离散数学(1)
Discrete Mathematics

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

问题：谓词逻辑

- “有且仅有”算一个谓词还是两个谓词?
  - 形式化成两个简单谓词公式
    - $\underbrace{(\exists x)(P(x)}_{\text{有一个}} \wedge \underbrace{(\forall y)P(y) \rightarrow E(x,y)}_{\text{仅有一个}})$ 其中 $E(x,y)$表示$x = y$

- 函数$P(x,y)$里面的x,y是不是不能交换？还是根据函数具体语义
  - 需要考虑函数的语义，一般是不能交换的

$$f(x,y) = \max(x,y)$$

$$f(x,y) = x - y$$

问题：个体域

- 个体域可以是空集吗？
  - 当个体域为空集时，则没有办法在其上面定义有意义的谓词，因此不考虑个体域为空集的情况
- 对于有限域下的公式化简不是很清楚怎么操作
  - 对于有限域$D = \{1,2,\dots,k\}$，使用下式逐层消去量词，可参考课本4.5.2节中的例子

$$(\forall x)P(x) = P(1) \land P(2) \land \dots \land P(k)$$
$$(\exists x)P(x) = P(1) \lor P(2) \lor \dots \lor P(k)$$

$$(\forall x)(P(x) \land Q(x))$$
$$= (P(1) \land Q(1)) \land (P(2) \land Q(2))$$
$$= (P(1) \land P(2)) \land (Q(1) \land Q(2))$$
$$= (\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x)$$

- 讨论谓词逻辑的正确性上，能否将其限定为有限域上的命题逻辑进行等值判断?
  - 不能，有限域仅能用来分析理解。如$(\forall x)P(x) \lor (\forall x)\neg P(x)$
    - 在$D_1 = \{1\}$上量化为$P(1) \lor \neg P(1) = T$ 普遍有效
    - 在$D_2 = \{1,2\}$上量化为$(P(1) \land P(2)) \lor (\neg P(1) \land \neg P(2))$ 不普遍有效

问题：普遍有效性/可满足性

- 怎么证明有限域上公式的可满足性和普遍有效性仅依赖于个体域个体数目啊?
  - 这里有一个重要的前提：公式的普遍有效性是指它对域中所有可能的对象配置都是真的，而不是基于某些特定对象的特殊性质。换句话说，公式的真值不依赖于个体域中对象的具体数量，只依赖于这些对象的逻辑关系。
  - 例如，如果公式是一个全称量化的公式，如“对所有x，$P(x)$”在一个包含三个对象的域上是真的，那么它在任何包含两个对象的域上也必须是真的，因为公式的真值不依赖于第三个对象是否存在。

如果公式在k个体域上可满足，则在k+1个体域上也可满足

- 扩展域：当你将个体域从k个扩展到k+1个对象时，之前的k个对象及其在公式中的赋值仍然存在。因此，原来使公式为真的那些赋值在新的、更大的域中依然有效。
- 新增对象：新增的对象可能不参与到公式中原有的真值赋值中，但它的存在不会使原来的真值赋值变为假。
- 公式的性质：这个原理假定公式的可满足性不依赖于个体域的具体大小，而是依赖于变量之间的某种关系或结构。
- $xP(x)$

问题：普遍有效性/可满足性

- 怎么证明有限域上公式的可满足性和普遍有效性仅依赖于个体域个体数目啊?

定理二　公式在一个体域中的可满足性和普遍有效性只依赖于个体域中个体的数目．一公式如在某一个体域中可满足或普遍有效，则在个体数目相同的个体域中也是可满足或普遍有效的．

对此定理我们只作以下的说明．

如果二个体域 U 和 U' 中个体的数目相同，则它们之间存在着一一对应关系．设 x 为 U 的分子，则有且只有一 U' 的分子 x' 与之对应．设 α 为 U 的子集合，则有且只有一 U' 的子集合 α' 与之有一一对应关系．如果在 U 中有一谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$，则在 U' 中也有一相对应的谓词 $P'(x_1, \cdots, x_n)$，并且 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 真当且仅当 $P'(x_1', \cdots, x_n')$ 真．

因之，如果 $P(\cdots)$ 可以作为某一公式在 U 中的解释或赋值，$P'(\cdots)$ 就可以作为此公式在 U' 中的解释或赋值，反之亦然．可见，任一公式在此两个个体域中的可满足性和普遍有效性是相同的．

严格的证明要用到数学归纳法，施归纳于逻辑联结词与量词的数目，在此从略．

不做考试要求

网络学堂上传了单独的ppt

有限域上普遍有效性/可满足性

- 有限域上一个公式的可满足性和普遍有效性依赖于个体域个体的个数且仅依赖于个体域个体的数目。即在某个含k个元素的k个体域上普遍有效（或可满足），则在任一k个体域上也普遍有效（或可满足）。

  如果某公式在k个体域上普遍有效，则在k-1个体域上也普遍有效。

  如果某公式在k个体域上可满足，则在k+1个体域上也可满足。

  关键：从k个体域上的一个成真解释构造k+1个体域上的一个成真解释

  - 记k个体域为A，k+1个体域为B，可以构造从B到A的一个满射$\sigma: B \rightarrow A$，从而 $\forall x \in A, \exists y \in B\ s.t.\ \sigma(y) = x$
  - 公式在k个体域A上的一个成真解释为

$$I = \{\underbrace{P_1, P_2, \dots,}_{\text{谓词变项}} \quad \underbrace{f_1, f_2, \dots,}_{\text{函数符号}} \quad \underbrace{x_1, x_2, \dots}_{\text{自由个体变项}}\}$$

  - 则公式在k+1个体域B上也存在一个成真解释

$$I' = \{Q_1, Q_2, \dots, \quad g_1, g_2, \dots, \quad y_1, y_2, \dots\}$$

不做考试要求

其中 $\sigma(y_i) = x_i$

$$Q_i(y_1, \dots, y_j) = P_i\left(\sigma(y_1), \dots, \sigma(y_j)\right)$$

$$g_i(y_1, \dots, y_j) = f_i\left(\sigma(y_1), \dots, \sigma(y_j)\right)$$

有限域上普遍有效性/可满足性

- 有限域上一个公式的可满足性和普遍有效性依赖于个体域个体的个数且仅依赖于个体域个体的数目。即在某个含k个元素的k个体域上普遍有效(或可满足)，则在任一k个体域上也普遍有效(或可满足)。

  如果某公式在k个体域上普遍有效，则在k-1个体域上也普遍有效。

  如果某公式在k个体域上可满足，则在k+1个体域上也可满足。

  - 逆否命题为：如果某公式在k-1个体域上不是普遍有效的，则在k个体域上也不是普遍有效的。
  - 也即：如果某公式在k个体域上可以不满足的，则在k+1个体域上也是可以不满足的。
  - 在前面的证明中**从k个体域上的一个成真解释构造了一个k+1个体域上的成真解释，**应用同样的构造方法可以**从k个体域上的一个成假解释构造了一个k+1个体域上的成假解释**
  - 因此逆否命题正确，从而原命题也是正确的

不做考试要求

有限域上普遍有效性/可满足性

$(\forall x)(\exists y)(F(x) \land G(x,y))$ 在 $\{1,2\}$ 域上可满足吗？

给出解释I：

x	y	F	G
1	1	T	T
1	2	T	F
2	1	T	F
2	2	T	T

$$\{(F(1) \land G(1,1)) \lor (F(1) \land G(1,2))\} \land \{(F(2) \land G(2,1)) \lor (F(2) \land G(2,2))\}$$

$$= \{(T \land T) \lor (T \land F)\} \land \{(T \land F) \lor (T \land T)\}$$
$$= \{T \lor F\} \land \{F \lor T\} = T \lor T = T$$

在 $\{\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c}\}$ 域上可满足吗？能否从$\{1,2\}$ 域上I直接构造$\{\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c}\}$域上的解释$I'$？

不做考试要求

问题在于构造$\{\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c}\}$域上的谓词$F', G'$

因为个体域内元素变多，我们总可以构造$\{\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c}\}$到$\{1,2\}$的满射$\sigma$

如$\sigma(a) = 1, \sigma(b) = 2, \sigma(c) = 1$

有限域上普遍有效性/可满足性

解释I：

x	y	F	G
1	1	T	T
1	2	T	F
2	1	T	F
2	2	T	T

通过满射σ构造{a, b, c}域上的谓词F', G'

$$F'(x) = F\big(\sigma(x)\big)$$
$$G'(x,y) = G(\sigma(x), \sigma(y))$$

$$\sigma(a) = 1, \sigma(b) = 2, \sigma(c) = 1$$
$$F'(a) = F\big(\sigma(a)\big) = \mathrm{F}(1) = T$$
$$G'(a,c) = G\big(\sigma(a), \sigma(c)\big) = G(1{,}1) = T$$

x	y	F'	G'
a	a	T	T
a	b	T	F
a	c	T	T
b	a	T	F
b	b	T	T
b	c	T	F
c	a	T	T
c	b	T	F
c	c	T	T

$$(\forall x)(\exists y)(F'(x) \wedge G'(x,y))$$

$$\begin{aligned}
&\{\big(F'(a) \wedge G'(a,a)\big) \vee \big(F'(a) \wedge G'(a,b)\big) \vee \big(F'(a) \wedge G'(a,c)\big)\} \\
&\wedge \{(F'(b) \wedge G'(b,a)) \vee (F'(b) \wedge G'(b,b)) \vee (F'(b) \wedge G'(b,c))\} \\
&\wedge \{\big(F'(c) \wedge G'(c,a)\big) \vee \big(F'(c) \wedge G'(c,b)\big) \vee \big(F'(c) \wedge G'(c,c)\big)\}
\end{aligned}$$

$$= \begin{aligned}
&\{(F(1) \wedge G(1{,}1)) \vee (F(1) \wedge G(1{,}2)) \vee (F(1) \wedge G(1{,}1))\} \\
&\wedge \{(F(2) \wedge G(2{,}1)) \vee (F(2) \wedge G(2{,}2)) \vee (F(2) \wedge G(2{,}1))\} \\
&\wedge \{(F(1) \wedge G(1{,}1)) \vee (F(1) \wedge G(1{,}2)) \vee (F(1) \wedge G(1{,}1))\}
\end{aligned}$$

$$= \begin{aligned}
&\{(F(1) \wedge G(1{,}1)) \vee (F(1) \wedge G(1{,}2))\} \\
&\wedge \{(F(2) \wedge G(1{,}1)) \vee (F(2) \wedge G(1{,}2))\}
\end{aligned}$$

$$= T$$

灰色表示重复出现过

不做考试要求

问题：量词对蕴含的分配律

- 如何直观理解下面两个等值式？

$$(\forall x)(P(x) \to q) = (\exists x)P(x) \to q$$

$$(\exists x)(P(x) \to q) = (\forall x)P(x) \to q$$

个体域是联合国5个常任理事国的集合，$P(x)$：x投反对票；q：提案不通过

$(\forall x)(P(x) \to q)$：一票否决制（每个国家都有否决权）

$(\exists x)P(x) \to q$：一票否决制

问题：量词对蕴含的分配律

- 量词对蕴含的分配律中前两个式子有没有更具体的理解？

$P(x)$: x是斧头　q: 开门

$$(\forall x)(P(x) \to q) = (\exists x)P(x) \to q$$

斧头能开门　　找到一个斧头就能开门

个体域是所有的钥匙；$P(x)$: 拿到钥匙x　q: 开门

$$(\exists x)(P(x) \to q) = (\forall x)P(x) \to q$$

有一把正确的钥匙能开门　　拿到所有的钥匙能确保开门

问题：变元易名（约束变元的换名）

- 变元易名规则的使用方法
  - 目的是使每个变元性质唯一
  - 设A为一公式，将A中某量词辖域中某约束变项的所有出现及相应的约束变元，改成该量词辖域中未曾出现过的某个体变项符号，公式中其余部分不变，设所得公式为A'，则$A' \Leftrightarrow A$
  - 关键在于分析清楚每个量词的辖域
  - 例如$(\forall x)A(x) \vee B(x)$，可将$x$换为未出现的符号$t$，得到$(\forall t)A(t) \vee B(x)$进而得到$(\forall t)(A(t) \vee B(x))$

问题：变元易名（自由变元的代替）

设A为一公式，将A中某个自由出现的个体变项的所有出现用A中未曾出现过的个体变项符号代替，A中其余部分不变，设所得公式为A’，则A’ $\Leftrightarrow$ A.

例： $\forall xF(x, y, z) \to \exists yG(x, y, z)$

$\Leftrightarrow \forall x F(x, t, z) \to \exists yG(x, y, z)$

(变元易名) 自由的y用t代换

$\Leftrightarrow \forall x F(x, t, z) \to \exists yG(w, y, z)$

(变元易名) 自由的x用w代换

问题：前束范式

- 前束范式要求只有¬,∨,∧么, 为什么求前束范式的第一步是消去其他联结词
  - 前束范式本身没有这个要求
  - 去掉单蕴含和双蕴含，转化为仅含¬,∨,∧的形式，可以为后面进行归结法做准备
  - 单蕴含和双蕴含的分配律和变元易名比较复杂，书上也没有定义，尽量避免

问题：前束范式

- 75页例二化为前束范式的过程有没有更具体的理解？

$$(\exists x)(\forall y)(\exists u)P(x,y,u)\Rightarrow(\exists x)((\exists y)(\forall u)(P(x,y,u)\wedge\neg S(x,y))\vee(\forall z)S(x,z))$$

- x是一个常项，u是y的函数，因此$P(x,y,u)$ 可以看做是$P(y), S(x,y)$可以看做是$Q(y)$，则该公式可以化简为：

$$(\forall y)P(y)\Rightarrow((\exists y)(P(y)\wedge\neg Q(y))\vee(\forall z)Q(z))$$

- 该式子的证明在上节课的课件里有，不做考试要求。反复运用该式子，即可将全称量词逐一右移

- 该式子的直观理解：当$(\forall y)P(y)$ 成立时
  - 如果$(\exists y)\neg Q(y)$，则$(\exists y)(P(y)\wedge\neg Q(y))$成立
  - 否则，即$\neg((\exists y)\neg Q(y))$，也就是$(\forall z)Q(z)$

$P(y)$：y选课
$Q(y)$：y上课
所有人都选课了，则
- 有人选课但没来
- 所有人都来了

二者必居其一

如何求存在前束范式不做考试要求

问题：前束范式

- 如何理解仅含保留全称量词的Skolem标准形和原公式不等值，但在不可满足的意义下两者是一致的？
  - 以$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ 和 $(\forall x)P(x,f(x))$为例，在$\{1,2\}$域上
    - $(\forall x)(\exists y)P(x,y) = (P(1,1) \vee P(1,2)) \wedge (P(2,1) \vee P(2,2))$
    - $(\forall x)P\big(x,f(x)\big) = P(1,f(1)) \wedge P(2,f(2))$ 二者不等值
  - 在不可满足意义下是一致的。仍以$\{1,2\}$域分析为例
    - 如果 $(P(1,1) \vee P(1,2)) \wedge (P(2,1) \vee P(2,2))$不可满足，则一定有一项为假，假设$(P(1,1) \vee P(1,2))$为假，则$P(1,1)$和$P(1,2)$都为假，那么$P(1,f(1))$一定为假
    - 如果$P(1,f(1)) \wedge P(2,f(2))$不可满足，假设$P(1,f(1))$为假，因为$f(1)$可以在个体域里面任取，一定有$P(1,1)$和$P(1,2)$均为假，所以$(P(1,1) \vee P(1,2)) \wedge (P(2,1) \vee P(2,2))$一定为假，同理$P(2,f(2))$为假，也可以推出$(P(1,1) \vee P(1,2)) \wedge (P(2,1) \vee P(2,2))$一定为假
    - 综上两者在不可满足的情况下是一致的

其他问题

- 判断是否普遍有效有点懵
  - 在谓词逻辑中判定公式是否普遍有效是比较困难的
  - 牢记定义，在任一解释I下真值都为真才是普遍有效
  - 可借助有限域帮助理解

- 希望多讲一下证明部分

作业相关

- 自然语句的形式化
  - 如果前边是全称量词，特性谓词后边是蕴含联结词“→”；如果前边是存在量词，特性谓词后边是合取联结词“∧”　　　八股原则
  - 例如：任何金属都可溶在某种液体中。$P(x)$表示x是金属，$Q(y)$表示y是液体，$R(x,y)$表示x可溶在y

错误

$(\forall x)(\exists y)((P(x) \land Q(y)) \to R(x,y))$　　y不是液体时该式就成立

$(\forall x)(\exists y)(P(x) \to (Q(y) \to R(x,y)))$　　y不是液体时该式就成立

$(\forall x)(\exists y)(P(x) \land Q(y) \land R(x,y))$　　需要所有的x都是金属

正确 $(\forall x)\,(P(x) \to (\exists y)(Q(y) \land R(x,y)))$

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

5.1 否定型等值式

5.2 量词分配等值式

5.3 范式(全称量词的前束范式)

5.4 基本推理公式

5.5 推理演算

5.6 谓词逻辑的归结推理法

复习：否定型等值式

5-1-2 否定型等值式

$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$

$$\neg(\exists x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$$

$$(\forall x)P(x) = \neg(\exists x)\neg P(x)$$

$$(\exists x)P(x) = \neg(\forall x)\neg P(x)$$

复习：5.2 量词分配等值式

5-2-1 量词对析取词、合取词的分配律

$$(\forall x)(P(x) \vee q) = (\forall x)P(x) \vee q$$

$$(\exists x)(P(x) \vee q) = (\exists x)P(x) \vee q$$

$$(\forall x)(P(x) \wedge q) = (\forall x)P(x) \wedge q$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge q) = (\exists x)P(x) \wedge q$$

其中q 是命题变项，与个体变元 x 无关

复习：5.2 量词分配等值式

5-2-2 量词对蕴含词的分配律

$$(\forall x)(P(x) \to q) = (\exists x)P(x) \to q$$

$$(\exists x)(P(x) \to q) = (\forall x)P(x) \to q$$

$$(\forall x)(p \to Q(x)) = p \to (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)\big(p \to Q(x)\big) = p \to (\exists x)Q(x)$$

其中p, q是命题变项，与个体变元 x 无关

复习：5.2 量词分配等值式

5-2-3 全称量词∀对∧，存在量词∃对∨的分配律

$$(\forall x)(P(x) \land Q(x)) = (\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \lor Q(x)) = (\exists x)\ P(x) \lor (\exists x)Q(x)$$

用$\{1,2\}$域方法验证：

∀对∨不满足分配律， ∃对∧不满足分配律

但需注意：

$$(\forall x)\ P(x) \vee (\forall x) Q(x) \neq (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \neq (\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x)$$

而只满足

$$(\forall x)\ P(x) \vee (\forall x) Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x)$$

复习：置换规则

- 设Φ(A)是含公式A的公式，若A ⇔ B，则Φ(A) ⇔ Φ(B).
- 一阶逻辑中的置换规则与命题逻辑中的置换规则形式上完全相同，只是在这里A，B是一阶逻辑公式.

多选题 1分

Setting

关于前束范式下面正确的是

A 所有量词都位于该公式的最左边

B 所有量词前都不含否定词

C 量词的辖域都延伸到整个公式的末端

D 不含有量词

Submit

复习：5-3-1 前束范式

- 前束范式的一般形式为

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_nx_n)M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

- 其中$Q_i(1<=i<=n)$为 或 ，M为不含量词的公式，称作公式A的基式或母式。

(1) 所有量词都位于该公式的最左边；

(2) 所有量词前都不含否定词；

(3) 量词的辖域都延伸到整个公式的末端，则称A为前束范式。

复习：5-3-3 化前束范式的基本步骤

1. 消去联结词→, ↔ 。
2. 右移否定词¬（利用否定型等值式与摩根律）。
3. 量词左移（使用量词分配等值式）。
4. 变元易名（使用变元易名分配等值式）。

复习：前束范式存在定理

定理5.1 一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式。

证明：通过如下算法，可将公式化成等价的前束范式。

1. 利用量词转化公式，把否定符号深入到指导变元的后面。

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

2. 如果必要的话，将约束变量改名。

3. 利用量词辖域收缩、扩张等值式把量词移到全式的最前面，这样便得到与公式等价的前束范式。

说明

求前束范式的过程，就是制造量词辖域可以扩大的条件，进行量词辖域扩大。

任何公式的前束范式都是存在的，但一般说来，并不唯一。

利用一阶逻辑等值式以及两条变换规则（置换规则、变元易名）就可以求出与公式等值的前束范式，或所谓公式的前束范式。

SKOLEM 标准型：∀前束范式存在定理

一阶谓词逻辑的任一公式 A都可化成相应的∀前束范式（仅保留全称量词的前束范式，或称SKOLEM标准型），并且 A是**不可满足**的当且仅当其∀前束范式是不可满足的。

应注意，该定理是说**对于不可满足的公式**，它与其Skolem标准形是等值的，而一般的公式与其Skolem标准形并不是等值的。自然仅当A是不可满足的方使用Skolem标准形。

如$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$的Skolem标准形是$(\forall x)P(x, f(x))$。因为$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$的意思是对任一x，都有一个y使$P(x, y)$成立，那么这个y通常是依赖于x的，可视作x的某个函数f(x)。

在{1, 2}域上

$$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$$

$$= (P(1, 1)\vee P(1, 2))\wedge(P(2, 1)\vee P(2, 2))$$

$$(\forall x)P(x, f (x)) = P(1, f (1))\wedge P(2, f (2))$$

两者明显不等值，但在不可满足的意义下两者是一致的。

Skolem标准形$(\forall x)P(x, f(x))$中，把多项析取变成了一项, 于是$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$与$(\forall x)P(x, f(x))$不等值。

这种标准形，对使用归结法的定理证明来说是重要的。

多选题 1分

设置

关于∃前束范式和只保留全称量词的Skolem标准形，下面说法正确的是

A 对普遍有效的公式，它和其∃前束范式等值

B 对不可满足的公式，它和其∃前束范式等值

C 对普遍有效的公式，它和其只保留全称量词的Skolem标准形等值

D 对不可满足的公式，它和其只保留全称量词的Skolem标准形等值

提交

5.4　基本推理公式

5-4-1 一阶谓词逻辑的推理形式和推理公式

- 在一阶谓词逻辑中，从前提$A_1, A_2, \ldots, A_n$出发推出结论B的推理形式结构，依然采用如下的蕴涵式形式：
$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B$

- 若上式为永真式，则称推理正确，否则称推理不正确。于是，在一阶谓词逻辑中判断推理是否正确便归结为判断上式是否为永真式，并称满足永真式的蕴涵式为推理公式，用如下形式的符号表示：$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$

5-4-1 一阶谓词逻辑的推理形式和推理公式

- 命题逻辑中有关推理形式、重言蕴涵以及基本的推理公式，均可引入到谓词逻辑中

- 重点讨论

  在命题逻辑中无法处理或谓词逻辑中所特有的问题

单选题 1分

设置

所有的整数都是有理数，
所有的有理数都是实数，
所以，所有的整数都是实数.
引入谓词形式化
考虑 是否是正确的推理?

A 正确

B 错误

提交

例1

- 所有的整数都是有理数,
- 所有的有理数都是实数,
- 所以, 所有的整数都是实数.

引入谓词形式化

考虑 是否是正确的推理?

P(x): x 是整数　Q(x): x 是有理数　R(x): x 是实数

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \land (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$$

$$\rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$$

是否是正确的推理?

命题逻辑的局限性 & 引入谓词逻辑的必要性

$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$ （三段论）

例2：三段论

- P: 凡是人都要死，
- Q: 苏格拉底是人，
- R: 所以苏格拉底是要死的
- A(x): x 是人
- B(x): x 必死
- $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge A(苏格拉底) \rightarrow B(苏格拉底)$

是否是正确的推理？

例4

- 若某一个体a具有性质E, 则所有的个体x都具有性质E
- $E(a) \rightarrow (\forall \mathrm{x})E(\mathrm{x})$
- 显然这一推理形式是不正确的

多选题 1分

Setting

下面正确的推理公式为：

A $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$

B $(\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists \mathrm{x})\mathrm{Q}(\mathrm{x})$

C $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$

D $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

Submit

5-4-2 基本推理公式

$(1)(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$

$(2)(\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists \mathrm{x})\mathrm{Q}(\mathrm{x})$

$(3)(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$

$(4)(\forall \mathrm{x})\big(P(x) \to Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$

$(5)(\forall x)\big(P(x) \leftrightarrow Q(x)\big) \Rightarrow (\forall x)P(x) \leftrightarrow (\forall x)Q(x)$

5-4-2 基本推理公式

(6) $(\forall x)\big(P(x) \leftrightarrow Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)P(x) \leftrightarrow (\exists x)Q(x)$

(7) $(\forall x)\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big) \land (\forall x)\big(Q(x) \rightarrow R(x)\big) \Rightarrow$
$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(\mathrm{x}))$

(8) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \land P(a) \Rightarrow Q(a)$

(9) $(\forall \mathrm{x})(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y)$

(10) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$

设论域是某班学生,

$P(x)$: x是高才生, $Q(x)$: x是运动员

为使$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) = T$, 论域内学生分布只有两种可能:

1. 班上所有学生都是高才生, 又都是运动员;
2. 班上有的学生不是高才生, 但凡高才生必是运动员

以上两种情况下都有$(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x) = T$

$P(x)$: x是高才生, $Q(x)$: x是运动员

但上述推理式的逆(反向)在有些情形并不成立

如: 班上有的学生不是高才生 (1)

而且班上又有的高才生不是运动员 (2)

由(1)和蕴涵式性质, 有

$(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x) = T$

但由(2)有的高才生不是运动员

故 $P(a) \to Q(a) = F$

所以 $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) = F$

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$$

解释性说明

设在任一解释下, 有$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) = T$,

从而对属于论域的任一x,

$$P(x) \to Q(x) = T$$

上式必能保证 $(\forall x)P(x) = T$时有$(\forall x)Q(x) = T$

从而有 $(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x) = T$

(4) $\boldsymbol{(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x)}$

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x))$$

$$= (\forall x)(\neg P(x) \lor Q(x)) \to ((\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x))$$

$$= \neg\neg(\forall x)\big(\neg P(x) \lor Q(x)\big) \to \big((\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x)\big)$$

$$= \neg(\exists x)(P(x) \land \neg Q(x)) \to \big(\neg(\exists x)P(x) \lor (\exists x)Q(x)\big)$$

$$= (\exists x)(P(x) \land \neg Q(x)) \lor \neg(\exists x)P(x) \lor (\exists x)Q(x)$$

$$= (\exists x)((P(x) \land \neg Q(x)) \lor Q(x)) \lor \neg(\exists x)P(x)$$

$$= (\exists x)(P(x) \lor Q(x)) \lor \neg(\exists x)P(x)$$

$$= (\exists x)P(x) \lor (\exists x)Q(x) \lor \neg(\exists x)P(x)$$

$$= T$$

$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x)$

等价于证明$(\forall x)\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big) \rightarrow \big((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)\big) = T$

变形为$\Big((\forall x)\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big) \wedge (\exists x)P(x)\Big) \rightarrow (\exists x)Q(x) = T$

这就是三段论的形式：

大前提：　$(\forall x)\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)$

小前提：　$(\exists x)P(x)$

结论：　$(\exists x)Q(x)$

基本推理公式（命题逻辑温习）

Rule of Inference	Name/名称
$P \Rightarrow P \vee Q$	Addition/析取附加式
$P \wedge Q \Rightarrow P$	Simplification/合取化简式
P、$P \rightarrow Q \Rightarrow Q$	Modus ponens/分离式
$\neg Q$、$P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$	Modus tollens/拒取式
$\neg P$、$P \vee Q \Rightarrow Q$	Disjunctive syllogism/ 析取三段式
$P \rightarrow Q$、$Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$	Hypothetical syllogism/ 假言三段式

5.5 推理演算

内容回顾：2.8 基本的推理公式

证明 $A \Rightarrow B$ 的几种方法:

1. 证 $A \to B$ 是重言式
2. 证 $A \wedge \neg B$ 为矛盾式
3. 真值表法
4. 证 $\neg B \Rightarrow \neg A$ 即反证法
5. 解释法
6. ……

5-5-1 推理规则推理演算方法

- 在命题逻辑中，由引入几条推理规则，配合基本推理公式所进行的推理演算方法，可以容易地推广到谓词逻辑中。
- 由于在谓词逻辑中不能使用真值表法，又不存在判别$A \rightarrow B$是普遍有效的一般方法，从而使用推理规则的推理方法已成为谓词逻辑的基本推理演算方法。
- 所使用的推理规则除命题逻辑的推理演算中用到的六条基本推理规则外（参见2.9节），还包括四条有关量词的消去和引入规则。

多选题 1分

设置

下列哪些规则是之前第二章介绍过的推理规则?

A 前提引入规则

B 结论引入规则

C 置换规则

D 分离规则

提交

2.9 推理演算（温习）

主要的推理规则

（1）前提引入规则：推理过程中可随时引入前提

（2） 结论引入规则：中间结论可作为后续推理的前提

（3） 代入规则：仅限于重言式中的命题变项

（4） 置换规则：利用等值公式对部分公式进行置换

（5） 分离规则：由A及A→B成立，可将B分离出来

（6） 条件证明规则：$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$ 与$A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$ 等价

谓词逻辑推理规则

Rule of Inference	Name
$(\forall x)P(x) \Rightarrow P(c)$ if $c \in U$	UI / 全称举例
$P(c)$ for an arbitrary $c \in U \Rightarrow (\forall x)P(x)$	UG / 全称推广
$(\exists x)P(x) \Rightarrow P(c)$ for some $c \in U$	EI / 存在举例
$P(c)$ for some $c \in U \Rightarrow (\exists x)P(x)$	EG / 存在推广

5-5-2 全称量词消去规则（简记为UI规则或UI）

- $$\frac{(\forall x)P(x)}{\therefore P(y)}$$ 或 $$\frac{(\forall x)P(x)}{\therefore P(c)}$$
- 两式成立的条件是：

（1）第一式中，取代x的y应为任意的**不**在$P(x)$中约束出现的个体变项。

（2）第二式中，c为任意个体常项。

（3）用y或c去取代$P(x)$中自由出现的x时，必须在x自由出现的一切地方进行取代。

当$P(x)$中不再含有量词和其它变元时没有问题。

如果允许$P(x)$中含有量词和其它变元时，须限制y**不**在$P(x)$中约束出现。

把x换成y时，y不能被其他变量约束

如$(\forall x)P(x) = (\forall x)(\exists z)(x < z)$ 在实数域上成立

$$P(y) = (\exists z)(y < z)$$

若将y取为z，便有$(\exists z)(z < z)$, 变成矛盾式。

5-5-3 全称量词引入规则（简记为UG规则或UG）

- $$\frac{P(y)}{\therefore (\forall x)P(x)}$$

- 该式成立的条件是：
（1） 无论$P(y)$中自由出现的个体变项y取何值，$P(y)$应该均为真。
（2）取代自由出现的y的x也不能在$P(y)$中约束出现。

5-5-4 存在量词消去规则（简记为EI规则或EI）

- $$\frac{(\exists x)P(x)}{\therefore P(c)}$$

- 该式成立的条件是:
  (1) c是使P为真的特定的个体常项。
  (2) c不在$P(x)$中出现。
  (3) **$P(x)$中没有其它自由出现的个体变项**。

如 $(\exists x)P(x) = (\exists x)(x > y), y$是自由变项，这时推不出 $c > y$。

5-5-5 存在量词引入规则（简记为EG规则或EG）

- $$\frac{P(c)}{\therefore (\exists x)P(x)}$$

- 该式成立的条件是：

  （1） c是特定的个体常项。

  （2） 取代c的x不在$P(c)$中出现过。

5-5-6 使用推理规则的推理演算过程

- 首先将以自然语句表示的推理问题引入谓词加以形式化；
- 若不能直接使用基本的推理公式则消去量词；
- 在无量词的条件下使用规则和公式推理；
- 最后再引入量词以求得结论。

推理演算举例

P81 例5:

1. 有的病人喜欢所有的医生,
2. 没有病人喜欢庸医,
3. 所以没有医生是庸医。

(1) 形式化

$P(x)$ 表示x是病人， $Q(x)$ 表示x是庸医，
$D(x)$ 表示x是医生， $L(x,y)$ 表示x喜欢y。

1. $(\exists x)\Big(P(x) \land (\forall y)\big(D(y) \to L(x,y)\big)\Big)$

2. $(\forall x)\Big(P(x) \to (\forall y)\big(Q(y) \to \neg L(x,y)\big)\Big)$ or

   $\neg(\exists x)(P(x) \land (\exists y)(Q(y) \land L(x,y)))$

3. $\neg(\exists x)(D(x) \land Q(x))$ or
   $(\forall x)(D(x) \to \neg Q(x))$

$(\exists x)\big(P(x) \land (\forall y)(D(y) \to L(x,y))\big)$

$(\forall x)\big(P(x) \to (\forall y)(Q(y) \to \neg L(x,y))\big)$

$(\forall x)(D(x) \to \neg Q(x))$

(2) 证明

①	$(\exists x)\big(P(x) \land (\forall y)(D(y) \to L(x,y))\big)$	前提
②	$P(c) \land (\forall y)(D(y) \to L(c,y))$	存在量词消去
③	$(\forall x)\big(P(x) \to (\forall y)(Q(y) \to \neg L(x,y))\big)$	前提
④	$P(c) \to (\forall y)(Q(y) \to \neg L(c,y))$	全称量词消去
⑤	$P(c)$	②
⑥	$(\forall y)(D(y) \to L(c,y))$	②
⑦	$D(y) \to L(c,y)$	全称量词消去
⑧	$(\forall y)(Q(y) \to \neg L(c,y))$	④⑤分离
⑨	$Q(y) \to \neg L(c,y)$	全称量词消去
⑩	$L(c,y) \to \neg Q(y)$	⑨置换
⑪	$D(y) \to \neg Q(y)$	⑦⑩三段论
⑫	$(\forall y)(D(y) \to \neg Q(y))$	全称量词引入
⑬	$(\forall x)(D(x) \to \neg Q(x))$	⑫置换

量词消去：先存在再任意

证明举例补充

前提:任何人如果他喜欢步行则他就不喜欢乘汽车；

每个人喜欢乘汽车或者喜欢骑自行车；

有的人不喜欢骑自行车。

结论：因此有的人不喜欢步行。

设定：W(x): x喜欢步行，B(x):x喜欢乘汽车

K(x)：x喜欢骑自行车；

形式化如下：

$(\forall x)(W(x)\rightarrow \neg B(x))$；$(\forall x)(B(x)\vee K(x))$；$(\exists x)\neg K(x)$；

结论：$(\exists x)\neg W(x)$

$(\forall x)(W(x)\rightarrow \neg B(x))$； $(\forall x)(B(x)\vee K(x))$； $(\exists x)\neg K(x)$；
结论： $(\exists x)\neg W(x)$

1. $(\exists x)\neg K(x)$	(前提引入)
2. $\neg K(c)$	(存在举例)
3. $(\forall x)(B(x)\vee K(x))$	(前提引入)
4. $B(c)\vee K(c)$	(全称举例)
5. $B(c)$	（2、4）
6. $(\forall x)(W(x)\rightarrow\neg B(x))$	(前提引入)
7. $W(c)\rightarrow\neg B(c)$	(全称举例)
8. $B(c)\rightarrow\neg W(c)$	(置换)
9. $\neg W(c)$	5、8分离
10. $(\exists x)\neg W(x)$	(存在推广)

注意事项

1. $(\exists x)\ \neg K(x)$ (前提引入)
2. $\neg K(c)$ (存在举例)
3. $(\forall x)(B(x) \vee K(x))$ (前提引入)
4. $B(c) \vee K(c)$ (存在推广)

- $\exists x$和$\forall x$ 换成一个特指的时候，一定要先将$\exists x$变成c，然后才是$\forall x$

下列推理是否正确?

(1)$(\forall x)(\exists y)(x > y)$	前提
(2)$(\exists y)(z > y)$	全称量词消去
(3) $z > b$	存在量词消去
(4)$(\forall z)(z > b)$	全称量词引入
(5) $b > b$	全称量词消去
(6)$(\forall x)(x > x)$	全称量词引入

A 是

B 否

提交

例题：步步错

- 分析下列推理的正确性：

(1)	$(\forall x)(\exists y)(x > y)$	前提	
(2)	$(\exists y)(z > y)$	全称量词消去	y依赖于x
(3)	$z > b$	存在量词消去	b依赖于z
(4)	$(\forall z)(z > b)$	全称量词引入	不成立！
(5)	$b > b$	全称量词消去	
(6)	$(\forall x)(x > x)$	全称量词引入	个体常项不能用全称量词量化

该式成立的条件是：

（1）无论$P(y)$中自由出现的个体变项y取何值，$P(y)$应该均为真。

（2）取代自由出现的y的x也不能在$P(y)$中约束出现。

例题

- 在自然推理系统$N_{\mathcal{L}}$中，构造下面推理的证明:（个体域为实数集合）.
  - 不存在能表示成分数的无理数. 有理数都能表示成分数. 因此，有理数都不是无理数.

证明：设$F(x)$：x为无理数

$G(x)$：x为有理数

$H(x)$：x能表示成分数

前提：$\neg(\exists x)\big(F(x) \wedge H(x)\big)$，$(\forall x)\big(G(x) \rightarrow H(x)\big)$

结论：$(\forall x)\big(G(x) \rightarrow \neg F(x)\big)$

例题证明

(1) $\neg(\exists x)\big(F(x) \wedge H(x)\big)$	前提引入
(2) $(\forall x)\big(\neg F(x) \vee \neg H(x)\big)$	(1) 置换
(3) $(\forall x)\big(F(x) \to \neg H(x)\big)$	(2) 置换
(4) $F(x) \to \neg H(x)$	(3) 全称量词消去
(5) $(\forall x)\big(G(x) \to H(x)\big)$	前提引入
(6) $G(x) \to H(x)$	(5) 全称量词消去
(7) $H(x) \to \neg F(x)$	(4) 置换
(8) $G(x) \to \neg F(x)$	(6) (7) 三段论
(9) $(\forall x)\big(G(x) \to \neg F(x)\big)$	(8) 全称量词引入

前提：$\neg(\exists x)\big(F(x) \wedge H(x)\big)$，$(\forall x)\big(G(x) \to H(x)\big)$

结论：$(\forall x)\big(G(x) \to \neg F(x)\big)$

5.6 谓词逻辑的归结推理法

5-6-1 谓词逻辑的归结推理法

- 出发点：使用推理规则的证明技巧性较强，不便于机器实现。
- 命题逻辑中的归结推理法可以推广到谓词逻辑中。证明过程与命题逻辑相似。
- 所不同的是需对谓词逻辑中的量词和变元进行特殊的处理。

2.10 归结法

- 归结法步骤：

1. 从$A\wedge\neg B$ 出发（欲证$A \Rightarrow B$，等价于证 $A\wedge\neg B$ 是矛盾式）

2. 建立子句集S，将$A\wedge\neg B$ 化成合取范式：

   $C_1\wedge C_2\wedge\ldots\wedge C_n$

   其中C_i 为析取式。由诸C_i 构成子句集

   $S = \{ C_1, C_2, \ldots, C_n \}$

3. 对S 中的子句作归结（消互补对），归结结果（归结式）仍放入S 中。重复此步。

4. 直至归结出矛盾式（□）。

5-6-2 归结推理法步骤

1. 欲证$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$ 是定理，等价于证 $G = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg B$.是矛盾式。

2. 将G化为前束范式。进而化为SKOLEM标准型，消去存在量词，得到仅含全称量词的前束范式$G*$

由于全称量词的前束范式$G*$保持原式G不可满足的特性，故G与$G*$在不可满足的意义下是一致的。

3. 略去$G*$中的全称量词，$G*$中的合取词∧以“，”表示，便得到$G*$的子句集S。实用中可分别求出诸A_i与$\neg B$的子句集。

4. 对S作归结。直至归结出空子句□。

归结推理法说明

- 设C_1, C_2是两个无共同变元的子句，如下式

$$C_1 = P(x) \vee Q(x)$$
$$C_2 = \neg P(a) \vee R(y)$$
$$R(C_1, C_2) = Q(a) \vee R(y)$$

- $P(x)$与$\neg P(a)$在置换$\{x/a\}$下将变元 x 换成 a，构成互补对可进行归结。得到归结式$R(C_1,C_2)$。

归结推理法举例

例2：前面的例子用归结法证明如下。

$$A_1 = (\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \rightarrow L(x,y)))$$

$$A_2 = (\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(y) \rightarrow \neg L(x,y)))$$

$$B \ \ = (\forall x)\big(D(x) \rightarrow \neg Q(x)\big)$$

求证 $A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$

1. 有的病人喜欢所有的医生,
2. 没有病人喜欢庸医,
3. 所以没有医生是庸医。

$P(x)$ 表示x是病人， $Q(x)$ 表示x是庸医，

$D(x)$ 表示x是医生， $L(x,y)$ 表示x喜欢y。

归结推理法举例

1. 等价于证明 $A_1 \wedge A_2 \wedge \neg B = \emptyset$ 是矛盾式
2. 求出相应的Skolem标准型， G^*分别是

$$G^*_{A_1} = (\forall y)(P(a) \wedge (\neg D(y) \vee L(a,y)))$$
$$G^*_{A_2} = (\forall \mathrm{x})(\forall y(\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x,y))$$
$$G^*_{\neg B} = D(b) \wedge Q(b)$$

3. G的子句集 $S = S_{A_1} \cup S_{A_2} \cup S_{\neg B}$

$$S_{A_1} = \{P(a), \neg D(y) \vee L(a,y)\}$$
$$S_{A_2} = \{\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x,y)\}$$
$$S_{\neg B} = \{D(b), Q(b)\}$$

$$A_1 = (\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \to L(x,y)))$$
$$A_2 = (\forall x)\Big(P(x) \to (\forall y)\big(Q(y) \to \neg L(x,y)\big)\Big)$$
$$B = (\forall x)(D(x) \to \neg Q(x))$$

归结推理法举例

4. 建立归结过程

$S_{A_1} = \{P(a), \neg D(y) \vee L(a,y)\}$

$S_{A_2} = \{\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x,y)\}$

$S_{\neg B} = \{D(b), Q(b)\}$

(1) $P(a)$

(2) $\neg D(y) \vee L(a,y)$

(3) $\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x,y)$

(4) $D(b)$

(5) $Q(b)$

(6) $L(a,b)$ (2)(4) 归结

(7) $\neg Q(y) \vee \neg L(a,y)$ (1)(3) 归结

(8) $\neg L(a,b)$ (5)(7) 归结

(9) $\square$ (6)(8) 归结

第五章小结

本章讨论了谓词逻辑的等值和推理演算。主要内容可概括为：

- 否定型等值式的不同形式与证明方法；
- 量词分配等值式的不同形式与证明方法；
- 前束范式的定义与Skolem标准形的构成，求全称量词的前束范式的推演方法；
- 基本的推理公式，四条推理规则；
- 使用归结法证明推理公式的步骤和方法。

前五章经典/易错习题讲解

- 第一章　命题逻辑的基本概念
  - 命题与悖论、命题形式化、波兰式与逆波兰式
- 第二章：命题逻辑的等值和推理演算
  - 等值证明/蕴涵、范式、推理演算
- 第三章：命题逻辑的公理化
  - 罗素公理系统里的定理推演
- 第四章：谓词逻辑的基本概念
  - 命题形式化、普遍有效/可满足与不可满足
- 第五章　谓词逻辑的等值和推理演算
  - 等值证明/蕴涵、求前束范式、推理演算

悖 论（Paradox）

习题1.1. 判断下列语句是否是命题。

（7） 这句话是错的。

悖论是自相矛盾的陈述（statement）。即如果承认这个陈述成立，就可推出它的否定陈述成立；反之，如果承认这个陈述的否定陈述成立，又可 推出这个陈述成立。

数理逻辑中将类似上述 悖论形式的陈述句排除在命题之外。

习题1.5. 形式化下列自然语句：

（7）如果水是清的，那么或者张三能见到池底或者他是个近视眼。

令P表示“水是清的”，Q表示“张三能见到池底”，R表示“张三是个近视眼”。那么

$$P \rightarrow (Q \bar{\vee} R)$$

注意或和异或是有区别的。

回顾：析取及异或联结词举例

（1）张明喜欢学数学或软件工程。

（2）张明报考的第一志愿（唯一）只选择数学专业或软件工程。

（3）今晚我在家里看电视或去体育场看球赛

若天不下雨，我就上街；否则在家。

设 P：天下雨。Q ：我上街。R：我在家。

A $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$

B $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge \neg(Q \wedge R)$

C $(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \bar{\vee} (P \wedge \neg Q \wedge R)$

D $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \wedge R)$

Submit

若天不下雨，我就上街；否则在家。

解：

设 P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。

该命题可写成：$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)$.

注意：中间的联结词一定是“∧”，而不是“∨”，也不是“$\bar{\vee}$”。

因为原命题表示：“天不下雨时我做什么，天下雨我又做什么”的两种作法，其中有一种作法是假的，则命题的真值为假，所以中间的联结词一定是“∧”。

解法是否正确？

问题：若天不下雨，我就上街；否则在家

设 P：天下雨。Q：我上街。R：我在家

P Q R	$\neg P$	$\neg P \rightarrow Q$	$P \rightarrow R$	$(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$
0 0 0	1	0	1	0
0 0 1	1	0	1	0
0 1 0	1	1	1	1
~~0 1 1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
1 0 0	0	1	0	0
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	0	1	0	0
~~1 1 1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~

例6：若天不下雨，我就上街；否则在家

P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。

该命题可写成： $(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)\wedge \neg(Q\wedge R)$

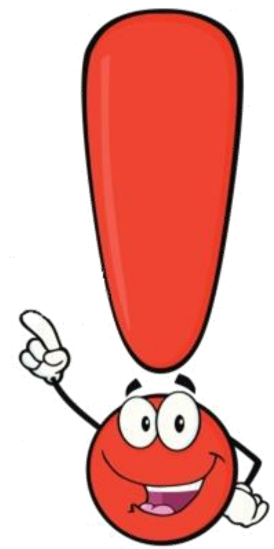
还可以形式化为： $(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\bar{\vee}(P\wedge\neg Q\wedge R)$

还可以形式化为： $(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)$

两项不会同时为1

p	q	$p\vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p\bar{\vee}q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



问题：若天不下雨，我就上街；否则在家

P Q R	P	$\neg P \to Q$	$P \to R$	$(\neg P \to Q) \wedge (P \to R) \neg (Q \wedge R)$
0 0 0	1	0	1	0
0 0 1	1	0	1	0
0 1 0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	0
1 0 0	0	1	0	0
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	0	1	0	0
1 1 1	0	1	1	0

波兰式和逆波兰式

习题1.6. 将下列公式写成波兰式和逆波兰式。

（3） $\neg\neg P \vee (W \wedge R) \vee \neg Q$

注意“¬”在波兰式和逆波兰式中的位置。

波兰式： $\vee \vee \neg\neg P \wedge W R \neg Q$

逆波兰式：$P \neg\neg W R \wedge \vee Q \neg \vee$

波兰式和逆波兰式

求波兰式、逆波兰式时需要注意**运算顺序**

根据约定 $A \vee B \vee C$ 的计算顺序为$((A \vee B) \vee C)$

波兰式：$\vee\vee ABC$
逆波兰式：$AB \vee C \vee$

若为$(A \vee (B \vee C))$

波兰式：$\vee A \vee BC$
逆波兰式：$ABC \vee\vee$

是否还有其他转换方式？

例：　$P \vee ((Q \vee R) \wedge S)$

Step 1：对每个联结词都加上括号

$(P \vee ((Q \vee R) \wedge S))$

Step 2：将每个联结词挪到对应括号的前面/后面，擦掉括号

前缀式(波兰式)

后缀式(逆波兰式)

推理式证明

- 永真法、永假法、解释法

$(P\wedge Q)\Rightarrow(P\to Q)$

① $A\to B$ 永真法

$$(P\wedge Q)\to(P\to Q)$$

$$=\neg(P\wedge Q)\vee(\neg P\vee Q)=(\neg P\vee\neg Q)\vee(\neg P\vee Q)$$

$$=\neg P\vee\neg Q\vee\neg P\vee Q=\mathrm{T}$$

② $A\wedge\neg B$ 永假法

$$(P\wedge Q)\wedge\neg(P\to Q)=(P\wedge Q)\wedge(P\wedge\neg Q)=P\wedge Q\wedge P\wedge\neg Q=\mathrm{F}$$

③ 解释法

设 $P\wedge Q=\mathrm{T}$,从而有 $P=\mathrm{T},Q=\mathrm{T}$

习题2.7. 判断下列推理式是否正确?

$$(9)\ (P\wedge Q)\to R \Rightarrow (P\to R)\wedge(Q\to R)$$

$$(P\wedge Q\to R)\to((P\to R)\wedge(Q\to R)) = ((P\wedge \overset{T}{Q})\to R)\to((P\underset{T}{\vee}\overset{F}{Q})\to \underset{F}{R})$$

当 $P=\mathrm{T}, Q=\mathrm{F}, R=\mathrm{F}$，有 $(P\wedge Q)\to R=\mathrm{T}$，$(P\vee Q)\to R=\mathrm{F}$.

因此，上式不永真.

$$(15)\ (P\to Q)\wedge(R\to Q)\wedge(S\to Q)\Rightarrow(P\wedge R\wedge\neg S\to Q)$$

$$((P\to Q)\wedge(R\to Q)\wedge(S\to Q))\to(P\wedge R\wedge\neg S\to Q)$$
$$=((P\vee R\vee S)\to Q)\to(P\wedge R\wedge\neg S\to Q)$$
$$=(\neg(P\vee R\vee S)\vee Q)\to(\neg(P\wedge R\wedge\neg S)\vee Q)$$
$$=((P\vee R\vee S)\wedge\neg Q)\vee\neg P\vee\neg R\vee S\vee Q$$
$$=(P\vee R\vee S\vee Q)\vee\neg P\vee\neg R\vee S$$
$$=\mathrm{T}$$

永真法 永假法 解释法。根据题目判断哪个容易（一般来说，合取多的话考虑解释法）

主观题 10分

设置

(15) $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \wedge (S \rightarrow Q) \Rightarrow (P \wedge R \wedge \neg S \rightarrow Q)$

用解释法证明

作答

$(P \to Q) \land (R \to Q) \land (S \to Q) \Rightarrow P \land R \land \neg S \to Q$

- 设前提$(P \to Q) \land (R \to Q) \land (S \to Q)$ 为真
  - 当$Q = T$时， $(P \to Q)$、 $(R \to Q)$、 $(S \to Q)$ 均为真，前提自然为真。此时结论$P \land R \land \neg S \to Q$ 也为真，推理成立
  - 当$Q = F$时，要使前提为真，只能$P = F$，$R = F$，$S = F$，此时结论$P \land R \land \neg S \to Q$也为真，推理成立
- 综上，当前提$(P \to Q) \land (R \to Q) \land (S \to Q)$为真时，结论$P \land R \land \neg S \to Q$为真
- 故蕴含式$(P \to Q) \land (R \to Q) \land (S \to Q) \Rightarrow P \land R \land \neg S \to Q$ 成立

求范式

5. 给出下列各公式的合取范式、析取范式、主合取范式和主析取范式，并给出所有使公式为真的解释.

(1) $P \vee \neg P$

合取范式：$P \vee \neg P$

析取范式：$P \vee \neg P$

主合取范式：空

主析取范式：$P \vee \neg P = \vee_{0,1}$

(3) $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$

合取范式：

$$
\begin{aligned}
(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) &= \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg\neg Q) \\
&= (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q) \\
&= P \vee Q
\end{aligned}
$$

析取范式：

$$
\begin{aligned}
(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) &= \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \\
&= (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)
\end{aligned}
$$

主合取范式：$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) = P \vee Q = \wedge_3$

主析取范式：

$$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) = \vee_{1,2,3}$$

复习极小项和极大项的关系

- $\neg m_i = M_{(2^n-1-i)} = M_{(i)补}$ $\neg M_i = m_{(2^n-1-i)} = m_{(i)补}$

公式	名称
$\neg P_1 \wedge \neg P_2$	m_0
$\neg P_1 \wedge P_2$	m_1
$P_1 \wedge \neg P_2$	m_2
$P_1 \wedge P_2$	m_3

公式	名称
$\neg P_1 \vee \neg P_2$	M_0
$\neg P_1 \vee P_2$	M_1
$P_1 \vee \neg P_2$	M_2
$P_1 \vee P_2$	M_3

P_1	P_2	极小项	名称	极大项	名称
0	0	$\neg P_1 \wedge \neg P_2$	m_0	$P_1 \vee P_2$	M_3
0	1	$\neg P_1 \wedge P_2$	m_1	$P_1 \vee \neg P_2$	M_2
1	0	$P_1 \wedge \neg P_2$	m_2	$\neg P_1 \vee P_2$	M_1
1	1	$P_1 \wedge P_2$	m_3	$\neg P_1 \vee \neg P_2$	M_0

$\neg m_0 = M_{(2^2-1-0)} = M_3$

复习：主析取范式与主合取范式转换

- 主范式之间的转换

令 $A = \vee m_{il}$　则 $\neg A = \vee m_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ldots,ik\})}$

$A = \wedge M_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ldots,ik\})补} = \wedge_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ldots,ik\}补)}$

令 $A = \wedge M_{il}$ 则 $\neg A = \wedge M_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ldots,ik\})}$

$A = \vee_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ldots,ik\})补} = \vee_{(\{0,1,\ldots,2^n-1\}-\{i1,i2,\ldots,ik\}补)}$

A是由k个极大项的合取来表示，剩余2^n-k极大项*的*合取是$\neg A$

$\neg m_i = M_{(2^n-1-i)} = M_{(i)补}$　　$\neg M_i = m_{(2^n-1-i)} = m_{(i)补}$

11. 若 $P_i \to Q_i (i=1,\cdots,n)$ 为真.

$P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$ 和 $\neg(Q_i \wedge Q_j)$ $(i \neq j)$ 也为真.

试证明必有 $Q_i \to P_i (i=1,\cdots,n)$ 为真.

先将 $(P_i \to Q_i|_{i=1,\cdots,n}) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n) \wedge (\neg(Q_i \wedge Q_j)|_{i\neq j}) \wedge (\neg(Q_i \to P_i)|_{i=1,\cdots,n})$ 化为合取范式得,

$$(\neg P_i \vee Q_i) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n) \wedge (\neg Q_i \vee \neg Q_j) \wedge (Q_i \wedge \neg P_i)$$
$$i = 1,\cdots,n, i \neq j$$

建立子句集

$S = \{\neg P_i \vee Q_i, P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n, \neg Q_i \vee \neg Q_j, Q_i, \neg P_i\}$ $i = 1,\cdots,n,\ i \neq j$

归结过程:

① $\neg P_i \vee Q_i$

② $P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$

③ $\neg Q_i \vee \neg Q_j$

④ Q_i

⑤ $\neg P_i$

⑥ $\neg P_i \vee \neg Q_j$ ①③归结

⑦ $P_1 \vee \cdots \vee P_{i-1} \vee P_{i+1} \vee \cdots \vee P_n \vee \neg Q_j$ ②⑥归结

⑧ $P_j \vee \neg Q_j$ 重复上述操作

⑨ P_i ④⑧归结

⑩ $\square$ ⑤⑨归结

特别多的小前提适合归结法

习题3.1. 依公理系统证明

(3) $\vdash P \to (Q \vee P)$

先想想之前是怎么证的？$P \to P \vee Q; P \vee Q \to Q \vee P$

照着将三段论的证明框架先写出来

① $\vdash (Q \to R) \to (P \to Q) \to (P \to R)$ 定理 3.2.1

② $\vdash ((P \vee Q) \to (Q \vee P)) \to (P \to (P \vee Q)) \to (P \to (Q \vee P))$

① 代入 $\frac{Q}{P \vee Q}, \frac{R}{Q \vee P}$

补上其他过程

③ $\vdash (P \vee Q) \to (Q \vee P)$ 公理 3

④ $\vdash (P \to (P \vee Q)) \to (P \to (Q \vee P))$ ②③分离

⑤ $\vdash P \to (P \vee Q)$ 公理 2

⑥ $\vdash P \to (Q \vee P)$ ④⑤分离

习题4.5.

(5) 过平面上的两个点，有且仅有一条直线通过。

(5) 若以 $P(x)$ 表示 x 是平面上的点，$Q(x,y,u)$ 表示 u 是过 x 和 y 的直线，$EP(x,y)$ 表示 x 和 y 为同一点，$EQ(u,v)$ 表示 u 和 v 为同一条直线，那么这句话可以符号化为

$$(\forall x)(\forall y)\begin{pmatrix} P(x)\wedge P(y)\wedge\neg EP(x,y) \\ \rightarrow(\exists u)(Q(x,y,u)\wedge(\forall v)(Q(x,y,v)\rightarrow EQ(u,v))) \end{pmatrix}.$$

(8) 只有一个北京。

(8) 若以 $P(x)$ 表示 x 是北京，$E(x,y)$ 表示 x 和 y 是同一城市，那么这句话可以符号化为 $(\exists x)(P(x)\wedge(\forall y)(P(y)\rightarrow E(x,y)))$.

没有特殊说明时，论域为总论域，需要添加特性谓词

习题4.8.

8. 判断下列公式是普遍有效的，不可满足的还是可满足的？

普遍有效 (1) $(\forall x)P(x) \rightarrow P(y)$

普遍有效 (2) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x))$

可满足 (3) $(\forall x)P(x)$

不可满足 (4) $(\exists x)(P(x) \wedge \neg P(x))$

可满足 (5) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

普遍有效 (6) $(\forall x)(P(x) \vee \neg P(x))$

可满足 (7) $((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)) \rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$

- 等值式和推理式都是普遍有效的谓词公式。

习题4.9.

9. 给出一个公式，使其在$\{1, 2\}$域上是可满足的，而在$\{1\}$域上是不可满足的.

(1) $(\exists x)(\exists y)P(x,y)$，其中 $P(x,y)$表示 $x<y$.

(2) $(\exists x)P(x)\wedge(\exists y)\neg P(y)$，~~其中 $P(x)$表示 $x>1$~~.

(3) $(\exists x)P(x)$，其中 $P(x)$表示 $x>1$.

这些答案对吗？

什么是谓词逻辑公式中的不可满足？

公式的普遍有效性和不可满足

设A为一个谓词公式，若A在任何解释下真值均为真，则称A为普遍有效的公式。

设A为一个谓词公式，若A在任何解释下真值均为假，则称A为不可满足的公式。

例: $(\exists x)(P(x)\wedge\neg P(x))$　　　$(\forall x)P(x) \wedge (\exists y)\neg P(y)$

解释一下什么叫"任何解释？"

谓词又可看作是由给定的个体域到集合{T, F}上的一个映射。

给定的个体域D：**自由**个体变项**a**，谓词变项**P**，函数f

解释

- 给定非空个体域D，一个解释I由下面部分构成
  - 给每个自由个体变项符号指定一个D中的元素
  - 给每个谓词变项符号指定一个D上的谓词
  - 给每个函数符号指定一个D上的函数
- 例如，在个体域ℕ上，有公式$(\forall x)F(g(x,z),x)$
- 给定解释I
  - 自由个体变项：$z=0$
  - 函数$g(x,a)=x*a$
  - 谓词$F(x,y)$为$x=y$
- 在解释I下，公式被解释为$(\forall x)(x*0=x)$，它是一个假命题

习题4.9.

9. 给出一个公式，使其在$\{1, 2\}$域上是可满足的，而在$\{1\}$域上是不可满足的.

~~(1) $(\exists x)(\exists y)P(x,y)$，其中 $P(x,y)$表示 $x<y$.~~

~~(2) $(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)\neg P(x)$，其中 $P(x)$表示 $x>1$.~~

~~(3) $(\exists x)P(x)$，其中 $P(x)$表示 $x>1$.~~

除非你显式地说明了P是**谓词常项**而非变项，否则不清楚其是**定义**还是**一个解释**

当然，更好的做法自然是构造出一个即使是谓词变项也满足题意的解答，例如

$$\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, \neg P(x)$$

$$\forall x \exists y\, \Big(\big(P(x) \wedge \neg P(y)\big) \vee \big(P(y) \wedge \neg P(x)\big)\Big)$$

谓词逻辑的等值和推理演算

除了之前已经学过的规则外，谓词逻辑里多了下列公式

$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$
$$\neg(\exists x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$$
$$(\forall x)P(x) = \neg(\exists x)\neg P(x)$$
$$(\exists x)P(x) = \neg(\forall x)\neg P(x)$$

$$(\forall x)(P(x) \vee q) = (\forall x)P(x) \vee q$$
$$(\exists x)(P(x) \vee q) = (\exists x)P(x) \vee q$$
$$(\forall x)(P(x) \wedge q) = (\forall x)P(x) \wedge q$$
$$(\exists x)(P(x) \wedge q) = (\exists x)P(x) \wedge q$$

$$(\forall x)(P(x) \to q) = (\exists x)P(x) \to q$$
$$(\exists x)(P(x) \to q) = (\forall x)P(x) \to q$$
$$(\forall x)(p \to Q(x)) = p \to (\forall x)Q(x)$$
$$(\exists x)(p \to Q(x)) = p \to (\exists x)Q(x)$$

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$
$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) = (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$
$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$
$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

谓词逻辑的等值和推理演算

1. 证明下列等值式和蕴涵式

(5) $(\forall x)P(x)\to q = (\exists x)(P(x)\to q)$

$$(\forall x)\ P(x) \to q = \neg(\forall x)P(x) \vee q = (\exists x)(\neg P(x) \vee q) = (\exists x)(P(x) \to q)$$

(7) $(\exists x)P(x)\to(\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x)\to Q(x))$

$$(\exists x)P(x) \to (\forall x)Q(x) = \neg(\exists x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) = \forall(x)\neg P(x) \vee \forall(x)Q(x)$$

$$\Rightarrow \forall(x)\big(\neg P(x) \vee Q(x)\big) = (\forall x)(P(x) \to Q(x))$$

(8) $(\exists x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x) \Rightarrow (\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$

$$(\exists x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) = (\exists x)P(x) \wedge (\forall y)Q(y)$$

$$= (\exists x)\big(P(x) \wedge (\forall y)Q(y)\big) \Rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$$

$$(\forall x)\ P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn