# 第五次习题课

## 伴随（或共轭变换）

1. 用 $\tilde{C}[0,1]$ 表示 $[0,1]$ 上所有连续复值函数组成的线性空间，$\forall f(x), g(x) \in \tilde{C}[0,1]$，$(f(x), g(x)) \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$.
则 $\tilde{C}[0,1]$ 关于此内积成为一个酉空间.
设 $T: \tilde{C}[0,1] \longrightarrow \tilde{C}[0,1]$ 满足 $T(f(x)) = xf(x)$. 它是一个线性变换. 问：$T$ 是否有伴随变换？

2. 设 $V = M_n(\mathbb{R})$ 取 Frobenius 内积，即 $\forall X, Y \in V$,
$$(X, Y) = tr(XY^T)$$
取定 $P, Q \in V$，定义 $V$ 上线性变换 $T: V \longrightarrow V$ 满足
$$T(A) = PAQ$$
(1) 求 $T$ 的伴随 $T^*$；
(2) 若 $P, Q$ 是正交阵，证明：$T^* = T^{-1}$.

## UR 分解

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$，求酉阵 $U$ 和上三角阵 $R$，使 $A = UR$.

# 正交变换和酉变换

4. 设 $V$ 是 $n$ 维欧几里得空间，$T: V \to V$ 是可逆线性变换.

证明：

(1) $T$ 是 $V$ 上一个全等变换(即保持向量的长度和夹角的变换)当且仅当 $T$ 是 $V$ 的正交变换.

(2) $T$ 是 $V$ 的一个相似变换(即保持向量夹角的变换)当且仅当 $\exists c>0$，$\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$，有 $(T(\vec{\alpha}), T(\vec{\beta})) = c(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

(3) $T$ 是 $V$ 的一个相似变换当且仅当 $T = cT_0$，其中 $c>0$，$T_0$ 是一个正交变换.

5. 设 $V = M_n(\mathbb{R})$，$\forall A, B \in V$，定义：$(A, B) = tr(AB^T)$.

设 $P, Q$ 是 $V$ 中可逆矩阵，令 $T: V \longrightarrow V$ 满足

$T(M) = PMQ$，$\forall M \in V$. 证明：

$T$ 是一个正交变换 $\Leftrightarrow \exists c \neq 0$，$P^TP = cI_n$，$Q^TQ = \frac{1}{c}I_n$.

6. 设 $A, B$ 是 $n$ 阶可逆实方阵，且 $A^TA = B^TB$.

证明：存在一个正交阵 $Q$，使 $A = QB$.

7. 设 $V$ 是一个 $n$ 维欧氏空间，$\vec{\beta}\in V$，$|\vec{\beta}|=1$，令

$T_{\vec{\beta}}: V\longrightarrow V$ 满足 $T_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha})=\vec{\alpha}-2(\vec{\beta},\vec{\alpha})\vec{\beta}\quad \forall\vec{\alpha}\in V$.

则 $T_{\vec{\beta}}$ 称为一个镜面反射.

证明：(1) $T_{\vec{\beta}}$ 是 $V$ 上一个正交变换.

(2) $\forall\vec{u},\vec{v}\in V$，$\vec{u}\neq\vec{v}$，$|\vec{u}|=|\vec{v}|\neq 0$，则存在一个镜面反射 $T_{\vec{\beta}}$，使 $T_{\vec{\beta}}(\vec{u})=\vec{v}$.

8. 设 $V$ 是酉空间，$\vec{\alpha}_0\in V$ 且 $|\vec{\alpha}_0|=1$，设 $\lambda_0\in\mathbb{C}$ 且 $|\lambda_0|=1$，

定义 $T: V\longrightarrow V$ 满足 $T(\vec{\alpha})=\vec{\alpha}+(\lambda_0-1)(\vec{\alpha},\vec{\alpha}_0)\vec{\alpha}_0$.

证明：$T$ 是酉变换.

9. 设 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 是平面上两个互相垂直的单位向量，以 $\vec{e}_1$ 为始边，$OT$ 为终边的一个角为 $\frac{\varphi}{2}$. 又 $\sigma$ 是以 $OT$ 为轴的反射. 试证明：$\sigma$ 在 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 下矩阵是：

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}.$$

由此证明，若正交变换 $\sigma$ 在一个标准正交基下矩阵有

这种形式，则$\sigma$必是以$y=\tan(\frac{\varphi}{2})x$为轴的反射.

---

提示：

4. (2) "$\Rightarrow$" 设$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}\in V$是一组标准正交基，

证明$(T(\vec{e_i}),T(\vec{e_j}))=0 \quad i\neq j$，考虑$(T(\vec{e_i}),T(\vec{e_i}+\vec{e_j}))$

得$|T(\vec{e_i})|=|T(\vec{e_j})|=a$，令$\sigma=\frac{1}{a}T$，则$\sigma$是正交变换.

5. 应用第2题，

6. 证明：$(A^T)^{-1}B^T$是一个正交阵，$Q=(A^T)^{-1}B^T$.

7. (2) 令$\vec{\beta}=\dfrac{\vec{u}-\vec{v}}{|\vec{u}-\vec{v}|}$ 则$|\vec{\beta}|=1$

$$T_{\vec{\beta}}(\vec{u})=\vec{v}.$$

8. 将$\vec{\alpha_0}$扩充成V的一组标准正交基.求T在这组基下矩阵.

9. 第二问：$\sigma$的特征值是$\pm1$，求出相应特征向量.