第二次习题课（矩阵的三角化，极小多项式，幂零变换）

一、　下面结论是否正确，请说明理由.

1. 矩阵 A 为幂零矩阵当且仅当 A 只有零特征值.
2. 任意复方阵都相似于一个下三角矩阵.
3. 一个幂零变换为循环变换当且仅当它的极小多项式和特征多项式相等.
4. 由线性变换 σ 的循环向量组生成的子空间是 σ 不变的子空间.
5. 设 $V = R_n[x]$（次数小于 n 的实多项式的全体），“求导”为 V 上的循环变换.
6. 设 A, B 为 n 阶方阵，则 AB 和 BA 有相同的特征多项式.
7. 设 A, B 为 n 阶方阵，则 AB 和 BA 有相同的极小多项式.
8. 设 A 为 n 阶方阵，满足 $r(A)=1$，则 A 要么可以相似对角化，要么幂零。
9. 幂零变换一定有一组循环基。
10. 设 σ 为线性空间 V 上的线性变换。若存在 $\alpha \in V$ 使得 $\alpha, \sigma\alpha, \sigma^2\alpha, \cdots, \sigma^{n-1}\alpha$ 为 V 的一组基，则 σ 为循环变换.

二、计算，证明

1. 设 $A \in M_2(F)$，在线性空间 $M_2(F)$ 上定义线性变换：$T: M_2(F) \to M_2(F)\ (B \mapsto AB)$. 证明若 A 为幂零矩阵，则 T 为幂零变换。

2. 设 A, B 为实方阵，证明 A, B 在 $\mathbb{C}$ 上相似（即有复可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$）当且仅当 A, B 在 $\mathbb{R}$ 上相似（即有复可逆矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ = B$）.

3. 设 A, B 都是上三角矩阵，证明 $AB - BA$ 为幂零矩阵.

4. 设 V 为数域 F 上的 n 维线性空间，σ 为 V 上的线性变换，假设存在 $0 \neq \alpha \in V$，使得 $\alpha, \sigma\alpha, \sigma^2\alpha, \cdots, \sigma^{n-1}\alpha$ 为 V 的一组基，求 σ 在基 $\sigma^{n-1}\alpha, \sigma^{n-2}\alpha, \cdots, \sigma\alpha, \alpha$ 下的矩阵，并求 σ 的特征多项式和极小多项式.

5. 已知$A=\begin{pmatrix} 0 & a & & \\ & 0 & b & \\ & & 0 & c \\ & & & 0 \end{pmatrix}$，求$A$的极小多项式。

6. 设V为复数域$\mathbb{C}$上n维的线性空间，$\sigma \in L(V)$，则σ有任意r维的不变子空间（$1 \le r \le n$）.

7. 设T是复n维空间V上线性变换，T在V的一组基下矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0^T & -a_0 \\ I_{n-1} & \vec{\alpha} \end{pmatrix}$$

其中 $\vec{\alpha}=(-a_1 \ \ -a_2 \ \ \cdots \ \ -a_{n-1})^T$

(1) 求T的特征多项式$f_T(\lambda)$和极小多项式$m_T(\lambda)$.

(2) T是否可对角化？

8. 设$A, B \in M_n(\mathbb{C})$，且$\mathrm{rank}(AB-BA)=1$.

证明：$(AB-BA)^2 = O_{n\times n}$