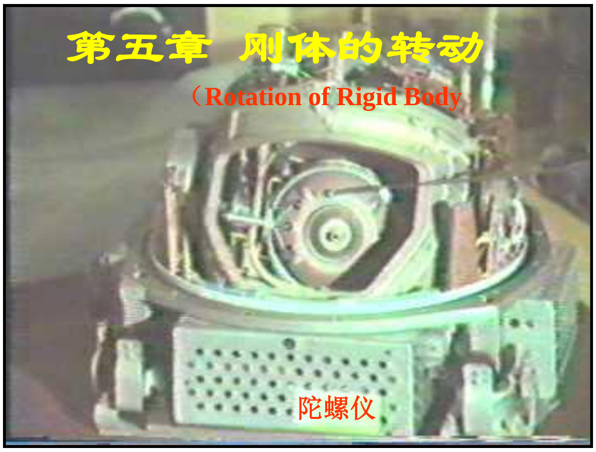
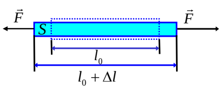
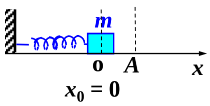


本章目录

§ 5.1 刚体的运动

一. 刚体 (rigid body) 的概念





$\frac{F}{S}=E\frac{\Delta l}{l_0}$ E-杨氏弹性模量

$F=-kx$

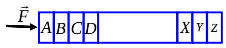
$E\to\infty \quad \Delta l\to 0$

$k\to\infty \quad x\to 0$

我们把这种不能变形的物体称为刚体

$F=\frac{ES}{l_0}\Delta l=k\Delta l$

弹性力的传播过程



弹性纵波 $u_l=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$，$\sim 3000m/s$

弹性波的传播速度远大于物体运动速度时，

弹性扰动是瞬时的，可把物体当刚体处理

刚体-对实际物体的抽象模型

二. 刚体的基本运动形式

1.平动（translation）

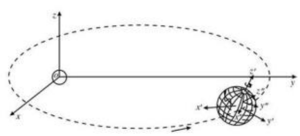
2.转动（rotation）

▲ 定点转动

▲ 定轴转动

1、平动（translation）

刚体内任意两点的连线在运动中始终保持平行。



刚体上任一点的运动来代表整体的运动

基点 质心

2、转动（rotation）

▲ 定轴转动

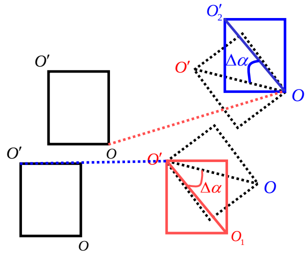
各质元均做圆周运动,且各圆心都在转轴上

▲ 定点转动

整个刚体绕过该定点的某一瞬时轴线转动。

3、一般运动

可分解为　　平动+定点转动



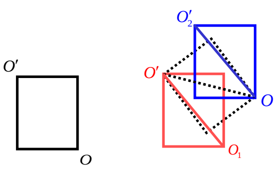
基点选取不同

平动可以不同

转动却相同

转动与基点的选取无关

常选质心为基点



§ 5.2 刚体定轴转动（运动学）

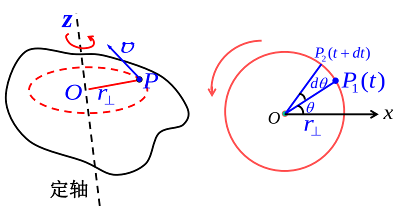
刚体位置随时间的变化

角位移　　　　线速度

角速度

角加速度　　　线加速度

1、定轴转动运动学

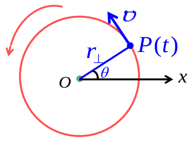


角位移　　角速度　　角加速度

$d\theta$　　$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$　　$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

定轴转动（角度）	一维直线运动（线度）
$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$	$v = \dfrac{ds}{dt}$
$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$	$a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$
若　$\alpha = \text{const}.$	若　$a = \text{const}.$
$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ (\theta-\theta_0) = \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta-\theta_0) \end{cases}$	$\begin{cases} v = v_0 + a t \\ (s-s_0) = v_0 t + \dfrac{1}{2} a t^2 \\ v^2 - v_0^2 = 2a(s-s_0) \end{cases}$

线量和角度量



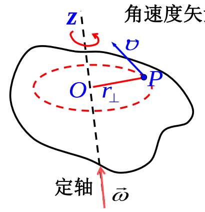
线速度大小 $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{r}_\perp \boldsymbol{\omega}$

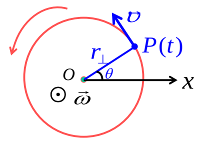
切向加速度 $\boldsymbol{a}_t = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}_\perp \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}_\perp \boldsymbol{\alpha}$

法向加速度 $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{r_\perp} = r_\perp \omega^2$

13

角速度矢量 $\vec{\omega}$

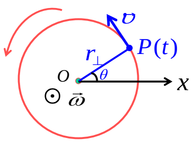




引入角速度矢量 $\vec{\omega}$

大小：$|\vec{\omega}| = \omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 方向：右手螺旋法则

14



角速度 $\vec{\omega}$

角加速度 $\vec{\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$

线速度 $\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r}_\perp$

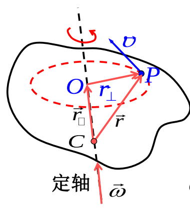
线加速度 $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}_\perp + \vec{\omega} \times \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_\perp}{\mathrm{d}t}$

$= \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}_\perp}_{\text{旋转加速度}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}}_{\text{向轴加速度}}$

旋转加速度 向轴加速度

对于定轴转动 $\vec{\omega}$ $\vec{\alpha}$ 退化为代数量 ω α

15



$\vec{\boldsymbol{\upsilon}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}_\perp = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$

$\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{r}}_\perp + \vec{\boldsymbol{r}}_{//})$

$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

线加速度

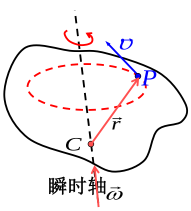
$\vec{\boldsymbol{a}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\upsilon}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\omega}}}{\mathrm{d}t} \times \vec{\boldsymbol{r}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}$

$= \underbrace{\vec{\boldsymbol{\alpha}} \times \vec{\boldsymbol{r}}}_{\text{旋转加速度}} + \underbrace{\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{\upsilon}}}_{\text{向轴加速度}}$

旋转加速度 向轴加速度

16

2、定点转动



线速度 $\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

线加速度 $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}$

$= \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

$= \vec{\boldsymbol{\alpha}} \times \vec{\boldsymbol{r}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{\upsilon}}$

$|\vec{\boldsymbol{\omega}}| = \boldsymbol{\omega} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}$

$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\omega}}}{\mathrm{d}t}$ （不一定平行于角速度）

17

§ 5.3 刚体的定轴转动定律

回顾：质点系的角动量定理

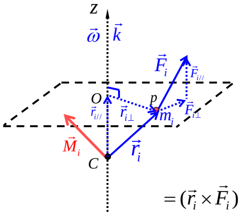
对固定点 $\vec{M}_{外} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

$M_{外z} = \dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$ 对转动轴

18

1、力对轴的力矩

$m_i \quad \vec{F}_i \quad \vec{r}_i$



对C点的力矩

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

对转轴的力矩

$$M_{iz} = \vec{M}_i \cdot \vec{k}$$

$$= (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)\cdot\vec{k} = [(\vec{r}_{i//} + \vec{r}_{i\perp})\times(\vec{F}_{i//} + \vec{F}_{i\perp})]\cdot\vec{k}$$

$$M_{iz} = \vec{M}_i \cdot \vec{k}$$

$$= (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)\cdot\vec{k} = [(\vec{r}_{i//} + \vec{r}_{i\perp})\times(\vec{F}_{i//} + \vec{F}_{i\perp})]\cdot\vec{k}$$

$$= \vec{r}_{i\perp}\times\vec{F}_{i\perp}\cdot\vec{k} + \vec{r}_{i\perp}\times\vec{F}_{i//}\cdot\vec{k} + \vec{r}_{i//}\times\vec{F}_{i\perp}\cdot\vec{k} + \vec{r}_{i//}\times\vec{F}_{i//}\cdot\vec{k}$$

$$= \vec{r}_{i\perp}\times\vec{F}_{i\perp}\cdot\vec{k}$$

$$|M_{iz}| = |\vec{r}_{i\perp}\times\vec{F}_{i\perp}| = r_{i\perp}F_{i\perp}\sin\alpha'$$

α' 是 $\vec{r}_{i\perp}$ 和 $\vec{F}_{i\perp}$ 之间的夹角

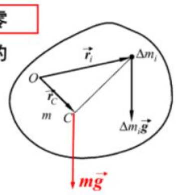
考虑 $\boldsymbol{M}_{iz}$ 的正负，从此约定 $M_{iz}=r_{i\perp}F_{i\perp}\sin\alpha$

若 $\boldsymbol{M}_{iz}>0$ 则 $\alpha=\alpha'$ 　　若 $\boldsymbol{M}_{iz}<0$ 则 $\alpha=-\alpha'$

质心轴：通过刚体质心的直线

刚体（不太大）重力对质心轴的合力矩等于零

证明：刚体各个质元所受重力对任意一点 O 的合力矩：



$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \Delta m_i\vec{g} = \left(\sum_i \Delta m_i\vec{r}_i\right)\times\vec{g}$$

$$\vec{r}_C = \sum_i m_i\vec{r}_i \Big/ m$$

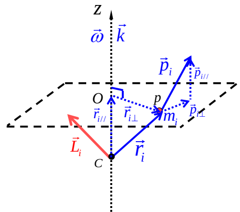
$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r}_C \times m\vec{g}}$$

刚体（不太大）各个质元所受重力对O点的合力矩，等于整个刚体的重力作用于质心所产生的力矩。

如果 O 为质心，$\vec{r}_C=0$，$\vec{M}_C=0$，即证。

2、质点对轴的角动量

$m_i \quad \vec{p}_i \quad \vec{r}_i \quad \vec{L}_i$



对C点的角动量

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

对转轴的角动量

$$L_{iz} = \vec{L}_i \cdot \vec{k}$$

$$= r_{i\perp}p_{i\perp}\sin\beta$$

3 、刚体的定轴转动定律

质点系的角动量定理

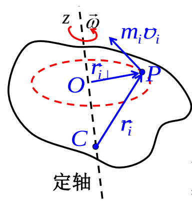
(对C点) $$\vec{M}_{外} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

(对z轴) $$M_{外z} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{M}_{外z} = \sum_i \boldsymbol{M}_{i外z}$$

$$\boldsymbol{L}_z = \sum_i \boldsymbol{L}_{iz}$$

定轴转动角动量表达式



$$L_z = \sum L_{iz}$$

$$= \sum r_{i\perp}p_{i\perp}\sin\beta$$

$$= \sum r_{i\perp}p_{i\perp}$$

$$L_z = \sum m_i r_{i\perp}\upsilon_i = \sum m_i r_{i\perp}^2\omega$$

$$= (\sum m_i r_{i\perp}^2)\omega = J_z\omega$$

$J_z = \sum m_i r_{i\perp}^2$ 　对Z轴的转动惯量(moment of inertia)

J 由质量对轴的分布决定，与转动状态无关。

定轴转动定律

定轴转动角动量 $L_z = J_z \omega$

质点系的角动量定理（对Z轴）

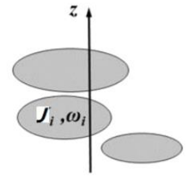
$$M_z = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_z\omega) = J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J_z\alpha$$

$M_z = J_z\alpha$ 定轴转动定律

常省略小标，写为 $M = J\alpha$

25

绕公共定轴转动的刚体组



刚体组中各刚体间的合内力矩等于零。

刚体组绕某一固定轴的总角动量 L_z 的变化，只决定于刚体组所受对该轴的合外力矩 M_z

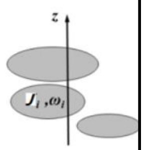
$$M_z = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$$

26

绕公共定轴转动的刚体组

如果对惯性系中某一定轴的合外力矩为零，则刚体组绕该轴的总角动量保持不变

$$L_z = \sum_i J_i\omega_i = 常量$$



27

与牛顿第二定律相比

牛顿第二定律 $\vec{F} = m\vec{a}$

定轴转动定律 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{\alpha}$

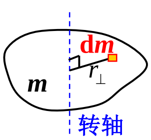
$F \Leftrightarrow M$ 状态变化的原因

$m \Leftrightarrow J$ 惯性大小的量度

$\vec{a} \Leftrightarrow \vec{\alpha}$ 状态的变化

28

§5.4 转动惯量的计算



分散系统

$$J = \sum m_i r_{i\perp}^2$$

连续体

$$J = \int_m r_\perp^2 \cdot \mathrm{d}m$$

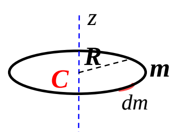
J 由质量对轴的分布决定，与转动状态无关。

29

一. 常见刚体的转动惯量的计算

1、细圆环

$\boxed{J_C = mR^2}$

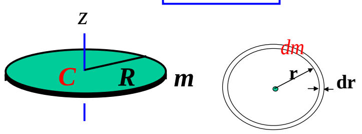


$$J = \int_m r_\perp^2 dm$$

30

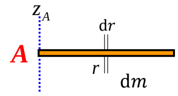
2、均匀圆盘

$$\boxed{J_C = \frac{1}{2}mR^2}$$



$$J_C = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R 2\pi r dr \frac{m}{\pi R^2} r^2 = \frac{1}{2}mR^2$$

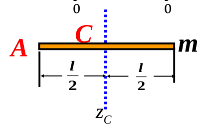
3、均匀细杆 $m \quad l$



对A轴的转动惯量

$$\boxed{J_A = \frac{1}{3}ml^2}$$

$$J_A = \int_0^l r^2 \mathrm{d}m = \int_0^l r^2 \frac{m}{l} \mathrm{d}r = \frac{1}{3}ml^2$$



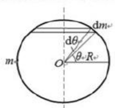
对过质心C轴的转动惯量

$$\boxed{J_C = \frac{1}{12}ml^2}$$

【例】推导质量为 m，半径为 R 的匀质薄球壳绕过直径的轴的转动惯量公式：

$$J = \frac{2}{3}mR^2$$

解 沿水平方向把球壳分割成许多圆环，其面积为球台的侧面积，质量为



$$\mathrm{d}m = 2\pi R\cos\theta R\mathrm{d}\theta\sigma = \frac{1}{2}m\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$\sigma = m/(4\pi R^2)$ 为球壳质量面密度。

圆环绕过直径的轴的转动惯量为

$$\mathrm{d}J = (R\cos\theta)^2\mathrm{d}m = \frac{1}{2}mR^2\cos^3\theta\mathrm{d}\theta$$

积分，积分限从 $\theta = -\pi/2$ 到 $\theta = \pi/2$ ，得

$$J = \int \mathrm{d}J = \frac{1}{2}mR^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}mR^2$$

一些均匀刚体的转动惯量

细棒绕中心轴		$\frac{1}{12}mL^2$
细棒绕一端轴		$\frac{1}{3}mL^2$
薄圆环(筒)绕中心轴		mR^2
圆盘(柱)绕中心轴		$\frac{1}{2}mR^2$
薄球壳绕中心轴		$\frac{2}{3}mR^2$
球体绕中心轴		$\frac{2}{5}mR^2$

二、计算转动惯量的几条规律

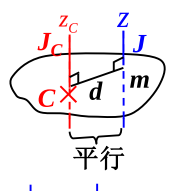
1、对同一轴J具有可叠加性

$$\boxed{J = \sum J_i}$$

分散系统 $J = \sum m_i r_{i\perp}^2$

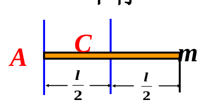
连续体 $J = \int_m r_\perp^2 \cdot \mathrm{d}m$

2、平行轴定理



$$\boxed{J = J_C + md^2}$$

$$\therefore \quad J_C = J_{\min}$$



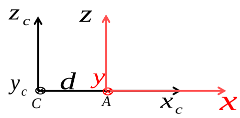
$$\boxed{J_C = \frac{1}{12}ml^2}$$

$$\boxed{J_A = \frac{1}{3}ml^2}$$

平行轴定理证明

建立直角坐标系

$x_c y_c z_c$　　xyz

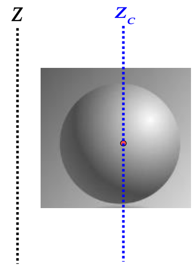


$$J=\sum_i m_i(y_i^2+x_i^2)=\sum_i m_i(y_{ic}^2+(x_{ic}-d)^2)$$

$$=\sum_i m_i y_{ic}^2+\sum_i m_i x_{ic}^2+\sum_i m_i d^2-2\sum_i m_i x_{ic} d$$

$$x_c=\frac{\sum_i m_i x_{ic}}{m}=0 \qquad \boxed{J=J_c+md^2}$$

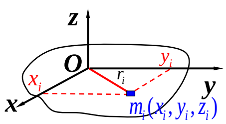
平行轴定理应用



求相对于球外任一轴的转动惯量

$$J_C=\frac{2}{5}mR^2$$

3、对薄平板刚体的正交轴定理



薄板刚体

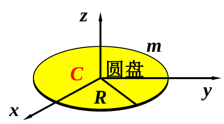
$Oxyz$在刚体平面内

$$J_z=\sum m_i r_i^2=\sum m_i x_i^2+\sum m_i y_i^2$$

$$J_x=\sum m_i z_i^2+\sum m_i y_i^2 \quad J_y=\sum m_i z_i^2+\sum m_i x_i^2$$

即 $\boxed{J_z=J_x+J_y}$

[例]求对薄圆盘的一条直径的转动惯量，



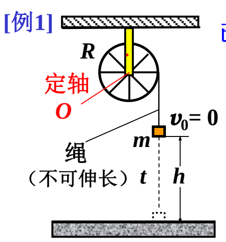
解：　已知圆盘　$J_z=\frac{1}{2}mR^2$ 。

$$J_x+J_y=J_z=\frac{1}{2}mR^2$$

$$\therefore\ J_x=J_y=\frac{1}{4}mR^2$$

转动定律应用举例

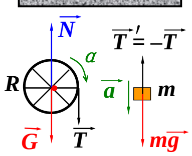
[例1]



已知：$R=0.2$m，$m=1$kg，$v_0=0$，$h=1.5$m，绳轮间无相对滑动，下落时间 $t=3$s。

求：轮对 O 轴 $J=$?

解：动力学关系：



$\vec{T}'=-\vec{T}$

对轮：　$T\cdot R=J\cdot\alpha$　　(1)

对m：　$mg-T=ma$　　(2)

运动学关系：　$a=\alpha\cdot R$　　(3)

$$h=\frac{1}{2}at^2 \quad (4)$$

(1)~(4)联立解得：　$J=(\frac{gt^2}{2h}-1)mR^2$

分析结果：

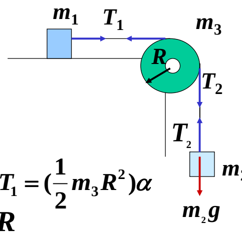
- 量纲对；
- h、m一定，$J\uparrow\rightarrow t\uparrow$，合理；
- 若$J=0$，得　$h=\frac{1}{2}gt^2$，正确。

代入数据：

$$J=(\frac{9.8\times3^2}{2\times1.5}-1)\times1\times0.2^2=1.14\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

此为一种用实验测转动惯量的方法。

[例2] 如图，定滑轮看作匀质圆盘，轴光滑，无相对滑动，桌面水平光滑。已知 m_1, m_2, m_3，R。求：两侧绳拉力。



解：各物受力如图

对 m_1, m_2，由牛顿定律

$$T_1 = m_1 a_1$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

对 m_3，由转动定理 $RT_2 - RT_1 = (\frac{1}{2}m_3R^2)\alpha$

无相对滑动 $a_1 = a_2 = \alpha R$

解得 $T_1 = \dfrac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + m_3/2}$ $T_2 = \dfrac{m_2(m_1 + m_3/2)g}{m_1 + m_2 + m_3/2}$

§5.5 刚体定轴转动的角动量守恒定律

一、角动量定理

质点系

对点	对轴	刚体
		$L_z = J_z\omega$
$\vec{M}_{外} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$	$M_{外z} = \dfrac{dL_z}{dt}$	$M_z = \dfrac{d(J_z\omega)}{dt}$
		刚体的角动量定理

二、刚体定轴转动的角动量守恒定律

$$M_z = \frac{d(J_z\omega)}{dt}$$

$$\boxed{M_{外z} = 0 \quad \Rightarrow J_z\omega = \text{const}.} \begin{cases} \text{大小不变} \\ \text{正、负不变} \end{cases}$$

如果 J_z 保持不变 ω 将保持不变

角动量守恒实例—陀螺仪定向

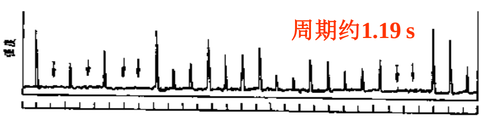
陀螺仪

傅科
1819-1868

▲ 脉冲星的角动量守恒

1967年10月 剑桥大学卡文迪许实验室Antony Hewish教授的研究生——Jocelyn Bell发现

Little Green Man 1974年Nobel Prize



脉冲星的精确周期性信号

$$J_z\omega = \text{const}.$$

星体不被惯性离心力甩散，必须满足条件：

$$\frac{GMm}{R^2} > mR\omega^2, \quad (M = \frac{4\pi}{3}R^3\rho)$$

$$\Rightarrow \rho > \frac{3\omega^2}{4\pi G} = \frac{3\pi}{GT^2} \sim 10^{11} kg/m^3$$

Fe $7.8\times10^3 kg/m^3$

恒星 ⟹ 红巨星 ⟹ 白矮星

⟹ 中子星 ⟹ 黑洞

脉冲星是高速旋转的中子星。

三、角动量定理的另一形式

对点 $\vec{M}_{外} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ $\vec{M}_{外}\,dt = d\vec{L}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{外}\,dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

冲量矩 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{外}\,dt$ 力矩对时间的积累效应

刚体定轴转动 $M_z = \dfrac{d(J_z\omega)}{dt}$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M_{外z}\,dt = J_z\omega_2 - J_z\omega_1}$$

——刚体定轴转动的角动量定理

49

克服直升飞机机身反转的措施：

装置尾桨推动大气产生克服机身反转的力矩

装置反向转动的双旋翼产生反向角动量而相互抵消

50

走钢丝的人为什么要拿长竿？

51

当变形体所受合外力矩为零时，变形体的角动量也守恒。

$J(t)\omega = 常量 \Longrightarrow J(t)\nearrow\ \omega\searrow \quad J(t)\searrow\ \omega\nearrow$

花样滑冰

芭蕾舞蹈演员

52

金妍儿在比赛中 (图片来源：视频截图)

53

运动员的跳水运动

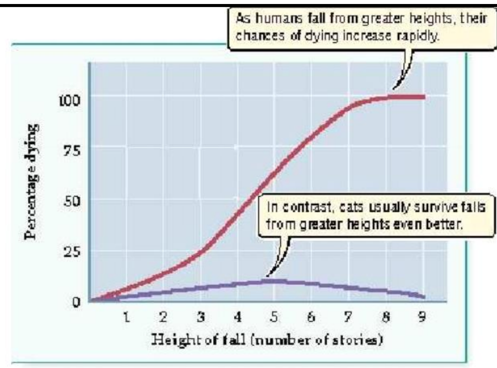
54

滑冰运动员的旋转

猫的下落（A）

猫的下落（B）

TV 角动量守恒定律 角动量守恒



猫猫与人跳楼的不同结果

30多年前，曼哈顿的两个兽医Wayne Whitney和Cheryl Mehlhaff 看到好多猫从摩天大楼上落下，于是研究了“猫科动物的高楼综合征”(feline high-rise syndrome),他们发现从五楼落下的猫猫最危险。

猫猫落体实验的意义，远远超越了经典物理学。因为，他们用自己的身体践行了规范场的动力学。

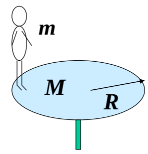
猫猫在空中能很好调整身体的姿态，这样就能保证以安全的方式落地——这个身体调整的过程，满足角动量守恒。身体姿态的改变，相当于转动惯量和转动速度的调节，可以用两个参数来描写。最终的角度改变，可以表述为一个曲线积分，而这个积分在形式上完全等同于Aharonov-Bohm效应里的相移！

后来人们还发现，高空坠落的猫猫为了活下来，还要解决在Yang-Mills场里的运动方程呢！

http://www.sciencenet.cn/blog/user_content.aspx?id=257054

[例1] 转盘上站立一人，沿盘边缘行走一圈。

求: 转盘转过的角度。



解：人+转盘，L_z 守恒：

$$mR^2\omega+\frac{1}{2}MR^2\Omega=0$$

相对运动：$\omega=\omega'+\Omega$

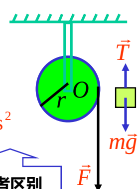
解得 $$\Omega=\frac{-mR^2}{mR^2+\frac{1}{2}MR^2}\omega'$$

$$\Delta\Theta=\int_0^t\Omega\mathrm{d}t=-\frac{2m}{2m+M}\int_0^t\omega'\mathrm{d}t=-\frac{2m}{2m+M}2\pi$$

【例2】一轻绳绕在半径 r =20 cm 的飞轮边缘，在绳端施以F=98 N 的拉力，飞轮的转动惯量 J=0.5 kg·m^2，飞轮与转轴间的摩擦不计，（见图）

求 (1) 飞轮的角加速度，

(2) 如以重量P =98 N的物体挂在绳端，试计算飞轮的角加速。



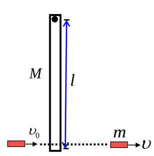
解 (1) $Fr=J\beta$ $\quad\beta=\frac{Fr}{J}=\frac{98\times0.2}{0.5}=39.2\ \text{rad/s}^2$

(2) $\left.\begin{array}{l}mg-T=ma\\ Tr=J\beta\\ a=r\beta\end{array}\right\}$ $\quad\beta=\frac{mgr}{J+mr^2}$

$$=\frac{98\times0.2}{0.5+10\times0.2^2}=21.8\ \text{rad/s}^2$$

两者区别

【例题3】一质量为m的子弹以水平速度射入一静止悬于顶端长棒的下端，穿出后速度损失3/4, 求子弹穿出后棒的角速度ω



解：棒对子弹的阻力为f

对子弹 $\int f\mathrm{d}t=m(v-v_0)=-\frac{3}{4}mv_0$

子弹对棒的反作用力 f' 对棒的冲量矩

$$\int f'l\mathrm{d}t=l\int f'\mathrm{d}t=-l\int f\mathrm{d}t=\frac{3}{4}lmv_0=J\omega$$

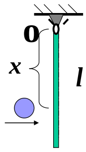
$$\omega=\frac{3}{4J}lmv_0=\frac{9mv_0}{4Ml}$$

角动量守恒定律？（Y）

【例题4】

右图中，
分析碰撞前后瞬间的守恒量

球与匀质
杆的碰撞

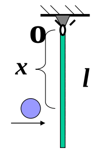


答：能量是否守恒取决于碰撞性质；
对O点的力矩为零，故系统对O点角动量守恒；
一般碰撞中轴对杆有横向力，外力不为零，
故动量不守恒。

球与匀质
杆的碰撞

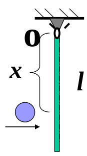
动量一定不守恒吗？

$x=$？ 动量也能守恒？



解：若x为某确定值，可使轴承处无水平力，
即使动量也守恒，

解法一：隔离用动量定理＋角动量定理
对象：杆。设无水平轴力，有球的力$\vec{f}$



动量定理（水平）：$f\Delta t = mv_{mc}$

角动量定理：$xf\Delta t = \frac{1}{3}ml^2\omega$

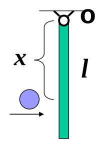
运动学：$v_{mc} = \frac{l}{2}\omega$

$x = \frac{2}{3}l$

结果与杆的
质量无关。

这个位置称为撞击中心

解法二：对球＋杆，两个守恒



$$xm_q v_0 = xm_q v + \frac{1}{3}ml^2\omega,$$

$$m_q v_0 = m_q v + mv_{mc}$$

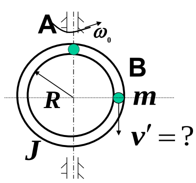
$$\because v_{mc} = \frac{l}{2}\omega$$

联立同样可解得 $x = \frac{2}{3}l$

【例题5】如图，内壁光滑的环状细管绕竖直轴旋转，管是刚性的，转动惯量为J，环的半径为R，无动力，轴光滑。初始：管内球在A，静止；各已知量如图标示。

求：球到水平位置B时，球的相对环的速度

解：地面参考系，对球＋圆环，
M_z=0，L_z守恒；
各处光滑，E守恒。



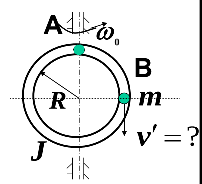
$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 + mgR = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2,$$

$$J\omega_0 = J\omega + Rm(R\omega)$$

$$\longrightarrow \quad \omega = \frac{J\omega_0}{J+mR^2}$$

相对运动：$v^2 = v'^2 + \omega^2R^2$

解得 $v'^2 = \frac{J\omega_0^2R^2}{J+mR^2} + 2gR$



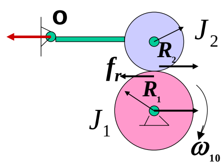
讨论：

$v'^2 > 2gR$

合理吗？

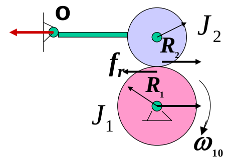
【例题6】轮1无驱动力，有初始角速度ω_{10}。各轴承光滑，轮2初静止，放平后，恰与轮1接触，设两轮的质量及转动惯量已知；杆质量不计。

求：稳定后各自的角速度



已知 m_1, J_1, ω_{10}， m_2, J_2， $\omega_{20}=0$；
各轴承光滑，无驱动力。

求：稳定后各自的角速度



有人解：对两轮系统用角动量守恒，有：

$$\left.\begin{aligned} &J_1\omega_1+J_2\omega_2=J_1\omega_{10}\\ \text{稳定：}&\omega_1R_1=\omega_2R_2\end{aligned}\right\}\ \omega_1=\frac{J_1R_2\omega_{10}}{J_1R_2+J_2R_1},\cdots$$

判断正误

答：不对。守恒否应当对同一轴讨论！

无论对O_1, O_2之一，外力矩不为零（见图）

系统角动量不守恒！

正确解法：隔离；分别用角动量定理

对轮2：

$$R_2 f_r\Delta t=J_2\omega_2$$

对轮1：

$$-R_1 f_r\Delta t=J_1\omega_1-J_1\omega_{10}$$

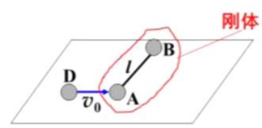
$$\longrightarrow\quad \frac{J_1\omega_1}{R_1}+\frac{J_2\omega_2}{R_2}=\frac{J_1\omega_{10}}{R_1}$$

稳定：$\omega_1R_1=\omega_2R_2$

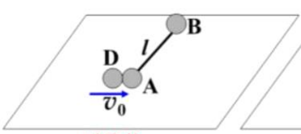
联立可解结果 $\omega_1=\dfrac{J_1R_2^2}{J_1R_2^2+J_2R_1^2}\omega_{10}$

【例】一长度为 l 的轻质细杆，两端各固定一个小球 A 和 B，平放在光滑水平面上，开始时静止。现另一小球 D 以垂直于杆身的初速度 v_0 与杆端的 A 球作弹性碰撞。设三球质量同为 m。

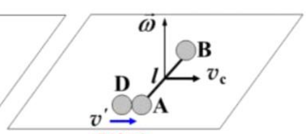
求：碰后（A+B）和球D的运动



解



碰撞前



碰撞后

D球速度：v_0

刚体AB静止

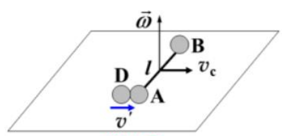
D球速度：v'

刚体AB质心速度：v_c

转动角速度：ω

取竖直向上为转轴正方向

刚体组：D＋刚体AB



碰撞后

（1）水平无外力，动量守恒：

$$mv_0=mv'+2mv_C$$

$$v_0-v'=2v_C\cdots\cdots\ ①$$

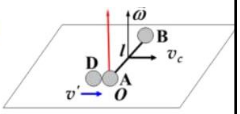
（2）弹性碰撞，机械能守恒(动能不变)

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2+\frac{1}{2}(2m)v_C^2$$

$$J_C=\frac{1}{2}ml^2$$

$$v_0^2-v'^2=2v_C^2+\frac{1}{2}l^2\omega^2\cdots\cdots\ ②$$

3）对过任一固定点的垂直轴，角动量守恒



选碰撞前A球的空间位置作为定点（O 点），关于过O点轴列角动量守恒

碰撞前：系统角动量为零

碰撞后：D 球角动量为零，刚体 AB 角动量为

$$L_{AB}=\underline{J_C\omega-2m\times\frac{l}{2}v_C}=\frac{1}{2}ml^2\omega-mlv_C$$

$$ml\left(\frac{l}{2}\omega-v_C\right)=0\rightarrow v_C=\frac{l}{2}\omega\cdots\quad③$$

73

（4）①②③式联立解出

$$v'=0,\quad v_C=\frac{v_0}{2},\quad \omega=\frac{v_0}{l}$$

碰撞后：D 球静止， 刚体 AB 平动＋转动。

如果小球 D 以垂直于杆身的初速度v_0，与杆端的A球碰撞后粘在一起共同运动，结果为

$$v_C=\frac{v_0}{3},\quad \omega=\frac{v_0}{2l}$$

74

刚体的平衡

刚体的平衡是指刚体相对惯性系静止或作匀速直线运动（平动）

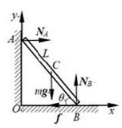
按动量和角动量变化定理，刚体达到平衡的充要条件是：外力矢量和等于零，对任一轴的力矩矢量和等于零

$$\sum F_{外}=0\quad（平动平衡条件）$$

$$\sum M_z=0\quad（转动平衡条件）$$

75

【例】一梯子立在墙角上，墙面光滑，设梯子下端与地面的摩擦系数为$\mu=0.2$，为使梯子不至滑下，它与地面的最小倾角 θ 应为多大?



解 梯子受 4 个力：重力 mg、墙面支持力 N_A、地面支持力 N_B 和静摩擦力 f。合力为零：

$$N_A-f=0\quad（x\ 轴方向）$$

$$N_B-mg=0\quad（y\ 轴方向）$$

对过 B 点垂直于 xy 平面的轴，要求力矩矢量和等于零：

$$\frac{L}{2}mg\cos\theta-LN_A\sin\theta=0$$

梯子相对地面不滑动，要求

$$f\le\mu N_B$$

由以上四式，可得

$$\theta\ge\arctan\left(\frac{1}{2\mu}\right)=\arctan\left(\frac{1}{2\times0.2}\right)=68^\circ$$

“梯子使用安全规范”规定，梯子与地面的夹角以$60^\circ\sim70^\circ$为宜。

76

§ 5.6 定轴转动的功能原理

刚体定轴转动的角动量定理

$$M_z=\frac{\mathrm{d}(J_z\omega)}{\mathrm{d}t}$$

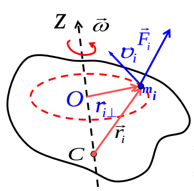
力矩对时间的积累效应

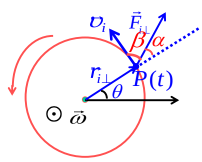
$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}M_{外z}\,\mathrm{d}t=J_z\omega_2-J_z\omega_1}$$

力矩的空间积累效应-力矩的功

77

一. 力矩的功





$$\mathrm{d}W_i=\vec{F}_i\cdot d\vec{r}_i=\vec{F}_{i\perp}\cdot d\vec{r}_i$$

$$=\vec{F}_{i\perp}\cdot\vec{\upsilon}_i dt$$

$$=F_{i\perp}\upsilon_i\cos\beta dt=F_{i\perp}r_{i\perp}\omega\sin\alpha dt$$

$$=(F_{i\perp}r_{i\perp}\sin\alpha)\omega dt=M_{iz}d\theta$$

$$dW=\sum_i dW_i=\sum M_{iz}d\theta=M_z d\theta$$

$$W=\int_{\theta_1}^{\theta_2}dW=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M_z d\theta$$

78

直接用矢量推导

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i \cdot \vec{\upsilon}_i dt$$
$$= \vec{F}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) dt$$
$$= (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot \vec{F}_i dt$$
$$= \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) dt = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_i dt = \vec{k} \cdot \vec{M}_i \omega dt$$
$$= M_{iz} \omega dt = M_{iz} d\theta$$

力矩的功 $\boxed{W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dW = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_z d\theta}$

力矩的空间积累效应

二、定轴转动动能定理

回顾：质点系动能定理

$$\boxed{W_{ext} + W_{\text{int}} = E_{k2} - E_{k1}}$$

对刚体 $W_{\text{int}} = 0$

$$\boxed{W_{ext} = E_{k2} - E_{k1}}$$

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} J\alpha \, d\theta$$
$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} J \frac{d\omega}{dt} d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega \, d\omega$$
$$= \frac{1}{2} J\omega_2^2 - \frac{1}{2} J\omega_1^2$$

$$\boxed{M = J\alpha \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}}$$

$\boxed{E_k = \frac{1}{2} J\omega^2}$ 定轴转动动能

$\boxed{W = \frac{1}{2} J\omega_2^2 - \frac{1}{2} J\omega_1^2}$ 刚体定轴转动动能定理

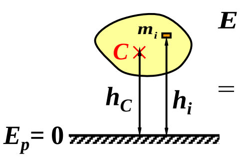
$$\frac{1}{2} J\omega^2 \overset{?}{=} \sum \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2$$

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i r_{i\perp}^2 \omega^2$$
$$= \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_{i\perp}^2 = \frac{1}{2} J\omega^2$$

（$\omega \uparrow \rightarrow E_k \uparrow\uparrow$） （飞轮储能）

三、刚体的重力势能

重力场中的刚体 刚体+地球



$$E_p = \sum m_i g h_i$$
$$= mg \frac{\sum m_i h_i}{m}$$
$$= mgh_c$$

刚体上各点重力加速度的变化忽略

所有质量集中于质心时的势能

四、刚体的机械能守恒

刚体和地球系统，只有重力做功

刚体的机械能守恒

$$E_p + E_k = const.$$

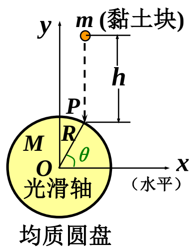
动量定理和角动量定理

表 2－1 质点运动与刚体定轴转动对照表

质点运动	刚体定轴转动
速度 $v=\frac{dr}{dt}$	角速度 $\omega=\frac{d\theta}{dt}$
加速度 $a=\frac{dv}{dt}$	角加速度 $\beta=\frac{d\omega}{dt}$
力 F	力矩 M
质量 m	转动惯量 $J=\int r^2dm$
动量 $p=mv$	角动量 $L=J\omega$
牛顿第二定律 $F=ma$，$F=\frac{dp}{dt}$	转动定律 $M=J\beta$，$M=\frac{dL}{dt}$
动量定理 $\int Fdt=mv-mv_0$	角动量定理 $\int Mdt=J\omega-J\omega_0$
动量守恒定律 $F=0$，$mv=$ 恒矢量	角动量守恒定律 $M=0$，$J\omega=$ 恒量
动能 $\frac{1}{2}mv^2$	转动动能 $\frac{1}{2}J\omega^2$
功 $W=\int F\cdot dr$	力矩的功 $W=\int Md\theta$
动能定理 $W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$	转动动能定理 $W=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$

轮子力图继续转动这一事实证明存在与转动运动相联系的动量——角动量

[例1] 如图示， 已知：h，R，$M=2m$，$\theta=60°$

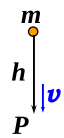


均质圆盘

求：碰撞后的瞬刻盘 $\omega_0=?$

P 转到 x 轴时盘 $\omega=?,\alpha=?$

解： m下落：



$$mgh=\frac{1}{2}mv^2$$

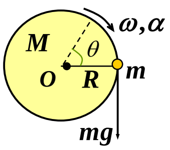
$$v=\sqrt{2gh} \qquad (1)$$

对（m＋盘），碰撞中重力对O轴力矩可忽略，

系统角动量守恒： $mvR\cos\theta=J\omega_0 \qquad (2)$

（m＋盘）转动惯量 $J=\frac{1}{2}MR^2+mR^2=2mR^2 \qquad (3)$

由(1)(2)(3)得： $\omega_0=\frac{\sqrt{2gh}}{2R}\cos\theta \qquad (4)$



对（$m+M$＋地球）系统，

只有重力作功，E守恒。

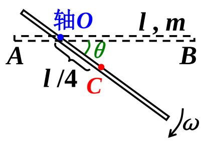
令P、x 重合时 $E_P=0$，则：

$$mgR\sin\theta+\frac{1}{2}J\omega_0^2=\frac{1}{2}J\omega^2 \qquad (5)$$

由(3)(4)(5)得：
$$\omega=\sqrt{\frac{gh}{2R^2}\cos^2\theta+\frac{g}{R}\sin\theta}\underset{(\theta=60°)}{=}\frac{1}{2R}\sqrt{\frac{g}{2}(h+4\sqrt{3}R)}$$

$$\alpha=\frac{M_{\text{水平位置对轴的力矩}}}{J}=\frac{mgR}{2mR^2}=\frac{g}{2R}$$

[例2]已知：如图示均匀直杆质量为m，长为l，初始水平静止。轴光滑，$\overline{AO}=l/4$ 。



求： 杆下摆到θ角时，

角速度 $\omega=?$

轴对杆作用力 $\vec{N}=?$

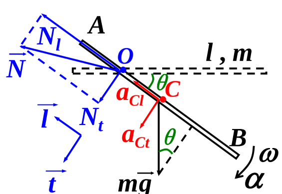
解：（杆+地球）系统，只有重力作功，E守恒。

$$\frac{1}{2}J_O\omega^2-mg\frac{l}{4}\sin\theta=0 \qquad (1)$$

$$J_O=\frac{1}{12}ml^2+m(\frac{l}{4})^2=\frac{7}{48}ml^2 \qquad (2)$$

(1)、(2)解得： $\omega=2\sqrt{\frac{6g\sin\theta}{7l}}$

应用质心运动定理求轴力：



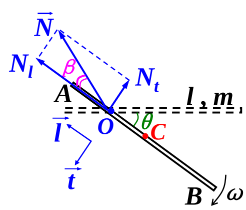
$$\vec{N}+m\vec{g}=m\vec{a}_C$$

$$\vec{l}:\ -mg\sin\theta+N_l=ma_{Cl} \qquad (3)$$

$$\vec{t}:\ mg\cos\theta+N_t=ma_{Ct} \qquad (4)$$

$$a_{Cl}=\frac{l}{4}\omega^2=\frac{6}{7}g\sin\theta \qquad (5)$$

$$a_{Ct}=\frac{l}{4}\alpha=\frac{l}{4}\cdot\frac{\frac{l}{4}mg\cos\theta}{J_O}=\frac{3g\cos\theta}{7} \qquad (6)$$



由(3)(4)(5)(6)解得：

$$N_l=\frac{13}{7}mg\sin\theta,$$

$$N_t=-\frac{4}{7}mg\cos\theta$$

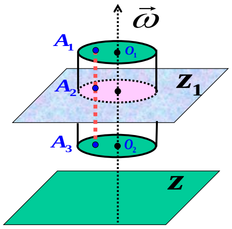
$$\vec{N}=\frac{13}{7}mg\sin\theta\cdot\vec{e}_l-\frac{4}{7}mg\cos\theta\cdot\vec{e}_t$$

$$N=\frac{mg}{7}\cdot\sqrt{153\sin^2\theta+16}$$

$$\beta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{|N_t|}{N_l}=\mathrm{tg}^{-1}(\frac{4}{13}\mathrm{ctg}\theta)$$

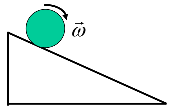
§ 5.7 刚体的平面运动

一、定义

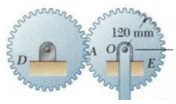


刚体上每一点都在与固定平面Z平行的平面内运动。

刚体内垂直于固定平面的直线上的各点，运动状况都相同



斜面上圆柱体的直线滚动

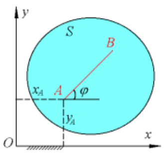


齿轮的运动

刚体平面运动

平面运动 — 随质心的平动
绕过质心的轴的转动

二、刚体平面运动运动学



平面图形内任意一条线段的位置

↓

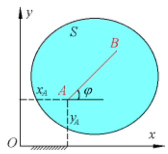
确定运动平面内刚体各点的位置

↓

确定平面运动刚体位置

确定惯性系，建立直角坐标系 ***oxyz***

oxy 在平面内， ***z*** 轴垂直于平面



平面运动方程

$$x_A = f_1(t)$$
$$y_A = f_2(t)$$
$$\varphi = f_3(t)$$

(x_A, y_A) 不变 ➡ 刚体的定轴转动

φ 不变 ➡ 刚体的平动

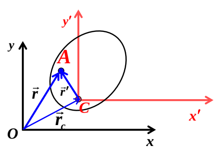
刚体的平面运动 ➡ 平动+转动

平动基点往往选择在质心

平动基点往往选择在质心

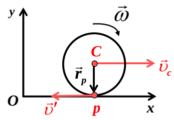
刚体的平面运动=

随质心的平动+绕质心的定轴转动



$$\vec{r} = \vec{r}_c + \vec{r}'$$
$$\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{v}'$$
$$= \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$
$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}'$$

纯滚动条件



$$\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{v}'$$
$$\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_p$$

如果 $\vec{v}_p = 0$ 纯滚动

三、刚体平面运动动力学

平动部分

质心运动定理 $\vec{F}=\sum\vec{F}_i=(\sum m_i)\vec{a}_c=m\vec{a}_c$

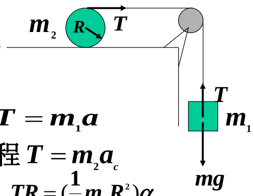
转动部分

质心系内定轴转动定律 $M_{cz}=\dfrac{\mathrm{d}L_{cz}}{\mathrm{d}t}=J_{cz}\beta$

常运用机械能守恒条件、纯滚动条件等

柯尼希定理 $E_k=\dfrac{1}{2}m\upsilon_c^2+\dfrac{1}{2}J_{cz}\omega^2$

例1 如图，已知m_1,m_2,R,桌面水平光滑，滑轮质量不计求：圆盘角加速度



解： 对m_1,由牛II $m_1g-T=m_1a$

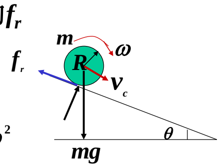
对m_2，由质心运动方程 $T=m_2a_c$

相对质心的转动方程 $TR=(\dfrac{1}{2}m_2R^2)\alpha$

运动学关系：$a=R\alpha+a_c$

$$\alpha=\frac{2m_1}{3m_1+m_2}\frac{g}{R}$$

例2 匀质球由静止沿斜面无滑动滚动（纯滚动）求质心下降h时的v_c 及斜面的f_r



解： 无滑动，f_r 不作功

球(＋地) E 守恒

$$mgh=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}(\frac{2}{5}mR^2)\omega^2$$

无滑动：$v_c=\omega R$

$$\Longrightarrow v_c=\sqrt{\frac{10gh}{7}}<\sqrt{2gh}$$

静摩擦力的作用：把部分能量变成转动动能

由质心系中动能定理：

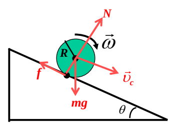
$$M\theta'=f_rR\theta'=f_r\frac{h}{\sin\theta}=\frac{1}{2}(\frac{2}{5}mR^2)\omega^2$$

代入ω得：

$$f_r=\frac{2}{7}mg\sin\theta$$

【例3】 均匀圆柱体从粗糙斜面上由静止无滑下滚

$\theta\quad m\quad R\quad J_c\quad f\quad N$



$mg\sin\theta-f=ma_c$

$Rf=J_c\beta$

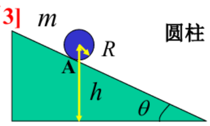
$\upsilon_c=R\omega\rightarrow a_c=R\beta$

$a_c=\dfrac{R^2mg\sin\theta}{J_c+mR^2}$

m,R,θ同， $J_c\uparrow,a_c\downarrow$ 导轨滚柱演示

m,J_c,θ同， $R\uparrow,a_c\uparrow$ 导轨滚球演示

[补充例3]



圆柱

摩擦力大,纯滚动

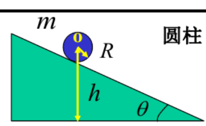
求:速度和加速度

解: 1. 以A点为参考点

$$mgR\sin\theta=J_A\alpha$$

$$a_c=R\alpha=\frac{g\sin\theta}{J_A/(mR^2)}=\frac{2}{3}g\sin\theta$$

$$v_c=v_0+a_ct=\sqrt{\frac{2a_ch}{\sin\theta}}=2\sqrt{\frac{gh}{3}}$$



圆柱

质心系

解: 2. 质心运动

$$mg\sin\theta-f_r=ma_c$$

$f_rR=J_o\alpha \qquad a_c=R\alpha$

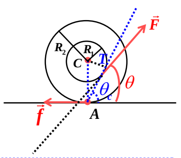
$$a_c=\frac{g\sin\theta}{1+\dfrac{J_o}{mR^2}}=\frac{2}{3}g\sin\theta$$

解: 3.机械能守恒

$$mgh=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}J_o\omega^2 \qquad v_c=R\omega$$

$$v_c=2\sqrt{\frac{gh}{3}} \qquad a_c=\dot{v}_c=\frac{2}{3}g\sin\theta$$

【例4】 分析一水平桌面上作纯滚动线轴的运动



$$F\cos\theta - f = ma_c$$

$$R_2 f - R_1 F = J_c \beta$$

$$a_c = R_2 \beta$$

$$a_c = \frac{R_2(R_2\cos\theta - R_1)F}{J_c + mR_2^2}$$

只考虑水平方向

重力和支持力没有考虑

$f < \mu N$

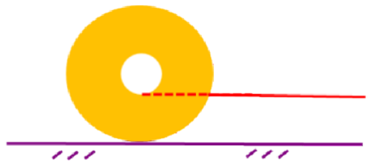
$$R_2\cos\theta - R_1 > 0, a_c > 0$$
$$R_2\cos\theta - R_1 < 0, a_c < 0$$
$$R_2\cos\theta - R_1 = 0, a_c = 0$$

柱状刚体平面运动演示

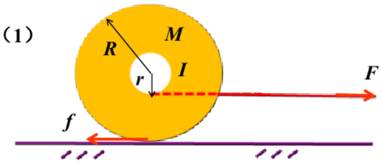
[补充例4] 在粗糙的水平面上放置一轮子，绳子绕在中轴（与轮子一体）上，如图所示（对着纸面看，绳子是逆时针方向绕在中轴上）。由于绳子绕在轮子的中轴上，拉绳子就会带动轮子滚动。问：

（1）小心地向前慢拉绳子，使轮子不打滑，轮子是向前还是向后滚动？

（2）向前用力快拉绳子，轮子是向前还是向后移动？



解 （1）



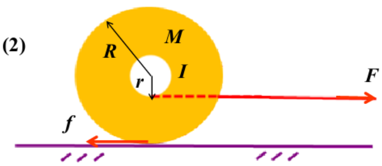
质心运动方程 $F - f = Ma$

绕质心转动定律 $Fr - fR = -I\alpha$

无滑动 $a = R\alpha$

解得 $\alpha = \dfrac{F(R-r)}{MR^2 + I}$ 轮子向前滚动

解 (2)



质心运动方程 $F - f = Ma$

$a > 0$ 轮子向前

绕质心转动定律 $Fr - fR = -I\alpha$

$\alpha < 0$ 轮子向后转动，打滑

结果讨论：静摩擦力在能量转换中的作用

把刚体边缘与斜面接触点的位移分解为：

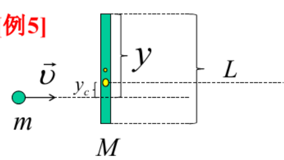
随质心的平动＋绕质心的转动

等值，反向

摩擦力对此作负功　　摩擦力对此作正功

二者之和为零，摩擦力使减少的势能不是全部转换为平动动能，而是部分地转换为转动动能。

[例5]



平面上

完全非弹性碰撞，求：

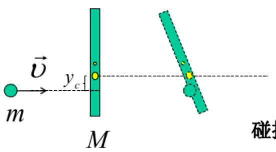
碰后细杆儿的角速度

解： 碰撞点为原点，

碰撞瞬间系统质心

$$x_c = 0 \qquad y_c = \frac{M}{m+M}\left(y - \frac{L}{2}\right)$$

质心速度 $V_c = \dfrac{mv}{m+M}$



角动量守恒

绕原点

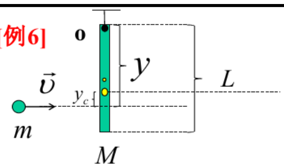
碰撞前、后瞬间角动量为零

$$\boxed{\vec{L}=\vec{L}'+\vec{r}_c\times\vec{P}_c}$$

$$-J_c\omega+(m+M)V_c y_c=0 \qquad \omega=\frac{(m+M)V_c y_c}{J_c}$$

$$J_c=my_c^2+M(y-\frac{L}{2}-y_c)^2+\frac{1}{12}ML^2$$

[例6]



悬挂杆

完全非弹性碰撞，

碰撞时间 Δt

求：1) 碰撞瞬间转轴受平均力

2) 杆摆最大角

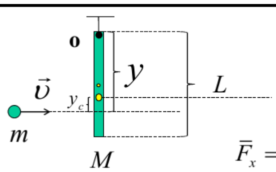
解：1）在质心系 $\vec{M}'=\dot{\vec{L}}'$ $\qquad \vec{M}'\Delta t=\Delta\vec{L}'$

$$\bar{F}_x(y-y_c)\Delta t=-J_c\omega-(-my_c\upsilon)$$

$$y_c=\frac{M}{m+M}(y-\frac{L}{2})$$

绕固定点 o 角动量守恒

$$m\upsilon y=J_o\omega$$



$$\bar{F}_x=\frac{m\upsilon(y_c-\frac{J_c}{J_o}y)}{(y-y_c)\Delta t}$$

$$\bar{F}_x=-\frac{m\upsilon}{2\Delta t}\frac{ML}{my^2+\frac{1}{3}ML^2}(y-\frac{2}{3}L)$$

$$F_y=(M\frac{L}{2}+my)\omega^2+(m+M)g \qquad \bar{F}_y=?$$

$$Mg\rightarrow(M\frac{L}{2}+my)\omega^2+(m+M)g$$

2) 杆摆最大角

$$\frac{1}{2}J_o\omega^2=(M+m)g(y-y_c)(1-\cos\theta)$$

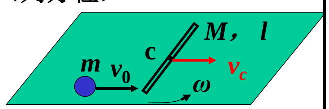
例7：已知：光滑水平面上匀质细杆 l， M，小球的 m， v_0（⊥杆身），弹性碰撞，$M=3m$

求：碰后杆的角速度（列方程）

解：对杆+球系统，

无外力 → 动量守恒

$$mv+Mv_c=mv_0$$



设运动方向如图

$$\xrightarrow{M=3m}\quad v_0-v=3v_c \quad ①$$

对任一定点角动量守恒，选碰撞重合点：

$$\frac{l}{2}Mv_c-\frac{Ml^2}{12}\omega+0=0 \quad \longrightarrow \omega l=6v_c \quad ②$$

弹性碰撞，动能不变

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\frac{Ml^2}{12}\omega^2+\frac{1}{2}Mv_c^2=\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v_0^2-v^2=\frac{1}{4}\omega^2l^2+3v_c^2 \qquad ③$$

三式联立解得 $\omega=\dfrac{12}{7}\dfrac{v_0}{l}$

$$(v_c=\frac{2}{7}v_0;\ v=\frac{1}{7}v_0)$$

结果为正，表明所设方向正确。

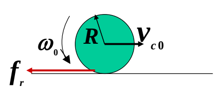
讨论：如果选择与杆中心重合的定点，L守恒如何写？

例8：现象：在台面上合适地搓动乒乓球，乒乓球在桌面上前进一段距离后将会自动返回？

1）试对此现象作定性解释；

2）设乒乓球可看成匀质刚性球壳，导出能产生上述现象，其初始条件应满足的关系。

定性分析：



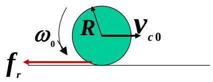
若初始运动方向如图，

则摩擦力方向一定向后。

摩擦力的作用：

对质心的运动 $\longrightarrow v_c\downarrow$

对绕质心的转动 $\longrightarrow \omega\downarrow$

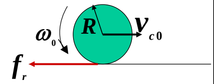


当 $v_c=0$, 而 $\omega\neq 0$ 时，乒乓球返回!

结论：1）转动方向和平动方向不可随意；

2) ω_0, v_{c0} 的大小应满足一定关系。

定量计算：



质心运动方程 $-f_r=m\dfrac{dv_c}{dt}$ (1)

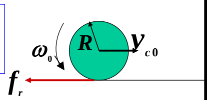
转动方程（对质心） $-Rf_r=(\dfrac{2}{3}mR^2)\dfrac{d\omega}{dt}$ (2)

由(1)、(2)式消去 dt、f_r 得： $d\omega=\dfrac{3}{2R}dv_c$

两边积分得： $\omega=\omega_0-\dfrac{3}{2}\dfrac{v_{c0}-v_c}{R}$

令 $v_c=0;\ \omega>0$ $\longrightarrow$ $\omega_0>\dfrac{3v_{c0}}{2R}$

当初始速度和角速度大小满足上述不等式时，乒乓球可返回。



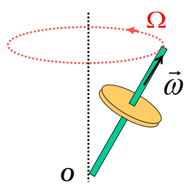
小球返回是怎么运动的？摩擦力会一直给小球加速吗？

若ω 比v_c先为0，乒乓球如何运动？

关于乒乓球滚动问题的讨论
顾黎 (清华大学无31班)
物理与工程Vol.14, No.4 (2004), 58-59.

§5.8 进动（旋进 precession）

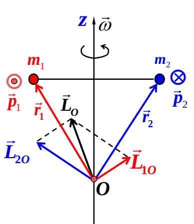
进动实验演示



进动

高速旋转的物体，其自转轴绕另一个轴转动的现象。

质量分布轴对称刚体



对O点 $\vec{L}_O$ 对轴 $\vec{L}_z$

➢质量不对称情况 $m_2>m_1$

$\upsilon_2=\upsilon_1\quad p_2>p_1$

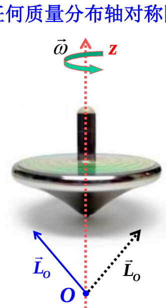
$L_{2O}>L_{1O}$

$\vec{L}_O$ 不平行于 $\vec{L}_z$

➢质量对称情况 $m_2=m_1$

$\vec{L}_O=\vec{L}_z=J_z\vec{\omega}=J\vec{\omega}$

任何质量分布轴对称刚体



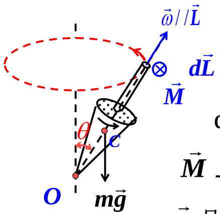
➢质量轴对称情况

旋转轴为对称轴

根据对称性原理

$\vec{L}_O=\vec{L}_z=J_z\vec{\omega}=J\vec{\omega}$

玩具陀螺的旋进



$$\vec M = \frac{d\vec L}{dt} \longrightarrow$$

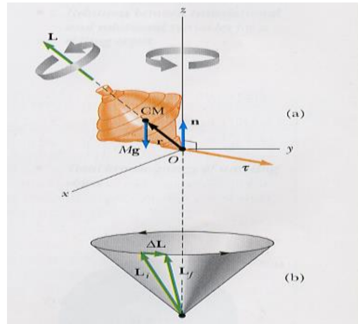
$$d\vec L = \vec M\,dt // \vec M$$

$$\vec M \perp \vec L \rightarrow d\vec L \perp \vec L$$

$\longrightarrow \vec L$ 只改变方向而不改变大小

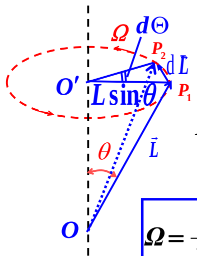
从而产生旋进运动。

121



122

进动角速度



旋进角速度 $\Omega = \dfrac{d\Theta}{dt}$

$$\left|d\vec L\right| = L\sin\theta\, d\Theta$$

$$M = \frac{\left|d\vec L\right|}{dt} = \frac{L\sin\theta\, d\Theta}{dt}$$

$$= L\sin\theta \cdot \Omega$$

$$\boxed{\Omega = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{M}{J\omega\sin\theta}}$$

123

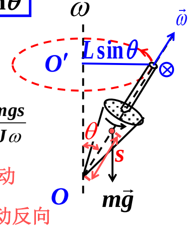
简单讨论

$$\boxed{\Omega = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{M}{J\omega\sin\theta}} \propto \frac{1}{\omega}$$

$\omega \uparrow \rightarrow \Omega \downarrow$

$M = mgs\sin\theta$

$$\Omega = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{mgs\sin\theta}{J\omega\sin\theta} = \frac{mgs}{J\omega}$$



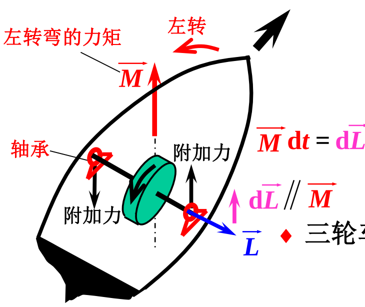
如合重力矩为零，无进动

如果角速度反向，则进动反向

124

▲回转效应产生附加力矩：

◆ 轮船转弯时，涡轮机轴承要承受附加力。



附加力可能造成轴承的损坏，附加力矩 $\vec M\,dt = d\vec L$ 也可能造成翻船事故。

◆ 三轮车拐弯时易翻车

125

车轮进动实验演示

$\omega \uparrow \rightarrow \Omega \downarrow$

如合重力矩为零，无进动

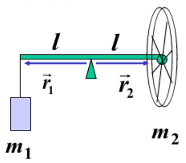
如果角速度反向，则进动反向

TV 旋进防止炮弹翻转 炮弹.mpg

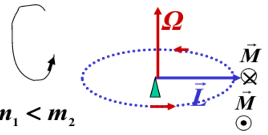
126

关于旋进方向： $\vec{M}=\vec{\Omega}\times\vec{L}(J\vec{\omega})$

如图例：

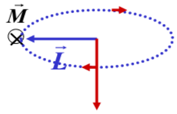


①



$m_1 < m_2$

③ $m_1 < m_2$,自转与①反，



②自转方向不变，
$m_1 > m_2$,
Ω反向。

特征：不屈从于外力矩，保持对称轴的稳定。

应用：炮弹出口时的旋转以维持飞行的稳定

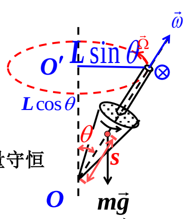
*说明：讨论有近似！

$\because\ \vec{\omega}_{总}=\vec{\omega}+\vec{\Omega}$ 只有 $\Omega<<\omega$ 才有 $\vec{L}=J\vec{\omega}$

$\vec{\Omega}$ 的影响：自转轴在旋进中出现微小的上下的周期性摆动——章动（nutation）。

章动（nutation）

自转轴在旋进中出现的微小的上下的周期性摆动



为什么向下摆动？ 角动量守恒

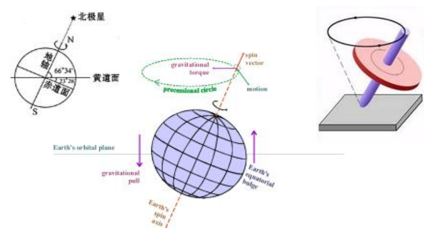
为什么周期性摆动？

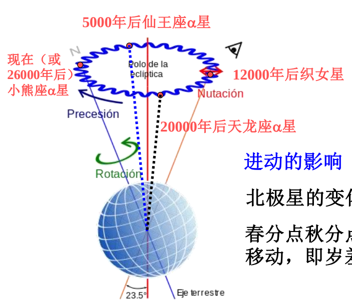
当旋进发生后，总角速度 $\vec{\omega}_{total}=\vec{\omega}+\vec{\Omega}$

只有刚体高速自转时，才有 $\vec{\omega}_{total}\doteq\vec{\omega}$

当考虑到 $\vec{\Omega}$ 对 $\vec{\omega}_{total}$ 的贡献时， 章动

地球的章动和旋进





进动的影响

北极星的变化

春分点秋分点的移动，即岁差

地球旋进的成因:

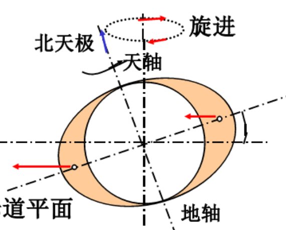
1) 地球的非球形（赤道半径较大）；

2) 地球自转平面与公转平面不重合。

上述原因造成引力对地球质心的力矩→旋进

旋进周期是25800年

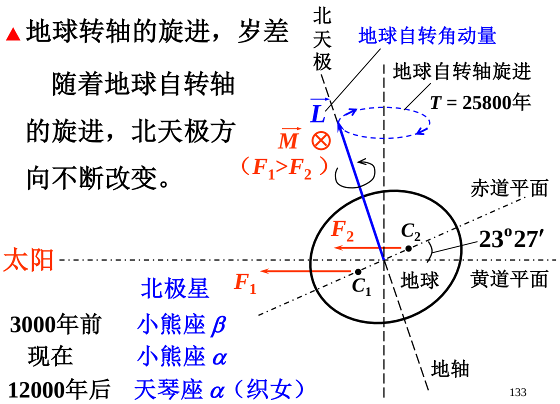
黄道平面（公转）



旋进结果：赤道平面在太空的方位发生改变。

▲地球转轴的旋进，岁差

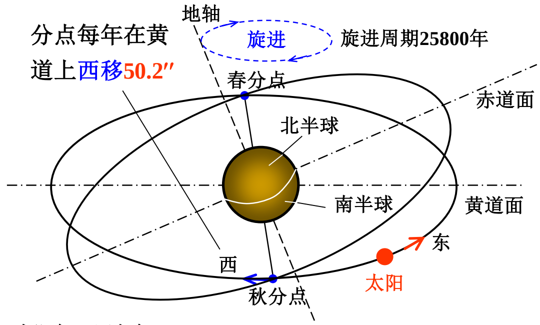
随着地球自转轴的旋进，北天极方向不断改变。



	北极星
3000年前	小熊座β
现在	小熊座α
12000年后	天琴座α（织女）

133

分点每年在黄道上西移50.2″



太阳年（回归年）：太阳由春分→秋分→春分

恒星年（时间长）： 地球绕太阳一周的时间

岁差（precession）

岁差 = 恒星年 – 太阳年 = 20分23秒

134

我国古代已发现了岁差：

▲前汉（公元前206 — 23） 刘歆发现岁差。

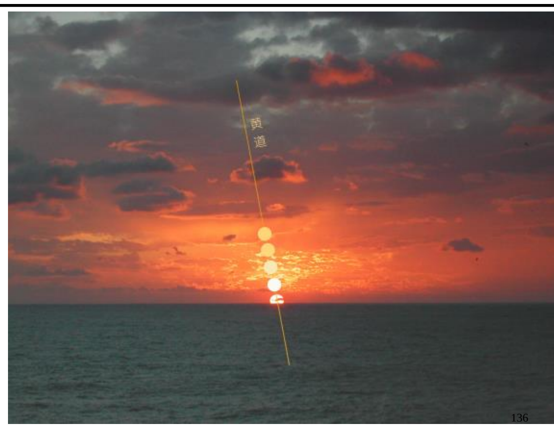
▲晋朝（公元265 — 316）虞喜最先确定了岁差：每50年差1度（约72″/年）（精确值为50.2″/年）

▲祖冲之（公元429 — 500）编《大明历》最先将岁差引入历法：391年有144个闰月。

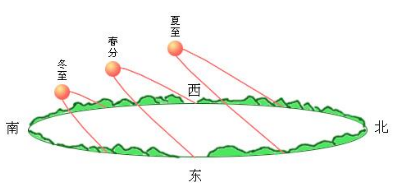
第五章结束

牛顿力学全部结束

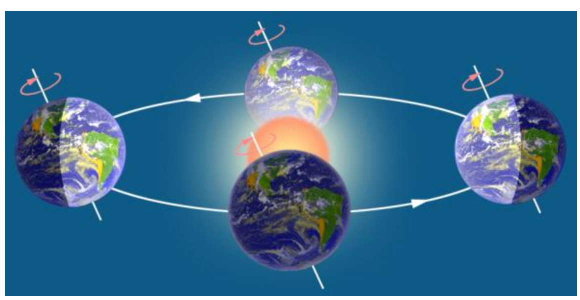
135



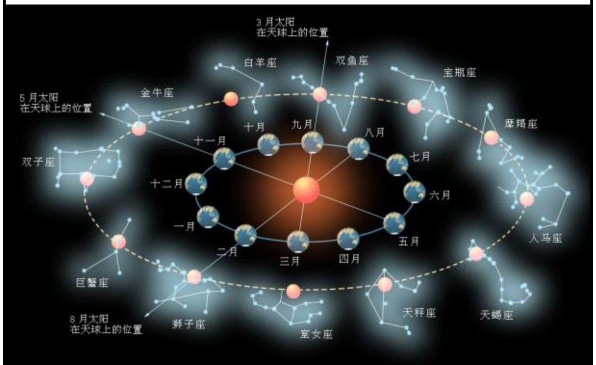
136



137



138



139

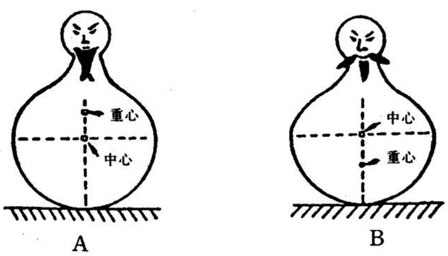
中国古代玩具与物理学

不倒翁

隋唐时期，或许由于饮酒之风盛行，人们制作了一种劝人喝酒的玩具、经匠心雕刻的木头人，称为「酒胡子」，将它置于瓷盘之中，「俯仰旋转」、「缓急由人」。「酒胡子」也有纸制作的：「糊纸作醉汉状，虚其中而实其底，虽按捺而旋转不倒也。」，现在称这些玩具为不倒翁。另一种劝酒器，虽称不倒翁，但转动摇摆后最终会倒下，并且指向某人或倒向某人，某人当饮酒。

140

两种不倒翁



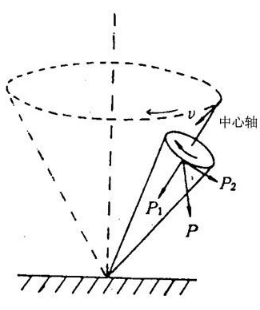
141

陀螺

儿童们对玩陀螺极感兴趣，当用鞭绳抽打陀螺时，陀螺在地面上的运动令人乐趣无穷。它既在某一锥面上作回转运动，称为进动，又绕着自己的中心轴作自转运动；同时，在进动运动的附近作极小幅度的抖动，称为章动。如果抽打得法，陀螺快速运动之后，就斜立在地面上而不会倒下，每次回转的途径实际上也不相同。

142

陀螺的运动



143


波尔和泡利观察翻身陀螺

两位物理学大师波尔(Bohr, N.)和泡利(Pauli, W.)弯着腰被地上滚动的小陀螺吸引住了，他们全神贯注地观察这个旋转中的带短柄小球体突然翻身，短柄触地继续旋转的奇特现象。

这张照片摄于1954年的5月，地点是瑞典Lund大学的物理研究所。照片中的这个称作Tip-top的小玩具曾引起物理学界的巨大兴趣。

144

翻身陀螺与摩擦力效应

将一个熟鸡蛋平放在桌面上，让它快速旋转，它会突然跃起绕尖头直立旋转。于是鸡蛋就以旋转的运动状态实现了哥伦布的要求。

翻身陀螺两端的外形为不同半径的大小球面，陀螺的重心与两个球面的球心均不重合。当陀螺的短柄朝上，大球面与地面接触时，重心在球心的下方，陀螺保持静态稳定。当陀螺翻身为短柄向下，柄端的小球面与地面接触时，重心高于球心，静态不稳定。观察旋转中的陀螺，若重心低于球心，则低转速时稳定，高转速时不稳定。重心高于球心时则相反，低转速时不稳定，高转速时稳定。因此当转速达到某个临界值时，即出现翻身现象。翻身后陀螺的质心上升，势能突然增大。鉴于拉格朗日刚体并未考虑摩擦力因素，Tip-top陀螺的翻身现象很可能是摩擦力作用的结果。这个结论很容易被实验证实，因为将陀螺放在充分润滑的地面上，翻身现象就很难出现。

145

哥伦布竖鸡蛋

1492 年哥伦布发现了美洲新大陆。有些人不服气，说任何人乘船航行都能到达大洋彼岸。哥伦布拿了几个熟鸡蛋，请大家将鸡蛋竖立在桌上。没人能试成功。哥伦布将蛋壳的一端敲了个小洞就站住了。众人说这太容易了。哥伦布说，既然容易为何你们不去做呢 。

开尔文的 “哥伦布蛋” 问题

英国力学大师开尔文爵士 (Lord Kelvin) 于 1877 年提出过一个问题：“为何熟鸡蛋能在平面上直立旋转，而生鸡蛋不能呢？”开尔文问题涉及的鸡蛋能直立旋转的现象也称作 “哥伦布蛋” (Columbus egg)。一个煮熟的鸡蛋可以看成是一个具有旋转椭球形状的刚体。将一个熟鸡蛋平放在桌面上，让它快速旋转，它会突然跃起绕尖头直立旋转。于是鸡蛋就以旋转的运动状态实现了哥伦布的要求。

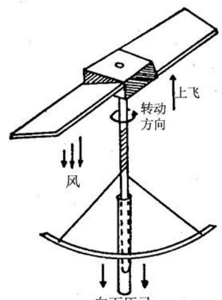
146

竹蜻蜓

东晋的学者葛洪发明的「飞车」后来称为「竹蜻蜓」，它是直升旋翼和飞机螺旋桨的始祖。它的主要部件是一个加工成斜面或弯曲面的薄竹片。薄竹片类似向下吹风的风扇叶。竹片中央榫接一根直立轴，将绳带以类似木工用的弓钻方式绞纽在立轴上，拉动绳带，竹片急速旋转。旋转着的竹片借其弯曲面造成的气流而急速上升。葛洪的「飞车」后来成为儿童喜好的玩具。它传到欧洲后，被称为「中国陀螺」，并引起了早期航空实验家们的极大注意。他们纷纷仿造竹蜻蜓，并由此引发了直升机旋翼和螺旋桨的设计构想。

147

竹蜻蜓结构示意图



148

银熏球

银熏球是由西汉时的「被中香炉」发展而成的，它的原理与近代回转器相似。古人有焚香除臭、熏烟灭虫的习惯。将香草置于熏炉内燃烧，熏炉置于被褥内，晚寝时便有清香之快感。据史载，这种习惯始于西周时期。使用香熏炉须格外小心，否则将引起火灾。西汉时，长安巧工丁缓发明「被中香炉」，不单解除了可能引致火灾的危险，而且也是科学史上一大创造。

149

银熏球

150