Leftrightarrow t(R)=R$。

定理10.5.5　闭包的性质2

- 对非空集合A上的关系$R1, R2$，若 $R_1 \subseteq R_2$ 则

（1）$r(R_1) \subseteq r(R_2)$

（2）$s(R_1) \subseteq s(R_2)$

（3）$t(R_1) \subseteq t(R_2)$

定理10.5.6　闭包的性质3

对非空集合A上的关系$R1, R2$，

（1）$r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$

（2）$s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$

（3）$t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

$$r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$$

$r(R_1)$和$r(R_2)$是A上的自反关系，所以

$r(R_1) \cup r(R_2)$是A上的自反关系

$R_1 \subseteq r(R_1)$， $R_2 \subseteq r(R_2)$， 所以$R_1 \cup R_2 \subseteq$

$r(R_1) \cup r(R_2)$

根据自反闭包的定义 $r(R_1 \cup R_2) \subseteq r(R_1) \cup r(R_2)$

$R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$, 有$r(R_1) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$

同理， $r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$

因此$r(R_1) \cup r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$

定理：R是非空集合A上的关系, 则$r(R) = R \cup I_A$

证明：$R \subseteq R \cup I_A$，$R \cup I_A$是自反的

- 设R''满足$R \subseteq R''$, R''是自反的

  $\forall < a, b > \in R \cup I_A$

- 则$< a, b > \in R$或$< a, b > \in I_A$
- 如$< a, b > \in R$, 由$R \subseteq R''$知$< a, b > \in R''$
- 如$< a, b > \in I_A$, 由R''的自反性知$< a, b > \in R''$
- 均有$< a, b > \in R''$

$\therefore R \cup I_A \subseteq R''$

对A上任何自反的关系R''，$R \subseteq R'' \rightarrow R' \subseteq R''$

$$r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$$

$$r(R_1 \cup R_2) = (R_1 \cup R_2) \cup I_A$$

$$= (R_1 \cup I_A) \cup (R_2 \cup I_A)$$

$$= r(R_1) \cup r(R_2)$$

$$r(R) = R \cup I_A$$

10.5 关系的闭包(closure)

例： 整数集 Z 上<（小于）关系的自反闭包是≤（小于等于）关系；

- ≠关系的自反闭包是全关系；
- 空关系的自反闭包是恒等关系；
- Z 上定义关系：$R=\{(x,y)|\ x+y=2\}$，则 R 的自反闭包 $r(R)=\{(x,y)|\ x+y=2\text{或}x=y\}$。

定理：$\boldsymbol{R}$是非空集合$\boldsymbol{A}$上的关系, 则$\boldsymbol{s(R) = R \cup R^{-1}}$

证明：$R \subseteq R \cup R^{-1}$满足闭包定义第2条

$\forall <a,b> \in R \cup R^{-1}$

$\Leftrightarrow <a,b> \in R \vee <a,b> \in R^{-1}$

$\Leftrightarrow <b,a> \in R^{-1} \vee <b,a> \in R$

$\Leftrightarrow <b,a> \in R \cup R^{-1}$

$\therefore R \cup R^{-1}$是对称的　　　　满足性质

定理：R是非空集合A上的关系, 则$s(R) = R \cup R^{-1}$

- 如$R \subseteq R''$, 且R''是对称的

  $\forall < a,b > \in R \cup R^{-1}$

  $< a,b > \in R$或$< a,b > \in R^{-1}$

  如$< a,b > \in R$, 由$R \subseteq R''$, 则$< a,b > \in R''$

  如$< a,b > \in R^{-1}$, 则$< b,a > \in R$, 则$< b,a > \in R''$

  因R''对称

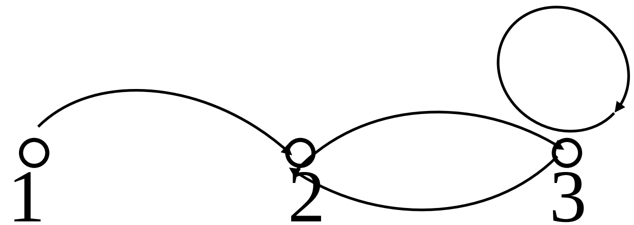
  $\therefore < a,b > \in R'', \therefore R \cup R^{-1} \subseteq R''$

- 满足定义第3条

$$s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$$

$$\begin{aligned}
s(R_1 \cup R_2) &= (R_1 \cup R_2) \cup (R_1 \cup R_2)^{-1} \\
&= (R_1 \cup R_2) \cup (R_1)^{-1} \cup (R_2)^{-1} \\
&= (R_1 \cup (R_1)^{-1}) \cup (R_2 \cup (R_2)^{-1}) \\
&= s(R_1) \cup s(R_2)
\end{aligned}$$

例：设$A=\{1,2,3\}$, A上的关系R如图, 求$r(R)$, $s(R)$



- 解:$R=\{<1,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>\}$
  $r(R)=\ R\cup I_A$
  $=\{<1,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>,<2,2>,$
  $<1,1>\}$
  $s(R)=\ R\cup R^{-1}$
  $=\{<1,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>,<2,1>\}$

定理：R是非空集合A上的关系，则
$t(R) = R^1 \cup R^2 \cup \ldots$

证明：首先证明$R^1 \cup R^2 \cup \ldots \subseteq t(R)$，使用归纳法。

$n = 1$，显然$R^1 = R \subseteq t(R)$

假设$R^k \subseteq t(R)$，对任意$< x, y >$有

$< x, y > \in R^{k+1} = R^k \circ R^1$

$\Leftrightarrow \exists t(< x, t > \in R \wedge < t, y > \in R^k)$

$\Rightarrow \exists t(< x, t > \in t(R) \wedge < t, y > \in t(R)) \Rightarrow < x, y > \in t(R)$

其次，$t(R) \subseteq R^1 \cup R^2 \cup \ldots$即证$R^1 \cup R^2 \cup \ldots$传递

推论：设A是非空有限集，R是集合A上的二元关系，

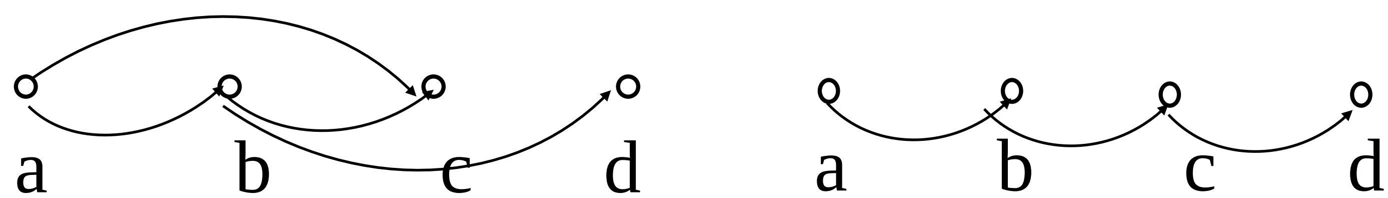
则存在正整数n，使得$t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$

实例

$A = \{a, b, c, d\}$

$R = \{<a, b>, <a, c>, <b, c>, <b, d>\}$

$S = \{<a, b>, <b, c>, <c, d>\}$, 求$t(R), t(S)$



解$: R^2 = \{<a, c>, <a, d>\}, R^3 = \varnothing$

$\therefore t(R) = R \cup \{<a, c>, <a, d>\}$

$S^2 = \{<a, c>, <b, d>\}, S^3 = \{<a, d>\}, S^4 = \varnothing$

$\therefore t(S) = S \cup \{<a, c>, <b, d>\} \cup \{<a, d>\}$

10.5 关系的闭包(closure)

给定关系R，$r(R)$，$s(R)$，$t(R)$的关系矩阵分别为M，M_r，M_s，M_t，那么：

- $M_r = M + I$
- $M_s = M + M^{\mathrm{T}}$
- $M_t = M + M^2 + M^3 + \cdots$

10.5 关系的闭包(closure)

关系图分别为G，G_r，G_s，G_t，那么：

- 考察G的每个顶点，如果没有环就加上一个环，最终得到的是G_r
- 考察G的每一条边，如果有一条从x_i到x_j的单向边，则在G中加一条x_j到x_i的反方向边，最终得到G_s
- 考察G的每个顶点x_i，找出从x_i出发的所有2步，3步，…，n步长的路径。设路径的终点为x_{j1}，x_{j2}，…，x_{jk}。如果没有从x_i到x_{jl}的边，就加上这条边，最终得到G_t

例子

$A=\{a,b,c\}$，$R=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$，求闭包$r(R),s(R),t(R)$

$$r(R)=R\cup\{<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$$

$$s(R)=R\cup\{<b,a>,<c,b>,<a,c>\}$$

$$t(R)=R\cup R^2\cup R^3$$

其中$R^2=\{<a,c>,<b,a>,<c,b>\}$

$$R^3=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$$

实例

- 设$A = \{a, b, c, d\}$上的关系 $R = \{< a, b >< b, a >, < b, c >, < c, d >, < d, b >\}$

(1) 写出$R, r(R), s(R), t(R)$ 的关系图。

(2) 计算$r(R), s(R), t(R)$。

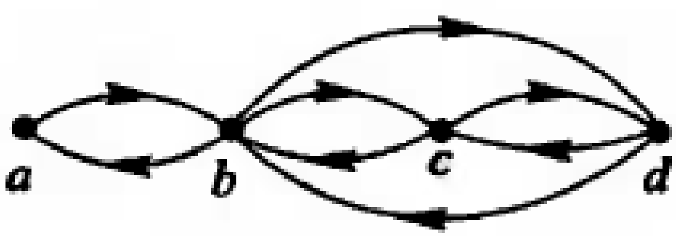
(3) 写出$R, r(R), s(R), t(R)$ 的关系矩阵。

实例

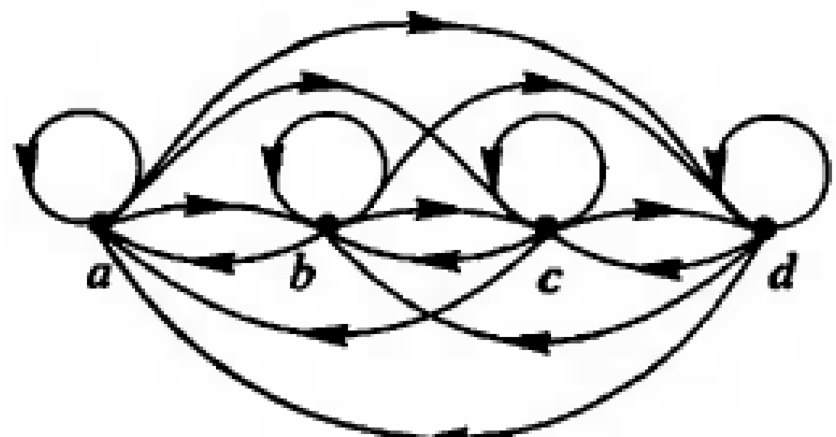
- 设关系$R, r(R), s(R), t(R)$，关系图如下图

R

$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$

10.5 关系的闭包(closure)

解 $R=\{<a,b><b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,b>\}$

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},\quad M_r=M+I=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$M_s=M+M^T=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix},\quad M_t=M+M^2+M^3+M^4=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

定理10.5.10　传递闭包的有限构造方法

- A为非空有限集合，$|A| = n$，R为A上的关系，则存在正整数$k \le n$，使得

$$t(R) = R^+ = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^k$$

传递闭包的求解

- 图论中一个非常重要的问题
  - 给定了一个城市的交通地图，可利用求传递闭包的方法获知任意两个地点之间是否有路相连通。
- 求传递闭包的方法
  - 直接利用关系矩阵相乘来求传递闭包
  - 在计算矩阵相乘的时候用分治方法降低时间复杂度
  - 利用基于动态规划的Warshall算法来求传递闭包

Warshall算法

计算有限集合上关系的传递闭包的一种有效算法

对Warshall算法的解说

- 设关系R的关系图为G，设图G的所有顶点为v1, v2, …, vn，则t(R)的关系图可用该方法得到：若G中任意两顶点vi和vj之间有一条路径且没有vi到vj的弧，则在图G中增加一条从vi到vj的弧，将这样改造后的图记为G’，则G’即为t(R)的关系图。G’的邻接矩阵A应满足：若图G中存在从vi到vj路径，即vi与vj连通，则B[i, j]=1，否则B[i, j]=0。
- 求t(R)的问题就变为求图G中每一对顶点间是否连通的问题。

对Warshall算法的解说

- 这样，求t(R)的问题就变为求图G中每一对顶点间是否连通的问题。
- 定义一个n阶方阵序列B(0),B(1),B(2),…,B(n)，每个方阵中的元素值只能取0或1。B(m)[i,j]=1表示存在从vi到vj且中间顶点序号不大于m的路径（m=1..n），B(m)[i,j]=0表示不存在这样的路径。而B(0)[i,j]=1表示存在从vi到vj的弧，B(0)[i,j]=0表示不存在从vi到vj的弧。
- 这样，B(n)[i,j]=1表示vi与vj连通，B(n)[i,j]=0表示vi与vj不连通。故B (n)即为t(R)的关系矩阵。

B(0)=M（M为R的关系矩阵）。

若B(0)[i,1]=1且B(0)[1,j]=1，或B(0)[i,j]=1，当且仅当存在从vi到vj且中间顶点序号不大于l的路径，此时应将B(1)[i,j]置为1，否则置为0。

一般地，若B(k-1)[i,k]=1且B(k-1)[k,j]=1，或B(k-1)[i,j]=1，当且仅当存在从vi到vj且中间顶点序号不大于k的路径，此时应将B(k)[i,j]置为1，否则置为0

$$B(k)[i,j]=(B(k-1)[i,k]\wedge B(k-1)[k,j])\vee B(k-1)[i,j]$$

这样，就可得计算B(k)的方法：先将B(k)赋为A(k-1)；再对所有i=1..n，若B(k)[i,k]=1（即B(k-1)[i,k]=1），则对所有j=1..n，执行：

$$B(k)[i,j]\leftarrow B(k)[i,j]\vee B(k-1)[k,j]$$

令$B[j,i]$表示矩阵B第j行第i列的元素，

（1）　令矩阵$B = M(R)$；

（2）　令 $i = 1$，$n = |A|$；　//外循环对列进行

（3）　$for\ j = 1\ to\ n$

$\quad if\ (B[j,i] = 1)\ then$

$\quad\quad for\ k = 1\ to\ n$

$\quad\quad\quad B[j,k] = B[j,k] \vee B[i,k]$

$\quad\quad\quad$// 将第i行的元素加到第j行上（逻辑加）

（4）　$i = i + 1$；

（5）　$if\ (i \le n)\ then\ go\ to\ (3)$

$\quad\quad else\ stop$ 且 $M(R^+) = B$

Warshall算法

算法 Warshall($A[1..n, 1..n]$)

//实现计算传递闭包的Warshall算法

//输入：包括n个节点有向图的邻接矩阵

//输出：该有向图的传递闭包

$R^{(0)} \leftarrow A$

$for(k \leftarrow 1; k \leq n; k++)$

$\quad for(i \leftarrow 1; i \leq n; i++)$

$\quad\quad for(j \leftarrow 1; j \leq n; j++)$

$\quad\quad\quad R^{(k)}[i,j] \leftarrow R^{(k-1)}[i,j]\ or\ R^{(k-1)}[i,k]\ and\ R^{(k-1)}[k,j]$

$return\ R^{(n)}$

谢谢！