前言

飞机为什么怕飞鸟撞击？飞鸟为什么能够逼停高铁？

为什么火箭可以发射？

在到达火星之前，天问一号几次变轨。卫星如何变轨？

玩具陀螺为什么不倒？

跳水运动员在空中如何控制身体的旋转？

前言

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

牛顿定律是瞬时的规律。

在有些问题中， 如：碰撞（宏观）、 散射（微观） … 我们往往只关心过程中力的效果

——力对时间和空间的积累效应。

——力对时间和空间的积累效应。

力在时间上的积累效应：

平动 → 冲量 → 动量的改变

转动 → 冲量矩 → 角动量的改变

力在空间上的积累效应

→ 功 → 改变能量

机械运动的两种量度的争论

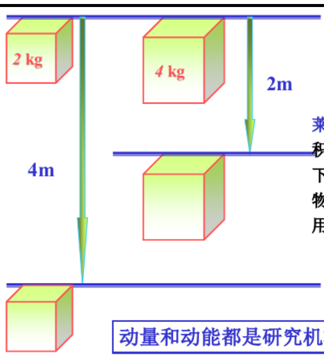
动量——以机械运动来量度机械运动

动能——以机械运动转化为一定量其他形式的运动的能力来量度机械运动

伽利略：在打击现象中，打击效果与锤的重量和速度有关

笛卡儿：提出了动量的概念并意识到动量守恒

牛　顿：给出了动量变化与外力的关系



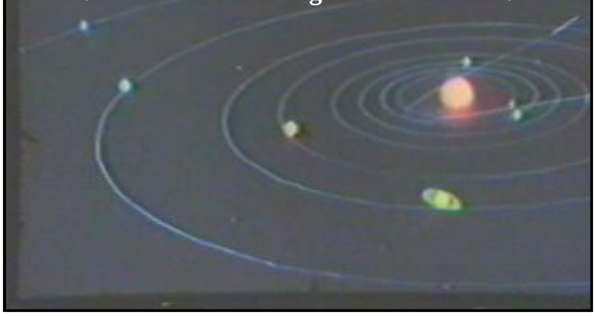
莱布尼兹：质量与速度平方的乘积才是运动的量度。2kg 的物体下落 4m 与 4kg 的物体下落2m，物体的 mv 不等，而 mv^2 相等，用 mv^2 量度机械运动更合适。

动量和动能都是研究机械运动不可缺少的物理量

$\vec{p}=m\vec{v}$　　　$E_k=\frac{1}{2}mv^2$

第三章　动量与角动量

（Momentum and Angular Momentum）



本章目录

Δ § 3.1 冲量，动量，质点动量定理

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$ 牛顿第二定律

$$\boxed{\vec{F}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{I}=\mathrm{d}\,\vec{p}}$$

定义：力的冲量（impulse）— $\boxed{\mathrm{d}\vec{I}=\vec{F}\,\mathrm{d}t}$

$$\boxed{\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t}$$

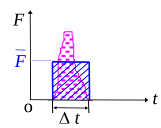
$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{cases}\boxed{\mathrm{d}\vec{I}=\vec{F}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\,\vec{p}} & \text{（微分形式）}\\ \boxed{\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t=\vec{p}_2-\vec{p}_1} & \text{（积分形式）}\end{cases}$$

质点动量定理
（theorem of momentum of a particle）

$$\begin{cases}\boxed{\mathrm{d}\vec{I}=\vec{F}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\,\vec{p}} & \text{（微分形式）}\\ \boxed{\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t=\vec{p}_2-\vec{p}_1} & \text{（积分形式）}\end{cases}$$

平均冲力 $\quad \overline{\vec{F}}=\dfrac{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t}{t_2-t_1}=\dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$



选取坐标系后

$$\boxed{\mathrm{d}\,I_i=\mathrm{d}\,p_i\quad(i=x,y,z)}\qquad \overline{F_i}=\frac{\Delta p_i}{\Delta t}$$

应用场合：

①过程短暂，运动有明显改变，关心结果，对过程细节不感兴趣。

例：平均冲击力 $\langle\vec{F}\rangle=\dfrac{\vec{p}-\vec{p}_0}{t-t_0}$

如：接球；安全网。延长作用时间，以减小冲击力。

②连续质量作用：如流体冲击、喷气反推。

注意：定理为矢量方程

Δ[例]已知：一篮球质量$m=0.58\text{kg}$，从h=2.0m的高度下落，到达地面后，以同样速率反弹，接触地面时间$\Delta\,t=0.019\text{s}$。

求：篮球对地的平均冲力$\overline{\boldsymbol{F}}$

解：设竖直向上为正方向

篮球到达地面的速率

$$\boldsymbol{v}=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times9.80\times2}=6.26\,\text{m/s}$$

$$\overline{F}=\frac{mv-(-mv)}{\Delta t}=\frac{2mv}{\Delta t}=\frac{2\times0.58\times6.26}{0.019}=3.82\times10^2\ \text{N}$$

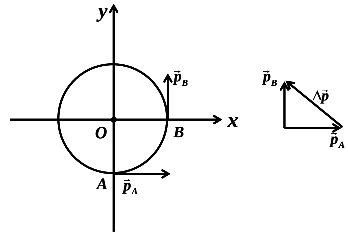


2003年2月1日哥伦比亚号航天飞机失事原因：发射时泡沫高速撞击，损毁表面，返回时损毁表面在高温下瓦解。

13

例题

一个小球质量为m，以速率υ 做匀速率圆周运动，在1/4 周期内向心力给它的冲量是多少？在一个周期内向心力给它合冲量又是多大？



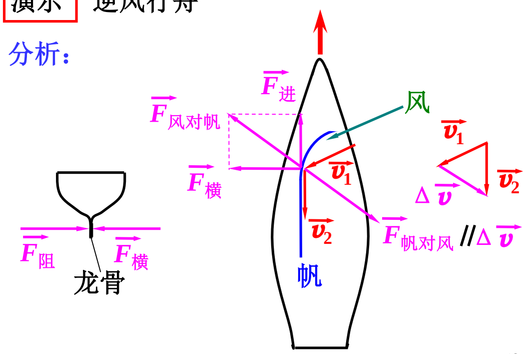
14

船行“八面风”

15

演示 逆风行舟

分析：

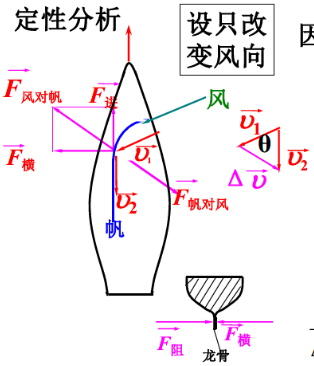


16

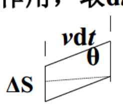
计算：作用于单位面积的帆面上的风力

定性分析

设只改变风向



因为连续作用，取dt内风



$$\mathrm{d}m = \rho(\Delta S \cdot v\,\mathrm{d}t \cdot \sin\theta)$$

$$|\Delta\vec{v}| = 2v\sin\frac{\theta}{2}$$

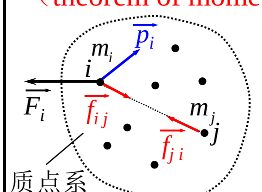
$$F \cdot \mathrm{d}t = (\mathrm{d}m)|\Delta\vec{v}|$$

$$\frac{F}{\Delta S} = 2\rho v^2 \sin\theta \sin\frac{\theta}{2} \propto v^2$$

17

§ 3.2 质点系动量定理

（theorem of mometum of particle system）



$\vec{F}_i$ 为质点 i 受的合外力，

$\vec{f}_{ij}$为质点 i 受质点 j 的内力，

$\vec{p}_i$ 为质点 i 的动量。

对质点 i： $(\vec{F}_i + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij})\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}_i$

18

对质点 i： $(\vec{F}_i + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij})\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}_i$

对质点系： $\sum_i (\vec{F}_i + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij})\mathrm{d}t = \sum_i \mathrm{d}\vec{p}_i$

由牛顿第三定律有： $\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} = 0$

所以有： $(\sum_i \vec{F}_i)\mathrm{d}t = \sum_i \mathrm{d}\vec{p}_i$

令 $\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{外}$， $\sum_i \vec{p}_i = \vec{P}$

则有： $\boxed{\vec{F}_{外}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{P}}$

19

则有： $\boxed{\vec{F}_{外}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{P}}$

或 $\boxed{\vec{F}_{外} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}}$

质点系动量定理（微分形式）

$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{外} \cdot \mathrm{d}t = \vec{P}_2 - \vec{P}_1}$ —质点系动量定理（积分形式）

用质点系动量定理处理问题可避开内力。

20

§3.3动量守恒定律

（law of conservation of momentum）

$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{外} \cdot \mathrm{d}t = \vec{P}_2 - \vec{P}_1}$

质点系所受合外力为零时，质点系的总动量不随时间改变。这就是质点系的动量守恒定律。

即 $\boxed{\vec{F}_{外} = 0时，\vec{P} = 常量}$

21

几点说明：

1.动量守恒定律是牛顿第三定律的必然推论。

2.动量定理及动量守恒定律适用于惯性系。

3. 动量若在某一惯性系中守恒，则在其它一切惯性系中均守恒。

4.若某个方向上合外力为零，则该方向上动量守恒，尽管总动量可能并不守恒。

22

5.当外力<<内力且作用时间极短时（如碰撞），可认为动量近似守恒。

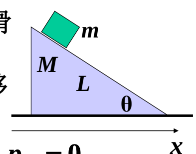
6.动量守恒定律是比牛顿定律更普遍、更基本的定律，它在宏观和微观领域均适用。

7.用守恒定律作题，应注意分析 过程、系统和条件。

23

例1 已知：M,m,θ,L,各接触面光滑初始静止

求： m自顶滑到底， M的位移



解： $\because \sum_i F_{ix} = 0,\ MV_x + mv_x = p_{0x} = 0$

由相对运动 $v_x = v'_x + V_x$

解得 $V_x = -\dfrac{mv'_x}{m+M}$

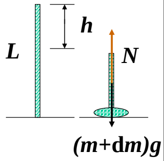
"—" 表明位移与x轴反向。

$\therefore \Delta X = \int_0^t V_x\,\mathrm{d}t = -\dfrac{m}{m+M}\int_0^t v'_x\,\mathrm{d}t = -\dfrac{mL\cos\theta}{m+M}$

24

例2 竖直链条，下端刚触地。求：自由下落h时对地作用力（设质量线密度为η,总长为L）

解：对象；$t\to t+\Delta t$内尚未落下及此间落下的链条



$m+\mathrm{d}m$ 初态：v

末态：$m,(v+\mathrm{d}v)$; $\mathrm{d}m,0$

由动量定理：

$$m(v+\mathrm{d}v)-(m+\mathrm{d}m)v=\{(m+\mathrm{d}m)g-N\}\mathrm{d}t$$

$N=mg-m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ ； 代入 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g,\ \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\eta v$

得 $N=\eta v^2=2\eta gh$ ∴对地 $N^*=3\eta gh$

25

解法二：对象 $t\to t+\mathrm{d}t$内落到地面的链条

$\mathrm{d}m$：初态 v；末态 0

∵自由下落，上端无力，重力不计（为二阶小量），有

$$-N\cdot\mathrm{d}t=0-\mathrm{d}m\cdot v,$$

$$N=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v=\eta v^2=2\eta gh$$

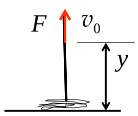
由牛III，再加已有部分重力，得

$$N^*=3\eta gh$$

26

例3

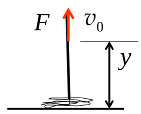
桌面上堆放一串柔软的长链，总长度为 l_0，今拉住长链的一端竖直向上以恒定速度 v_0 上提，求：当提起的链的长度为 l 时，所用的向上的力。设长链单位长度的质量为 ρ



27

参考系、坐标系

第一种方法 所有的长链为研究对象 固定质量



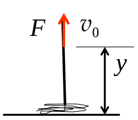
$$F+N-\rho l_0 g=\frac{d}{dt}(\rho y v_0-0)=\rho\frac{dy}{dt}v_0=\rho v_0^2$$

$$F=\rho v_0^2-N+\rho l_0 g=\rho v_0^2-N+\rho y g+\rho(l_0-y)g$$

$$=\rho y g+\rho v_0^2$$

28

第二种方法 以已经上提的长链为研究对象 变质量问题



t 时刻 动量 $\rho y v_0$

$t+dt$ 时刻 动量 $\rho(y+dy)v_0$

dt 时间内 冲量 $(F-\rho y g)dt$

动量变化量 $\rho(y+dy)v_0-\rho y v_0=\rho dy v_0$

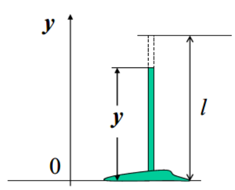
动量定理 $(F-\rho y g)dt=\rho dy v_0$

$$F=\rho y g+\rho v_0\frac{dy}{dt}=\rho y g+\rho v_0^2$$

29

例：一柔软绳长 l，线密度 ρ，一端着地开始自由下落，下落的任意时刻，给地面的压力为多少？

解：在竖直向上方向建坐标，地面为原点（如图）。



设压力为 N

$$N-\rho g l=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\dot{p}$$

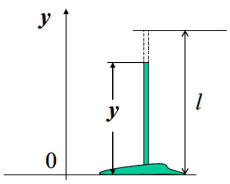
$$p=\rho y v \ \text{—>}\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

$$=\rho\frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t}$$

$$N=\rho g l+\rho\frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t}$$

30

$$N=\rho g l+\rho\frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t}\qquad v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad -g=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$



$$\frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t}=-yg+v^2$$

$$v=-gt\qquad y=l-\frac{1}{2}gt^2$$

$$l-y=\frac{v^2}{2g}\quad\rightarrow\quad v^2=2g(l-y)$$

$$N=3\rho g(l-y)$$

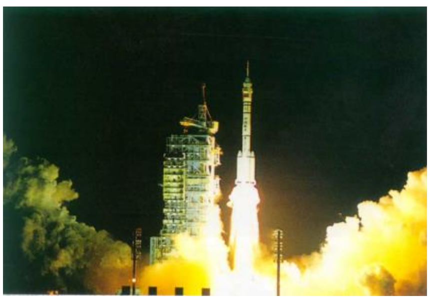
31



上层垮塌，承重陡增3倍，压垮整个建筑？

Δ§3.4变质量系统、火箭飞行原理

（书§3.4）



“神州”号飞船升空

33

34

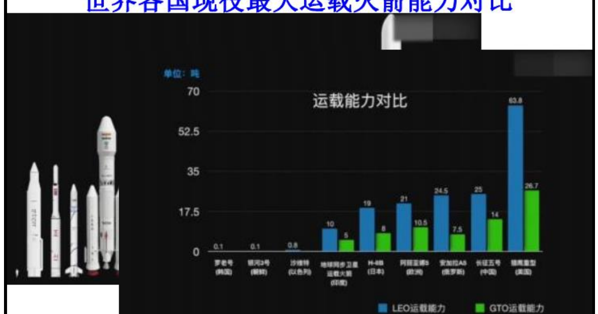
万虎或万户（Wan Hoo，约公元1500年）

万虎对飞天的狂热使他成为世界上第一个宇航员。他的“航天”计划中使用一个坚固的木椅，两个风筝还有47个装满黑火药的火箭，而他则盛装坐在椅子上实现航天计划。

4个半世纪之后，人类进入太空所采用的基本原理与万虎的计划毫无二致。

对于他的时代，万虎是具有超前意识的宇航员。

世界各国现役最大运载火箭能力对比

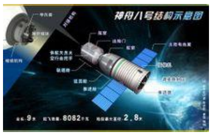


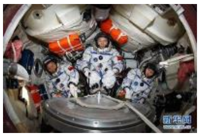
LEO：Low Earth Orbit 低地球轨道
GTO：Geostationary Transfer Orbit 地球同步转移轨道
SSO：Sun-synchronous Orbit 太阳同步轨道

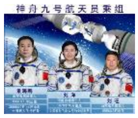
神舟五号

神舟六号

神舟七号







2012-6

37

聆听太空心曲，共享飞天激情
“神七”航天英雄与清华学子面对面

2008年12月3日下午，“神舟”七号载人航天飞船乘员组航天员、“航天英雄”翟志刚，“英雄航天员”刘伯明和景海鹏来到清华大学，在主楼接待厅与清华学子亲切交谈，讲述了“神七”飞天背后的故事，畅谈了航天人生的艰辛和收获。40

两类变质量问题（低速，$\upsilon << c$）：

▲粘附 — 主体的质量增加（如滚雪球）

▲抛射 — 主体的质量减少（如火箭发射）

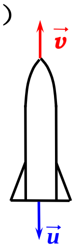
还有另一类变质量问题是在高速（$\upsilon \sim c$）情况下，这时即使没有粘附和抛射，质量也可以改变— 随速度变化 $m = m(\upsilon)$，这是相对论情形，不在本节讨论之列。

下面仅以火箭飞行原理为例，讨论变质量问题。

39

一. 火箭不受外力情形（在自由空间飞行）

1.火箭的速度



参考系：地面参考系（惯性系）

系统：火箭壳体 + 尚存燃料 （变质量系统）

条件：燃料相对箭体以恒速u喷出

总体过程：i (点火) $\to f$ (燃料烧尽)

先分析一微过程：$t \to t + dt$

初态：系统质量 M，速度 υ (对地)，动量 $M\upsilon$

末态：喷出燃料后

喷出燃料的质量：$dm = -dM$，

喷出燃料速度(对地)：$\upsilon - u$

40

火箭壳体 +尚存燃料的质量：$M - dm = M + dM$

火箭壳体 +尚存燃料的速度(对地)：$\upsilon + d\upsilon$

系统动量：$(M + dM)(\upsilon + d\upsilon) + [-dM(\upsilon - u)]$

由动量守恒，有

$$M\upsilon = (M + dM)(\upsilon + d\upsilon) - dM(\upsilon - u)$$

经整理（略去2阶小量）得：$Md\upsilon = -udM$

$$\longrightarrow d\upsilon = -u\frac{dM}{M} \longrightarrow \int_i^f d\upsilon = -u\int_{M_i}^{M_f}\frac{dM}{M}$$

速度公式 $\boxed{\upsilon_f = \upsilon_i + u\ln\frac{M_i}{M_f}}$

41

引入火箭质量比：$N = \dfrac{M_i}{M_f}$

得 $\boxed{\upsilon_f = \upsilon_i + u\ln N}$

提高 υ_f 的途径：

(1)提高 u（现可达 $u = 4.1$ km/s）

(2)增大 N（单级火箭N提得很高不合算）

为有效提高N，采用多级火箭（如2级、3级）

$\upsilon = u_1\ln N_1 + u_2\ln N_2 + u_3\ln N_3$

资料：长征二、三、四、五（六、七、八）号各系列运 载火箭。

42

2.火箭所受的反推力

研究对象：喷出气体 dm

t 时刻：速度υ (和主体速度相同)，动量 υdm

t +dt时刻：速度 $\upsilon - u$， 动量d$m(\upsilon - u)$

由动量定理，dt内喷出气体所受冲量

$$F_{箭对气}\mathrm{d}t = \mathrm{d}m(\upsilon - u) - \upsilon\mathrm{d}m = -F_{气对箭}\mathrm{d}t$$

由此得火箭所受燃气的反推力为

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{气对箭} = \boldsymbol{u}\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{m}}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}}}$$

如以火箭为研究对象呢?

43

二. 重力场中的火箭发射

先分析一微过程 竖直向上为正方向： $t \to t + \mathrm{d}t$

初态：系统质量 M，速度υ (对地)，动量 $M\upsilon$

末态：喷出燃料后

喷出燃料的质量：dm = - dM，

喷出燃料速度(对地)： $\upsilon - u$

火箭壳体 +尚存燃料的质量： M - dm

火箭壳体 +尚存燃料的速度(对地)：υ + d υ

系统动量： $(M + \mathrm{d}M)(\upsilon + \mathrm{d}\upsilon) + [-\mathrm{d}M(\upsilon - u)]$

44

初态：动量 $M\upsilon$

末态：动量： $(M + \mathrm{d}M)(\upsilon + \mathrm{d}\upsilon) + [-\mathrm{d}M(\upsilon - u)]$

动量改变量 $\quad M\mathrm{d}\upsilon + u\mathrm{d}M$

对整个系统用动量定理

$$M\mathrm{d}\upsilon + u\mathrm{d}M = -Mg\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}\upsilon + u\frac{\mathrm{d}M}{M} = -g\mathrm{d}t$$

45

$$\mathrm{d}\upsilon + u\frac{\mathrm{d}M}{M} = -g\mathrm{d}t$$

忽略地面附近重力加速度 g 的变化，

可得 t 时刻火箭的速度：

$$\boxed{\boldsymbol{\upsilon}(t) = \boldsymbol{\upsilon}_i - \boldsymbol{g}t + \boldsymbol{u}\ln\frac{\boldsymbol{M}_i}{\boldsymbol{M}_t}}$$

M_t： t 时刻火箭壳和尚余燃料的质量

比较：不计重力时

$$\boxed{\boldsymbol{\upsilon}_f = \boldsymbol{\upsilon}_i + \boldsymbol{u}\ln\frac{\boldsymbol{M}_i}{\boldsymbol{M}_f}}$$

46

【重力场中火箭发射回顾】

初态：动量 $M\upsilon$

末态：动量： $(M + \mathrm{d}M)(\upsilon + \mathrm{d}\upsilon) + [-\mathrm{d}M(\upsilon - u)]$

动量改变量 $\quad M\mathrm{d}\upsilon + u\mathrm{d}M$

对整个系统用动量定理

$$M\mathrm{d}\upsilon + u\mathrm{d}M = -Mg\mathrm{d}t = F\mathrm{d}t$$

$$F\mathrm{d}t = M\mathrm{d}\upsilon + \upsilon\mathrm{d}M + (u - \upsilon)\mathrm{d}M$$

$$F = \frac{\mathrm{d}(M\upsilon)}{\mathrm{d}t} + (u - \upsilon)\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$$

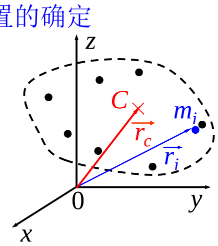
与牛二定律进行比较

47

§3.5质心（center of mass）

一.质心的概念和质心位置的确定

定义质心 C 的位矢为：

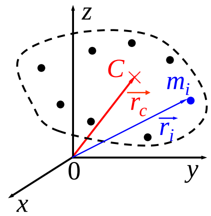


$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}}$$

48

质心 C 的位矢为

$$\vec{r}_C=\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}=\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{m}$$

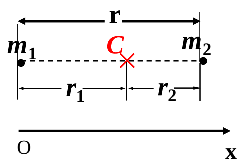


$$\begin{cases} x_C=\dfrac{\sum m_i x_i}{m} \\ y_C=\dfrac{\sum m_i y_i}{m} \\ z_C=\dfrac{\sum m_i z_i}{m} \end{cases}$$

质心位置是质点位置以质量为权重的平均值。

二.几种系统的质心

● 两质点系统



$$m_1 r_1=m_2 r_2$$

质心和重心

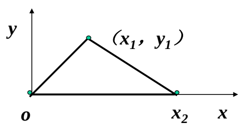
$$r_c=\frac{m_2 r}{m_1+m_2}$$

$$r_1=r_c=\frac{m_2 r}{m_1+m_2}$$

$$r_2=r-r_1=\frac{m_1 r}{m_1+m_2}$$

$$m_1 r_1=m_2 r_2$$

如：任意三角形的每个顶点有一质点m。



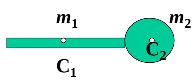
$$x_c=\frac{mx_1+mx_2}{3m}=\frac{x_1+x_2}{3}$$

$$y_c=\frac{my_1}{3m}=\frac{y_1}{3}$$

● 匀质物体，质心在几何中心

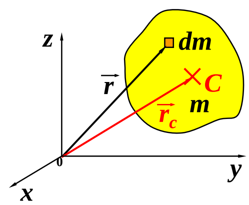
均匀杆、圆盘、 圆环、球，质心为其几何中心。

● 叠加性：如图，由C_1,C_2→C



$$\vec{r}_C=\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}=\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{m}$$

● 连续体



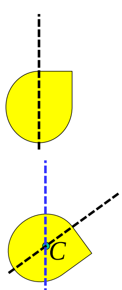
$$\vec{r}_C=\frac{\int\vec{r}\,dm}{m}$$

$$x_C=\frac{\int x\,dm}{m}$$

……

【讨论：质心和重心】

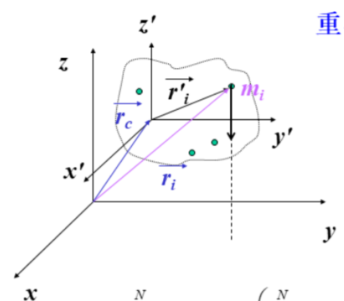
找重心的方法（用力矩可以证明）



质心 $$\vec{r}_C=\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}=\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{m}$$

重心 $$\vec{r}_w=\frac{\sum m_i g_i\vec{r}_i}{\sum m_i g_i}$$

物体线度不大，重力加速度均匀，质心与重心重合



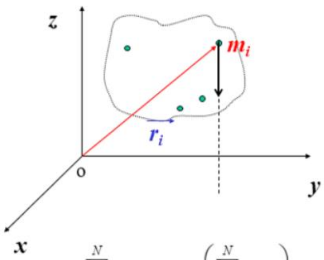
重心

相对质心的力矩

$$\vec{r}_i'\times m_i\vec{g}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{r}'_i\times m_i\vec{g}=\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}'_i\right)\times\vec{g}=0$$

地面上的重心



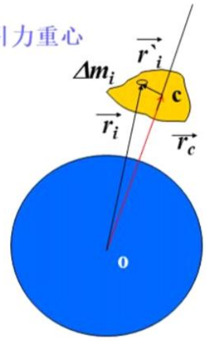
相对原点的重力矩

$$\vec{r}_i \times m_i \vec{g}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g} \;\; = M\vec{r}_c \times \vec{g} = \vec{r}_c \times M\vec{g}$$

相当于所有质量集中于质心产生的力矩

引力重心



$$\vec{f} = \sum_i \vec{f}_i = -GM \sum_i \frac{\Delta m_i}{r_i^3} \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i\,'$$

$$r_c >> r_i\,'$$

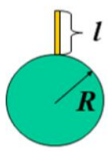
$$\frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = \frac{\vec{r}_c + \vec{r}_i\,'}{(r_c^2 + r'^2_i + 2\vec{r}_c \cdot \vec{r}_i\,')^{3/2}}$$

$$= \frac{\vec{r}_c}{r_c^3} + \frac{1}{r_c^3}[\vec{r}_i\,' - \frac{3\vec{r}_c(\vec{r}_c \cdot \vec{r}_i\,')}{r_c^2}]$$

$$\vec{f} = -GM \sum_i \Delta m_i \{ \frac{\vec{r}_c}{r_c^3} + \frac{1}{r_c^3}[\vec{r}_i\,' - \frac{3\vec{r}_c(\vec{r}_c \cdot \vec{r}_i\,')}{r_c^2}] \}$$

$$\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i\,' = 0$$

练习



R>>l

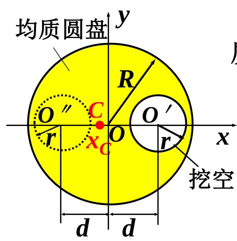
R~l

$$\vec{f} = -GM \frac{\vec{r}_c}{r_c^3} \sum_i \Delta m_i$$

物体线度远小于到地心的距离时
相当于质量集中于质心

[例] 如图示，求挖掉小圆盘后系统的质心坐标。

解： 由对称性分析，质心*C*应在*x*轴上。

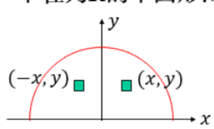


令σ为质量的面密度，则质心坐标为：

$$x_C = \frac{0 + (-d \cdot \sigma \cdot \pi r^2)}{\sigma \cdot \pi R^2 - \sigma \cdot \pi r^2}$$

$$= -\frac{d}{(R/r)^2 - 1}$$

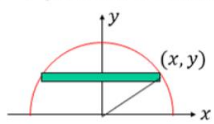
例：半径为R的半圆形薄板，质量m均匀分布，求质心



$$x_c = \frac{\int x dm}{m} = \frac{\sum x_i \Delta m_i}{m} = 0$$

质量均匀分布时，质心是几何中心

例：半径为R的半圆形薄板，质量m均匀分布，求质心



$$x_c = \frac{\int x dm}{m} = \frac{\sum x_i \Delta m_i}{m} = 0$$

质量均匀分布时，质心是几何中心

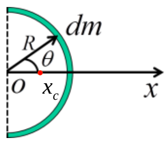
设面密度 σ

$$y_c = \frac{\int y dm}{m} = \frac{\sum x_i \Delta m_i}{m} = 0$$

$$y \int dm = y\sigma 2x dy = y\sigma dy 2\sqrt{R^2 - y^2}$$

$$y_c = \frac{\int_0^R y\sigma dy 2\sqrt{R^2 - y^2}}{\sigma\pi R^2/2} = \frac{4}{3\pi} R$$

【例题】 求一半圆环的质心 R, m



$$x_c = \frac{\int x\,dm}{m} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R\cos\theta R d\theta \rho}{\pi R \rho} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R\cos\theta\, d\theta}{\pi} = \frac{2R}{\pi}$$

质心不一定在系统内

系统内力不会影响质心的运动

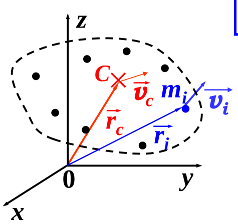
（如抛掷的物体、跳水的运动员、爆炸的焰火等，其质心的运动都是抛物线）。

§ 3.6 质心运动定理

（theorem of motion of center of mass）

一. 质心运动定理

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}}$$



$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt}$$

$$\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt}$$

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}\right) = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m}$$

$$= \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m} \qquad m\vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

总动量 $\boxed{\vec{P} = m\vec{v}_C}$

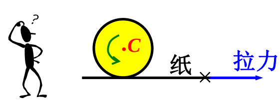
由 $$\vec{F}_{外} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}_C) = m\frac{d\vec{v}_C}{dt}$$

有 $\boxed{\vec{F}_{外} = m\vec{a}_C}$ —质心运动定理

质心的运动如同一个在质心位置处的质点的运动，该质点集中了整个质点系的质量和所受的外力。在质点力学中所谓“物体”的运动，实际上是物体质心的运动。

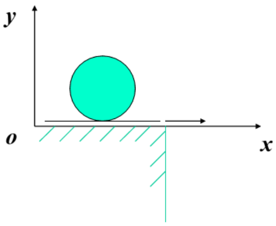
演示 质心运动

思考



球往哪边移动？

例：水平桌面上拉动纸，纸张上有一均匀球，球的质量M，纸被拉动时与球的摩擦力为 F。求：t 秒后球相对桌面移动多少距离？

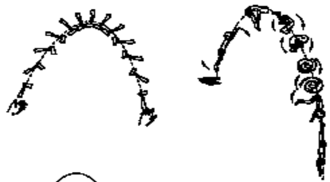


解：$\vec{F} = M\vec{a}_c$

$a_c = \dfrac{F}{M}$ $\quad x_c = \dfrac{1}{2}\dfrac{F}{M}t^2$

答：沿拉动纸的方向移动 $\dfrac{1}{2}\dfrac{F}{M}t^2$

系统内力不会影响质心的运动



（如抛掷的物体、跳水的运动员、爆炸的焰火等，其质心的运动都是抛物线）。

二.动量守恒与质心的运动

若合外力为零，则 $\begin{cases} \text{质点系动量守恒} \\ \vec{a}_C = 0 \rightarrow \vec{v}_C = \text{常矢量} \end{cases}$

若合外力分量为0，则 $\begin{cases} \text{质点系分动量守恒} \\ \text{相应的质心分速度不变} \end{cases}$

如：$\sum\limits_i F_{ix} = 0 \longrightarrow v_{Cx} = \text{常量}$

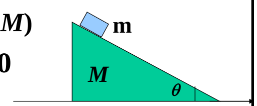
质点系动量守恒和质心匀速运动等价！

例：由质心运动定理重解前斜面退行距离例

解：地面参考系，对$(m+M)$

$\because \sum\limits_i F_{ix} = 0, \therefore v_{cx} = v_{cx0} = 0$

$\Delta x_c = \dfrac{m\Delta x + M\Delta X}{m+M} = 0$



即 $m\Delta x + M\Delta X = 0$

代入相对运动关系：

$\Delta x = \Delta x' + \Delta X$ 得 $\Delta X = -\dfrac{m\Delta x'}{m+M}$

结果同，此方法简便。

* 三. 质心（参考）系（frame of center of mass）

1. 质心系

讨论天体运动及碰撞等问题时常用到质心系。

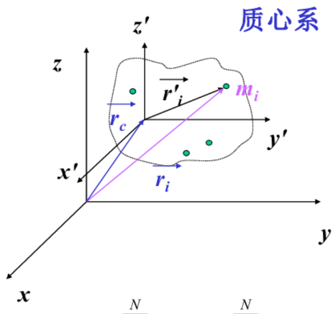
质心系是固结在质心上的平动参考系。

质心系不一定是惯性系。

质点系的复杂运动通常可分解为：

$\begin{cases} \text{质点系整体随质心的运动} \\ \text{各质点相对于质心的运动} \end{cases}$ —— 在质心系中考察质点系的运动

质心系



质心参考系

质心坐标系
原点选在质心

$\vec{r}_i\,' = \vec{r}_i - \vec{r}_c$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\,' = \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_c) = 0$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i{}' = 0}$$

求导 $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i{}' = 0$

质心系可能不是惯性系，但质心系特殊，动量守恒定律适用，而且，总动量 = 0。

$$\vec{r}_i{}' = \vec{r}_i - \vec{r}_c$$

质心系中的速度 $\vec{v}_i{}' = \vec{v}_i - \vec{v}_c$

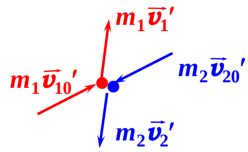
再求导 $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i{}' = 0$ $\quad \vec{a}_i{}' = \vec{a}_i - \vec{a}_c$

73

2.质心系的基本特征

$$\sum m_i \vec{v}_i' = (\sum m_i)\vec{v}_C' = 0$$

质心系是零动量参考系。



两质点系统在其质心系中，总是具有等值、反向的动量。

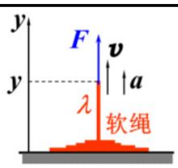
质心系中看两粒子碰撞

74

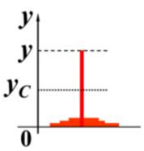
【例】如图绳的线密度为 λ，

求：（1）$\boldsymbol{v}$ 恒定，$F = ?$

（2）a 恒定，$F = ?$



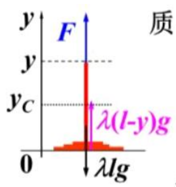
解：此题可用变质量问题或动量定理求解，这里用质心运动定理求解。



设总绳长 l，质心坐标：

$$y_C = \frac{\lambda \cdot y \cdot \frac{y}{2} + 0}{\lambda l} = \frac{y^2}{2l}$$

75



质心受力：拉力F，重力λlg，

支持力 $\lambda(l-y)g$（为何？）

$$y_C = \frac{y^2}{2l}$$

根据质心运动定理有：

$$\lambda l \cdot \ddot{y}_C = F + \lambda(l-y)g - \lambda lg = F - \lambda yg$$

$$\longrightarrow \quad F = \lambda yg + \lambda l \cdot \ddot{y}_C = \lambda yg + \lambda(\dot{y}^2 + y\ddot{y})$$

（1）$\boldsymbol{v}$ 恒定，$\dot{y} = \boldsymbol{v}, \ddot{y} = 0$，$\quad F = \lambda yg + \lambda \boldsymbol{v}^2$

（2）a 恒定，$\dot{y}^2 = 2ay, \ddot{y} = a$，$\quad F = \lambda yg + 3\lambda ya$

76

§3.7 质点的角动量

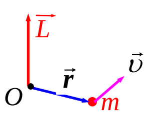
（angular momentum of a particle）

一. 质点的角动量

先定义参考系

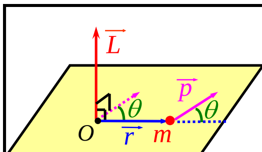
质点m对固定点 O的角动量定义为：

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})}$$



单位： kg·m²/s 或 J·s

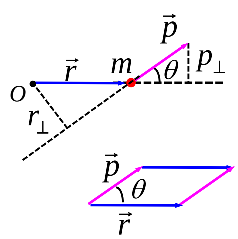
77



$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})}$$

$$L = rp\sin\theta = rmv\sin\theta$$

单位： kg·m²/s 或 J·s



$$L = rp\sin\theta = r\sin\theta p$$

= 平行四边形的面积

78

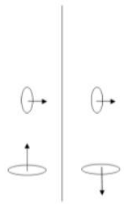
质点角动量

用叉积定义角动量 $\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}}$ **相对某点**

镜像变换对称性

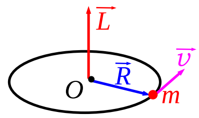
赝(轴)矢量

(角速度、角动量、磁场)



对称面上平行分量0

79



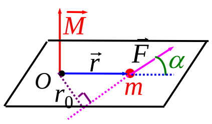
质点作匀速率圆周运动时，
角动量的大小为 $L=m\upsilon R$ 、
方向不变。

80

二. 质点力矩

先定义参考系

定义力对定点 O 的力矩 (torque) 为：$\boxed{\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}}$



方向判定：右手法则

$$M=rF\sin\alpha$$
$$=r\sin\alpha F=r_0F$$

$r_0=r\sin\alpha$ 称力臂

81

三. 质点的角动量定理

由 $$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$$

有：$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\vec{\upsilon}\times m\vec{\upsilon}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}$$

82

于是有 $\boxed{\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$

或 $\boxed{\mathrm{d}\vec{L}=\vec{M}\,\mathrm{d}t}$

质点角动量定理（微分形式）

积分 $\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\cdot\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1}$ 质点角动量定理（积分形式）

$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\,\mathrm{d}t$ 称冲量矩

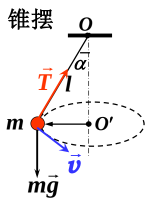
——力矩对时间的积累作用。

83

平动情形	转动情形
$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{\upsilon})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$	$\boxed{\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$
$\boxed{\mathrm{d}\vec{I}=\vec{F}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p}}$	$\boxed{\vec{M}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{L}}$
$\boxed{\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t=\vec{p}_2-\vec{p}_1}$	$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\cdot\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1}$

84

[例] 锥摆的角动量



对O点：$\vec{r}_{om}\times\vec{T}=0$

$|\vec{r}_{om}\times m\vec{g}|=l\sin\alpha$（$mg$）

合力矩不为零，角动量变化。

对O′点：$\vec{r}_{o'm}\times\vec{T}=\vec{r}_{o'm}\times(-m\vec{g})\neq 0$

$\vec{r}_{o'm}\times m\vec{g}=-\vec{r}_{o'm}\times\vec{T}$

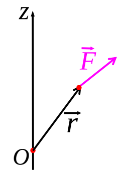
合力矩为零，角动量大小、方向都不变。

（合力不为零，动量改变！）

85

四. 质点对轴的角动量定理

1.对轴的角动量定理



$$\boxed{\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

$$\vec{M}\cdot\vec{k}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{k}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{L}\cdot\vec{k})$$

即 $$\boxed{M_z=\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}}$$ —— 质点对轴的角动量定理

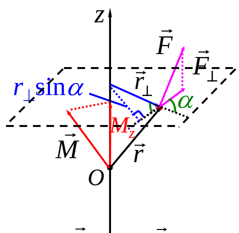
86

2. 力对轴的力矩

$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

$M_z=\vec{M}\cdot\vec{k}$

把对O点的力矩向过O点的轴（例如 z 轴）投影：



$=(\vec{r}\times\vec{F})\cdot\vec{k}=\vec{r}\cdot(\vec{F}\times\vec{k})$

$=\vec{r}\cdot[(\vec{F}_\perp+\vec{F}_z)\times\vec{k}]$

$=\vec{r}\cdot(\vec{F}_\perp\times\vec{k})=-\vec{r}\cdot(\vec{k}\times\vec{F}_\perp)$

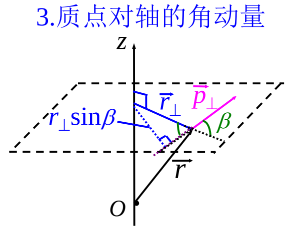
$=-(\vec{r}\times\vec{k})\cdot\vec{F}_\perp=\vec{F}_\perp\cdot(\vec{k}\times\vec{r})$

$=\vec{F}_\perp\cdot[\vec{k}\times(\vec{r}_\perp+\vec{r}_z)]=\vec{F}_\perp\cdot(\vec{k}\times\vec{r}_\perp)=\vec{k}\cdot(\vec{r}_\perp\times\vec{F}_\perp)$

$=F_\perp r_\perp\sin\alpha$ ——力对轴的力矩。

87
注意角度逆时针方向

3.质点对轴的角动量



$L_z=\vec{L}\cdot\vec{k}$

$=p_\perp r_\perp\sin\beta$

——质点对轴的角动量

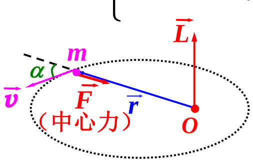
88

§ 3.8 角动量守恒定律

（law of conservation of angular momentum）

$\boxed{若\ \vec{M}=0，则\ \vec{L}=常矢量}$ — 质点角动量守恒定律

$$\vec{M}=0\begin{cases}\vec{F}=0\,,\\ \vec{F}过O点：中心力（如行星受中心恒星的万有引力）\end{cases}$$



$\vec{L}=\vec{r}\times(m\vec{v})=$常矢量

（1） $mvr\sin\alpha=\mathrm{const.}$，

（2）轨道在同一平面内。

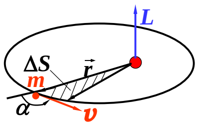
89

$\boxed{若\ M_z=0\ ，则\ L_z=常量}$ — 质点对轴的角动量守恒定律

角动量守恒定律是物理学的基本定律之一，它不仅适用于宏观体系，也适用于微观体系，而且在高速低速范围均适用。

90

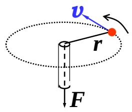
角动量守恒定律可导出行星运动的开普勒第二定律：



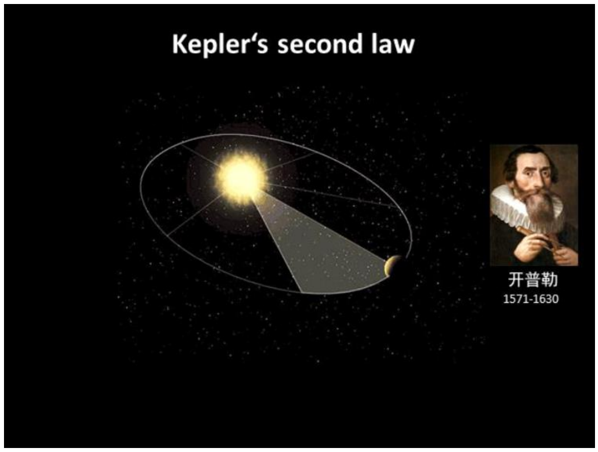
$$L = m\boldsymbol{\upsilon} \cdot r\sin\alpha = \text{常量} \longrightarrow$$

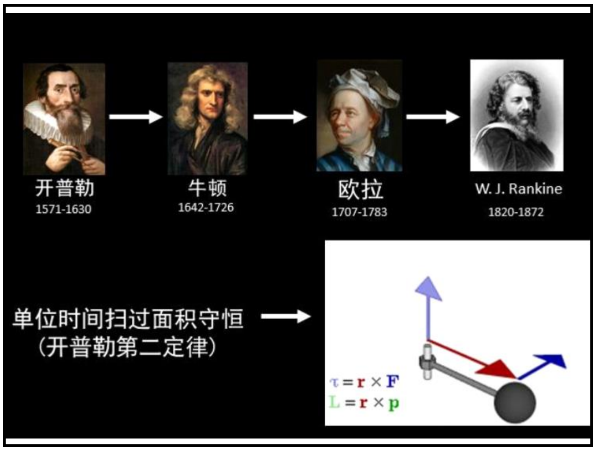
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{2m} = \text{常量}$$

演示 质点的角动量守恒

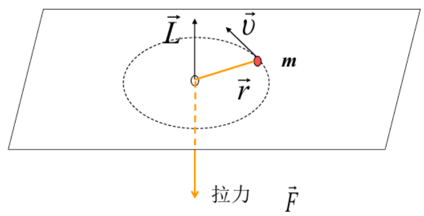


91





角动量守恒演示实验

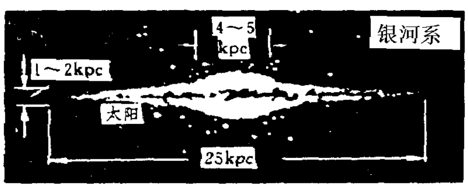


$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

$$L = mr\upsilon \quad = mr^2\omega = \text{常量}$$

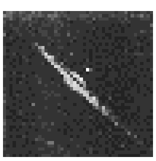
94

▲星云具有盘形结构：



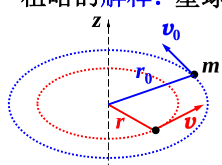
pc — 秒差距，1pc = 3.086×10^{16}m

旋转的星云



95

粗略的解释：星球具有原始角动量$r_0 m\boldsymbol{\upsilon}_0 \vec{k}$



$$M_z = 0 \longrightarrow L_z = \text{const.}$$

$$\longrightarrow r_0 m\boldsymbol{\upsilon}_0 = rm\boldsymbol{\upsilon}$$

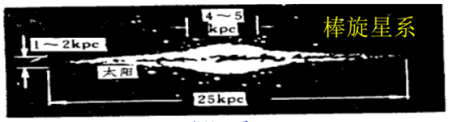
$$\therefore\ \boldsymbol{\upsilon} = \frac{\boldsymbol{\upsilon}_0 r_0}{r} \propto \frac{1}{r}$$

星球所需向心力：$F_{\text{向}} = m\dfrac{\boldsymbol{\upsilon}^2}{r} \propto \dfrac{1}{r^3}$

可近似认为引力：$F_{\text{引}} \propto \dfrac{1}{r^2}$

引力使r↓到一定程度 → $F_{\text{引}} = F_{\text{向}}$，$r$就不变了，引力不能再使 r 减小 。但在z 轴方向却无此限制，可以在引力作用下不断收缩。

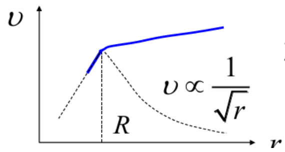
96



银河系

1pc(秒差距) = 3.26光年

速度分布 $m\dfrac{\upsilon^2}{r} \propto \dfrac{1}{r^2}$ $\qquad \upsilon \propto \dfrac{1}{\sqrt{r}}$



$\upsilon \propto \dfrac{1}{\sqrt{r}}$

观测 210～240 km/s

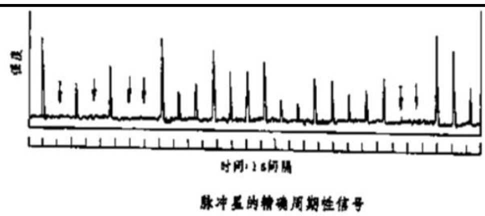
暗物质？

著名物理学家、诺贝尔奖获得者

阿尔法磁谱仪(AMS)，

宇宙中90%的物质是看不见的，因为看不见，所以称之为暗物质，“暗物质你不知道是什么”。

暗物质粒子互相碰撞的时候，能量又会变成普通的物质，比如说正电子和反质子，碰到以后就产生能量，能量转化为质量，还有多余的粒子，因此可以被AMS精确测量，从而被确定为暗物质信号。



脉冲星自转周期几乎不变，
转速太快，应为中子星（密度太小则被离心力撕裂）

球形星体自转角动量 $=\dfrac{2}{5}MR^2\omega$

星体演化过程不受外力矩，角动量守恒

*上图中的脉冲星自转周期只有约 **1.19** 秒，要使星体不被惯性离心力甩散，必须满足条件：

$$\frac{GM}{R^2} > R\omega^2 \text{，} \left(M = \frac{4\pi}{3}R^3\rho\right)$$

即星体的密度需满足条件：$\rho > \dfrac{3\omega^2}{4\pi G}$

按上条件计算，脉冲星密度超过了白矮星密度。经多方认证，脉冲星是高速旋转的中子星。通常中子星自转周期是毫秒量级。

§ 3.9 质点系的角动量

质点系的角动量 $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{L}_i\right) = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt}$$

$$= \sum_i \left(\vec{M}_{i外} + \vec{M}_{i内}\right) = \vec{M}_{外} + \vec{M}_{内}$$

$$\vec{M}_{外} = \sum_i \vec{M}_{i外} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_{内} = \sum_i \vec{M}_{i内} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij}\right) = 0 \text{（自己证）}$$

于是有：
对同一定点 $\boxed{\vec{M}_{外} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}}$ — 质点系角动量定理

内力矩不改变系统的总角动量

$\boxed{\text{若 } \vec{M}_{外} = 0\text{，则 } \vec{L} = \text{常矢量}}$

——质点系角动量守恒定律

注意：①是矢量和守恒
②$\sum(\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = 0$ 与 $\sum_i \vec{F}_i = 0$ 相互独立！

思考 质点系角动量守恒和动量守恒是否相互独立？

【思考】质点系角动量和动量守恒相互独立吗？为什么？

动量守恒： $\boxed{\vec{F}_{外}=0时，\vec{P}=常矢量}$

角动量守恒： $\boxed{若\vec{M}=0，则\vec{L}=常矢量}$

受力是否为零与力矩是否为零，两者之间没有必然联系。因此，动量守恒和角动量守恒是相互独立，没有必然因果关系。

[例] 猴子“抓”菠萝（等重）

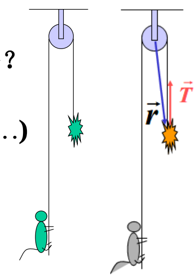
猴爬绳能缩短与菠萝的距离吗？

对猴子＋菠萝，对轮心：

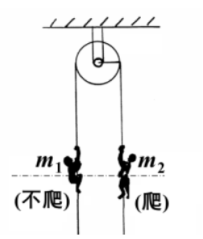
$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0 \quad (|\vec{r}_i \times \vec{T}_i| = RT \ldots)$$

二者获得相等相反的角动量；

而动量相同！ $\sum_i \vec{F}_i \neq 0!$



例 如图示，两个同样重的小孩，各抓着跨过滑轮的一端。起初都不动，然后右边的小孩用力向上爬绳，左边的小孩只抓住绳但不爬动。忽略滑轮、绳的质量和轴的摩擦。设他们的起始高度相同，问哪个小孩先到达滑轮？



解答：小孩重力相等，相对轴心力矩大小相等方向相反，那么整个系统合外力矩为零，角动量守恒。

相对于轴心，

$mv_1r = mv_2r \qquad v_1 = v_2$

两个小孩同时到达滑轮。

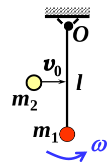
[例] 一根长为l的轻质杆，端部固结一小球m_1，另一小球m_2以水平速度v_0碰杆中部并与杆粘合。

求：碰撞后杆的角速度ω

解：选m_1（含杆）$+m_2$为系统

碰撞时重力和轴力都通过O，

对O 力矩为零，故角动量守恒。



有 $\dfrac{l}{2}m_2v_0 = lm_1\omega l + \dfrac{l}{2}m_2\omega\dfrac{l}{2}$

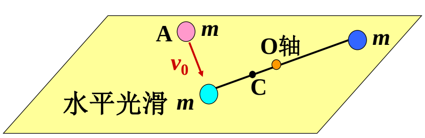
解得： $\omega = \dfrac{2m_2}{4m_1+m_2}\cdot\dfrac{v_0}{l}$

$\boxed{思考}$ （m_1＋m_2）的水平动量是否守恒？

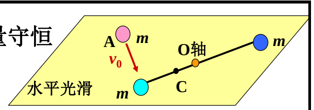
存在水平轴力，由结果验算！

[例] 如图，轻质杆长l，两端固结球；球A以速度v_0⊥杆与杆端球碰，碰后粘合，三球质量同为m

求：碰后角速度及对杆的作用力



解：对三球系统，角动量守恒



初态：$(l/2)mv_0$

末态： $\dfrac{l}{2}2m\omega\dfrac{l}{2}+\dfrac{l}{2}m\omega\dfrac{l}{2}\ (=\dfrac{3l^2m\omega}{4})$

$$\therefore \frac{lmv_0}{2} = \frac{3l^2m\omega}{4} \to\to \omega = \frac{2v_0}{3l}$$

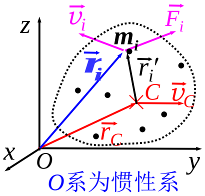
碰后均匀转动。系统的质心作匀速率圆周运动

质心的半径：$R_c = \dfrac{l}{2}-\dfrac{l}{3}=\dfrac{l}{6}$

运动方程：$T=(3m)\omega^2\dfrac{l}{6} \xrightarrow{轴力} T=\dfrac{2mv_0^2}{9l}$

§ 3.10 质心系中的角动量定理

一.质心系中的角动量



O系为惯性系

O 是惯性系中的一个定点

C 是质心兼质心坐标系原点

对质心 $\vec{L}' = \sum \vec{r}_i{}' \times (m_i \vec{v}_i{}')$

对O点 $\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$

C 对O $\vec{L}_C = \vec{r}_C \times (\sum m_i)\vec{v}_C$

109

$\vec{L}' = \sum \vec{r}_i{}' \times (m_i \vec{v}_i{}')$ $\quad \vec{L} = \sum \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$

$\vec{L}_C = \vec{r}_C \times (\sum m_i)\vec{v}_C$

利用关系：$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_C$ ， $\sum m_i \vec{r}_i' = 0$

$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_C$ ， $\sum m_i \vec{v}_i' = 0$

$\sum m_i \vec{r}_i' = (\sum m_i)\vec{r}_C' = 0$ $(\because \vec{r}_C' = 0)$ ，

$\sum m_i \vec{v}_i' = (\sum m_i)\vec{v}_C' = 0$ （$\because \vec{v}_C' = 0$）。

可以证明（自己推导）： $\boxed{\vec{L}' = \vec{L} - \vec{L}_C}$

110

二. 质点系对质心的角动量定理：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}'}{\mathrm{d}t} = \frac{d}{dt}(\vec{L} - \vec{L}_C) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{L} - \vec{r}_C \times \vec{P})$$

$$= \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} \times \vec{P} - \vec{r}_C \times \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i - 0 - \vec{r}_C \times \sum \vec{F}_i$$

$$= \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_C) \times \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \vec{M}'_{外}$$

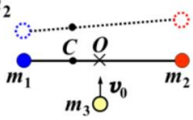
$$\boxed{\vec{M}'_{外} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}'}{\mathrm{d}t}}$$

——质心系中质点对质心的角动量定理 111

尽管质心系可能不是惯性系，但对质心来说，角动量定理仍然成立。 这再次显示了质心的特殊之处， 同时也表明了选择质心系来讨论问题的优点。

112

【例】 光滑水平面上，m_1, m_2 用长为l的轻杆连结，静止放置，m_3 以速度 v_0 垂直射向杆中心 O，发生弹性碰撞。



求：碰后m_1, m_2, m_3速度，m_1和m_2的质心速度

解：选 m_1、m_2、m_3 为系统，

弹性碰撞：动能守恒

水平方向不受外力 $\begin{cases} \text{水平方向动量守恒} \\ \text{垂直水平方向角动量守恒} \end{cases}$

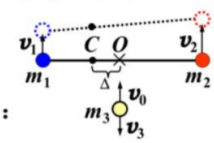
设碰后m_1、m_2、m_3的速度分别为v_1、v_2、v_3

113

动能守恒：$\frac{1}{2}m_3 v_0^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_3^2$

动量守恒：$m_3 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_3 v_3$

角动量守恒：



选与 O 点重合的定点，规定垂直页面向外为正：

$$0 = -m_1 v_1 \frac{l}{2} + m_2 v_2 \frac{l}{2}$$

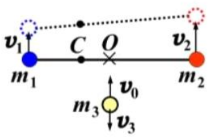
若选与质心 C 重合的定点有：

$$m_3 v_0 \Delta = -m_1 v_1 (\frac{l}{2} - \Delta) + m_2 v_2 (\frac{l}{2} + \Delta) - m_3 v_3 \Delta$$

114

解得:

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{4m_2m_3}{4m_1m_2+(m_1+m_2)m_3}v_0 \\ v_2 = \dfrac{4m_1m_3}{4m_1m_2+(m_1+m_2)m_3}v_0 \\ v_3 = \dfrac{4m_1m_2-(m_1+m_2)m_3}{4m_1m_2+(m_1+m_2)m_3}v_0 \end{cases}$$



$$v_C = \frac{8m_1m_2m_3}{(m_1+m_2)[4m_1m_2+(m_1+m_2)m_3]}v_0$$

若 $m_1 \neq m_2$，$v_1 \neq v_2$，碰后杆、m_1、m_2系统既平动又转动（角速度会求吗？）。

例 光滑平面上，质量均为 M 的两小球由一长为 l 的轻杆相连. 另一个质量为 m 的小球与某一 M 发生完全非弹性碰撞. 所有小球的大小可以忽略.

试问:

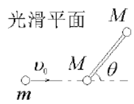
1) 若以碰撞点为原点，则相对原点碰撞前后系统角动量是否守恒？碰撞瞬间杆的另一端 M（没有与m直接碰撞）的速度方向？

2) 碰撞后轻杆系统绕其质心转动的角速度 .

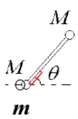
$m = M$, $\theta = 45^o$

解: 1) 角动量守恒, 另一端 M 沿杆方向

2) 杆系统角动量相对原点为零



质心速度 $\vec{V}_c = \frac{1}{3}\vec{\upsilon}_0$



质心 y 坐标

$$y_c = \frac{l\sin\theta}{3}$$

$m = M$, $\theta = 45^o$

碰后系统角动量 $\boxed{\vec{L} = \vec{L}' + \vec{r}_c \times \vec{P}}$

$$-(M+m)\frac{1}{3}l\omega\frac{1}{3}l - M\frac{2}{3}l\omega\frac{2}{3}l + (2M+m)\frac{1}{3}\upsilon_0\frac{1}{3}l\sin\theta = 0$$

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\upsilon_0}{l}$$

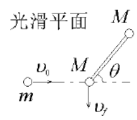
例 光滑平面上，质量均为 M 的两小球由一长为 l 的轻杆相连. 另一个质量为 m 的小球与某一 M 发生完全弹性碰撞, 碰后 m 沿垂直于原速度方向运动, 如图所示. 所有小球的大小可以忽略.

试问: 碰撞后m的速度 和轻杆系统绕其质心转动的角速度 .

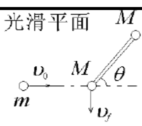
$m = M$, $\theta = 45^o$

解: 角动量守恒

杆系统角动量相对原点为零



碰后杆质心速度 $\vec{V}_c = \vec{V}_{//} + \frac{1}{2}\vec{V}_{\perp}$



杆角动量 $\boxed{\vec{L} = \vec{L}' + \vec{r}_c \times \vec{P}}$

$$-2M\frac{1}{2}l\omega\frac{1}{2}l + 2M\frac{1}{2}V_{\perp}\frac{1}{2}l = 0$$

$$\omega = \frac{V_{\perp}}{l}$$

$m = M$, $\theta = 45^o$

$$m\upsilon_0\cos\theta = 2MV_{//} - m\upsilon_f\sin\theta$$

$$m\upsilon_0\sin\theta = MV_{\perp} + m\upsilon_f\cos\theta$$

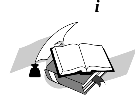
$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}MV_{\perp}^2 + MV_{//}^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_f^2$$

$$V_{\perp} = \frac{3\sqrt{2}\pm 2}{7}\upsilon_0 \qquad V_{//} = \frac{2\sqrt{2}\mp 1}{7}\upsilon_0 \qquad \upsilon_f = \frac{1\mp 2\sqrt{2}}{7}\upsilon_0$$

$$\omega = \frac{3\sqrt{2}-2}{7}\frac{\upsilon_0}{l}$$

小结：动量与角动量的比较

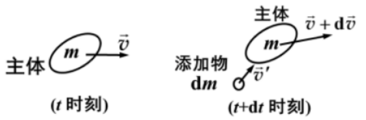
动量 $\vec{p} = \sum_i m_i\vec{v}_i$	角动量 $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$
矢量	矢量
与固定点无关	与固定点有关
与内力无关	与内力矩无关
守恒条件 $\sum_i \vec{F}_i = 0$	守恒条件 $\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$



第三章结束

【附录】变质量方程（密舍尔斯基方程）

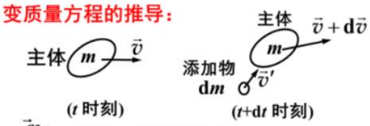
$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{f}+(\vec{v}'-\vec{v})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}$$



$\vec{f}$：主体 m 所受合外力

$(\vec{v}'-\vec{v})$：添加物相对主体的速度

变质量方程的推导：



$\vec{f}\mathrm{d}t$：主体 m 受外力冲量

$\vec{f}'\mathrm{d}t$：添加物 dm 对主体 m 的冲量

$m(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})-m\vec{v}=\vec{f}\mathrm{d}t+\vec{f}'\mathrm{d}t$（主体方程）

$\mathrm{d}m(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})-\mathrm{d}m\vec{v}'=-\vec{f}'\mathrm{d}t$（添加物方程）

得：$m\mathrm{d}\vec{v}+\mathrm{d}m\vec{v}=\vec{f}\mathrm{d}t+\mathrm{d}m\vec{v}'$

变质量方程：$\boxed{m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{f}+(\vec{v}'-\vec{v})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}$

变质量方程用于火箭飞行原理：

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{f}+(\vec{v}'-\vec{v})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}$$

$\vec{f}$：主体m所受合外力

自由空间：$\vec{f}=0$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\mathrm{d}v=-u\frac{\mathrm{d}m}{m}}$$