第六周作业

1. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，$T:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$　$T(\vec{x})=A\vec{x}$

假设 T 不是幂零变换. 证明:

$$\mathbb{C}^n=\ker T^{n-1}\oplus \operatorname{Im} T^{n-1}=N(A^{n-1})\oplus C(A^{n-1})$$

(提示: ① 若 A 不幂零, 则零特征值代数重数 $<n$.

$N(A^{n-1})=N(A^n)$　　$C(A^{n-1})=C(A^n)$ (A^n 的列空间)

② 若 $v\in N(A^n)\cap C(A^n)$　$v=A^n w$，$A^n v=0\Rightarrow A^{2n}w=0$

$\Rightarrow w\in N(A^{2n})=N(A^n)\Rightarrow v=\vec{0}\Rightarrow N(A^n)\oplus C(A^n)=\mathbb{C}^n$)

2. 设 $T:\mathbb{C}^5\to\mathbb{C}^5$，满足 $\operatorname{Im}T^4\neq\operatorname{Im}T^5$，证明
$x\longmapsto Ax$

T 是一个幂零变换.

(提示: $C(A^4)\neq C(A^5)\Rightarrow N(A^4)\subsetneq N(A^5)$

$\Rightarrow G_{\mu=0}=N_{0,\ell},\ \ell\geq 5,\Rightarrow$ 零特征值代数重数 ≥ 5)

3. 设 $T:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$，　$m\geq 1$，$m\in\mathbb{N}$. 证明:
$x\longmapsto Ax$

$$\ker T^m = \ker T^{m+1} \iff \mathrm{Im}\, T^m = \mathrm{Im}\, T^{m+1}$$

4. 给一个反例：任意线性变换 $T: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $x \longmapsto Ax$ 满足 T^n 是可对角化（即 A^n 可对角化），$n \geq 2$.

5. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 有极小多项式 $x^5+2x^4-7x^3-6x^2+5x+4$ 求 A^{-1} 的极小多项式.（提示：$m_A(A)=0$ $\Rightarrow A^{-5} m_A(A) = 0 \Rightarrow A^{-1}$ 的化零多项式）

6. 设 $T: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $x \longmapsto Ax$ 是一个幂零变换. 求 $\mathbb{C}^n$ 的循环子空间直和分解和 A 的 Jordan 标准形，其中：

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

7. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, $r(A)=1$.

设 $T: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $T(\vec{x})=A\vec{x}$

(1) 证明: T是幂零变换 $\Leftrightarrow tr(A)=0$

(即A的对角元之和=0)

(2) 若 $trA=0$, 求 $\mathbb{C}^n$ 的循环子空间直和分解, 可逆阵P和 A的 Jordan标准形J 使 $P^{-1}AP=J$.

(提示: 若 $r(A)=1$. 则存在 $u, v \in \mathbb{C}^n$

$A=uv^T$, $tr(A)=v^Tu$. 若 $trA=0$,

则 $A^2=uv^Tuv^T=O_{n\times n}$)