第十三周. Hermite二次型、奇异值分解

参考：
高等代数学8.5，9.9
线性代数与几何（下）10.5

14.1. 复正规阵的极分解

定理： 设A是n阶酉阵，则存在Hermite阵M,使得$A = e^{iM}$.

定理： 设A是n阶复正规阵，则存在半正定Hermite阵R和Hermite阵M,满足$RM = MR$且$A = Re^{iM}$.

14.2. Hermite二次型

定义： 设$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\overline{x_i}x_j$，其中$a_{ij}=\overline{a}_{ji}$,则$f$称为Hermite二次型.

矩阵形式： 设$A=(a_{ij})$是一个Hermite矩阵，则

$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\overline{x_i}x_j=x^HAx$，其中$x=(x_1,\cdots,x_n)^T$.

定理： 设A,B是两个Hermite阵满足$x^HAx=x^HBx,\forall x\in\mathbb{C}^n$，则$A=B$.

14.2. Hermite二次型

惯性定理： 设$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\overline{x_i}x_j=x^HAx$是一个Hermite二次型，则通过可逆坐标变换$x=Cz$,$f(x)$可以化为

$$h(z)=\overline{z_1}z_1+\cdots+\overline{z_p}z_p-\overline{z}_{p+1}z_{p+1}-\cdots-\overline{z_r}z_r,$$

其中$r,\,p$是唯一的(不依赖于C的选取).

14.3. 正定Hermite阵

定义： 设A是Hermite阵， 则A是一个正定Hermite阵当且仅当$x^H Ax > 0$, $\forall x \neq 0 \in \mathbb{C}^n$. A是一个半正定Hermite阵当且仅当$x^H Ax \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$.

判别法：

(1) 设A是Hermite阵， 则A是一个正定Hermite阵当且仅当A的特征值均是正数；

(2) 设A是Hermite阵， 则A是一个正定Hermite阵当且仅当存在可逆阵P, $A = P^H P$.

14.4. 奇异值分解

定理： 设$A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, 则存在$m$阶酉阵$U$和$n$阶酉阵$V$, 满足$A = U\Sigma V^H$, 其中

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}, r = r(A), \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0.$$

设A是n阶复矩阵，令$R = U\Sigma U^H, S = UV^H$, 则$A = RS$且$R$是半正定Hermite阵, S是酉阵.

定理： 设A是n阶复矩阵，则存在半正定Hermite阵R和Hermite阵M, 使得$A = Re^{iM}$.

单选题 1分

设置

以下**错误**的陈述是

A Hermite阵的行列式是实数.

B 酉阵的行列式是长度等于1的复数.

C $A = I_n - 2uu^H,\ u \in \mathbb{C}^n,\ \|u\| = 1$ 是Hermite和酉阵

D Skew-Hermite阵(即 $A^H = -A$)的行列式是纯虚数.

提交

单选题 1分

设置

设二阶实正规阵A不是实对称阵，则它是酉阵的充要条件是

A　A的行列式=1

B　A的行列式=-1

C　A可逆

D　A不可逆

提交