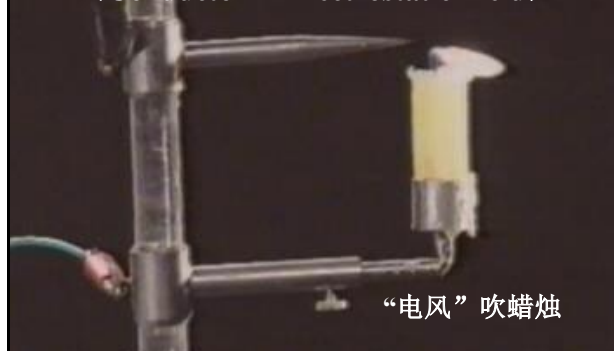


第十四章 静电场中的导体 (Conductor in Electrostatic Field)



研究静电场中导体的问题的意义:

研究导体对静电场的影响,可以使我们通过适当地布置导体或导体组,达到按我们的需要来影响电场的目的;或者通过安排导体或导体组及给它们所加的电压,来获得我们预先所设计的电场。

2

本章目录

△ § 14.1 导体的静电平衡条件

§ 14.2 静电平衡时导体上的电荷分布规律

△ § 14.3 有导体时静电场的分析与计算

§ 14.4 *静电场的唯一性定理、静电屏蔽、电像法

3

△ § 14.1 导体的静电平衡条件 (electrostatic equilibrium of conductor)

一. 导体 绝缘体 半导体

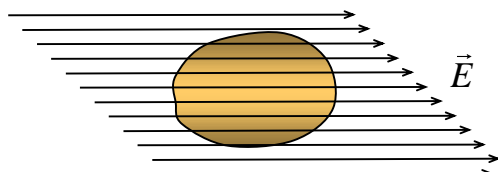
1. 导体 存在大量的可自由移动的电荷
conductor 金属自由电子气
2. 绝缘体 理论上认为一个自由移动的电荷也没有。也称 电介质 dielectric
3. 半导体 介于上述两者之间
semiconductor

本章讨论金属导体和场的相互影响

4

Questions:

If an isolated conductor is put into a homogeneous electric field, what will happen?



5

二、导体的静电平衡条件

1. 静电平衡 electrostatic equilibrium

导体内部和表面无自由电荷的定向移动,说导体处于静电平衡状态。

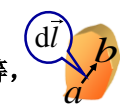
2. 导体静电平衡的条件

$$E_{\text{内}} = 0 \quad E_{\text{表面}} \perp \text{表面}$$

6

3. 导体的电势

导体静电平衡时，导体各点电势相等，即导体是等势体，表面是等势面。



$$\varphi = c$$

证：在导体上任取两点 a 和 b

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

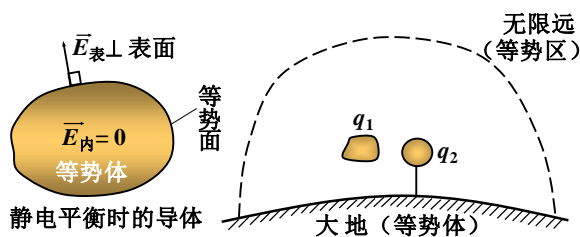
$$= 0 \quad \varphi_a = \varphi_b$$

1. Both a and b inside the conductor
 2. a inside, while b is on the surface
 3. Both a and b on the surface
- 积分与路径没有关系

静电平衡条件的另一种表述？

导体等势是导体体内电场强度处处为零的必然结果

7



静电平衡时的导体 大地（等势体）
接地 (ground)：取得与无限远相同的电势（通常取为零）。

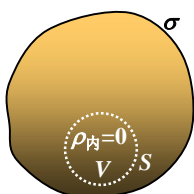
TV 静电平衡 [静电平衡.mpg](#)

8

§ 14.2 静电平衡时导体上电荷分布规律

一. 导体静电平衡时电荷分布在表面

1. 实心导体： σ 可不为0，但 $\rho_{内}$ 必为0。

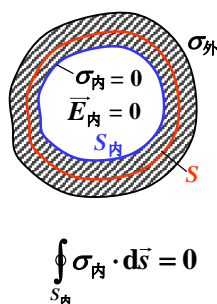


理由：
 $\therefore \vec{E}_{内} = 0$ ，
 $\therefore \oint_S \vec{E}_{内} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_{内} dV = 0$ ，
 S 是任意的。
 令 $S \rightarrow 0$ ，则必有 $\rho_{内} = 0$ 。

9

2. 导体壳（壳内无电荷）：

$\sigma_{外}$ 可不为零，但 $\sigma_{内}$ 和 $E_{内}$ 必为零。

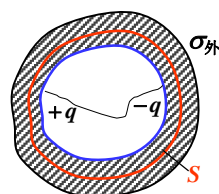


理由：
 在导体中包围空腔选取高斯面 S ，则：

$$\oint_S \vec{E}_{内} \cdot d\vec{s} = 0 \rightarrow$$

$$\oint_{S_{内}} \sigma_{内} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \sigma_{内} = 0$$

10



如果 $\sigma_{内} = 0$ ，但存在等量异号正负电荷，电场（力）线在正负电荷处与表面垂直？

不可能！！

电场强度沿该电场（力）线积分不等于零，导体上这两点不等势！

→ 与导体静电平衡矛盾

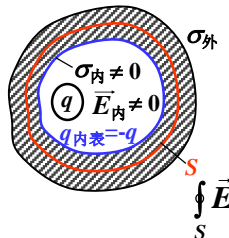
→ 只能 $\sigma_{内} = 0$ ，且腔内无 \vec{E} 线 → 只能 $E_{内} = 0$ 。

腔内的场强分布与腔外电荷及其分布无关

11

3. 导体壳内有电荷： $\sigma_{外}$ 可不为0，但必有 $\sigma_{内} \neq 0$ ，

且 $q_{内表} = \oint_S \sigma_{内} dS = -q$



理由：
 在导体中包围空腔做高斯面 S ，则：

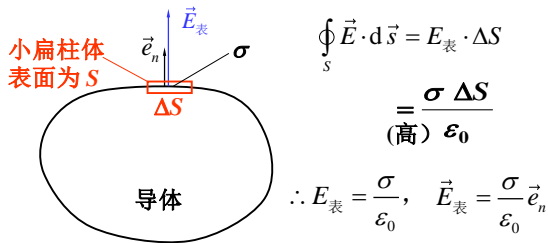
$$\oint_S \vec{E}_{内} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} (q + q_{内表}) = 0$$

$$\therefore q_{内表} = -q$$

腔内的场强分布与腔外电荷及其分布无关 静电屏蔽

12

二. 表面场强与面电荷密度的关系



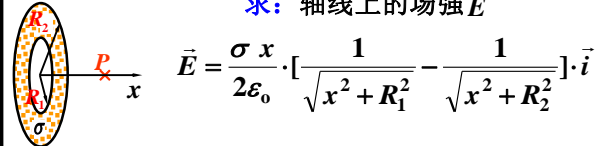
思考 $\vec{E}_{\text{表}}$ 是小柱体内电荷的贡献还是导体表面全部电荷的贡献？从推导中的哪一步可看出？

13

回顾

已知：均匀带电环面， σ, R_1, R_2

求：轴线上的场强 \vec{E}



$R_1 \rightarrow 0, R_2 \rightarrow \infty$, 此为均匀带电无限大平面：

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{l} \sigma \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{array} \right| & \quad E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{x}{|x|}, \quad E = |E_x| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \\ & = \text{Const.} \begin{cases} \text{与轴无关} \\ \text{与} x \text{ 无关} \end{cases} \end{aligned}$$

14

三. 孤立导体表面电荷分布的特点

一般情况较复杂；孤立的带电导体，电荷分布的实验的定性的分布：

在表面凸出的尖锐部分（曲率是正值且较大）电荷面密度较大，

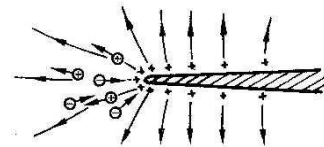
在比较平坦部分（曲率较小）电荷面密度较小，

在表面凹进部分带电荷面密度最小。

15

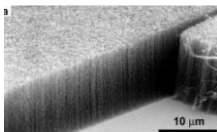
尖端放电（point discharge）：

带电的尖端电场强，使附近的空气电离，因而产生放电。

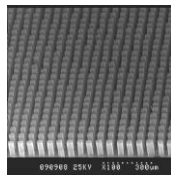


16

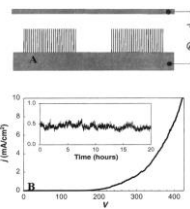
碳纳米管的场发射



碳纳米管



大面积碳纳米管阵列

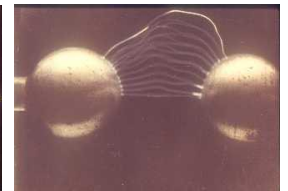


碳纳米管场发射平面显示器



17

空气中的直流高压放电图片：



18

闪电的图片：



云层和大地间的闪电



雷击大桥



遭雷击后的草地

闪电击中自由女神像



● 摄影师等了40年
● 2010年9月22日拍成
● 2010年10月13日下载



巴黎埃菲尔铁塔被闪电击中(Bertrand Kulik 20190508)



2006年4月某日，一架飞机正要在武汉机场降落时，遭遇雷击，起落架附近有几处被击痕迹，飞机安全降落。



俘获闪电：激光束引起空气电离，使闪电改道

演示

- 带电导体空腔外表面带电，内表面不带电；
- 孤立导体表面曲率大处面电荷密度也大也大；
- 尖端放电：避雷针原理
静电滚筒
电风轮
电风“吹”蜡烛

TV

尖端放电除烟尘 [静电除烟尘.mpg](#)
尖端放电在飞机上的应用 [应用.mpg](#)

25

△ § 14.3 有导体存在时静电场的分析与计算

1. 静电平衡的条件

$$E_{\text{内}} = 0$$

$$\text{or } \varphi = c$$

2. 基本性质方程

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

3. 电荷守恒定律

$$\sum_i Q_i = \text{const.}$$

26

[例 1] 面电荷密度为 σ_0 的均匀带电大平板旁，

平行放置一大的不带电导体平板。
求：导体板两表面的面电荷密度。

解：对称性分析，表面的电荷分布均匀

设导体电荷密度为 σ_1, σ_2 ，

电荷守恒： $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$ (1)

导体内场强为零： $E_0 + E_1 - E_2 = 0$

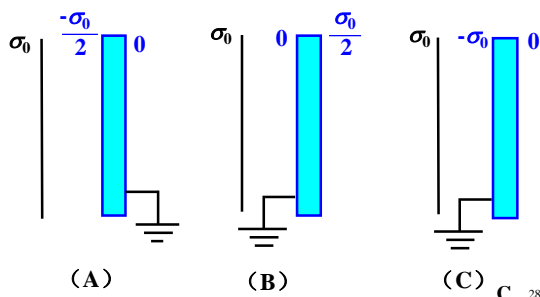
$$\rightarrow \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} = 0 \rightarrow \sigma_0 = \sigma_2 - \sigma_1 \quad (2)$$

$$(1)、(2) \text{ 解得： } \sigma_1 = -\sigma_2 = -\frac{\sigma_0}{2}$$

27

思考

若上面例题中导体板接地，下面结果哪个正确？



28

例2 金属球A与金属球壳B同心放置

已知：球A半径为 R_0 带电为 q

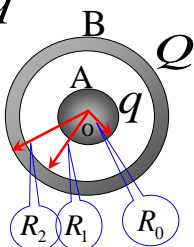
金属壳B内外半径分别为 R_1, R_2

带电为 Q

求：1) 电量分布

2) 球A和壳B的电势

$\varphi_A \quad \varphi_B$



29

解：

1) 导体带电在表面

球A的电量只可能在球的表面

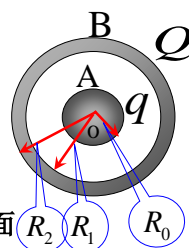
壳B有两个表面

电量可能分布在内、外两个表面

由于A和B同心放置

仍维持球对称

∴ 电量在表面均匀分布？？



30

球A均匀分布着电量 q
 相当于一个均匀带电的球面

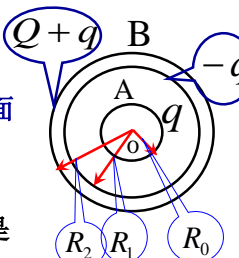
由高斯定理和电量守恒
 可以证明壳B的电量分布是

$Q_{B内} = -q$

$Q_{B外} = Q + q$

}

相当于均匀带电的球面



31

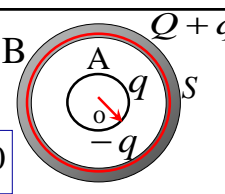
证明壳B上电量的分布: B

在B内紧贴内表面作高斯面S

面S的电通量 $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$

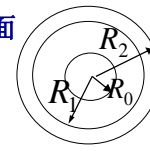
高斯定理 $\sum_i q_i = 0 \rightarrow Q_{B内} = -q$

电荷守恒定律 $Q_{B外} = Q + q$



32

等效: 在真空中三个均匀带电的球面
 利用叠加原理



$$\varphi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_0} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$\varphi_B = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

33

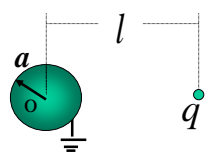
例3 接地导体球附近有一点电荷, 如图所示。

求: 导体上感应电荷的电量

解: 接地 即 $\varphi = 0$
 设: 感应电量为 Q
 由导体是个等势体
 o点的电势为0 则

$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} = 0$

$Q = -\frac{a}{l} q$



34

§ 14.4 * 静电场唯一性定理, 静电屏蔽, 电像法

问题的提出 —— 区域求解问题:

由 $\vec{E} = \int \frac{\vec{e}_r \cdot dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 知, 若要求得 \vec{E} , 必须知道全空间的电荷分布。但是有时我们只知道某个域内的电荷分布和域边界上的某些情况, 对域外情况并不清楚。而且我们也仅仅关心域内的电场情况。如何通过边界条件反映未知的域外电荷对域内场的影响呢? 这就是静电场的唯一性定理所要解决的问题。

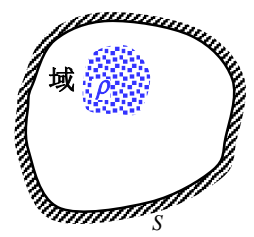
35

一. 静电问题的唯一性定理 (uniqueness theorem)

设区域V内给定自由电荷分布 $\rho(x)$ 在V的边界上给定:

- (1) 电势 $\varphi|_S$
- (2) 电势的法向导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S$

则V内的电场唯一地确定, 即在V内存在唯一的解



参考书《电动力学》郭硕鸿

36

有导体存在时的唯一性定理

除去内部导体以后的区域称为 V'

V' 的边界 S' 包括界面 S

和每个导体的表面 S_i

V' 内给定电荷分布 $\rho(x)$

S 上给定 $\varphi|_S$ 或 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S$

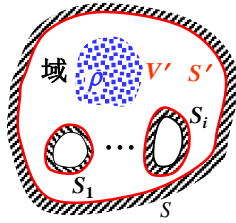
若给定每个导体上的电势

(1) 电势 φ_i

(2) 总电荷 Q_i

(3) 部分导体上给定电势，其它导体上给定总电荷

则 V' 内的电场分布被唯一确定



37

二. 静电屏蔽 (electrostatic shielding)

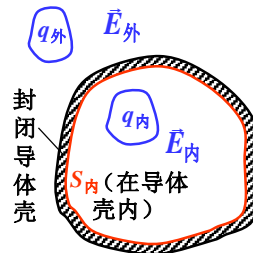
壳内域: 若 $q_{内}$ 给定, 则

$$\oint_{S_{内}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{内} + q_{内壁}}{\epsilon_0} = 0.$$

这符合唯一性定理的第

(2) 类边界条件。

$\therefore \vec{E}_{内}$ 唯一



38

不管 $q_{外}$ 如何, 上述定解条件均不变, $\therefore \vec{E}_{内}$ 不变。

封闭导体壳屏蔽了壳外电荷对壳内的影响。

壳外域: 若 $q_{外}$ 给定, 则

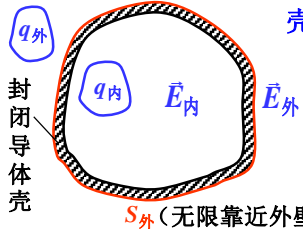
如球壳带电 Q , 则
外表面带电为 $Q + q_{内}$
 $\varphi_{\infty} = 0$ 。

$S_{外}$ (无限靠近外壁)

此符合唯一性定理的第(3)类边界条件。

\therefore 只要 $q_{内}$ 的大小不变 (可在壳内移动),

$\vec{E}_{外}$ 和 $\varphi_{外}$ 就唯一确定。



39

当导体壳接地时, 内域:

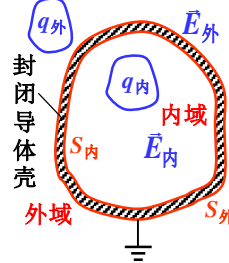
$q_{内}$ 分布给定,
 $\varphi_{S_{内}} = 0$ 。

$\therefore \vec{E}_{内}$ 唯一, 与 $q_{外}$ 无关,
即 $q_{外}$ 对 $\vec{E}_{内}$ 无影响。

外域: $q_{外}$ 分布给定,
 $\varphi_{S_{外}} = 0$,
 $\varphi_{\infty} = 0$ 。

$\therefore \vec{E}_{外}$ 唯一, 与 $q_{内}$ 无关。即 $q_{内}$ 对 $\vec{E}_{外}$ 无影响。

结论: 接地导体壳可屏蔽壳内外电荷间的相互影响。



40

汽车是个静电屏蔽室



演示 金属“鸟笼”演示静电屏蔽

TV 静电屏蔽 [静电屏蔽小白鼠.mpg](#)
[静电屏蔽室.mpg](#)

41

三. 电 (镜) 像法 (method of images)

[例1] 已知: 点电荷 q 处于 $(0, 0, a)$ 点,
 $z = 0$ 的平面为无限大导体平面, $\varphi|_{z=0} = 0$ 。

求: $z > 0$ 区域的 \vec{E} ? 导体面上 $\sigma' = ?$

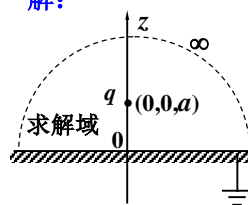
解:

定解条件:

域内 q 已知, 位置确定,

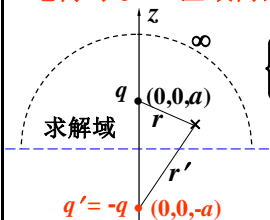
边界 $\begin{cases} \varphi|_{z=0} = 0 \\ \varphi_{\infty} = 0 \end{cases}$

符合第(1)类边界条件,
 $z > 0$ 的区域内解唯一。



42

去掉无限大导体平面，试探在 $(0,0,-a)$ 处，放个点电荷 $q' = -q$ ，以此来代替导体面上感应电荷对 $z > 0$ 区域内的影响。此时边界条件为：



$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi|_{z=0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \Big|_{z=0} = 0 \\ \varphi_{\infty} = 0 \end{array} \right.$$

符合原定解条件。解为：

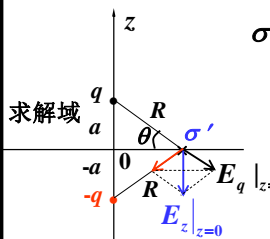
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r}'}{r'^3} \right)$$

由唯一性定理知， q 和 q' 在域内的合场强即为 $z > 0$ 域内该命题的解。

43

题中的点电荷 q' ，即为 q 对导体面的“电镜像”（简称“电像”）。

导体平面上的感应电荷面密度为：



$$\begin{aligned} \sigma' &= \epsilon_0 E_n = \epsilon_0 E_z|_{z=0} \\ &= -\epsilon_0 \cdot 2E_q|_{z=0} \cdot \sin\theta \\ &= -\epsilon_0 \cdot \frac{2 \cdot q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{a}{R} = \frac{-qa}{2\pi R^3}, \end{aligned}$$

其中 $R = (x^2 + y^2 + a^2)^{1/2}$ 。

44

[例2] 已知：在半径为 a 的接地导体球外 A 点有一点电荷 q ，A 点到球心的距离为 l 。

求：球外电势 φ 。

解：域内（球外）电荷给定，

$$\text{边界条件} \begin{cases} \varphi_S = 0, \\ \varphi_{\infty} = 0. \end{cases}$$

满足第 (1) 类边界条件，解唯一。

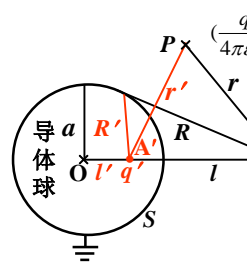
试探在 \overline{OA} 线上距 O 为 $l' (< a)$ 的 A' 点放电像 q' 。

则球外电势
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right)$$

此解自动满足无限远的边界条件 $\varphi_{\infty} = 0$ 。

45

为了满足球面上的边界条件，应有：



$$\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r'} \right) \Big|_S = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R'} = 0$$

由此可导出：

$$\begin{cases} l' = \frac{a^2}{l} \\ q' = -\frac{a}{l} q \end{cases}$$

∴ 球外
$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{a}{l} \cdot \frac{1}{r'} \right)$$

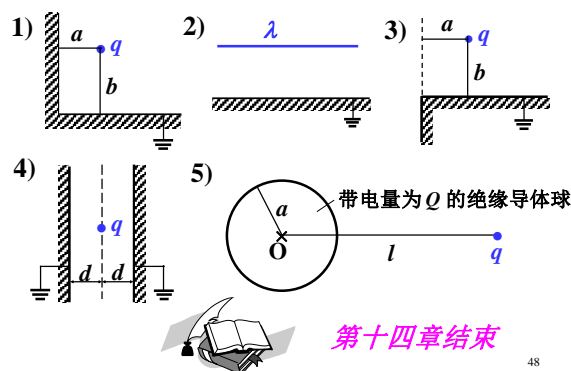
46

对电像法的几点说明：

1. 电像法的理论依据是**唯一性定理**；
2. 电像法的本质是用**域外**配置的**像电荷**来等效边界上的未知电荷对**域内**的影响；
3. 放置电像的原则：
 - ① 不能破坏域内给定的电荷分布（电像必须放在域外）；
 - ② 要使像电荷和给定电荷的总电场满足原边界条件；
4. 电像可以不止一个；
5. 不是任何情况都能找到电像。

47

思考 找出以下各题的电像或指出它是否存在



48