Jordan标准形 (II)

5.1 广义特征子空间（II）

设$T: V \to V$是n维复空间V上线性变换.

定义: 令$G_\lambda = \{v \in V \mid$ 存在$m \geq 0$, 使得$(T - \lambda\epsilon)^m v = 0\}$称为是属于特征值$\lambda$的根子空间.

$v \neq 0 \in G_\lambda$称为λ的根向量或广义特征向量.

定理 设λ的代数重数是n_λ, 则 $G_\lambda = \{v \in V \mid (T - \lambda\epsilon)^{n_\lambda} v = 0\}$ 且$\dim_{\mathbb{C}} G_\lambda = n_\lambda$.

证明思路: 为了方便，令$\lambda = \lambda_1, V = \mathbb{C}^n, T(v) = Av, G_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^n \mid$ 存在$k \geq 1, (A - \lambda_1 I_n)^k v = 0\}$.

由Schur定理，可以假设A是一个上三角阵，前n_{λ_1}个对角元是λ_1，则A形如 $\begin{pmatrix} A_1 & B \\ \mathbf{0} & A_2 \end{pmatrix}$. 其中$A_1, A_2$均是上三角阵，当$l \geq n_{\lambda_1}$, $(A - \lambda_1 I_n)^l$形如 $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & C \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}$. 其中$D$可逆. 因此，$\dim N_{\lambda_1, l} = n - rank(A - \lambda_1 I_n)^l = n - rank D = n_{\lambda_1}$.

5.2 广义特征子空间直和分解（II）

定理： 设$\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$定义为$\sigma(v) = Av$. 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$是$A$(或$\sigma$)的全部互异特征值， 则

$$\mathbb{C}^n = G_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus G_{\lambda_s}.$$

这个直和分解称为根子空间分解.

引理： 不同特征值的广义特征向量是线性无关的.

思路： 设A的特征多项式是$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$. 令$g_i(\lambda) = f(\lambda)/(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$.有$g_i(A)v_j = 0$若$i \neq j$且$v_j \in G_{\lambda_j}$. 但$g_i(A)v_i \neq 0$.(为什么？) 现在设$c_1v_1 + \cdots + c_sv_s = 0$ 其中$v_i \neq 0 \in G_{\lambda_i}$. 两边从左乘$g_1(A)$, 则推出$c_1 = 0$. 同理$c_2 = \cdots = c_s = 0$.

注： 设$A \in M_n(\mathbb{C})$, $g(x) = a_kx^k + \cdots + a_1x + a_0$. 则$g(A) = a_kA^k + \cdots + a_1A + a_0I_n$.

5.2 广义特征子空间直和分解（II）

定理： 设$\sigma:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$定义为$\sigma(v)=Av$. 设$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$是$A$(或$\sigma$)的全部互异特征值，且 $|\lambda I_n-A|=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$. 则 线性变换$\sigma|_{G_{\lambda_i}}:G_{\lambda_i}\to G_{\lambda_i}$的特征多项式等于$(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$, $i=1,\cdots,s$.

思路： 只需证明$\sigma|_{G_{\lambda_i}}$无特征值λ_j, 其中$j\neq i$. 否则， 设$v\in G_{\lambda_i}$ $\sigma(v)=Av=\lambda_j v$. 设$(A-\lambda_i I_n)^{k+1}v=0$ 但$(A-\lambda_i I_n)^k v\neq 0$. 令$w=(A-\lambda_i I_n)^k v$, $Aw=\lambda_i w$. 因此，

$$(\sigma-\lambda_j \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})(w)=(A-\lambda_j I_n)w=(\lambda_i-\lambda_j)w\neq 0.$$

但是, $(A-\lambda_j I_n)w=(A-\lambda_j I_n)(A-\lambda_i I_n)^k v=(A-\lambda_i I_n)^k(A-\lambda_j I_n)v=0$. 矛盾！

5.2 广义特征子空间直和分解（II）

推论： 当$\mu \neq \lambda$时, $(\sigma - \mu I)|_{G_\lambda}$是可逆的.

定理： 设$\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$定义为$\sigma(v) = Av$. 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$是$A$(或$\sigma$)的全部互异特征值， 设线性变换$\sigma|_{G_{\lambda_i}} : G_{\lambda_i} \to G_{\lambda_i}$关于$G_{\lambda_i}$的某组基的矩阵表示是$A_i$, $i = 1, \cdots, s$. 则A相似于分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}.$$

注： 应用Schur定理，可以假设A_i是上三角阵,$i = 1, \cdots, s$.

5.3 Cayley-Hamilton定理

定理： 设$A \in M_n(\mathbb{C})$, $f(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$, 则

$$f(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_n I_n = 0_{n\times n}.$$

例题： 若A可逆， 则A^{-1}是A的多项式.

5.4 极小多项式

定义： 设$A \in M_n(\mathbb{C})$, $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, 若$f(A) = 0$, 则$f(x)$称为A的化零多项式. 若$m(x) \in \mathbb{C}[x]$是所有化零多项式中次数最低的首项系数=1的多项式，则$m(x)$称为A的极小多项式.

性质： $(1) m_A(x) | f(x)$

(2)设λ_0是特征值，则$m_A(\lambda_0) = 0$.

(3)相似矩阵有相同特征多项式和极小多项式.

(4)设$A = diag(A_1, \cdots, A_s)$， 则$m_A(x)$是$m_{A_1}(x), \cdots, m_{A_s}(x)$的最小公倍式.

(5)A可对角化当且仅当$m_A(x)$无重根.

5.5 幂零变换

定义: 若存在自然数m,使得$\sigma^m = 0$(相应地$A^m = 0$),则称线性变换σ(矩阵A)是幂零的.具有上述性质的最小的数m,称为线性变换(矩阵)的幂零次数.

命题: 幂零变换的特征值都是零.

推论: 非零的幂零变换不可能对角化.

5.5 幂零变换

定义: 设$\sigma : V \to V$为线性变换, V中有一向量$\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$,使得$\mathbf{e}, \sigma\mathbf{e}, \cdots, \sigma^{n-1}\mathbf{e}$构成$V$的一组基,且$\sigma^n\mathbf{e} = 0$. 在基底$e_1 = \sigma^{n-1}\mathbf{e}, \cdots, \mathbf{e}_{n-1} = \sigma\mathbf{e}, \mathbf{e}_n = \mathrm{e}$下,这个线性变换的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

称这个线性变换是“循环线性变换”. $\mathbf{e}, \sigma\mathbf{e}, \cdots, \sigma^{n-1}\mathbf{e}$称为$V$的循环基. 由循环基生成的子空间称为循环子空间.

5.6 循环子空间直和分解

定理: 对任意幂零线性变换$\sigma: V \to V$,空间V必定可分解为σ的不变线性子空间的直和$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$, 使得线性变换$\sigma$在每个子空间$W_i$上诱导的线性变换$\sigma|_{W_i}$是循环线性变换.

这个直和称为循环子空间直和分解.