离散数学(1)
Discrete Mathematics

第九章 集合

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

幂集与笛卡尔积

- 不理解有序对的定义，老师可以讲一下它的集合形式是什么含义吗？
  - 有序对$< x, y >$定义为$\{\{x\}, \{x, y\}\}$
  - $\{\{x\}, \{x, y\}\}$是由两个集合$\{x\}$和$\{x, y\}$构成的集合。将其作为定义可以满足定理9.3.1中有序对应当满足的两条性质

1. 当$x \neq y$时，$< x, y > \neq < y, x >$。

2. $< x, y > = < u, v >$的充要条件是

$x = u$且$y = v$。

幂集与笛卡尔积

- 老师，教材135页在描述幂集和笛卡尔积时，均提到了"与原集合层次不同"的说法，这里的层次不同应该怎么理解？谢谢老师
  - 可以将层次理解为由集合中花括号形成的结构。例如$\{\emptyset\}$仅有一层花括号，但是$P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$有两层花括号，两者由花括号形成的结构不同
- 笛卡尔积的实际意义是什么（或者说它的具体作用是啥）
  - 笛卡尔积是两个集合的元素组成的有序对的集合，是下一章介绍关系概念的基础

集合运算的性质和证明

- 什么时候写等号，什么时候写重言蕴含？
  - 表示集合相等时使用等号，表示公式间的关系时使用重言蕴含
- 第五题中的充要条件写到什么样才算一个比较合理的结果，尤其是第二小题感觉只能写到$A - B = A - C$
  - 尽量化简到不能再化简

给出下列命题成立的充要条件：

(1) $(A - B) \cup (A - C) = A$
(2) $(A - B) \oplus (A - C) = \emptyset$

  - 对于$(A - B) \cup (A - C) = A$
    - 没有化到最简：$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in - \vee x \in -C)$
    - 化到最简：$A \cap B \cap C = \emptyset$，$A \subseteq -(B \cap C)$
  - 对于$(A - B) \oplus (A - C) = \emptyset$
    - 没有化到最简：$(A - B) \subseteq (A - C) \wedge (A - C) \subseteq (A - B)$
    - 化到最简：$A - B = A - C$

集合运算的性质和证明

- 请问这节课上的结论哪些让直接用哪些不让直接用，谢谢
  - 课上给出的结论都可以直接使用
- 感觉自己对命题的证明只会用语言描述咋办
  - 可以参考课上的例题使用集合恒等式或者谓词逻辑证明

例2 对任意的集合A, B和C, 有

$A\cup B = A\cup C,\ A\cap B = A\cap C \ \Rightarrow B=C$

证明 方法1:集合恒等式

B	$= B\cap (A\cup B)$	吸收律
	$= B\cap (A\cup C)$	已知前提
	$= (B\cap A) \cup (B\cap C)$	分配律
	$= (A\cap C) \cup (B\cap C)$	已知前提
	$= (A\cup B) \cap C$	分配律
	$= (A\cup C) \cap C$	已知前提
	$= C$	吸收律

证明 方法2，谓词逻辑

由定义并利用反证法

假设$B\neq C$，不妨设存在x，使$(x\in B \wedge x\notin C)$

若$x\in A \Rightarrow (x\in A\cap B) \wedge (x\notin A\cap C)$

若$x\notin A \Rightarrow (x\in A\cup B) \wedge (x\notin A\cup C)$

均与已知条件$A\cup B = A\cup C,\ A\cap B = A\cap C$矛盾

因此只有 $B=C$。

作业相关

- 列举集合中的元素时注意集合的无序性与互异性

列出下列集合中的元素

$$A = \{z | z = \{x, y\} \land x \in \mathbb{Z} \land y \in \mathbb{Z} \land 0 \leq x \leq 2 \land -2 \leq y \leq 1\}$$

$$\begin{aligned} A = \{ & \{0,-2\}, \{0,-1\}, \{0,0\}, \{0,1\}, \\ & \{1,-2\}, \{1,-1\}, \{1,0\}, \{1,1\}, \\ & \{2,-2\}, \{2,-1\}, \{2,0\}, \{2,1\} \} \end{aligned}$$

这里的 $\{0,1\}$与$\{1,0\}$是相等的，不应该重复出现在集合A中

$\{0,0\}$与$\{1,1\}$包含重复元素，应该改为$\{0\}$与$\{1\}$

编程作业相关

- 请问编程作业对美观性的要求大概到什么程度？
  - 界面：能用，没有歧义就可以
  - 具备基本的可读性即可，没有特别高的要求。可以添加必要的注释

- 证（2）$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

$$
\begin{aligned}
& x \in P(A) \cup P(B) \\
\Leftrightarrow\ & x \in P(A) \lor x \in P(B) \\
\Leftrightarrow\ & x \subseteq A \lor x \subseteq B \\
\Leftrightarrow\ & (\forall y)(y \in x \to y \in A) \lor (\forall y)(y \in x \to y \in B) \\
\Rightarrow\ & (\forall y)((y \in x \to y \in A) \lor (y \in x \to y \in B)) \\
\Leftrightarrow\ & (\forall y)(y \in x \to y \in (A \cup B)) \\
\Leftrightarrow\ & x \subseteq A \cup B \\
\Leftrightarrow\ & x \in P(A \cup B)
\end{aligned}
$$

$$(\forall x)\ P(x) \lor (\forall x) Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \lor Q(x))$$

举例

例：求完全由n个布尔变量确定的布尔函数的个数。

	0 0	0 1	1 0	1 1	f(x1,x2)
f1	0	0	0	0	0
f2	0	0	0	1	$x_1 \wedge x_2$
f3	0	0	1	0	$x_1 \wedge \neg x_2$
f4	0	0	1	1	x_1
f5	0	1	0	0	$\neg x_1 \wedge x_2$
f6	0	1	0	1	x_2
f7	0	1	1	0	$x_1 \bar{\vee} x_2$
f8	0	1	1	1	$x_1 \vee x_2$
f9	1	0	0	0	$\neg x_1 \wedge \neg x_2$
f10	1	0	0	1	$x_1 \leftrightarrow x_2$
f11	1	0	1	0	$\neg x_2$
f12	1	0	1	1	$x_2 \rightarrow x_1$
f13	1	1	0	0	$\neg x_1$
f14	1	1	0	1	$x_1 \rightarrow x_2$
f15	1	1	1	0	$\neg x_1 \vee \neg x_2$
f16	1	1	1	1	1

- $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$中n个布尔变量的不同的状态数为2^n
- 每个状态有0，1两种取值，
- 故$f(x_1,x_2,\ldots x_n)$的布尔函数个数为 2^{2^n}

$f(x_1, x_2, \cdots x_n)$的布尔函数个数为2^{2^n}

例。求完全由n个布尔变量确定的布尔函数的个数。

解：设$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$不依赖于x_i的布尔函数类为$A_i, i = 1,2, \ldots, n$

不依赖于某个布尔变量的布尔函数个数为 $C(n,1)2^{2^{n-1}}$

不依赖于2个布尔变量的布尔函数个数为 $C(n,2)2^{2^{n-2}}$

……

不依赖于k个布尔变量的布尔函数个数为 $C(n,k)2^{2^{n-k}}$

根据容斥原理，满足条件的函数数目为：

$|-A_1 \cap -A_2 \cap \cdots \cap -A_n|$

$= 2^{2^n} - C_n^1 2^{2^{n-1}} + C_n^2 2^{2^{n-2}} - \cdots + (-1)^k C_n^k 2^{2^{n-k}} + \cdots$

$+ (-1)^n C_n^n 2$

定义：不依赖于

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 一个布尔函数，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 不依赖于变量 x_i 是指对于每一 $(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$ 都有 $f(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)$

$|-A_1\cap -A_2\cap\cdots\cap -A_n|$

$= 2^{2^n}-C_n^1 2^{2^{n-1}}+C_n^2 2^{2^{n-2}}-\cdots+(-1)^k C_n^k 2^{2^{n-k}}+\cdots$

$+(-1)^n C_n^n 2$

n=2时，有$|-A_1\cap -A_2| = 2^{2^2}-C_2^1 2^2+C_2^2 2 = 16-8+2=10$

举例

例. 求完全由n个布尔变量确定的布尔函数的个数。

	0 0	0 1	1 0	1 1	f(x1,x2)
f1	0	0	0	0	0
f2	0	0	0	1	$x_1 \wedge x_2$
f3	0	0	1	0	$x_1 \wedge \neg x_2$
f4	0	0	1	1	x_1
f5	0	1	0	0	$\neg x_1 \wedge x_2$
f6	0	1	0	1	x_2
f7	0	1	1	0	$(\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_2)$
f8	0	1	1	1	$x_1 \vee x_2$
f9	1	0	0	0	$\neg x_1 \wedge \neg x_2$
f10	1	0	0	1	$(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2)$
f11	1	0	1	0	$\neg x_2$
f12	1	0	1	1	$x_1 \vee \neg x_2$
f13	1	1	0	0	$\neg x_1$
f14	1	1	0	1	$\neg x_1 \vee x_2$
f15	1	1	1	0	$\neg x_1 \vee \neg x_2$
f16	1	1	1	1	1

- $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$中n个布尔变量的不同的状态数为2^n
- 每个状态有0，1两种取值，
- 故$f(x_1, x_2, \cdots x_n)$的布尔函数个数为2^{2^n}

就是在所有比1大的整数中，除了1和它本身以外没有别的约数，这种整数叫做质数，质数又叫做素数。

举例

例4。求不超过120的素数个数。

- 因11^2=121，故不超过120的合数必然是2、3、5、7的倍数，而且不超过120的合数的因子不可能都超过11。
- 设A_i为不超过120的数 i的倍数集， i=2，3，5，7。

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{120}{2} \right\rfloor = 60, |A_3| = \left\lfloor \frac{120}{3} \right\rfloor = 40,$$

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{120}{5} \right\rfloor = 24, |A_7| = \left\lfloor \frac{120}{7} \right\rfloor = 17,$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 3} \right\rfloor = 20, |A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{10} \right\rfloor = 12,$$

$$|A_2 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{14} \right\rfloor = 8, |A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{15} \right\rfloor = 8,$$

$$|A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{21} \right\rfloor = 5，|A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{35} \right\rfloor$$
$$= 3,$$
$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3 \times 5} \right\rfloor = 4,$$
$$|A_2 \cap A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3 \times 7} \right\rfloor = 2,$$
$$|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 1,$$
$$|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{3 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 1,$$

设A_i为不超过120的数 i的倍数集，i=2，3，5，7。

$$\left|-A_2 \cap -A_3 \cap -A_5 \cap -A_7\right| = 120 - |A_2| - |A_3| - |A_5|$$
$$- |A_7| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_5| + |A_2 \cap A_7|$$
$$+ |A_3 \cap A_5| + |A_3 \cap A_7| + |A_5 \cap A_7|$$
$$- |A_2 \cap A_3 \cap A_5| - |A_2 \cap A_3 \cap A_7|$$
$$- |A_2 \cap A_5 \cap A_7| - |A_3 \cap A_5 \cap A_7|$$
$$+ |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7|$$

注意：因为27个数中排除了2，3，5，7四个素数，又包含了1这个非素数。故所求的不超过120的素数个数为：27+4−1=30

$$= 120 - (60 + 40 + 24 + 17) + (20 + 12 + 8$$
$$+ 8 + 5 + 3) - (4 + 2 + 1 + 1)$$
$$= 27.$$

在计算机领域中广泛使用的RSA 公钥密码算法是以欧拉函数为基础的

例7。欧拉函数$\Phi(n)$是求小于n且与n互素的数的个数。

- 分析的化身

  欧拉进行计算看起来毫不费劲儿，就像人进行呼吸，像鹰在风中盘旋一样。

- 他是历史上最多产的数学家。
  - 彼得堡学院为了整理他的著作整整花了47年。
  - 欧拉常常在两次叫他吃晚饭的半小时的时间里赶出一篇数学论文
  - 欧拉是史上发表论文数第二多的数学家，全集共计75卷；他的纪录一直到了20世纪才被保羅·埃尔德什打破
  - "读欧拉的著作吧，在任何意义上，他都是我们的大师"

  ------拉普拉斯

- 人生波折：失明，火灾
- 1783年9月18日，他77岁的时候，欧拉写出了他对天王星轨道的计算。他在喝着茶跟孩子玩的时候，中风发作。手中烟斗掉了，只说出一句话"我要死了"，"欧拉便停止了生命和计算。"

举例

例：欧拉函数Φ(n)是求小于n且与n互素的数的个数。

解：若n分解为不同素数的乘积$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$

设1到n的n个数中为p_i倍数的集合为$A_i, |A_i| = \frac{n}{p_i}, i = 1,2,\ldots,k$

对于$p_i \neq p_j$, $A_i \cap A_j$既是p_i的倍数也是p_j的倍数

$$\left|A_i \cap A_j\right| = \frac{n}{p_i p_j}, i, j = 1,2,\ldots,k, i \neq j$$

$$\Phi(n) = |-A_1 \cap -A_2 \cap \cdots \cap -A_n|$$
$$= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \cdots + \frac{n}{p_n}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \cdots + \frac{n}{p_1 p_k}\right) - \cdots + \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_k}$$
$$= \mathrm{n}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{p}_1}\right)\left(1 - \frac{1}{\mathrm{p}_2}\right) \ldots (1 - \frac{1}{\mathrm{p}_\mathrm{k}})$$

$$\phi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_k})$$

例续：欧拉函数$\Phi(n)$是求小于n且与n互素的数的个数。

- $8=2^3, \Phi(8)=8\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=4$

  小于8且与8互素的数为1、3、5、7
- $60=2^2\times 3\times 5,$
- $\Phi(60)=60\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=1,$

  即比60小且与60无公因子的数有16个：1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59

9.7 集合论公理系统

- 集合论公理系统(axiom systems for set theory)是一阶谓词公理系统的扩展，它包括一阶谓词公理系统和几个集合论公理。集合论公理系统可以推出一阶谓词的所有定理，也可以推出集合论的定理。
  - 悖论的发现促使人们借助于公理化方法，以期排除集合论中的已知悖论并系统地整理G.康托的理论和方法

- ZFC公理系统用10组公理描述集合的基本性质和集合实例的定义方式。
- ZFC公理系统已经被普遍接受为现代数学的基础，其基本思想是：
  - 把“集合”当作整个数学的第一概念，没有定义，也不可能定义。
  - 建立一个一阶逻辑语言，用于精确地表达关于集合的命题。
- 设定若干公理，用于指定集合的构造方法和必须具备的性质，以避免出现矛盾。
- 应用一阶逻辑推理系统证明集合定理，即关于集合的永真命题。

(ZF1)外延公理：一个集合完全由它的元素所决定。如果两个集合含有同样的元素，则它们是相等的。

(ZF2)空集合存在公理：即存在一集合s，它没有元素。

(ZF3)无序对公理：也就是说，任给两个集合x、y，存在第三个集合z，而w∈z当且仅当w=x或者w=y。这个公理实际说的是，给定两个集合x和y，我们可以找到一个集合A，它的成员完全是x和y。

(ZF4)并集公理：也就是说，任给一集合x，我们可以把x的元素的元素汇集到一起，组成一个新集合。

准确的定义："对任意集合x，存在集合y，使w∈y当且仅当存在z使z∈x且w∈z"。

(ZF5)幂集公理：也就是说，任意的集合x，P（x）也是一集合。

ZF公理系统

准确的定义："对任意集合x，存在集合y，使z∈y当且仅当对z的所有元素w，w∈x"。

(ZF6)无穷公理：也就是说，存在一集合x，它有无穷多元素。

准确的定义："存在一个集合，使得空集是其元素，且对其任意元素x，x∪{x}也是其元素。"

根据皮亚诺公理系统对自然数的描述，此即：存在一个包含所有自然数的集合。

(ZF7)分离公理模式："对任意集合x和任意对x的元素有定义的逻辑谓词P(z)，存在集合y，使z∈y当且仅当z∈x而且P(z)为真"。

(ZF8)替换公理模式：也就是说，对于任意的函数F（x），对于任意的集合t，当x属于t时，F（x）都有定义（ZF中唯一的对象是集合，所以F（x）必然是集合）成立的前提下，就一定存在一集合s，使得对于所有的x属于t，在集合s中都有一元素y，使y=F（x）。也就是说，由F（x）所定义的函数的定义域在t中的时候，那么它的值域可限定在s中。

(ZF9)正则公理：也叫基础公理。所有集都是良基集。说明一个集合的元素都具有最小性质，例如，不允许出现x属于x的情况。

（AC）选择公理：对任意集c存在以c为定义域的选择函数g，使得对c的每个非空元素x，g(x)∈x。

ZFC公理系统

- 公理集合论是由德国数学家策梅洛(Zermelo)所开创。
  - 1908年他首先 提出了7组集合公理。这些公理是用自然语言和数学语言进行描述的。
  - 1921年弗兰克尔（Frankel）指出这些公理不足以证明某些特定集合的存在性。
  - 1922年弗兰克尔用一阶逻辑语言对策梅洛的公理系统进行完善，形成了ZFC公理系统，其中Z指策梅洛，F指弗兰克尔，C指选择公理（axiom of choice）。
  - 几乎同时斯克莱姆（Skolem）也在做这项工作，并于1922年独立于弗兰克尔提出了ZFC公理系统中的替换公理。
  - 1925年，冯诺依曼在其博士论文中指出这个公理系统不能排除包含自己的集合，并提出正则公理（axiom of regularity）以排除这个现象。目前，ZFC公理系统共有10组公理，被普遍接受为数学的严格基础。

9.7.1 ZFC集合论公理系统

- ZFC公理系统是著名的集合论公理系统
- 其它还有GB(Godel & Bernays)公理系统等
- ZFC公理系统共包含10条集合论公理
- 但并非彼此独立

第(3)无序对集合存在与 第(5)子集公理模式可由其它公理推出

- 公理化是一种数学方法。
- 最早出现在二千多年前的欧几里德几何学中，当时认为“公理’（如两点之间可连一直线）是一种不需要证明的自明之理，而其他所谓“定理”则是需要由公理出发来证明的。
- 18世纪德国哲学家康德认为，欧几里德几何的公理是人们生来就有的先验知识。

- 19世纪末，德国数学家希尔伯特在他的几何基础研究中系统地提出了数学的公理化方法。他认为每一种数学理论都应以“**基本概念——公理——定理**”的模式来建立：这里的公理是作为理论出发点的科学假设，它们要求有完备性(任何定理可由此导出)，独立性(去掉其中之一有的定理就不能成立)和相容性(公理间是无矛盾的)，但公理本身也由人们作各种解释。20世纪以来，整个数学几乎都已按希尔伯特的模式得到公理化处理。

9.7 集合论公理系统

- 集合论公理系统的一个基本思想是“任一集合的所有元素都是集合”。

  集合论研究的对象只是集合。除集合外的其它对象（如有序对、数字、字母）都要用也完全可以用集合来定义。

- 集合论公理系统的主要目的：

  （1）判定集合的<u>存在性</u>；

  （2）由已知集合构造出所有合法的集合（<u>合法性</u>）

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\bar{\vee}\, x \in B\}$$

元素x $\in$ 集合A

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$\mathrm{A} = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

A和B不相交 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

$$E = \{\, x \mid x = x \,\}$$

对任意的集合A，$\emptyset \subseteq A$

$$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$$

$$\cup\emptyset = \emptyset$$

$$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

$\cap\emptyset$无意义

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

（1）外延公理

- 两集合相等的充要条件是它们恰好具有同样的元素。$(\forall x)(\forall y)(x = y \leftrightarrow (\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y))$
- 与定理9. 2. 1形式相同。

一个集合由其元素唯一确定

> 两个集合A, B相等，当且仅当它们**具有相同**的元素。则记作 $A = B$；否则记作 $A \neq B$。

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$

$$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \lor x \notin B\}$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\bar{\lor}\, x \in B\}$$

元素x ∈ 集合A

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$\mathrm{A} = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \land B \subseteq A)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$E = \{\, x \mid x = x \,\}$$

$$A \subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

对任意的集合A， $\emptyset \subseteq A$

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \land A \neq B)$$

A和B不相交 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \land x \in B)$

$$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \land x \in z)\}$$

$$\cup\emptyset = \emptyset$$

$$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

$\cap\emptyset$无意义

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

(2) 空集存在公理

- 存在不含任何元素的集合(空集∅)。

  $(\exists x)(\forall y)(y \notin x)$

- 该公理定义了集合论中的第一个集合——空集∅ 。

- 且由外延公理可知，空集是唯一的。

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

(3) 无序对集合存在公理

- 对任意的集合 x 和y，存在一个集合 z, 它的元素恰好为 x 和y。

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(u \in z \leftrightarrow ((u = x) \vee (u = y)))$$

- 已知 x 和y 是集合，由该公理可构造

$z = \{x, y\}$ 也是集合。

当$x = y$ 时则构造出恰好有一个元素的集合。

有了该公理，便可无休止地构造许多具体的集合。

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ $\qquad$ $-A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ $\qquad$ $A - B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\overline{\vee}\, x \in B\}$

元素x $\in$ 集合A

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ $\qquad$ $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$E = \{\, x \mid x = x \,\}$

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$

对任意的集合A，$\emptyset \subseteq A$

$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

A和B不相交 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$

$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$ $\qquad$ $\cup\emptyset = \emptyset$

$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$ $\qquad$ $\cap\emptyset$无意义

$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

(4) 并集合存在公理

- 对任意的集合 x，存在一个集合y, 它的元素恰好为 x 的元素的元素。

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (\exists u)(z \in u \wedge u \in x))$$

- 任给一集合x，我们可以把x的元素的元素汇集到一起，组成一个新集合。
- 解决了集合的广义并的存在性

（集合的广义并是集合）

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\overline{\vee}\, x \in B\}$

$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$

$A - B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$

元素x $\in$ 集合A

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$E = \{ x \mid x = x \}$

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$

对任意的集合A，$\emptyset \subseteq A$

A和B不相交 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$

$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$

$\cup\emptyset = \emptyset$

$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$

$\cap\emptyset$无意义

$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

(5) 子集公理模式(分离公理模式)

- 对任意的谓词公式 $P(z)$，对任意的集合 x，存在一个集合y，它的元素z恰好既是 x 的元素又使 $P(z)$ 为真。

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge P(z)))$$

- 对任意的集合x，存在x的子集y，y的元素z使$P(z)$为真.
- 不只是一条公理，而是无限多条有同样模式的公理，
- 可解决交集、差集、广义交、广义并和笛卡儿积的存在性。

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

例：以交集和差集为例

定理9.7.1 对任意的集合A，交集A∩B是集合。

- 对任意的集合x，存在x的子集y，y的元素z使$P(z)$为真。
- 对任意的集合A，存在A的子集A∩B，其元素使$z\in B$为真

$$y = \{ z \mid z\in x \wedge P(z)\} \qquad y\subseteq x,\ y\text{是 }x\text{的子集,}$$

$$A\cap B = \{ z \mid z\in A \wedge z\in B\}$$

- 子集公理保证了上述集合的存在性。

$A-B = \{ z \mid z\in A \wedge z\notin B\}$ 差集仅需将$P(z)$ 代为$z\notin B$。

罗素悖论的解决

- $H = \{\, x \mid x \text{ 是一个集合} \wedge x \notin x \,\}$

  万有集合

- 子集公理模式(分离公理模式)：对任意的集合x，存在x的子集y，y的元素z使$P(z)$为真.
- $P(z) = z \notin z$ -> $H=\{x|P(x)\}$ **是集合吗？**
- **套用**子集公理模式(分离公理模式)
- 子集公理模式：对任意的集合x，存在x的子集y，y的元素z使$P(z)$为真.

  集合不能独立定义，需要从已经存在的集合中分离出来；

  所有集合的集合不存在！

定理9.7.5 万有集不存在定理

不存在集合A，使任一集合都是A的元素。

- **证明：** 假设存在集合A，使任一集合都是A的元素。选$P(x)$为$x \notin x$, 依据子集公理，存在集合

$$A_0 = \{\, x \mid x \in A \wedge x \notin x \}$$

即$\boxed{x \in A_0}$ 等价于 $x \in A \wedge x \notin x$

取 $x = A_0$，则有

$A_0 \in A_0$等价于$A_0 \in A \wedge A_0 \notin A_0$。

因为$A_0 \in A$为真，所以$A_0 \in A_0$等价于$A_0 \notin A_0$, 矛盾！

所以，$A_0 \notin A$，与假设矛盾，定理得证。

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$A - B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\overline{\vee}\, x \in B\}$

元素x ∈ 集合A

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$\mathrm{A} = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$E = \{\ x \mid x = x\ \}$

$A \subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$

对任意的集合A，$\emptyset \subseteq A$

$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

A和B不相交 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$

$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$

$\cup\emptyset = \emptyset$

$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$

$\cap\emptyset$无意义

$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

为什么∩∅无意义？

- 假设∩∅为集合，则有广义交的定义，

$$\cap A = \{ x \mid (\forall z)\, z \in A \to x \in z \}$$

$$\cap \varnothing = \{ x \mid (\forall z)\, z \in \varnothing \to x \in z \}$$

$$x \in \cap \varnothing$$ **永真**

- 则∩∅为所有集合的集合，与上述定理矛盾，因此规定∩∅不存在。

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\bar{\vee}\, x \in B\}$$

元素x $\in$ 集合A

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$E = \{\ x \mid x = x\ \}$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

对任意的集合A，$\emptyset \subseteq A$

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

A和B不相交 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$

$$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$$

$$\cup\emptyset = \emptyset$$

$$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

$\cap\emptyset$无意义

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

（6）幂集合公理（集合的幂集是集合）

- 对任意的集合 x，存在一个集合y, 它的元素恰好是 x 的子集。

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (\forall u)(u \in z \to u \in x))$$
$$(\forall A)(\exists P(A))(\forall x)(x \in P(A) \leftrightarrow x \subseteq A))$$

- 对任意的集合A，存在一个集合P(A)，恰好以A的一切子集为元素。故集合的幂集是集合。
- 注：后一写法非正式，仅用于帮助理解。

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

(7) 正则公理

- 对任意的非空集合 x，存在 x 的一个元素，它和 x 不相交。

$$(\forall x)(x \neq \emptyset \rightarrow (\exists y)(y \in x \wedge (x \cap y = \emptyset)))$$

- 对任意非空集合x，x至少有一元素y使$x \cap y$为空集
- 此时称该元素为集合 x 的一个极小元。
- 结论：任一非空集合都有极小元。

  不存在以自身为元素的集合

  排除奇异集合

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

例: 设 $B=\{\{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$， $B_1=\{\emptyset\}$,

则 $B_1 \in B$ 且 $B_1 \cap B = \Phi$,

所以B_1是B中的极小元。

设 $B_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$， 尽管 $B_2 \in B$,

但 $B_2 \cap B = \{\{\emptyset\}\}$,

所以B_2不是B中的极小元。

（7） 正则公理

- 对任意的非空集合 x，存在 x 的一个元素，它和 x 不相交。

$$(\forall x)(x \neq \emptyset \to (\exists y)(y \in x \wedge (x \cap y = \emptyset)))$$

- 对任意非空集合x，x至少有一元素y使$x \cap y$为空集
- 此时称该元素为集合 x 的一个极小元。

讨论

- 利用正则公理可以证明不存在下列形式的集合：
- 1、$x \in x$：如果这样的集合x存在，那么$\{x\}$只有x一个元素，但$\{x\} \cap x = \{x\}$非空，不合于正则公理。
- 2、所有集合组成的集合：如果这个集合存在，那么根据第一条必然不是自身的元素，但是与定义矛盾。
- 3. 不存在无限递降的集合序列
- 对任何非空的传递集合A，必有$\emptyset \in A$

不存在无穷递降的集合列

证明：

- $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \cdots \ni x_n \ni \cdots$
- 利用正则公理，构造集合 $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$。假设 x_i为最小元，由于$x_{i+1} \in x_i$，故$x_i \cap A \neq \emptyset$ 因此该集合不存在极小元，矛盾。从而不存在无穷递降的集合列。

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

（8） 无穷公理

存在一个由所有自然数组成的集合

$$(\exists x)(\phi \in x \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow (y \cup \{y\}) \in x))$$

$$(\exists N)(\phi \in N \wedge (\forall y)(y \in N \rightarrow y^{+} \in N))$$

9.7.4 无穷公理和自然数集合

- 自然数的集合表示方法：
  - Zermelo 1908年曾给出一种方法：
  - $0 = \emptyset$，$1 = \{\emptyset\}$，$2 = \{\{\emptyset\}\}$，…
  - 满足$0 \in 1 \in 2 \in \ldots$。但‘$\in$’关系不满足传递性。
  - 即由 $A \in B \wedge B \in C$ 成立，却推不出 $A \in C$ 成立。
  - 未能准确刻画自然数本身所固有的良好性质。
- 需注意每个自然数均包含两方面的信息：

  （1）**序数**（排序） order

  （2）**基数**（对应的个数）cardinal

后继与自然数

1924年，Von Neumann在满足序数与基数两种性质的意义下，通过定义后继，给出了另一种自然数的表示：

定义9.7.3 前驱与后继

- 对任意的集合A，定义集合

$$A^{+} = A \cup \{A\}$$

A^{+}称为A的后继，A称为A^{+}的前驱。

定义9.7.4 用后继定义自然数

- 集合 $0 = \emptyset$ 是一个自然数。若集合n是一个自然数，则集合$n+1 = n^{+}$也是一个自然数。

9.7.4　无穷公理和自然数集合

按照上述定义，每个自然数可表示为：

$$0=\phi$$

$$1=0^+=0\cup\{0\}=\{0\}=\{\phi\}$$

$$2=1^+=1\cup\{1\}=\{0,1\}=\{\phi,\{\phi\}\}$$

$$3=2^+=2\cup\{2\}=\{0,1,2\}=\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$$

$$\ldots$$

$$n+1=n^+=n\cup\{n\}=\{0,1,\cdots,n\}.$$

9.7.4 无穷公理和自然数集合

定义9.7.5 自然数的性质

- 对任意的自然数 m 和 n

$$m < n \Leftrightarrow m \subset n \Leftrightarrow n > m$$

$$m \leq n \Leftrightarrow m \subseteq n \Leftrightarrow n \geq m$$

定义9.7.6 集合的三歧性

- 对集合A，如果对任意的集合$A_1 \in A$和 $A_2 \in A$，使

  $A_1 \in A_2$， $A_1 = A_2$， $A_2 \in A_1$

  三式中恰好有一个成立，就称集合A有三歧性。

定理9.7.11 自然数的三歧性

- 自然数集合N有三歧性。
- 每个自然数都有三歧性。即

$$(\forall m)(\forall n)(m \in N \wedge n \in N \rightarrow m < n \vee m = n \vee m > n)$$

单选题 1分

$\cup 2021 = ?$

A 0

B 2020

C 2021

D 2022

提交

自然数运算

- $\cup 2021 = 2020$

$$2021 = \{0, 1, \cdots, 2020\}$$

- $\cap 2021 = 0$
- $\cap \{1921, 2021\} = 1921$

$$n \subset n+1$$

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

(9) 替换公理模式

- 对于任意的谓词公式$P(x, y)$，如果对任意的 x **存在唯一**的y使得$P(x, y)$为真，那么对所有的集合t 就存在一个集合s，使 s中的元素 y恰好是 t中元素 x 所对应的那些y。

$$(\forall x)(\exists ! y)P(x,y) \to (\forall t)(\exists s)(\forall u)(u \in s \leftrightarrow (\exists z)(z \in t \land P(z,u)))$$

- 其中$(\forall x)(\exists ! y)P(x,y)$表示$(\forall x)(\exists y)(P(x,y) \land (\forall z)(P(x,z) \to z = y))$，符号 $(\exists ! y)$ 表示存在唯一的y。
- 替换公理是子集公理模式的二元推广。

用替换公理等的举例证明(P152)

已知u和v是集合,下面证明 {u, v}也是集合。

由空集公理， ∅是集合。

由幂集公理，P(∅)={∅}是集合。

P ({∅})={∅, {∅}}也是集合。

令集合 t ={∅, {∅}}, 定义 $P(x, y)$为P(∅, u)=T

P({∅}, v)=T, 则 t 和 $P(x, y)$满足替换公理的前提，

由替换公理可得，存在由u和v构成的集合s ={u, v}。

$$(\forall x)(\exists! y)P(x,y) \rightarrow (\forall t)(\exists s)(\forall u)(u \in s \leftrightarrow (\exists z)(z \in t \wedge P(z,u)))$$

9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

（10） 选择公理

- 对任意的关系R，存在一个函数 F，F 是 R 的子集，而且 F 和 R 的定义域相等
- $(\forall 关系R)(\exists 函数F)(F \subseteq R \wedge dom(R) = dom(F))$
- 在第11章函数中还将详细介绍该公理。

10.1.1 二元关系（有序对的集合）

- 如果一个集合满足以下条件之一：

1. 集合非空，且它的元素都是有序对;
2. 集合是空集;

则称该集合为一个二元关系，记作R。

- 一般的关系R不一定是函数，$\because R$不保证单值性.
- 对某些$x \in dom(R)$, 有y_1，y_2，…，

  使$y_1 \in ran(R)$, $y_2 \in ran(R)$, …,

  且$< x, y_1 > \in R$, $< x, y_2 > \in R$, … .

  这时x有多个值y_1, y_2, …与之对应.
- 为了构造函数f，只要对任意的$x \in dom(R)$, 从$< x, y_1 >, < x, y_2 >$, … 中任取一个放入f 中.
- 则f 是单值的, $f \subseteq R$, 且有$dom(f) = dom(R)$.
- F是函数 $f : dom(R) \to ran(R)$.
- 多个有序对可任选其一，所以构造的f可有多个

集合的存在性

- 定理9.7.1 交集存在定理

  对任意的集合 A和 B，交集 $A \cap B$是集合。

- 定理9.7.2　差集存在定理

  对任意的集合 A和 B，差集 $A-B$是集合。

- 定理9.7.3　广义交存在定理

  对任意的非空集合 A，广义交$\cap A$是集合。

集合的存在性

- 定理9.7.4　笛卡儿积存在定理

  对任意的集合 A和 B，笛卡儿积 $A \times B$是集合。

- 定理9.7.5　万有集不存在定理

  不存在集合A，使任一集合都是 A的元素。

- Russell悖论

集合的重要性质

- 定理9.7.6 集合的重要性质1
  对任意的集合A， $A \notin A$。
- 定理9.7.7 集合的重要性质2
  对任意的集合 A和 B，有 $\neg(A \in B \land B \in A)$
- 定理9.7.8 传递集合的性质7
  对任意非空的传递集合 A，有 $\emptyset \in A$。

10条集合论公理

- 外延公理（性质）：一个集合完全由它的元素决定
- 空集存在公理：存在一个不含任何元素的集合
- 无序对集合存在公理
- 并集合存在公理
- 子集公理模式(分离公理模式)：集合不能独立定义，需要从**已经存在**的集合中分离出来
- 幂集合公理
- 正则公理（性质）：任何集合都有极小元
- 无穷公理：存在一个归纳集合
- 替换公理模式
- 选择公理

10条集合论公理

- 无穷公理的本质：可以通过类似于数学归纳法的方法构造出一个无穷集合（自然数集合）
- 空集公理、无序对公理、并集公理、幂集公理、无穷公理、分离公理和替换公理是对康托尔概况原则的具体化：既保留原规则的合理内容，又消除了悖论
- 上述公理+选择公理：集合存在性公理
- 外延公理+正则公理：对集合的限制（刻画）
  - 外延：说明集合相等的条件
  - 正则：防止低阶集合包含高阶集合的可能，避免悖论

10条集合论公理

- 分离公理模式和替换公理模式是两条公理模式
  - 允许用公式代之
  - 本质上断言一个集合在一个映射下的像也是一个集合
- 使用上述公理系统，可以描绘出集合论的积累分层时间
  - 从空集开始，迭代地使用并集公理和幂集公理，建立起越来越大的集合系统。

科学悖论是促进理论发展的一种动力。

第九章 主要内容

- 集合的谓词与图形表示法；
- 幂集、广义并与广义交、笛卡尔积的计算；
- 某些特殊集合（如传递集合）的概念；
- 集合的基本运算、主要证明方法；
- 有限集合的基数；
- 自然数在集合论中的表示（无穷公理）
- 集合论公理系统的一般了解

离散数学(1)
Discrete Mathematics

第十章 关系

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

数学的基本概念？

大部分数学家相信……

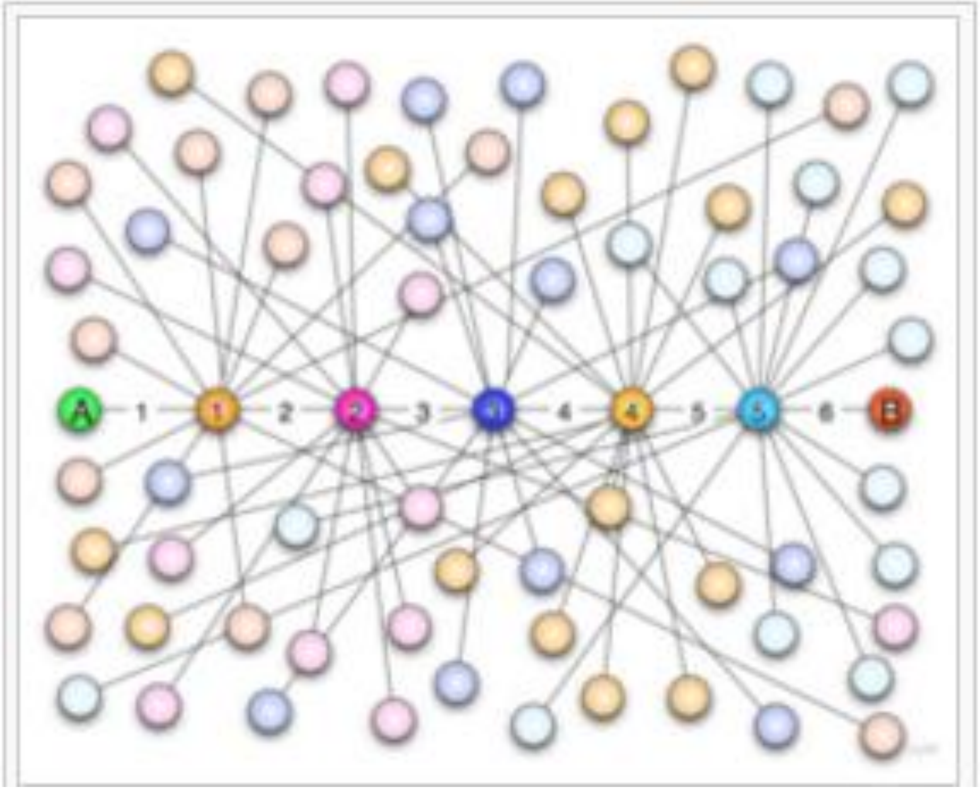
- 任何数学理论在某种意义上是关于集合的理论
- 任何数学命题是真的都意味着它在ZFC中得到证明。
  - 集合论来刻画经典数学的**基本概念**
    - **关系，函数，序，数**
  - 困难：有很多数学问题，包括连续统假设。

关系

- 关系是数学中最重要的概念之一
  - 父子关系、师生关系
  - 等于、大于、小于关系
  - 直线的平行、垂直关系
- 在计算机科学中有广泛应用
  - 人工智能
  - 程序设计
  - 数据库管理—关系数据库

关系很强大：六度分隔理论

- Six Degrees of Separation：1967，哈佛大学心理学教授斯坦利·米尔格拉姆：平均只需要5个中间人就可以联系任何两个互不相识的美国人



数学解释

- 若每个人平均认识260人，其六度就是260^6＝308,915,776,000,000（约300万亿）。消除一些节点重复，那也几乎覆盖了整个地球人口若干多倍。

第十章　关系

二元关系

- 最简单的关系
- 可看作对应(Correspondence)或者映射(Map)
- 关系的要素成对出现，且这两个对象有顺序的。

- 有序对：由两个元素x和y（允许x=y）按给定次序排列组成的二元组称为一个有序对或序偶，记作<x, y>，其中 x 是它的第一元素，y 是它的第二元素。
- 用集合的形式，有序对<x, y>定义为

  $$< x, y > = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$
- 有序对<x, y>具有以下性质：

  1. 当$x \neq y$ 时，<x, y> ≠ <y, x>。

  2. <x, y> = <u, v>的充要条件是 $x = u$ 且 $y = v$。

笛卡儿积(Cartesian product)

- 设A, B为集合，用A中元素为第一元素， B中元素为第二元素构成有序对。所有这样的有序对组成的集合称为A和B的笛卡儿积，记作$A\times B$。
  A和B的笛卡儿积的符号化表示为
  $$A \times B = \{<x, y>|x \in A \wedge y \in B\}$$
- $A=\{\varnothing\}$,
- $P(A)\times A =\{<\varnothing,\varnothing>, <\{\varnothing\},\varnothing>\}$

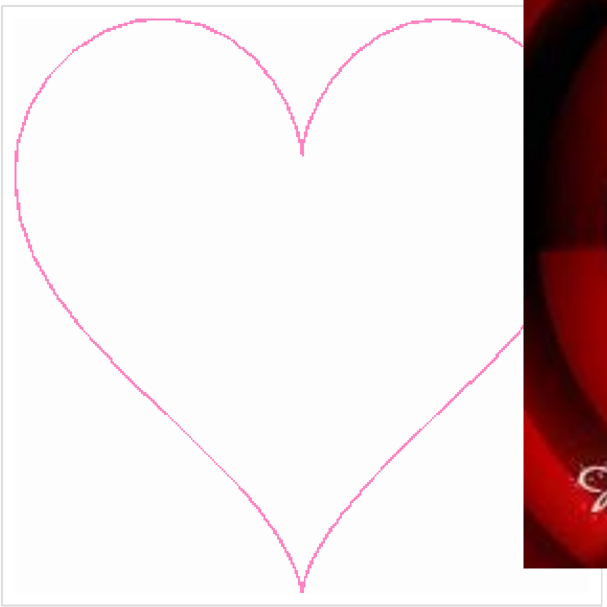
笛卡尔(1596年-1650年)

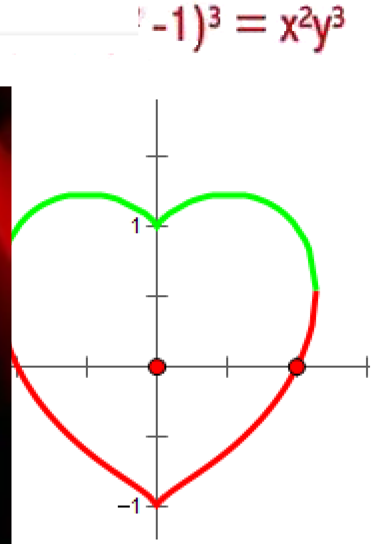
- René Descartes
- 法国哲学家、数学家、物理学家
- “我思故我在”
  - “普遍怀疑”的终点。他从这一点出发确证了人类知识的合法性。
- 解析几何之父，西方现代哲学思想的奠基人
- 数学史上最浪漫的故事
  - 瑞典一个小公国18岁的公主克里斯蒂娜
  - 日日给公主写信，因被国王拦截，克里斯蒂娜一直没收到笛卡尔的信。笛卡尔在给克里斯蒂娜寄出第十三封信后就气绝身亡了。

笛卡尔(1596年-1650年)

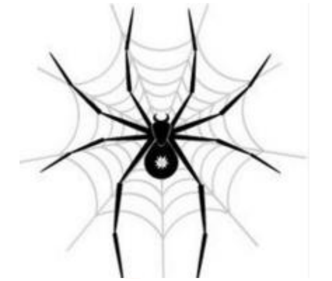
- 心形线

$$x = 16(\sin t)^3$$
$$y = 13\cos t - 5\cos 2t - 2\cos 3t - \cos 4$$





解析几何的创立



- 思考
  - 几何图形是直观的，而代数方程是比较抽象的，能不能把几何图形和代数方程结合起来，也就是说能不能用几何图形来表示方程呢？
  - “点”和“数”联系起来。
- 据说有一天，笛卡尔生病卧床，病情很重
  - 屋顶角上的一只蜘蛛，拉着丝垂了下来。一会功夫，蜘蛛又顺这丝爬上去，在上边左右拉丝。
  - 把蜘蛛看作一个点。他在屋子里可以上，下，左，右运动，能不能把蜘蛛的每一个位置用一组数确定下来呢？
  - 屋子里相邻的两面墙与地面交出了三条线，如果把地面上的墙角作为起点，把交出来的三条线作为三根数轴，那么空间中任意一点的位置就可以在这三根数轴上找到有顺序的三个数。
  - 反过来，任意给一组三个有顺序的数也可以在空间中找到一点P与之对应，同样道理，用一组数(x, y)可以表示平面上的一个点，平面上的一个点也可以用一组两个有顺序的数来表示，这就是坐标系的雏形。

Setting

有集合A，B，若B为空集，则

A $A \times B = \emptyset$

B $A \times B \neq B \times A$

C $A \times B = B \times A$

Submit

笛卡尔积及其性质

- 不适合交换律 $A\times B\neq B\times A \quad (A\neq B, A\neq\emptyset, B\neq\emptyset)$
- 不适合结合律 $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C) \quad (A\neq\emptyset, B\neq\emptyset)$
- 对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$$

- 若A或B中有一个为空集，则$A\times B$就是空集.

$$A\times\emptyset = \emptyset\times B = \emptyset$$

- 若$|A| = m, |B| = n$,则 $|A\times B| = mn$

有序对与笛卡儿积

- 证明: 对任意三个集合A，B，C有

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

证明： $<x, y>\in A\times(B\cup C)$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$$

$$\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$$

$$\Leftrightarrow <x, y>\in A\times B\vee <x, y>\in A\times C$$

$$\Leftrightarrow <x, y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$$

单选题 1分

Setting

设A，B，C，D是任意集合，判断下列命题是否正确？

❖ $A\times B = A\times C \Rightarrow B = C$

A 正确

B 不正确

提交

有序对与笛卡儿积

- 例：设A，B，C，D是任意集合，判断下列命题是否正确？

$$A\times B=A\times C \ \Rightarrow\ B=C$$

  - 不正确。取$A=\emptyset$，$B\neq C$，$A\times B=A\times C=\emptyset$

$$A-(B\times C)=(A-B)\times(A-C)$$

  - 不正确。取$A=B=\{1\}$，$C=\{2\}$，

$$A-(B\times C)=\{1\}-\{<1,2>\}=\{1\}$$

而$(A-B)\times(A-C)=\emptyset\times\{1\}=\emptyset$

10.1 二元关系(Binary Relations)

10.1.1 二元关系（有序对的集合）

- 如果一个集合满足以下条件之一：

1. 集合非空，且它的元素都是有序对;
2. 集合是空集；

则称该集合为一个二元关系，记作R。

- 二元关系也简称关系。

对于二元关系R，如果 $\langle x, y\rangle \in R$，也可记作$xRy$。

如果$<x,y>\notin R$, 则记作$x \not{R}\, y$。

- 实例：R=$\{<1,2>,<a,b>\}$, S=$\{<1,2>,a,b\}$.
- R是二元关系, 当a, b不是有序对时，S不是二元关系
- 根据上面的记法，可以写 $1R2$, aRb, $a \not{R}\, c$ 等.

10.1 二元关系(Binary Relations)

定义10.1.1　A到B的二元关系

- 设A, B为集合，$A \times B$ 的**任一子集**所定义的二元关系称为A到B 的二元关系。
- 特别当 $A = B$ 时，$A \times A$的**任一子集**称为A上的一个二元关系。
- 例4 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$，$R_1=\{<0,2>\}$，$R_2=A \times B$, $R_3=\varnothing$，$R_4=\{<0,1>\}$.
- 那么 R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B 的二元关系,
- R_3和R_4同时也是 A上的二元关系.

n元关系

定义10.1.2　n元关系（n元组的集合）

- 若 $n \in N$ 且 $n > 1$，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是n个集合，则
  $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

的任一子集称为从 A_1到 A_n上的一个n元关系。

10.1 二元关系(Binary Relations)

小于等于关系 L_A, 整除关系D_A, 包含关系$R_{\subseteq}$定义：

$L_A = \{< x,y > | x,y \in A \wedge x \leq y\}, A\subseteq R$，$R$为实数集合

$D_A = \{< x,y > | x,y \in A \wedge x$整除$y\}, A\subseteq Z*, Z*$为非0整数集

$R_{\subseteq} = \{< x,y > | x,y \in A \wedge x\subseteq y\}, A$是集合族.

- A上的真包含关系可定义为：

$$R_{\subset} = \left\{ \langle x, y\rangle \,\middle|\, x, y \in \mathrm{A} \wedge x \subset y \right\}$$

对任意的集合A，A的幂集P(A)上的包含关系可定义为：

例如 $B = \{a,b\}$, 则 $P(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$,

$P(B)$上的包含关系是$R_{\subseteq} = \left\{ \langle x, y\rangle \,\middle|\, x \in P(A) \wedge y \in P(A) \wedge x \subseteq y \right\}$

$R_{\subseteq} = \{< \varnothing,\varnothing >, < \varnothing,\{a\} >, < \varnothing,\{b\} >, < \varnothing,\{a,b\} >, < \{a\},\{a\} >$
$, < \{a\},\{a,b\} >, < \{b\},\{b\} >, < \{b\},\{a,b\} >, < \{a,b\},\{a,b\} >\}$

三个特殊的关系

恒等关系、全域关系和空关系

- 对任意的集合A,

  A上的**恒等关系**I_A定义为 $I_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$

  A上的**全域关系**(全关系)E_A定义为

$$E_A = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \wedge y \in A\}$$

- 对任意的集合A,

  空集Φ是$A\times A$的子集，定义为A上的**空关系**。

- 例如, A={1,2}, 则
  - E_A={<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>}
  - I_A={<1,1>,<2,2>}

单选题 1分

Setting

思考：若 $|A| = n$

A 上共可定义多少个不同的二元关系？

A. 2n

B. n^2

C. 2^{n^2}

D. $2n^2$

提交

定义域和值域(domain & range)

- 设R是A到B的二元关系

(1) R中所有有序对的第一元素构成的集合称为R的定义域，记作***dom*(*R*)**。形式化表示为：

$$dom(R) = \left\{ x \mid (\exists y)(\langle x, y\rangle \in R) \right\}$$

(2) R中所有有序对的第二元素构成的集合称为R的值域，记作***ran*(*R*)**。形式化表示为：

$$ran(R) = \left\{ y \mid (\exists x)(\langle x, y\rangle \in R) \right\}$$

(3)R的定义域和值域的并集称为R的域**(*field*)**，记作***fld*(*R*)**。形式化表示为：

$$fld(R) = dom(R) \cup ran(R)$$

10.1 二元关系(Binary Relations)

例1 $R=\{<1,2>,<1,3>,<2,4>,<4,3>\}$, 则

- $dom(R) = \{1,2,4\}$ $ran(R) = \{2,3,4\}$
- $fld(R) = \{1,2,3,4\}$

∪R=?

∪∪R=?

- $R=\{<1,2>,<1,3>,<2,4>,<4,3>\}$,
- R={{{1},{1,2}}, {{1},{1,3}}, {{2},{2,4}}, {{4},{4,3}}}
- ∪R={{1},{1,2},{1,3},{2},{2,4},{4},{4,3}}
- ∪∪R={1,2,3,4}

$$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$$

定理 10.1.1 对A到B的关系R，如果$<x,y>\in R$,则$x\in\cup\cup R$, $y\in\cup\cup R$。

- 证明：已知$<x,y>\in R$,即$\{\{x\},\{x,y\}\}\in R$, $\{x,y\}\in\cup R$

  $x\in\cup\cup R$, $y\in\cup\cup R$

定理 10.1.2 对A到B的关系R，则$fld(R)=\cup\cup R$.

关系的表示方法

三种：集合表示法，关系矩阵和关系图。

1. 集合表示法

- 因为关系是一个集合，因此可以用集合的列举法或描述法来表示它。在前面的叙述中，已经多次采用了这两种方法。
- 例：$R_1=\{\langle a, b\rangle \mid (a+b)/5\text{是整数}\}$ 用的是描述法，

  $R_2=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ 用的是列举法。

10.2 关系矩阵和关系图

定义10.2.1　关系矩阵

- 设集合 $X=\{x_1, x_2, ..., x_m\}$　$Y=\{y_1, y_2, ..., y_n\}$
- 若R是X到Y的一个关系。则R的关系矩阵是$m\times n$矩阵，矩阵元素是r_{ij}。

$$M(R)=[r_{ij}]_{m\times n}$$

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & 当\langle x_i,\ y_j\rangle\in R\\ 0 & 当\langle x_i,\ y_j\rangle\notin R\end{cases}\quad (1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$$

- 若R是X上的一个关系，则R的关系矩阵是$m\times m$方阵，定义与上述类似。

举例

- 设$A = \{2,3,4,5\}$，$B = \{6,7,8,9\}$，由A到B的关系R定义为$R = \{< a, b > | a$与b互质$\}$。试写出R的关系矩阵M_R。
- 解$R = \{< 2,7 >, < 2,9 >, < 3,7 >, < 3,8 >, < 4,7 >, < 4,9 >, < 5,6 >, < 5,7 >, < 5,8 >, < 5,9 >\}$，所以关系矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

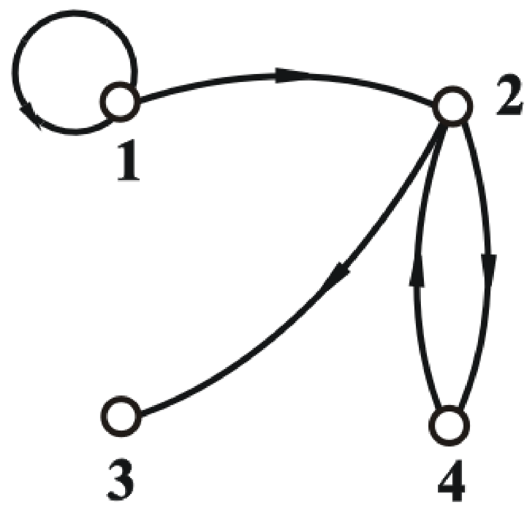
10.2 关系矩阵和关系图

定义10.2.2 关系图

- 设集合$X=\{x_1,x_2,\dots,x_m\},Y=\{y_1,y_2,\dots y_n\}$。若$R$是$X$到$Y$的一个关系，则R的关系图是一个**有向图**(digraph) $\boldsymbol{G(R)=(V,E)}$,它的顶点集是$V=X\cup Y$，边集是E，从x_i到y_j的有向边$e_{ij}\in E$，当且仅当$<x_i,y_j>\in R$。
- 若$\boldsymbol{R}$是$\boldsymbol{X}$上的一个关系，则$\boldsymbol{R}$的关系图是上述情形的特例。

- $A=\{1,2,3,4\}$,
- $R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>\}$,
- R的关系矩阵M_R和关系图G_R如下：

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$



关系及其表示

关系图

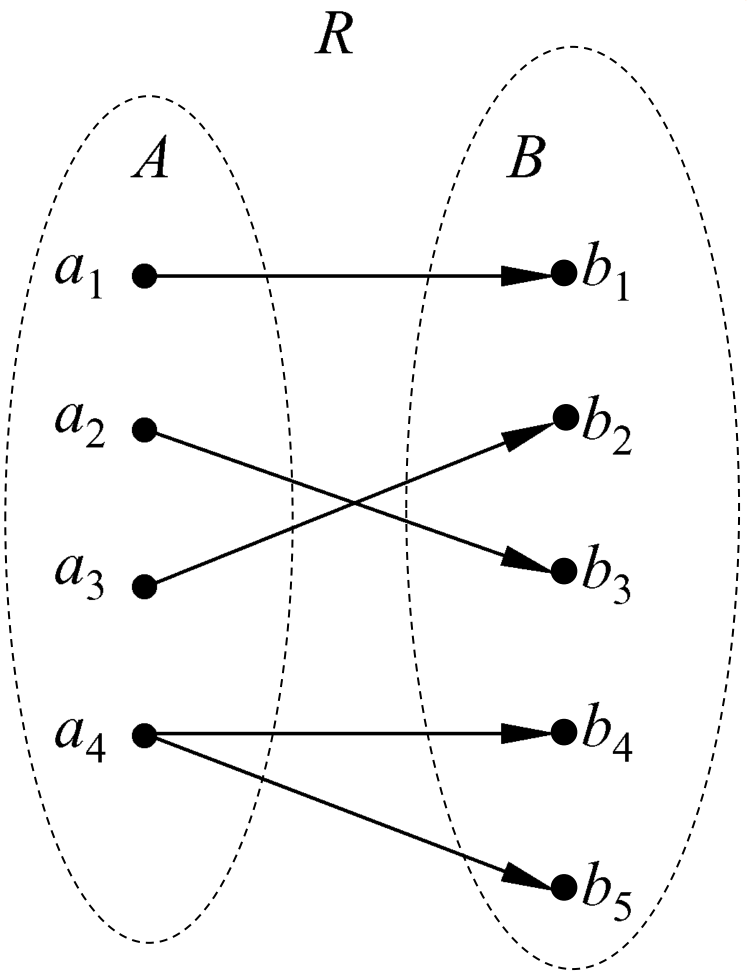
- **情形1**：R是从A到B的关系, 采用如下的图示:

  1）用大圆圈表示集合A和B，里面的小圆圈（或实心圆）表示集合中的元素;

  2）若$a \in A$，$b \in B$，且$<a,b> \in R$，则在图中将表示a和b的小圆圈用直线或弧线连接起来, 并加上从结点a到结点b方向的箭头。

关系及其表示

- **例如：**
- $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$
- $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$
- $R=\{(a_1, b_1), (a_2, b_3),$
  $(a_3, b_2), (a_4, b_4), (a_4, b_5)\}$



关系及其表示

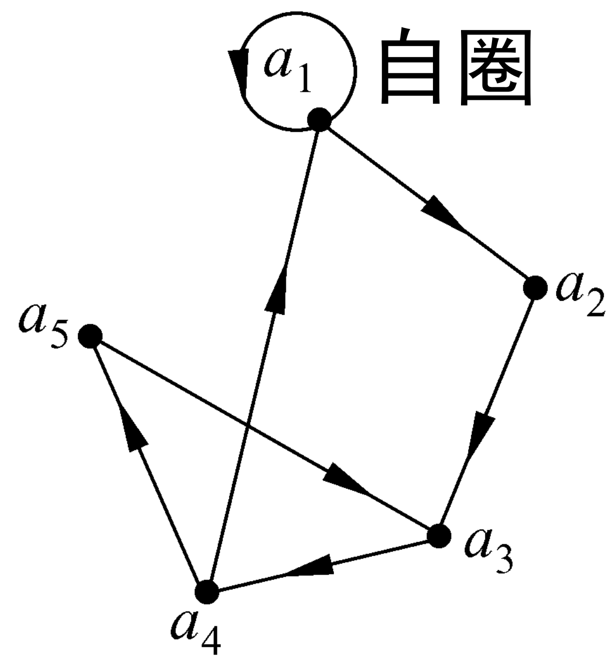
- **情形2**：R是A上的关系，其画法如下：

1) 集合A中的每一个元素a用带有元素符号的顶点(称作顶点a)表示。
2) 若a，$b \in A$，且$<a,b> \in R$，则将顶点a和b用一条带有箭头的有向边连接起来，其方向由顶点a指向顶点b。

【例】$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$，

$R=\{< a_1, a_1 >, < a_1, a_2 >, < a_2, a_3 >,$

$< a_3, a_4), < a_4, a_1 >, < a_4, a_5 >, < a_5, a_3 >\}$



- 求R的关系图。

10.3 关系的逆、合成、限制和象

定义10.3.1 关系的逆、合成、限制和象

- 对X到Y的关系R，Y到Z的关系S，定义:

（1）R的**逆(inversion)**R^{-1}为Y到X的关系

$$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle y, x\rangle \in R\}$$

- 例1　令A={1,2,3,4},

R={<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>}

R^{-1}={<2,1>, <3,2>, <4,1>, <2,2>}

- 显然有：设R是任意的关系,则$(R^{-1})^{-1}=R$

关系的逆

- 二元关系的逆关系 $R^{-1}=\{<x,y>|<y,x>\in R\}$
  - R^{-1}就是将R中的所有有序对的两个元素交换次序成为R^{-1}，故$|R|=|R^{-1}|$
- 说明
  - R^{-1}的关系矩阵是R的关系矩阵的转置，即$M_{R^{-1}}=(M_R)^T$
  - R^{-1}的关系图就是将R的关系图中的弧改变方向即可以

$$R=\{<a,a>,<a,d>,<b,d>,<c,a>,<c,b>,<d,c>\}$$

$$R^{-1}=\{<a,a>,<d,a>,<d,b>,<a,c>,<b,c>,<c,d>\}$$

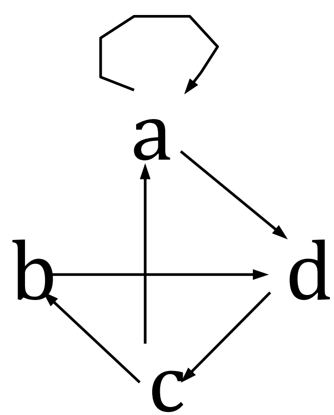
$$M_R=\begin{matrix}1&0&0&1\\0&0&0&1\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{matrix}\qquad M_R^{-1}=M_R^T=\begin{matrix}1&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{matrix}$$

关系的逆-举例

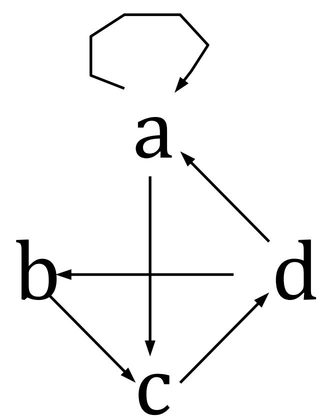
$$R = \{<a,a>,<a,d>,<b,d>,<c,a>,<c,b>,<d,c>\}$$

$$R^{-1} = \{<a,a>,<d,a>,<d,b>,<a,c>,<b,c>,<c,d>\}$$

R的关系图



R^{-1}的关系图



投票 最多可选1项

Setting

R与S的合成(composite relation) $S \circ R$计算，你觉得哪种更好？

A 先R后S

B 先S后R

C 无所谓

D 想不清

提交

10.3　关系的逆、合成、限制和象

(2)R与S的**合成(composite relation)** $S \circ R$为X到Z的关系

$$S \circ R = \{\langle x, y\rangle | (\exists z)(\langle x, z\rangle \in R \wedge \langle z, y\rangle \in S)\}$$

先R后S，先右后左

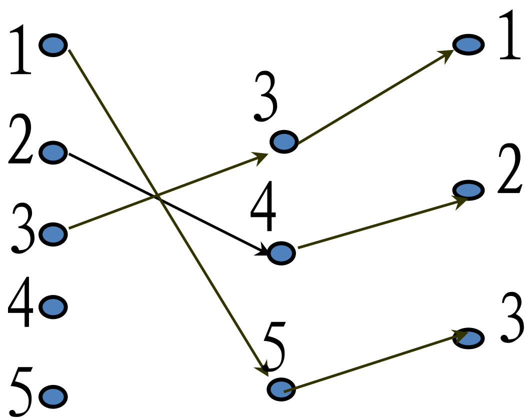
- 关系的复合
- 例
  - A={1,2,3,4,5},B={3,4,5},C={1,2,3}
  - $R=\{<x, y>|x + y = 6\}$ = { <1,5>, <2,4>, <3,3>}
  - $S=\{<y, z> | y - z = 2\}$ = { <3,1>, <4,2>, <5,3>}
  - $S \circ R$={<1,3>,<2,2>,<3,1>}

$A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,2,3\}$

$R=\{<x, y> | x + y = 6\} = \{ <1,5>, <2,4>, <3,3>\}$

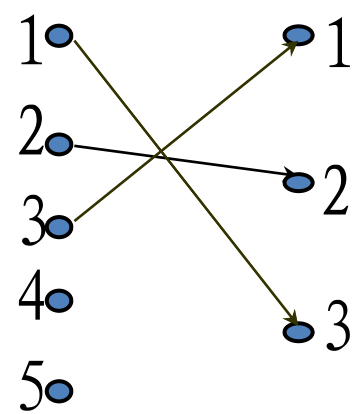
$S=\{<y, z> | y - z = 2\} = \{ <3,1>, <4,2>, <5,3>\}$

$S\circ R=\{<1,3>,<2,2>,<3,1>\}$



R S

从而S●R的关系图



$S\circ R$

关系的合成

- 例： $A=\{a,b,c,d,e\}$
  - $R=\{<a,b>,<c,d>,<b,b>\}$
  - $S=\{<d,b>,<b,e>,<c,a>\}$
  - $S\circ R=\{<a,e>,<c,b>,<b,e>\}$　　复合关系
  - $R\circ S=\{<d,b>,<c,b>\}$
  - $R\circ R=\{<a,b>,<b,b>\}$
  - $S\circ S=\{<d,e>\}$
- 注意： $R\circ S\neq S\circ R$

关系的限制和象

(3)对任意的集合A，定义**R在A上的限制$R\uparrow A$**为A到Y的关系, 其中R是X到Y的关系。

$$R\uparrow A=\{\langle x,y\rangle \mid \langle x,y\rangle\in R\wedge x\in A\}$$

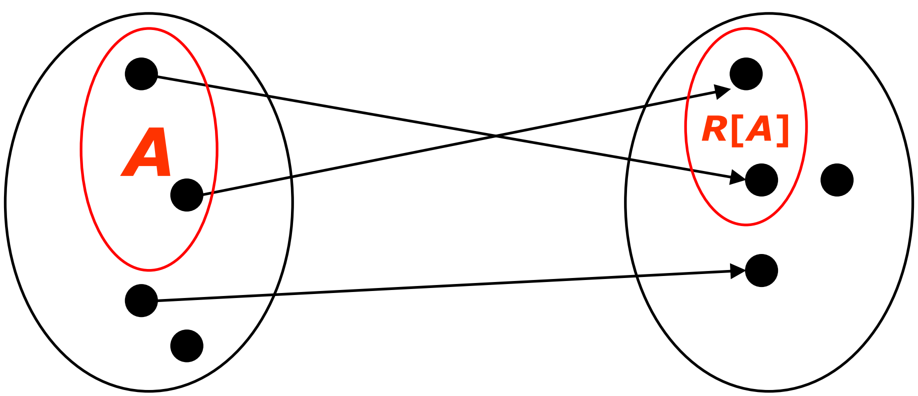
(4) **A在R下的象$R[A]$**为集合

$$R[A]=\{y \mid (\exists x)(x\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R)\}$$

例：$R=\{<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$, 求：

$R\uparrow\{1\}$ $\quad$ $R\uparrow\emptyset$ $\quad$ $R\uparrow\{2,3\}$

$R[\{1\}]$ $\quad$ $R[\emptyset]$ $\quad$ $R[\{2,3\}]$



关系的运算

优先顺序：

- 逆运算优先于其他运算
- 关系运算优先于集合运算
- 没有规定优先权的运算以括号决定运算顺序

关系运算：逆，合成，限制

关系的运算

- 定理：设R是任意的关系，则
  - $(R^{-1})^{-1}=R$
  - $\mathrm{dom}R^{-1} = \mathrm{ran}R$
  - $\mathrm{ran}R^{-1} = \mathrm{dom}R$

$$R^{-1} = \{<x, y> | <y, x> \in R\}$$

关系的运算

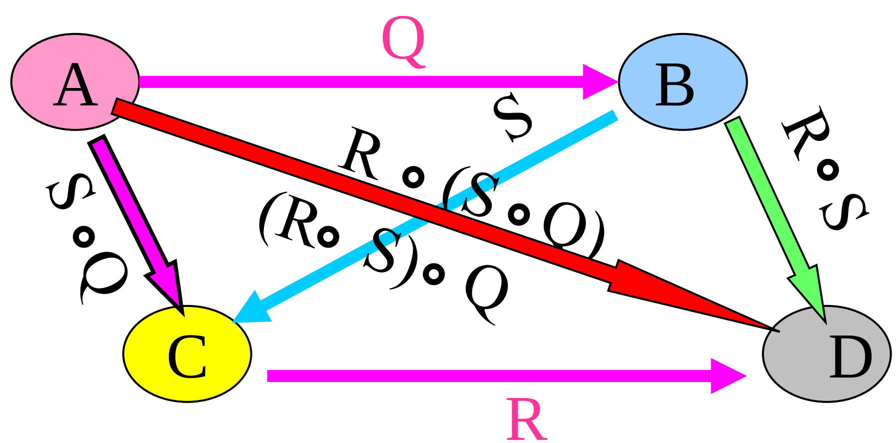
- 定理：设R，S，Q是任意的关系

  ①$(R \circ S) \circ Q = R \circ (S \circ Q)$

  ②$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

令 $Q \subseteq A \times B$　　$S \subseteq B \times C$　　$R \subseteq C \times D$

可以形象表示:



$$(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}$$

证明：$<x，y>\in (R\circ S)^{-1}$

$\Leftrightarrow <y，x>\in R\circ S$

$\Leftrightarrow \exists t(<y，t>\in S \wedge <t，x>\in R)$

$\Leftrightarrow \exists t(<x，t>\in R^{-1} \wedge <t，y>\in S^{-1})$

$\Leftrightarrow <x，y>\in S^{-1}\circ R^{-1}$

关系的运算-举例

$R=\{<a,a>,<a,c>,<b,b>,<c,b>,<c,c>\}$

$S=\{<a,1>,<a,4>,<b,2>,<c,4>,<c,5>\}$

$S \circ R=\{<a,1>, <a,4>,<a,5>,<b,2>,<c,2>, <c,4>,<c,5>\}$

$(S \circ R)^{-1}=\{<1,a>, <4,a>, <5,a>, <2,b>, <2,c>, <4,c>, <5,c>\}$

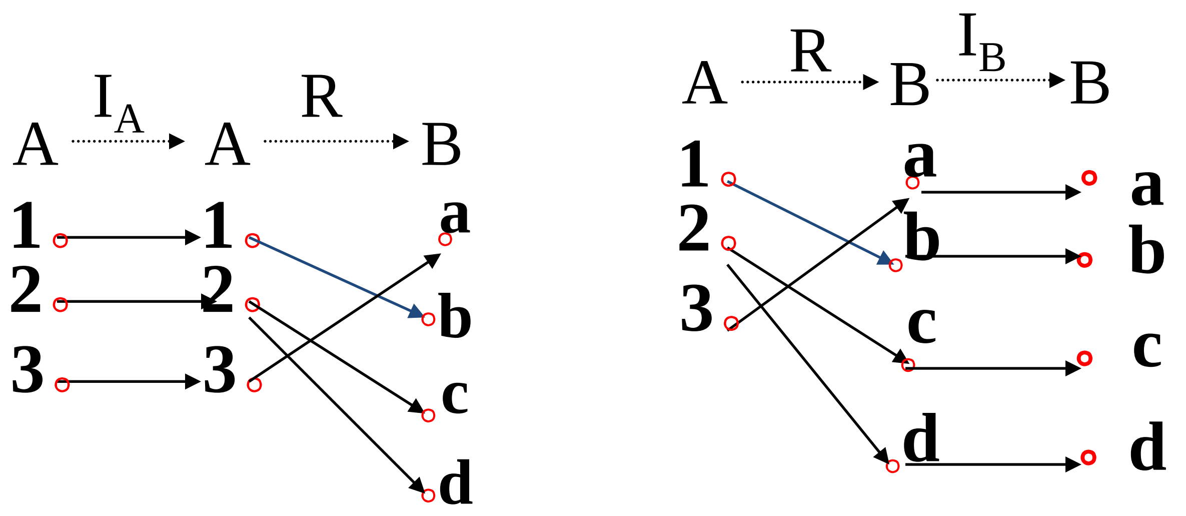
$R^{-1}=\{<a,a>, <c,a>,<b,b>,<b,c>,<c,c>\}$

$S^{-1}=\{<1,a>,<4,a>,<2,b>,<4,c>, <5,c>\}$

$R^{-1} \circ S^{-1}=\{<1,a>, <4,a>,<2,b>,<2,c>, <4,c>,<5,a>,<5,c>\}$

3. R是从A到B的关系，则 $R \circ I_A = I_B \circ R = R$

例：令A={1,2,3}, B={a,b,c,d}



从这两个图看出它们的复合都等于R。

关系的运算

- 定理: 设R为A上关系，则

  $$R\circ I_A = I_A \circ R = R$$

- 定理:
  - $R\circ(S\cup T)=R\circ S\cup R\circ T$
  - $R\circ(S\cap T)\subseteq R\circ S\cap R\circ T$
  - $(S\cup T)\circ X=S\circ X\cup T\circ X$
  - $(S\cap T)\circ X\subseteq S\circ X\cap T\circ X$

$R=\{\langle y_1,z\rangle,\langle y_2,z\rangle\}, S=\{\langle x,y_1\rangle\}, T=\{\langle x,y_2\rangle\}$

$R\circ S=R\circ T=\{\langle x,z\rangle\}$ 故$R\circ S\cap R\circ T=\{\langle x,z\rangle\}$

但 $S\cap \mathrm{T}=\emptyset$ 故$R\circ(S\cap T)=\emptyset\subseteq R\circ S\cap R\circ T$

$S=\{\langle y_1,z\rangle\}, T=\{\langle y_2,z\rangle\}, X=\{\langle x,y_1\rangle,\langle x,y_2\rangle\}$

$S\circ X=T\circ X=\{\langle x,z\rangle\}$ 故$S\circ X\cap T\circ X=\{\langle x,z\rangle\}$

但 $S\cap T=\emptyset$ 故 $(S\cap T)\circ X=\emptyset\subseteq S\circ X\cap T\circ X$

$$R\circ(S\cup T)=R\circ S\cup R\circ T$$

对于任意<x,y>, 可得

$<x,y>\in R\circ(S\cup T)$

$\Leftrightarrow\exists z(<x,z>\in S\cup T\wedge<z,y>\in R)$

$\Leftrightarrow\exists z((<x,z>\in S\vee<x,z>\in T)\wedge<z,y>\in R)$

$\Leftrightarrow\exists z((<x,z>\in S\wedge<z,y>\in R)\vee(<x,z>\in T\wedge<z,y>\in R))$

$\Leftrightarrow\exists z(<x,z>\in S\wedge<z,y>\in R)\vee\exists z(<x,z>\in T\wedge<z,y>\in R)$

$\Leftrightarrow<x,y>\in R\circ S\vee<x,y>\in R\circ T$

$\Leftrightarrow<x,y>\in(R\circ S)\cup(R\circ T)$

所以 $R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$

关系的运算

- 定理:
  - $R\uparrow(A\cup B) = R\uparrow A\cup R\uparrow B$
  - $\mathrm{R}[\mathrm{A}\cup B] = R[A]\cup R[B]$
  - $R\uparrow(A\cap B) = R\uparrow A\cap R\uparrow B$
  - $\mathrm{R}[A\cap B] \subseteq R[A]\cap R[B]$

定理: $R[A\cap B] \subseteq R[A]\cap R[B]$

证明： $\forall y \in R\,[A\cap B]$

$\Leftrightarrow \exists x(<x, y>\in R \wedge x \in A \cap B)$

$\Leftrightarrow \exists x(<x, y>\in R \wedge x \in A \wedge x \in B)$

$\Leftrightarrow \exists x((<x, y>\in R \wedge x \in A)\wedge(<x, y>\in R\wedge x \in B))$

$\Rightarrow \exists x(<x, y>\in R \wedge x \in A)\wedge \exists x(<x, y>\in R\wedge x \in B)$

$\Leftrightarrow y \in R[A] \wedge y \in R[B]$

$\Leftrightarrow y \in R[A] \cap R[B]$

$$\boxed{(\exists x)(P(x)\wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)}$$

关系的运算

- R的n次幂记为R^n
  - $R^0 = I_A$
  - $R^{n+1} = R^n \circ R$
- 定理: 设R是集合A上的关系，m,n∈N
  - $R^m \circ R^n = R^{m+n}$
  - $(R^m)^n = R^{mn}$

证明思路：使用归纳法(n)并利用复合关系的结合律

$$R^m \circ R^n = R^{m+n}$$

对于任给的$m \in N$, 对n用归纳法。

若n=0, 则有

$$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^{m+0}$$

假设$R^m \circ R^n = R^{m+n}$，则有

$$\begin{aligned} R^m \circ R^{n+1} &= R^m \circ (R^n \circ R) \\ &= (R^m \circ R^n) \circ R \\ &= R^{m+n} \circ R \\ &= R^{m+n+1} \end{aligned}$$

$$R^{n+1} = R^n \circ \mathrm{R}$$

关系的运算

- 例R={<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,4>,<4,5>}
  - R^0= {<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>}
  - R^1 = R
  - R^2 = {<1,1>, <1,3>,<2,2>, <2,4>,<3,5>}
  - R^3 = R^2oR = {<1,2>,<1,4>,<2,1>,<2,3>,<2,5>}
  - R^4 = R^3oR = {<1,1>,<1,3>, <1,5>,<2,2>, <2,4>}
  - R^5 = R^4oR = {<1,2>,<1,4>,<2,1>,<2,3>,<2,5>}

10.3 关系的逆、合成、限制和象

10-3-2 SoR的关系矩阵

设A是有限集合，|A|=n。关系R和S都是A上的关系，R和S的关系矩阵M(R) = $[r_{ij}]$ 和 M(S) = $[s_{ij}]$都是n×n的方阵。于是R与S的合成 SoR 的关系矩阵 $M(SoR) = [W_{ij}]$ $n \times n$

可以用下述的矩阵逻辑乘计算（类似于矩阵乘法）。记作M(SoR)=M(R)·M(S)， 其中 $w_{ij} = \vee_{k=1}^{n} (r_{ik} \wedge s_{kj})$

- 复合关系运算不满足交换律，但关系的复合运算满足结合律。
- 复合关系可以用图形表示，也可以用矩阵来求。
- 关系的矩阵运算是布尔运算，只涉及0和1。

布尔加：0+0=0，1+1=1，0+1=1+0=1

布尔乘：1*1=1，1*0=0*1=0*0=0

- 矩阵表示

$$R=\{<1,2>,<3,4>,<2,2>\}$$
$$S=\{<4,2>,<2,4>,<3,1>,<1,3>\}$$

- 则

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},M_S=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{R\circ S}=\mathbf{M}_S*\mathbf{M}_R,$$
$$\boldsymbol{M}_{S\circ R}=\boldsymbol{M}_R*\mathbf{M}_S$$
$$\boldsymbol{M}_{R^2}=\mathbf{M}_R{}^2$$
$$\boldsymbol{M}_{R^3}=\mathbf{M}_R{}^3$$

$$M_{R\circ S}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},M_{S\circ R}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

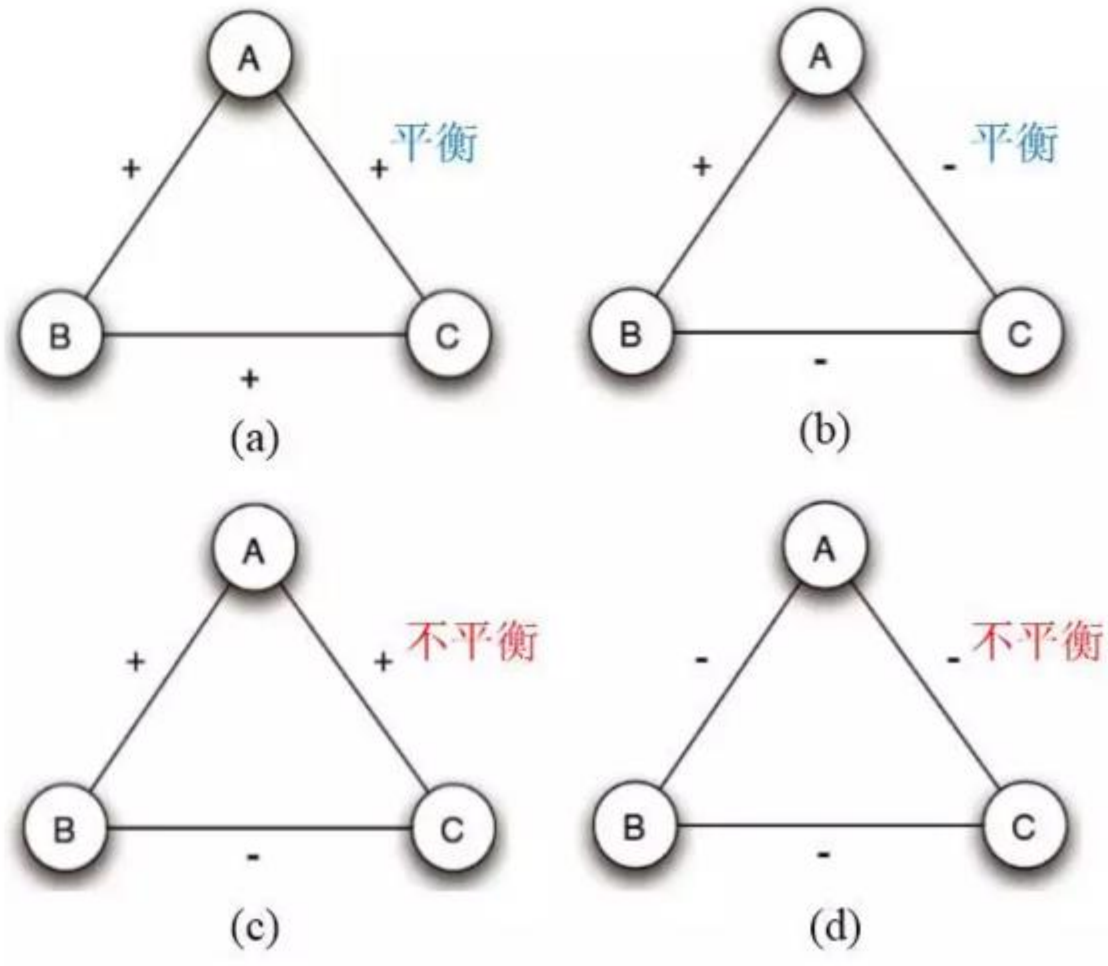
注意复合顺序

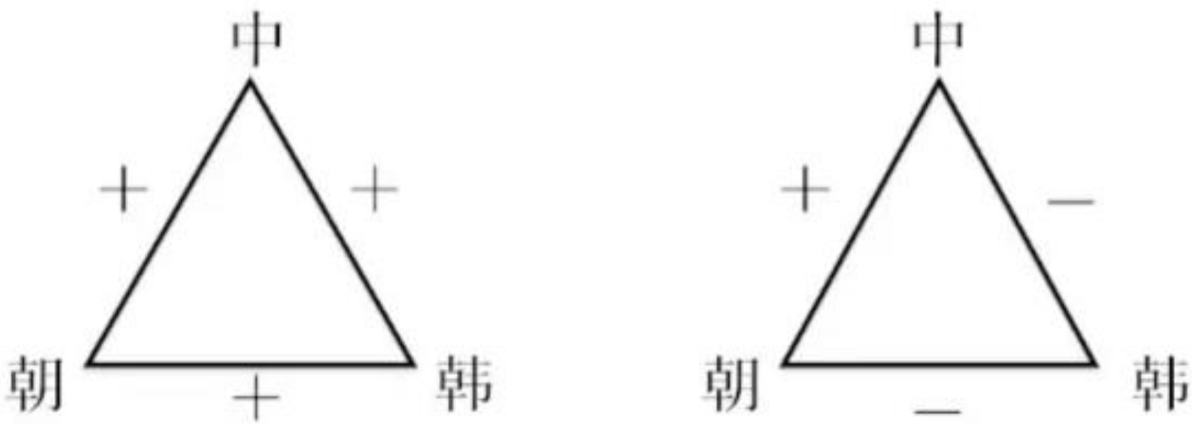
复合关系在社会关系网络中的应用

- 社会网络中，两个节点之间的关系（边）可能携带着各种各样的社会性含义
- 除了强弱以外，还有支持（＋）与反对（－），朋友（＋）与敌人（－）等利害关系 。

人和人之间如此，国和国之间的外交关系也如此，而且后者常常显现得更加明显（同盟条约、领土争端之类）

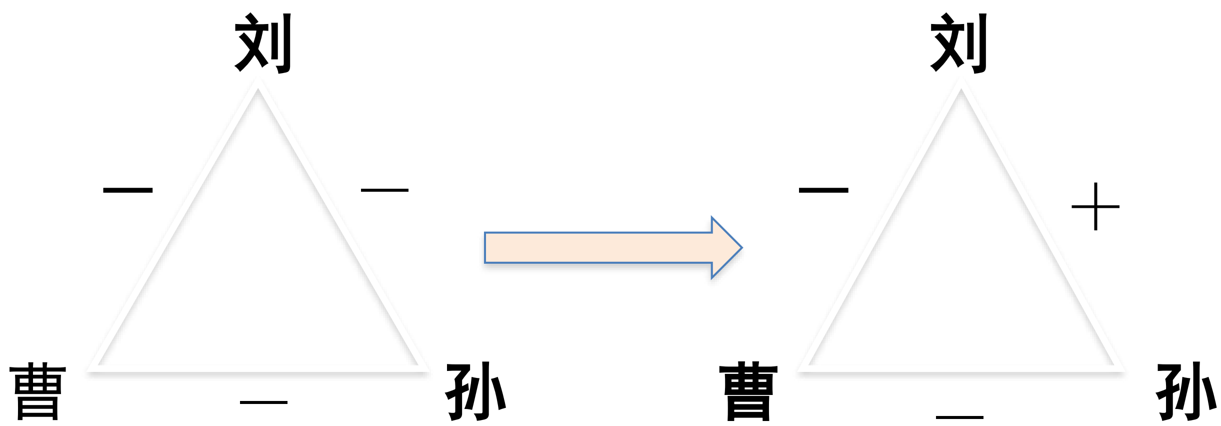
从社会心理学角度看



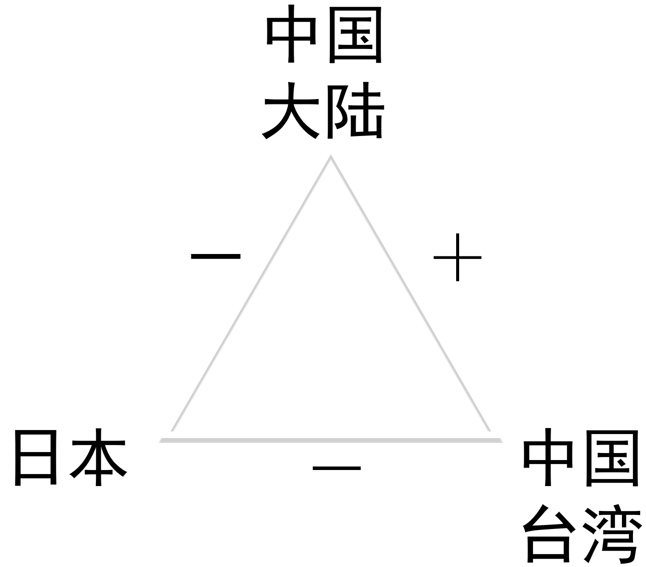

中
+
+
朝
韩
+
中
+
−
朝
韩
−

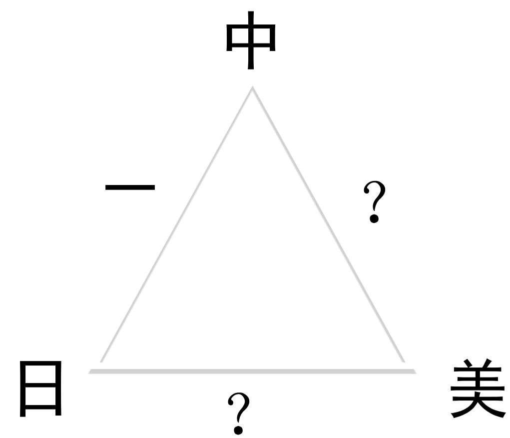
三国演义中的关系

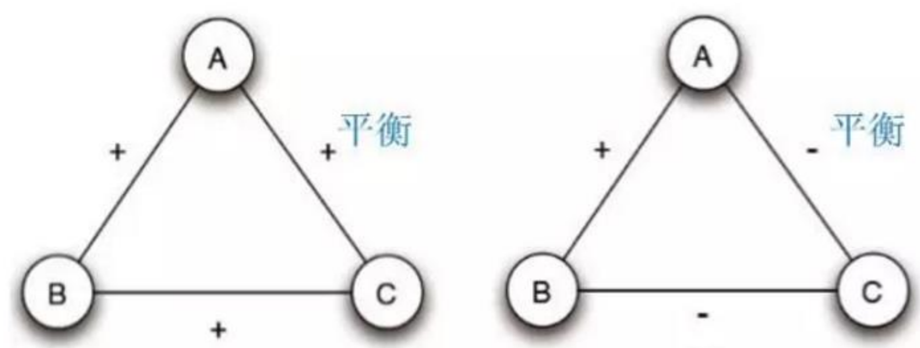
- 原则上，都是想自得天下，也就是互为敌人，但不时出现两家联合斗另一家的形势



钓鱼岛问题中的关系

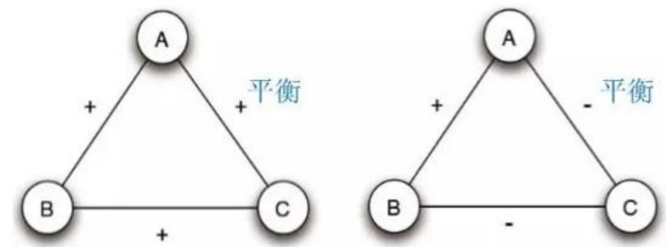


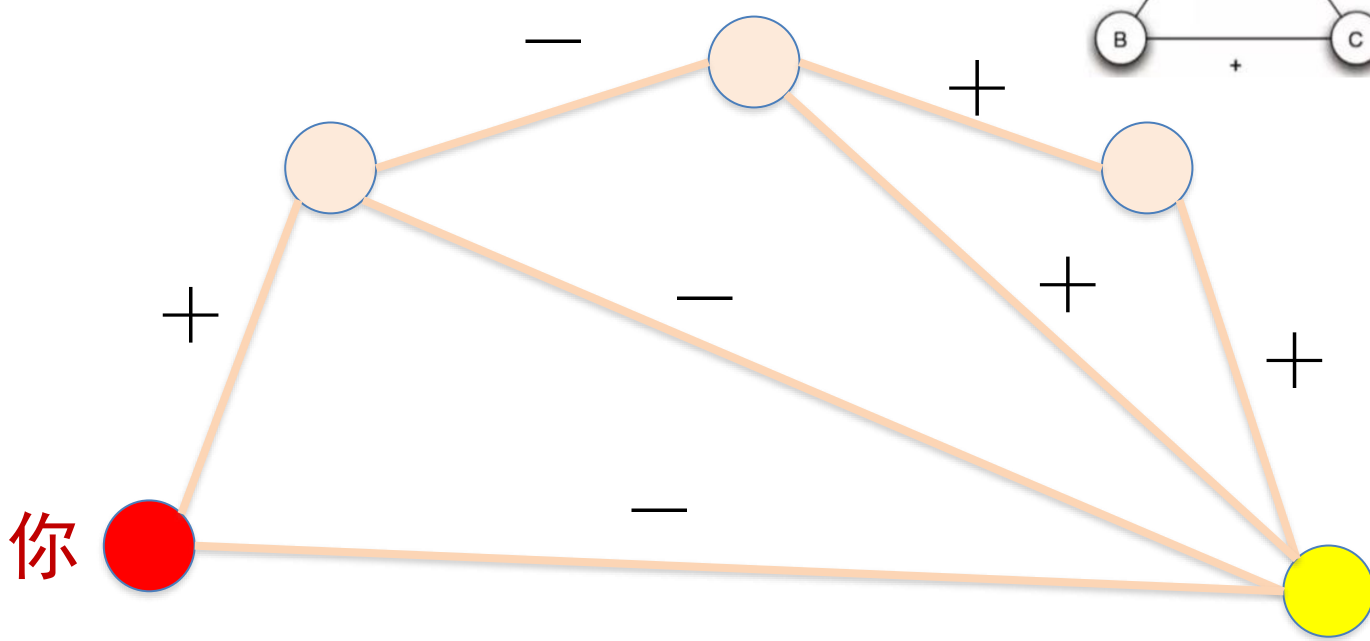




一般地，我们可以回答

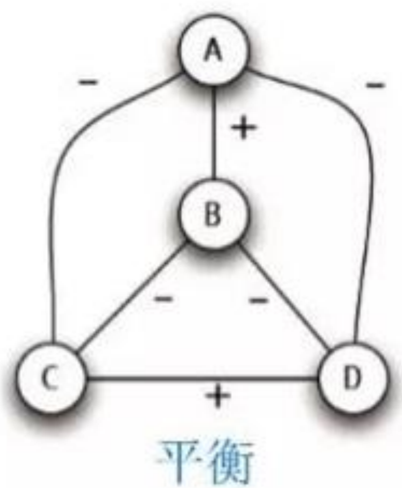
- “你朋友的敌人的朋友的朋友”更可能是你的朋友还是敌人？

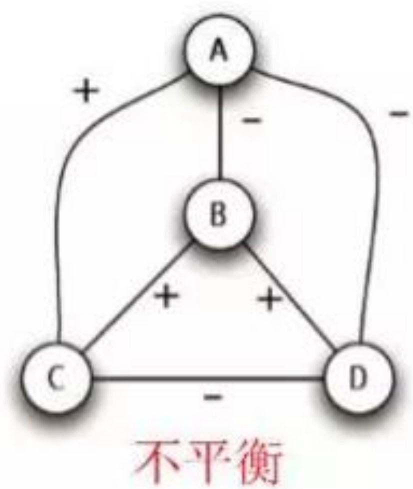




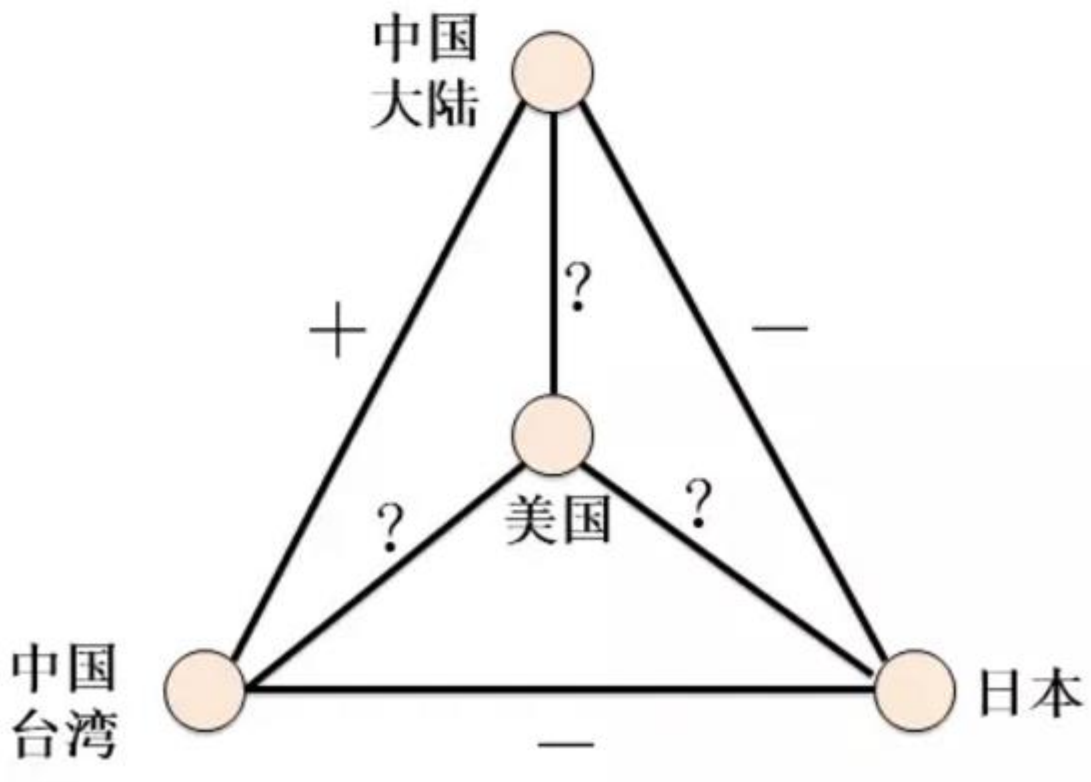
平衡定理

- 如果一个标记了“＋、－”关系的完全图是平衡的，那么，（1）要么它的所有节点两两都是朋友；（2）要么它的节点可以被分为两组，X和Y，其中X组内的节点两两都是“＋”关系，Y组内的节点两两也都是“＋”关系，而X组中的每个节点与Y组中每个节点之间都是“－”关系





思考



谢谢
shixia@tsinghua.edu.cn