多项式的一个定理

定理 若$f(z)$ 是处处解析的函数，且$\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty$, 则$f(z)$ 是一个多项式.

证明 由假设，存在正常数$M>0$, 当$|z|>M$ 时，有$|f(z)|>1$. 我们断言，$f(z)$ 最多有有限个零点. 否则，若$f(z)$ 有无穷多零点$\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, 则必有$|z_k|\leq M$, $k=1,\,2,\,\cdots$, 因而$\{z_k\}$必有至少一个聚点z_0, $|z_0|\leq M$. 这时$f(z_k)=0, z_k\to z_0$. 这说明$f(z)$的零点不孤立，由解析函数零点的孤立性定理，可知$f(z)\equiv 0$这与假设$f(z)\to\infty,\ z\to\infty$矛盾. 因而$f(z)$ 最多只有有限个零点$z_1,\,z_2,\cdots,z_m$. 定义新函数$g(z)=f(z)$当$f(z)$没有零点时，而

$$g(z)=\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}$$

当$f(z)$ 的零点为$z_1,\,z_2,\cdots,z_m$时. 在第一种情况，$g(z)=f(z)$处处解析. 在第二种情况，$g(z)$除了最多m个点外，处处解析. 而z_k, $k=1,2,\cdots,m$是$g(z)$的孤立奇点，由$f(z_k)=0$, 知

$$\begin{aligned} g(z_k) &= \lim_{z\to z_k} g(z)=\lim_{z\to z_k}\tfrac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)} \\ &= \tfrac{f'(z_k)}{(z_k-z_1)(z_k-z_2)\cdots(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\cdots(z_k-z_m)} \end{aligned}$$

存在且有限，由孤立奇点的性质，z_k是$g(z)$的可去奇点，即$g(z)$在z_k解析. 因而$g(z)$处处解析且无零点. 令

$$h(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}{f(z)}.$$

因$|f(z)|>1,\ \ \forall |z|>M$, 可知，存在正常数$M_0>0$,使得$|h(z)|\leq M_0\sum_{k=0}^{m}|z|^k$ 由此，利用习题的结论，知$h(z)$是个次数不超过m的多项式. 但是$h(z)$没有零点，由代数学基本定理知$h(z)$是个非零常数$h(z)=A\neq 0$. 因而

$$f(z)=\frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}{A}$$

是个次数为m的多项式. □

参考文献

1.J.Bak and D.J.Newman, Complex Analysis, Undergraduate Texts in Mathematics, 2010.