离散数学II

—平面图与对偶图

周旻
清华大学软件学院
软件工程与系统研究所

2024年5月31日
Friday

平面图和对偶图

- 平面图
- 极大平面图
- 图的平面性检测
- 对偶图

平面图

平面图的基本概念

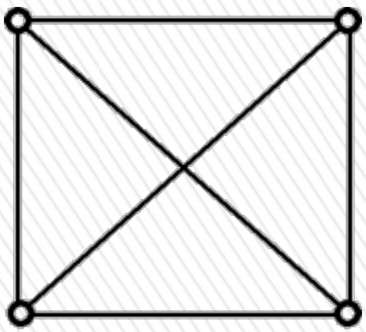
- 应用背景
  - 图的平面化问题：
    一个图能否画在一个平面上，且任何边都不交叉
  - 实际问题中经常要求平面图：
    高速公路设计、印刷电路设计
  - 近些年来，特别是大规模集成电路的发展进一步促进了对平面图的研究

平面图的基本概念

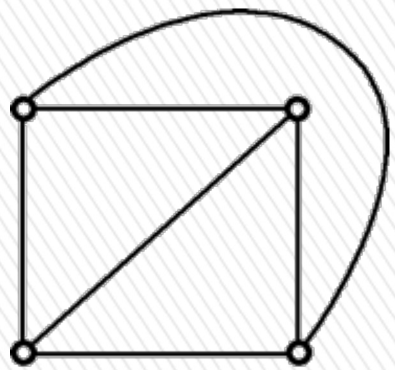
- 平面图定义(定义4.1.1)
  - 可嵌入平面、可平面图
    若能把图*G*画在一个平面上，使任何两条边都不相交，就称*G*可嵌入平面，或称G是可平面图
  - 平面图
    可平面图在平面上的一个嵌入
  - 非平面图
    没有平面嵌入的图

平面图的基本概念

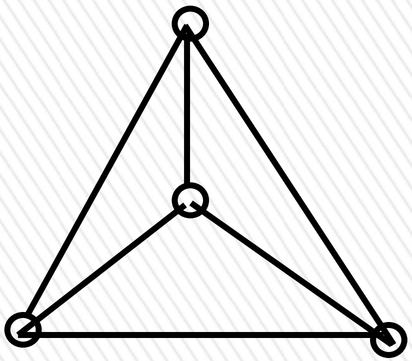
- 实例



(a)



(d)



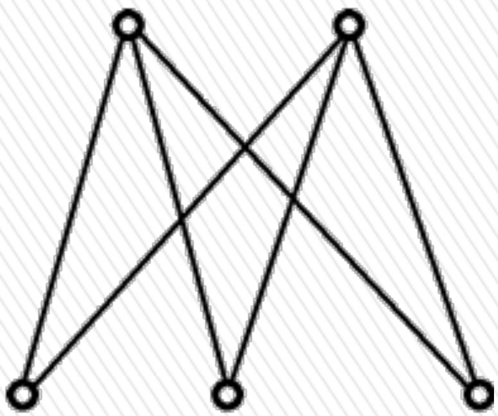
(d′)

平面图

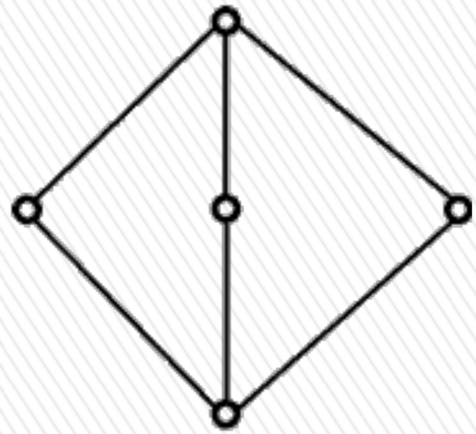
画法不唯一

平面图的基本概念

- 实例



(c)

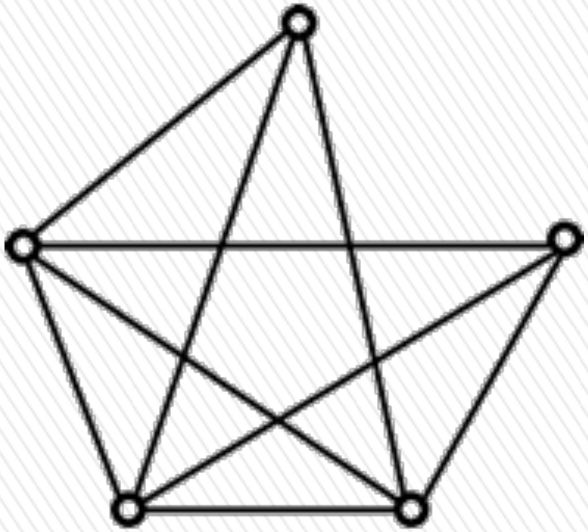


(f)

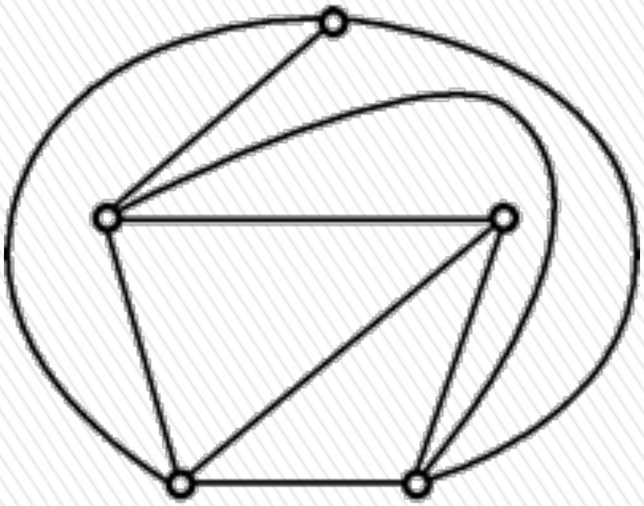
完全二部图$K_{1,n}$和$K_{2,n}(n \geq 1)$也都是平面图

平面图的基本概念

- 实例



(b)



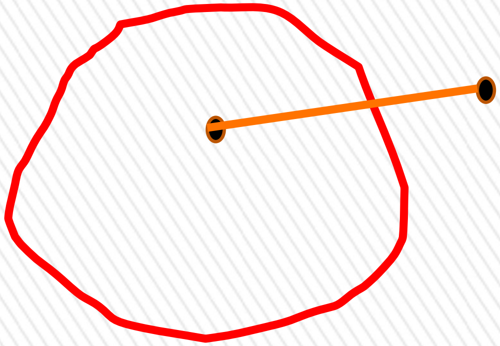
(e)

Jordan曲线

定义 一条连续的，自身不相交的，起点和终点相重合的曲线称为**Jordan曲线**

设J是平面上的一条Jordan曲线，平面的剩下部分被分成两个不相交的开集，称为J的内部和外部，分别记为$\mathrm{int}J$和$\mathrm{ext}J$，并且用$\mathrm{Int}J$和$\mathrm{Ext}J$表示它们的闭包。显然$\mathrm{Int}J\cap \mathrm{Ext}J=J$。

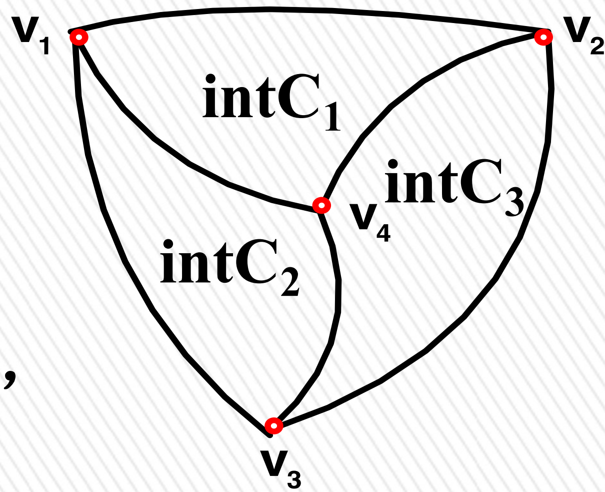
定理 连接$\mathrm{int}J$的点和$\mathrm{ext}J$的点的任何连线必在某点和J相交。（**Jordan曲线定理**）



平面图的基本概念

试证明完全图K_5是非平面图.

证明：（反证法）



若有可能，设G是对应K_5的一个平面图，

用v_1, v_2, v_3, v_4, v_5表示G的顶点。

$\because$ G是完全图 $\therefore$ $v_iv_j \in E(G), i \neq j$

因此圈$C = v_1v_2v_3v_1$是一条平面Jordan曲线，

而点v_4必然在$intC$内或$extC$内

设$v_4 \in intC$，则v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4把$intC$分成三个区域：$intC_1$, $intC_2$, $intC_3$，v_5必然在四个区域$extC, intC_1, intC_2, intC_3$之一

若$v_5 \in extC$，$\because$ $v_4 \in intC$

$\therefore$ 从Jordan曲线定理知，边v_4v_5必然在某点和C相交。矛盾。

若$v_5 \in intC_i$，如$v_5 \in intC_1$，$\because$ $v_3 \in extC_1$

$\therefore$ 边v_5v_3必然在某点和C_1相交。矛盾。

平面图的基本概念

定义4.1.2 设G是一个平面图，由它的若干边所构成的一个区域，若区域内不含任何结点及边，就称该区域为G的一个面或域

其面积无限的面称为无限面或外部面

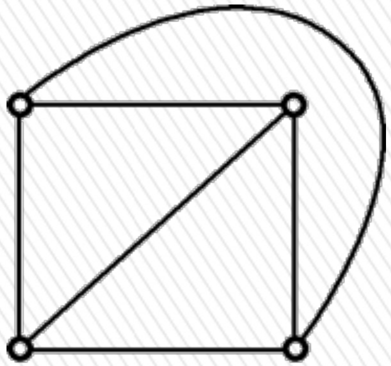
面积有限的面称为有限面或内部面

包围这个域的诸边称为该面的边界

边界的长度称为该面的次数，记为$deg(R)$

如果两个域有共同的边界，就说它们是相邻的，否则是不相邻的；

如果边e不是割边，则它必为某两个域的公共边界



(d)

平面图的基本概念

例 右图有 4 个面

R_1的边界：a

R_2的边界：bce

R_3的边界：fg

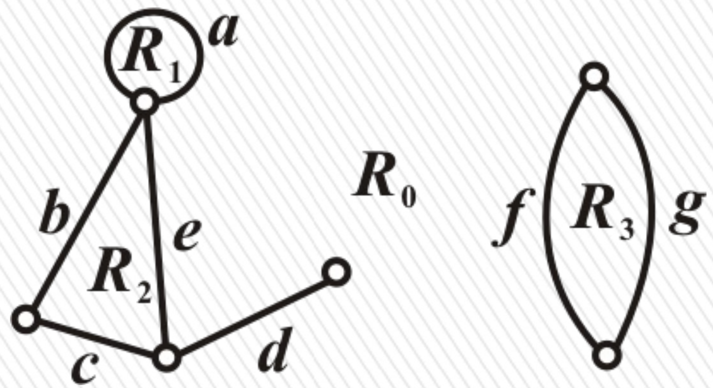
R_0的边界：$abcdde, fg$

$deg(R_1) = 1$

$deg(R_2) = 3$

$deg(R_3) = 2$

$deg(R_0) = 8$



平面图的基本概念

注：边界元素可为初级回路、简单回路或复杂回路，也可是它们的并。

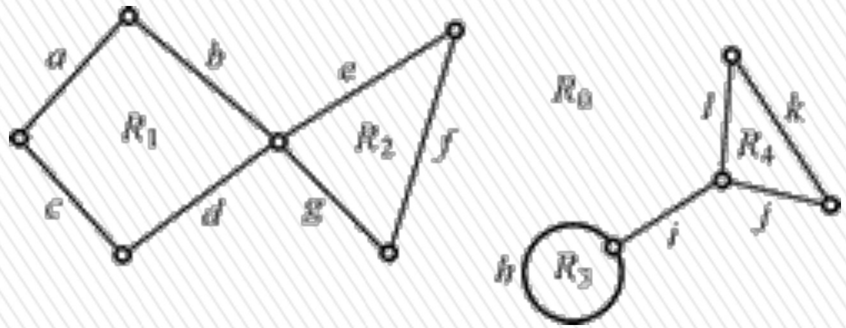
右图为某图的平面嵌入，有5个面。

面R_1, R_2, R_3, R_4的边界为圈

abdc, *efg*, *h*, *kjl*。

$deg(R_1) = 4, deg(R_2) = 3,$

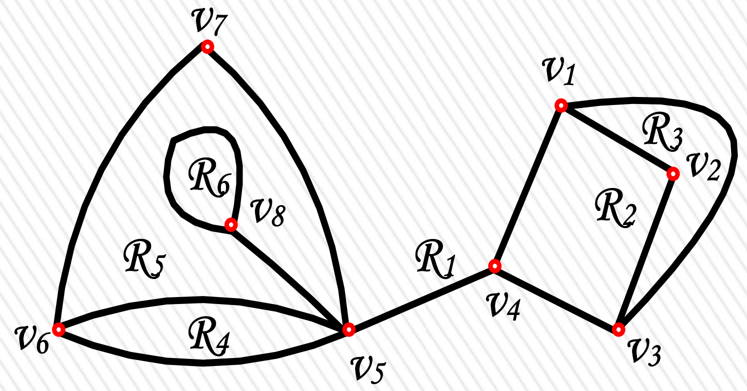
$deg(R_3) = 1, deg(R_4) = 3$



其外部面R_0的边界由简单回路*abefgdc*和复杂回路*kjihil*组成，$deg(R_0) = 13$。

平面图的基本概念

定理4.1.3 平面嵌入图G中所有面的次数之和等于边数m的两倍，即$\Sigma_{i=1\ldots r}deg(R_i) = 2m$(其中$r$为$G$的面数)



证：$\forall e \in E(G)$，

若e为面R_i和$R_j(i \neq j)$的公共边界上的边时，在计算R_i和R_j的次数时，e各被计算1次；

当e只在某一个面的边界上出现时，则为割边，在计算该面的次数时，e被计算2次；

所以，每条边在计算总次数时，都被计算2次。

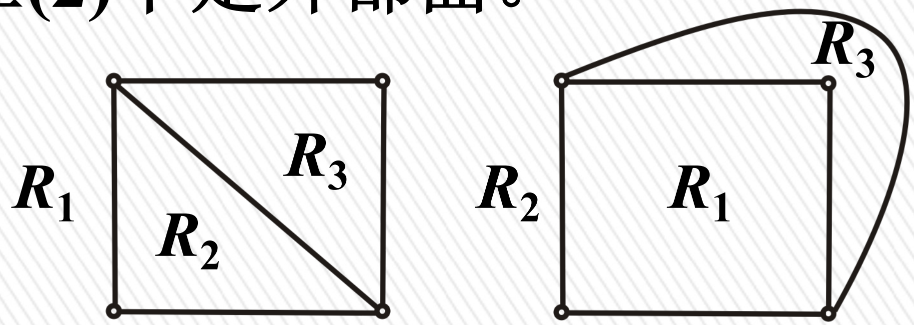
因此$\Sigma_{i=1\ldots r}deg(R_i) = 2m$。

平面图的基本概念

例 右边2个图是同一平面图的平面嵌入。

R_1在(1)中是外部面，在(2)中是内部面；

R_2在(1)中是内部面，在(2)中是外部面。



(1) (2)

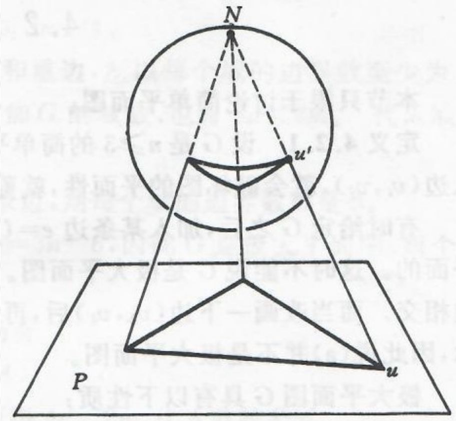
说明:

(1) 一个可平面图可以有多个不同形式的平面嵌入，它们都同构

(2) 可以通过变换(测地投影法)把平面图的任何一面作为外部面

平面图的基本概念

- 地球仪上的世界地图是可平面图吗？
- 测地变换
  - 设N是球面北极，平面P在球面下方，则平面任一点u与N的连线必过球面上的唯一点u'
  - 球面上的点和平面上的点一一对应
- 平面上的一个域对应于球面上的一个域，而平面上的无限域对应于球面北极所在的内部域
- 通过测地变换可将平面图G的任何一个内部域可改换为无限域
- 一个图是可平面的等价于它是可球面的



欧拉公式

欧拉研究多面体时发现：多面体顶点数减去棱数加上面数等于2。

后来又发现：连通平面图的阶数, 边数, 面数之间也存在同样的关系。

定理4.1.1 (欧拉公式) 对于任意连通平面图G, 有$n - m + r = 2$。其中: n, m和r分别为G的顶点数, 边数和面数。

证 对边数m进行归纳。

1) 当$m = 0$时，由G为连通图，所以G只能是一个孤立点，结论显然成立。

2) 设$m \le k(k \ge 1)$时，命题成立

3) 当$m = k + 1$时，若G是树，则G中至少有一个叶结点。

设v为叶结点，令$G' = G - v$，则G'仍然是连通图，

且G'的边数$m' = m - 1 = k$。由归纳假设可知: $n' - m' + r' = 2$

(其中n', m'和r'分别为G'的顶点数, 边数和面数)。

由$n' = n - 1$, $r' = r$可得: $n - m + r = (n' + 1) - (m' + 1) + r' = n' - m' + r' = 2$

欧拉公式

定理4.1.1(欧拉公式) 对于任意连通平面图G，有$n - m + r = 2$。其中：n, m和r分别为G的顶点数, 边数和面数。

证（续）

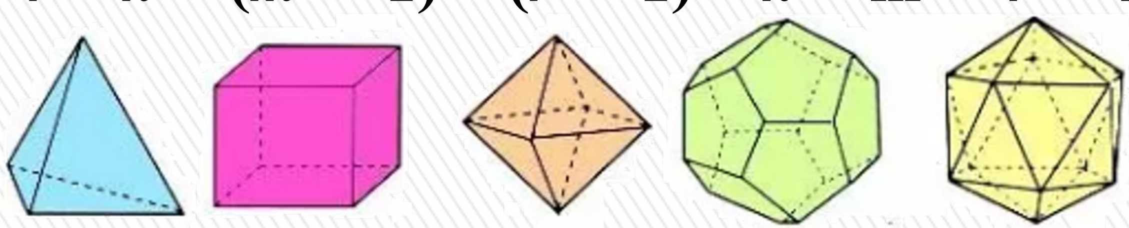
若G不是树，则G中含圈，设边e在G中某个圈上。

令$G' = G - e$，则G'仍连通，且$m' = m - 1 = k$。

由归纳假设可知：$n' - m' + r' = 2$。

由$n' = n, r' = r - 1$可知：

$n - m + r = n' - (m' + 1) + (r' + 1) = n' - m' + r' = 2$。



正四面体　正六面体　正八面体　正十二面体　正二十面体

欧拉公式

推论4.1.1 (欧拉公式的推广) 对于具有k个连通分支的平面图G, 有$n - m + r = k + 1$(其中: n, m和r分别为G的顶点数, 边数和面数)

证：设G有k个连通分支$G_1, G_2, \ldots, G_k$，G_i的顶点数，边数和面数分别为n_i, m_i和r_i($i = 1\ldots k$)。

显然，$m = \Sigma_{i=1\ldots k}m_i$，$n = \Sigma_{i=1\ldots k}n_i$

由欧拉公式可知：$n_i - m_i + r_i = 2\ (i = 1\ldots k) \qquad (1)$

由于每个G_i有一个外部面，且G只有一个外部面

所以G的面数$r = \Sigma_{i=1\ldots k}r_i - k + 1$。

于是，对上式(1)两边同时求和，得：

$2k = \Sigma_{i=1\ldots k}(n_i - m_i + r_i) = \Sigma_{i=1\ldots k}n_i - \Sigma_{i=1\ldots k}m_i + \Sigma_{i=1\ldots k}r_i = n - m + r + k - 1$

所以$n - m + r = k + 1$

欧拉公式

推论4.1.2 对一般平面图G，恒有$n - m + r \geq 2$

定理4.1.2 设简单连通平面图没有割边，且每个域的边界数至少为t，则$m \leq t(n - 2)/(t - 2)$

证：假设：连通平面图G有r个面。

由定理4.1.3可知：$2m = \Sigma_{i=1\ldots r} deg(R_i) \geq t \cdot r$ (1)

由欧拉公式可知：$r = 2 + m - n$ (2)

将(2)代入(1)中可得：$2m \geq t(2 + m - n)$

因是简单图，无重边，t不为2

所以有：$m \leq (n - 2)t/(t - 2)$。

欧拉公式

由定理4.1.2也可证明 K_5和$K_{3,3}$都不是平面图。

证明：

1) 假设：K_5是平面图。

由于K_5中无环和平行边，所以每个面的次数t，都有$t \geq 3$。

由定理4.1.2可知：边数应满足

$$10 \leq (5 - 2)3/(3 - 2) = 9$$

$m \leq (n-2)t/(t-2)$

这显然是矛盾的，所以K_5不是平面图。

2) 假设：$K_{3,3}$是平面图

由于$K_{3,3}$中最短圈的长度$L \geq 4$, 于是边数9应满足:

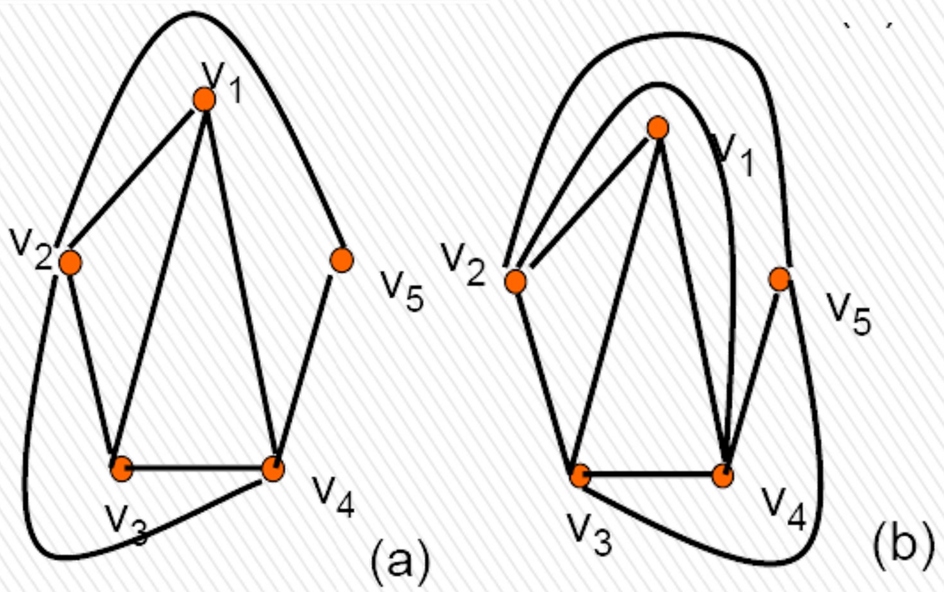
$$9 \leq (6-2)4/(4-2) = 8$$

这又是矛盾的，所以$K_{3,3}$也不是平面图。

极大平面图

极大平面图

定义4.2.1 设G为$n \ge 3$的简单平面图，若在G的任意不相邻的结点u, v之间加边(u, v)，所得图为非平面图，则称G为极大平面图。



图(a)中加入(v_3, v_5)总要与某些边相交

而当改画一下边(v_2, v_4)后，再加入(v_3, v_5)并没有破坏其平面性，如图(b)

因此说(a)并不是极大平面图

极大平面图

性质1： 若简单平面图中已无不相邻顶点，则是极大平面图如K_1, K_2, K_3, K_4都是极大平面图。

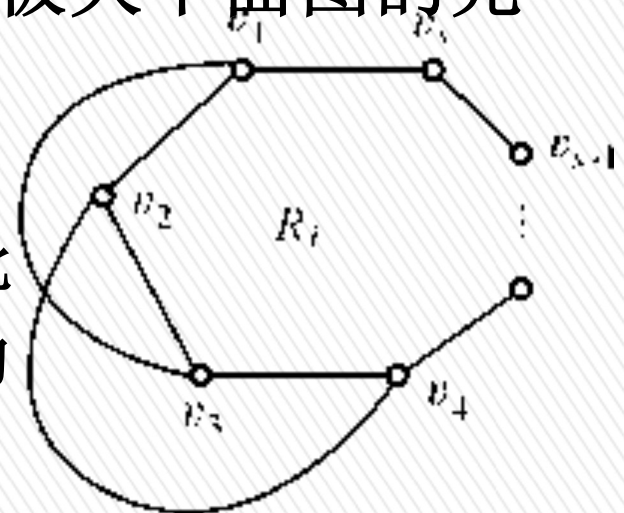
性质2： 极大平面图是连通的。

性质3： 简单连通平面图$G(n \geq 3)$为极大平面图的充要条件是每个面的次数均为3。

性质4： $3r = 2m$, 其中m为边数，r为面数。

极大平面图

性质3：简单连通平面图$G(n \geq 3)$为极大平面图的充要条件是每个面的次数均为3。



证明：（必要性）

因为G是简单图，没有自环和重边，因此不存在边界数为1和2的域。设G存在面的次数大于3。

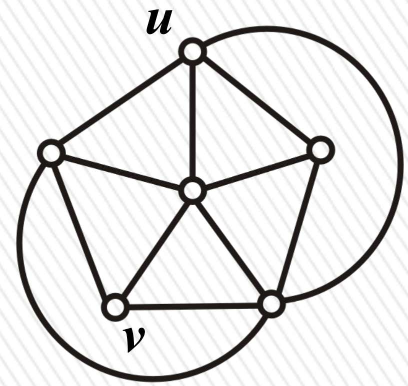
如图，若v_1与v_3不相邻，在R_i内加边(v_1, v_3)不破坏平面性，这与G是极大平面图矛盾，因此v_1与v_3必相邻。类似地，v_2与v_4也必相邻。

于是必产生(v_1, v_3)与(v_2, v_4)相交于R_i的外部，这就与“G是平面图”相矛盾，所以G中不存在次数大于3的面。

即G的每个面都由3条边所围，也就是说，各面的次数均为3

极大平面图

性质3： 简单连通平面图$G(n \geq 3)$为极大平面图的充要条件是每个面的次数均为3。



证明：（充分性）

若G不存在不相邻的结点，结论显然成立。

若存在不相邻的结点，设为u, v，则u, v不可能都在外部面R_0上(因为每个面的次数均为3），

因此至少有一个结点如v不在R_0的边界上。

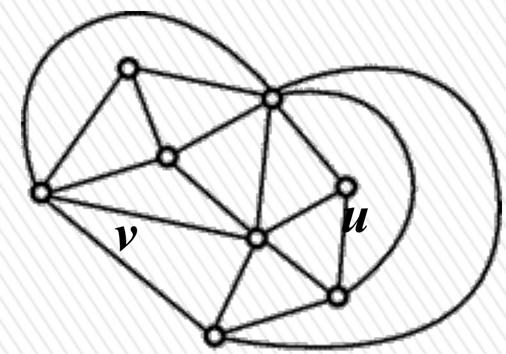
则与v关联的各边也不在R_0的边界上，

设$G' = G - v$，G'中存在原来含v的圈C，

因为u与v不相邻，所以u不在C上，

由Jordan定理知，若加边(u, v)必与C相交，

所以G为极大平面图。

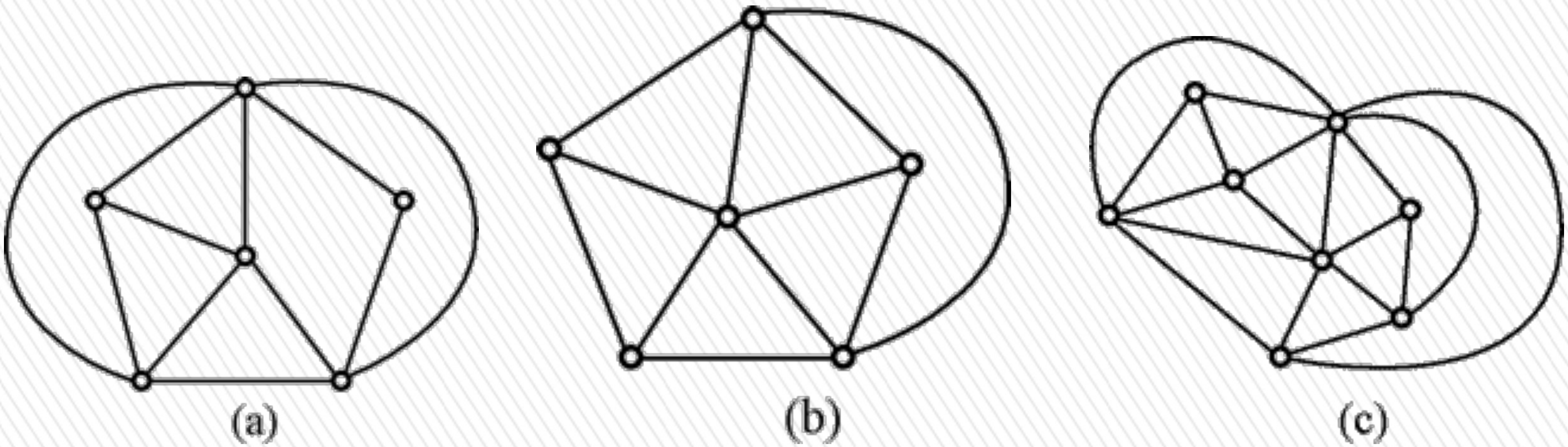


(c)

多选题 1分

设置

下图中哪些是极大平面图？



A

B

C

提交

极大平面图

(2) 极大平面图的性质

定理4.2.1 设G是$n(n \geq 3)$阶m条边的极大平面图，则 $m = 3n - 6, r = 2n - 4$。（**性质5**）

证：由于极大平面图是连通图，由欧拉公式得：

$$r = 2 + m - n \qquad (1)$$

由G是极大平面图，根据性质3可知：G的每个面的次数均为3

所以$2m = \Sigma_{i=1\ldots r} deg(R_i) = 3r \qquad (2)$

将上式(1)代入式(2)，整理后可得：$m = 3n - 6 \quad (3)$

(3)再代入(1)得: $r = 2n - 4$

极大平面图

(2) 极大平面图的性质

推论4.2.1 设G是$n(n \geq 3)$阶m条边的简单连通平面图，则$m \leq 3n - 6$，$r \leq 2n - 4$。

证：设G中没有割边，因为G中没有自环和重边，所以每个域的边界数至少为3，所以$3r \leq 2m$代入欧拉公式：

$$r = 2 + m - n$$

得：$m \leq 3n - 6$，$r \leq 2n - 4$

如果G里有割边e，由于e并不能增加G的面数，也有$3r < 2m$

代入欧拉公式即得以上结论

极大平面图

(2) 极大平面图的性质

例4.2.2 若简单平面图G有6个结点12条边，则每个域的边界数都是3。

证：由于$n = 6$，$m = 12$，满足定理4.2.1(极大平面图G中有$m = 3n - 6$)

因此G是极大平面图，

故每个域的边界数都是3

极大平面图

(2) 极大平面图的性质

例4.2.3 若简单平面图G不含K_3子图，则有$m \le 2n - 4$

证：显见每个域的边界数至少为4，

因此可得$4r \le 2m$

代入欧拉公式$(m / 2) \ge r = m - n + 2$即$m \le 2n - 4$

极大平面图

定理4.2.2 设G是简单连通平面图，则G的最小度$\delta \le 5$

证：假设G是n阶简单平面图。

- 当$n \le 6$时，结论显然成立。
- 当$n \ge 7$时，假设$\delta \ge 6$。

由握手定理可知：$2m = \Sigma_{i=1\ldots n} d(v_i) \ge 6n$。

因此$m \ge 3n$。这与推论4.2.1“$m \le 3n - 6$”相矛盾

所以G的最小度$\delta \le 5$。

定理4.2.2在图着色理论中占有重要地位。

极大平面图

(2) 极大平面图的性质

例4.2.4 结点数不超过11的简单平面图G一定存在度小于5的结点。

证明：假设每个结点的度都不小于5，则$5n \le 2m$

因为G是简单平面图，满足$m \le 3n - 6$

因此得$n \ge 12$，与已知矛盾

例4.2.5 所有完全图$K_n(n \ge 7)$不是平面图。

证明：因为$K_n(n \ge 7)$图每个结点的度都为≥ 6

由定理4.2.2 (简单平面图G中存在度小于6的结点)

极小非平面图

定义　若G是非平面图，并且任意删除一条边所得图为平面图，则称G为极小非平面图

说明:

K_5, $K_{3,3}$都是极小非平面图

极小非平面图必为简单图

图的平面性检测

图的平面性检测

(1) 非平面图

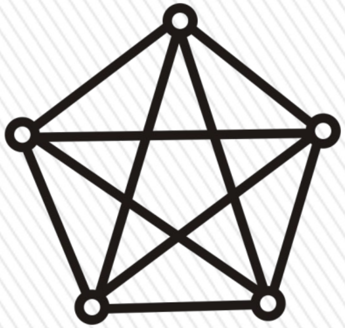
- 定义

如果图G不能嵌入平面使得任意两边只能在结点处相交，那么G就称为非平面图

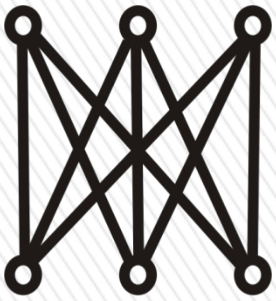
- 怎样判断一个图为可平面图还是非平面图？
  - 结点数最少的非平面图

    K_5
  - 边数最少的非平面图

    $K_{3,3}$



K_5



$K_{3,3}$

图的平面性检测

(2) 平面图的判定

定理4.3.1 若图G是平面图，则G的任何子图都是平面图。

$K_n(n \le 4)$和$K_{1,n}(n \ge 1)$的所有子图都是平面图。

定理4.3.2 若G是非平面图，则G的任何母图也都是非平面图
。

推论4.3.1 $\mathrm{K}_n(n \ge 5)$和$K_{3,n}(n \ge 3)$都是非平面图。

定理4.3.3 设G是平面图，则在G中加重边或自环后所得图还是平面图。

定理4.3.3说明重边和自环不影响图的平面性，因而在研究图是否为平面图时，可不考虑重边和自环。

图的平面性检测

(2) 平面图的判定：同胚的概念

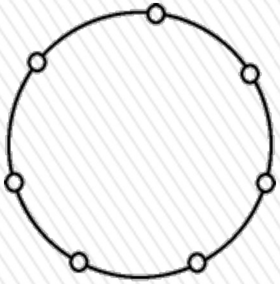
定义4.3.1 设$e = (u, v)$为图G的一条边，在G中删除e，增加新的顶点w，使u和v均与w相邻，称在G中插入2度顶点w。

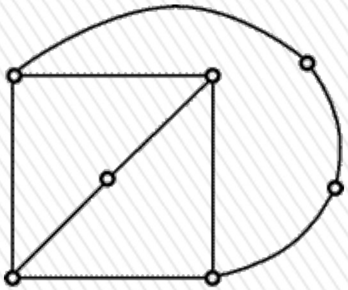
设w为G中一个2度顶点，w与u和v相邻，删除w, 增加新边(u, v)，称为在G中消去2度顶点w。

定义4.3.2 若两个图G_1与G_2同构，或通过反复插入或消去2度顶点后是同构的，则称G_1与G_2是同胚的。

例：(a)与K_3同胚,

(b)与K_4同胚。

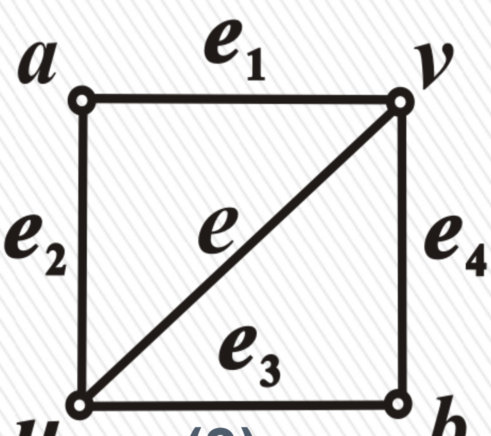

(a)


(b)

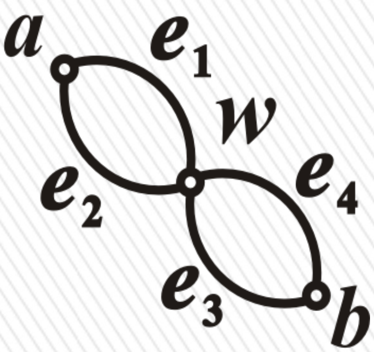
图的平面性检测

(2) 平面图的判定：边收缩的概念

定义4.3.3 设$e = (u, v)$为图G的一条边，在G中删除e，增加新的顶点w，使w关联除e外的u, v关联的一切边，称为边e的收缩。



(3)



(4)

图的平面性检测

(3) 平面图的判定定理

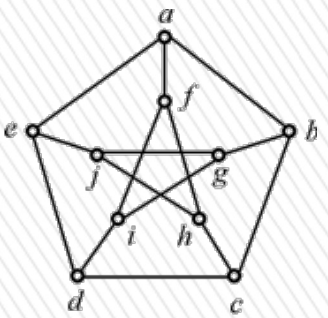
库拉图斯基定理1 图G是平面图，当且仅当G中不含与K_5和$K_{3,3}$同胚子图。

库拉图斯基定理2 图G是平面图，当且仅当G中没有可收缩到K_5和$K_{3,3}$的子图。

图的平面性检测

(3) 平面图的判定定理

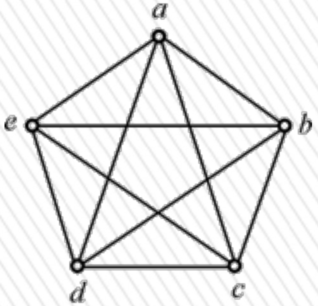
例4.3.2 证明彼得松图不是平面图。



(1)

证:

将彼得松图顶点标顺序如右图(1)所示。在图中将边(a, f), (b, g), (c, h), (d, i), (e, j)收缩后，得到右图(2)。



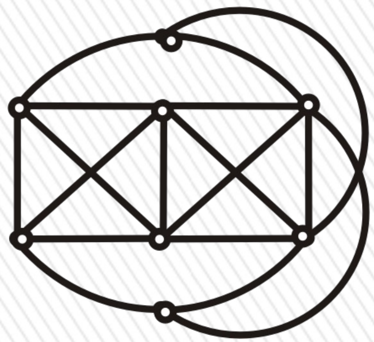
(2)

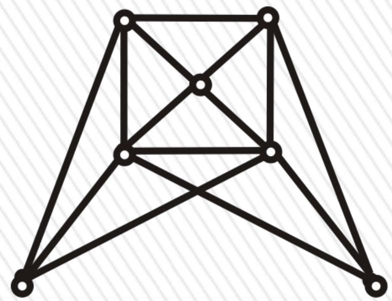
它是K_5，故彼得松图不是平面图。

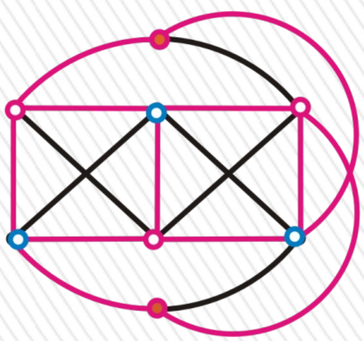
图的平面性检测

(3) 平面图的判定定理

例4.3.3 下面2个图是平面图吗？为什么？

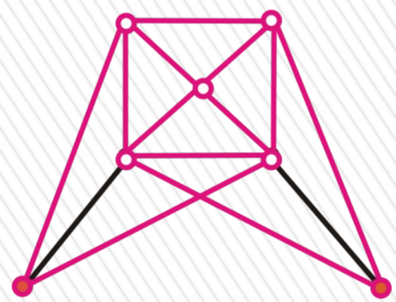






与$K_{3,3}$同胚

也可收缩到$K_{3,3}$



与K_5同胚

也可收缩到K_5

图的平面性检测

(3) 平面图判定的实用方法（不做要求）

步骤：

1. 若*G*是非连通的，则分别检测每一个连通分支。仅当所有的连通分支都是可平面的，*G*就是可平面的
2. 如果*G*中存在割点*v*，这时可将图*G*从割点处分离，构成若干个不含割点的连通子图，或称块，然后检测每一块。G是可平面的当且仅当每一块都是可平面的
3. 移去自环

图的平面性检测

(3) 平面图判定的实用方法

步骤：

4. 移去度为2的结点v_i及其关联的边，而在它的两个邻点v_j, v_k之间加入边(v_j, v_k)，原图是可平面的当且仅当新图是可平面的(同胚操作)

5. 移去重边

反复运用4、5。最后如下判断

- a. 若$m < 9$或$n < 5$，则G是可平面图
- b. 若$m > 3n - 6$，则G是非平面图
- c. 不满足a和b，需要进一步测试

更实用有效的算法：

- Demoucron, et al. DMP算法 1964
- Hopcroft, et al. $O(n)$ 1974

对偶图

对偶图

(1) 对偶图的定义

定义4.4.1 设G是平面图的某个平面嵌入，构造G的对偶图G^*如下:

1) 在G的面f_i中放置G^*的顶点v_i^*

2) 若e在G的面f_i与f_j的公共边界上，做G^*的边$e^*(v_i^*, v_j^*)$与e相交，且e^*不与其它边相交

3) 若e在面f_i之内，则$e^*(v_i^*, v_i^*)$是以顶点v_i^*为端点的环，与e相交一次。

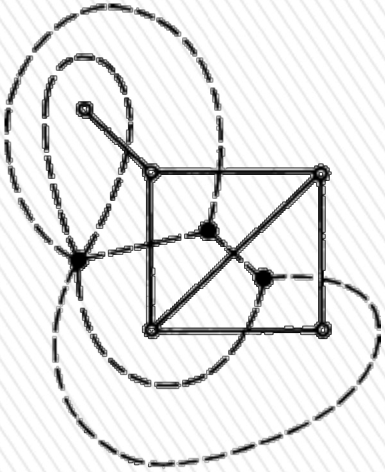
定义实际上给出了求图G的对偶图G^*的方法，它也称为D (drawing)过程

注意：只有平面图才有对偶图

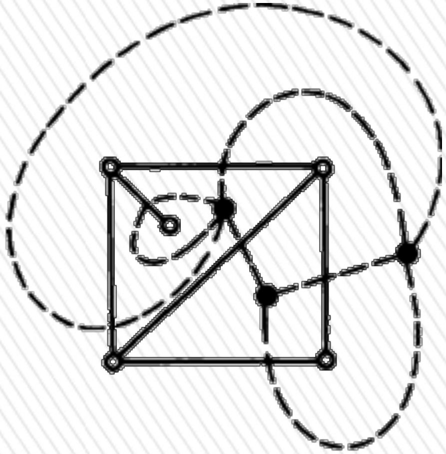
对偶图

(2) 对偶图的生成

例4.4.1 求对偶图



(a)



(b)

注意：同构的两个图，对偶图不一定同构。

对偶图

(3) 对偶图的性质

性质4.4.1 如果G是平面图，G一定有对偶图G^*，而且G^*是唯一的

证明：由D过程即可得证

性质4.4.2 G^*是连通图

证明：在平面图G里，每个域f都存在相邻的域

而且对G的任何部分域来说，都存在与它们之中某个域相邻的域

这样由对偶图的定义可知，G^*连通

对偶图

性质4.4.3 平面连通图G与其对偶图G^*的结点、边和域之间存在如下对应关系

$$m = m^*, n = r^*, r = n^*$$

性质4.4.4 设G^*的顶点v_i^*位于G的面R_i中，则

$$d_{G^*}(v_i^*) = deg(R_i)$$

证明：设G的面R_i的边界为C_i，C_i中有$k_1(k_1 \geq 0)$条桥，k_2个非桥边。

于是，C_i的长度为$k_2 + 2k_1$，即$deg(R_i) = k_2 + 2k_1$。

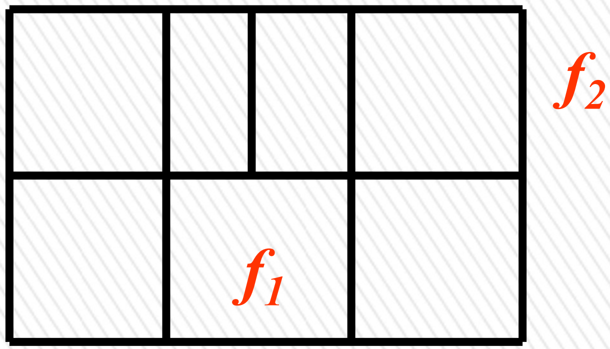
由“对偶图的定义”可知：k_1条桥对应v_i^*处有k_1个环，k_2条非桥边对应与v_i^*相邻的k_2条边。

所以$d_{G^*}(v_i^*) = k_2 + 2k_1 = deg(R_i)$。

对偶图

(3) 对偶图的性质

例4.4.2 图为一所房子的俯视图，设每一面墙都有一个门，问能否从某个房间开始过每扇门一次最后返回



解：做G的对偶图G^*，

问题转化为G^*是否存在欧拉回路。

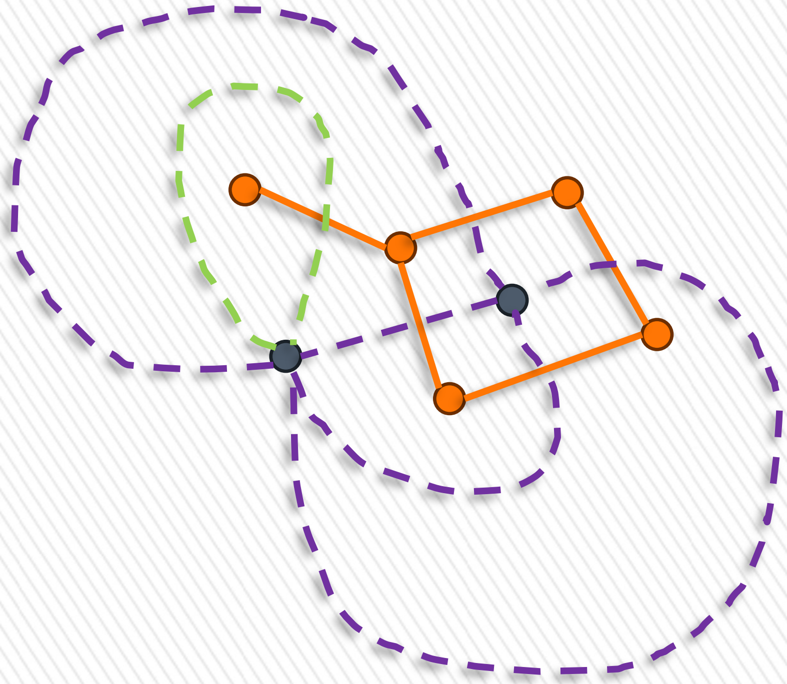
容易看出，域f_1和f_2在G^*中对应的结点度数为奇数

因此不存在欧拉回路。

对偶图

性质4.4.5 设C是平面图G的一个初级回路，S^*是G^*中与C的各边e_i对应的e_{i^*}的集合，则S^*是G^*的一个割集。

证明：C把G的域分成了两部分，因此$E(G^*)$ - S^*把G^*的结点分成不连通的两部分，由性质4.4.2(即G^*是连通图)，G^*这两部分分别是连通的，因此S^*是G^*的一个割集



对偶图

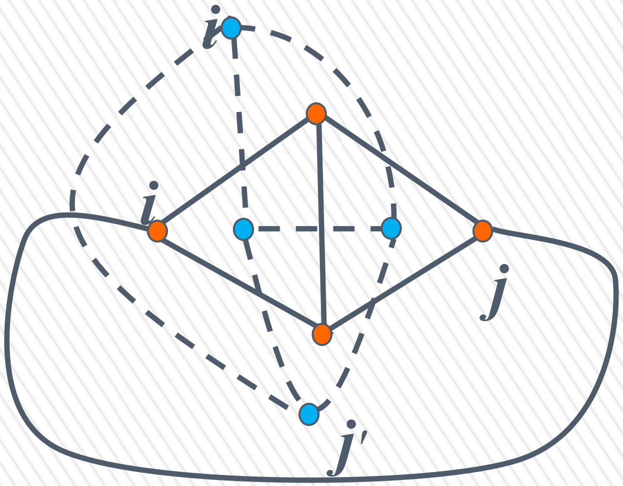
(3) 对偶图的性质

例4.4.3 设i, j是平面连通图无限域边界上的两个结点，求G中分离i, j的所有割集

解：在无限域中添加边(i, j)，得到G_1，

做G_1的对偶G_1^*，

G_1^*中除了(i', j')之外的从i'到j'的初级道路所对应的G的诸边都构成了G中分离i和j的割集



对偶图

(3) 对偶图的性质

定理4.4.1 G有对偶图的充要条件是G为平面图

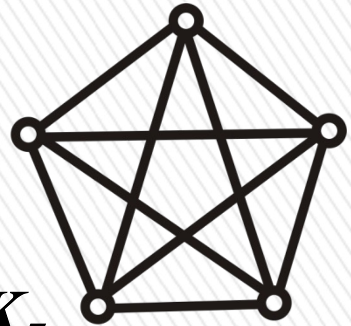
证明：由性质4.4.1直接可得到充分条件。

必要性：即非平面图没有对偶图。

由库拉图斯基定理，非平面图一定含有K_5和$K_{3,3}$同胚子图，故只需证K_5和$K_{3,3}$没有对偶图即可。

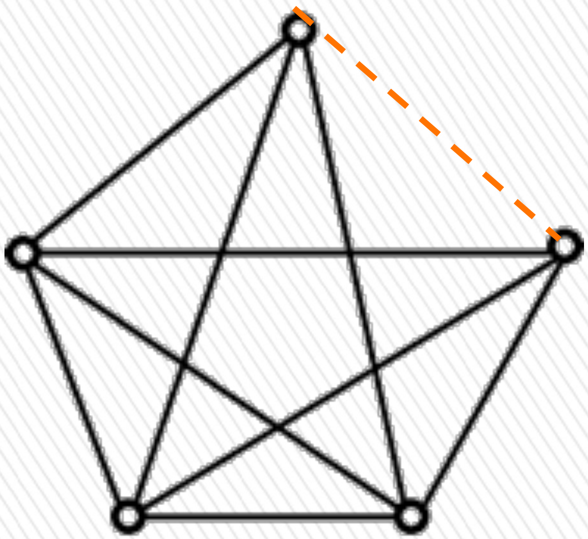
1) K_5中，$m = 10, n = 5, r \geq 7$，

则如果有对偶图，$m^* = 10, r^* = 5, n^* \geq 7$

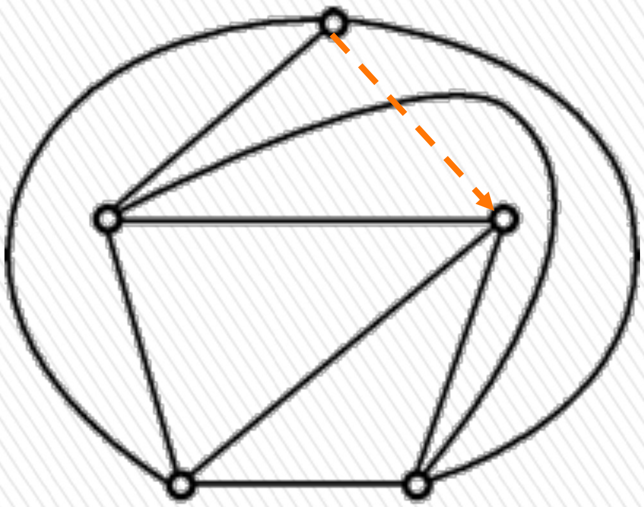


K_5

对偶图



(b)



(e)

至少7个域

由于K_5型子图没有重边和自环，故$d(v_i^*) \geq 3$，

$\sum d(v_i^*) \geq 3 * 7 > 2m^*$

故含K_5型子图没有对偶图

对偶图

定理4.4.1： G有对偶图的充分条件是G为平面图

证明（续）：

2) $K_{3,3}$中，$m = 9, n = 6, r \geq 5$，

则如果有对偶图中，$m^* = 9, r^* = 6, n^* \geq 5$，

由于$K_{3,3}$中每个面的边界至少为4，

故$d(v_i^*) \geq 4$，

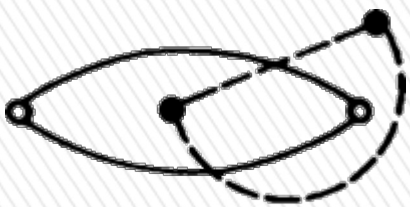
$\sum d(v_i^*) \geq 4 * 5 > 2m^*$

故含$K_{3,3}$型子图没有对偶图。

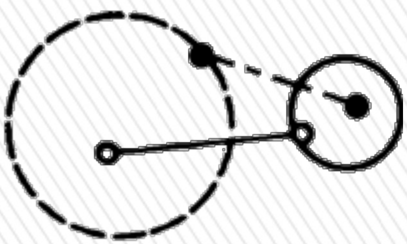
对偶图

(3) 自对偶图

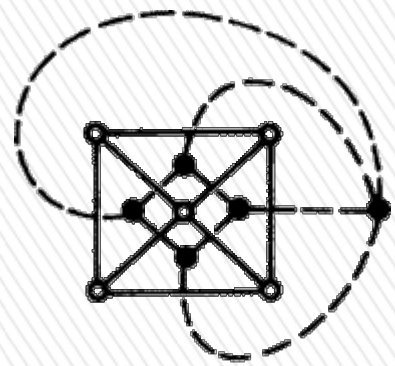
定义4.4.2 设G^*是平面图G的对偶图，若$G^* \cong G$，则称G为自对偶图。



(a)



(b)



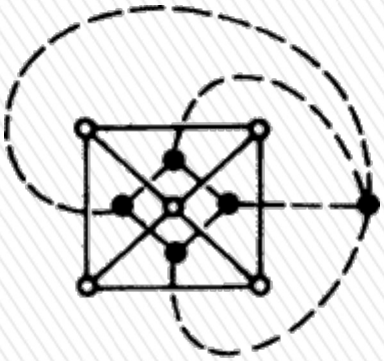
(c)

对偶图

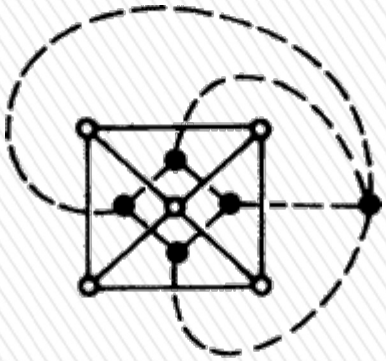
(3) 自对偶图

在n-1($n \geq 4$)边圈C_{n-1}内放置一个顶点，使该顶点与C_{n-1}上的所有顶点均相邻。所得n阶简单图称为n阶轮图。

轮图都是自对偶图。



(c)



(c)