# 离散数学(1)
# Discrete Mathematics

# 第十章 关系

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

# 第十章　关系

# 集合

- 万有集不存在定理的证明中，为什么可以取$x = A_0$？
  - 这里的$x$是任意的，即对于任意$x$，$x \in A_0$等价于$x \in A \wedge x \notin x$。因此可以取$x = A_0$。

不存在集合$A$，使任一集合都是$A$的元素。

- **证明：**假设存在集合$A$，使任一集合都是$A$的元素。选$P(x)$为$x \notin x$，依据子集公理，存在集合

$$A_0 = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin x \}$$

即$\boxed{x \in A_0}$ 等价于 $x \in A \wedge x \notin x$

取 $x = A_0$，则有

$A_0 \in A_0$等价于$A_0 \in A \wedge A_0 \notin A_0$。

因为$A_0 \in A$为真，所以$A_0 \in A_0$等价于$A_0 \notin A_0$，矛盾！

所以，$A_0 \notin A$，与假设矛盾，定理得证。

- 证明有点迷
  - 熟练掌握课本的例题和作业题

# 关系

- 矩阵逻辑乘法不是很理解，为什么 $M(S\circ R)=M(R)M(S)$？（跟线性代数里的矩阵乘法反了）是因为关系矩阵的定义域x中相同的x为一行？x从行输入而线性代数中的x从列输入。谢谢！！！
  - 因为$R$与$S$的合成$S\circ R$定义为

$$S\circ R=\{\langle x,y\rangle|(\exists z)(\langle x,z\rangle\in R\wedge\langle z,y\rangle\in S)\}$$

  - 对应的关系矩阵满足

$$w_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n}(r_{ik}\wedge s_{kj})$$

  - 因此有$M(S\circ R)=M(R)M(S)$

# 关系

- 还是不太理解底数2是怎么来的。什么叫有或无两种状态
  - $A \times A$中可能有$n^2$个不同的有序对
  - 每个有序对可能在二元关系里，也可能不在二元关系里，称作“有或无两种状态”
  - 因此$A$上共可定义$2^{n^2}$种不同的二元关系
  - 另外一种理解是，$A \times A$幂集中的元素是$A$上的二元关系，因此一共有$2^{n^2}$种

思考：若$|A| = n$

**A** 上 共可定义多少个不同的二元关系？

A 2n

B $n^2$

C $2^{n^2}$

D $2n^2$

- 非对称和反对称的区别是？
  - 非对称的关系和反对称的关系在定义上存在区别

    非对称：$\neg(\forall x)(\forall y)((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy) \to yRx)$

    反对称：$(\forall x)(\forall y)((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx) \to x = y)$
  - 具体存在区别的例子可见课本10.4.1 例4,5,6,7

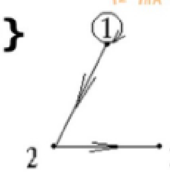
# 关系

- 按课本定义，“非自反”就是“反自反”吗
- 关于反自反和非自反是教材上写错了吗，教材上写的是非自反但是定义写的是反自反的。反自反是一种特殊的非自反这个说法对不对？
  - 课本对非自反的定义存在问题，关系$R$是非自反的则

$$\neg(\forall x)(x \in A \to xRx)$$

  - 可以认为反自反是一种特殊的非自反
- 即使是反自反不也是错的吗？
  - 这里的非自反书写有误，应当是反自反
  - 关系$R_2$不是反自反的，因为$<1,1> \in R_2$

**$R_2$={<1,1>,<1,2>,<2,3>}**




A 自反

B 非自反

C 反对称

D 传递

E 对称

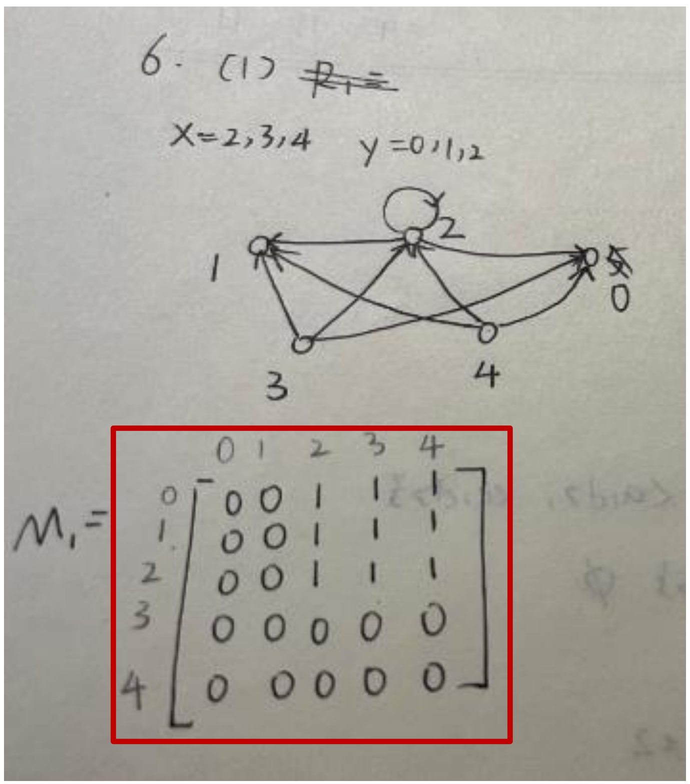
# 作业相关

对$A = \{0,1,2,3,4\}$上的下列关系，给出关系图和关系矩阵。

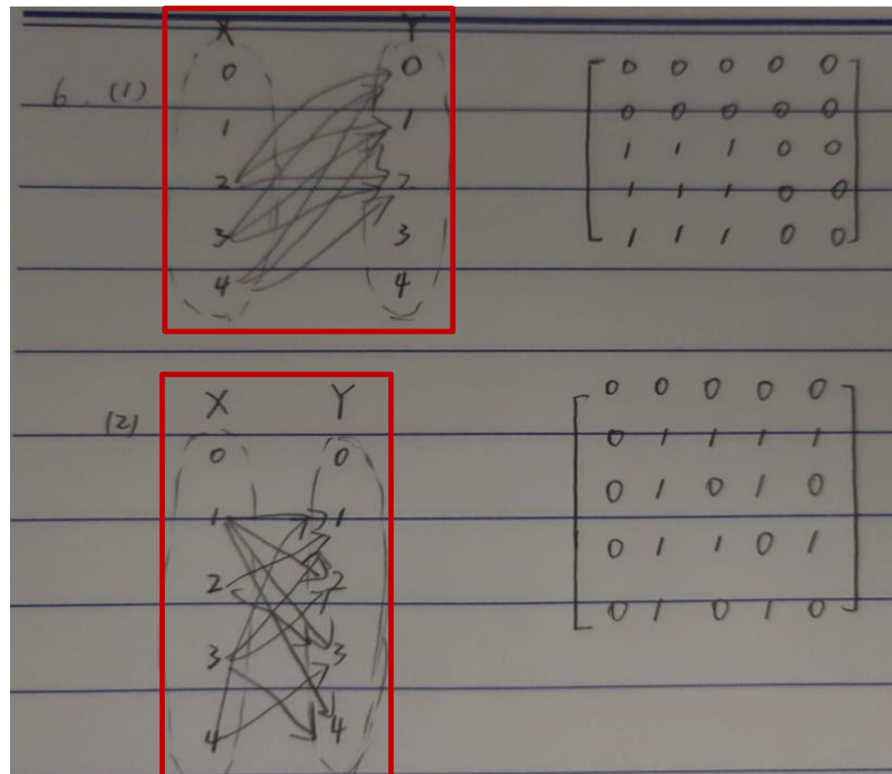
（1） $R_1 = \{< x, y > | 2 \le x \wedge y \le 2\}$

（2） $R_2 = \{< x, y > | x和y是互质的\}$

(注意：0和任意自然数均不互质)



关系矩阵的行和列搞反了



在$A$上的关系图不要画成两个$A$集合

# 其他

- 作业10 第6题 1和1是否互质：
  - 互质指两个数之间没有除1以外的公因数
  - 因此1和1互质

对$A=\{0,1,2,3,4\}$上的下列关系，给出关系图和关系矩阵。

（1）$R_1=\{<x,y>|2\leq x\wedge y\leq 2\}$
（2）$R_2=\{<x,y>|x和y是互质的\}$
(注意：0和任意自然数均不互质)

- 请问这次作业难度和考试一致么？在下面几次作业中能不能额外布置一道难度和考试压轴差不多的题目？十分感谢
  - 本次作业前面的题在考试中属于简单难度题，最后两题在考试中属于中等难度题。但试题难度的评判是因人而异的
  - 后面的作业中会增加和考试难度相当的题目

# 几个主要关系的性质

*A*是非空的

| 关系＼性质 | 自反性 | 反自反性 | 对称性 | 反对称性 | 传递性 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **恒等关系** $I_A$ | √ | × | √ | √ | √ |
| **全域关系** $E_A$ | √ | × | √ | × | √ |
| $A$**上的空关系** $\Phi$ | × | √ | √ | √ | √ |
| $N$**上的整除关系** | √ | × | × | √ | √ |
| **包含关系** $\subseteq$ | √ | × | × | √ | √ |
| **真包含关系** $\subset$ | × | √ | × | √ | √ |

# 复习：闭包的定义

- 设R是非空集合$A$上的关系，如果$A$上有另一个关系$R'$满足：

（1）$R'$是自反的（对称的或传递的）；

满足性质

（2）$R \subseteq R'$；

包含关系

（3）对$A$上任何自反的（对称的或传递的）

关系$R''$，$R \subseteq R'' \rightarrow R' \subseteq R''$。

最小的那个

- 则称关系$R'$为$R$的自反（对称或传递）闭包 闭包
- 一般将R的自反闭包记作$r(R)$，

  对称闭包记作$s(R)$，传递闭包记作$t(R)$。

# 传递闭包的构造方法

- 定理：$R$是非空集合$A$上的关系, 则$r(R) = R \cup I_A$
- **定理：$\boldsymbol{R}$是非空集合$\boldsymbol{A}$上的关系, 则$\boldsymbol{s(R) = R \cup R^{-1}}$**
- 定理：$R$是非空集合$A$上的关系, 则

$$t(R) = R^1 \cup R^2 \cup \ldots$$

推论：设$A$是非空有限集，$R$是集合$A$上的二元关系，

则存在正整数$n$，使得$t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$

# 10.5 关系的闭包(closure)

**定理**：设$A$是集合，$R_1$和$R_2$是$A$上的二元关系,$R_1 \subseteq R_2$，则有：

- $r(R_1) \subseteq r(R_2)$
- $s(R_1) \subseteq s(R_2)$
- $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

$r(R_1) \subseteq r(R_2)$

证明：  $r(R_1) = R_1 \cup I_A$，$r(R_2) = R_2 \cup I_A$

**定理**：R在A上传递当且仅当$R \circ R \subseteq R$

# 关系的闭包(closure)

定理：设$X$是一集合，$R$是$X$上的二元关系，则有：

- 若$R$是自反的，则$s(R), t(R)$也自反
- 若$R$是对称的，则$r(R), t(R)$也对称
- 若$R$是可传递的，则$r(R)$也可传递

$s(R)$不是可传递的？

$$R = \{<1,2>\}\ S(R) = \{<1,2>, <2,1>\}$$

# 若$R$是传递的，$s(R)$不一定是传递的

反例：$R=\{<a,b>,<c,b>\}$,

$R$是传递的

$s(R)=\{<a,b>,<b,a>,<c,b>,<b,c>\}$

$s(R)$不是传递的

**若$\boldsymbol{R}$是可传递的，则$\boldsymbol{r(R)}$也可传递**

# 闭包同时具有的多种性质2

对非空集合$A$上的关系$R$，

自反关系是万金油

（1）$rs(R) = sr(R)$

（2）$rt(R) = tr(R)$

（3）$st(R) \subseteq ts(R)$

若$R$是自反的，则$s(R), t(R)$也自反

若$R$是对称的，则$r(R), t(R)$也对称

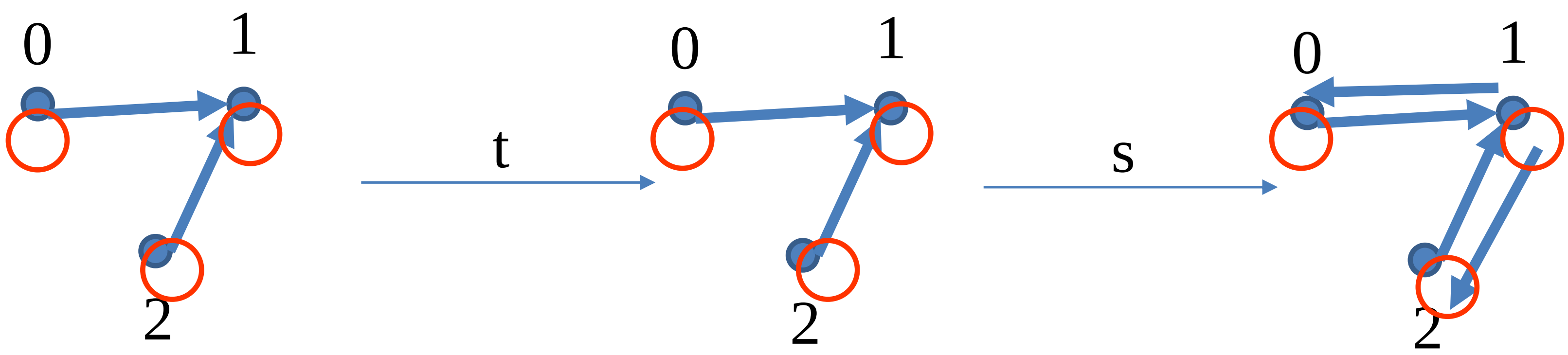
若$R$是可传递的，则$r(R)$也可传递

其中 $rs(R) = r(s(R))$，其它类似。

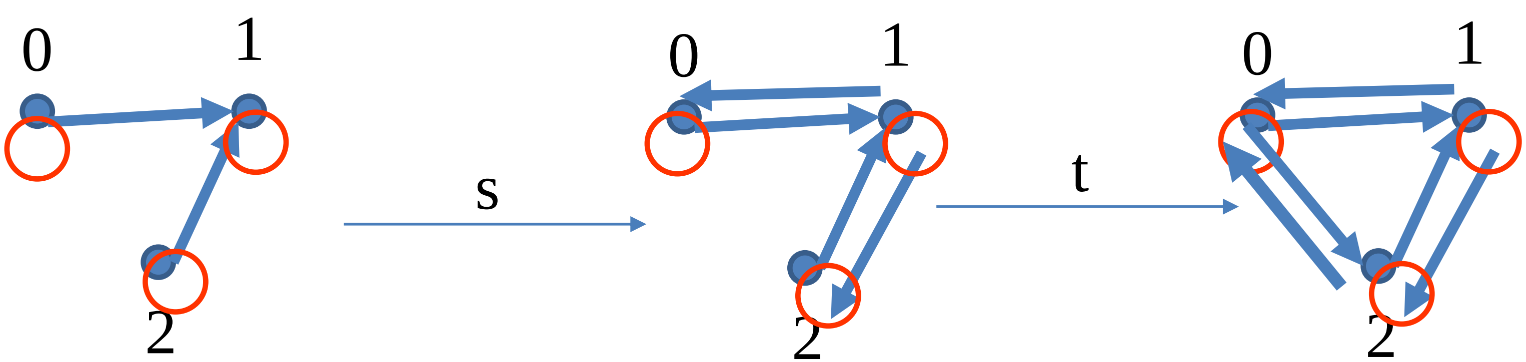
$r(R) \rightarrow sr(R) \rightarrow tsr(R)$

$r(R) \rightarrow tr(R) \rightarrow str(R)$ ？

# 复习：反例




对称的，但不是传递的，少了(0,2)和(2,0)



# 10.6 等价关系和划分

## 定义10.6.1 等价关系

- 设$R$为非空集合$A$上的关系，如果$R$是

  自反的、

  对称的、

  传递的，

- 则称$R$为$A$上的等价关系。

# 10.6 等价关系与划分

## 等价类

设$R$是非空$A$集合上的等价关系，对于任何$x \in A$，令：

- $[x]_R = \{y | y \in A \ \wedge \ xRy\}$
- $[x]_R$是由$x \in A$生成的$R$等价类
- $x$为等价类$[x]_R$的表示元素
- 有如下性质：

  （1） $\forall x \in X, x \in [x]_R, [x]_R \neq \emptyset$

  （2） 若$y \in [x]_R$, 则$[x]_R = [y]_R$

  （3） $y \in [y]_R$, 若$y \notin [x]_R$, 则$[x]_R \neq [y]_R$

# 10.6 等价关系与划分

定理 设$R$是集合$A$上的等价关系，则

$$A = \cup\{[x]_R \mid x \in A\}$$

证明：首先易证$\cup\{[x]_R \mid x \in A\} \subseteq A$

其次，对任意$y \in A$

$y \in A \Rightarrow y \in [y]_R \wedge y \in A$

$\Rightarrow y \in \cup\{[x]_R \mid x \in A\}$

所以：$A \subseteq \cup\{[x]_R \mid x \in A\}$

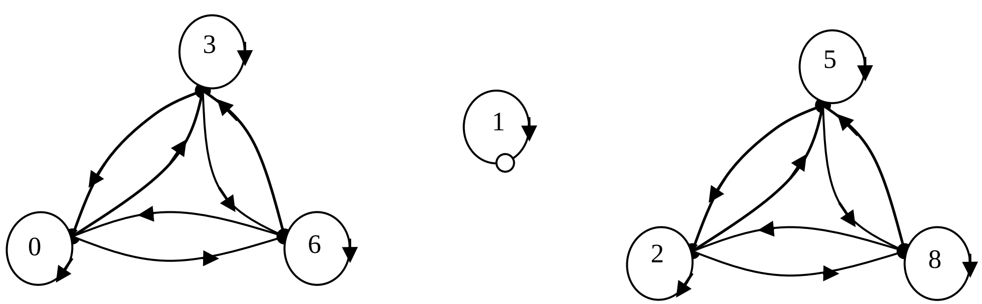
等价类覆盖集合

# 10.6 等价关系与划分–等价类

- 由等价类的定义性质知:$X$内的任两元素对于$R$的等价类或相等或分离，故$X$内所有元素对$R$的等价类的并集就是$X$。
- 也可以说，$X$的元素对于$R$的等价类定义了$X$的一个划分，且这样的划分就是唯一的。原因：由等价类的性质知等价关系$R$构成的类两两不相交，且覆盖$X$，且$X$的所有元素对于$R$的等价类是唯一的。

# 10.6 等价关系与划分-讨论

- 等价类$[x]_R$是一个集合，$[x]_R \subseteq A$（$[x]_R$是$A$的子集）
- $[x]_R$中的元素是在$A$中所有与$x$具有等价关系$R$的元素所组成的集合
- 在等价关系中的关系图中，
  - 每个连通子图中的所有点就构成一个等价类



# 10.6 等价关系与划分-实例

- $A = \{a, b, c, d\}$
- $R = \{< a, a >, < b, b >, < a, b >, < b, a >, < c, c >, < d, d >, < c, d >, < d, c >\}$
- $[a]_R = \{a, b\} = [b]_R$
- $[c]_R = \{c, d\} = [d]_R$

# 10.6 等价关系与划分-实例

- 设$A = N$

  $R = \{< x, y > | x \in A \wedge y \in A \wedge (x - y)$可被3整除$\}$

- 等价类

  $[0]_R = \{0,\ 3,\ 6,\ 9 \ldots\}$

  $[1]_R = \{1,\ 4,\ 7,\ 10 \ldots\}$

  $[2]_R = \{2,\ 5,\ 8,\ 11 \ldots\}$

单选题 1分

设置

整数集上的关系R定义为$R = \{< x, y > \mid x + y$为偶数$\}$，下列说法正确的是

A R不是等价关系

B R是等价关系并且有1个等价类

C R是等价关系并且有2个等价类

D R是等价关系并且有3个等价类

提交

# 10.6 等价关系与划分

**商集**：$R$是$A$上的等价关系，$R$的所有等价类构成的集合

记为$A/R$：$\{[x]_R \mid x \in A\}$

- 例：$A$为全班同学的集合，$|A| = n$，$(n \in N)$

  按指纹的相同关系$R_1$是一个等价关系

  $$A/R_1 = \{[x_1]_{R_1}, \dots [x_{\mathrm{n}}]_{R_1}\}$$

  同姓关系$R_2$是一等价关系

  $$A/R_2 = \{[张]_{R_2}，[李]_{R_2}，\dots\}$$

# 10.6 等价关系与划分

划分：给定一非空集合$A$，$A$的一个划分为非空子集族$S=\{A_1,A_2,\ldots A_m\}$，满足：

（1） $\varnothing \notin S$

（2） $\forall x \forall y(x,y \in S \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y=\varnothing)$

（3） $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = A$

非空子集，不相交，并为A

多选题 1分

Setting

- 例：A={a,b,c},下列哪些$A_i$为A的一个划分？
  - $A_1=\{\{a\},\{b,c\}\}$
  - $A_2=\{\{a\},\{c\},\{b\}\}$
  - $A_3=\{\{a\},\{a,b,c\}\}$
  - $A_4=\{\{a,b\},\{c\},\varnothing\}$
  - $A_5=\{\{a,\{a\}\},\{b,c\}\}$

A $A_1$

B $A_2$

C $A_3$

D $A_4$

E $A_5$

提交

# 等价关系与划分有一一对应关系

- 划分到等价关系转化：$A$是一非空集合，$S$是$A$的一个划分，下述关系必定是一个等价关系

$R=\{<x,y> \mid x,y\in A \wedge x,y$在$S$的同一划分$\}$

- 等价关系到划分的转化：设$A$是非空集合，$R$是$A$上的等价关系。$R$的商集是$A$的划分

# 10.6 等价关系与划分

例1 整数集$Z$上，$R=\{<x,y>)|x-y$能被4整除$\}$

$$=\{<x,y>|x\equiv y(mod4)\}$$

$R$是等价关系，由$Z$上元素所构成的类分别以余数为0、1、2、3分类：

$[0]_R=\{\cdots-8,-4,0,4,8,12\cdots\cdots\}=\{4k\}$

$[1]_R=\{\cdots-7,-3,1,5,9,13\cdots\cdots\}=\{4k+1\}$

$[2]_R=\{\cdots-6,-2,2,6,10,14\cdots\cdots\}=\{4k+2\}$

$[3]_R=\{\cdots-5,-1,3,7,11,15\cdots\cdots\}=\{4k+3\}$

# 分析等价类的性质

- 令$W = [\mathrm{i}]_R$

1、任$w \in W$，$wRw$

2、任$w_1$、$w_2 \in W$，$[w_1]_R = [w_2]_R$

3、$[0]_R \cap [1]_R = \varnothing, \ldots, [2]_R \cap [3]_R = \varnothing,$

$[0]_R \cup [1]_R \cup [2]_R \cup [3]_R = Z$

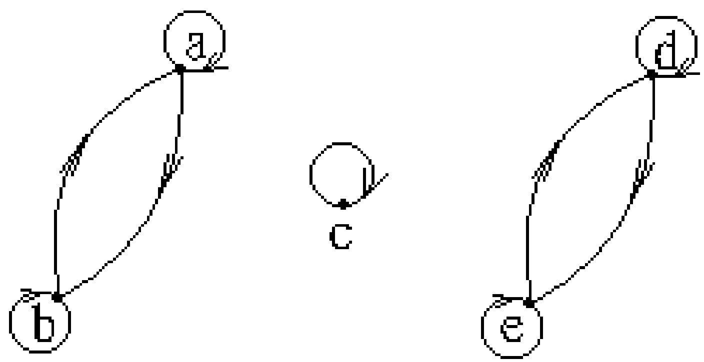
- 得$Z/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R, [3]_R\}$，这个商集是$Z$上的一个划分。这些类称为模4的剩余类。

# 10.6 等价关系与划分

例 $A = \{a, b, c, d, e\}, S = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}\}$

对应划分$S$的等价关系为

$R = \{a, b\} \times \{a, b\} \cup \{c\} \times \{c\} \cup \{d, e\} \times \{d, e\}$
$= \{< a, a >, < b, b >, < a, b >, < b, a >, < c, c >, < d, d >, < e, e >, < d, e >, < e, d >\}$



# 定理：任一集合上的一个划分可产生一个等价关系。

证明：

- 设$C = \{C_1, C_2 \ldots\ldots C_m\}$, $C_i$为$C$的划分块，由$C$可建立一个关系

$$R = (C_1 \times C_1) \cup (C_2 \times C_2) \cup \ldots\ldots \cup (C_m \times C_m)$$

- 易知$R$是等价关系。
- 集合上的等价关系和其上的划分是一一对应的。

# 10.6 等价关系与划分

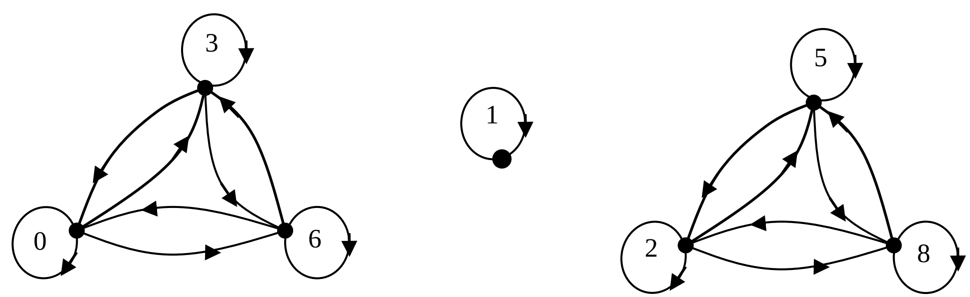
例 设$A=\{0,1,2,3,5,6,8\}$，$R$为$Z$上模3等价关系$R=\{<0,0>,<1,1>,<2,2>,<3,3>,<5,5>,<6,6>,<8,8>,<0,3>,<3,0>,<0,6>,<6,0>,<2,5>,<5,2>,<2,8>,<8,2>,<3,6>,<6,3>,<5,8>,<8,5>\}$，$R$的关系图见图

- 模3的等价类：

$[0]=\{0, 3, 6\}=[3]=[6]$，

$[1]=\{1\}$，

$[2]=\{2, 5, 8\}=[5]=[8]$。



设$X=\{a,b,c,d,e\}$，求由划分$S=\{\{a,b\},\{c\},\{d,e\}\}$确定的等价关系。

A $\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<d,e>,<e,e>,<e,d>\}$

B $\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<d,e>,<e,e>\}$

C $\{<a,a>,<a,b>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<d,e>,<e,e>,<e,d>\}$

D $\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<e,e>,<e,d>\}$

提交

# 10.6 等价关系与划分

**例** 设$X = \{a, b, c, d, e\}$，求由划分$S = \{\{a,b\},\{c\},\{d,e\}\}$确定的等价关系。

$$R1 = \{a,b\} \times \{a,b\}$$

$$= \{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>\}$$

$$R2 = \{c\} \times \{c\} = \{<c,c>\}$$

$$R3 = \{d,e\} \times \{d,e\}$$

$$= \{<d,d>,<d,e>,<e,e>,<e,d>\}$$

$$R = R1 \cup R2 \cup R3$$

由划分的定义可知：

集合$A$的划分和$A$上的等价关系可以建立一一对应。即：

$A$的一个划分确定了$A$上的一个等价关系；反之亦然。

## 定理10.6.2　等价关系诱导出的划分

- 对非空集合$A$上的等价关系$R$，$A$的商集$A/R$就是$A$的划分，称为由等价关系$R$诱导出的$A$的划分，记作$\pi_R$。

## 定理10.6.3　划分π诱导出的$A$上的等价关系

- 对非空集合$A$上的一个划分π，令$A$上的关系$R_\pi$为
- $$R_\pi = \{\langle x, y\rangle \mid (\exists z)(z \in \pi \wedge x \in z \wedge y \in z)\}$$

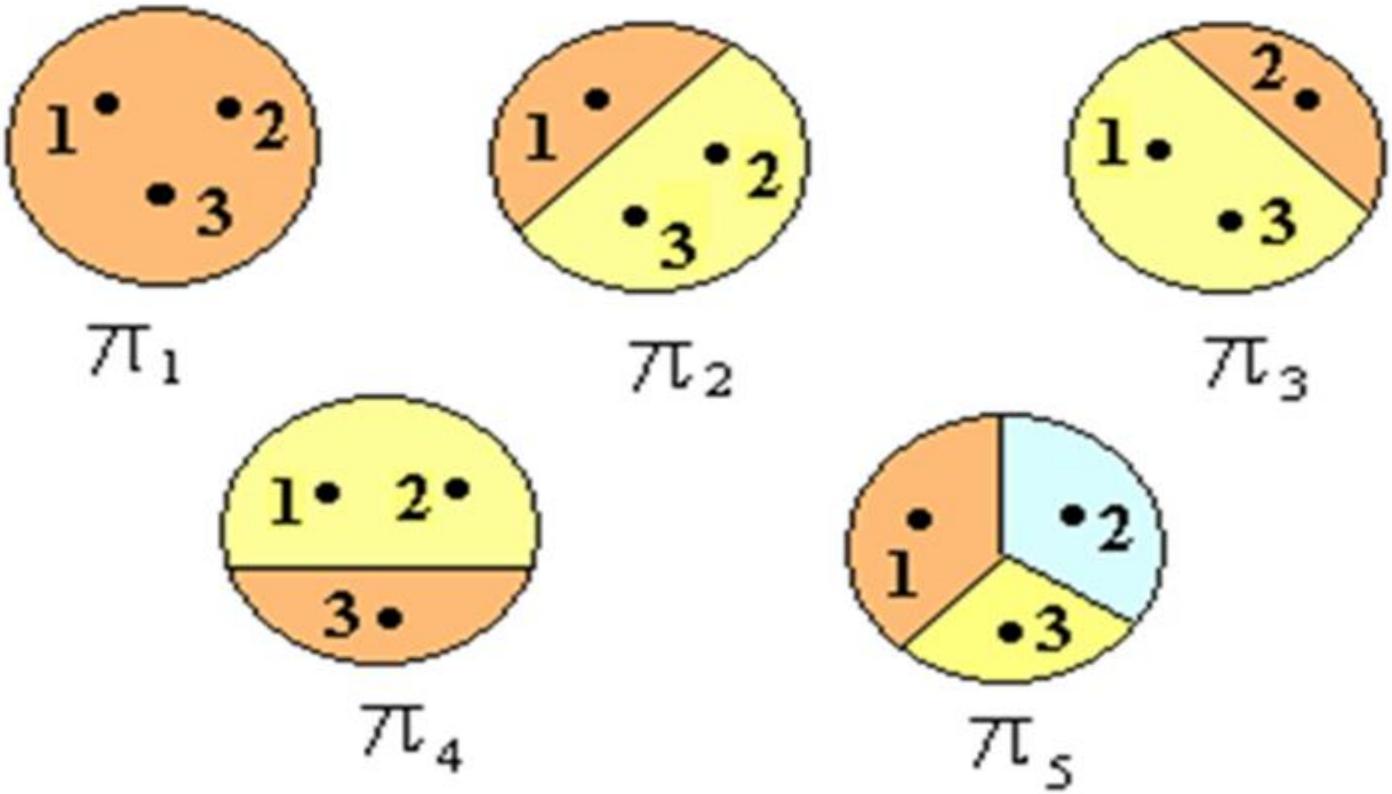
  $R_\pi$则为$A$上的等价关系，它称为划分π诱导出的$A$上的等价关系。

## 定理10.6.4　划分π和$A$上的等价关系$R$

- 对非空集合$A$上的一个划分π，和$A$上的等价关系$R$，π诱导$R$当且仅当$R$诱导π。

**例8：给出A = {1,2,3}上所有的等价关系。**

**求解思路：先做出A的所有划分，然后根据划分写出对应的等价关系。**



主观题 10分

设置

计算集合$A$上不同的等价关系的个数。

如$P182$上例6，$A=\{1,2,3\}$时，$A$上可得到5个不同的等价关系，即$f(A_3)=5$。

当$|A|=4$时，$f(A_4)=?$

当$|A|=5$时，$f(A_5)=?$

当$|A|=n$时，$f(A_n)=?$



作答

# STIRLING数

定义：$n$个有区别的球放到$m$个相同的盒子中，要求无一空盒，其不同的方案数称为第二类Stirling数.

定理：第二类Stirling数$S(n,m)$有下列性质：

$(a) S(n,0)=0,$

$(b) S(n,1)=1,$

$(c) S(n,2)=2^{n-1}-1,$

$(d) S(n,n-1)=C(n,2),$

$(e) S(n,n)=1.$

| n \ k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 1 | | | | | | | | | |
| **1** | 0 | 1 | | | | | | | | |
| **2** | 0 | 1 | 1 | | | | | | | |
| **3** | 0 | 1 | 3 | 1 | | | | | | |
| **4** | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | | | | | |
| **5** | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | | | | |
| **6** | 0 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | | | |
| **7** | 0 | 1 | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | 1 | | |
| **8** | 0 | 1 | 127 | 966 | 1701 | 1050 | 266 | 28 | 1 | |
| **9** | 0 | 1 | 255 | 3025 | 7770 | 6951 | 2646 | 462 | 36 | 1 |

# STIRLING数

定理： 第二类Stirling数满足下面的递推关系：

$$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1), \qquad (n>1, m\geq 1).$$

证明：设有$n$个有区别的球$b_1, b_2, \ldots, b_n$, 从中取一个球设为$b_1$. 把$n$个球放到$m$个盒子无一空盒的方案的全体可分为两类。

（a）$b_1$独占一盒，其方案数显然为$S(n-1,m-1)$

（b）$b_1$不独占一盒，这相当于先将剩下的$n-1$个球放到$m$个盒子，不允许空盒，共有$S(n-1,m)$ 种不同方案，然后将$b_1$球放进其中一盒，方案数为$mS(n-1,m)$ .

根据加法法则有 $S(n,m)=S(n-1,m-1)+mS(n-1,m)$.

# STIRLING数

- 红、黄、蓝、白、绿五个球放到无区别的两个盒子里。

$$S(5,2) = 2S(4,2) + S(4,1) = 2 \times 7 + 1 = 15$$

- 故共有15种不同的方案。

先把绿球取走，余下的四个球放到两个盒子。用$r$，$y$，$b$，$w$分别表示红，黄，蓝，白球，绿球用$g$表示

| g 不独占一盒 | | | | g 独占一盒 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 第 1 盒子 | 第 2 盒子 | 第 1 盒子 | 第 2 盒子 | 第 1 盒子 | 第 2 盒子 |
| rg | ybw | r | ybwg | g | rybw |
| yg | rbw | y | rbwg | | |
| bg | ryw | b | rywg | | |
| wg | ryb | w | rybg | | |
| ryg | bw | ry | bwg | | |
| rbg | yw | rb | ywg | | |
| rwg | yb | rw | ybg | | |

$$\boxed{S(n,m) = S(n-1,m-1) + mS(n-1,m)}$$

# STIRLING数

例 第二类Stirling数的展开式义：

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C(m,k)(m-k)^n$$

- $S(n,m)$的组合意义：将$n$个有标志的球放入$m$个无区别的盒子，而且无一空盒的方案数.
- 思路：先考虑$n$个有标志的球，放入$m$个有区别的盒子，无一空盒的方案数.

# STIRLING数

思路：容斥原理

解：$n$个有标志的球放入$m$个有区别的盒子的事件全体为$S$,

$|S| = m^n$

- $A_i$表示第$i$个盒子为空, $i$=1,2…$m$;

  $|A_i| = (m\text{-}1)^n$ 共有 C($m$,1)个

  $|A_i \cap A_j| = (m\text{-}2)^n$ 共有 C($m$,2)个

  ………………….

- 求无空盒的方案数

$m$个有区别盒子,无空盒的方案数:

$$N=|\overline{A1}\cap\overline{A2}......\cap\overline{An}|$$

$$=m^n-C(m,1)(m-1)^n+C(m,2)(m-2)^n+...+(-1)^m C(m,m)(m-m)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C(m,k)(m-k)^n$$

而第二类Stirling数要求盒子无区别, 则:

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C(m,k)(m-k)^n$$

推论: 因为$S(m,m) = 1$,

$$m!=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C(m,k)(m-k)^m$$

# 第十章　关系

# 10.7 相容关系和覆盖

## 学习相容关系的原因

- 集合的分划与等价关系是紧密相关的
- 但等价关系的传递性是个较麻烦的问题，在实际问题中往往有些关系不具有传递性
  - 朋友关系、父子关系
  - 关系数据库中考虑元组运算时还要排除传递性
- 本节介绍一种应用广泛的关系—相容关系。

# 定义10.7.1　相容关系

- 对非空集合A上的关系R，如果R是自反的、对称的，则称R为A上的相容关系。
- 与等价关系的区别：不一定满足传递性
- 例：朋友关系等

名字中有同字的关系？

- 例1　A是英文单词的集合

A={cat, teacher, cold, desk, knife, by}

A 上的关系R为

$$R=\{\langle x, y\rangle \mid x\text{和 } y \text{ 至少有一相同字母}\}$$

- 容易证明，R是自反的，对称的，但不是传递的，因此，R是相容关系。

令$x_1$=cat，$x_2$=teacher，$x_3$=cold，$x_4$=desk，$x_5$=knife，$x_6$=by

则R$\{<x_1, x_1>, <x_1, x_2>, <x_1, x_3>,$

$<x_2, x_1>, <x_2, x_2>, <x_2, x_3>, <x_2, x_4>, <x_2, x_5>,$

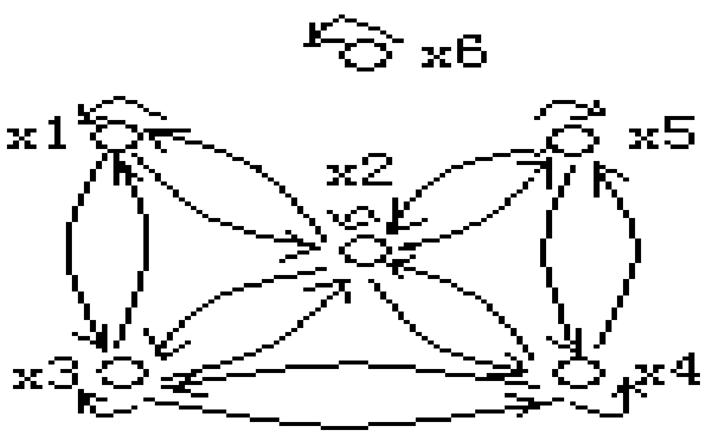
$<x_3, x_1>, <x_3, x_2>, <x_3, x_3>, <x_3, x_4>,$

$<x_4, x_2>, <x_4, x_3>, <x_4, x_4>, <x_4, x_5>,$

$<x_5, x_2>, <x_5, x_4>, <x_5, x_5>,$

$<x_6, x_6>\}$

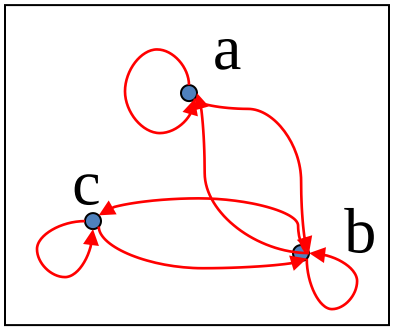
R的关系图为:

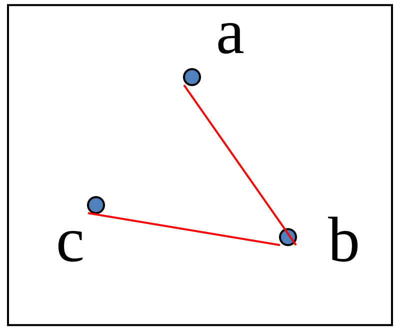



**R的关系矩阵为**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# 2. 相容关系的图形表示与矩阵表示




$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}$$

## 关系图

- 每个节点都有自回路
- 有向弧成对出现

所以， 可以省去自回路，用单线代替来回弧线。

## 关系矩阵

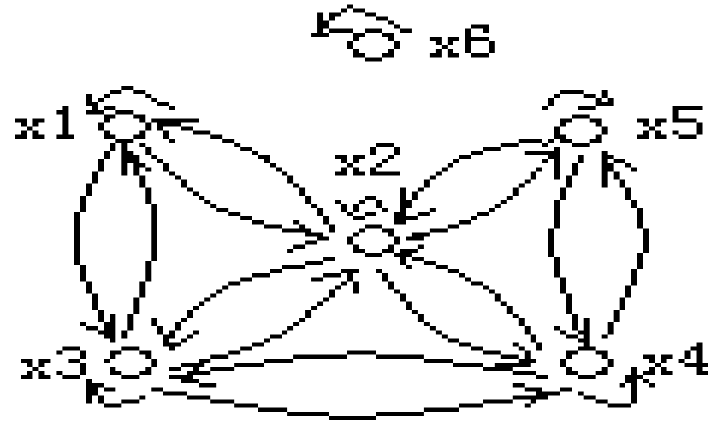
- 主对角线全为1
- 矩阵关于主对角线对称

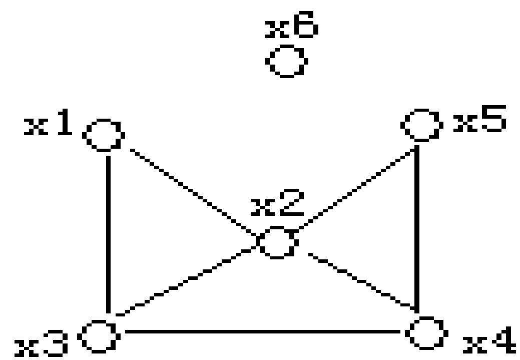
所以，只需主对角线以下部分即可表示全部信息。

# 2、表示：简化关系矩阵、关系图

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 1 | | | | | |
| $x_3$ | 1 | 1 | | | | |
| $x_4$ | 0 | 1 | 1 | | | |
| $x_5$ | 0 | 1 | 0 | 1 | | |
| $x_6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |



# 定义10.7.2　相容类

- 对非空集合$A$上的相容关系$R$，若 $C \subseteq A$，且 $C$ 中任意两个元素$x$和$y$有$xRy$，则称C是由相容关系产生的相容类，简称相容类。这个定义也可以写成：

$$C = \{ x \mid x \in A \wedge (\forall y)(y \in C \rightarrow xRy) \}$$

- 相容类的判定：在关系图中

（1）完全多边形的顶点的集合；

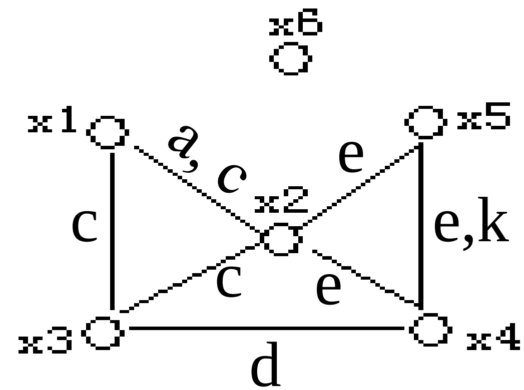
（2）任一条连线上的两个结点构成的集合；

（3）任一个结点构成的单元素的集合.

$x_1$=cat， $x_2$=teacher， $x_3$=cold， $x_4$=desk， $x_5$=knife， $x_6$=by

- 例如上例的相容关系

$$
\begin{aligned}
R = \{ & <x_1,x_1>, <x_1,x_2>, <x_1,x_3>, \\
& <x_2,x_1>, <x_2,x_2>, <x_2,x_3>, <x_2,x_4>, <x_2,x_5>, \\
& <x_3,x_1>, <x_3,x_2>, <x_3,x_3>, <x_3,x> \\
& <x_4,x_2>, <x_4,x_3>, <x_4,x_3>, <x_4,x_5>, \\
& <x_5,x_2>, <x_5,x_4>, <x_5,x_5>, \\
& <x_6,x_6> \}
\end{aligned}
$$




可产生相容类$\{x_1,x_2\}$, $\{x_1,x_3\}$, $\{x_2,x_3\}$, $\{x_6\}$, $\{x_2,x_4,x_5\}$等等。

相容类$\{x_1,x_2\}$中加进$x_3$ 组成新的相容类$\{x_1,x_2,x_3\}$,

相容类$\{x_1,x_3\}$中加进$x_2$组成新的相容类$\{x_1,x_2,x_3\}$,

相容类$\{x_2,x_3\}$中加进x1组成新的相容类$\{x_1,x_2,x_3\}$

相容类 $\{x_6\}$和$\{x_2,x_4,x_5\}$加入任一新元素，就不再组成相容类,称它们是**最大相容类**。

# 定义10.7.3 最大相容类

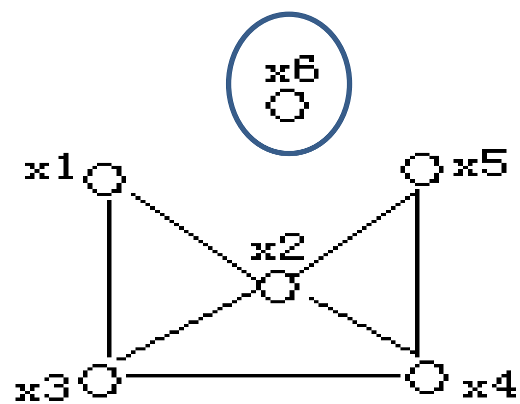
- 非空集合$A$上的相容关系$R$，一个相容类若不是任何相容类的真子集，就称为最大相容类，记作$C_R$。
- 最大相容类$C_R$有下列性质：$(\forall x)(\forall y)((x \in C_R \wedge y \in C_R) \to xRy)$和$(\forall x)(x \in A - C_R \to (\exists y)(y \in C_R \wedge x \not{R} y))$
- 最大相容类的判定：在关系图中

  (1) 最大完全多边形的顶点的集合；

  (2) 任一条不是完全多边形边的两个端点构成的集合（完全多边形：每个顶点都与其它顶点连接的多边形）；

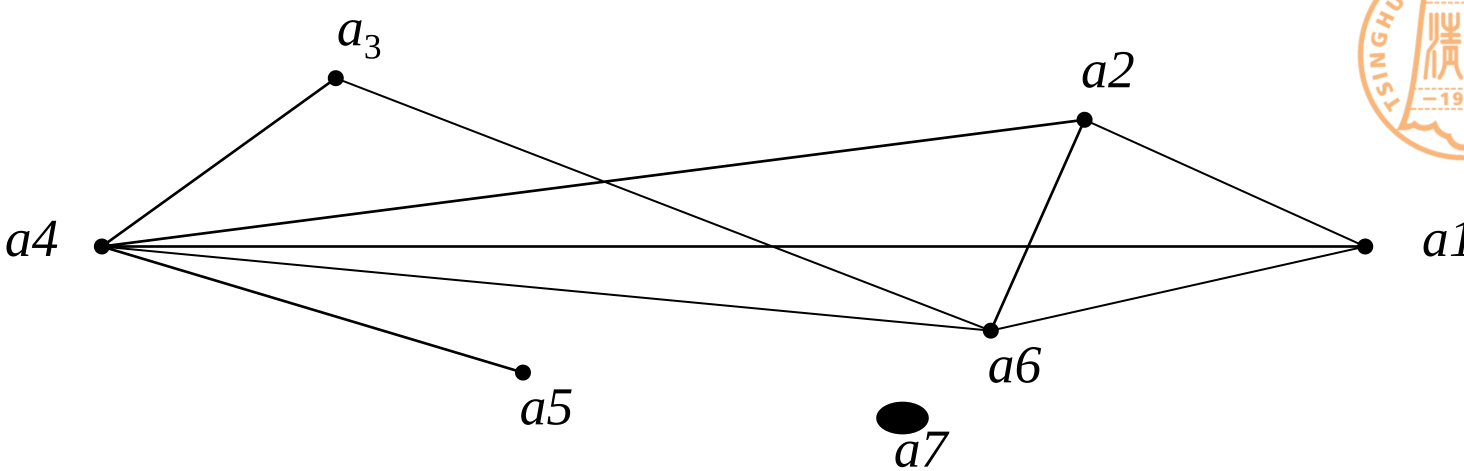
  (3) 任一个孤立结点构成的单元素的集合.

$\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_6\}, \{x_2, x_4, x_5\}, \{x_2, x_3, x_4\}$ 都是最大相容类。



多选题 1分

设置




**设给定的相容关系如上图所示，以下哪些是最大相容类？**

A {a1，a2，a4，a6}

B {a3，a4，a6}

C {a4，a5}

D {a7}

提交

# 所有最大相容类的求解算法？

# 所有最大相容类的求解算法

- 利用相容关系图可找出所有最大相容类。

(1)最大完全多边形的顶点集合构成最大相容类；

(2)孤立结点构成最大相容类；

(3)不是完全多边形边的两个结点集合构成最大相容类。

- 定理10.7.1 最大相容类的存在性

  对非空有限集合A上的相容关系$R$，若$C$是一个相容类，则存在一个最大相容类$C_R$，使 $C \subseteq C_R$。

设R为有限集A上的相容关系，C是一个相容类，那么必存在一个最大相容类$C_R$，使得$C \subseteq C_R$。

证明：设$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$，构造相容类序列

$$C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \dots,$$

其中$C_0 = C$，且$C_{i+1} = Ci \cup \{a_j\}$，其中j是满足$a_j \notin Ci$而$a_j$与$C_i$中各元素都有相容关系的最小足标。

由于A的元素个数|A|=n，所以至多经过n-|C|步，就使这个过程终止，而此序列的最后一个相容类，就是所要找的最大相容类。

此定理的证明告诉我们找最大相容类的方法。

# 10.7 相容关系和覆盖

## 定义10.7.4 覆盖

- 对非空集合$A$，若存在集合$\Omega$ 满足下列条件：

  (1) $(\forall x)(x \in \Omega \to x \subseteq A)$

  (2) $\emptyset \notin \Omega$

  (3) $\cup\,\Omega = A$

- 则称$\Omega$为A的一个覆盖，称$\Omega$中的元素为$\Omega$ 的覆盖块。

- **划分：** 给定一非空集合**A**，**A**的一个划分为非空子集族$\mathbf{S}=\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots \mathbf{A}_m\}$，满足：

  ① $\emptyset \notin \mathbf{S}$

  ② $\forall x \forall y(x, y \in \mathbf{S} \land x \neq y \to x \cap y = \emptyset)$

  ③ $\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \ldots \cup \mathbf{A}_m = \mathbf{A}$

# 10.7 相容关系和覆盖

## 定理10.7.2 完全覆盖

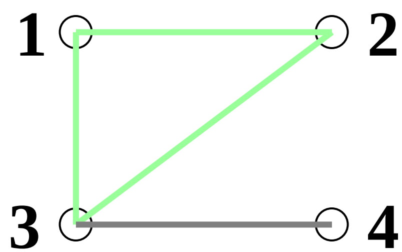
- 对非空集合$A$上的相容关系$R$，最大相容类的集合是$A$的一个覆盖，称为$A$的完全覆盖，记作$C_{\mathrm{R}}(A)$。而且$C_{\mathrm{R}}(A)$是唯一的。

## 定理10.7.3 覆盖与相容关系

- 对非空集合A的一个覆盖$\Omega=\{A_1,A_2,\ldots A_n\}$，由$\Omega$确定的关系$R=A_1\times A_1\cup A_2\times A_2\cup \ldots\cup A_n\times A_n$ 是$A$上的相容关系。

## 不同的覆盖可能构造出相同的相容关系。

例 设A={1, 2, 3, 4}，集合{{1, 2, 3}，{3, 4}}和{{1, 2}，{2, 3}，{1, 3}，{3, 4}}都是A的覆盖，但它们可以产生相同的相容关系如图所示:




定理3 集合A上相容关系 R 与完全覆盖$C_R(A)$存在一一对应。

注意：给定集合A的一个相容关系，
**覆盖不是唯一**的，但**完全覆盖是唯一**的。

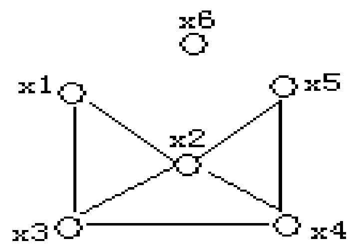
如前面的例子，设A是由下列英文单词组成的集合。

A={cat，teacher，cold，desk，knife，by}

定义关系：

R={<x，y>|x，y ∈ A，x和y至少有一个相同的字母}。

R是一个相容关系。



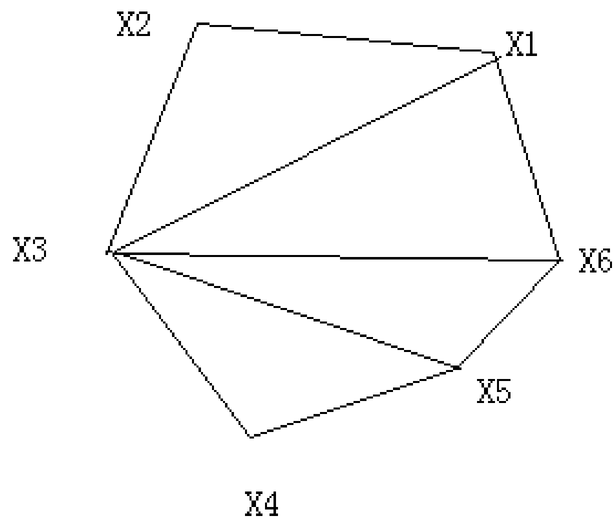

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 1 | | | | |
| $x_3$ | 1 | 1 | | | |
| $x_4$ | 0 | 1 | 1 | | |
| $x_5$ | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| $x_6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |

$x_6$

- **最大相容类**为 $\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_6\}, \{x_2, x_4, x_5\}, \{x_2, x_4, x_3\}$
- 集合A的**完全覆盖**

$$C_{R(A)} = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_6\}, \{x_2, x_4, x_5\}, \{x_2, x_4, x_3\}\}$$

- 相容关系图为：




- 解：最大相容类为:
$\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_3, x_6\}, \{x_3, x_5, x_6\}, \{x_3, x_4, x_5\}$。

- 集合A的完全覆盖:
$C_R(A) = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_3, x_6\}, \{x_3, x_5, x_6\}, \{x_3, x_4, x_5\}\}$

# 总结：相容类、最大相容类和完全覆盖

**相容类：**设R为集合A上的相容关系，若$C \subseteq A$，如果对于C中任意两个元素$a_1$、$a_2$有$a_1Ra_2$，称C是由相容关系R产生的相容类。

**相容类的判定：**在关系图中

(1) 完全多边形的顶点的集合；

(2) 任一条连线上的两个结点构成的集合；

(3) 任一个结点构成的单元素的集合.

**最大相容类：**设R为集合A上的相容关系，不能真包含在任何其他相容类中的相容类，称作最大相容类，记作$C_R$。

**最大相容类的判定：**在关系图中

(1) 最大完全多边形的顶点的集合；

(2) 任一条不是完全多边形的边的两个结点构成的集合；

(3) 任一个孤立结点构成的单元素的集合.

设R为有限集A上的相容关系，C是一个相容类，那么必存在一个最大相容类$C_R$，使得$C \subseteq C_R$。

# 相容关系与完全覆盖

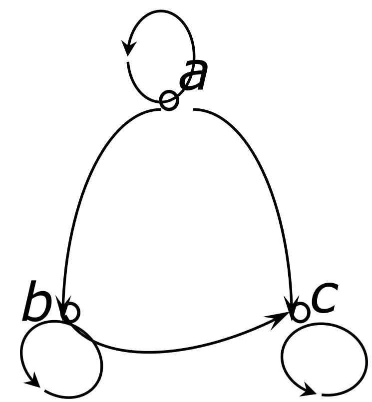
- 在集合A上的给定相容关系R，其最大相容类的集合称作集合A的完全覆盖，记作$C_R(A)$。
- 设$C=\{C_1, C_2, \ldots, C_R\}$是集合A的覆盖，由C决定的关系$R=(C_1 \times C_1)\cup(C_2 \times C_2)\cup\ldots\cup(C_R \times C_R)$是A上的一个相容关系。
- 集合A上的相容关系R与完全覆盖$C_R(A)$存在一一对应。

# 10.8 偏序关系

- 在普通生活中常见的许多粗劣（愚昧）的思维方式，可以通过学习数学来改善。有一种近乎是常见的且容易引起误解的假设，认为事物必须按线性次序来排列，这种假设可以通过学习偏序来消除。 — Cambridge Report
- 次序在现实生活中常见：
  – 小于，包含等
- 研究序理论的动机：
  – 研究一般次序关系
  – 推导出一般序关系的性质
  – 这些关系可以应用于所有特定的序关系

# 定义10.8.1（偏序关系 半序关系）

- 对非空集合$A$上的关系$R$，如果$R$是自反的、反对称的和传递的，则称$R$为$A$上的偏序关系。
- 在不会产生误解时，偏序关系$R$通常记作$\leq$。当$xRy$时，可记作$x \leq y$，读作$x$“小于等于” $y$。偏序关系又称弱偏序关系，或半序关系。




- 偏序关系R (记作≤)
  - 自反性: $\forall a \in A$，有$< a, a > \in R$
  - 反对称性: $\forall a, b \in R$,如果$< a, b > \in R$且$< b, a > \in R$,则必有$a = b$
  - 传递性: $\forall a, b, c \in A$,如果$< a, b > \in R$, $< b, c > \in R$, 必有$< a, c > \in R$
- 例:偏序关系
  - $A = \{a, b, c\}$
  - $R = \{< a, a >, < a, b >, < a, c >, < b, b >, < b, c >, < c, c >\}$

# 偏序关系举例

- 设A是实数集合的非空子集，则A上的小于等于关系和大于等于关系都是A上的偏序关系。
- 设A为正整数集合$Z^+$的非空子集，则A上的整除关系 $D_A = \{< x, y > \mid x, y \in A \land x \mid y\}$ 是A上的偏序关系。

## 举例

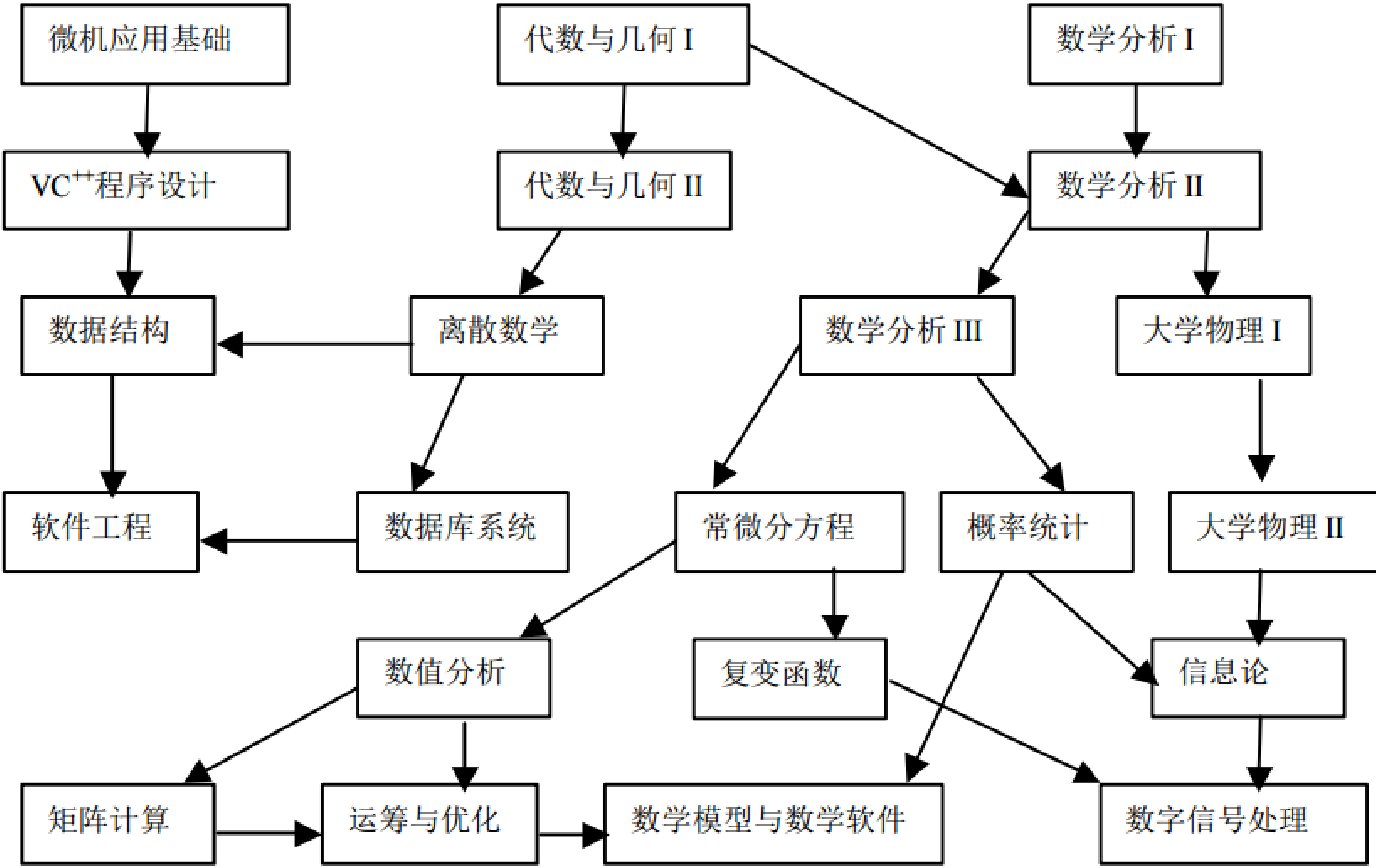
- 设A为一集合，P(A)为A的幂集，则P(A) 上的包含关系 $R_\subseteq = \{< x, y > \mid x, y \in P(A) \land x \subseteq y\}$ 是P(A)上的偏序关系。
- 例 A={a, b}， P(A)={∅, {a}, {b}, A}
  试写出P(A) 上的包含关系$R_\subseteq$。

# 定义10.8.3（偏序集）

- 集合A与A上的关系R一起称为一个结构。集合A与A上的偏序关系R一起称为一个偏序结构，或称偏序集，并记作$\langle A, R\rangle$。

如$\langle P(A), \subseteq\rangle$是偏序集。

# 应用：课程设置


微机应用基础
代数与几何 I
数学分析 I
VC++程序设计
代数与几何 II
数学分析 II
数据结构
离散数学
数学分析 III
大学物理 I
软件工程
数据库系统
常微分方程
概率统计
大学物理 II
数值分析
复变函数
信息论
矩阵计算
运筹与优化
数学模型与数学软件
数字信号处理

# 应用：排序

- 在评分标准不能准确标定而又需要排序的场合里，把要排序的成员两两比较，确定两者之间谁好谁差，是较容易且较准确。
- 因此在这种场合使用“0 – 1”法评判。用偏序关系的传递性可以减少比较次数，
- 用反对称性又可使评判在比赛过程中动态进行。

# 定义10.8.2 （拟序关系 强偏序关系）

- 对非空集合$A$上的关系$R$，如果$R$是反自反的和传递的，则称$R$为$A$上的拟序关系 (Quasi-ordering relation) （反对称的）。

- 在不会产生误解时，拟序关系$R$通常记作$<$。当 $xRy$ 时，可记作$x<y$，读作$x$“小于” $y$。拟序关系又称强偏序关系。

> **定义10.8.1（偏序关系 半序关系）**
>
> - 对非空集合$A$上的关系$R$，如果$R$是自反的、反对称的和传递的，则称$R$为$A$上的偏序关系。

# 10.8 偏序关系

- 定理10.8.1　R为A上的拟序关系, 则$R$是反对称的。

　（可见，偏序与拟序差别**只在自反性上**）

- 定理10.8.2　对$A$上的拟序关系$R$, $R \cup R^0$是$A$上的偏序关系。
- 定理10.8.3　对$A$上的偏序关系$R$，$R - R^0$是$A$上的拟序关系。

> 对非空集合$A$上的关系$R$，如果$R$是反自反的和传递的，则称$R$为$A$上的拟序关系 (Quasi-ordering relation) （反对称的）。

# 哈斯图

- 得名于德国数学家Helmut Hasse
- 用来表示有限偏序集的一种数学图表
  - 偏序集：$< A, \leq >$
  - 依据Birkhoff (1948)，这么叫是因为Hasse有效的利用了它们。
  - Hasse不是第一个使用它们的人，它们早就出现在如Vogt (1895)中.
  - 抽象有向无环图的传递简约.
- 定义10.8.4盖住关系：对偏序集$< A, \leq >$，如果$x, y \in A, x \leq y, x \neq y$, 且不存在元素$z \in A$使得$x \leq z$且$z \leq y$，则称$y$盖住$x$。$A$上的盖住关系定义为$cov\ A$

$$cov\ A = \{< x, y > | x \in A \land y \in A \land y \text{ 盖住} x\}$$

# 10.8 偏序关系

- 哈斯图思路：

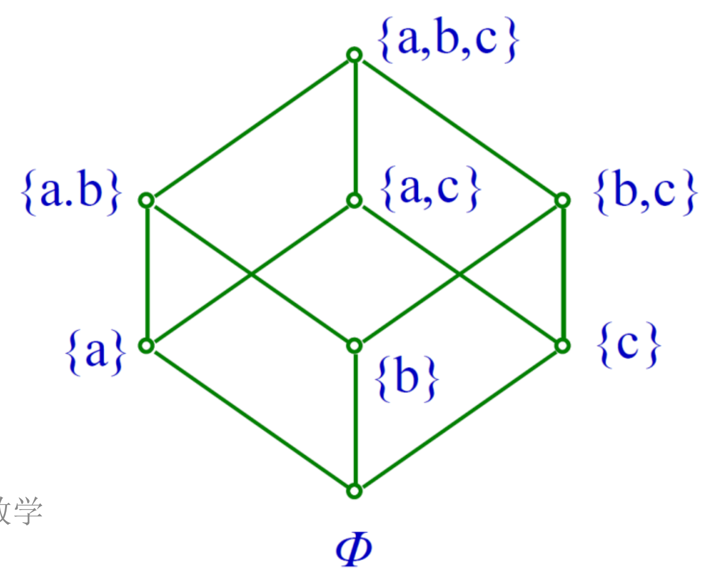
① 所有结点的自回路均省略

② 省略所有弧上的箭头,适当排列A中元素的位置,如$a \preccurlyeq b$,则$a$画在$b$的下方

③ 如$a \preccurlyeq b, b \preccurlyeq c$,则必有$a \preccurlyeq c$, $a$到$b$有边, $b$到$c$有边,则$a$到$c$的无向弧省略

- 条件2，3等于说如果b盖住a,则画一条从a到b的弧线,否则不画

例：$A = \{a, b, c\}, < P(A), \subseteq >$是偏序集，它的哈斯图



单选题 1分

设置

偏序集$< \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, R_{整除} >$，其盖住关系的基数（即哈斯图边数）为多少

A 5

B 6

C 7

D 8

提交

# 偏序集中的8个特殊元素
## （最大元、最小元）

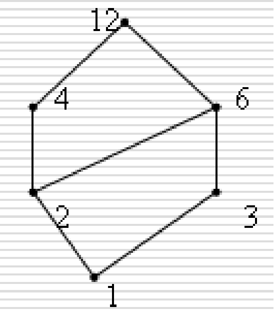
- 对于偏序集$< A, \leq >$和集合$A$的任意子集$B$,
- 如果存在元素$b \in B$, 使得任意$x \in B$都有$x \leq b$, 则称$b$为$B$的最大元素，简称为最大元；
- 如果存在元素$b \in B$，使得任意$x \in B$都有$b \leq x$，则称$b$为$B$的最小元素，简称为最小元。

对于例中偏序关系①

（即集合$A = \{1,2,3,4,6,12\}$上的整除关系），

令 $B_1 = \{1,6\}$、$B_2 = \{1,2,3\}$、$B_3 = \{4,6,12\}$、$B_4 = \{2,4,6\}$、$B_5 = \{1,2,6,12\}$、$B_6 = \{1,2,3,4,6,12\}$。

分别求出$B_1$、$B_2$、$B_3$、$B_4$、$B_5$和$B_6$的最大元和最小元。




整除关系

对于集合$B_1 = \{1,6\}$，最大元为6，最小元为1；

对于集合$B_2 = \{1,2,3\}$，元素2和3不可比，

所以，不存在最大元，最小元为1；

对于集合$B_3 = \{4,6,12\}$，元素4和6不可比，

所以，不存在最小元，最大元为12；

对于集合$B_4 = \{2,4,6\}$，元素4和6不可比，

所以，不存在最大元，最小元为2；

对于集合$B_5 = \{1,2,6,12\}$，最大元为12，最小元为1；

对于集合$B_6 = \{1,2,3,4,6,12\}$，最大元为12，最小元为1。

# 偏序集中的8个特殊元素
# （极大元、极小元）

- 对于偏序集$< A,\leq >$和集合$A$的任意子集$B$，
- 如果存在元素$b \in B$，使得$B$中不存在其它元素$x$满足$b \leq x$，则称$b$为$B$的极大元素，简称为极大元；
- 如果存在元素$b \in B$，使得$B$中不存在其它元素$x$满足$x \leq b$，则称$b$为$B$的极小元素，简称为极小元。
- 注意：最大（小）元 vs. 极大（小）元

  最大（小）元必须与$B$中每个元素都可比，

  极大（小）元无此要求（只要求没有比它更大或更小的元素）。

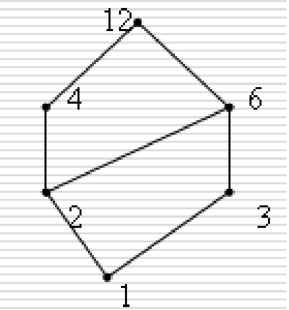
对于例中偏序关系①

（即集合$A=\{1,2,3,4,6,12\}$上的整除关系），

令$B_1=\{1,6\}$、$B_2=\{1,2,3\}$、$B_3=\{4,6,12\}$、

$B_4=\{2,4,6\}$、$B_5=\{1,2,6,12\}$、$B_6=\{1,2,3,4,6,12\}$。

分别求出$B_1$、$B_2$、$B_3$、$B_4$、$B_5$和$B_6$的极大元和极小元。



整除关系

对于集合$B_1=\{1,6\}$，极大元为6，极小元为1；

对于集合$B_2=\{1,2,3\}$, 极大元为2和3，极小元为1；

对于集合$B_3=\{4,6,12\}$, 极大元为12，极小元为4和6；

对于集合$B_4=\{2,4,6\}$, 极大元为4和6，极小元为2；

对于集合$B_5=\{1,2,6,12\}$，极大元为12，极小元为1；

对于集合$B_6=\{1,2,3,4,6,12\}$,极大元为12，极小元为1。

设置

集合$A=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$，则$A$上的整除关系的极大元和极小元的数量m，n分别为：

A m=8, n=8

B m=8, n=6

C m=6, n=6

D m=6, n=4

提交

# 最小元 最大元 极小元 极大元

（y在B中）对偏序集$< A, \leq >$, $B \subseteq A$

（1）若$(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x))$, 则称$y$为$B$的最小元；

（2）若$(\exists y)\big(y \in B \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow \mathrm{x} \leq y)\big)$,则称$y$为$B$的最大元；

（3）若 $(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)\big((x \in B \wedge \mathrm{x} \leq y) \rightarrow x = y)\big)$，则称$y$为$B$的极小元，

（4）若$(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)\big((x \in B \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)\big)$则称$y$为$B$的极大元。

# 注意几个区别

- 对于偏序集A上的子集B,

（1）B中的最小元应小于等于B中其它各元;

（2）B中的极小元应不大于B中其它各元（它小于等于B中一些元，可与B中另一些元无关系）;

（3）最小元（最大元）不一定存在，若存在必唯一;

（4）在非空有限集合B中，极小元（极大元）必存在，但不一定唯一;

（5）极大元不一定是最大元，但最大元显然是极大元;

# 偏序集中的8个特殊元素
# （上界、下界）

- 对于偏序集$< A, \leq >$和集合$A$的任意子集$B$，
- 如果存在元素$a \in A$，使得任意$x \in B$都有$x \leq a$，则称$a$为子集$B$的上界；
- 如果存在元素$a \in A$，使得任意$x \in B$都有$a \leq x$，则称$a$为子集$B$的下界。

- 注意：$B$ 的上（下）界不一定是 $B$ 中的元素！

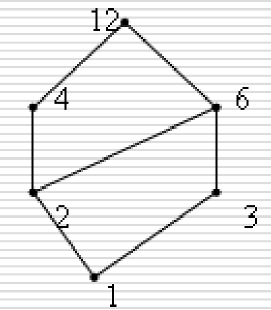
对于例中偏序关系①

（即集合$A = \{1,2,3,4,6,12\}$上的整除关系），

令$B_1 = \{1,6\}$、$B_2 = \{1,2,3\}$、$B_3 = \{4,6,12\}$、

$B_4 = \{2,4,6\}$、$B_5 = \{1,2,6,12\}$、$B_6 = \{1,2,3,4,6,12\}$。

分别求出$B_1$、$B_2$、$B_3$、$B_4$、$B_5$和$B_6$的上界和下界。




整除关系

对于集合$B_1 = \{1,6\}$，上界为6和12，下界为1；

对于集合$B_2 = \{1,2,3\}$，上界为6和12，下界为1；

对于集合$B_3 = \{4,6,12\}$，上界为12，下界为1和2；

对于集合$B_4 = \{2,4,6\}$，上界为12，下界为1和2；

对于集合$B_5 = \{1,2,6,12\}$，上界为12，下界为1；

对于集合$B_6 = \{1,2,3,4,6,12\}$，上界为12，下界为1。

# 偏序集中的8个特殊元素（上确界、下确界）

对于偏序集$< A, \leq >$和集合$A$的任意子集$B$，

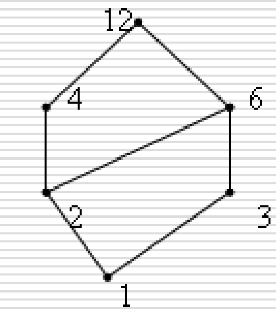
- 如果存在$B$的某个上界$a$，使得对于$B$的任意上界$x$都有$a \leq x$，则称$a$为子集$B$的最小上界或上确界，记为$\sup(B) = a$；
- 如果存在子集$B$的某个下界$a$，使得$B$的任意下界$x$都有$x \leq a$，则称$a$为子集$B$的最大下界或下确界，记为$\inf(B) = a$。
- 说明：令$C$是由$B$的所有上界组成的集合，则$C$的最小元$c$称为$B$的上确界；令$C$是B的所有下界的集合，则$C$的最大元c称为$B$的下确界。

对于例中偏序关系①

（即集合$A = \{1,2,3,4,6,12\}$上的整除关系），

令 $B_1 = \{1,6\}$、$B_2 = \{1,2,3\}$、$B_3 = \{4,6,12\}$、

$B_4 = \{2,4,6\}$、$B_5 = \{1,2,6,12\}$、$B_6 = \{1,2,3,4,6,12\}$。



整除关系

分别求出$B_1$、$B_2$、$B_3$、$B_4$、$B_5$和$B_6$的上确界和下确界。

对于集合$B_1 = \{1,6\}$，上确界为6，下确界为1；

对于集合$B_2 = \{1,2,3\}$，上确界为6，下确界为1；

对于集合$B_3 = \{4,6,12\}$，上确界为12，下确界为2；

对于集合$B_4 = \{2,4,6\}$，上确界为12，下确界为2；

对于集合$B_5 = \{1,2,6,12\}$，上确界为12，下确界为1；

对于集合$B_6 = \{1,2,3,4,6,12\}$，上确界为12，下确界为1。

# 上界 下界 上确界 下确界

(y在A中)对偏序集$< A, \leq >$, $B \subseteq A$

(1) 若$(\exists y)(y \in A \land (\forall x)(x \in B \rightarrow x \leq y))$, 则称 $y$为$B$的上界;

(2) 若$(\exists y)\big(y \in A \land (\forall x)(x \in B \rightarrow y \leq x)\big)$, 则称 $y$为$B$的下界;

(3) 若集合$C = \{y|y是B的上界\}$, 则C的最小元称为B的上确界或最小上界;

(4) 若集合$C = \{y|y是B的下界\}$, 则C的最大元称为B的下确界或最大下界;

# 8大元的性质

**定理**

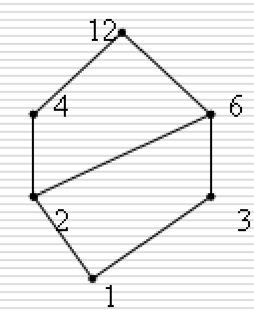
- 对于偏序集$< A, \preccurlyeq >$和集合$A$的任意子集$B$：

① 若$b$为$B$的**最大元**，则$b$为$B$的**极大元**、**上界**和**上确界**；

② 若$b$为$B$的**最小元**，则$b$为$B$的**极小元**、**下界**和**下确界**；

③ 若$a$为$B$的**上界**且$a \in B$，则$a$为$B$的**最大元**；

④ 若$a$为$B$的**下界**且$a \in B$，则$a$为$B$的**最小元**。



整除关系

# 8大元的性质

## 定理

- 对于偏序集$< A, \preccurlyeq >$和集合$A$的任意子集$B$：

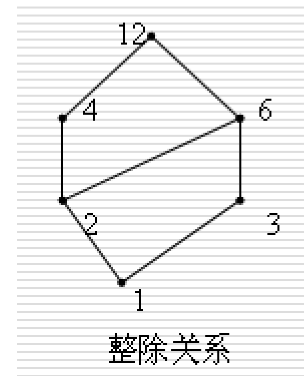
① 若$B$有最大元，则$B$的最大元唯一；

② 若$B$有最小元，则$B$的最小元唯一；

③ 若$B$有上确界，则$B$的上确界唯一；

④ 若$B$有下确界，则$B$的下确界唯一；

⑤ 若$B$为有限集，则$B$的极大元、极小元恒存在。



多选题 1分

Setting

对偏序集的非空子集，下面哪句陈述是成立的？

A 最小元一定是下界，且是下确界A

B 下界、下确界不一定是最小元

提交

# 偏序关系

- 可比：a与b可比 $\Leftrightarrow$ a $\leq$ b$\vee$b $\leq$ a　　可比不同于等于
- 例：A={1，2，3}，　≤是A上的整除关系　1，3可比
- 全序关系R：R是A上的偏序关系，满足：$\forall a,b \in A$，$a$与$b$可比
- 例：实数上的≤,≥关系是全序关系

- 定义10.8.8：对偏序集$< A,\leq >$，如果对任意的$x,y \in A$，$x$和$y$都可比，则称≤为$A$上的**全序关系**（Total ordering relation)，或称线序关系。称$< A,\leq >$为**全序集**。
- 上确界、下确界的讨论
  - 全序关系：如果有上（下）界，就有上（下）确界
  - 偏序关系：如果有上（下）界，就有上（下）确界？

  例：A={2,3,12,18}，B={2,3}，整除关系

# 偏序与全序

- 偏序只对部分元素成立关系R，全序对集合中任意两个元素都有关系R（线性序）。
- 例如：
  - 集合的包含关系就是偏序，因为两个集合可以互不包含；
  - 而实数中的大小关系是全序，两个实数必有一个大于等于另一个；
  - 又如：复数中的大小就是偏序，虚数不能比较大小。

- 判断下列关系是否为全序关系？并给出其哈斯图。

① 集合{2, 3, 4, 6, 8, 12}上的整除关系*R*1；

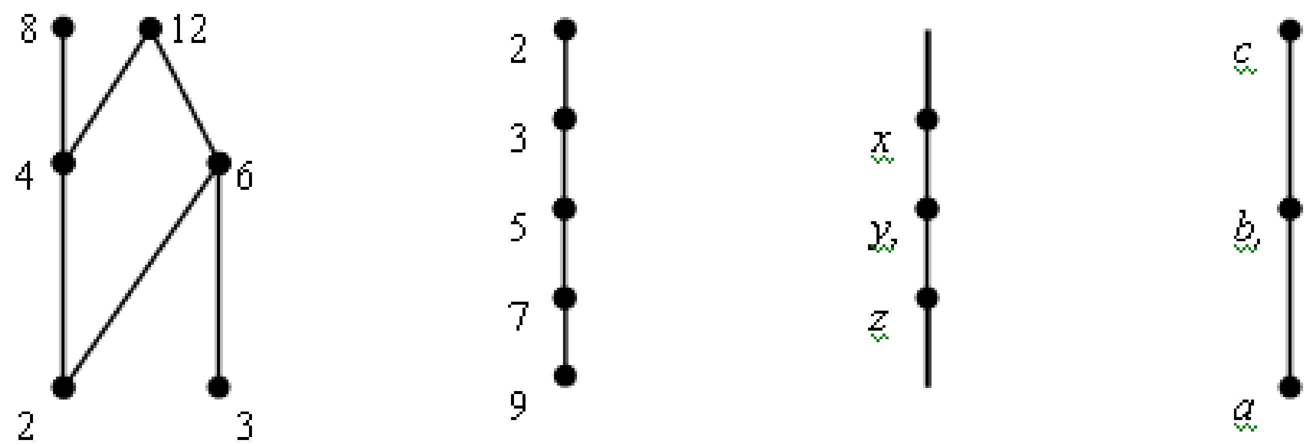
② 集合{2, 3, 5, 7, 9}上的大于等于关系*R*2；

③ 实数集合上的小于等于关系*R*3；

④ 集合{*a*, *b*, *c*}上的关系*R*4 ={<*a*, *a*>, <*b*, *b*>, <*c*, *c*>, <*a*, *b*>, <*b*, *c*>, <*a*, *c*>}；

解: 关系①、②、③和④都是偏序关系。

②、③和④都是全序关系；①不是全序关系。




$R_1$ $R_2$ $R_3$ $R_4$

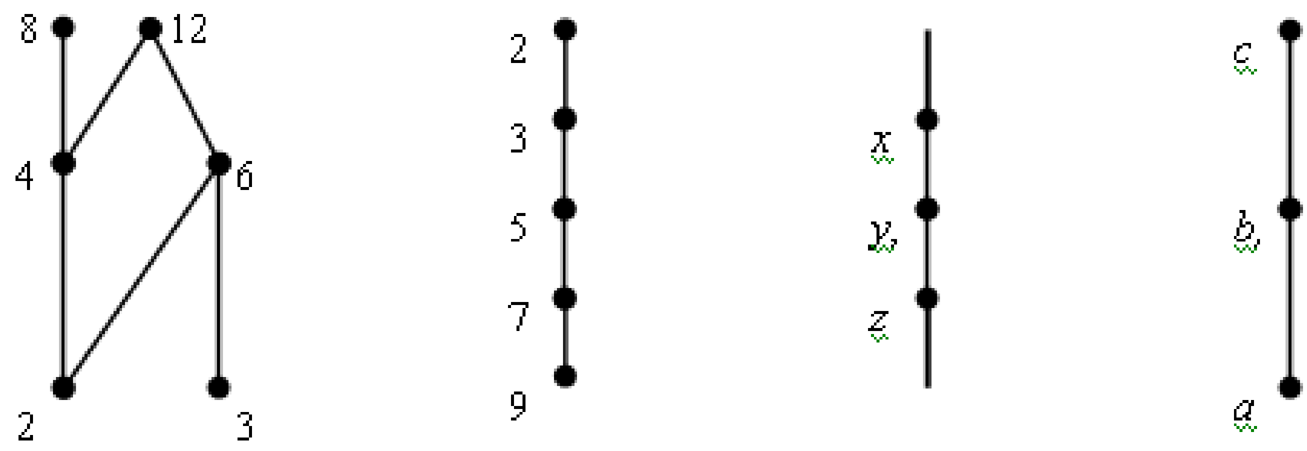
# 10.8 偏序关系

## 定义10.8.9（链、反链）

- 对偏序集$<A,\le>$, $B\subseteq A$

(1)如果对任意的$x,y\in B$, $x$ 和 $y$ 都是可比的，则称$B$为$A$上的链，$B$ 中元素个数称为链的长度。

(2)如果对任意的$x,y\in B$, $x$ 和 $y$ 都不是可比的，则称$B$为$A$上的反链，$B$ 中元素个数称为反链的长度。



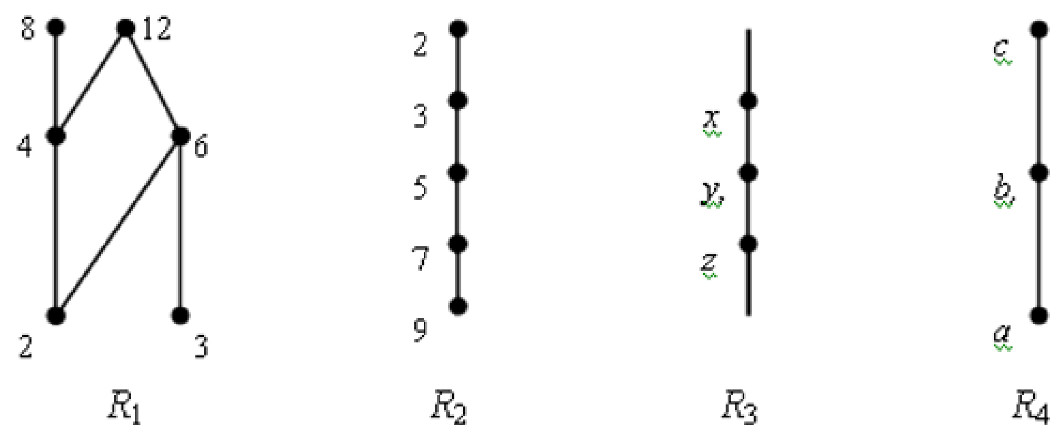

$R_1$ $R_2$ $R_3$ $R_4$

# 定理10.8.4（偏序集的分解定理）

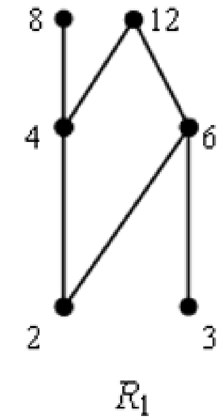
- 对偏序集$<A,\leq>$，设$A$中最长链的长度是$n$，则将$A$中元素分成不相交的反链，反链个数至少是$n$。
- 其对偶定理称为Dilworth定理：

定理：令（A,≤）是一个有限偏序集，并令m是反链的最大的大小。则A可以被划分成m个但不能再少的链。

**链的最少划分数=反链的最长长度**



# 链与反链




最长链的长度是$n$

最长反链的长度是$n$

## 分解定理

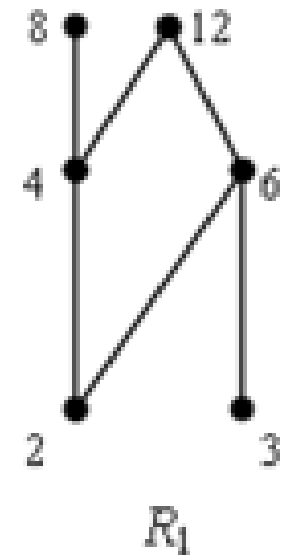
## Dilworth定理

反链个数至少为$n$

链划分个数至少为$n$

设$A$中最长链的长度是$n$，则$A$中存在$n$个划分块的划分，每个划分块都是反链。

**等价证明**：设$A$中最长链的长度是$n$, $A$中存在n个划分块的划分，每个划分块都是反链。




对$n$作归纳。

当$n$ =1时，$A$本身为一反链，取$P_A = \{A\}$,
则$P_A$为$A$的只含一个划分块且为反链的划分。
设$n = k$ 时结论成立。
当$n = k$+1 时，取$M$为$A$中全体极大元的集合，可知$M$不为空, 且$A$中每条最长链对应 $A$的极大（最大）元均在$M$中。
且$M$中各元素均不可比，于是$M$为一反链。
$A- M$中最长链的长度为$k$，由归纳假设可知，$A- M$中存在每个划分块都是反链，且有$k$个划分块的划分$P'$，则 $P_A= P' \cup \{M\}$为$A$的满足要求的划分。

# 定理10.8.5

- 对偏序集$< A, \leq >$, 若$A$中元素为$mn+1$个，则$A$中或者存在一条长度为$m+1$的反链，或者存在一条长度为$n+1$的链。
- 用反证法。
- 若不然，$A$中既无长度为$m+1$的反链，也无长度为$n+1$的链，于是$A$中最长链的长度至多为$n$，设最长链的长度为$r$ $(r \leq n)$，由定理10.8.4可知，$A$中存在 $r$ 个划分块的划分，且每个划分块至多有$m$个元素，于是$A$中至多有$mn$个元素，这与已知矛盾。

定理10.8.4：对偏序集$< A, \leq >$，设$A$中最长链的长度是$n$，则将$A$中元素分成不相交的反链，反链个数至少是$n$。

# 思考题：导弹拦截问题

1, 2, 3, 2, 4, 1, 3, 4

- 一种导弹拦截系统的第一发炮弹能够到达任意的高度，但是以后每一发炮弹都不能高于前一发的高度。某天，雷达捕捉到敌国的导弹来袭。由于该系统还在试用阶段，所以只有一套系统，因此有可能不能拦截所有的导弹。
- 输入导弹依次飞来的高度，计算这套系统最多能拦截多少导弹。

**最长不上升子序列(≥)**

# 思考题：导弹拦截问题 1,2,3,2,4,1,3,4

要求最少的覆盖，按照Dilworth定理

最少链划分 = 最长反链长度

所以最少系统 = 最长导弹高度上升序列长度。

一种导弹拦截系统的第一发炮弹能够到达任意的高度，但是以后每一发炮弹都不能高于前一发的高度。某天，雷达捕捉到敌国的导弹来袭。由于该系统还在试用阶段，所以只有一套系统，因此有可能不能拦截所有的导弹。

如果试用之后效果不错，想要拦截所有导弹最少要配备多少套这种导弹拦截系统？

定理：令（A,≤）是一个有限偏序集，并令m是反链的最大的大小。则A可以被划分成m个但不能再少的链。

作答

# 课后思考题

- 对于任意长度为65的自然数数列，它的最长单调子序列的长度至少是 ________

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | | | | | | 1 | 2 | 3 |
| 12 | | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 13 | 十二 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 14 | | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 15 | | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
| 16 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 17 | 2024 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 18 | 一 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |

- 13周-15周 学生评教
- 14周：第11章 15周：第12章
- 16周：总复习
- 考试时间：1月11日下午14:30-16:30
- 考场：六教6C300

谢谢！