离散数学II

—子图、同构和图运算

周旻
清华大学软件学院
软件工程与系统研究所

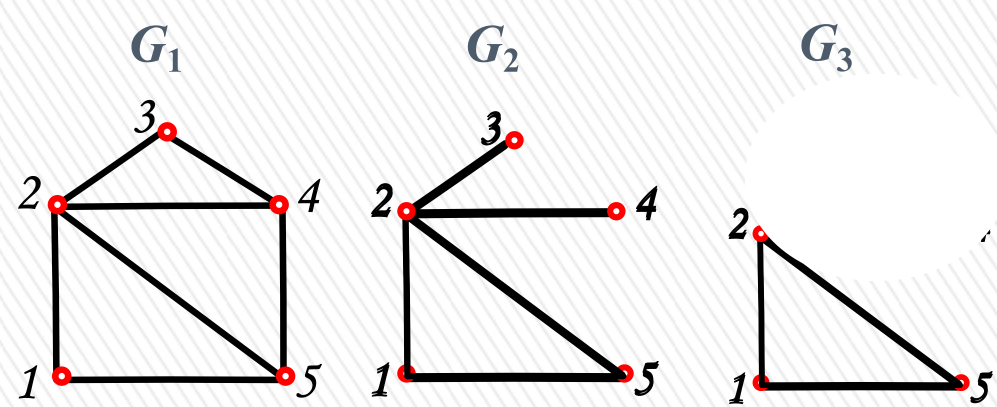
2024年4月7日
Sunday

子图与同构

图的基本概念：子图

设$G = (V, E)$，$G' = (V', E')$是2个图

- 子图的定义：
  - 若$V' \subseteq V$且$E' \subseteq E$，则称G'为G的子图，G为G'的母图，记作$G' \subseteq G$
  - 若$V' \subset V$或$E' \subset E$，称G'为G的真子图
- 支撑子图 → 相同的结点集合
  - 若$G' \subseteq G$且$V' = V$，则称G'为G的支撑或生成子图 **(spanning graph)**
- 右图中
  - $G_3 \subseteq G_2 \subseteq G_1$
  - G_2 是 G_1 的支撑子图



图的基本概念：子图

设$G=(V,E)$，$G'=(V',E')$是2个图

- 导出子图：抽取子图的方法
- 结点集的导出子图
  - 设$G'\subseteq G$，$V'\subseteq V$且$V'\neq\varnothing$，以V'为顶点集，以两端点都在V'中的所有边为边集的G的子图称作V'的导出子图，记作$G[V']$
- 边集的导出子图
  - 设$G'\subseteq G$，$E'\subseteq E$且$E'\neq\varnothing$，以E'为边集，以E'中边关联的所有顶点为顶点集的G的子图称作E'的导出子图，记作$G[E']$

多选题 1分

设置

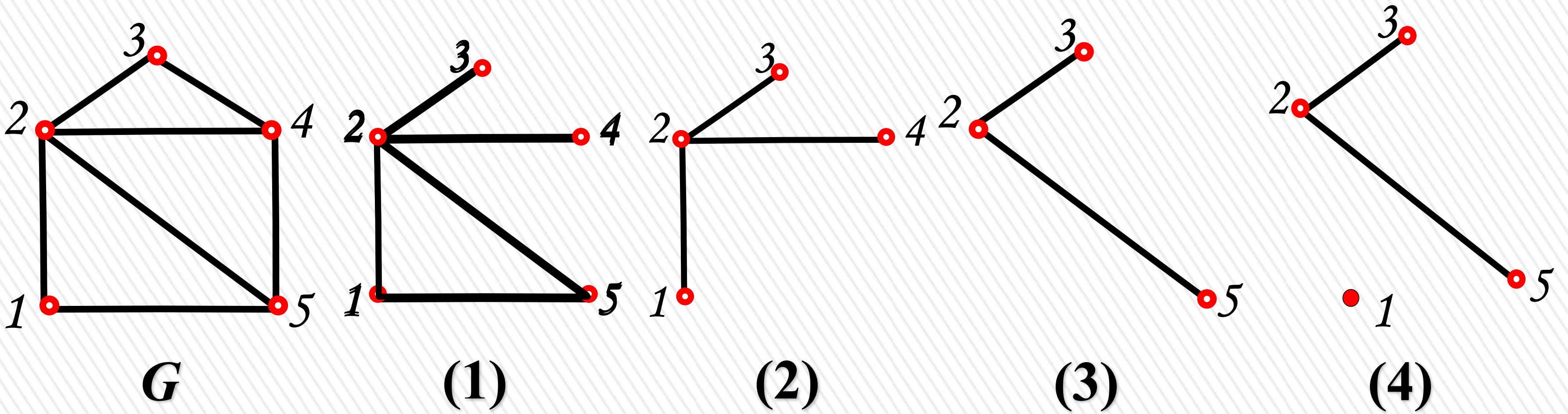
图(1)-(4)中，哪些是图G中某个边集的导出子图？

A (1)

B (2)

C (3)

D (4)



提交

多选题 1分

设置

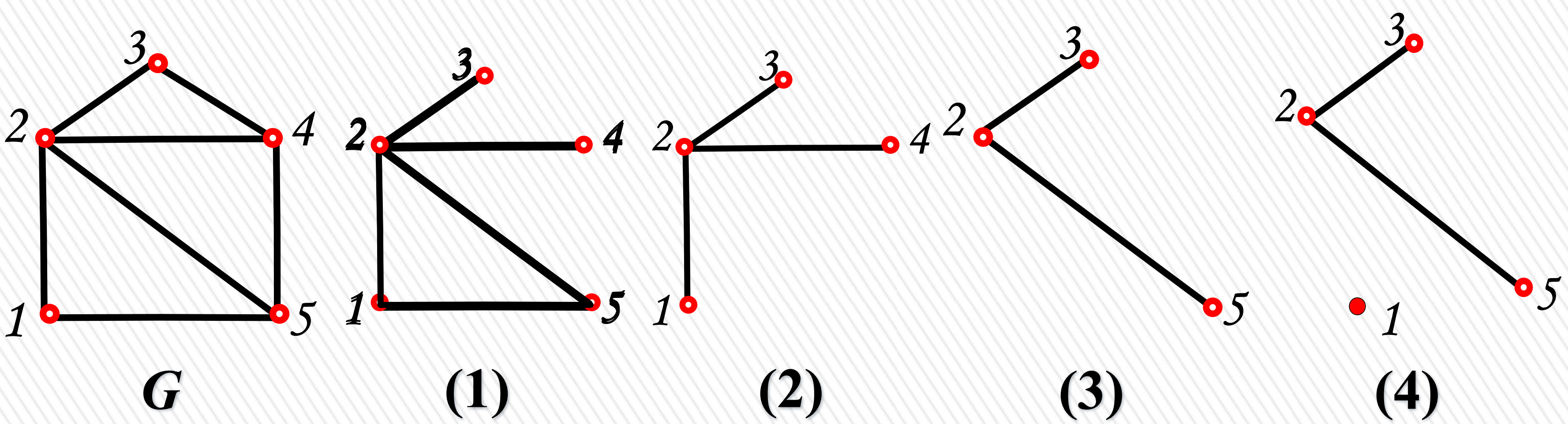
图(1)-(4)中，哪些是图G中某个顶点集的导出子图？

A (1)

B (2)

C (3)

D (4)



提交

图的基本概念：同构

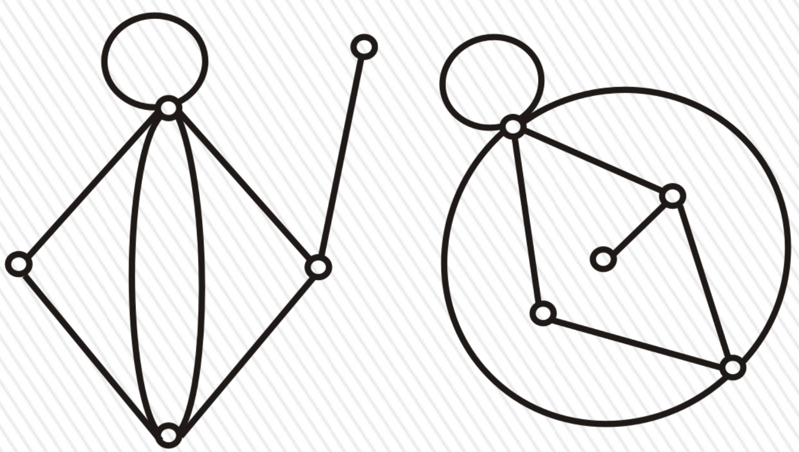
由于图的拓扑性质，有可能两个表面上看起来不同的图本质上是同一个图，这就是图同构(isomorphism)的问题。

直观理解：$G_1 \cong G_2$是指其中一个图仅经过下列变换可以变为另一个图:

(a) 挪动节点的位置；

(b) 变换边的长短和形状；

(c) 忽略结点编号。



图的基本概念：同构

- 定义1.1.8：图的同构
  - 设 $G_1=(V_1,E_1)$, $G_2=(V_2,E_2)$ 为两个图（无向图或有向图），若存在双射函数 f：$V_1\rightarrow V_2$，使得对于任意的 $v_i, v_j\in V_1$，$(v_i, v_j)\in E_1$ 当且仅当 $(f(v_i), f(v_j))\in E_2$，并且 (v_i, v_j) 与 $(f(v_i), f(v_j))$ 重数相同，则称G_1与G_2是同构的，记作$G_1\cong G_2$。
- 内涵
  - 对结点重新编号后得到的图
  - 重新编号的要求：双射函数 $\Leftrightarrow$ 一一对应

图的同构的应用

- 应用领域
  - 化学物质搜索；
  - 知识图谱，语义结构，逻辑去重；
  - 基因图谱分析；
  - 社交网络分析；
  - ……

图的基本概念：同构

注意

能找到多条同构的必要条件，但它们都不是充分条件:

(1) 顶点数相同，边数相同

(2) 度数列相同（不考虑顺序时）

(3) 对应顶点的关联集及邻域的元素个数相同

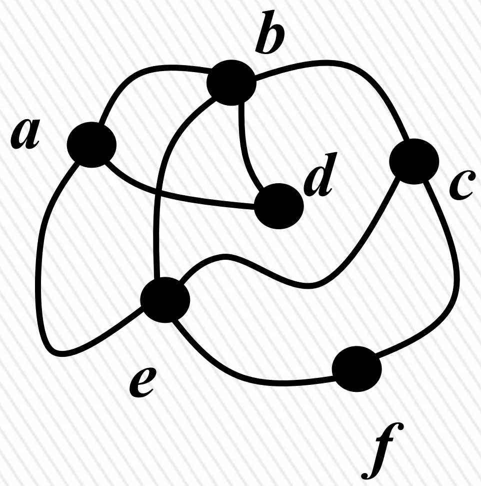
(4) 存在同构的导出子图

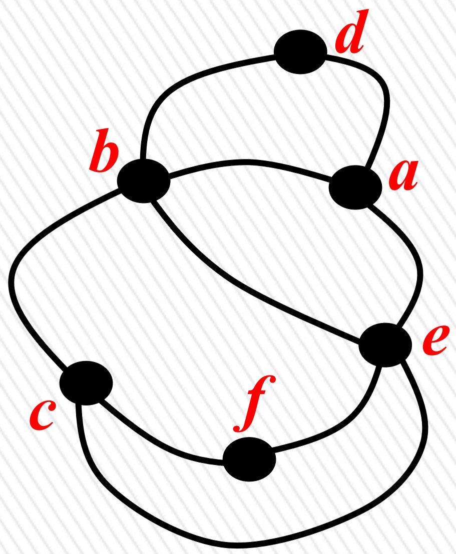
若破坏必要条件，则两图不同构

图的基本概念：同构判定

例1.12：

是否同构？

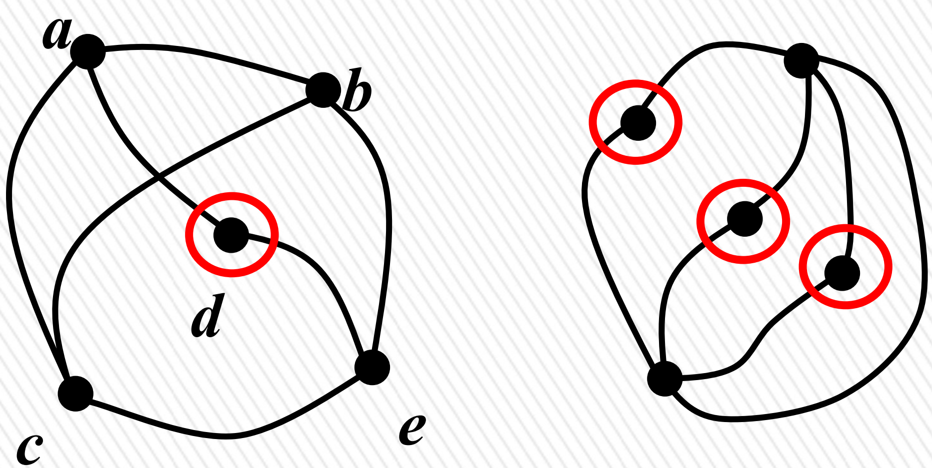




图的基本概念：同构判定

例1.13：

是否同构？



- 结点数相同
- 边数相同
- 结点度序列不同

多选题 1分

设置

下面图中同构的是：

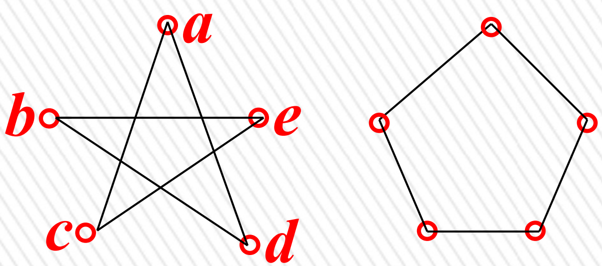
A

B

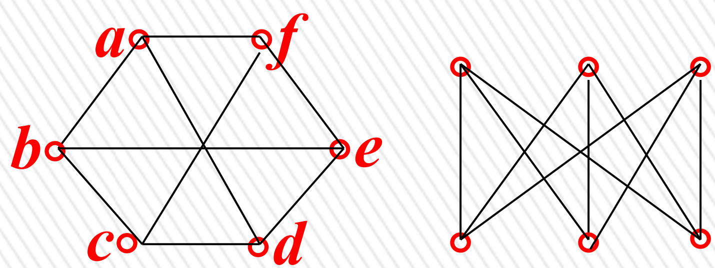
C

D

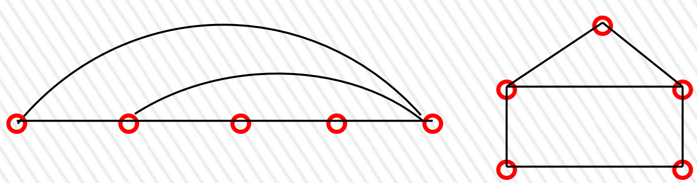
提交



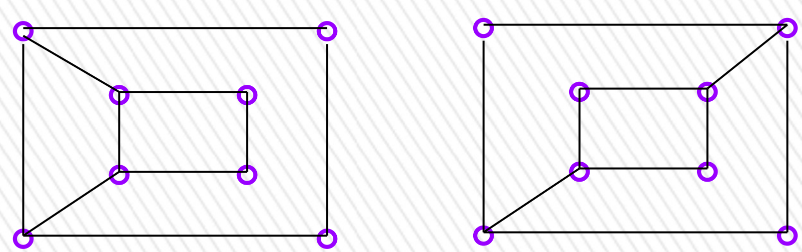
A



B



C

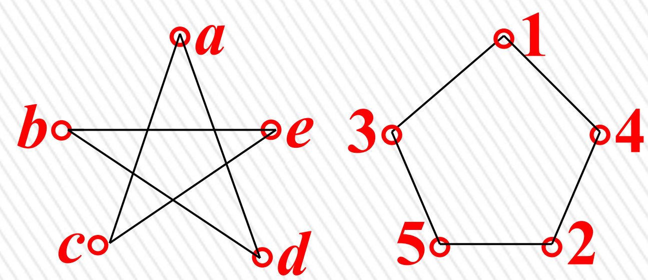


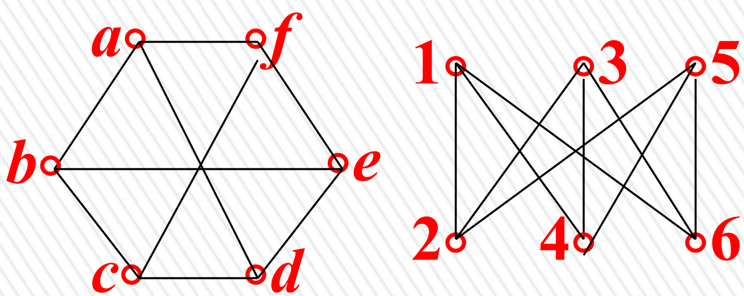
D

图的基本概念：同构判定

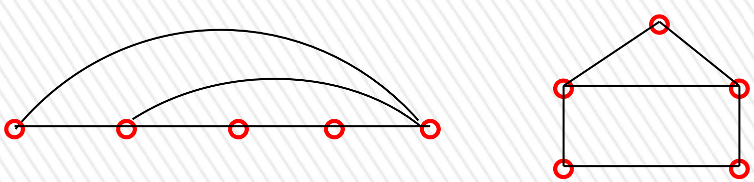
例1.14：

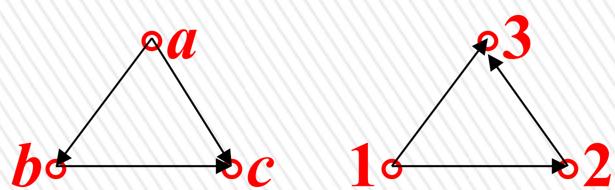
是否同构？





同构





同构

不同构

单选题 1分

设置

下图是否同构

A 同构

B 不同构

提交

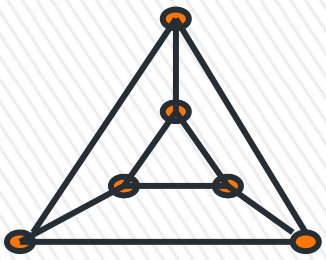
单选题 1分

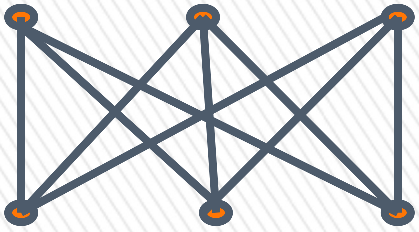
设置

下图是否同构

A 同构

B 不同构





提交

主观题 1分

设置

试画出4阶3条边的所有非同构的无向简单图。

作答

图的基本概念：同构例题

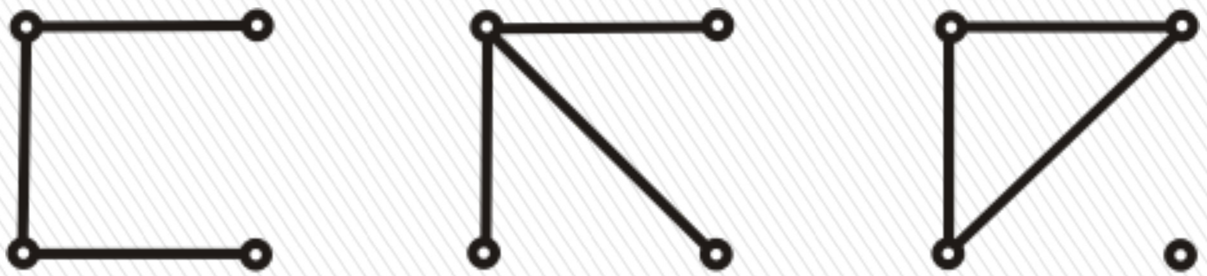
例1.17：试画出4阶3条边的所有非同构的无向简单图

解：由握手定理得，总度数为6，分配给4个顶点，

最大度为3，且奇度顶点数必须为偶数，

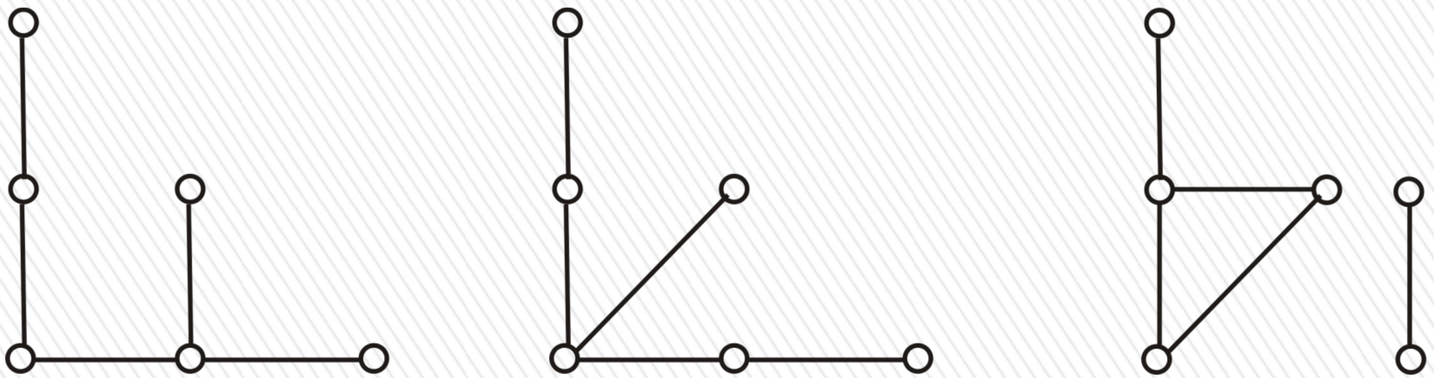
有下述3个度数列：

(1) 1, 1, 2, 2;　　(2) 1, 1, 1, 3;　　(3) 0, 2, 2, 2.



图的基本概念：同构例题

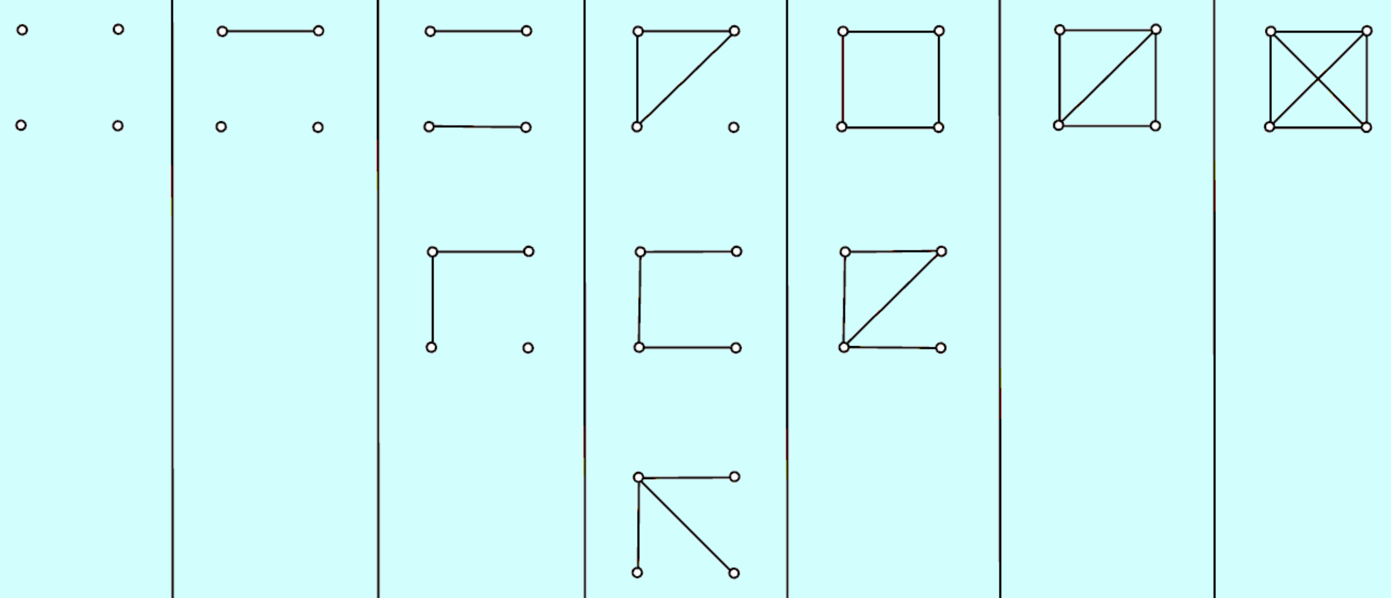
例1.18：画出3个以1, 1, 1, 2, 2, 3为度数列的非同构的无向简单图



图的基本概念：同构例题

例1.19 画出K_4的所有非同构的生成子图

m	0	1	2	3	4	5	6	



图的基本概念：同构

充分条件：

(1) $G_1 \cong G_2$当且仅当它们的补图同构，其中G_1与G_2均为简单图；

(2) $G_1 \cong G_2$当且仅当它们的邻接矩阵可以通过不断交换行或者列得到；

(3) $G_1 \cong G_2$当且仅当它们所有对应的子图都同构；

图的基本概念：同构

对于图同构判定问题，目前没认定是P问题还是NP完全问题

拟多项式复杂度算法的发现：

- László Babai 在 2015 年 11 月宣布发现了图同构问题的拟多项式时间算法（quasi-polynomial time），时间复杂度为$2^{O((\log n)^c)}$，其中c是一个固定的正数。
- 然而在 2017 年 1 月 4 日，Babai 撤回了拟多项式时间的声明，并表示上界是亚指数时间的（sub-exponential time），因为 Harald Helfgott 在证明中发现了一个错误。
- 2017 年 1 月 9 日时 Babai 提出了一个修正版本（完整版发表于1月19日），并重申拟多项式复杂度，而 Helfgott 也确认了其正确性。
- 此外，Helfgott 还进一步证明可以取 c=3，即复杂度为$2^{O((\log n)^3)}$。

图的基本概念：同构

目前比较好的图同构算法有Nauty算法，可参考：

https://pallini.di.uniroma1.it/index.html。

特例：树和平面图的同构判定是多项式时间可以解决的。

图同构问题是子图同构问题的一个特殊情况，后者已经被证明是NPC的问题。子图同构问题内容可以参考：

https://theory.stanford.edu/~virgi/cs267/lecture1.pdf

图的运算

图的运算

图的运算就是通过一定的操作，产生“新”的图。前面的子图的产生实际上就是图的运算，但它们都是在一个图中进行讨论的。

通过图的运算便于用代数方法讨论图。

定义1.1.6

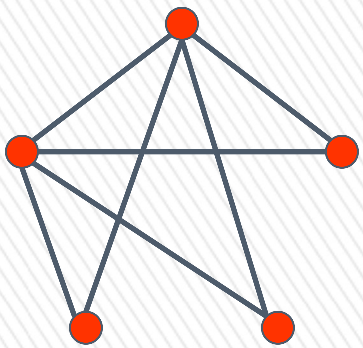
给定两个图$G_1=(V_1, E_1)$, $G_2=(V_2, E_2)$。

1）$G_1 \cup G_2=(V, E)$, 其中$V=V_1 \cup V_2$, $E=E_1 \cup E_2$

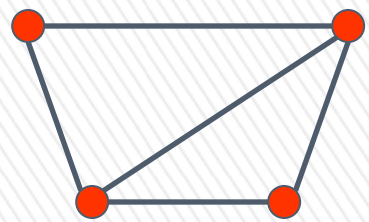
2）$G_1 \cap G_2=(V, E)$, 其中$V=V_1 \cap V_2$, $E=E_1 \cap E_2$

3）$G_1 \oplus G_2=(V, E)$, 其中$V=V_1 \cup V_2$, $E=E_1 \oplus E_2$

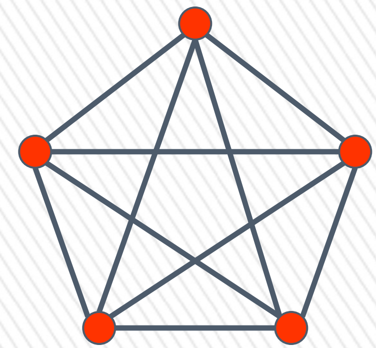
图的运算



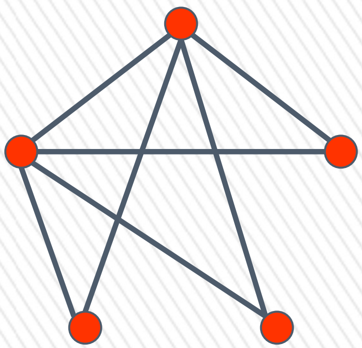
G_1



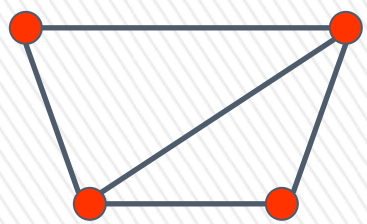
G_2



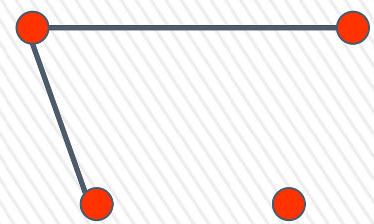
$G_1 \cup G_2 = K_5$



G_1

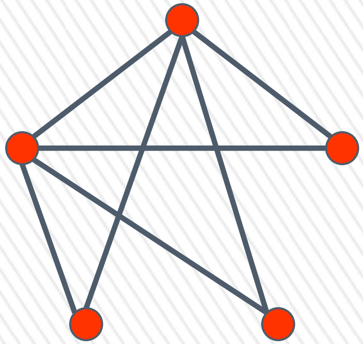


G_2

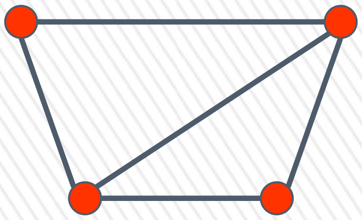


$G_1 \cap G_2$

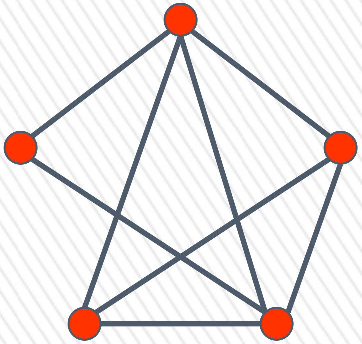
图的运算



G_1



G_2



$G_1 \oplus G_2$

其他运算

假设 $G=(V,E)$，v是V中的顶点，e是E中的边

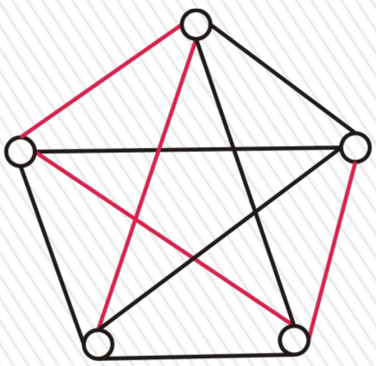
- $G - v = ?$
  - 从 V 中删去v，从E中删去v关联的边；
- $G - e = ?$
  - V不变，从 E 中删去 e；
- $G + e' = ?$
  - V不变，往 E 中添加 e'；

假设 $H=(V',E')$ 是 $G=(V,E)$ 的子图

- $G-H=(V_r, E_r)$：其中$V_r=V$且$E_r=E-E'$
  - 从G中删去H的边

补图

定义 设$G=(V, E)$为n阶无向简单图，以V为顶点集，所有使G成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图，称为G的补图，记作$\overline{G}$。



根据定义：$\overline{G}=K_n-G$

若$G\cong\overline{G}$, 则称G是自补图。

谢谢！