第一次习题课（一元多项式）

一、判断下列结论是否正确，并说明理由。

设$0 \neq f(x)$, $g(x)$, $h(x) \in F[x]$ ，K为F的扩域.

(1) $f(x) \mid g(x)$在$F[x]$中成立当且仅当$f(x) \mid g(x)$在$K[x]$中成立.

(2) 在$F[x]$和$K[x]$中最大公因式$(f(x), g(x))$相同。

(3) 在$F[x]$和$K[x]$中$f(x)$、$g(x)$的最大公因式相同。

(4) 若$f(x)$、$g(x)$在C上有公共根，则在$F[x]$上$(f(x), g(x)) \neq 1$.

(5) $f(x)$在C上有重根当且仅当在$F[x]$上$(f(x), f'(x)) \neq 1$。

(6) 设$f(x)$为F上的不可约多项式，且$f(x), g(x)$有公共的复根，则$f(x) \mid g(x)$.

(7) $f(x), g(x)$的公共根恰好为$(f(x), g(x))$的根。

(8) $\alpha \in C$为$f(x)$的2重根当且仅当$f'(\alpha) = 0, f''(\alpha) = 0$，但$f'''(\alpha) \neq 0$.

(9) $(f(x), g(x)h(x)) = 1$ 当且仅当$(f(x), g(x)) = 1, (f(x), h(x)) = 1$.

(10) $(f(x), g(x)h(x)) = (f(x), g(x))(f(x), h(x))$.

(11) 若$x - 1 \mid f(x^n)$, 则$x^n - 1 \mid f(x^n)$.

(12) 若$x + 1 \mid f(x^n)$, 则$x^n + 1 \mid f(x^n)$.

二、设a, b, c 是三个不同的数，用$x-a$，$x-b$，$x-c$ 除一元多项式$f(x)$ 的余式依次为$r; s; t$，试求用$g(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ 除$f(x)$ 的余式.

三、求$f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1$，$g(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$的公共根。

四、求$f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x + 4$在$Q$上的~~标准分解式~~。有理根

五、设$0 \neq f(x)$, $q(x) \in F[x]$，其中$q(x)$为F上首1的不可约多项式，证明：$q(x)$为$f(x)$的n重不可约因式的充要条件是$q(x) \mid f(x), q(x) \mid f'(x), ..., q(x) \mid f^{(n-1)}(x)$，但$q(x) \nmid f^{(n)}(x)$.

六、证明：(1) $f(x) \mid g(x)$ 当且仅当$f(x)^n \mid g(x)^n$ (n为正整数).

(2) $(f(x), g(x)) = 1$当且仅当$(f(x)^m, g(x)^n) = 1$（m, n为正整数）。

七 设$w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. 定义$F_n = (f_{st})_{n\times n}$，其中$f_{st} = w^{(s-1)(t-1)}$. 这个矩阵称为Fourier矩阵. 令$\overline{F}_n$是$F_n$的共轭矩阵.

(1) F_n是一个对称矩阵(不是实对称)且$F_n\overline{F}_n = nI_n$.

(2) (离散Fourier变换DFT)考虑插值问题：求$n-1$次多项式函数$y = f(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$,满足它经过$n$个点$(1, y_1), (w, y_2), \cdots, (w^{n-1}, y_n)$, 即$f(w^{k-1}) = y_k$, $k = 1, \cdots, n$. (这里我们不使用Larange插值多项式计算，而是直接列方程组求a_i, 然后使用第一问结论)。