第一次计算题作业 – 答案

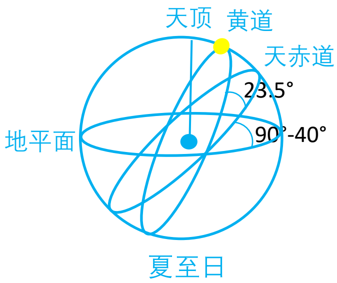
1、 北京的纬度为北纬 40°。(a) 计算夏至日北京正午时太阳的地平高度。(b) 计算冬至日北京正午时太阳的地平高度。(2-32)

(a) 天赤道与地平面之间的夹角为：90°-40°；
夏至日北京正午时，太阳位于天赤道以北 23.5°；
故夏至日北京正午时太阳的地平高度为

$$(90° - 40°) + 23.5° = 73.5°$$

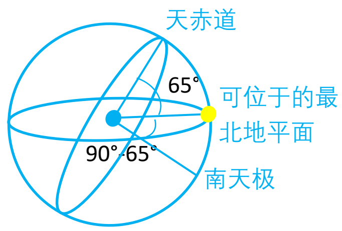
(b) 冬至日北京正午时，太阳位于天赤道以南 23.5°；
故东至日北京正午时太阳的地平高度为

$$(90° - 40°) - 23.5° = 26.5°$$



2、 南十字星座是在南半球认星的标志星座。这个星座中的最南一颗星位于天赤道以南 65°。(a) 这个星座能够被完整看到的最北的纬度是多少？ (b) 在中国的哪些省（自治区、直辖市）可以看到完整的南十字星座？ (2-34)

(a) 南十字星座最南的星位于天赤道以南 65°，即该星距离南天极 $90° - 65° = 25°$，要在北半球看到该星则要求我须位于该纬度或更低纬度。因此，可完整看到南十字星座的最北纬度是 25°。



(b)

省名	纬度范围
澳门特别行政区	22.109142~22.217034
福建省	23.500683~28.317231
广东省	20.223273~25.519951
广西壮族自治区	20.902306~26.388528
海南省	8.30204~20.16146
台湾省	21.896939~25.938831
香港特别行政区	22.134935~22.566546
云南省	21.142312~29.225286

3、 计算恒星日和太阳日之差。(0-00)

对太阳而言，地球绕太阳自转的同时也公转；对恒星而言，地球不对它公转，即可以理解为选择的参照系不同。因此，对我们而言每天同一时刻（地球自转 360°以后）看到的太阳位置不一样，是因为在太阳参照系下，地球除了自转 360°，同时也绕太阳公转了(1/365.256)圈，即它在天球上每天向东移动：

$$\left(\frac{1}{365.256}\right) \times 360° = 0.9856° \approx 59'$$

即地球自转360°59′才可使得同一面再次对向太阳。绕太阳公转导致的偏差所对应的时间为

$$\frac{0.9856°}{360° + 0.9856°} \times (24 \times 60)\text{分钟} = 3.9316 \text{ 分钟} = 3 \text{ 分钟 } 55.9 \text{ 秒}$$

因此太阳日比恒星日多了 3 分钟 55.9 秒。

4、春分点目前位于黄道十二星座的双鱼座。地球自转轴的进动将使它移到水（宝）瓶座。（a）春分点在黄道十二星座的每个星座运行的平均时长是多少？（b）秦始皇（前 259 年—前 210 年）时期的春分点位于哪个黄道星座？（2-40）

(a) 假设每个星座均匀分布，已知春（秋）分点约 25,800 年沿天赤道巡回一圈，则春分点在每个星座运行的平均时长约为：

$$\frac{25800}{12} = 2150\ 年$$

(b) 前 259 年距今 2282 年；前 210 年距今 2233 年。因此，秦始皇时期的春分点位于双鱼座的上一个星座，即白羊座。

5、假设你在线读到“天文学家已经在太阳系中新发现了一颗行星。这颗行星距离太阳 2AU，绕日轨道周期为 3 年”。请论证这个发现是不可能的。(3-36)

公转周期$P_{year} = 3$年；轨道半长轴$A_{AU} = 2\mathrm{AU}$

根据开普勒第三定律，太阳系行星应有$\left(P_{year}\right)^2/(A_{AU})^3 = 1$，但显然这里

$$\frac{\left(P_{year}\right)^2}{(A_{AU})^3} = \frac{3^2}{2^3} = 1.125 \neq 1$$

故该发现是不可能的。

6、证明开普勒第三定律适用于木星的 4 个伽利略卫星（Io、Europa、Ganymede 和 Callisto 卫星的数据可在教材的附录 4 中找到）。(3-37)

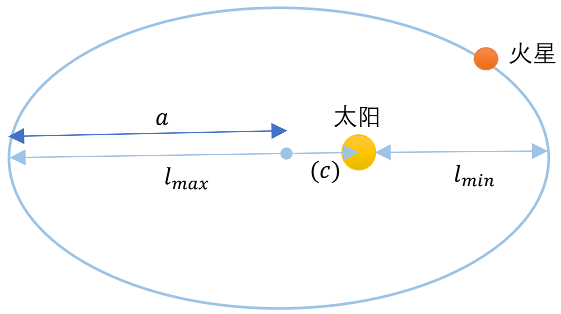
由于仅考察P^2与A^3的比例，因此不必换算，P为公转周期，A为轨道半长轴：

伽利略卫星	P（天）	A（公里）	P^2	A^3	P^2/A^3
Io	1.77	421.8	3.133	7.504×10^7	4.175×10^{-8}
Europa	3.55	671.7	12.60	3.031×10^8	4.157×10^{-8}
Ganymede	7.15	1070	51.12	1.225×10^9	4.173×10^{-8}
Callisto	16.69	1883	278.6	6.677×10^9	4.173×10^{-8}

可见这四个木星的伽利略卫星P^2/A^3值均为4×10^{-8}，满足开普勒第三定律。

7、利用教材第 75 页中“Origins: Planets and Orbits”所提供的信息，（a）画出火星轨道的草图。（b）火星轨道的长轴和半长轴各是多少？（c）从轨道“中心”到太阳的距离是多少？（d）计算火星轨道的偏心率，并与地球轨道进行比较。(3-45)

偏心率$e = 0.09$，最远距离$l_{max} = 1.67\ \mathrm{AU}$，最近距离$l_{min} = 1.38\ \mathrm{AU}$，



(a)

(b) 长轴$2a = l_{max} + l_{min} = (1.67 + 1.38)\ \mathrm{AU} = 3.05\ \mathrm{AU}$

$\therefore$ 半长轴$a = 1.525\ \mathrm{AU}$

(c) 轨道“中心”到太阳的距离为

$$l_{max}-a=(1.67-1.525)\ \mathrm{AU}=0.145\ \mathrm{AU}$$

(d) 火星轨道偏心率:

$$\frac{l_{max}}{l_{min}}=\frac{a(1+e)}{\mathrm{a}(1-e)}\Leftrightarrow e=\frac{l_{max}-l_{min}}{l_{max}+l_{min}}=\frac{1.67-1.38}{1.67+1.38}=0.0951$$

地球轨道偏心率为 0.0167。火星轨道偏心率远大于地球轨道的，即轨道中心更偏离太阳，因此季节交替较显著。

8、金星绕日公转的圆周运动的速率是 35.03 km/s，轨道半径是 $1.082\times10^{8}\mathrm{km}$。请利用这些信息计算太阳的质量。(4-33)

$v=35.03\ \mathrm{km/s},\ R=\ 1.082\times10^{8}\mathrm{km}$，令太阳质量为$M$，金星质量为$m$:

$$\therefore M=\frac{v^2R}{G}=\frac{(35.03\ \mathrm{kms^{-1}})^2\times(1.082\times10^{8}\mathrm{km})}{(6.6743\times10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}})}=1.989\times10^{30}\mathrm{kg}$$

9、地球表面逃逸速率是 11.2 km/s。一颗小行星的半径是地球的 10^{-4}，质量是地球的 10^{-12}。请问这颗小行星表面的逃逸速率是多少？（4-34）

$$v_{esc}=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$\frac{v_{esc,地球}}{v_{esc,小行星}}=\frac{\sqrt{\frac{M_{地球}}{R_{地球}}}}{\sqrt{\frac{M_{小行星}}{R_{小行星}}}}=\sqrt{\frac{M_{地球}}{M_{小行星}}}\times\sqrt{\frac{R_{小行星}}{R_{地球}}}=\sqrt{10^{12}}\times\sqrt{10^{-4}}=10^{4}$$

$$v_{esc,小行星}=v_{esc,地球}\times10^{-4}=11.2\ \times10^{-4}\ \mathrm{km/s}$$

10、 假设一颗类地行星绕织女星公转，其轨道半径为 1AU。织女星的质量是太阳的 2 倍。（a）以地球年为单位，这颗行星绕织女星公转的周期是多少？（b）这颗行星绕织女星公转的速率是多少？（4-44）

(a) $\frac{mv^2}{R}=mR\omega^2=mR\left(\frac{2\pi}{P}\right)^2=\frac{GMm}{R^2}\Rightarrow\frac{P^2}{R^3}\propto\frac{1}{M}$

$$\frac{P_{行星}^2M_{织女星}}{R_{行星}^3}=\frac{P_{地球}^2M_{太阳}}{R_{地球}^3}$$

$$P_{行星,year}=\sqrt{\frac{M_{太阳}}{M_{织女星}}}\times\sqrt{\frac{R_{行星}^3}{R_{地球}^3}}\times P_{地球,year}=\sqrt{\frac{1}{2}}\times1\times1\ 年\approx0.707\ 年$$

(b) 地球的公转速率为$v_{circ,地球}=29.8\ \mathrm{km\ s^{-1}}$,

$$v_{circ}\propto\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$v_{circ,行星}=\sqrt{\frac{M_{太阳}}{M_{织女星}}}\times\sqrt{\frac{R_{行星}}{R_{地球}}}\times v_{circ,地球}=\sqrt{2}\times1\times29.8\ \mathrm{km\ s^{-1}}=42.14\ \mathrm{km\ s^{-1}}$$