

Chaos词源简述

- 希腊神话《神谱》中的卡俄斯
- 《庄子》内篇“应帝王”中的混（浑）沌
- 意义与指称：
 - 古代：宇宙氤氲，有指称
 - 近代：没有指称（由于机械论自然科学的发展，康德，拉普拉斯），chaos→gas
 - 现代：普里高津的两种用法：热力学平衡态与非线性动力学

2

“混沌”进入大众传媒

Michael Crichton
(1942-2008)，科幻作家

3

三部电影

- 《侏罗纪公园》(Jurassic Park)
- 《蝴蝶效应》(Butterfly Effect)
- 《乱战》(Chaos)

4

畅销书《混沌：开创新科学》

- 作者为纽约时报科技记者格莱克。
- 大陆就有三个译本。
- 译成约20多种语言。

5

决定论与非决定论

长期以来，人们一直认为在给定初始条件后，牛顿定律的解就是唯一的，以后任何时刻物体的运动状态就完全确定了。

用拉普拉斯的话来说：“设想有位智者，在每一瞬间得知激励大自然的所有的力，以及组成它的所有物体的相互位置，如果这位智者如此博大精深，能对这样众多的数据进行分析，把宇宙最庞大物体和最轻微原子的运动凝聚到一个公式之中，对他来说没有什么事情是不确定的，将来就像过去一样展现在他的眼前。” -----拉普拉斯决定论

概率论和统计的概念引入物理学后，科学思想发生了重大变化，促使科学家从决定论的那种“经典科学缔造的神话”中走了出来。

6



皮埃尔·西蒙·拉普拉斯
Pierre Simon Laplace (1749~1827)

7

在《关于概率的哲学随笔》（A Philosophical Essay on Probabilities）中，拉普拉斯先生如是说——

We may regard the present state of the universe as the effect of its **past** and the cause of its **future**. An intellect which at a certain moment would know all forces that set nature in motion, and all positions of all items of which nature is composed, if this intellect were also vast enough to submit these data to analysis, it would embrace in a single formula the movements of the greatest bodies of the universe and those of the tiniest atom; for such an intellect nothing would be uncertain and the future just like the past would be present before its eyes.

8

概率论和统计的观点认为，一个系统的未来状态，并不是完全确定的线性因果链，而有许多偶然的随机的因素，人们只从大量的偶然性中寻求必然的趋势，世界的发展遵循着统计的规律。对此，历来有着尖锐的争论。

爱因斯坦认为，“上帝不是在掷骰子”，只是因为知识不完备才出现这种情况。

霍金则认为，概率论、统计性是世界的本质，“上帝”不仅在掷骰子，而且会把骰子掷到人们无法知道和根本看不到的地方。

9

决定论和**非决定论**，**动力学规律**和**统计规律**，两者之间似乎有着不可调和的矛盾，使科学方法论陷入苦恼的悖论之中。而对混沌现象的研究，给这种困境带来了希望之光。

混沌理论描述的系统，其动力学方程是完全确定的，然而这种系统的长期演化行为存在着随机性。在这里，确定性的动力学规律描述的系统出现了统计性结果，使矛盾的两个方面得到了辩证的统一。

对混沌现象的研究已有一百多年的历史，使人们看到了自然界的更为复杂的内容，揭示了决定论与概率性之间的内在联系，是人们观察世界的观点和方法比以前有了更进一步的发展，使人类对自然界的抽象更接近于自然界本身。

10

混沌的起源与发展：中国古代

公元前560年左右，中国古代思想家**老子**就有了关于“**道可道，非常道**”之说，并初步提出了关于宇宙起源于混沌的哲学思想。

公元前450年左右，中国古代哲学家**庄子**（《庄子·应帝王》）说过“南海之帝为**倏（儻）**，北海之帝为**忽**，中央之帝为**混（浑）沌**。**倏（儻）**与**忽**时相与遇于**混（浑）沌**之地，**混（浑）沌**待之甚善。**倏（儻）**与**忽**谋报**混（浑）沌**之德，曰：“人皆有七窍，以视、听、食、息，此独无有，尝试凿之。”日凿一窍，七日而**混（浑）沌死**”。

11

庄子所说的**倏（儻）**、**忽**就是迅速灵敏，而**混沌**有无知愚昧的意思，他们分别代表三个皇帝。**混沌**是一位好客之君，但他五官不分，浑然一体。有一天，他的朋友硬要给他凿出五官七窍，凿到第七天，五官俱全，而**混沌**却死了。

中国古代的这些朴素的自然哲学思想，其实是把**混沌**当作自然界固有的一种秩序，一种生命的源泉。

混沌的英文原词“**chaos**”则是指混乱、无秩序状态，在科学技术领域内通常用于表示无规则运动。

12

混沌通“混沌”，在中国神话中指盘古开天地之前宇宙浑然一体无可分辨的状态。混沌后来被用以“chaos theory”的中译。

混沌的英文原词“**chaos**”则是指混乱、无秩序状态，在科学技术领域内通常用于表示无规则运动。

从庄子的故事看，把“chaos theory”翻译成混沌理论，是最合适不过了，因为由洛伦兹发现的动力系统中的混沌现象确实和该系统时间演变的不可预测性紧紧联系在一起。

“倏”和“忽”，对应英译为Abrupt 和 Sudden。

13

混沌的起源与发展：近代（一）

混沌是非线性动力系统所特有的一种运动形式。其理论基础可追溯到19世纪末创立的定性理论，但真正得到发展是在20世纪70年代以后，尤其是20世纪80年代以后，有如星星之火，渐成燎原之势。

1903年，法国数学家**庞加莱**从动力学系统和拓扑学的全局思想出发，指出可能存在混沌特性。

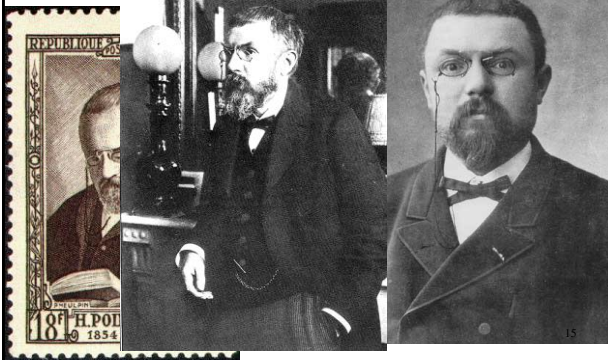
1954年，前苏联概率论大师**柯尔莫哥洛夫**指出，不仅耗散系统有混沌，而且保守系统也有混沌。

1960年前后，**柯尔莫哥洛夫**、**阿若尔德**及**莫塞**得出著名的KAM定理。

1963年，美国气象学家**洛伦兹**发表《决定性的非周期流》，提出著名的“**蝴蝶效应**”（十年后才为人所知）。

14

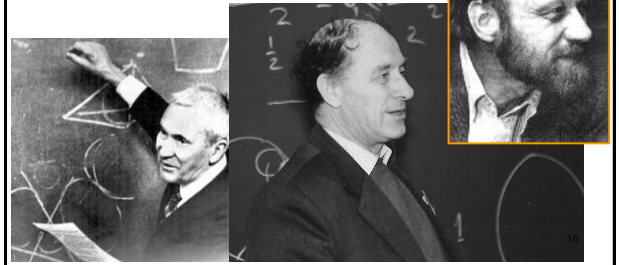
庞加莱（彭加勒）1854—1912



二十世纪60年代的两个突破

• 保守系统：KAM定理

Kolmogorov-Arnold-Moser,
333阶导数,阿诺德扩散,标准映射



混沌的起源与发展：近代（二）

20世纪70年代是混沌科学发展史上光辉灿烂的年代。在这一时期，作为一门新的科学-----**混沌学**正式诞生。科学家们做了大量的研究并使之发展。

1970年，美国科学史家**托马斯·库恩**(T.S.Kuhn)出版《科学革命的结构》。

1975年，**约克**(J.York)和**李天岩**(T.Y.Lie)提出混沌的科学概念。

1976年，**迈依**(R.May)将混沌引入生物学。

1978年，**费根鲍姆**(M.Feigenbaum)提出**费根鲍姆收敛常数 δ** 和**标度常数 a** ，它们是和 π 、 e 、 c 一样的自然界的普适性常数。

17

一维映射（迭代）

- 1963,1972-73,74,75,
Lorenz-Feller-Jorke-
Li-Robert May
- 1975年12月《美国数
学月刊》
- “周期三则混沌”，
经典论文



18

非线性发现普适性

● Feigenbaum常数



19

混沌的起源与发展：近代（二）

总而言之，在20世纪70年代，科学家们开始考虑在许许多多不同种类的不规则之间有何联系。

生理学家发现在人类的心脏中存在着混沌现象，这其中有着惊人的有序性。

生态学家探索树蛾群体的减少与增多的规律。

经济学家研究股票价格上升下降的数据，尝试求出一种全新的分析方法。

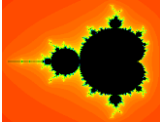
对于事物发展的内部规律的探求，则直接把人们引向自然界-----云彩的形状、雷电的径迹、血管在显微镜下所见到的交叉缠绕、星星在银河中的集簇，等等。

20

混沌的起源与发展：近代（三）

20世纪80年代混沌科学得到进一步的发展。

1980年，波兰出生的美国数学家**曼德尔布罗特**用计算机绘制了第一张以他的名字命名的混沌图像。



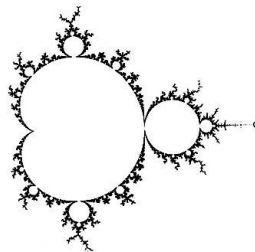
曼德尔布罗特图像

20世纪90年代混沌科学与其它科学相互渗透。

无论是在数学、物理学、化学、生物学、生理学、心理学、电子学、信息科学，还是天文学、气象学、经济学，甚至在音乐、艺术等领域，混沌都得到了广泛的应用。

21

B.B.Mandelbrot



22

混沌在现代科学中的重要性

施莱辛格(M.Schlesinger)说，“20世纪科学将永远铭记的只有三件事，那就是相对论、量子力学与混沌”。

福特(J.Ford)认为，混沌是20世纪物理学的第三次革命。与前两次革命相似，混沌也与相对论及量子力学一样冲破了牛顿力学的教规。

“相对论消除了关于绝对空间与时间的幻想；量子力学则消除了关于可控测量过程的牛顿式的梦；而混沌则消除了拉普拉斯关于决定论是可预测性的幻想”。

23

混沌是直接研究我们所看得见摸得着的宇宙，以及在人类本身的尺度大小差不多的对象中**发生的过程**，所有**日常生活经验**与这个**世界的真实图像**都是我们研究混沌时所探索的目标。

混沌是一种关于**过程**的科学而不是关于状态的科学，是关于**演化**的科学而不是关于存在的科学。

混沌无处不在。一支上翘的香烟，烟纹袅袅涡卷；在风中旗帜前后拍动；滴水的自来水龙头，水滴的花样由稳态变为随机；气候的变化形态；飞机的飞行形态；高速公路上汽车拥挤的形态；油管内油的流动形态；.....

混沌中蕴含着**有序**，有序的过程也可能出现混沌。

24

“蝴蝶效应”

- 1972.12.29, AAAS, 139次会议
- 气象学家洛伦兹 (Edward Lorenz)
- 巴西的一只蝴蝶会引起美国德州一场龙卷风。



25

混沌研究事例

1961年美国气象学家洛伦兹在研究大气对流对气候的影响时，用牛顿力学建立了一组非线性微分方程：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma(x - y) \\ \frac{dy}{dt} = -xz + \gamma x - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \quad (\sigma, \gamma, b \text{ 为参数})$$

26

The three-equation model used by Edward Lorenz to demonstrate chaos derives from a truncated Fourier series expansion of the partial differential equations describing a thin, horizontal layer of fluid heated from below and cooled from above. Lorenz proposed the equations as a crude model of the motion of a region of the atmosphere driven by solar heating of Earth. In standard notation, the equations are

$$\begin{aligned} dX/dt &= \sigma(-X + Y), \\ dY/dt &= rX - Y - XZ, \text{ and} \\ dZ/dt &= -bZ + XY, \end{aligned}$$

where X represents the intensity of the convective motion, Y is proportional to the temperature difference between the ascending and descending convective currents, and Z indicates the deviation of the vertical temperature profile from linearity.

The parameters b and σ capture particulars of the flow geometry and rheology, and r , the Rayleigh number, determines the relative importance of conductive and convective heat transfer.

27

Lorenz fixed b and σ at $8/3$ and 10 , respectively, leaving only r to vary.

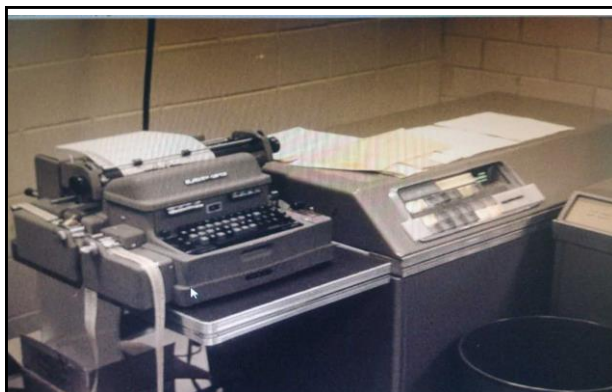
For small r , the system has a stable fixed point at $X = Y = Z = 0$, corresponding to no convection.

At $r = 1$, two symmetrical fixed points, representing two steady convective states, emerge.

For $r \gtrsim 24.74$, the convective states lose stability, and at $r = 28$, the system exhibits nonperiodic trajectories like the one shown in figure 2 of the text. Such trajectories forever orbit along a bounded region of the three-dimensional space known as a chaotic attractor and never intersect themselves—otherwise they would be periodic.

For larger values of r , the Lorenz equations exhibit a remarkable array of different behaviors.

28



960年代洛伦兹使用的LGP-30计算机

29

Lorenz发现混沌其实也是一个极为偶然的过程 (A serendipitous discovery)

当他在对一个具有12个变量的简单大气模式进行数值积分时，为了看到更仔细的结果，用前面打印出的一行数据做为初值，让计算机重新进行计算，然后就出去喝咖啡了。等他回来时，他惊奇地发现新的计算和原来的结果不一样，而且很快排除了计算机错误的可能。因为差异的原因只可能是来自初始数据的舍入误差，这就意味着初始条件一点微小的误差就可能引起后来状态的巨大差异。虽然方程是完全决定论的，却得到了和拉普拉斯的时钟般精确的决定论观点完全相反的结论。他通过对其他气象学者的访问，进一步简化模式为只含有三个变量的方程组，并最终得到了被他后来称为奇怪吸引子的解，并以“决定论的非周期解”为题发表于1963年的大气科学杂志 (JAS) 上。

30

虽然现在混沌理论已成显学，并在其他学科比如物理学、生物学、经济学等学科当中也得到广泛的应用，但在发表以后的整整12年中，洛伦兹的这篇文章一共只被引用过不到20次。一直到1975年数学家李天岩和Yorke发表了“周期三意味着混沌”，洛伦兹的工作才被外界注意到，并在以后的岁月里，和相对论、量子力学并列，被认为是二十世纪三大影响人类世界观的自然科学理论之一。但事实上，早在1950年代，他本人在气象学界就已经是以思想深邃、风格独特著称的知名理论家了。或许，洛伦兹这篇文章的戏剧性命运本身就是混沌理论的一个最好例证。

31

1972年洛伦兹在AAAS第139届年会关于环境变化的分会上以“Does the flap of a butterfly’s wings in Brazil set off a tornado in Texas?”做了介绍其理论的报告。

据洛伦兹自己回忆，这个题目并不是他自己起的，他习惯用的比喻是海鸥而不是蝴蝶。他进一步考证蝴蝶的翅膀的使用应归功于他的同事，数值天气预报的领袖级人物Joe Smagorinsky。

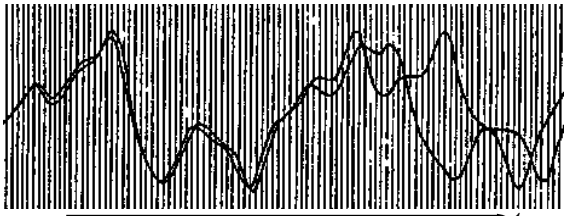
无论怎么说，蝴蝶的翅膀让混沌理论飞到了几乎每一个人的头脑里。巧合的是，洛伦兹吸引子的相空间演变动画看上去又何尝不像一对不停拍动的蝴蝶翅膀呢？

32

下面是他所得到的原始打印图。初始值为0.506与初始值为0.506127(只差千分之一)的两条曲线。原来是基本相同的出发点，但洛伦兹在计算机上看到了气象结果是一步步地分开，直到全然不像。

33

初始值为0.506与0.506127的两条气象曲线：

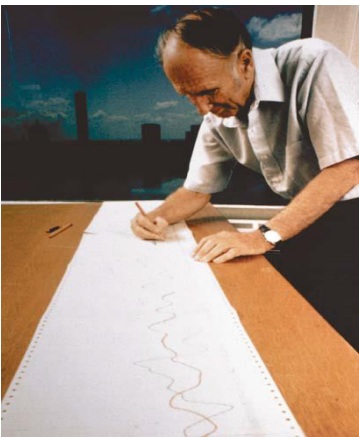


初值敏感性

结论：长期的天气预报是不可能准确的。

A close-up of Lorenz’s original printout from his discovery of the butterfly effect shows two time series generated with the same equations but with slightly different initial conditions. The series diverge exponentially with time due to sensitive dependence on initial conditions.

34



Edward Lorenz and the butterfly effect. Lorenz, studying a computer generated time series. (Photo courtesy of the Inamori Foundation.)

35

他把气候对初始值有敏感性的现象用一个风趣的词“蝴蝶效应”来描述：

今天在Brazil有一只蝴蝶煽动了一下翅膀，引起非常小的气流，可能几个月后在Texas引起一场大风暴。

36



现在人们知道，运动对初始值的依赖性可以分为两类。

第一类是运动情况一般地依赖初值：

如单摆的自由小摆动（线性微分方程）就属于这类。若我们重复作两次单摆自由小摆动实验，主观上让单摆的初始角都是 θ_0 ，初速度都是零。因为实验总有一定的精确度，初始条件总会有微小差别，因此，两次摆动的情况也会有差别，但是实验中测不出差别来。这说明单摆的运动对初值并不敏感。

38

第二类是运动情况敏感地依赖初值：

如上面所说的气候的变化问题（非线性微分方程）就属于这类。气候的初始值若有微小差别（但测不出来），气候的演变对初值非常敏感，于是实际气候的变化与计算得到的预期值就越来越偏离。应该指出，气候的演变也是服从牛顿定律的，所谓“不可能作长期准确预报”，应从物理量（如初始值）的测量总存在误差，而且牛顿定律对初始值有敏感性来认识。

一般而言，服从非线性规律的非线性系统才可能对初始值表现出敏感性。

39

描述力学系统运动的微分方程，在进行数值计算时，常化为代数方程进行迭代运算。

让我们来看一个典型的非线性迭代方程的例子：“虫口问题”的简化数学模型。

x_n ：第 n 代的虫口

$$x_{n+1} = Ax_n$$

$$x_{n+1} = Ax_n - Bx_n(x_n - 1)/2$$

x_n 很大时可以近似写成

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \quad \lambda \in [0, 4], x_n \in [0, 1]$$

（逻辑斯谛映射—logistic map）

40

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \quad 0 < \lambda \leq 4, \quad 0 < x \leq 1$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

若 $\lambda = 4$ ，给定三个有微小差别的初始值，结果有：

n	x_n		
0	$x_0=0.1$	$x_0=0.1+10^{-8}$	$x_0=0.1+10^{-7}$
1	0.36	0.36...	0.36...
2	0.9216	0.9216...	0.9216...
...
10	0.147837...	0.147824...	0.147715...
...
50	0.277...	0.435...	0.973...
51	0.802...	0.983...	0.141...
52	0.634...	0.066...	0.373...

41

从前几次迭代结果还看不出三者有什么差别，迭代到第 10 次所得结果的差别也不显著，但经过 50 次迭代后就可以看出结果相差很大，而且飘忽不定，有随机性。

这种由于对初值敏感引起的随机性，称为内在随机性，而结果的飘忽不定，称为混沌现象。

可以说：

混沌是在决定性动力学系统中出现的一种貌似随机的运动。

42

43

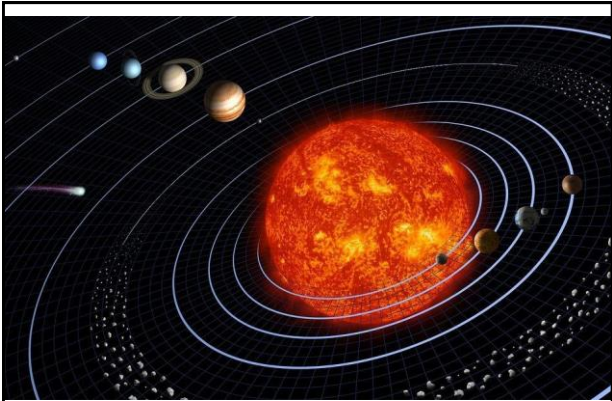
44

45

46

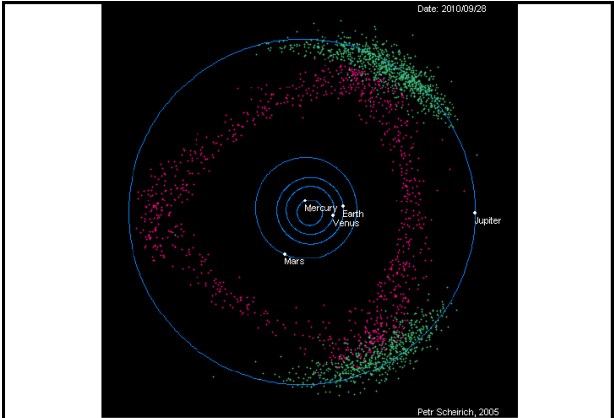
47

48



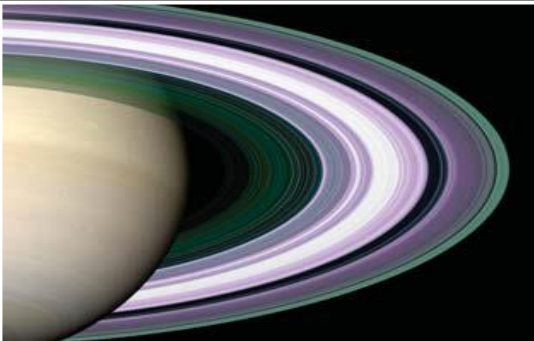
火星和土星之间有许多小行星

49



木星让陨石轨道远离地球

50

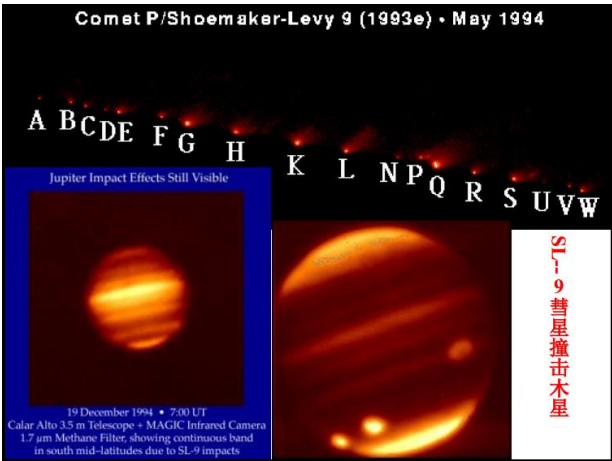


Chaos manifests itself in a diverse range of natural settings, (a) the rings of Saturn, where unpopulated gaps correspond to chaotic orbits, as predicted by the Kolmogorov- Arnold- Moser theory (courtesy of NASA/ Cassini mission).

51

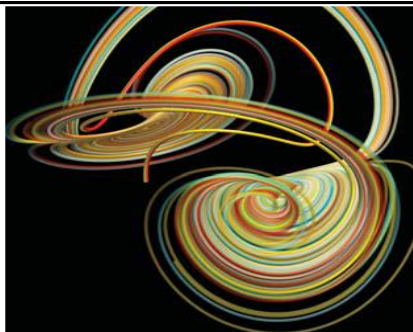


SL-9彗星被木星引潮力撕碎成21块(1992-94)。



Chaos manifests itself in a diverse range of natural settings, (b) phytoplankton blooms—seen here in a satellite image of the Barents Sea—which form fractal-like structures due to chaotic advection (adapted from NASA/Ocean Color Web).

54



Chaos manifests itself in a diverse range of natural settings, (c) Earth's geomagnetic field, which, on astronomical time scales, reverses its poles at irregular, chaotic intervals—a behavior captured by this simulated chaotic attractor⁵⁵ (courtesy of Christophe Gissinger).

牛顿力学的内在随机性的发现，是我们对牛顿力学认识的深化。经历了三百多年的牛顿力学至此被推到了一个新的更深入、更全面的认识阶段。这说明牛顿力学也在发展。

国际知名的力学家利特赫尔说：

“我们必须以广大的全球力学工作者的名义说，我们愿意集体道歉，向接受教育的广大公众散布了满足牛顿运动定律的系统决定论思想。”

56

混沌的基本特征

1. 系统有完全确定性的方程来描述，无任何随机因子，但必有非线性项。
2. 系统的随机行为是其内在特征，并不是外界噪声或干扰引起的。
3. 对初始条件的极端敏感性。

内在随机性是通过初始条件的极端敏感性表现出来的，也就是说，初始条件的误差在非线性动态系统中可能会按指数律增长。“差之毫厘，失之千里”。

57

对初值敏感性的认识，在西方国家里也有这样的民谣：

“钉子缺，蹄铁卸；
蹄铁卸，战马蹶；
战马蹶，骑士绝；
骑士绝，战事折；
战事折，国家灭！”

— 乔治·赫伯特

58

七言古诗 赠龙光长老 苏轼（宋）

东坡居士过龙光，求大竹作扇。得两竿。南华珪首座，方受请为此山长老。乃留一偈院中，须其至，授之，以为他时语录中第一问。

斫得龙光竹两竿，
持归岭北万人看。
竹中一滴曹溪水，
涨起西江十八滩。

59

对混沌现象的研究是物理学的前沿和热点。

世界上的非线性系统远远多于线性系统，这正像无理数远多于有理数一样，因此可以说，世界在本质上是非线性的。

过去只是由于知识的掌握与技术成熟的程度不够，所以历史上熟悉了规律大多体现为线性的。

60

《混沌学传奇》代序中的一段话：

“混沌学之出现，是现代科学和现代技术，特别是和计算机技术相结合的产物。天文地理，数理化生，莫不混沌，大至宇宙，小至基本粒子，无不由此理论支配，威力之大，影响之深，应用之广，莫可言状。...”

61

讨论1:

混沌是普遍的：
因为世界是一个普遍非线性的世界

讨论2:

混沌并不是完全无序的状态，
它具有普适性的规律。

例如费根鲍姆数 δ :

$$\delta = 4.669\ 201\ 609\ \dots\dots$$

($\lambda_n = \lambda_\infty - A/\delta_n$, λ_n 表示分岔的位置)

62

讨论3:

吸引子：具有使系统被吸引并最终固定于某一状态的性质。

点吸引子和极限环吸引子，也叫做收敛性吸引子一起着限制的作用而使系统的性态呈现出静态的、平衡性特征。

奇异吸引子，使系统偏离收敛性吸引子的区域而导向不同的形态。

可以用作讨论：分子能级结构，脑及神经控制系统中的吸引子，心脏的纤颤.....

两类吸引子的相互作用

63

Lorenz方程(1963)

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma(x - y)$$

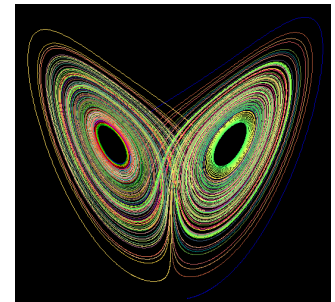
$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

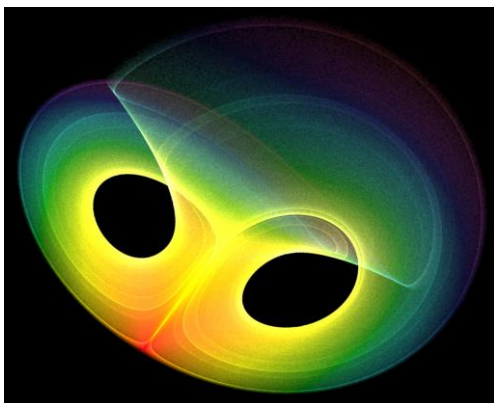
非线性项为 xy, xz .

标准取值(σ, b, r)

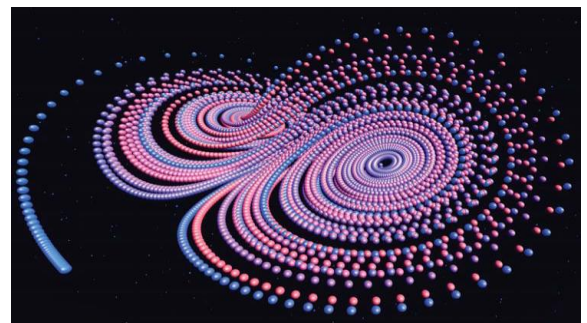
$$= (10, \frac{8}{3}, 28)$$



64



65

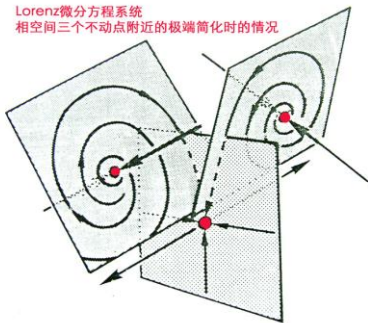


The Lorenz attractor, as revealed by the never-repeating trajectory of a single chaotic orbit. The spheres shown here represent iterations of the so-called Lorenz equations, calculated using the original parameters in Edward Lorenz's seminal work. (Spheres are colored according to the iteration count.) From certain angles, the two lobes of the attractor resemble a butterfly, a coincidence that helped earn sensitive dependence on initial conditions its nickname—the butterfly effect. An animated visualization of the attractor is available online.

66

Lorenz系统相空间几何示意图(1)

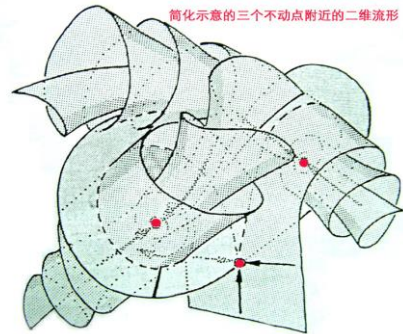
Lorenz微分方程系统
相空间三个不动点附近的极端简化时的情况



67

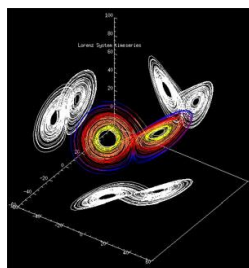
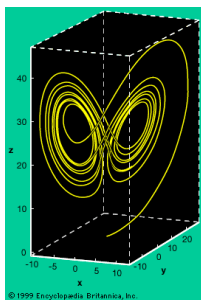
Lorenz系统相空间几何示意图(2)

简化示意图的三个不动点附近的二维流形

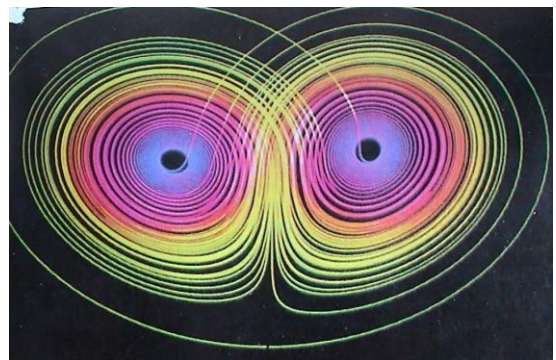


68

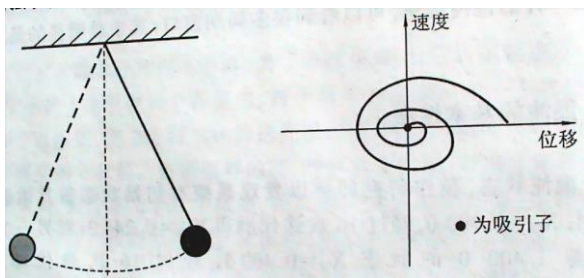
数值积分（龙格-库塔法）



69



70



71

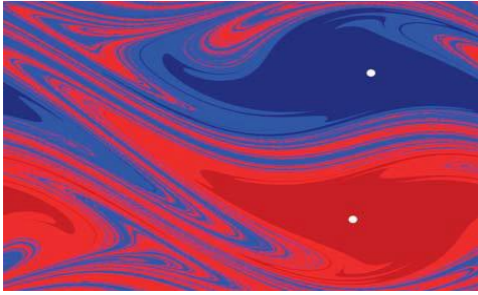


Chaos in dissipative systems.

(a) The phase-space trajectories of a periodically driven, damped pendulum converge to a chaotic attractor, plotted here at integer multiples of the driving period; stretching and folding of volumes in phase space gives the attractor its fractal structure.

The x and y dimensions are position and angular momentum, respectively.

72



Chaos in dissipative systems.

(b) For a sufficiently dissipative pendulum, the phase space contains two nonchaotic, periodic attractors, indicated here with white dots on the plane of initial conditions. Nevertheless, the phase space contains a chaotic set at the boundary between the attractors' respective basins of attraction, indicated in red and blue. The x and y dimensions are position and angular momentum, respectively. ⁷³



Chaos in conservative systems.

(a) A stroboscopic map shows the phase-space trajectories of a periodically kicked rotor. The map displays periodic and quasi-periodic regions, which correspond to the looped trajectories in the image, and chaotic regions, which correspond to the scattered trajectories. The x and y dimensions are position and angular momentum, respectively. ⁷⁴



Chaos in conservative systems.

(b) Magnification of the small boxed region in the phase space illustrates the approximately self-similar nature of the phase space. The x and y dimensions are position and angular momentum, respectively. ⁷⁵

Duffing振子与Ueda吸引子

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \kappa \frac{dx}{dt} + f(t) = e(t)$$

或

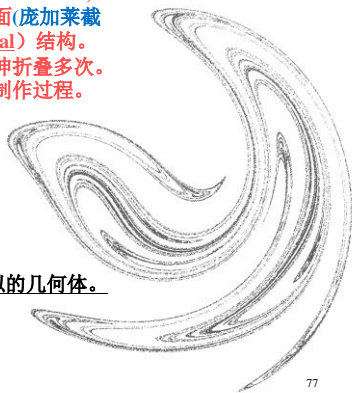
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + x^3 = F \cos \omega t$$

Chihiro Hayashi (林 千博)

Yoshisuke Ueda (上田皖亮)

⁷⁶

上田吸引子 (Y. Ueda Attractor):
三维流的一个二维截面(庞加莱截面), 具有分形(fractal)结构。
几何上, “面团”拉伸折叠多次。
想像兰州牛肉拉面的制作过程。



分形: 具有复杂自相似的几何体。

⁷⁷

讨论4:

分形: 系统在不同标度下具有自相似性质—跨尺度的对称性, 它意味着递归, 即在一个模式内部还有一个模式。

分形的两个特点:

第一、自始至终都是不规则的;

第二、在不同的尺度上, 不规则程度是一个常量。

⁷⁸

分形在自然界中非常普遍。各种混沌对应的非线性过程都具有明显的分形结构，也就是说我们可以通过非常简单的非线性过程得到非常复杂的世界。即通过非线性，世界可以从简单到复杂。

“一粒沙中见世界”。

混沌主要讨论非线性动力系统的不稳、发散过程，但系统状态在相空间总是收敛于一定的吸引子，这与分形过程非常相象。

79

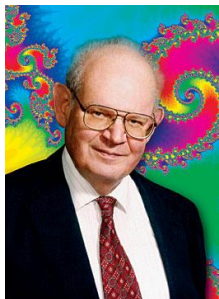
有chaos就有fractal(分形)

- 时间演化过程是混沌。
- 相空间的结构是分形。
- 分形(fractal)一词：
B.B.Mandelbrot(1924-)起英文名。
李荫远院士译成中文名。
惠勒(费曼的老师)的类比：熵与分形



80

分形概念
海岸线有多长
整数维到分数维



81

云朵不是球形的，山峦不是锥形的，
海岸线不是圆形的，树皮不是光滑的，
闪电也不是一条直线。

——分形几何学之父Benoit Mandelbrot

82

分形先驱者



83

海岸线有多长？

- Mandelbrot在《科学》上的短文
- 海岸线等是**无标度**对象：用多大刻度的尺去量？长度已经不是一个很好的测度方式，寻找新的不变量：测度维。
- 山重水复疑无路，
分数维数新测度。
幂律关系显结构，
标度变换双对数。

84

对于一维对象：
 $N=3, L=3, d=1$
 对于二维对象：
 $N=9, L=3, d=2$
 对于三维对象：
 $N=27, L=3, d=3$

其中
 N 为小体的个数，
 L 为放大倍数，
 d 为维数。

一维 $d=1$
 $1 \Rightarrow 3^1 = 3$

二维 $d=2$
 $1 \Rightarrow 9 = 3^2$

三维 $d=3$
 $1 \Rightarrow 27 = 3^3$

$L=3$
 $N=L^d$

从放大的方向看测度维数

$$d = \frac{\log N}{\log L}$$

- d 为维数，
- N 为小体的个数，
- L 为放大倍数。

从缩小的方向看测度维数

$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log (1/\epsilon)}$

N = 小体个数

分形体的构造1：谢氏三角

每次去掉中间的四分之一

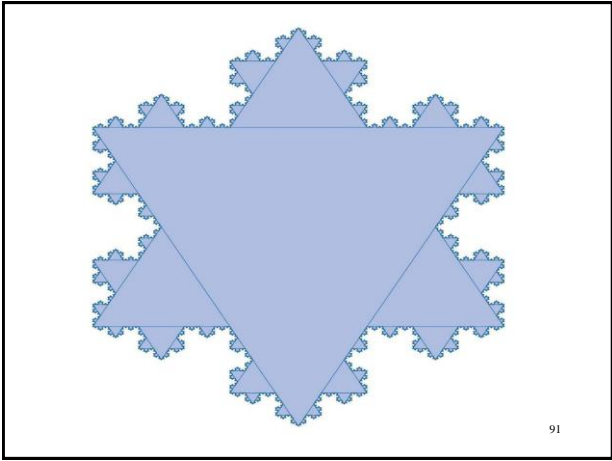
分形体的构造2：谢氏垫

去掉中间的九分之一

分形体的构造3：柯赫

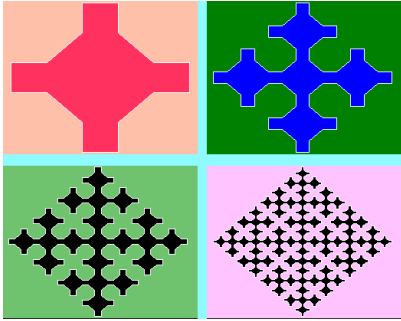
科赫(H. von Koch)雪片

(从一个边长为1的等边三角形开始，在每一条边的中间加上一个新的以原来1/3边长为边的三角形，如此一直画下去。)



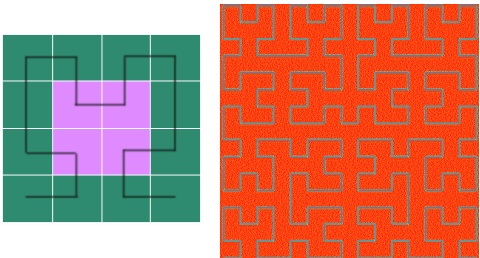
91

分形体的构造4：皮亚诺



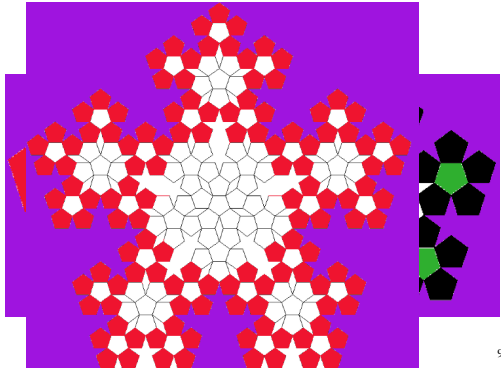
92

分形体的构造5：希尔伯特



93

分形体的构造6：丢勒



94



分形闪电（经历的路径是逐步形成的）

95



Information Preservation and Weather Forecasting for Black Holes*

S. W. [Hawking](#)

¹DAMTP, University of Cambridge, UK

Abstract

It has been suggested [1] that the resolution of the information paradox for evaporating black holes is that the holes are surrounded by firewalls, bolts of outgoing radiation that would destroy any infalling observer. Such firewalls would break the CPT invariance of quantum gravity and seem to be ruled out on other grounds. A different resolution of the paradox is proposed, namely that gravitational collapse produces apparent horizons but no event horizons behind which information is lost. This proposal is supported by ADS-CFT and is the only resolution of the paradox compatible with CPT. The collapse to form a [black hole](#) will in general be [chaotic](#) and the dual CFT on the boundary of ADS will be turbulent. Thus, like weather forecasting on Earth, information will effectively be lost, although there would be no loss of unitarity.

[hep-th] 22 Jan 2014

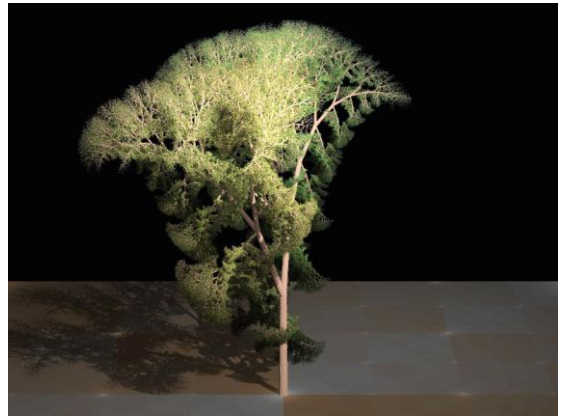
斯蒂芬·威廉·霍金近作（有关黑洞的形成视为经典意义下的混沌过程）

96

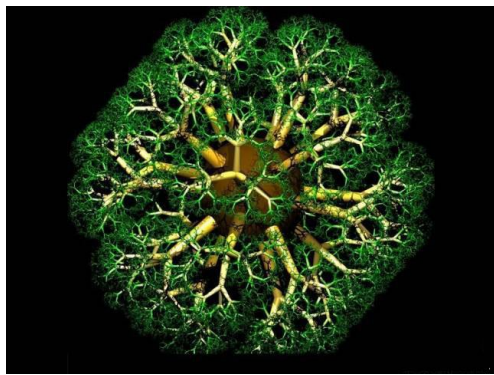


分形植物（在生成分枝形状和叶片图案时遵循简单的递归法则）

97

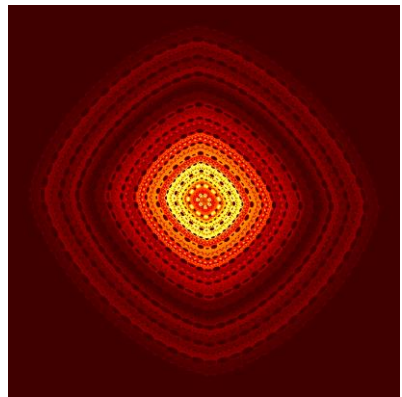


98



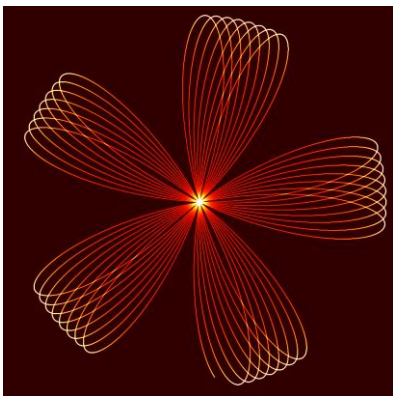
围绕十二面体的三维树分形

99



马丁迭代

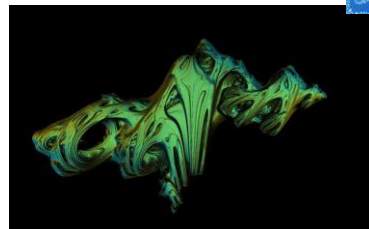
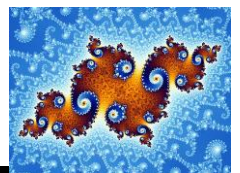
100



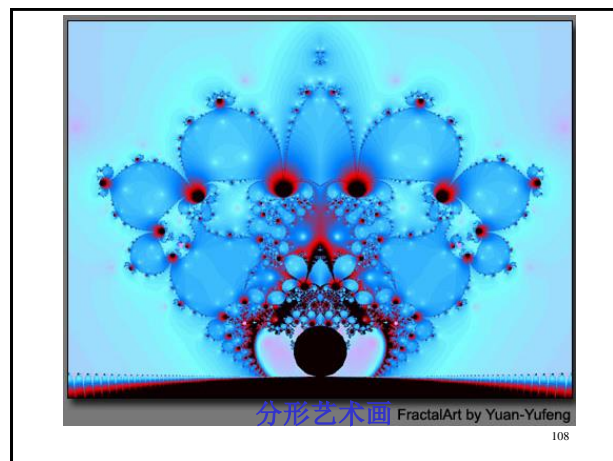
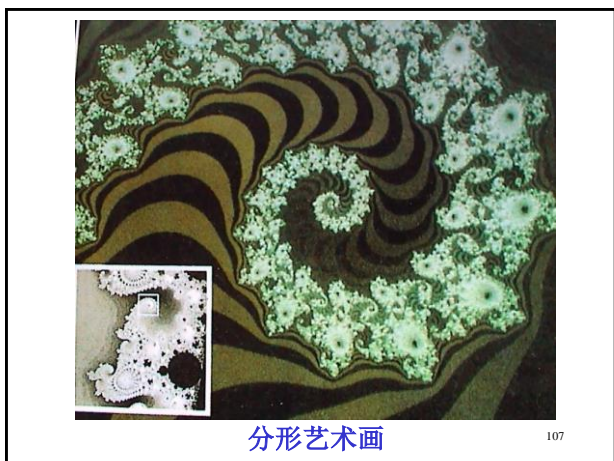
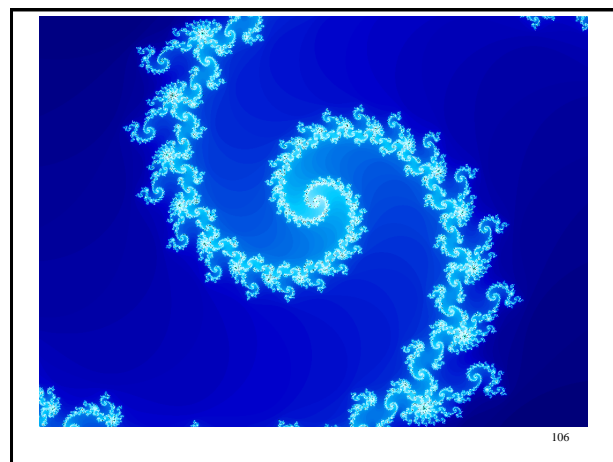
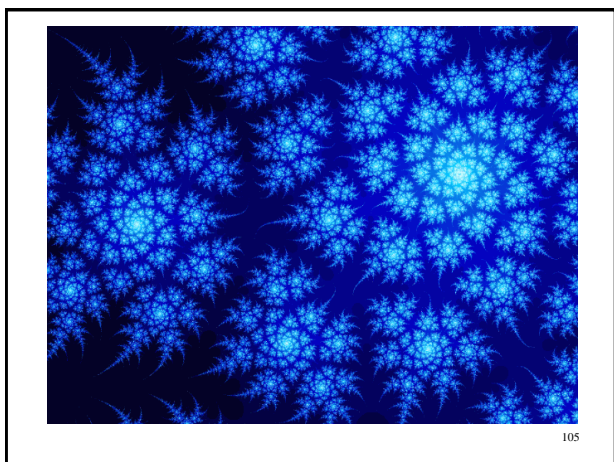
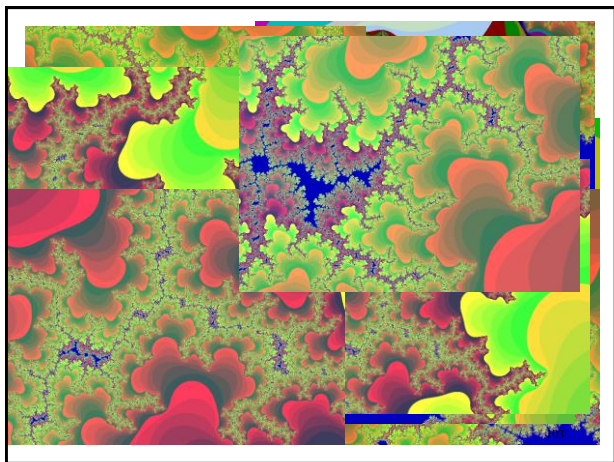
玫瑰线

101

分形艺术



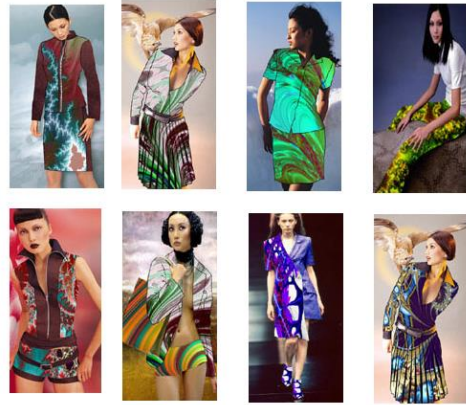
102





分形时装

109



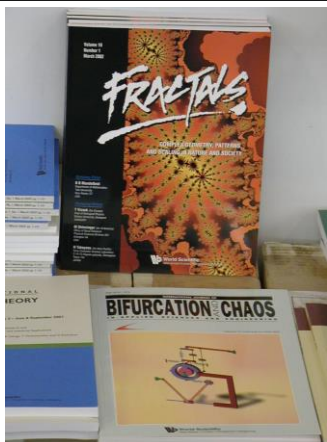
110



111



112



113

讨论5:

混沌与传染病学

和目前流行的多因素方法不同，混沌传染病学认为传染病发病是由少数几个原因决定的。

发病个例的不可预测性并不是随机性所导致的，而是取决于确定性的混沌动力学。高发病则大下降，中发病则中变化，少发病则混沌。所以这类疾病的爆发可能并非预防措施的失误，也不是噪声所致，而是混沌所致。

114

讨论6:

混沌与社会

1988年中国人陈平在“经济混沌在经验上与理论上的证据”中认为经济社会的混沌也是来源于反馈的非线性系统。

结论:

- 1. 扩大经济统计的数据库
- 2. 参考系的确定, 找出历史的转折点
- 3. 用经验参数去估计

“中央之帝”为Chaos

- There are systems whose trajectories do not monotonically approximate any ideal state. They are sensitive dependence to initial conditions.
- 混沌轨道在相空间中: 回复而不殆, 周行而不闭。
- 混沌轨道在轨道意义上不稳定, 在结构意义上可以稳定: 局部上总也安顿不下, 整体上又跑不掉。混沌依然是相对简单的! 大自然比此更奇妙。
- 混沌研究从确定性中引出了不确定性!

一般来说, 人们更容易偏好确定性, 而对不确定的混沌状态总会产生担忧, 但洛伦兹曾经这样说过: “我们必须全心全意地相信自由意志。如果自由意志是现实的, 那么我们可以做出正确的选择。如果不是, 我们也不能做出一个错误的选择, 因为如果没有自由意志的话, 我们根本不能做任何选择。”

“We must wholeheartedly believe in free will. If free will is a reality, we shall have made the correct choice. If it is not, we shall still not have made an incorrect choice, because we shall not have made any choice at all, not having a free will to do so.”

回到庄子的寓言, 当与倏和忽为友的浑沌没有口眼耳鼻的时候, 无妨其拥有自由意志, 所以他是活的; 但当倏和忽日凿一窍, 把他们的意志强加给浑沌的时候, 他就死了。

这难道不是现代的混沌理论和古典的庄子寓言之间的暗合吗? 更何况, 庄子不也梦过蝴蝶吗?



庄周梦蝶(图片来自网络)

参考文献

- ▲“混沌行为与牛顿力学的内在随机性” (杜婵英, 漆安慎) 《工科物理》1991.1
- ▲“混沌现象及其在工科物理教学中的适量反映” (王殖东) 《工科物理》1992.4
- ▲《混沌学传奇》(卢侃, 孙建华编译)
- ▲《新概念物理教程》“力学”(赵凯华, 罗蔚茵)



—完—