电 磁 学
(Electromagnetism)

▲ 电磁学研究的是电磁现象 的基本概念和基本规律：

▲ 处理电磁学问题的基本观点

- 对象：弥散于空间的电磁场，着眼于场的分布
- 观点： 电磁作用是“场”的作用 （近距作用）

▲研究内容

- 电荷、电流产生电场和磁场的规律； **场的产生**
- 电磁场对电荷、电流的作用； **场的性质**
- 电磁场对物质的各种效应。 **场与物质的相互作用**
- 电磁感应、电磁波； **电场和磁场的相互联系**

教学内容

静电场	静磁场
电势	磁力
静电场中的导体	磁场中的磁介质
静电场中的电介质	

- 稳恒电流
- 电磁感应
- 电磁场与电磁波

第十二章
真空中静电场的场强
（Intensity of Electrostatic Field in Vacuum）

静电场 — 相对观测者静止的电荷产生的电场

本章目录

△ § 12.1 电荷、电荷守恒定律

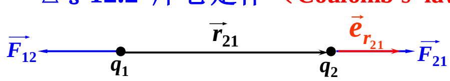
（electric charge， charge conservation law）

自学，要着重搞清：

- 电荷的量子性和电荷连续分布的概念
- 点电荷的概念
- 电荷守恒定律
- 电荷的相对论不变性

- Two Kinds: Positive and Negative
- Units: Coulomb
- Elemental Charge = 1.60 x 10^{-19} C
  - Electrons are negatively charged
  - Protons are positively charged

△ § 12.2 库仑定律（Coulomb's law）



$$\boxed{\vec F_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\vec e_{r_{21}} = -\vec F_{12}}$$

国际单位制（SI）中：

q —库仑（C）， F—牛顿（N）， r —米（m）

$$\varepsilon_o = 8.85\times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}$$

ε_0—真空介电常数（vacuum permittivity）

$$\boxed{\vec F_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^2}\vec e_{r_{21}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^3}\vec r_{21} = -\vec F_{12}}$$

▲ 库仑定律适用的条件：

- 点电荷—理想模型
- 真空中
- 非真空中

$$\boxed{\vec F_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r_{21}^2}\vec e_{r_{21}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r_{21}^3}\vec r_{21} = -\vec F_{12}}$$

- 施力电荷对观测者静止（受力电荷可运动）

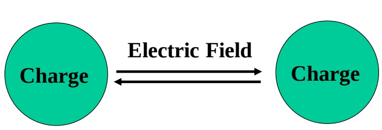
△ § 12.3 电场和电场强度

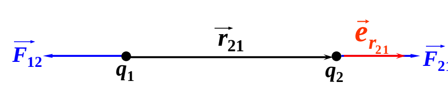
（electric field and electric field intensity）

早期：电磁理论是超距作用理论

后来：法拉第提出近距作用

并提出场和力线的概念

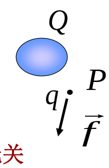




$$\vec F_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^2}\vec e_{r_{21}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^3}\vec r_{21} = q_2\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^3}\vec r_{21}$$

$$\vec F_{21} = q_2\vec E \rightarrow \vec F_2 = q_2\vec E \qquad \vec E = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^3}\vec r_{21}$$

讨论 $\vec{F}_2 = q_2\vec{E}$ $\boxed{\Rightarrow \vec{E} = \dfrac{\vec{f}}{q}}$



试验电荷放到场点P处，受力为 $\vec{f}$

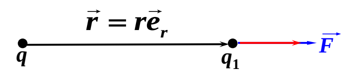
电场强度定义 $\boxed{\vec{E} = \dfrac{\vec{f}}{q}}$ 与试验电荷无关

试验电荷 条件 $\begin{cases} \text{电量充分地小} \\ \text{线度足够地小} \end{cases}$

矢量场 $\boxed{\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(xyz)}$

量纲 N/C 或 V/m

电荷在外场中就会受到电场力的作用
点电荷在外场中受的电场力 $\boxed{\vec{f} = q\vec{E}}$



库伦定律 $\vec{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q}{r^2}\vec{e}_r = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q q_1}{r^3}\vec{r}$

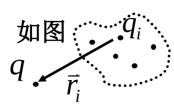
电场强度 $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

§ 12.4 叠加法求场强

一. 场强叠加原理

(Superposition principle of electric field intensity)

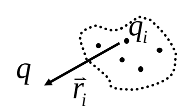
如果带电体由 n 个点电荷组成，如图



由电力叠加原理 $\boxed{\vec{f} = \sum_{i=1}^{i=n}\vec{f}_i}$

由场强定义 $\boxed{\vec{E} = \dfrac{\vec{f}}{q}}$ $= \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n}\vec{f}_i}{q} = \sum_{i=1}^{i=n}\dfrac{\vec{f}_i}{q}$

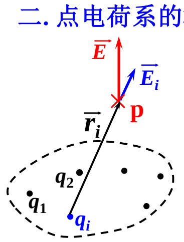
整理后得 $\boxed{\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i}$



点电荷系的总场强 $\boxed{\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i}$

$\vec{E}_i$—第i个电荷单独存在时，在场点的电场强度

二. 点电荷系的场强



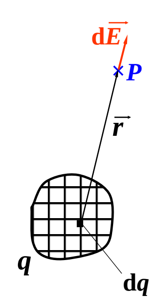
电荷q_i的场强：$\vec{E}_i = \dfrac{q_i \vec{e}_{r_i}}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}$

由叠加原理，总场强：

$$\vec{E} = \sum_i \frac{q_i \vec{e}_{r_i}}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}$$

三. 连续带电体的场强

将带电体分割成无限多块无限小的带电体



$$\boxed{\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_q \frac{dq \cdot \vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

体电荷 $dq = \rho\, dv$,

ρ：体电荷密度

面电荷 $dq = \sigma ds$,

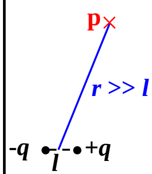
σ：面电荷密度

线电荷 $dq = \lambda dl$,

λ：线电荷密度

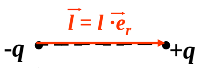
四、应用举例

例1.电偶极子 (electric dipole)的场强



电偶极子：一对靠得很近的等量异号点电荷

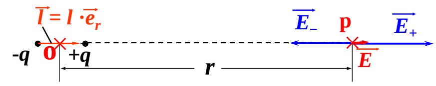
它是个相对的概念，也是一种实际的物理模型（如有极分子）。



$\vec{p} = q\vec{l}$，$\vec{l}: -q \to +q$

$\vec{p}$称为电偶极矩（electric dipole moment）

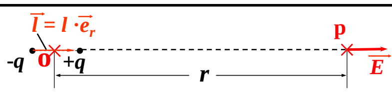
（1）轴线上场强



$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q\vec{e}_r}{(r-\frac{l}{2})^2} + \frac{-q\vec{e}_r}{(r+\frac{l}{2})^2}\right]$$

$r >> l$ 时：

$$\frac{1}{(r\mp\frac{l}{2})^2} = \frac{1}{r^2}(1\mp\frac{l}{2r})^{-2} \approx \frac{1}{r^2}(1\pm\frac{l}{r})$$

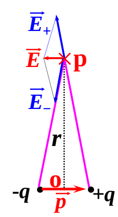


$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q\vec{e}_r}{(r-\frac{l}{2})^2} + \frac{-q\vec{e}_r}{(r+\frac{l}{2})^2}\right]$$

$$\therefore \quad \vec{E} = \frac{q\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}[(1+\frac{l}{r})-(1-\frac{l}{r})]$$

$$= \frac{2ql\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{2q\vec{l}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{2\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

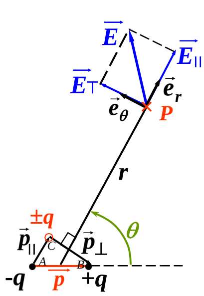
（2）中垂线上场强（例12.3）：



$$\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

电偶极子E分布的特点： $E \propto \dfrac{1}{r^3}$

（3）一般情况：



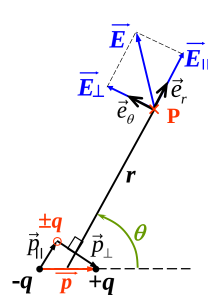
$$\vec{p} = \vec{p}_{//} + \vec{p}_{\perp}$$

$$\vec{p}_{//} = p\cos\theta\vec{e}_r$$

$$\vec{p}_{\perp} = -p\sin\theta\vec{e}_\theta$$

$$\vec{E}_{//} = \frac{2\vec{p}_{//}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{2p\cos\theta\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E}_{\perp} = -\frac{\vec{p}_{\perp}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p\sin\theta\vec{e}_\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$



$$\vec{E} = \vec{E}_{//} + \vec{E}_{\perp}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[2p_{//}\vec{e}_r + p_{\perp}\vec{e}_\theta]$$

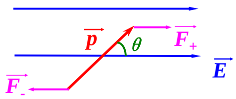
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[2p\cos\theta\cdot\vec{e}_r + p\sin\theta\cdot\vec{e}_\theta]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\left[\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}\right]$$

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\sqrt{3\cos^2\theta+1}$$

（4）电偶极子在均匀电场中所受的力矩

相对于电偶极子中点



$$F_+ = qE\text{，}$$

$$F_- = -qE\text{，}$$

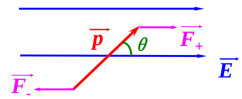
$$M = M_+ + M_- = qE\frac{l}{2}\sin\theta \times 2$$

$$= qlE\sin\theta = pE\sin\theta$$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E}}$$

与参考点的选择无关！

一对力偶的力矩与参考点的选择无关



$$F_+ = qE\text{，}$$

$$F_- = -qE\text{，}$$

$$\vec{M} = \vec{r}_+\times\vec{F}_+ + \vec{r}_-\times\vec{F}_- = (\vec{r}_+ - \vec{r}_-)\times\vec{F}_+$$

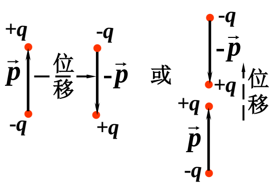
$$= \vec{l}\times q\vec{E} = \vec{p}\times\vec{E}$$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E}}$$

*例2. 电四极子（electric quadrupole）的场强

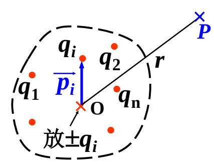
偶极子是$\pm q$有微小位移而得到的；

四极子是$\pm\vec{p}$有微小位移而得到的：



可得 $E \propto \dfrac{1}{r^4}$

*例3. 任意点电荷系的场强：



若$\sum q_i \neq 0$，则在远离电荷系处(距离r>>电荷系线度)，点电荷电场为主：$E \propto \dfrac{1}{r^2}$

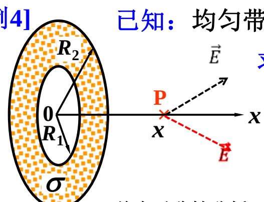
若$\sum q_i = 0$，$\sum \vec{p}_i \neq 0$，则在远离电荷系处，电偶极子的电场起主要作用：$E \propto \dfrac{1}{r^3}$

若$\sum q_i = 0$，$\sum \vec{p}_i = 0$，则在远离电荷系处，电四极子的电场起主要作用：$E \propto \dfrac{1}{r^4}$

[例4]

已知：均匀带电环面，σ，R_1，R_2

求：轴线上的场强$\vec{E}$



首先对称性分析：

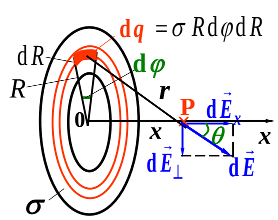
关于x轴具有旋转对称性，电场强度是极矢量

x轴上的电场强度只能沿x轴

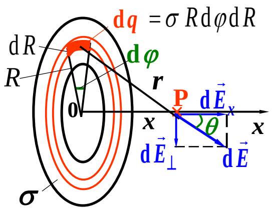
解：（1）取圆柱坐标，划分电荷元

$$\mathrm{d}q = \sigma\,\mathrm{d}s \quad = \sigma R\mathrm{d}\varphi\cdot\mathrm{d}R$$

（2）分析$\mathrm{d}\vec{E}$大小、方向：



$$\mathrm{d}E_x = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\cos\theta\text{，}$$



（3）积分求 $\vec{E}$：

$$E_x = \int_q \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \cos\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma R d\varphi dR}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \cos\theta$$

$$= \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{R \cdot dR}{r^2} \cdot \frac{x}{r} \quad = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{x \cdot R \cdot dR}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{x \cdot R \cdot dR}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma \cdot x}{4\varepsilon_0} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{d(x^2+R^2)}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

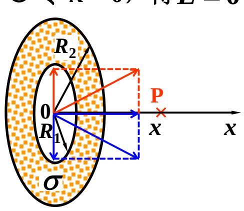
$$= \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+R_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R_2^2}}\right]$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+R_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R_2^2}}\right] \cdot \vec{i}$$

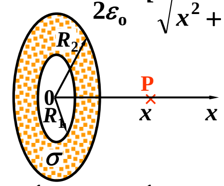
（4）分析结果的合理性：

① 单位 ✓；

② 令 $x = 0$，得 $\vec{E} = 0$ ，合理；



$$\vec{E} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+R_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R_2^2}}\right] \cdot \vec{i}$$



③ 令 $x >> R_2$， 则：

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{1}{x\sqrt{1+\frac{R^2}{x^2}}} = \frac{1}{x}\left[\left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{x}\left(1-\frac{R^2}{2x^2}\right)$$

$$E_x \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{2x^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} \propto \frac{1}{x^2}$$，合理。

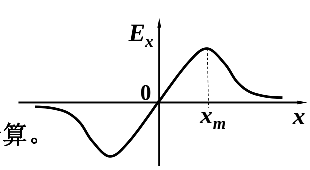
$$\vec{E} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+R_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R_2^2}}\right] \cdot \vec{i}$$

当 $x >> R_2$， $\quad E_x \approx \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} \propto \dfrac{1}{x^2}$，

（5）讨论：

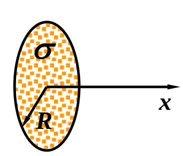
① E的分布：??

x_m =?，自己计算。



$$\vec{E} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+R_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R_2^2}}\right] \cdot \vec{i}$$

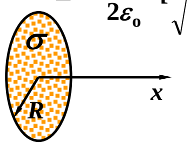
② $R_1 \to 0$，$R_2 = R$，此为均匀带电圆盘情形：



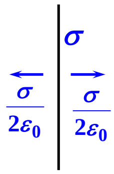
$$E_x = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{|x|}\left[1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]$$

$$\vec{E}=\frac{\sigma\, x}{2\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+R_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+R_2^2}}\right]\cdot\vec{i}$$



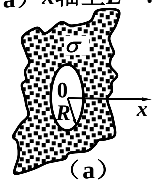
③ $R_1\to 0$，$R_2\to\infty$，此为均匀带电无限大平面：

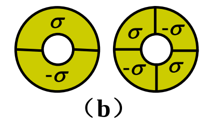


$$E_x=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{|x|},\quad E=|E_x|=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$=\mathrm{Const.}\begin{cases}\text{与轴无关}\\ \text{与}x\text{无关}\end{cases}$$

④ 思考（a）x轴上E =？（b）x >>电荷线度处，E与x关系如何？





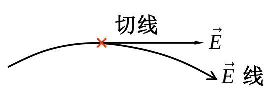
§ 12.5 电场线和电通量

(electric field line and electric flux)

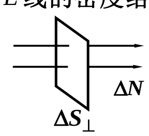
一.电场线（$\vec{E}$ 线）

为形象地描写场强的分布，引入 $\vec{E}$ 线。

1. $\vec{E}$线上某点的切向即为该点$\vec{E}$的方向；

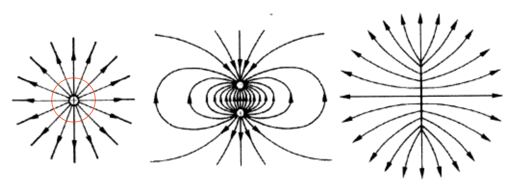


2. $\vec{E}$线的密度给出$\vec{E}$的大小。



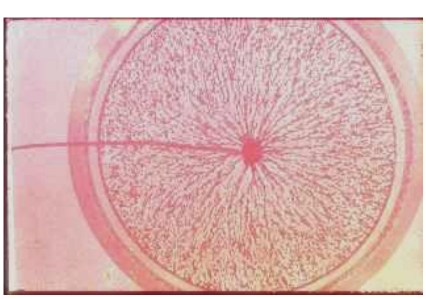
$$E=\lim_{\Delta S_\perp\to 0}\frac{\Delta N}{\Delta S_\perp}=\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s_\perp}$$

几种电荷的 $\vec{E}$ 线分布

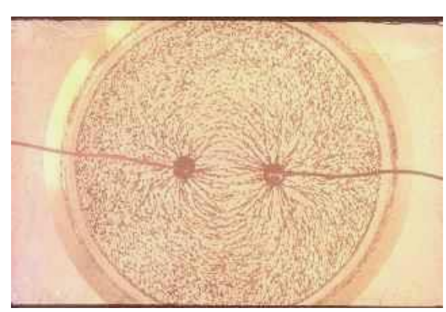


带正电的点电荷　　电偶极子　　均匀带电的直线段

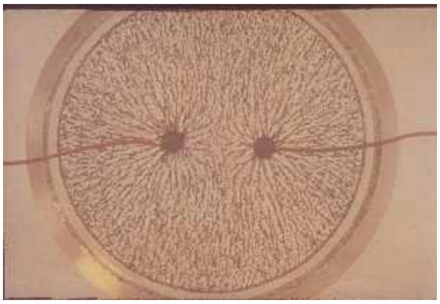
几种电荷的 $\vec{E}$ 线分布的实验现象：



单个点电极

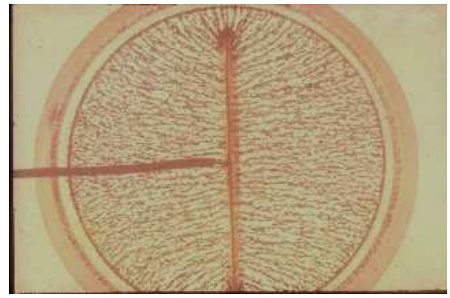


正负点电极



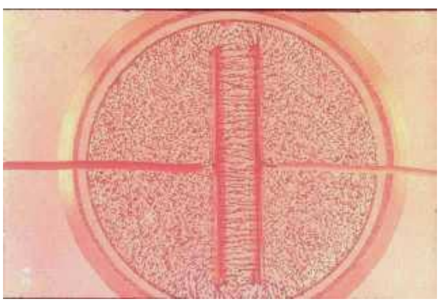
两个同号的点电极

43



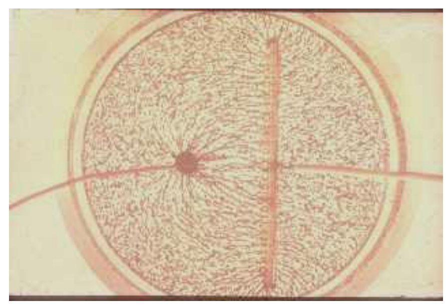
单个带电平板电极

44



分别带正负电的平行平板电极

45



带异号电荷的点电极和平板电极

46

“怒发冲冠”

47

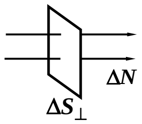
易水送别

骆宾王
【唐初四杰之一】

此地别燕丹，
壮士发冲冠。
昔时人已没，
今日水犹寒。

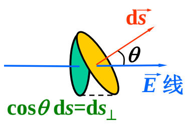
48

二. 电通量$\boldsymbol{\Phi}_e$

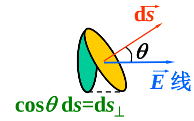


$$E=\lim_{\Delta S_\perp \to 0}\frac{\Delta N}{\Delta S_\perp}=\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s_\perp}$$

$$\mathrm{d}N=E\,\mathrm{d}s_\perp$$



$$\mathrm{d}N=E\,\mathrm{d}s_\perp=E\mathrm{d}s\cos\theta$$

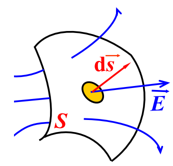


$$\mathrm{d}N=E\,\mathrm{d}s_\perp$$

$$\mathrm{d}N=E\,\mathrm{d}s_\perp=E\mathrm{d}s\cos\theta$$

$$=\left|\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}\right|$$

•定义面元矢量 $\mathrm{d}\vec{s}$

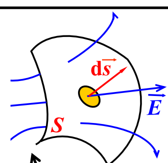


定义：电通量$\boldsymbol{\Phi}_e$

$$\mathrm{d}\Phi_e=\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}\qquad \boxed{\Phi_e=\int_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}}$$

$$\mathrm{d}N=\left|\mathrm{d}\Phi_e\right|$$

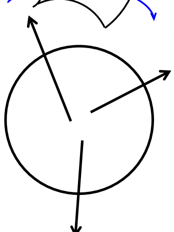
Φ_e的几何意义



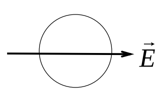
$$\mathrm{d}\Phi_e=\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}\qquad \boxed{\Phi_e=\int_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}}$$

1.$\boldsymbol{\Phi}_e$是对面而言，不是点函数。

2.$\boldsymbol{\Phi}_e$是代数量，有正、负。



对闭合曲面，$\Phi_e=\oint\!\!\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$



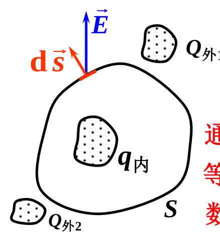
约定：闭合曲面以向外为曲面法线正方向。

§ 12.6高斯定理（Gauss′ theorem）

高斯定理是反映静电场性质的一个基本定理。

一. 高斯定理的内容

$$\boxed{\Phi_e=\oint\!\!\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}}$$



高斯定理：

在真空中的静电场内，

通过任意闭合曲面的电通量，

等于该曲面所包围电量的代

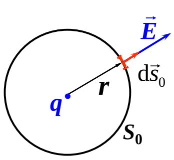
数和除以ε_0。

闭合面S称为高斯面

二. 高斯定理的证明

证明可按以下四步进行：

1. 求以点电荷为球心的球面的$\boldsymbol{\Phi}_e$



欲证明 $\Phi_e=\oint\!\!\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$

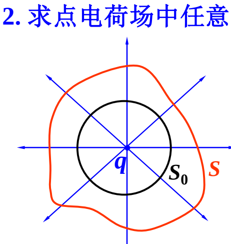
$$\Phi_e=\oint\!\!\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}_0=\oint\!\!\oint_S\frac{q\vec{e}_r\cdot\mathrm{d}\vec{s}_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

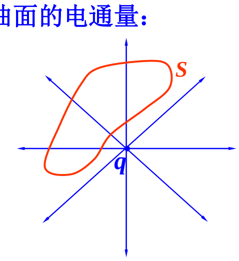
$$=\oint\!\!\oint_S\frac{q\cdot\mathrm{d}s_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{q\cdot 4\pi r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

由此可知：点电荷电场对球面的$\boldsymbol{\Phi}_e$与$\boldsymbol{r}$无关，

即各球面的$\boldsymbol{\Phi}_e$连续。

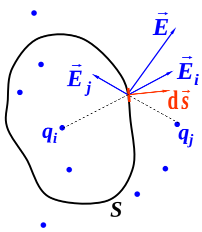
2. 求点电荷场中任意曲面的电通量：





$$\therefore\quad \Phi_e=\begin{cases}\dfrac{q}{\varepsilon_0}, & q\text{ 在 }S\text{ 内；}\\[2ex] 0, & q\text{ 在 }S\text{ 外。}\end{cases}$$

3.求点电荷系的电场中任意闭合曲面的电通量:



$$\vec{E}=\sum_{i\,(S内)}\vec{E}_i+\sum_{j\,(S外)}\vec{E}_j$$

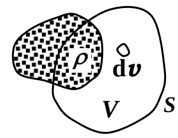
$$\Phi_e=\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$$

$$=\oint_S(\sum_i\vec{E}_i)\cdot\mathrm{d}\vec{s}+\oint_S(\sum_j\vec{E}_j\cdot\mathrm{d}\vec{s})$$

$$=\sum_i\oint_S\vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{s}+\sum_j\oint_S\vec{E}_j\cdot\mathrm{d}\vec{s}$$

$$=\sum_i\frac{q_i}{\varepsilon_0}+0\;=\frac{\sum q_内}{\varepsilon_0}$$

4.将上结果推广至任意连续电荷分布:



$$\Phi_e=\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\int_V\rho.\mathrm{d}v$$

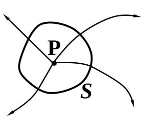
三.几点说明

1. 高斯定理是平方反比定律的必然结果;
2. Φ_e由 $\sum q_内$的值决定, 与$q_内$分布无关;
3. $\vec{E}$是总场强, 它由$q_内$ 和 $q_外$共同决定;
4. 高斯面为几何面, $q_内$和$q_外$总能分清;
5. 高斯定理也适用于变化电场;

6. 高斯定理给出电场线有如下性质:

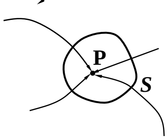
电场线发自于正电荷, 终止于负电荷, 在无电荷处不中断。

证: 设P点有电场线发出



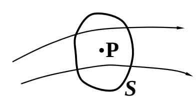
则: $\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}>0\;\rightarrow q_内>0$

令 $S\rightarrow 0$, 则 $q_内=q_p>0$



若P点有电场线终止,

同理, 有 $q_p<0$。



若P点无电荷, 则有:

$$\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=0$$

即 $N_入=N_出\xrightarrow[S\rightarrow 0]{}$ P点处$\vec{E}$线连续。

以上性质说明静电场是有源场。

7. 引出高斯定理的目的:

由 $\vec{E}=\int_q\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{e}_r$, 原则上, 任何电荷分布的电场强度都可以求出,为何还要引入高斯定理?

目的: ① 进一步搞清静电场的性质;

② 便于电场的求解;

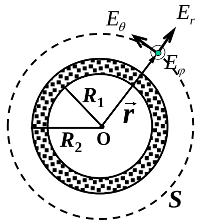
③ 解决由场强求电荷分布的问题。

§ 12.7 高斯定理应用举例

$$应用\begin{cases}求解\vec{E};\\ 分析问题(如导体等);\\ \vec{E}\rightarrow\rho\;。\end{cases}$$

[例1] 已知: 均匀带电球壳ρ(或q)、R_1、R_2 。

求: 电场强度的分布。



解： 利用对称性原理

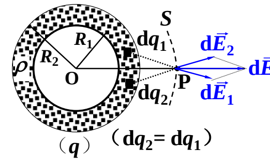
分析$\vec{E}$的对称性：

$$\vec{E} = E_{(r)} \cdot \vec{e}_r$$

$$E_\theta = E_\varphi = 0$$

$$\boxed{\Phi_e = \oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}}$$

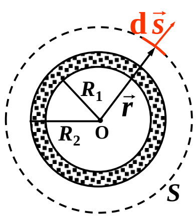
选高斯面S为同心球面



分析$\vec{E}$的对称性：

球对称 $\vec{E} = E_{(r)} \cdot \vec{e}_r$

选高斯面S为与带电球壳同心的球面，有：



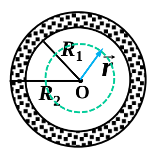
$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint_S E(r)\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$= \oint_S E(r)\,\mathrm{d}s$$

$$= 4\pi r^2 \cdot E(r)$$

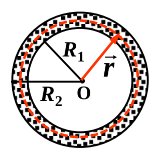
又 $\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \dfrac{q_{内}}{\varepsilon_0}$

$$\therefore \quad \vec{E} = E(r)\vec{e}_r = \frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$



$$\vec{E} = \frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

•$r < R_1$　$q_{内} = 0$，有 $E = 0$

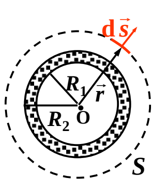


•$R_1 < r < R_2$

$$q_{内} = \frac{4\pi}{3}(r^3 - R_1^3)\rho$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)\vec{e}_r$$

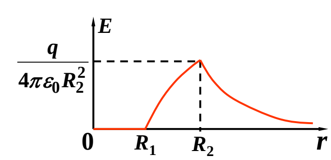
•$r > R_2$



$$q_{内} = \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)\rho = q \qquad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

讨论

1）E 的分布：



$r < R_1$，$E = 0$

$R_1 < r < R_2$，$\vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \dfrac{R_1^3}{r^2}\right)\vec{e}_r$

$r > R_2$，$\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

$r < R_1$，$E = 0$

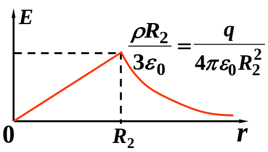
$R_1 < r < R_2$，$\vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \dfrac{R_1^3}{r^2}\right)\vec{e}_r$

$r > R_2$，$\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

2）令R_1=0，

得均匀带电球的情形：

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho\,\vec{r}}{3\varepsilon_0}, & (内) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r, & (外) \end{cases}$$



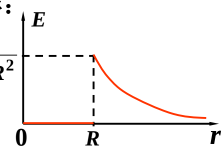
$r < R_1$，$E = 0$　　$R_1 < r < R_2$，$\vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \dfrac{R_1^3}{r^2}\right)\vec{e}_r$

$r > R_2$，$\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

3）令$R_1 = R_2 = R$，且 q 不变，

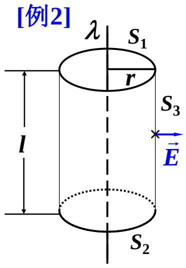
得均匀带电球面的情形：

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & (内) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r, & (外) \end{cases}$$



在 $r = R$ 处 E 不连续，这是因为忽略了电荷厚度所致。

[例2]



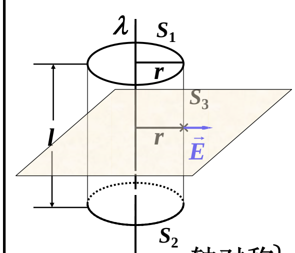
已知：无限长均匀带电直线，线电荷密度为λ。

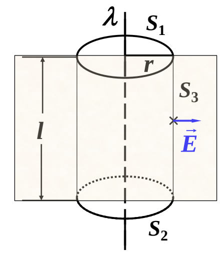
求：$\vec{E}$ 的分布

解：分析 $\vec{E}$ 的对称性：

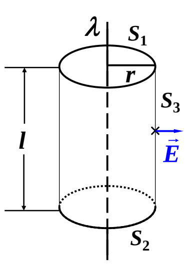
- 旋转对称性；
- 平移对称性；
- 镜像反射对称性；
- 空间反演对称性；

- 平移对称性；
- 镜像反射对称性。





$$\left.\begin{matrix}轴对称\\无限长\end{matrix}\right\}\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$$

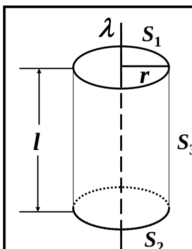


$$\left.\begin{matrix}轴对称\\无限长\end{matrix}\right\}\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$$

选同轴柱体表面为高斯面S，

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \oint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \oint_{S_3} \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$= 0 + 0 + E\cdot\int_{S_3} ds = E\cdot 2\pi r l$$



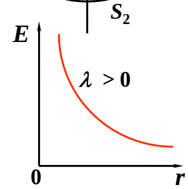
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = E\cdot 2\pi r l \underset{（高）}{=\!=} \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore\quad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$$

讨论　1) E 的分布：$E \propto \dfrac{1}{r}$

$r \to 0$，$E \to \infty$，

说明此时带电直线不能视为几何线。



2) 分析所求出的$\vec{E}$ 是仅由 $q_{内} = \lambda l$ 产生的吗？(No)

$\boxed{\text{小结}}$ 应用高斯定理求场强的要点：

适用对象：有球、柱、平面对称的某些电荷分布。

方法要点：（1）分析 $\vec{E}$ 的对称性；

（2）选取高斯面的原则：

1）需通过待求 $\vec{E}$ 的区域；

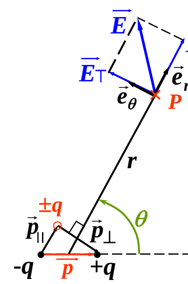
2）在 S 上待求 $\vec{E}$ 处，$\vec{E} \,/\!/\, \mathrm{d}\vec{s}$ 且等大，

使得 $\int \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = E\int \mathrm{d}s$，其余处必须有

$$\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \begin{cases} \text{或} \quad E = 0, \\ \text{或} \ \vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{s}\,。\end{cases}$$

第十二章结束

附录1：一般情况下电偶极子在空间的场强计算：



$$\vec{E} = \vec{E}_{/\!/} + \vec{E}_{\perp}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[2\vec{p}_{/\!/} - \vec{p}_{\perp}]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[3\vec{p}_{/\!/} - \vec{p}_{/\!/} - \vec{p}_{\perp}]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\left[\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}\right]$$

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\left[\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\frac{3rp\cos\theta}{r^2}\vec{r} - \vec{p}\right]$$

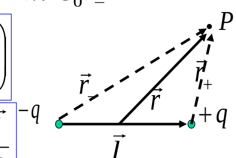
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\frac{3r^2 p\cos\theta}{r^2}\vec{e}_r - (p\cos\theta\vec{e}_r - p\sin\theta\vec{e}_\theta)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2p\cos\theta\vec{e}_r + p\sin\theta\vec{e}_\theta)$$

- 一般情况（通常解法）

从 $\vec{E} = \dfrac{q_+}{4\pi\varepsilon_0 r_+^2}\hat{r}_+ + \dfrac{q_-}{4\pi\varepsilon_0 r_-^2}\hat{r}_-$ 出发

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^3}\right)}$$



由图 $\boxed{\vec{r}_+ = \vec{r} - \dfrac{\vec{l}}{2} \qquad \vec{r}_- = \vec{r} + \dfrac{\vec{l}}{2}}$

$$\Rightarrow \boxed{r_+^2 = r^2 + \frac{l^2}{4} - \vec{r}\cdot\vec{l} \qquad r_-^2 = r^2 + \frac{l^2}{4} + \vec{r}\cdot\vec{l}}$$

$$\boxed{r_+^2 = r^2 + \frac{l^2}{4} - \vec{r}\cdot\vec{l} \qquad r_-^2 = r^2 + \frac{l^2}{4} + \vec{r}\cdot\vec{l}}$$

$$r_+^{-3} = r^{-3}\left[1 + \frac{l^2}{4r^2} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{r^2}\right]^{-3/2} \qquad \xrightarrow{\frac{l}{r} << 1}$$

$$r_+^{-3} = r^{-3}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{r^2}\right) \qquad r_-^{-3} = r^{-3}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{r^2}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^3}\right)$$

$$r_+^{-3} = r^{-3}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{r^2}\right) \qquad r_-^{-3} = r^{-3}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{r^2}\right)$$

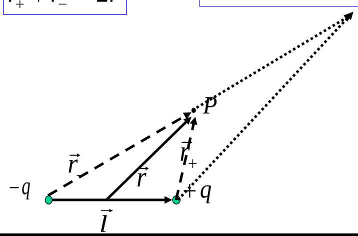
$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\vec{r}_+ - \vec{r}_- + (\vec{r}_+ + \vec{r}_-)\frac{3}{2}\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{r^2}\right]}$$

$$\vec E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\vec r_+-\vec r_-+(\vec r_++\vec r_-)\frac{3}{2}\frac{\vec r\cdot\vec l}{r^2}\right]$$

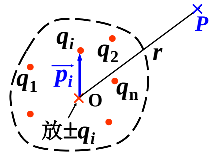
$\vec r_+-\vec r_-=-\vec l$

$\vec r_++\vec r_-=2\vec r$

$$\vec E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[-\vec p+3(\hat r\cdot\vec p)\hat r\right]$$



附录2：任意点电荷系的场强：

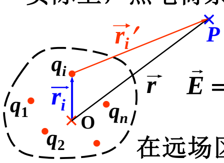


若 $\sum q_i\neq 0$，则在远离电荷系处（距离$r>>$电荷系线度），点电荷电场为主：$E\propto\frac{1}{r^2}$

若 $\sum q_i=0$，$\sum\vec p_i\neq 0$，则在远离电荷系处，电偶极子的电场起主要作用：$E\propto\frac{1}{r^3}$

若$\sum q_i=0$，$\sum\vec p_i=0$，则在远离电荷系处，电四极子的电场起主要作用：$E\propto\frac{1}{r^4}$

实际上，点电荷系在远处的场强可以对电荷系中的某点作Tailor展开：



$$\vec E=\sum_i\frac{q_i\vec r_i'}{4\pi\varepsilon_0 r_i'^3}=\sum_i\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec r-\vec r_i}{|\vec r-\vec r_i|^3}$$

在远场区：$r>>r_i$

$$|\vec r-\vec r_i|^3=\left[(\vec r-\vec r_i)\cdot(\vec r-\vec r_i)\right]^{3/2}$$

$$\approx\left[r^2-2\vec r\cdot\vec r_i\right]^{3/2}=r^3\left[1-2\frac{\vec r\cdot\vec r_i}{r^2}\right]^{3/2}$$

$$\approx r^3\left(1-3\frac{\vec r\cdot\vec r_i}{r^2}\right)$$

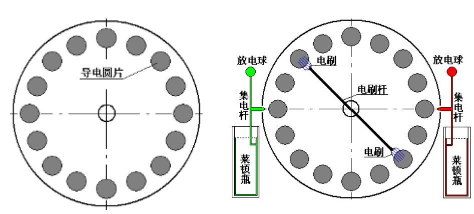
$$\vec E=\sum_i\frac{q_i(\vec r-\vec r_i)}{4\pi\varepsilon_0 r^3(1-3\vec r\cdot\vec r_i/r^2)}$$

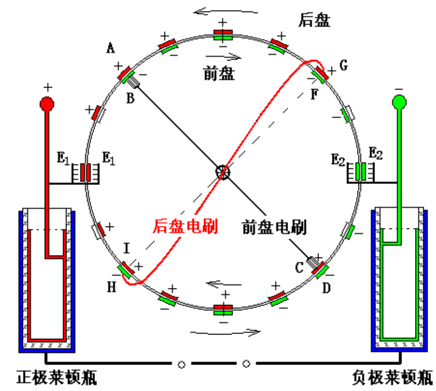
$$\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sum_i q_i(\vec r-\vec r_i)\left(1+\frac{3\vec r\cdot\vec r_i}{r^2}\right)$$

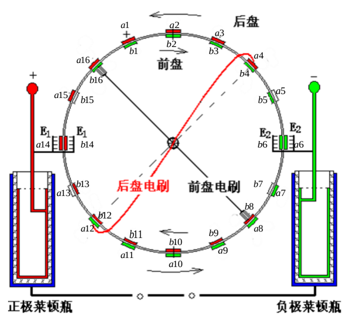
$$\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sum_i\left[q_i\vec r-q_i\vec r_i+\frac{3\vec r\cdot(q_i\vec r_i)}{r^2}\vec r\right]$$

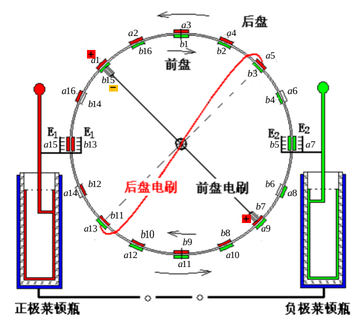
$$=\underbrace{\frac{(\sum q_i)\vec r}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}_{\text{点电荷场强}}+\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\frac{3(\vec r\cdot\sum\vec p_i)\vec r}{r^2}-\sum\vec p_i\right]}_{\text{电偶极子场强}}$$

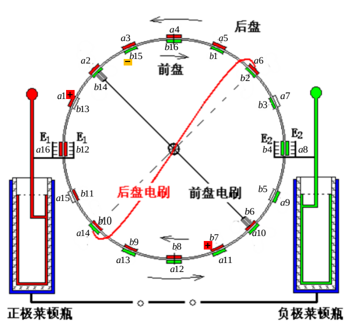
双转盘式感应起电机

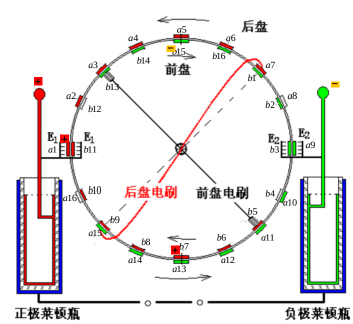


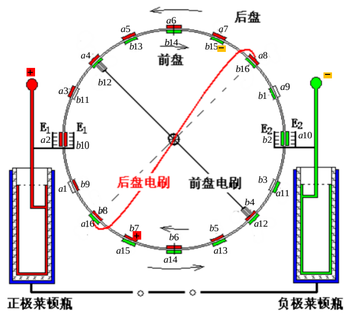

后盘
前盘
A
B
C
D
F
G
H
I
E_1
E_2
后盘电刷
前盘电刷
正极莱顿瓶
负极莱顿瓶

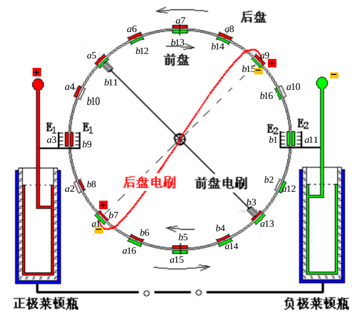

后盘
前盘
E_1
E_2
后盘电刷
前盘电刷
正极莱顿瓶
负极莱顿瓶

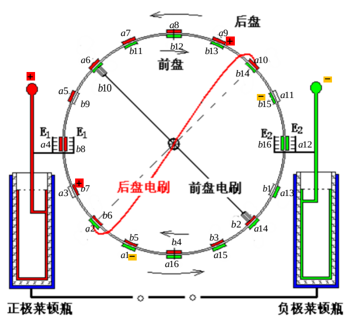

后盘
前盘
E_1
E_2
后盘电刷
前盘电刷
正极莱顿瓶
负极莱顿瓶

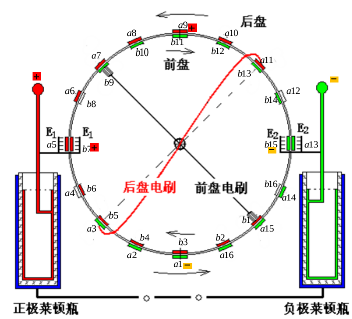

后盘
前盘
E_1
E_2
后盘电刷
前盘电刷
正极莱顿瓶
负极莱顿瓶

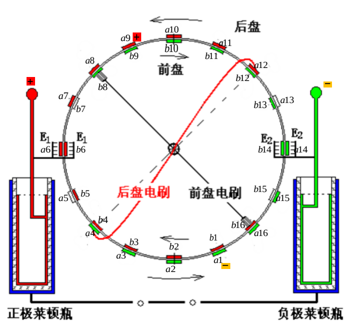

后盘
前盘
E_1
E_2
后盘电刷
前盘电刷
正极莱顿瓶
负极莱顿瓶











可以研究的问题：10分

1、电荷产生的原因；

2、如何确定正极和负极？

3、能够产生的最高电压是多少？

4、如何控制正极和负极的位置？

5、该装置的能量转化效率是多少？

6、。。。。。。