离散数学(1)
Discrete Mathematics

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

问题：公理系统

- 罗素公理系统中有没有什么证明的技巧？
  - 首先还是要吃透课本和课件中定理、例题的证明过程，其中的很多思路是非常值得借鉴的，可以参考**王宪钧先生写的《数理逻辑引论》**里面有几十个定理都是很好的例子，可以多记一些定理的证明思路辅助证明。
  - 看要证的式子和哪些已有的公理定理长得比较像，想办法找相似的几个定理套过去。比如定理3.2.1的形式和公理四很像，就对比一下两者看看差别在哪，能否变过去，拼拼凑凑慢慢推；或者可以从要证的结论出发反推，观察形式，看看用哪些定理可能可以得到最后的形式再正向推导证明
    - 公理4： $\vdash ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R)))$
    - 定理3.2.1： $\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
  - 整理一些常用思路：公理定理代换到三段论里面加分离，逆否、三段论、De Morgan等等

感觉这个罗素公理系统好繁琐啊，实际用来证明感觉有很大一部分猜的成分😅
罗素公理系统证明有时候一眼看不出来，需要联想证明，有时还需要尝试的运气……
公理不知道怎么使，证明定理没思路
公理系统证明时要用到的公式太多了，不知道应该用哪条好；公理系统太抽象了，只知道跟着做，不知道为什么这么，有没有帮助理解的例子。
在进行罗素公理系统的定理推演时，有什么技巧吗？总是想很久试了很多途径都没办法找到合理的思路

定理证明的思路

1. **找出合适的公理或已证的定理；**
2. **选择适当的代入做符号变换；**
3. **设法将$\boldsymbol{A \to B}$ 的结论部分变成欲证的内容。**

例：从三段论（定理3.2.1）出发，利用公理、定义和已经证明的定理，通过分离规则得出欲证内容

定理3.2.6和3.27是很好的例子

- **代入规则**

  如果 $\vdash A$，那么 $\vdash A\frac{\pi}{B}$（将合式公式A中出现的符号π 处处都代以合式公式B）。

- **分离规则**

  如果 $\vdash A$，$\vdash A \to B$，那么 $\vdash B$。

- **置换规则**

  定义的左右两边可互相替换。设公式A，替换后为B，则如果 $\vdash A$，那么 $\vdash B$。

定理3.2.4 $\vdash P \vee \neg P$

证明：

(1) $\vdash (P \vee Q) \to (Q \vee P)$	公理3
(2) $\vdash (\neg P \vee P) \to (P \vee \neg P)$	(1) 代入$\frac{P}{\neg P}, \frac{Q}{P}$
(3) $\vdash \neg P \vee P$	定理3.2.3
(4) $\vdash P \vee \neg P$	(2) (3) 分离

问题：公理系统

- 公理化是从头开始所以需要把所有东西再证明一遍吗？
  - 从一些公理出发，根据演绎规则推导出一系列定理，这样形成的演绎体系叫做公理系统（axiom system），除了给定的几条公理以外，需要通过公理和其他已证明的定理来推导出来其他定理
- 在网上找不到罗素公理系统这个东西, 书上也没有说公理系统的名字
  - 书上的公理系统是Russell-Bernays axiom system，可以根据这个搜索相关的资料
- 定理的使用
  - 考试的时候会把所有可以直接使用的定理给出（注意：交换律是只有给了的情况下才可以直接用，否则需要证明），同学们不需要刻意死记硬背，但是理解定理的证明过程对于公理系统的学习是有好处的

公理化是从头开始所以需要把所有东西再证明一遍吗？
在网上找不到罗素公理系统这个东西, 甚至书上也没有说这个公理系统的名字
公理系统定理的证明好麻烦。。。总是要用到前面的定理，想证一个定理就要连带把前面都证一遍
定理在考试时可以直接使用吗还是需要证明？
到底哪些公式需要背，哪些不需要背啊
罗素公理系统能不能直接用交换律啊
作业和考试中用罗素公理系统证明时可以采取先证引理再利用引理证明定理的方法吗？

问题：王浩算法

- 王浩算法蕴涵等值的变形公式没太理解

$\rightarrow\Rightarrow$ 如果Y, α, β s$\Rightarrow$ γ
而且α, β s$\Rightarrow$ X, γ
那么α, X$\rightarrow$Y, β s$\Rightarrow$ γ

$\Rightarrow\rightarrow$ 如果X, α s$\Rightarrow$ Y, β, γ
那么α s$\Rightarrow$ β, X $\rightarrow$ Y, γ

若$A\Rightarrow C$且$B\Rightarrow C$同时成立，则$A\vee B\Rightarrow C$

- 王浩算法里可以用$\neg\neg p=p$吗 还是只能逆用前件和后件规则
  - 王浩算法也是一个公理系统，因此不可以引入10条变形规则意外的其他规则，$\neg\neg p=p$是不允许使用的

王浩算法蕴涵等值的变形公式没太理解
王浩算法里可以用 $\neg\neg p = p$吗 还是只能逆用前件和后件规则

问题：推理相关

- 请问这一章讲的函数是否与微积分中的函数不同？我感觉这里的函数可以一对多。不然的话，为什么还需要证明相继前元“有且仅有一个”？（4.4.5）

4.4.5 自然数集的形式描述

形式化不是证明

论域是自然数集，来形式化语句.

(1) 对每个数，有且仅有一个相继后元.

(2) 没有这样的数，0 是其相继后元.

(3) 对除 0 而外的数，有且仅有一个相继前元(可将这三句话作为建立自然数集合的公理).

引入谓词 $E(x,y)$ 表示 $x=y$，函数 $f(x)$ 表示个体 x 的相继后元，即 $f(x)=x+1$. 函数 $g(x)$ 表示个体 x 的相继前元，即 $g(x)=x-1$.

对语句 1 需注意唯一性的描述，常用的办法是如果有两个则它们必相等. 即若对每个 x 都存在 y，y 是 x 的相继后元，且对任一 z，如果它也是 x 的相继后元，那么 y,z 必相等. 于是对语句 1 存在唯一性的描述为

$$(\forall x)(\exists y)(E(y,f(x))\wedge(\forall z)(E(z,f(x))\rightarrow E(y,z)))$$

对语句 3 需注意的是对“除 0 而外”的描述，可理解为如果 $x\neq 0$. 则……的形式，于是语句 3 可描述为

$$(\forall x)(\neg E(x,0)\rightarrow(\exists y)(E(y,g(x))\wedge(\forall z)(E(z,g(x))\rightarrow E(y,z))))$$

语句 2 的描述是简单的，可写成

$$\neg(\exists x)E(0,f(x))$$

问题：推理相关

- 之前那个归结推理中推理原理还是不太懂
  - 归结法理论依据：定理2.8.2

    $A \Rightarrow B$成立当且仅当$A \wedge \neg B$ 是矛盾式。
  - 归结法步骤：

    1. 从$A \wedge \neg B$ 出发（欲证$A \Rightarrow B$，等价于证 $A \wedge \neg B$ 是矛盾式）
    2. 建立子句集S，将$A \wedge \neg B$ 化成合取范式：$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$

       其中C_i 为析取式。由诸C_i 构成子句集$S = \{ C_1, C_2, \ldots, C_n \}$
    3. 对S 中的子句作归结（消互补对），归结结果（归结式）仍放入S中。重复此步。
    4. 直至归结出矛盾式（□）。

  - 归结法中的第三步可以认为是一个不断消去子句集中不可能同时发生的事件，留下可能同时发生的事件，当最终得到矛盾式，说明原始子句集中的事件不可能同时发生，也就是说欲证的$A \wedge \neg B$是矛盾式

2.10 归结法

- 归结法推理规则

设　　子句1　　$C1 = L \vee C1'$

子句2　　$C2 = \neg L \vee C2'$

(其中L和¬L为互补对)

$C1 = \neg L \rightarrow C1'$

$C2 = \neg C2' \rightarrow \neg L$　　因而

新子句　$R（C1，C2）= C1' \vee C2'$

2.10 归结法

- 归结法推理规则 (续)

$C1 \wedge C2 \Rightarrow R(C1，C2)$需证明。

$C1 = L \vee C1'$
$C2 = \neg L \vee C2'$

证明:

$C1 \wedge C2 \rightarrow C1' \vee C2'$为永真式 （定理2.8.1）

设在任一解释下，C1和C2均为真

若$L = T$，则$\neg L = F$，从而必有$C2' = T$ （∵C2为真）

若$L = F$，则$\neg L = T$，从而必有$C1' = T$ （因为C1为真）

综合上述均有$C1' \vee C2'$为真

因此，$C1 \wedge C2 \Rightarrow R(C1，C2)$

问题：推理相关

- 想问一下，演绎定理的叙述中，有前提的推理是什么意思。因为我的理解中，所有推理都是有前提的，那么这条定理说的是所有的推理都不能用代入规则了吗，感觉不太对

演绎定理 在命题逻辑公理系统中，在有前提的推理下，如果从前提 A 可推出公式 B，而推理过程又不使用变项的代入，那么 $\vdash A \to B$ 成立.

3.3不是考试范围

> 演绎定理（Deduction Theorem）是命题逻辑中的一个重要定理，它建立了在假设A下推导出结论B与直接证明条件语句A→B之间的关系。为了保证演绎定理的正确性和逻辑的一致性，我们不让在证明过程中使用变项的代入。以下是其背后的原因：

1. **避免自由变量与绑定变量的混淆**：在命题逻辑和一阶逻辑中，有自由变量和绑定变量之分。如果在应用演绎定理时随意进行变量代入，可能会导致自由变量和绑定变量之间发生混淆，从而破坏了逻辑表达式的结构。
2. **保证一致性**：随意的变量代入可能会导致某些逻辑系统中出现矛盾。例如，在一些具有特定语义的逻辑系统中，替换某些变量可能会导致语句的意义改变，从而影响到整个逻辑系统的一致性。
3. **避免证明中的循环推理**：不恰当的变量代入可能导致证明中的循环推理。这意味着在证明过程中，某些步骤可能会依赖于其后的步骤，从而形成一个逻辑上的闭环，使得证明失去意义。
4. **保持演绎定理的通用性**：为了确保演绎定理在各种逻辑系统中都有相同的应用，最好是避免在证明过程中引入特定的变量代入规则。

问题：谓词逻辑

- 自然语言形式化过程中谓词拆分的标准
  - 一个谓词里面只描述一个动作，例如可以定义$F(x,y)$为x经过y，但是$G(x,y,z)$定义为x经过z且y经过z，这种就应该继续做拆分，因为G实际上描述了两个动作：（1）x经过z（2）y经过z
- 量词本身可以不加括号吗？
  - 不可以，不加括号是不准确的写法
- 一些量词作用下的谓词逻辑存在分配律，需要硬记吗/希望能再讲解一下量词和合取析取的分配律问题，谢谢。

1.请问自然语言形式化过程中，谓词“不可继续拆分”有无标准
2.量词本身可以不加括号吗
请问这一章讲的函数是否与微积分中的函数不同？我感觉这里的函数可以一对多。不然的话，为什么还需要证明相继前元“有且仅有一个”？（4.4.5）
之前那个归结推理中推理原理还是不太懂
一些量词作用下的谓词逻辑存在分配律，需要硬记吗
能用双条件词表示唯一性吗？
希望能再讲解一下量词和合取析取的分配律问题，谢谢。
感觉形式化的时候总拆不干净，有没有能判断是否不可再拆分的方法
自然语言的拆分好迷......好复杂......

投票 最多可选1项

设置

同学的问题：课上复习时间过长，建议略微减少一些，适当讲一下自学内容/希望上新课时可以穿插复习一下之前的要点

每节课把上节课存在的一些典型问题讲解一下，从而复习巩固之前知识要点，这对你的学习是否有帮助？

A 有

B 没有

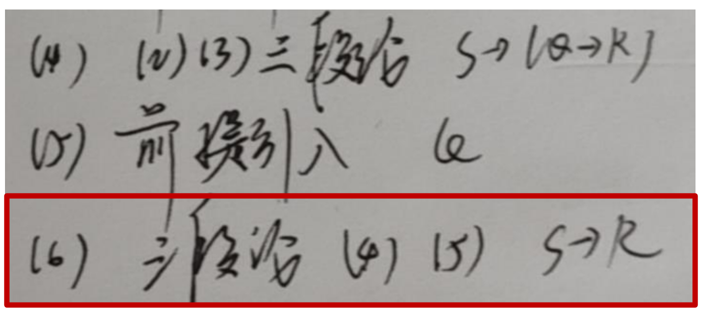
提交

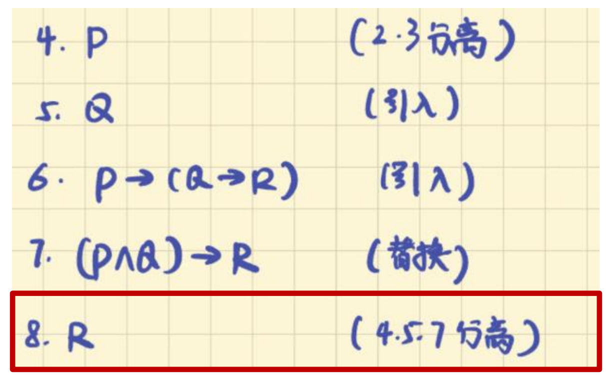
其他问题

- 几种方法都会了，但是名字对不上QAQ，有没有好的办法将方法跟证明方法的名字匹配上？
- 自学内容考试要考吗？
  - 不做考试要求
- 怎么用公理系统证明非非p->p啊…（被难到了
  - 书上的定理3.2.6有详细的证明过程
- 能用双条件词表示唯一性吗？
  - 双条件词的意义是“当且仅当”，$A \leftrightarrow B$表示A为真当且仅当B为真，并不是唯一性的意思

作业规范问题

- 推理规则不能乱写
  - 分离
  - 置换
  - 三段论
- 写清楚是谁置换，谁和谁分离，谁和谁三段论

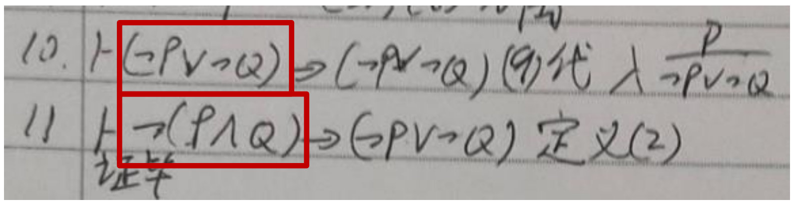




这些写法都是不准确的

作业规范相关

- 定义的使用：两个非不可以直接丢掉！！
  - 需要通过定理3. 2. 5和3. 2. 6来进行转化


10. $\vdash (\neg P \vee \neg Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$ (9)代入 $\frac{P}{\neg P \vee \neg Q}$

11 $\vdash \neg(P \wedge Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$ 定义(2)

证毕

这个地方是跳步了，$\neg(P \wedge Q)$按照定义是$\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$而不是$(\neg P \vee \neg Q)$

(2) $(A \wedge B)$ 定义为$\neg(\neg A \vee \neg B)$。

定理 3. 2. 5 $\vdash P \to \neg\neg P$.

定理 3. 2. 6 $\vdash \neg\neg P \to P$.

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

5.1 否定型等值式

5.2 量词分配等值式

5.3 范式(全称量词的前束范式)

5.4 基本推理公式

5.5 推理演算

5.6 谓词逻辑的归结推理法

- 普遍有效公式是最重要的逻辑规律。
- 等值式和推理式都是普遍有效的谓词公式。
- 相比命题逻辑，量词谓词的引入，使得谓词演算的应用更为广泛。
- 本章从语义的角度进行非形式的描述。

温习普遍有效公式(4-6-1)

设A为一个谓词公式，若A在任何解释下真值均为真，则称A为普遍有效的公式。

例 $(\forall x)(P(x) \vee \neg P(x))$

$(\forall x)P(x) \rightarrow P(y)$ (y是x个体域中的一个元素)

$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$

$(\forall x) P(x) \vee (\forall x) \neg P(x)$

D1 = {a}; D2= {a,b}

令P(a) =1, P(b)=0

在D1上普遍有效，但在D2上则不一定。

任何解释：

给定的个体域D：自由个体变项a，谓词变项P，函数*f*

解释

- 给定非空个体域D，一个解释I由下面部分构成
  - 给每个自由个体变项符号指定一个D中的元素
  - 给每个谓词变项符号指定一个D上的谓词
  - 给每个函数符号指定一个D上的函数
- 例如，在个体域N上，有公式$(\forall x)F(g(x,a),x)$
- 给定解释I
  - 自由个体变项：$a=0$
  - 函数$g(x,a)=x*a$
  - 谓词$F(x,y)$为$x=y$
- 在解释I下，公式被解释为$(\forall x)(x*0=x)$，它是一个假命题

5. 1 否定型等值式

5-1-1 等值

设A, B是一阶谓词逻辑中任意两个公式，若$A \leftrightarrow B$是普遍有效的公式，则称 A与 B等值，记作

$$A = B \quad \text{或} \quad A \Leftrightarrow B$$

一、从命题公式移植来的等值式

- 命题公式中常常用到的等价式及永真蕴含式也可以看作是谓词演算中的等价式及永真蕴含式

例如

$A(x) \Rightarrow A(x) \vee B(x)$　　$P \Rightarrow P \vee Q$

$(A(x) \to B(x)) = (\neg A(x) \vee B(x))$　　$P \to Q = \neg P \vee Q$

$\neg(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) = \neg \exists x A(x) \vee \neg \exists x B(x)$　摩根定律

内容回顾

- 等值公式
- 基本推理公式

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

1. 双重否定律

$$\neg\neg P = P$$

2. 结合律

$$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$$

$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$$

$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$$

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

"$\rightarrow$" 不满足结合律

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

3. 交换律

$$P \vee Q = Q \vee P$$

$$P \wedge Q = Q \wedge P$$

$$P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$$

$$P \rightarrow Q \neq Q \rightarrow P$$

“$\rightarrow$” 不满足交换律

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

4. 分配律

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

$$P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \neq (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)$$

“$\leftrightarrow$” 不满足分配律

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

5. 等幂律（恒等律）

$$P \vee P = P$$

$$P \wedge P = P$$

$$P \rightarrow P = T$$

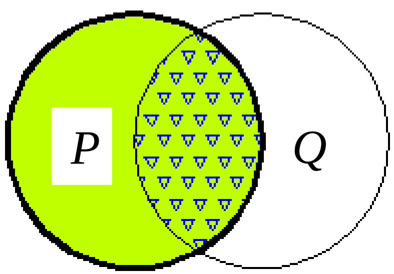
$$P \leftrightarrow P = T$$

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

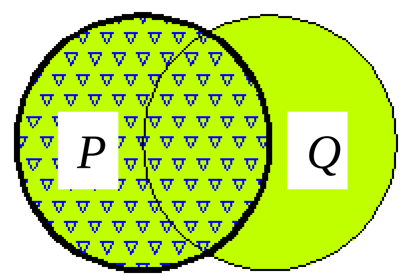
6. 吸收律

$$\boldsymbol{P \vee (P \wedge Q) = P}$$

$$\boldsymbol{P \wedge (P \vee Q) = P}$$



$P \vee (P \wedge Q)$



$P \wedge (P \vee Q)$

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

7. 摩根（De Morgan）律:

$$\neg (P \lor Q) = \neg P \land \neg Q$$

$$\neg (P \land Q) = \neg P \lor \neg Q$$

对蕴含词、双条件词作否定有

$$\neg(P \rightarrow Q) = P \land \neg Q$$

$$\neg(P \leftrightarrow Q) = \neg P \leftrightarrow Q = P \leftrightarrow \neg Q$$

$$= (\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q)$$

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

8. 同一律：

$P \vee F = P \qquad P \wedge T = P$

$T \rightarrow P = P \qquad T \leftrightarrow P = P$

还有

$P \rightarrow F = \neg P \qquad F \leftrightarrow P = \neg P$

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

9. 零律：

$$P \lor T = T$$

$$P \land F = F$$

还有

$$P \rightarrow T = T$$

$$F \rightarrow P = T$$

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

10. 补余律：

$$P \vee \neg P = T \qquad P \wedge \neg P = F$$

还有

$$P \rightarrow \neg P = \neg P$$

$$\neg P \rightarrow P = P$$

$$P \leftrightarrow \neg P = F$$

常用的等值公式

- 蕴涵等值式 $P \to Q = \neg P \vee Q$
- 前提合取合并 $P \to (Q \to R) = (P \wedge Q) \to R$
- 等价等值式：$P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
- 假言易位： $P \to Q = \neg Q \to \neg P$
- 等价否定等值式： $P \leftrightarrow Q = \neg P \leftrightarrow \neg Q$
- 归谬论：$(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q) = \neg P$

常用的等值公式

- $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 从取真来描述双条件
- $P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ 从取假来描述双条件
- $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = Q \rightarrow (P \rightarrow R)$ 前提交换
- $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) = (P \vee Q) \rightarrow R$ 前提析取合并

证明其他等值式

基本推理公式

1. $P \land Q \Rightarrow P$，但 $P \lor Q \not\Rightarrow P$

2. $\neg(P\rightarrow Q) \Rightarrow P$ 1式的直接推论 $P\land \neg Q \Rightarrow P$

3. $\neg(P\rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$ 1式的直接推论 $P\land \neg Q \Rightarrow \neg Q$

4. $P \Rightarrow P\lor Q$

5. $\neg P \Rightarrow P\rightarrow Q$ 2式的逆否，4式的推论。

6. $Q \Rightarrow P\rightarrow Q$ 3式的逆否，4式的推论。

7. $\neg P\land(P\lor Q) \Rightarrow Q$ 非 P，而P∨Q又成立，只有Q成立

8. $P\land(P\rightarrow Q) \Rightarrow Q$ *假言推理，分离规则，7式的变形

9. $\neg Q\land(P\rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$ 7式的变形

基本推理公式

10. $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R) \Rightarrow P\rightarrow R$ *三段论

11. $(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R) \Rightarrow P\leftrightarrow R$ 类似10式

12. $(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)\wedge(P\vee Q) \Rightarrow R$ 10式的推论

13. $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\vee R) \Rightarrow Q\vee S$ 10式的推论

14. $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(\neg Q\vee\neg S) \Rightarrow \neg P\vee\neg R$ 9式的推论

15. $(Q\rightarrow R) \Rightarrow ((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R))$ P=F时左=右，
P=T时右=T

16. $(Q\rightarrow R) \Rightarrow ((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$ P=T时左=右，
P=F时右=T

16个公式？

- $P \wedge Q \Rightarrow P$ 合取化简式
- $P \Rightarrow P \vee Q$ 析取附加式（引入式）
- $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ *假言推理，分离规则
- $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$ *三段论

二、消去量词等值式

将论域限定为有限集，$\{1,2,\ldots,k\}$，则有：

$$(\forall x)P(x) = P(1) \land P(2) \land \ldots \land P(k)$$

$$(\exists x)P(x) = P(1) \lor P(2) \lor \ldots \lor P(k)$$

5.1 否定型等值式

5-1-2 否定型等值式

$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$

$$\neg(\exists x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$$

$$(\forall x)P(x) = \neg(\exists x)\neg P(x)$$

$$(\exists x)P(x) = \neg(\forall x)\neg P(x)$$

$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$

在 $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$域上分析

$\neg\forall xP(x)=\neg(P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\ldots\wedge P(a_n))$

$=\neg P(a_1)\vee\neg P(a_2)\vee\ldots\vee\neg P(a_n)$

$=\exists x\neg P(x)$

$$\boxed{\begin{aligned}(\forall x)P(x) &= P(1)\wedge P(2)\wedge\ldots\wedge P(k)\\ (\exists x)P(x) &= P(1)\vee P(2)\vee\ldots\vee P(k)\end{aligned}}$$

1. $\neg\forall xP(x)=\exists x\neg P(x)$

2. $\neg\exists xP(x)=\forall x\neg P(x)$

- 证明：从语义上证明2。

  对任意赋值I(D)，设$\neg\exists xP(x)$为真，则$\exists xP(x)$为假，即对$\forall x\in D$，$P(x)$为假，所以，对$\forall x\in D$，$\neg P(x)$为真，即$\forall x\neg P(x)$为真，因此$\neg\exists xP(x)\Rightarrow\forall x\neg P(x)$。

  对任意赋值I(D)，设$\forall x\neg P(x)$为真，则对任意的$x\in D$，$\neg P(x)$为真，即对任意的$x\in D$，$P(x)$为假，所以$\exists xP(x)$为假，$\neg\exists xP(x)$为真，因此

  $\forall x\neg P(x)\Rightarrow\neg\exists xP(x)$。

A=B语义：在任一解释下，A真B就真，而且B真A就真

分析下两式是否相等？

$$(\forall x)P(x) = \neg(\exists x)\neg P(x)$$

$$(\exists x)P(x) = \neg(\forall x)\neg P(x)$$

- {1，2}域分析
- 否定词越过量词的移动，使用摩根定律

例1. 并非所有的动物都是猫

设 A(x)：x是动物

B(x)：x是猫

原语句可表示成$\neg(\forall x)(A(x)\to B(x))$

依否定型公式得

$$
\begin{aligned}
&\neg(\forall x)(A(x)\to B(x))\\
&=(\exists x)\neg(A(x)\to B(x))\\
&=(\exists x)\neg(\neg A(x)\vee B(x))\\
&=(\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))
\end{aligned}
$$

而$(\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))$的含义是有一个动物不是猫，显然这句话与原语句等同

与$(\forall x)(\forall y)(F(x)\wedge F(y)\rightarrow G(x,y))$等价的公式是：

A $\neg(\forall x)(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x,y))$

B $\neg(\exists x)(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x,y))$

C $(\exists x)(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x,y))$

D $\neg(\exists y)(\exists x)(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x,y))$

提交

例：“天下乌鸦一般黑”的表示

- 设$F(x)$: x是乌鸦, $G(x, y)$: x与y 一般黑,

原语句可表示成

$(\forall x)(\forall y)(F(x) \wedge F(y) \rightarrow G(x, y))$

与之等值的公式是

$\neg(\exists x)(\exists y)(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x, y))$

即不存在x, y是乌鸦但不一般黑。这两句话含义是相同的。

- 经谓词演算有

$$\neg(\exists x)(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x, y))$$

$$= (\forall x)\neg(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x, y)))$$

$$= (\forall x)(\forall y)\neg(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x, y))$$

$$= (\forall x)(\forall y)(\neg(F(x)\wedge F(y))\vee G(x, y))$$

$$= (\forall x)(\forall y)(F(x)\wedge F(y) \rightarrow G(x, y))$$

原语句可表示成

$(\forall x)(\forall y)(F(x)\wedge F(y) \rightarrow G(x, y))$

与之等值的公式是

$\neg(\exists x)(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x, y))$

5.2 量词分配等值式

5-2-1 量词对析取词、合取词的分配律

$$(\forall x)(P(x) \lor q) = (\forall x)P(x) \lor q$$

$$(\exists x)(P(x) \lor q) = (\exists x)P(x) \lor q$$

$$(\forall x)(P(x) \land q) = (\forall x)P(x) \land q$$

$$(\exists x)(P(x) \land q) = (\exists x)P(x) \land q$$

其中q 是命题变项，与个体变元 x 无关

5.2 量词分配等值式

5-2-2 量词对蕴含词的分配律

$$(\forall x)(P(x) \to q) = (\exists x)P(x) \to q$$

$$(\exists x)(P(x) \to q) = (\forall x)P(x) \to q$$

$$(\forall x)(p \to Q(x)) = p \to (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)\big(p \to Q(x)\big) = p \to (\exists x)Q(x)$$

其中p, q是命题变项，与个体变元 x 无关

给出上面等式的证明。

先证明其中的第一个等式。

$$
\begin{aligned}
&(\forall x)(P(x) \to q) \\
&= (\forall x)(\neg P(x) \vee q) \\
&= (\forall x)\neg P(x) \vee q \quad \text{依5.2.1的等值式} \\
&= \neg(\exists x)P(x) \vee q \quad \text{依5.1.2的等值式} \\
&= (\exists x)P(x) \to q
\end{aligned}
$$

5-2-1 量词对析取词、合取词的分配律

$$(\forall x)(P(x) \vee q) = (\forall x)P(x) \vee q$$

$$(\exists x)(P(x) \vee q) = (\exists x)P(x) \vee q$$

$$(\forall x)(P(x) \wedge q) = (\forall x)P(x) \wedge q$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge q) = (\exists x)P(x) \wedge q$$

再证明其中的第三个等式

$$(\forall x)(p \rightarrow Q(x))$$

$$= (\forall x)(\neg p \lor Q(x))$$

$$= \neg p \lor (\forall x)Q(x) \quad \text{依5.2.1的等值式}$$

$$= p \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

同样可证其余两个等值式。

5-2-1 量词对析取词、合取词的分配律

$$(\forall x)(P(x) \lor q) = (\forall x)P(x) \lor q$$

$$(\exists x)(P(x) \lor q) = (\exists x)P(x) \lor q$$

$$(\forall x)(P(x) \land q) = (\forall x)P(x) \land q$$

$$(\exists x)(P(x) \land q) = (\exists x)P(x) \land q$$

5.2 量词分配等值式

5-2-3 全称量词∀对∧，存在量词∃对∨的分配律

$$(\forall x)(P(x)\wedge Q(x)) = (\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x)\vee Q(x)) = (\exists x)\ P(x)\vee(\exists x)Q(x)$$

用$\{1,2\}$域方法验证：

∀对∨不满足分配律， ∃对∧不满足分配律

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

- 从{1,2}域上看

$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$

$= (P(1) \wedge Q(1)) \wedge (P(2) \wedge Q(2))$

$= (P(1) \wedge P(2)) \wedge (Q(1) \wedge Q(2))$

$= (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) = (\exists x)\ P(x) \vee (\exists x) Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$= (P(1) \vee Q(1)) \vee (P(2) \vee Q(2))$$

$$= (P(1) \vee P(2)) \vee (Q(1) \vee Q(2))$$

$$= (\exists x)\ P(x) \vee (\exists x) Q(x)$$

$$(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(y)) = (\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$$

$(\exists x)P(x)=(\exists y)P(y)$ 变量易名规则

$$(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x) = (\exists x)P(x)\wedge(\exists y)Q(y)$$

$$= (\exists x)(P(x)\wedge(\exists y)Q(y))$$

$$= (\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(y))$$

$$\boxed{(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(y)) = (\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)}$$

5.2.1的等值式

但需注意：

$$(\forall x)\ P(x) \vee (\forall x) Q(x) \neq (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \neq (\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x)$$

而只满足

$$(\forall x)\ P(x) \vee (\forall x) Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x)$$

哪个范围广，哪个就在后面

解释：$(\forall x)\ P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow\ (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$

- 左边：所有的x都满足P或者所有的x都满足Q
- 右边： 对于任何x，x要么满足P要么满足Q

P："喜欢数学"的学生， Q："喜欢英语"的学生

左边： 整个班级的学生都喜欢数学，或者整个班级的学生都喜欢英语

右边： 对于班级中的任何一个学生，他要么喜欢数学，要么喜欢英语

解释：$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

- 左边：存在某个x满足P并且满足Q
- 右边：　存在某个x满足P，并且存在某个x（可能是同一个或不同的x）满足Q

P："喜欢数学"的学生，　Q："喜欢英语"的学生

左边：存在一个学生既喜欢数学又喜欢英语

右边：存在一个学生喜欢数学，并且存在一个学生（可能是同一个或不同的学生）喜欢英语

$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ (从$\{1,2\}$域上看)

$= (P(1) \vee Q(1)) \wedge (P(2) \vee Q(2))$

$= (P(1) \wedge P(2)) \vee (Q(1) \wedge Q(2)) \vee (P(1) \wedge Q(2)) \vee (Q(1) \wedge P(2))$

$= (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \vee (P(1) \wedge Q(2)) \vee (Q(1) \wedge P(2))$

$$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$$

- 证明：

假设在论域D和赋值I下前件$\exists x(P(x)\wedge Q(x))$为真，则论域中至少有一个客体x0，使得 $P(x0)\wedge Q(x0)$为真

于是$P(x0)$和$Q(x0)$都为真，所以$(\exists x)P(x)$以及$(\exists x)Q(x)$为真

进而得$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$为真。

于是有 $(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

单选题 1分

设置

$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$和$(\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)$的永真蕴含关系是?

A $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\Rightarrow(\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)$

B $(\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$

C $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))=(\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)$

D 没关系

提交

$(\forall x)(P(x)\to Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x)\to(\forall x)Q(x)$

- 用解释法证明：

设在论域D下，任一赋值I，有$(\forall x)(P(x)\to Q(x))$为T，

则对D中的任何一个客体x，有$P(x)\to Q(x)$为T

这必能保证$(\forall x)P(x)$为T时，$(\forall x)Q(x)$为T

从而$(\forall x)P(x)\to(\forall x)Q(x)$为T。

如果对于任何喜欢数学的学生来说他/她也喜欢英语，那么当整个班级的学生都喜欢数学时，整个班级的学生也都会喜欢英语。

$$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)$$

$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x))$

$= ((\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)) \land (\forall x)P(x)) \rightarrow(\forall x)Q(x)$ 前提合取合并

$= (\forall x)((\neg P(x)\lor Q(x)) \land P(x)) \rightarrow(\forall x)Q(x)$

$= (\forall x)((\neg P(x) \land P(x)) \lor(Q(x))\land P(x))) \rightarrow(\forall x)Q(x)$

$= (\forall x)(Q(x)\land P(x)) \rightarrow(\forall x)Q(x)$

$=((\forall x)Q(x)\land(\forall x)P(x)) \rightarrow(\forall x)Q(x)$

$=T$

下面正确的推理公式为：

A $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$

B $(\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists \mathrm{x})\mathrm{Q}(\mathrm{x})$

C $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$

D $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

Submit

等值演算规则

- 置换规则
- 变元易名

置换规则

- 设Φ(A)是含公式A的公式，若A ⇔ B，则Φ(A) ⇔ Φ(B).
- 一阶逻辑中的置换规则与命题逻辑中的置换规则形式上完全相同，只是在这里A，B是一阶逻辑公式.

若在任一解释下，公式A和B的真值都相同，则称A和B是等值的、或称等价记作

$A=B$ 或 $A \Leftrightarrow B$。

例5. 5

例5.5 证明下列等值式。

（1） $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x)) \Leftrightarrow \forall x(M(x)\rightarrow \neg F(x))$

（2） $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x)) \Leftrightarrow \exists x(F(x)\wedge \neg G(x))$

（3） $\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x，y))$

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge \neg H(x,y))$

（4） $\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x，y))$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow \neg L(x,y))$

（1）$\neg\exists x(M(x)\land F(x))\Leftrightarrow\forall x(M(x)\to\neg F(x))$

$$\neg\exists x(M(x)\land F(x))$$

$$\Leftrightarrow\forall x\neg(M(x)\land F(x))$$

$$\Leftrightarrow\forall x(\neg M(x)\lor\neg F(x))$$

$$\Leftrightarrow\forall x(M(x)\to\neg F(x))$$

（2） $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x)) \Leftrightarrow \exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

$$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x\neg(F(x)\rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x\neg(\neg F(x)\vee G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

3） $\neg\forall x\forall y(F(x)\land G(y)\to H(x,\ y))$

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\land G(y)\land\neg H(x,y))$

$\neg\forall x\forall y(F(x)\land G(y)\to H(x,\ y))$

$\Leftrightarrow \neg\forall x\forall y(\neg(F(x)\land G(y))\lor H(x,\ y))$

$\Leftrightarrow \exists x\exists y\neg(\neg(F(x)\land G(y))\lor H(x,\ y))$

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\land G(y)\land\neg H(x,y))$

（4） $\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x, y))$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow\neg L(x,y))$

$\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x, y))$

$\Leftrightarrow \forall x\neg(\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x, y)))$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y\neg(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x, y))$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(\neg(F(x)\wedge G(y))\vee\neg L(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow\neg L(x,y))$

变元易名（约束变元的换名）

- 目的是使每个变元性质唯一
- 设A为一公式，将A中某量词辖域中某约束变项的所有出现及相应的约束变元，改成该量词辖域中未曾出现过的某个体变项符号，公式中其余部分不变，设所得公式为A'， 则$A' \Leftrightarrow A$

例： $\forall x A(x) \lor B(x)$

由于公式中的x 即是自由的又是约束的，可利用此规则进行换名为：

$\forall t\, A(t) \lor B(x) \Leftrightarrow \forall x A(x) \lor B(x)$ 后可利用量词的扩充得到：

$\forall t\, A(t) \lor B(x) \Leftrightarrow \forall t(A(t) \lor B(x))$

变元易名（自由变元的代替）

设A为一公式，将A中某个自由出现的个体变项的所有出现用A中未曾出现过的个体变项符号代替，A中其余部分不变，设所得公式为A’，则A’ $\Leftrightarrow$ A.

例： $\forall xF(x, y, z) \rightarrow \exists yG(x, y, z)$

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x, t, z) \rightarrow \exists yG(x, y, z)$

(变元易名) 自由的y用t代换

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x, t, z) \rightarrow \exists yG(w, y, z)$

(变元易名) 自由的x用w代换

要不要换z?

5.3 范式 (Normal Form)

前束范式
Skolem标准型

6	**第 5 章** **5.1 ~ 5.3**	**谓词逻辑等值和推理演算，否定型等值式，量词分配等值式范式，前束范式，SKOLEM 标准型，存在量词前束范式***

5-3-1 前束范式

设A为一阶谓词逻辑公式，如果满足

(1) 所有量词都位于该公式的最左边；

(2) 所有量词前都不含否定词；

(3) 量词的辖域都延伸到整个公式的末端，

则称A为前束范式。

5-3-1 前束范式

- 前束范式的一般形式为

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_nx_n)M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

其中$Q_i(1<=i<=n)$为∀或∃，M为不含量词的公式，称作公式A的基式或母式。

5-3-2 前束范式存在定理

一阶谓词逻辑的任一公式都存在与之等值的前束范式，但其前束范式并不唯一。

5-3-3 化前束范式的基本步骤

1. 消去联结词→, ↔ 。

2. 右移否定词¬（利用否定型等值式与摩根律）。

3. 量词左移（使用量词分配等值式）。

4. 变元易名（使用变元易名分配等值式）。

例1：求下式的前束范式

$\neg((\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \rightarrow (\exists x)(\neg(\forall y)Q(y, b) \rightarrow R(x)))$

可按下述步骤实现：

(1) 消去联结词$\rightarrow, \leftrightarrow$；得

$\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \vee (\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y, b) \vee R(x)))$

(2) $\neg$内移（反复使用摩根律）

得 $(\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \wedge \neg(\exists x)((\forall y)Q(y, b) \vee R(x))$

$= (\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b) \wedge \neg R(x))$

$(\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b) \wedge \neg R(x))$

(3) 量词左移（使用分配等值式）得

$(\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b) \wedge \neg R(x))$

$= (\forall x)((\exists y)P(a, x, y) \wedge (\exists y)\neg Q(y, b) \wedge \neg R(x))$

(4) 变元易名（使用变元易名分配等值式）

$(\forall x)((\exists y)P(a, x, y) \wedge (\exists z)\neg Q(z, b) \wedge \neg R(x))$

$= (\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a, x, y) \wedge \neg Q(z, b) \wedge \neg R(x))$

$= (\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a, b, x, y, z)$

使用以上步骤，可求得任一公式的前束范式。由于每一步变换都保持等值性，所以，所得到的前束形与原公式是等值的。这里的

$$S(a, b, x, y, z)$$

便是原公式的母式。

由于前束形中量词的次序排列，如$(\exists y)(\exists z)$也可以写成$(\exists z)(\exists y)$以及对母式没有明确的限制，自然其前束范式并不唯一，如例1的前束范式也可以是

$$(\forall x)(\exists z)(\exists y)(S(a, b, x, y, z) \land P)$$

其中P可以是任一不含量词的普遍有效的公式。

前束范式存在定理

定理5.1 一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式。

证明：通过如下算法，可将公式化成等价的前束范式。

1. 利用量词转化公式，把否定符号深入到指导变元的后面。

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

2. 如果必要的话，将约束变量改名。

3. 利用量词辖域收缩、扩张等值式把量词移到全式的最前面，这样便得到与公式等价的前束范式。

说明

求前束范式的过程，就是制造量词辖域可以扩大的条件，进行量词辖域扩大。

任何公式的前束范式都是存在的，但一般说来，并不唯一。

利用一阶逻辑等值式以及两条变换规则（置换规则、变元易名）就可以求出与公式等值的前束范式，或所谓公式的前束范式。

多选题 1分

设置

下面哪个选项是 $\forall x F(x) \land \neg \exists x G(x)$ 的前束范式：

A $\forall x \forall y (F(x) \land \neg G(y))$

B $\exists x \forall y (F(x) \land \neg G(y))$

C $\forall x \forall y (\neg F(x) \to G(y))$

D $\forall x (F(x) \land \neg G(x))$

提交

(1) $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

解 $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\neg\exists yG(y)$ (变元易名)

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall y\neg G(y)$ (否定型等值式)

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\wedge\forall y\neg G(y))$ (量词对∧分配律)

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge\neg G(y))$ (量词对∧分配律)

或者 $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ (否定型等值式)

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\wedge\neg G(x))$ (量词对∧分配律)

由此可知，(1)中公式的前束范式是不唯一的.

(2) $\forall x F(x) \vee \neg \exists x G(x)$

$\Leftrightarrow \forall x F(x) \vee \forall x \neg G(x)$ (否定型等值式)

$\Leftrightarrow \forall x F(x) \vee \forall y \neg G(y)$ (变元易名)

$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \vee \forall y \neg G(y))$ (量词对$\vee$分配律)

$\Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \vee \neg G(y))$ (量词对$\vee$分配律)

问：(2)的下述求法是否正确？

$\forall x F(x) \vee \neg \exists x G(x)$

$\Leftrightarrow \forall x F(x) \vee \forall x \neg G(x)$

$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \vee \neg G(x))$

(1) $\forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$

例5.8 求公式的前束范式

(1)$\forall xF(x,y)\rightarrow\exists yG(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall tF(t,y)\rightarrow\exists wG(x,w)$ (变元易名)

$\Leftrightarrow \exists t\exists w(F(t,y)\rightarrow G(x,w))$ (分配律)

或者

$\forall xF(x,y)\rightarrow\exists yG(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x,t)\rightarrow\exists yG(w,y)$ (变元易名)

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x,t)\rightarrow G(w,y))$ (分配律)

说明

解本题时一定注意，哪些个体变项是约束出现，哪些是自由出现，特别要注意那些既是约束出现又是自由出现的个体变项。不能混淆。

离散数学 高等数学 (大学课程) 数理逻辑（Symbolic Logic）

离散数学，关于前束范式的问题?

前束范式的量词顺序可调换吗？感觉调换后就不等值了，下面是与此相关过程，请问提出量词的顺序可变吗？：

这个例子量词是可以交换顺序的

求前束范式：$(\exists y)Q(y) \wedge (\forall x)P(x)$

提出量词的顺序必须是从左到右

$(\exists y)(\forall x)(Q(y) \wedge P(x))$ ✓

$(\forall x)(\exists y)(Q(y) \wedge P(x))$ ✗

多选题 1分

Setting

关于前束范式下面正确的是

A 所有量词都位于该公式的最左边

B 所有量词前都不含否定词

C 量词的辖域都延伸到整个公式的末端

D 不含有量词

Submit

5-3-4 SKOLEM 标准型

Thoralf Skolem worked on Diophantine equations (丢番图方程), mathematical logic, group theory, lattice theory and set theory.

Born: 23 May 1887 in Sandsvaer, Norway
Died: 23 March 1963 in Oslo, Norway

5-3-4 SKOLEM 标准型

- 一阶谓词逻辑的任一公式 A，若其

  (1) 或仅保留全称量词而消去存在量词，便得到公式 A的 SKOLEM 标准型($\forall$**前束范式**)；

  (2) 前束范式中所有的存在量词都在全称量词的左边，且至少有一个存在量词 ($\exists$前束范式)；

- 公式 A与其 SKOLEM 标准型只能保持某种意义下的等值关系。

5-3-7 ∀前束范式

一阶谓词逻辑的任一公式 A 的∀前束范式（或称SKOLEM标准型）是仅保留全称量词的前束范式。

5-3-8 ∀前束范式存在定理

一阶谓词逻辑的任一公式 A 都可化成相应的∀前束范式（仅保留全称量词的前束范式，或称SKOLEM标准型），并且 A 是不可满足的当且仅当其∀前束范式是不可满足的。

应注意，该定理是说对于不可满足的公式，它与其Skolem标准形是等值的，而一般的公式与其Skolem标准形并不是等值的。

自然仅当A是不可满足的方使用Skolem标准形。

例3: 求公式$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$的Skolem标准形。

将一公式化成Skolem标准形, 首先也要求出前束形。该例已是前束形，便可直接求Skolem标准形

首先将最左边的$(\exists x)$消去，而将谓词P中出现的所有变元x均以论域中的某个常项a(未在P中出现过)代入。

进而消去从左边数第二个存在量词$(\exists u)$, 因$(\exists u)$的左边有全称量词$(\forall y)(\forall z)$, 而将谓词P中出现的所有变元u均以y, z的某个二元函数$f(y, z)$ (未在P中出现过)代入。

$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$

最后按同样的方法消去存在量词$(\exists w)$，因$(\exists w)$的左边有全称量词$(\forall y)(\forall z)$和$(\forall v)$，需将谓词P中出现的所有变元w均以y、z、v的某个三元函数g(y, z, v) (未在P中出现过也不同于f(y, z))代入。

这样便得到消去全部存在量词的Skolem标准形

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a, y, z, f(y,z), v, g(y,z,v))$$

消存在量词是将相应变元以函数代入，可这样来理解，

如$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$的Skolem标准形是$(\forall x)P(x, f(x))$。因为$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$的意思是对任一x，都有一个y使$P(x, y)$成立，那么这个y通常是依赖于x的，可视作x的某个函数$f(x)$。

在$\{1, 2\}$域上

$$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$$

$$= (P(1, 1)\lor P(1, 2))\land(P(2, 1)\lor P(2, 2))$$

$$(\forall x)P(x, f(x)) = P(1, f(1))\land P(2, f(2))$$

两者明显不等值，但在不可满足的意义下两者是一致的。

Skolem标准形$(\forall x)P(x, f(x))$中，把多项析取变成了一项（所能找到的y不一定是x的函数f），于是$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$与$(\forall x)P(x, f(x))$不等值。

这种标准形，对使用归结法的定理证明来说是重要的。

5-3-5 ∃前束范式*

- 一阶谓词逻辑的任一公式的前束范式（或称SKOLEM标准型）的形式为

$$(\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_i)(\forall x_{i+1})\ldots(\forall x_n)M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

即所有的存在量词都在全称量词的左边,且应保证至少有一个存在量词($i \geq 1$)，同时$M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$中不含量词也无自由个体变项。

* 不做考试要求

5-3-6 ∃前束范式存在定理

- 一阶谓词逻辑的任一公式 A 都可以化为相应的∃前束范式，并且 A 是普遍有效的当且仅当其∃前束范式是普遍有效的。

公式推导（自学）

$$(\forall x)P(x) \Rightarrow ((\exists x)(P(x) \land \neg Q(x)) \lor (\forall z)Q(z))$$

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x))$$

$$= \underline{\neg(\forall x)(\neg P(x) \lor Q(x))} \lor \neg(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x)$$

$$= \neg(\forall x)P(x) \lor \underline{(\exists x)(P(x) \land \neg Q(x))} \lor (\forall x)Q(x)$$

$$= (\forall x)P(x) \rightarrow ((\exists x)(P(x) \land \neg Q(x)) \lor (\forall z)Q(z))$$

$$(\forall x)P(x) \Rightarrow ((\exists x)(P(x) \land \neg Q(x)) \lor (\forall z)Q(z))$$

置换规则、变元易名

在普遍有效的意义下两者等价　　　不做考试要求

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

$((\exists x)(P(x) \land \neg Q(x)) \lor (\forall z)Q(z)) \Rightarrow ?\ (\forall x)P(x)$

在普遍有效的意义下用$P(x)$ 代$Q(x)$

$((\exists x)(P(x) \land \neg P(x)) \lor (\forall z)P(z))$

得到 $(\forall z)P(z))$

变元易名$(\forall x)P(x)$

例2: 求$(\exists x)(\forall y)(\exists u)P(x,y,u)$的∃前束范式(P中无量词)。

将一公式化成∃前束形, 首先要求出前束形, 再做∃前束。这个例子已是前束形, 便可直接求∃前束形。

首先将全称量词$(\forall y)$改写成存在量词$(\exists y)$, 其次是引入谓词S和一个变元z, 得$S(x, z)$, 构造公式

$$(\exists x)((\exists y)(\exists u)(P(x,y,u)\wedge\neg S(x, y))\vee(\forall z)(S(x, z))$$

其中$\neg S(x, y)$的变元, 是$(\forall y)$的变元y和$(\forall y)$左边存在量词$(\exists x)$的变元x。附加的$(\forall z)S(x, z)$中的变元z是新引入的未在原公式中出现过的个体, S也是不曾在M中出现过的谓词。

$$\boxed{(\forall x)P(x) \Rightarrow ((\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee(\forall z)Q(z))}$$

思考

$(\exists x)(\forall y)(\exists u)P(x,y,u) \Rightarrow$

$(\exists x)((\exists y)(\exists u)(P(x,y,u) \land \neg S(x, y)) \lor (\forall z)S(x, z))$

- x是一个常项，u是y的函数，因此P(x,y,u) 可以看做是P(y), S(x, y)可以看做是Q(y)，则该公式可以化简为：

$$(\forall y)P(y) \Rightarrow ((\exists y)(P(y) \land \neg Q(y)) \lor (\forall z)Q(z))$$

- 也就是

$$(\forall x)P(x) \Rightarrow ((\exists x)(P(x) \land \neg Q(x)) \lor (\forall z)Q(z))$$

进而将$(\forall z)$左移(等值演算), 便得∃前束范式

$$(\exists x)(\exists y)(\exists u)(\forall z)((P(x, y, u)\wedge \neg S(x, y))\vee S(x, z))$$

当原公式中有多个全称量词在存在量词的左边时，可按上述方法将全称量词逐一右移。

∃前束范式仅在普遍有效的意义下与原公式等值。∃前束形对谓词逻辑完备性的证明是重要的。

$$\boxed{(\exists x)((\exists y)(\exists u)(P(x,y,u)\wedge\neg S(x, y))\vee(\forall z)(S(x, z)))}$$

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

5.1 否定型等值式

5.2 量词分配等值式

5.3 范式(全称量词的前束范式)

5.4 基本推理公式

5.5 推理演算

5.6 谓词逻辑的归结推理法

谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn