振动（vibration）是自然界中最普遍的一种运动形式。物体在平衡位置附近做往复的周期性运动，称为机械振动。电流、电压、电场强度和磁场强度围绕某一平衡值做周期性变化，称为电磁振动或电磁振荡。

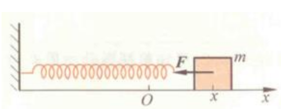
一般地说，任何一个物理量的值不断地经过极大值和极小值而变化的现象，称为振动。

虽然各种振动的具体物理机制可能不同，但是作为振动这种运动的形式，它们却具有共同的特征。

振动
- 受迫振动 ⟶ 共振
- 自由振动
  - 阻尼自由振动
  - 无阻尼自由振动
    - 无阻尼自由非谐振动
    - 无阻尼自由谐振动（简谐振动）

§6.1 简谐振动

1、简谐振动的动力学方程



水平弹簧子，光滑水平面

已知　m　k

$t=0,\ x_0=A$

$\upsilon_0=0,\quad a_0<0$

建立坐标系如图

$F=-kx$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

令 $\frac{k}{m}=\omega^2$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

$x=B\cos(\omega t+\varphi)$

$\upsilon=\frac{dx}{dt}=-\omega B\sin(\omega t+\varphi)$

$a=\frac{d\upsilon}{dt}=-\omega^2B\cos(\omega t+\varphi)$

$t=0,\ x_0=A$

$\upsilon_0=0,\quad a_0<0$

$x=A\cos\omega t$

一般情况下

$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

振动函数

x 可作广义理解（位移、电流、场强、温度…）

定义式　简谐振动

这种用时间的正弦或余弦函数来描述的振动，可用 **SHM**表示

2. SHM的特征量

$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$ $\boxed{\upsilon = -\omega A\sin(\omega t+\varphi)}$

➢振幅 A 由初始条件和系统本身情况决定

动能

$$E_k = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t+\varphi) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

势能 $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$

总能量 $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = const.$

$$\boxed{A = \sqrt{x_0^2+\frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{2E}{k}}}$$

7

$\boxed{x = A\cos(\omega\, t+\varphi)}$ $\boxed{\upsilon = -\omega A\sin(\omega\, t+\varphi)}$

➢相位 初相位 φ

$\Phi = \omega\, t+\varphi$ $\boxed{\varphi = \mathrm{tg}^{-1}(-\frac{v_0}{\omega\, x_0})}$ （一般取主值）

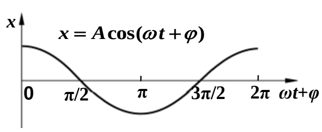
— 由初始条件及系统本身情况决定

有“相貌”和“位形”之意；

代表简谐振动在一个周期内的运动状态。

对于一维振子，代表 t 时刻位移 x 的大小和方向。

8



•$\omega t+\varphi = 0$：物体静止于 x 轴正向最远点

•$\omega t+\varphi = \pi/2$：经平衡位置沿反向运动

•$\omega t+\varphi = \pi$：静止于反向最远点

•$\omega t+\varphi = 3\pi/2$：经平衡位置沿正向运动

•$\omega t+\varphi = 2\pi$：返回到正向最远点

——相位代表简谐振动的运动状态

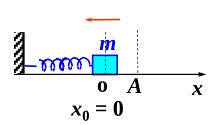
9

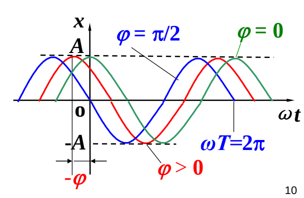
$x = A\cos(\omega t+\varphi)$

初相 φ 决定于时间零点的选择，

通常值取在 $-\pi$ 到 π 之间。

初相不同的振动曲线

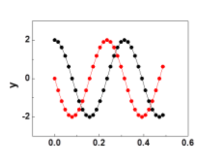




10

$x = A\cos(\omega t+\varphi)$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 2\cos(20\,t)(black) \\ y_2 &= 2\cos(20\,t+\pi/2)(red) \end{aligned}}$$



y_2 比 y_1 超前 $\pi/2$ y_1 比 y_2 落后 $\pi/2$

11

$\boxed{x = A\cos(\omega\, t+\varphi)}$ $\boxed{\upsilon = -\omega A\sin(\omega t+\varphi)}$

角频率(圆频率) $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ 由系统本身决定（固有）

周期（period） $\boxed{\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}}$

频率（frequency） $\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$

12

3. 无阻尼自由振动条件下SHM的判据

（针对机械振动）

①受力特征 $\boxed{F=-kx}$

F — 恢复力（弹性力或准弹性力）

k — 劲度系数（stiffness）或刚度系数(rigidity)

②微分方程 $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0}$

ω — 角频率（angular frequency）

又称 圆频率（circular frequency）

13

---

③能量特征

$$x=A\cos(\omega t+\varphi) \qquad \upsilon=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

动能 $E_k=\dfrac{1}{2}m\upsilon^2=\dfrac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$

$=\dfrac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$

势能 $E_p=\dfrac{1}{2}kx^2=\dfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$

总能量 $E=E_k+E_p=\dfrac{1}{2}kA^2=const.$

14

$$E_k=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$E_p=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$\bar{E}_k=\bar{E}_p=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)dt=\frac{1}{4}kA^2$$

15

$$E_k=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$E_p=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$\bar{E}_k=\bar{E}_p=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}kA^2$$

无阻尼自由振动的能量

“自由”：

振动过程中，没有外界驱动力作功(机械振动情形)；

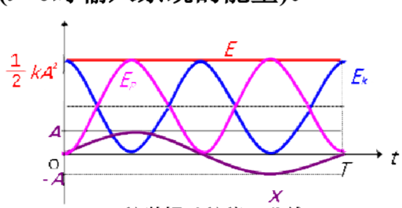
“无阻尼”：

振动过程中，没有能量损耗。

因此，系统作无阻尼自由振动时，振动能量必然守恒。

16

简谐振动系统机械能守恒，能量没有输入，也无损耗，各时刻的机械能均等于起始能量E_0(t =0时输入系统的能量)。



简谐振动的能量曲线

振动系统的能量正比于振幅的平方。

17

能量特征

$$\begin{cases}\text{总能量 } E=\text{const.}\\ \text{势能 } E_p=\dfrac{1}{2}kx^2\text{（平衡位置为}E_p\text{的零点）}\end{cases}$$

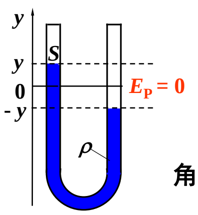
以上①、②、③中任一条成立即可判定为SHM。

【思考】设地球密度均匀，质点通过穿过地球的直隧道的振动是SHM吗？ (depending on the initial position)

18

例1. 已知：U 形管内液体质量为m，密度为ρ，管的截面积为S。开始时，造成管两边液柱面有一定的高度差，忽略管壁和液体间的摩擦。试判断液体柱振动的性质。

解法1. 分析能量 （平衡液面为坐标原点）



$$\left.\begin{aligned} &E_p = (\rho g S y)\cdot y = \frac{1}{2}ky^2 \\ &k = 2\rho g S \\ &\text{无损耗}\ E = \text{const}. \end{aligned}\right\}\ \text{SHM}$$

角频率 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{2g\rho S}{m}}$

平衡液面为坐标原点

左边液面上升y，显然右边液面下降y。左边液柱y重心位置为1/2y，液体势能增加

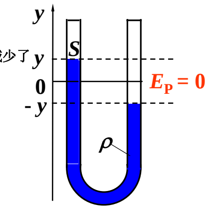
$$\Delta E_{pL} = (\rho S y g)\cdot\frac{1}{2}y$$

右边液面下降，液柱y重心下降1/2y，液体势能减少了

$$\Delta E_{pR} = (\rho S y g)\cdot(-\frac{1}{2}y)$$

液体的势能总共增加了

$$E_p = (\rho g S y)\cdot y = \rho g S y^2 = \frac{1}{2}ky^2$$



$$\left.\begin{aligned} &E_p = (\rho g S y)\cdot y = \frac{1}{2}ky^2 \\ &k = 2\rho g S \\ &\text{无损耗}\quad E = \text{const}. \end{aligned}\right\}\ \text{SHM}$$

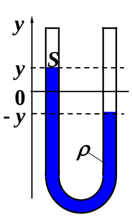
角频率

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{2g\rho S}{m}}$

解法2. 分析受力（压强差）

左边液面向上位移y时，比右边液面高2y。这段液体的重力

$F = 2\rho S y g$ 与y反向，使整个液柱产生加速度



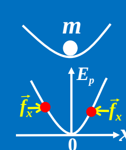
$$\left.\begin{aligned} &\text{恢复力}\ F = -2\rho g S y \overset{令}{=} -ky \\ &k = 2\rho g S = \text{const}. \end{aligned}\right\}\ \text{SHM}$$

角频率 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{2g\rho S}{m}}$

注：m为全部液体的质量

例2. 稳定平衡位置附近的微振动是简谐振动

证明：在 x =0附近将势能展开



$$E_p(x) = E_p(0) + \left(\frac{dE_p}{dx}\right)_0 x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_0 x^2 + \cdots$$

$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_0 = 0,\quad \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_0 > 0$$

对微振动，可只取到x^2项，且取$E_p(0)=0$

则有

$$E_p(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_0 x^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

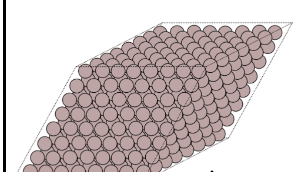
$$k = \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_0 > 0$$

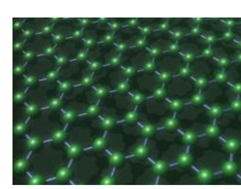
$$f_x = -\left(\frac{dE_p}{dx}\right) = -\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_0 x = -kx$$

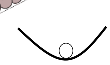
即，稳定平衡位置附近的微振动是简谐振动。

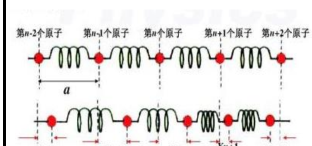
微振动例：原子核内质子和中子的振动、原子和分子的振动、固体晶格格点的振动等。

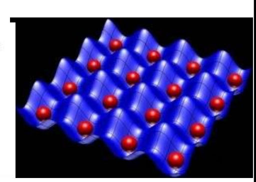
稳定平衡位置附近的微振动是简谐振动





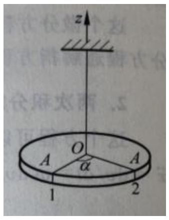


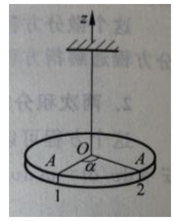




【例题3】

扭摆是一个一维无阻尼自由振动的系统。如图所示。悬丝下端挂一个物体，称为扭摆。物体在悬丝的扭矩作用下绕竖直轴来回摆动。忽略阻力，讨论物体的转动。





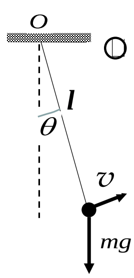
$$-k\alpha = J\beta = J\frac{d\omega}{dt} = J\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{k}{J}\alpha = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k}{J}$$

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$

【例题4】



$$-lmg\sin\theta = l\frac{d(mv)}{dt}$$

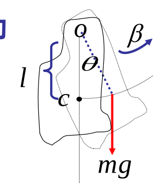
$$= lm\frac{d(l\omega)}{dt} = l^2 m\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$$\theta << 1 \qquad \sin\theta \approx \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \qquad \omega^2 = \frac{g}{l}$$

【例题5】复摆（物理摆）的振动



由转动定律 $-mgl\sin\theta = J\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

得 $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{mgl}{J}\sin\theta = 0$

对比谐振动方程知：一般情况不是简谐振动

但若做小幅度摆动

即当 $\sin\theta \approx \theta$ **时**

满足的方程： $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{mgl}{J}\theta = 0$

动力学方程

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl}{J}\theta = 0 \quad \textbf{对比} \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

振动的物理量　　**角位移** θ

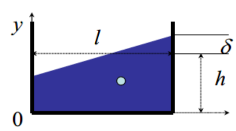
固有圆频率　　$\omega^2 = \dfrac{mgl}{J}$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl}{J}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

振动表达式　　$\theta = \theta_m \cos\left(\sqrt{\dfrac{mgl}{J}}t + \varphi\right)$

例. 水盆中的晃动模式. 谁能够端一盆水而没有晃动呢？

晃动频率？



解：假设是微小振动

简谐振动?

势能表达式　　$E_P = mg(y_c - \dfrac{h}{2})$

$$x_c = \frac{\delta\frac{2}{3}l + (h-\delta)\frac{1}{2}l}{h} = \frac{1}{2}l + \frac{1}{6}l\frac{\delta}{h}$$

$$y_c = \frac{[\frac{2}{3}\delta + (h-\delta)]\delta + \frac{1}{2}(h-\delta)^2}{h} = \frac{1}{2}h + \frac{1}{6}\frac{\delta^2}{h}$$

$$E_P = mg\frac{1}{6}\frac{\delta^2}{h} = 6mg\frac{h}{l^2}(x_c - \frac{1}{2}l)^2$$

$$= \frac{1}{2}k(x_c - \frac{l}{2})^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(x_c - \frac{l}{2})^2$$

简谐振动 频率 $\omega^2 = 12g\frac{h}{l^2}$

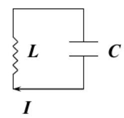
日内瓦湖的平均深度约150m，长度约60km，晃动周期?

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi l}{\sqrt{3gh}} \approx 47\,\text{min}.$$

实际观察到的周期约1小时

观察到的振幅大于5 feet~1.5m

【例】LC电路的振动（振荡）



$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt} = -L\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{q}{C}$$

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

物理量 S　　$\ddot{S} + \omega^2 S = 0$　　简谐振动

通解：　$S = A\cos(\omega t + \varphi)$　　一般 A 大于零

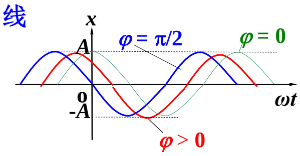
相位

4. SHM的表示法

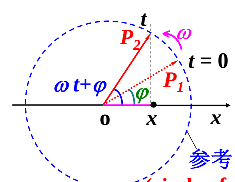
①解析式

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ \upsilon = \dfrac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \varphi + \dfrac{\pi}{2}) \\ a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi) \end{cases}$$

②振动曲线



★③旋转矢量法



$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

振幅、相位、初相位如何表示

（1）旋转矢量

长度A；

以ω为角速度绕o点逆时针旋转；

t=0时矢量与x轴的夹角为初相位φ

（2）矢量端点在x轴上的投影做简谐振动

优点　　1）直观地表达振动状态

分析解析式　$x = A\cos(\omega t + \varphi)$　可知

当振动系统确定了振幅以后

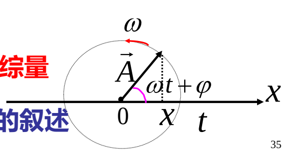
表述振动的关键就是相位 即

表达式中的余弦函数的综量 $(\omega t + \varphi)$

而旋转矢量图

可直观地显示该综量

用图代替了文字的叙述



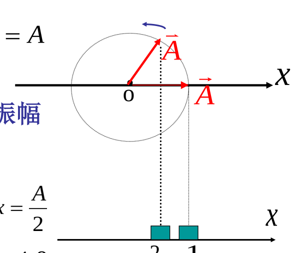
如文字叙述说 t时刻弹簧振子质点

在正的端点　　旋矢与轴夹角为零

$\omega t + \varphi = 0$　意味　$x = A$

质点经二分之一振幅处向负方向运动

$\omega t + \varphi = \dfrac{\pi}{3}$　意味 $\begin{cases} x = \dfrac{A}{2} \\ \upsilon < 0 \end{cases}$



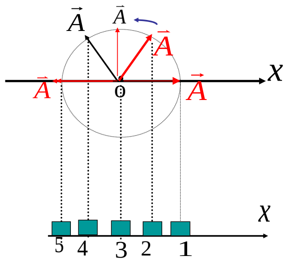
质点过平衡位置向负方向运动

$\omega t+\varphi=\frac{\pi}{2}$ $\begin{cases}x=0\\ \upsilon<0\end{cases}$

同样

$\omega t+\varphi=\pi-\frac{\pi}{3}$ $\begin{cases}x=-\frac{A}{2}\\ \upsilon<0\end{cases}$

$\omega t+\varphi=\pi \quad x=-A$



注意到：234 $\xleftarrow{\upsilon<0}$ 向负方向运动

向正方向运动

$\omega t+\varphi=\pi+\frac{\pi}{3}$ $\begin{cases}x=-\frac{A}{2}\\ \upsilon>0\end{cases}$

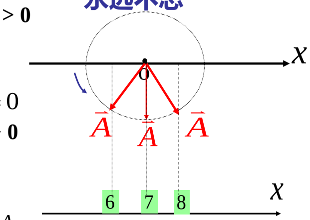
或 $=-\frac{2\pi}{3}$

$\omega t+\varphi=\frac{3\pi}{2}$ $\begin{cases}x=0\\ \upsilon>0\end{cases}$

或 $=-\frac{\pi}{2}$

$\omega t+\varphi=-\frac{\pi}{3}$ $\begin{cases}x=\frac{A}{2}\\ \upsilon>0\end{cases}$

要把这个图和相应的结论印在脑子里永远不忘



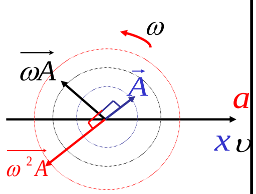
678 $\xrightarrow{\upsilon>0}$ 向正向运动

2） 方便地比较振动步调

$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

$\upsilon=A\omega\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$

$a=A\omega^2\cos(\omega t+\varphi+\pi)$



由图看出：速度超前位移 $\frac{\pi}{2}$

加速度超前速度

位移与加速度 $\Delta\varphi=\pi$ 称两振动反相

若 $\Delta\varphi=0$ 称两振动同相

3）方便计算

用熟悉的圆周运动代替三角函数的运算

例：质量为m的质点和劲度系数为k的弹簧组成的弹簧谐振子

$t=0$时质点过平衡位置且向正方向运动

求：物体运动到负的二分之一振幅处时所用的最短时间

受益匪浅

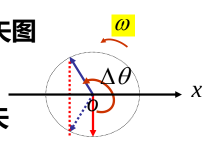
解：设 t 时刻到达末态

由已知画出$t=0$ 时刻的旋矢图

再画出末态的旋矢图

由题意选蓝实线所示的位矢

设始末态位矢夹角为θ



因为 $\Delta\theta=\omega t$

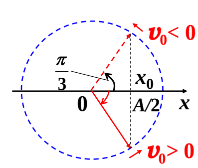
繁复的三角函数的运算用匀速圆周运动的一个运动关系求得

得 $t=\frac{\Delta\theta}{\omega}=\frac{7\pi}{6\omega}=\frac{7\pi}{6\sqrt{\frac{k}{m}}}$

【例题】

一简谐振动，振幅为A，圆频率为 ω，$t=0$时，位移为$A/2$，且速度大于零，求振动方程

解 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$



$\begin{cases}x_0=A/2\\ \upsilon_0>0\end{cases}$

则由左图给出 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$

简谐振动的合成

当一个物体同时参与几个谐振动时

就需考虑振动的合成问题

- **同频率的谐振动合成结果**

  是波的干涉和偏振光干涉的重要基础

- **不同频率的谐振动合成结果**

  可以给出重要的实际应用

  充分显示旋矢法的优越性

§ 6.2 同一直线上同频率的简谐振动的合成

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \phi_1) \qquad x = x_1 + x_2$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \phi_2) \qquad \phi_0 = \phi_1 - \phi_2$$

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \phi_1) = A_1\cos\omega t\cos\phi_1 - A_1\sin\omega t\sin\phi_1$$

$$x = x_1 + x_2 = (A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2)\cos\omega t$$

$$-(A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2)\sin\omega t = A\cos(\omega t + \phi)$$

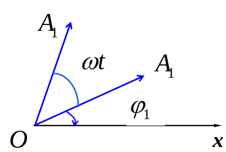
$$A^2 = (A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2)^2 + (A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2)^2$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\phi_0$$

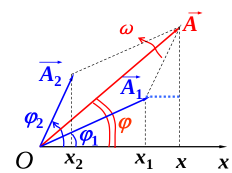
$$\mathrm{tg}\,\phi = (A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2)/(A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2)$$

旋转矢量法

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$



$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \quad x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$



$$x_0 = x_{10} + x_{20}$$

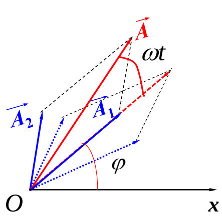
$$= A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2$$

$$= A\cos\varphi$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \quad x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$



$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

合成仍是同频率的SHM。

A、φ 可由旋转矢量法导出，这比用解析法方便。

由图，

$$A_x = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2$$

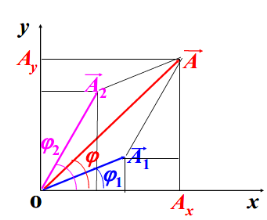
$$A_y = A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2$$

再由

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_y}{A_x}$$

可得以上 A、φ 的表示式。



两个沿x 轴的同频简谐振动合成的旋转矢量图

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

若 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi$

则 $A=A_1+A_2$ 两振动同相

若 $\Delta\varphi=\pm(2k+1)\pi$

则 $A=|A_1-A_2|$ 两振动反相

$(k=0,1,2\cdots)$

49

△同一直线上n个振幅相等、初相依次相差常量δ的简谐振动的合成

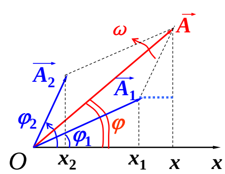
$$x=\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}a\cos[\omega t+(i-1)\delta]$$

$$=A\cos(\omega t+\varphi)$$

50

两个简谐振动的叠加-矢量叠加

$$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$$
$$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$



$$x=x_1+x_2=A\cos(\omega t+\varphi)$$

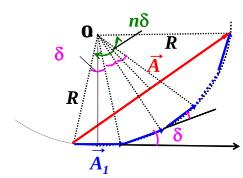
$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$$

51

△同一直线上n个振幅相等、初相依次相差常量δ的简谐振动的合成

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}a\cos[\omega t+(i-1)\delta]$$

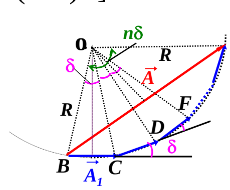
$$=A\cos(\omega t+\varphi)$$



52

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}a\cos[\omega t+(i-1)\delta]$$

$$=A\cos(\omega t+\varphi)$$



$$R=\frac{a/2}{\sin(\delta/2)}$$

$$A=2R\sin(n\delta/2)=a\frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$$

$$\varphi=(\pi/2-\delta/2)-(\pi/2-n\delta/2)=(n-1)\delta/2$$

53

$$e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t \quad \cos\omega t=\mathrm{Re}\,e^{j\omega t}$$

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}a\cos[\omega t+(i-1)\delta]$$

$$=\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{n}ae^{j[\omega t+(i-1)\delta]}$$

$$\sum_{i=1}^{n}ae^{j[\omega t+(i-1)\delta]}=ae^{j\omega t}\sum_{i=1}^{n}e^{j(i-1)\delta}$$

$$=ae^{j\omega t}\frac{1-e^{jn\delta}}{1-e^{j\delta}}=ae^{j\omega t}\frac{(1-e^{jn\delta})(1-e^{-j\delta})}{(1-e^{j\delta})(1-e^{-j\delta})}$$

54

$$= ae^{j\omega t}\frac{1-e^{jn\delta}}{1-e^{j\delta}} = ae^{j\omega t}\frac{(1-e^{jn\delta})(1-e^{-j\delta})}{(1-e^{j\delta})(1-e^{-j\delta})}$$

$$=\frac{a}{4\sin^2(\delta/2)}(e^{j\omega t}-e^{j(\omega t+n\delta)}$$

$$-e^{j(\omega t-\delta)}+e^{j(\omega t+(n-1)\delta)})$$

$$x=\frac{a\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\cos(\omega t+(n-1)\delta/2)$$

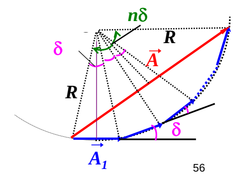
55

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}a\cos[\omega t+(i-1)\delta]$$

$$=a\frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\cos(\omega t+\frac{n-1}{2}\delta)$$

$$if\ \ \delta=2k\pi \qquad A=na$$

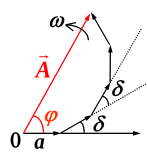
$$if\ \ \delta=\frac{2k'\pi}{n} \qquad A=0$$



56

n 个振幅相等、初相依次相差常量 δ 的简谐振动的合成

$$x_1=a\cos(\omega t)$$
$$x_2=a\cos(\omega t+\delta)$$
$$\cdots$$
$$x_n=a\cos[\omega t+(n-1)\delta]$$



合成仍是同频率简谐振动：$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

$$A=a\frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}},\qquad \varphi=\frac{n-1}{2}\delta$$

57

重要特例：

n 个分振动同相：$\delta=2k\pi\ \ (k=0,\pm1,\pm2\cdots)$

$A=na$

n 个分振动初相依次差：$\delta=\dfrac{2k'\pi}{n}\ \ (k'\neq nk)$

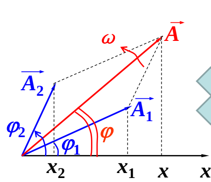
$A=0$, 分振动振幅矢量构成封闭多边形

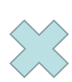
例 $n=4$： $k'=(0),\pm1,\pm2,\pm3,(\pm4),\pm5,\pm6,\ldots$

58

§ 6.3 同一直线上不同频率的简谐振动的合成

$$x_1=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$$
$$x_2=A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$





59

$$x_1=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$$
$$x_2=A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

简单情况 $x_1=A\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$

$x_2=A\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$

$$x=x_1+x_2=A\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

$$=2A\cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2})\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2})$$

$$\omega_1\approx\omega_2>>|\omega_1-\omega_2|$$

60

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$= 2A\cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2})\cos(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2})$$

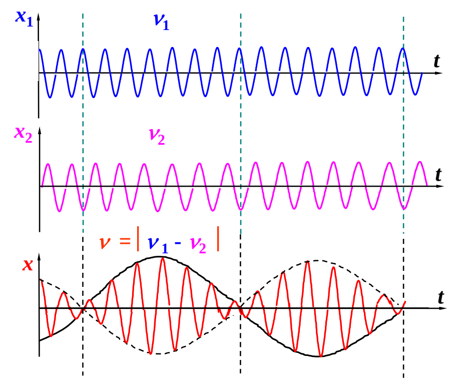
同方向、不同频率：合振动不是简谐振动！

$\omega_1 \approx \omega_2 >> |\omega_1 - \omega_2|$

可近似看成是一种振动：

“振幅”： $\left|2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2})\right|$

角频率： $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$



拍：频率都较大且频率差很小的两个同方向简谐振动，合成时产生合振幅时大、时小的现象。

拍频：单位时间内振动加强或减弱的次数

——振幅 $\left|2A\cos\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}\right|$ 的频率

由于是绝对值，所以拍频：

$$\Delta\omega = \left|\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right| \times 2 = |\omega_2 - \omega_1|$$

$$\nu_{拍} = |\nu_2 - \nu_1|$$

—— 拍频等于两个分振动频率之差

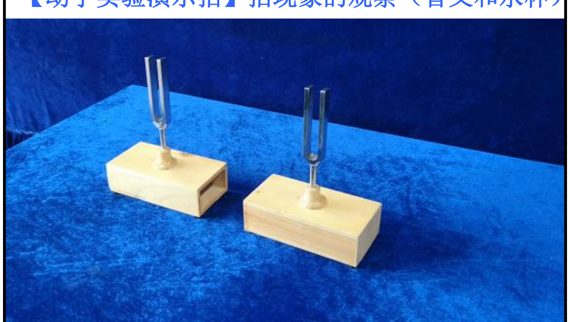
形成“拍”（beat）

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1)$$
$$x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

不妨设 $A_2 > A_1$

$$x = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_1\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$+(A_2 - A_1)\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

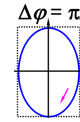
【动手实验演示拍】拍现象的观察（音叉和水杯）



§6.4 两个互相垂直的简谐振动的合成

$$x = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$y = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$\Delta\varphi = \pi/2$



$$x = A_1\cos(\omega_1 t) = A_1\cos(\frac{2\pi}{T_1}t)$$

$$y = A_2\cos(\frac{2\pi}{T_1}t + \pi/2)$$

t	$T_1/8$	$T_1/4$	$3T_1/8$	$4T_1/8$	$5T_1/8$	$6T_1/8$	$7T_1/8$
x	$\frac{\sqrt{2}}{2}A_1$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}A_1$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}A_1$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}A_1$
y	$-\frac{\sqrt{2}}{2}A_2$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}A_2$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}A_2$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}A_2$

$$x = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$y = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

① $\omega_1 = \omega_2$，合成轨迹为椭圆。

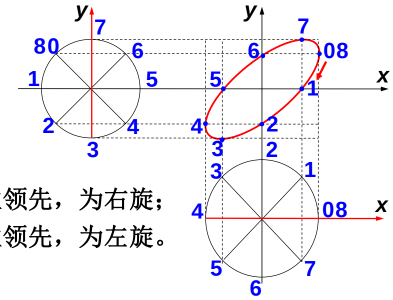
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 不同，椭圆形状、旋向也不同。

67

合振动轨迹的旋转矢量作图法

以 $\varphi_y - \varphi_x = \pi/4$ 为例（y 相位领先）



y 相位领先，为右旋；

x 相位领先，为左旋。

68

$x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \quad y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$

$x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) = A_1(\cos\omega t\cos\varphi_1 - \sin\omega t\sin\varphi_1)$ (1)

$A_1\cos\varphi_1\cos\omega t - A_1\sin\varphi_1\sin\omega t = x$ (2)

$y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) = A_2(\cos\omega t\cos\varphi_2 - \sin\omega t\sin\varphi_2)$ (3)

$A_2\cos\varphi_2\cos\omega t - A_2\sin\varphi_2\sin\omega t = y$ (4)

From eq(2) and (4), we can get $\cos\omega t$ and $\sin\omega t$.

Then make use of the relation of $\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$.

Finally we get :

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (5)$$

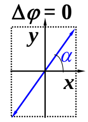
69

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$\Delta\varphi = 0$ $\quad \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0$

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0 \qquad y = \frac{A_2}{A_1}x$$

$\Delta\varphi = 0$



Ⅰ、Ⅲ象限SHM

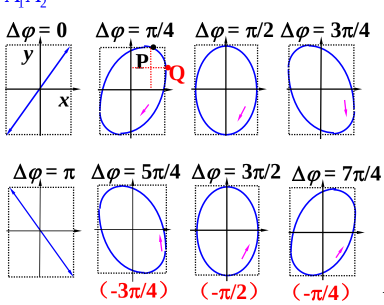
$x\cos\alpha + y\sin\alpha$

$= A_1\cos(\omega t + \varphi_1)\cos\alpha + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)\sin\alpha$

$= A_1\cos\alpha\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\sin\alpha\cos(\omega t + \varphi_2)$

70

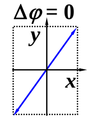
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$



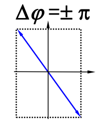
71

$x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \qquad y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$

$\Delta\varphi = 0$

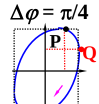


$\Delta\varphi = \pm\pi$

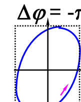


Ⅰ、Ⅲ象限SHM　　Ⅱ、Ⅳ象限SHM

$\Delta\varphi = \pi/4$



$\Delta\varphi = -\pi/4$



y超前x—右旋　　y落后x—左旋

（以π为界，决定超前、落后）

72

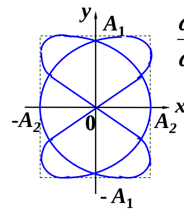
② $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{m}{n}$，$m,n$ 正整数

$x=\cos(0.1\pi t)$　　$y=2\cos(0.2\pi t+0.2\pi)$

合成轨迹为稳定的闭合曲线 — 李萨如图

② $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{m}{n}$，$m,n$ 正整数

合成轨迹为稳定的闭合曲线 — 李萨如图

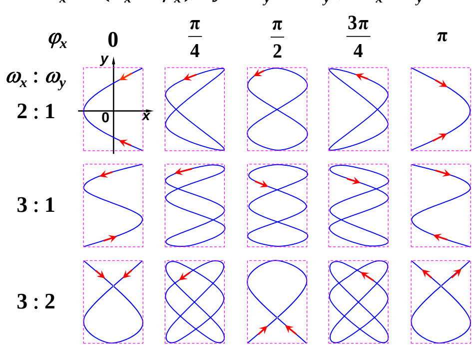


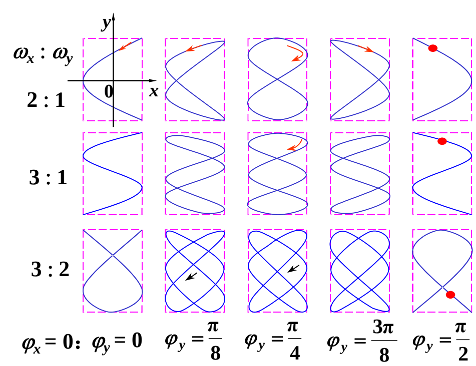
$$\frac{\omega_x}{\omega_y}=\frac{\nu_x}{\nu_y}=\frac{x\text{达到最大的次数}}{y\text{达到最大的次数}}$$

例如左图：$\frac{\omega_x}{\omega_y}=\frac{3}{2}$

应用：测定未知频率

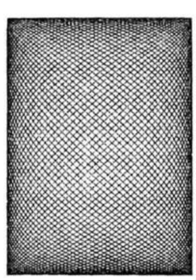
$x=A_x\cos(\omega_x t+\varphi_x)$，$y=A_y\cos\omega_y t$，$A_x:A_y=2:3$





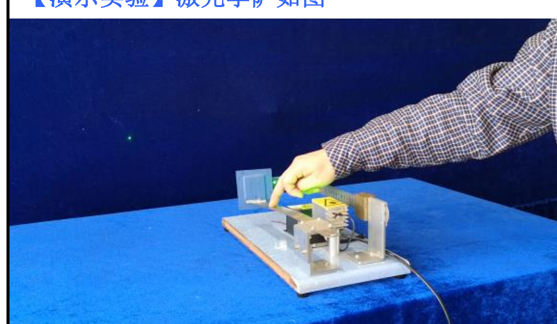
③ $\frac{\omega_x}{\omega_y}=$ 无理数

合成轨迹为非闭合曲线



两个振动间如果存在弱的物理耦合，就可以使得 ω_1：ω_2 就近锁定为两个整数比，称为锁频现象，如生物钟现象。

【演示实验】激光李萨如图



§ 6.5 谐振分析

利用傅里叶分解，可将任意振动分解成若干SHM的叠加。

对周期性振动 f(t): T — 周期， $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \qquad \omega_k = \frac{2\pi k}{T} = k\omega$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt \qquad a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\frac{2\pi}{T}tdt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\frac{2\pi}{T}tdt$$

79

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)]$$

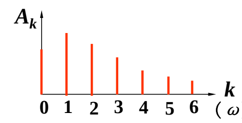
$k = 1$ 基频（ω） 决定音调

$k = 2$ 二次谐频（2ω） 高次谐频 决定音色

$k = 3$ 三次谐频（3ω）

……

分立谱：



80

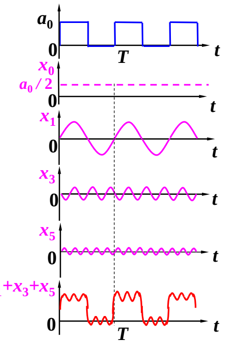
例如对方波：

$\boxed{\text{思考}}$

有时赞誉一歌唱家：“声音洪亮，音域宽广，音色甜美”。这各指什么物理因素?

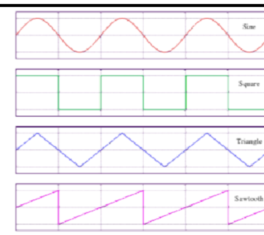
音色、音调、响度

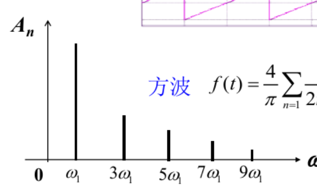
主观感觉



$x_{2n} = 0$， $n = 1, 2, 3, \ldots$

81

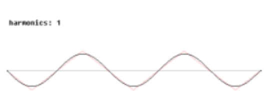




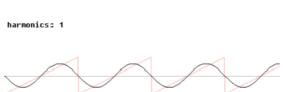
方波 $f(t) = \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}\dfrac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)\omega t]$

82

三角波 $f(t) = \dfrac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin[(2n-1)\omega t]$



锯齿波 $f(t) = \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\omega t)$



83

任何非周期运动

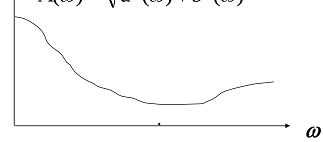
$$f(t) = \int_0^{+\infty}[a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t]d\omega$$

连续谱

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt$$

$$A(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}$$



84

§ 6.6 阻尼振动

阻尼(damp)：消耗振动系统能量的原因。

阻尼种类：摩擦阻尼、辐射阻尼

阻力：对在流体(液体、气体)中运动的物体，当物体速度较小时，阻力 ∝ 速度。

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx\ -\gamma\upsilon\ =-kx-\gamma\frac{dx}{dt}\qquad \boxed{\beta=\gamma/2m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}\qquad 2\beta=\frac{\gamma}{m}$$

β 为阻尼系数 量纲 1/秒

β,ω_0 量纲相同！

欠阻尼：$\beta<\omega_0$

临界阻尼：$\beta=\omega_0$

过阻尼：$\beta>\omega_0$

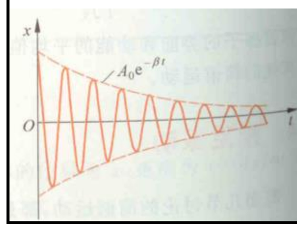
85

1、欠阻尼条件下： $\beta<\omega_0$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

$$x=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$



振幅：$A=A_0e^{-\beta t}$

能量：$E=E_0e^{-2\beta t}$

时间常数：$\tau=1/2\beta$

Q 值：$Q=2\pi\tau/T=\omega\tau$

86

阻尼振动的特点(欠阻尼下)：

1.振幅特点

振幅：$A(t)=A_0e^{-\beta t}$

振动能量：$E(t)=E_0e^{-2\beta t}$

正因振动能量不断损耗，振幅才随t衰减。

2.周期特点

严格讲，阻尼振动不是周期性振动(更不是简谐振动)，因为位移$x(t)$不是t的周期函数。

但阻尼振动有某种重复性。位移相继两次达到正向极大值的时间间隔

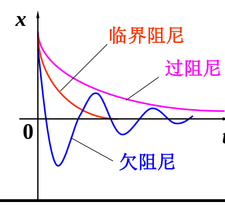
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{(\omega_0^2-\beta^2)^{1/2}}>T_0(\text{固有周期})$$

87

2、过阻尼和临界阻尼条件下： $\beta\geq\omega_0$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

$$x=e^{-\beta t}(Ae^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}+Be^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t})$$



88

三种阻尼下的振动曲线特点

在 $\beta^2>\omega^2$ (过阻尼)和$\beta^2=\omega^2$(临界阻尼) 情形下，阻尼振动微分方程的解将是非振动性的运动。运动物体连一次振动也不能完成，能量即已耗光，物体慢慢移向平衡位置。

和过阻尼情形相比，临界阻尼情形下，物体回到平衡位置并停在那里，所需时间最短。

89

---

§ 6.7 受迫振动 共振

1、 受迫振动。

在驱动力$H\cos\omega t$的作用下系统的振动——受迫振动。

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-\gamma\frac{dx}{dt}+H\cos\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=h\cos\omega t$$

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}\qquad 2\beta=\frac{\gamma}{m}\qquad h=\frac{H}{m}$$

90

2、受迫振动的解

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=h\cos\omega t$$

$$x=A_0e^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi_0)+A\cos(\omega t+\varphi)$$

稳态时：$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

稳定时系统振动的频率 = 驱动力的频率ω

$$A=\frac{h}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2]^{1/2}}\qquad \varphi=\arctan\frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

91

特点：

稳态时的受迫振动是简谐振动(但它不是无阻尼自由谐振动，请注意两者的区别)。

(1)角频率：

等于驱动力的角频率 ω

(2)振幅：

系统作等幅振动(虽有阻力消耗能量，但同时有驱动力作功对系统输入能量，系统仍可维持等幅振动)。其振幅由系统参数(固有频率ω_0)、阻尼(β)、驱动力(H,ω)共同决定。A的大小敏感于ω和ω_0的相对大小关系，而和初始条件(x_0、υ_0)无关。

$$A=\frac{h}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2]^{1/2}}$$

(3)初相：

亦决定于ω_0、β和ω，与初始条件无关。φ值在$-\pi\sim0$之间，可见，位移x落后于驱动力$H\cos\omega t$的变化($H\cos\omega t$的初相为零)。

$$\tan\varphi=\frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

92

3、共振

稳态时：$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

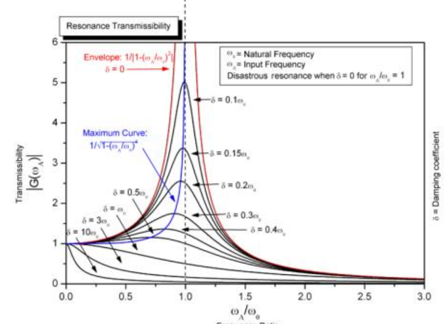
$$A=\frac{h}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2]^{1/2}}\qquad \varphi=\arctan\frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

当 $\omega=\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$ $\qquad A_r=\dfrac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$

当 $\beta<<\omega_0$ $\qquad \omega_r=\omega_0$ 时，共振

在弱阻尼即$\beta<<\omega_0$的情况下，当$\omega=\omega_0$时，系统的振动速度和振幅都达到最大值 — 共振。

93



应用：声、光、电、原子内部、工程技术…
同时要注意避免共振造成破坏。

94

小号发出的声波足以使酒杯破碎

95

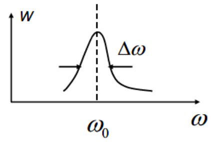
1940年美国塔科曼海峡大桥在大风中产生振动

随后在大风中因产生共振而断塌

【TV】大桥共振

96

品质因数与共振(谐振)曲线的锐度



半宽度 $\Delta\omega$

频率在谐振频率附近

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{\Delta\omega}{2}$$

$$W \approx \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \qquad W \propto \frac{1}{(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega})^2 + 4\beta^2}$$

$\Delta\omega \approx 2\beta$ 降一半

$$\boxed{\frac{1}{Q} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}} \approx \frac{2\beta}{\omega_0} \qquad \omega \approx \omega_0$$

我国古代对“共振”的认识：

公元五世纪《天中记》记载

蜀人有铜盘，早、晚鸣如人扣，问张华。

张华曰：此盘与宫中钟相谐，故声相应，

可改变其薄厚。

1850年：法国吊桥上行军，齐步走，共振，226人死亡。

1999年：四川省綦江（现重庆市）彩虹桥断裂事件。
1月4日晚6时50分，30余名群众行走，22名武警训练齐步走。
全部坠河，14人生还，40人遇难（含18名武警）。

2010年：四川省吊桥事件（过桥人摇晃跳跃）。
2月14日（正月初一）中午，眉山市洪雅县柳江镇红星村杨村河吊桥（长65米，离水面10米），28人受伤。

2013年：湖南省河吊桥事件（过桥人摇晃跳跃）。
5月1日晚上9时10分左右，湘西土家族苗族自治州凤凰县吊桥（长30米，宽2米，离河面3米），37人落水。

2021年2月13日(正月初二)湖北宜昌一网红吊桥侧翻多人掉落茶园(年轻人兴致一来就晃桥)。

据报导，我国某城市有三栋新建的十一层居民楼经常摇晃，引起居民的恐慌。后来发现距居民楼800米处有一家锯石厂，四台大功率锯石机的工作频率为1.5Hz，恰好等于居民楼的固有频率，楼的摇晃原来是一种共振现象。

由于共振可能引起巨大的损坏，所以在工程技术中防振和减振是一项十分重要的任务。

【演示】啄木鸟玩具演示自激振动

竖直和水平弹簧振子　振转耦合振子实验

音叉演示拍

简谐振动合成仪（互相垂直简谐振动的合成）

激光演示李萨如图

受迫振动：受迫振动演示仪

共振：音叉　玻璃杯共振实验

耦合摆球

多谐共振仪【TV】多谐共振

【附】受迫振动振幅、相位公式推导

$$\begin{cases} A = \dfrac{h}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]^{1/2}} & (1) \\ \varphi = \mathrm{tg}^{-1} \dfrac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} & (2) \end{cases}$$

推导的思路：

由方程：$\dfrac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = h\cos\omega t$　(3)

有特解：$x = A\cos(\omega t + \varphi)$　(4)

将特解 (4) 式改写为：

$$x = A\cos\varphi\cos\omega t - A\sin\varphi\sin\omega t$$

令

$$= a\cos\omega t + b\sin\omega t \qquad (5)$$

$$a = A\cos\varphi,\ b = -A\sin\varphi \qquad (6)$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2},\ \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{-b}{a} \qquad (7)$$

将 (5) 式代入 (3) 式，令等式两边 $\sin\omega t$, $\cos\omega t$ 项的系数相等，可得决定 a, b 的代数方程：

$$(\omega_0^2-\omega^2)b-2\beta\omega a=0$$

$$(\omega_0^2-\omega^2)a+2\beta\omega b=h$$

解出 a, b 代入 (7) 式即得 A、φ 的 (1)(2) 式。

【思考】设解的形式是 (4) 式，能否用旋转矢量法解方程 (3) 式？

薛谭学讴于秦青，未穷青之技，自谓尽之；遂辞归。秦青弗止。饯于郊衢，抚节悲歌，声振林木，响遏行云。薛谭乃谢求反，终身不敢言归。秦青顾谓其友曰：“昔韩娥东之齐，匮粮，过雍门，鬻歌假食。既去而余音绕梁欐，三日不绝，左右以其人弗去。过逆旅，逆旅人辱之。韩娥因曼声哀哭，一里老幼悲愁，垂涕相对，三日不食。遽而追之。娥还，复为曼声长歌，一里老幼善跃抃舞，弗能自禁，忘向之悲也。乃厚赂发之。故雍门之人至今善歌哭，放娥之遗声。”

———————列子•汤问 第五

珠圆玉润——原指中国第一美男子西晋人卫玠（字叔宝）

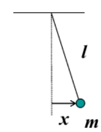
闻笛【七律】

【唐】 赵嘏（字承祐）

谁家吹笛画楼中？断续声随断续风。
响遏行云横碧落，清和冷月到帘栊。
兴来三弄有桓子，赋就一篇怀马融。
曲罢不知人在否，余音嘹亮尚飘空。

【注释】
（1）碧落：天空。
（2）清：清越。形容笛声清悠高扬。
（3）帘栊：挂着帘子的窗户。
（4）三弄：指《梅花三弄》。
（5）桓子：晋朝的桓伊。
（6）马融：汉朝人。有《笛赋》一篇。

§6.8 *相图(位置与速度相空间)

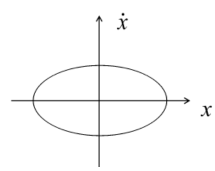


$$\ddot{x}+\omega^2 x=0 \qquad \omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\dot{x}=y \qquad x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\dot{y}=-\omega^2 x \qquad \dot{x}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$x^2+\frac{y^2}{\omega^2}=A^2$$

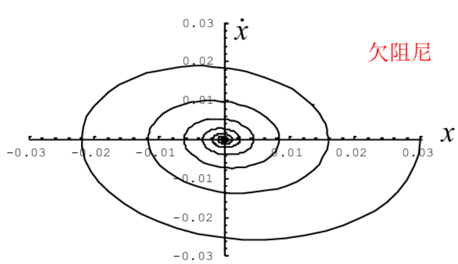


$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{y}{\omega^2 x} \qquad \omega^2x^2+y^2=c$$

简谐振动相图

阻尼振动 $\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0$

$x|_{t=0}=0.03,\quad \dot{x}|_{t=0}=0,\quad \beta=0.1,\quad \omega_0=1$



欠阻尼

临界阻尼或过阻尼?

受迫振动 $\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=f\cos\omega t$

系统最终按ω频率振动

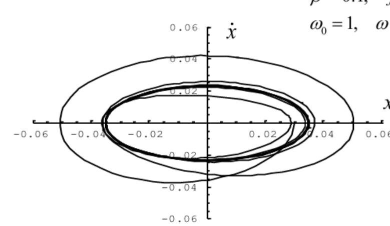
$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

$\dot{x}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$

$x|_{t=0}=0.03,\quad \dot{x}|_{t=0}=0,$

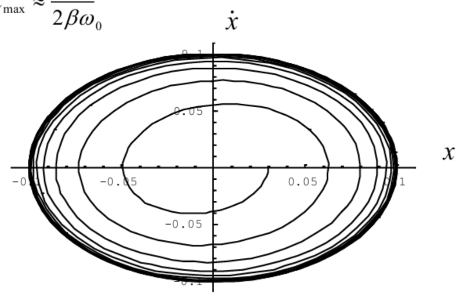
$\beta=0.1,\quad f=0.02,$

$\omega_0=1,\quad \omega=0.666,$



$\omega \approx \omega_0 = 1$ 时产生共振　　系统对外界响应最大

$$x_{\max} \approx \frac{f}{2\beta\omega_0}$$



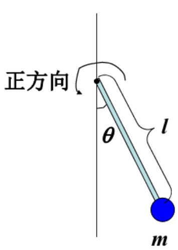
§ 6.9 *非线性振动及混沌

Poincaré 1892 三体问题 发现混沌

E.N.Lorenz 1963 天气模型 数值计算

M.J.Lighthill （噪声）1986:
We collectively wish to apologize for having misled the general public by spreading ideas about the determinism of systems satisfying Newton's law of motion that, after 1960, were proven to be incorrect……

最简单的非线性振子：轻杆儿一端为轴
另一端连一质点



$$\tau_g + \tau_f + \tau_{ext} = J\ddot{\theta}$$

$$\tau_g = -mgl\sin\theta$$

$$\because f_r \propto \upsilon$$

$$\therefore \tau_f = -2\beta\dot{\theta}$$

$$\tau_{ext} = \tau_0 \cos\omega t$$

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = f\cos\omega t$$

θ很小, 线性；否则，非线性。

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = f\cos\omega t \qquad \theta = \theta(t)$$
$$\theta|_{t=0} = \xi \qquad \dot{\theta}|_{t=0} = \eta$$

令　$\xi \to \xi + \delta\xi$　　或　$\eta \to \eta + \delta\eta$

经过有限时间　$\theta = \theta(t) + \delta\theta$

$\delta\xi \to 0$时　　$\delta\theta \to 0$　　解稳定　经典力学
$\delta\eta \to 0$　　　　　　　　　　　　可预测性

θ不小　$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = f\cos\omega t$
$\theta|_{t=0} = \xi \qquad \dot{\theta}|_{t=0} = \eta$

$$\theta = \theta(t)$$

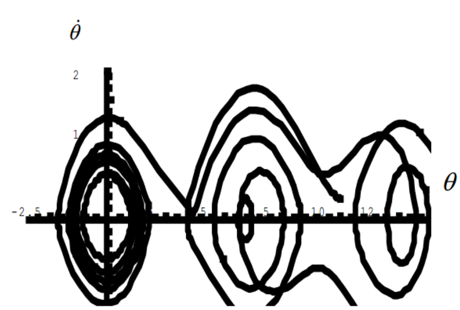
令　$\xi \to \xi + \delta\xi$　　或　$\eta \to \eta + \delta\eta$

经过有限时间　$\theta = \theta(t) + \delta\theta$

在有些条件下 (f大)

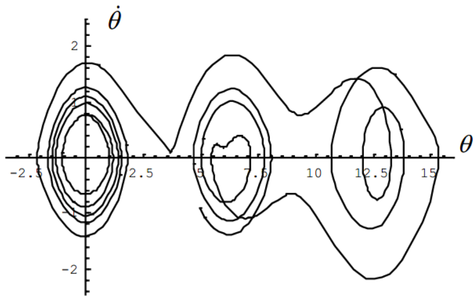
$\delta\xi \to 0$时　　$\delta\theta \not\to 0$　　解不稳定
$\delta\eta \to 0$　　　　　　　　　初值敏感，混沌

$\theta|_{t=0} = -0.0885 \qquad \dot{\theta}|_{t=0} = 0.8 \qquad \beta = 0.1$
$f = 0.52 \qquad \omega = 0.666$



$\theta|_{t=0} = -0.0886 \quad \dot{\theta}|_{t=0} = 0.8 \quad \beta = 0.1$

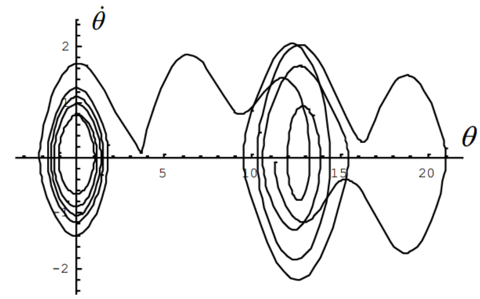
$f = 0.52 \quad \omega = 0.666$



115

$\theta|_{t=0} = -0.0887 \quad \dot{\theta}|_{t=0} = 0.8 \quad \beta = 0.1$

$f = 0.52 \quad \omega = 0.666$



116

中英文名称对照表

振动 — **vibration**

简谐振动 — **simple harmonic motion**

劲度系数 — **stiffness**

刚度系数 — **rigidity**

角频率 — **angular frequency**

圆频率 — **circular frequency**

振幅 — **amplitude**

相位 — **phase**

参考圆 — **circle of reference**

拍 — **beat**

第六章结束

117

常用三角函数（3）

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$
$$-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

118

§ 6.2 同一直线上同频率的简谐振动的合成

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \qquad x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$
$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$
$$= A_1[\cos(\omega t)\cos(\varphi_1) - \sin(\omega t)\sin(\varphi_1)]$$
$$+ A_2[\cos(\omega t)\cos(\varphi_2) - \sin(\omega t)\sin(\varphi_2)]$$
$$= (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)\cos\omega t$$
$$-(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)\sin\omega t$$
$$= A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$
$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$ 合成仍是同频率的**SHM**。

119