利用最大模原理证明代数学基本定理

代数学基本定理 设n是不小于1的正整数. 则每个复系数多项式

$$p_n(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_{n-1} z + c_n$$

在C中有一个零点.

Cauchy 高阶导数公式 设$f(z)$在$\Gamma_R = \{z : |z - z_0| = R > 0\}$内解析, 在$\Gamma_r$上连续，则有以下$Cauchy$高阶导数公式成立：

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0),\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots. \tag{0.1}$$

在公式(0.1)中令$n = 0$, 则有以下平均值等式：

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,\ 0 \leq r \leq R. \tag{0.2}$$

最大模原理 设$f(z)$在$D_R = \{z : |z - z_0| \leq R\}$内解析, 在$\Gamma_R$上连续，则有以下最大模原理：

$$\max_{|z-z_0|\leq R} |f(z)| = \max_{|z-z_0|=R} |f(z)|.$$

证明 若$f(z)$是常数函数，则以上结论明显成立. 以下设$f(z)$不是常数函数. 由于$f(z)$在D_R连续，故$|f(z)|$必在D_R取最大模. 设$\max_{z\in D_r} |f(z)| = |f(z_1)|$且$|z_1 - z_0| \leq R$, 在公式(0.2)中令$z_0 = z_1$，则可得平均值公式

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_1 + re^{i\theta}) d\theta,\ 0 \leq r \leq R. \tag{0.3}$$

由此可得以下不等式：

$$|f(z_1)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_1 + re^{i\theta})| d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f(z_1)| d\theta = |f(z_1)|. \tag{0.4}$$

由于以上不等式必须恒为等式，从不等式(0.4)可得对任意$r \leq R$均有$|f(z)| = |f(z_1 + re^{i\theta})| = |f(z_1)|$. 因而$|f(z)|$在区域$D_R$内是常数，由第二章习题可知$f(z)$是常数函数, 这与假设$f(z)$不是常数函数矛盾. 因而必有$\max_{z\in D_R} |f(z)| = \max_{z\in \Gamma_R} |f(z)|$. □

代数学基本定理的证明

证明1 假设$p_n(z)$没有零点，令$f(z)=\frac{1}{p_n(z)}$, 则有$f'(z)=\frac{-p'_n(z)}{p_n^2(z)}$处处存在，因而$f(z)$是处处解析的非常数函数. 因当$|z|$充分大时，

$$|p_n(z)|=|z^n(1+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots+\frac{c_n}{z^n})|\geq|z^n|(1-|\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots+\frac{c_n}{z^n}|)\geq|z^n|(1-\frac{1}{2})=\frac{|z|^n}{2}$$

故

$$|p_n(z)|\to+\infty,\quad 若\ |z|\to+\infty.$$

从而有$\lim_{|z|\to+\infty}f(z)=0$，由最大模原理, 必有$f(z)\equiv 0$. 但是这与$f(z)$的定义矛盾. 因而$f(z)$不是处处解析的函数，不难看出，$f(z)$不解析的点即是$p_n(z)$的零点. 从而证明了代数学基本定理. □

证明2 假设$p_n(z)$没有零点，则$p_n(0)\neq 0$. 令$f(z)=\frac{1}{p_n(z)}$, 则有$f'(z)=\frac{-p'_n(z)}{p_n^2(z)}$处处存在，因而$f(z)$是处处解析的非常数函数. 由平均值公式及上面的推导可得当$|z|=r\gg 1$时，

$$|f(z)|=\frac{1}{|p_n(z)|}\leq\frac{2}{|z|^n}=\frac{2}{r^n}\leq\frac{1}{2}|f(0)|.$$

及

$$0<|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})d\theta\right|\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|d\theta\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2}{r^n}d\theta=\frac{2}{r^n}\leq\frac{1}{2}|f(0)|.$$

即

$$0<|f(0)|<\frac{1}{2}|f(0)|.$$

这是不可能的. 因而$f(z)$不是处处解析的函数，不难看出，$f(z)$不解析的点即是$p_n(z)$的零点. 从而证明了代数学基本定理. □

证明3 假设$p_n(z)$没有零点，令$f(z)=\frac{1}{p_n(z)}$, 则有$f'(z)=\frac{-p'_n(z)}{p_n^2(z)}$处处存在，因而$f(z)$是处处解析的非常数函数. 因当$|z|$充分大时，

$$|p_n(z)|=|z^n(1+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots+\frac{c_n}{z^n})|\geq|z^n|(1-|\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots+\frac{c_n}{z^n}|)\geq|z^n|(1-\frac{1}{2})=\frac{|z|^n}{2}$$

故

$$|p_n(z)|\to+\infty,\quad 若\ |z|\to+\infty.$$

对固定的$R>0$充分大，令

$$|p_n(z_0)|=\min_{|z|\leq R}|p_n(z)|.$$

则由最大模原理，易见$|z_0|<R$, 断言，$p_n(z_0)=0$, 若不然，则$f(z_0)=\frac{1}{p_n(z_0)}$在$z_0$取最大模，这与最大模原理矛盾. 由此得知，存在$z_0\in C$使得$p_n(z_0)=0$. □