第五周作业

1. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 证明:

(1) $\mathbb{C}^n \supseteq C(A) \supseteq C(A^2) \supseteq \cdots \supseteq C(A^k) \supseteq \cdots$

(注: $C(A) = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{C}^n\}$)

(2) 存在 $k_0 \geq 1$, $C(A^{k_0}) = C(A^{k_0+1})$

(3) 若 $C(A^{k_0}) = C(A^{k_0+1})$, 则 $C(A^{k_0+1}) = C(A^{k_0+2})$

(提示: 类似于广义特征子空间的 $N_{\lambda,\ell}$ 的刻划)

2. 设 $T: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 定义为 $T(\vec{x}) = A\vec{x}$. 令 $G_{\lambda_0}(T)$ 是 T 关于 λ_0 的广义特征子空间. 证明:

(1) 若 A 可逆, 则 $G_{\lambda_0}(T) = G_{\lambda_0^{-1}}(T^{-1})$

(2) 设 $V_\lambda(T)$ 是关于 λ 的特征子空间, 若对于任意特征值 λ, $G_\lambda(T) = V_\lambda(T)$. 则 T 可对角化.

(3) 应用(2)证明 若 $A^2 = A$, 则 T 可对角化.

(注: T 可对角化 $\Longleftrightarrow$ 存在 $\mathbb{C}^n$ 一组基, T 关于基矩阵是对角阵 $\Longleftrightarrow$ A 相似于对角阵)

3. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，A 的所有特征值为 0，则 $A^n=0$.

(注：逆命题也对).

4. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，且 $\exists k\geq 1$，$A^k=O$. 证明：

对于 $\forall l\geq 1$，$tr(A^l)=0$.

(注：逆命题也对，证明较难).

5. 设 A, B 是 3 阶方阵，$A^3=B^3=O_{3\times 3}$，但 $A^2\neq O_{3\times 3}$

$B^2\neq O_{3\times 3}$，问：A, B 是否相似？

(提示：$A^3=O$，$A^2\neq O$，则 A 相似于 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$，

使用循环基).

6. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，存在 $k\geq 1$，$A^{k-1}\neq O_{n\times n}$，$A^k=O_{n\times n}$.

证明：(I_n-A) 可逆 并求 I_n-A 的逆和 $\det(I_n-A)$.

7. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，$A^n=O$，$A^{n-1}\neq O$

证明：不存在 $B\in M_n(\mathbb{C})$，$B^2=A$.

(提示：A, B 均幂零，$A^{n-1}\neq O\Rightarrow r(A)=n-1$，$\dim N(A)=1$).