

✧ 上下文无关文法 \Leftrightarrow 下推自动机

上下文无关文法 \Leftrightarrow 下推自动机

FL&A



- ◇ 从上下文无关文法构造等价的下推自动机
- ◇ 从下推自动机构造等价的上下文无关文法

以上下文无关文法构造等价的下推自动机

☆ 例：利用下推栈实现自上而下语法分析的过程

— 语法分析基本问题：

对任意上下文无关文法 $G = (V, T, P, S)$ 和任意 $w \in T^*$ ，是否有 $w \in L(G)$ ？若成立，则给出分析树；否则，进行报错处理。

以上下文无关文法构造等价的下推自动机

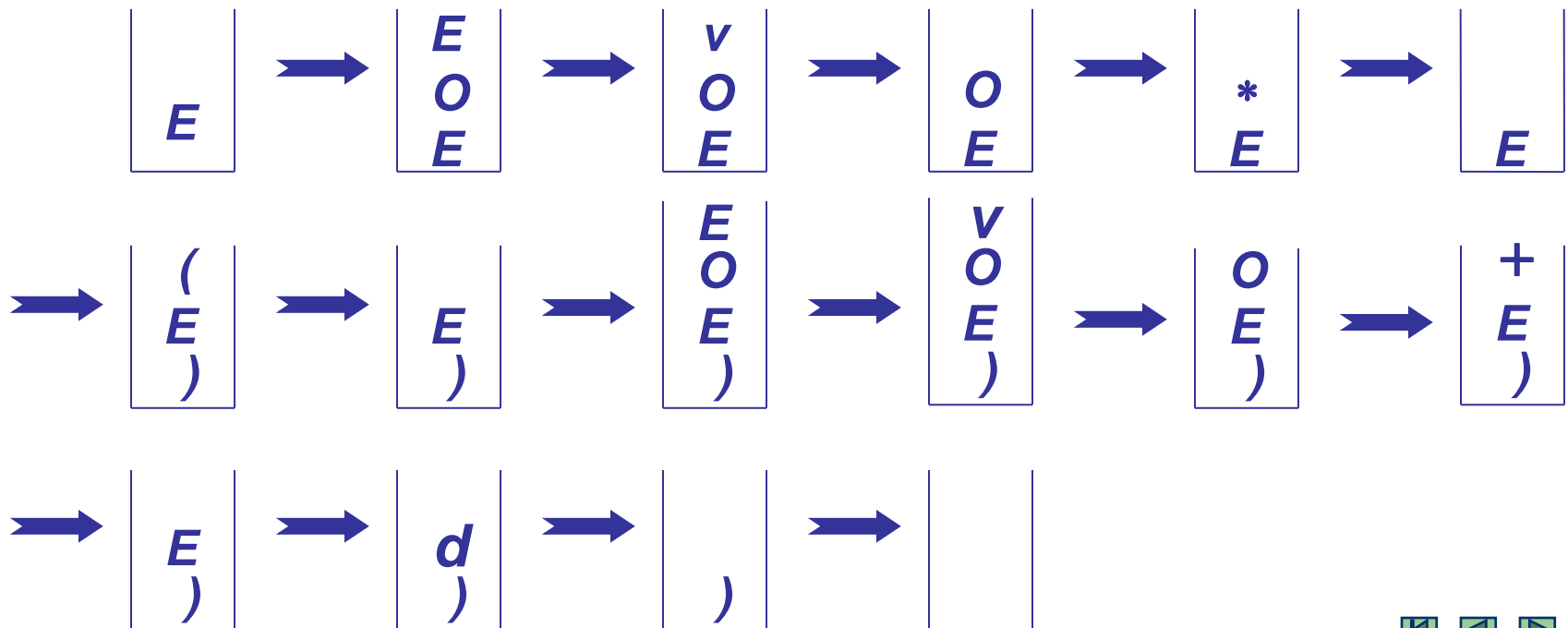
◇ 利用下推栈进行自顶向下的分析过程举例

$$E \rightarrow EOE \mid (E) \mid v \mid d$$

$$O \rightarrow + \mid *$$

$$v * (v + d)$$

• • • • •



以上下文无关文法构造等价的下推自动机

◇ 一种构造方法

设 CFG $G = (V, T, P, S)$ ，构造一个空栈接受方式的

PDA $E = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S)$ ，

转移函数 δ 定义如下：

- (1) 对每一 $A \in V$, $\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \beta) \mid "A \rightarrow \beta" \in P\}$;
- (2) 对每一 $a \in T$, $\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$.

以上下文无关文法构造等价的下推自动机

◇ 举例 对右边产生式所代表的 **CFG**, 依上述方法构造 **PDA**

$$\begin{array}{l} E \rightarrow EOE \mid (E) \mid v \mid d \\ O \rightarrow + \mid * \end{array}$$

为 $(\{q\}, \{v, d, +, *, '(', ')'\}, \{E, O, v, d, +, *, '(', ')'\}, \delta, q, E)$,

其中 δ 定义为

$$\delta(q, \varepsilon, E) = \{(q, EOE), (q, (E)), (q, v), (q, d)\},$$

$$\delta(q, \varepsilon, O) = \{(q, +), (q, *)\},$$

$$\delta(q, v, v) = \{(q, \varepsilon)\},$$

$$\delta(q, d, d) = \delta(q, +, +) = \delta(q, *, *) = \{(q, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q, '(', '(') = \delta(q, ')', ')') = \{(q, \varepsilon)\}$$

(注: 这里加单引号以示与元符号中的括号进行区分)

从上下文无关文法构造等价的下推自动机

✧ **结论** 依上述构造方法, 从 CFG $G = (V, T, P, S)$ 构造一个空栈接受方式的 PDA $E = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S)$, 则有 $N(E) = L(G)$.

✧ **证明思路** 欲证, 对任何 $w \in T^*$, $w \in L(G) \Leftrightarrow w \in N(E)$.

\Rightarrow 先证明如下结论, **if** $A \xRightarrow{*}_{lm} w$, **then** $(q, w, A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$.
归纳于 $A \xRightarrow{*}_{lm} w$ 的步数 n .

基础 $n=1$, $A \rightarrow w$ 必为产生式, $(q, w, A) \vdash (q, w, w) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

归纳 设第一步使用产生式 $A \rightarrow X_1 X_2 \dots X_m$, 必有 $w = w_1 w_2 \dots w_m$,
 $(q, w, A) \vdash (q, w, X_1 X_2 \dots X_m) \vdash^* (q, w_2 \dots w_m, X_2 \dots X_m)$
 $\vdash^* (q, w_3 \dots w_m, X_3 \dots X_m) \vdash^* \dots \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

所以有如下结论, **if** $S \xRightarrow{*}_{lm} w$, **then** $(q, w, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

即, $w \in L(G) \Rightarrow w \in N(E)$.

以上下文无关文法构造等价的下推自动机

☆ **证明思路** 欲证, 对任何 $w \in T^*$, $w \in L(G) \Leftrightarrow w \in N(E)$.

⇐ 先证明如下结论: **if** $(q, w, A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$, **then** $A \xRightarrow{*}_{lm} w$.

归纳于 $(q, w, A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$ 的步数 n .

基础 $n=1$, 必有 $w = \varepsilon$, 且 $A \rightarrow \varepsilon$ 为 G 的产生式, 所以 $A \xRightarrow{*}_{lm} w$.

归纳 $n > 1$, 设第一步使用产生式 $A \rightarrow X_1 X_2 \dots X_m$,

可以将 w 分为 $w = w_1 w_2 \dots w_m$, 满足 $(q, w_i, X_i) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$,

无论 X_i 为终结符, 还是非

终结符, 都有 $X_i \xRightarrow{*}_{lm} w_i$.

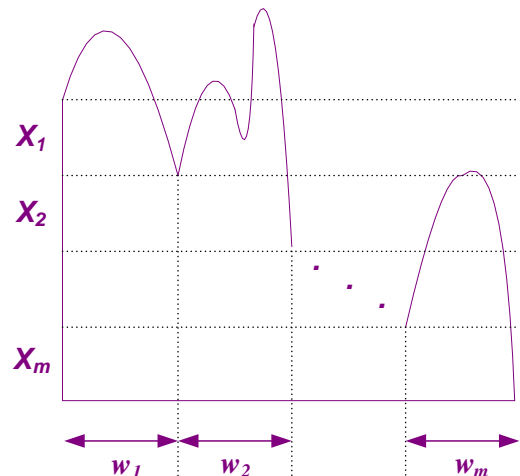
因此, $A \Rightarrow X_1 X_2 \dots X_m$

$$\xRightarrow{*}_{lm} w_1 w_2 \dots w_m = w$$

所以有如下结论, 对任何 $w \in T^*$,

if $(q, w, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$, **then** $S \xRightarrow{*}_{lm} w$.

即, $w \in N(E) \Rightarrow w \in L(G)$.



以下推自动机构造等价的上下文无关文法

◇ 一种构造方法 设 $PDA\ E = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, 构造 $CFG\ G = (V, \Sigma, P, S)$, 其中

$$V = \{S\} \cup \{[pXq] \mid p, q \in Q \wedge X \in \Gamma\}$$

产生式集合 P 定义如下:

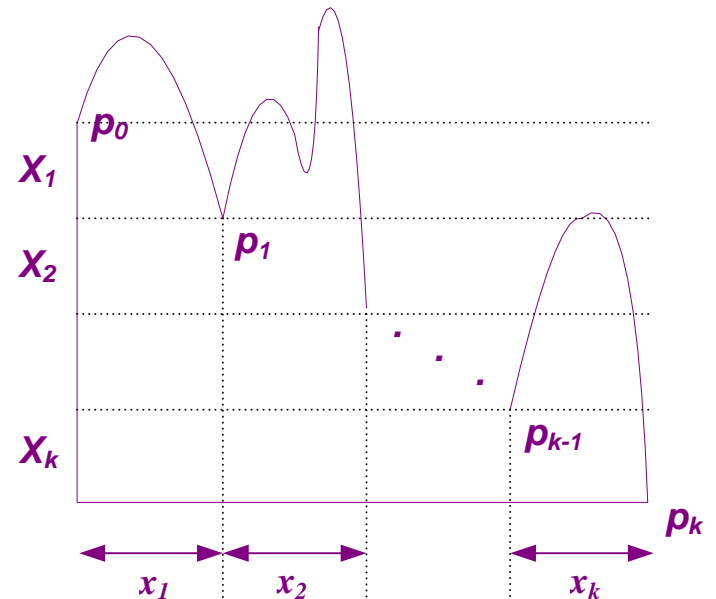
(1) 对每一 $p \in Q$, G 包含产生式

$$S \rightarrow [q_0 Z_0 p];$$

(2) 若 $(q, X_1 X_2 \dots X_k) \in \delta(p, a, X)$,
则 G 包含产生式

$$[pXp_k] \rightarrow a[qX_1p_1][p_1X_2p_2]\dots[p_{k-1}X_kp_k].$$

其中, $a \in \Sigma$ 或 $a = \varepsilon$,
(参见右图, 其中 $p_0 = q$)

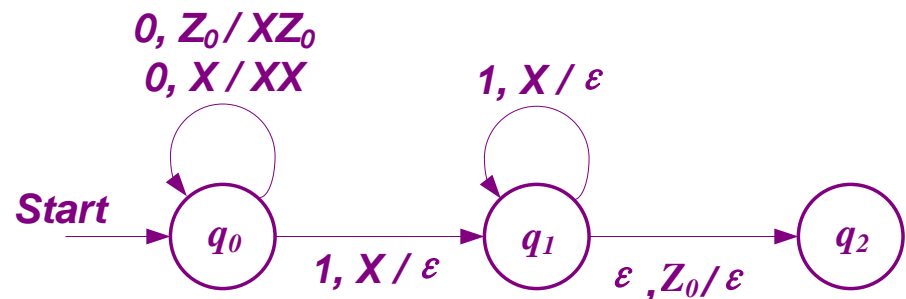


以下推自动机构造等价的上下文无关文法

✧ 举例 对于右下图的 PDA , 构造 $CFG\ G = (V, \{0, 1\}, P, S)$,
其中 $V = \{S\} \cup \{[pYq] \mid p, q \in \{q_0, q_1, q_2\} \wedge Y \in \{Z_0, X\}\}$

产生式集合 P 定义如下:

- (1) $S \rightarrow [q_0Z_0q_0];$
 $S \rightarrow [q_0Z_0q_1];$
 $S \rightarrow [q_0Z_0q_2];$



- (2) $[q_0Z_0q_i] \rightarrow 0[q_0Xq_i][q_iZ_0q_j], i, j = 0, 1, 2; ((q_0, XZ_0) \in \delta(q_0, 0, Z_0))$
 (3) $[q_0Xq_i] \rightarrow 0[q_0Xq_i][q_iXq_j], i, j = 0, 1, 2; ((q_0, XX) \in \delta(q_0, 0, X))$
 (4) $[q_0Xq_1] \rightarrow 1; ((q_1, \epsilon) \in \delta(q_0, 1, X))$
 (5) $[q_1Xq_1] \rightarrow 1; ((q_1, \epsilon) \in \delta(q_1, 1, X))$
 (6) $[q_1Z_0q_2] \rightarrow \epsilon; ((q_2, \epsilon) \in \delta(q_1, \epsilon, Z_0))$

注意: 对于(4),(5),(6),
前一页的 $[qXp_k]$ 中, $k=0,$
 p_0 分别为 q_1, q_1, q_2 .

以下推自动机构造等价的上下文无关文法

✧ **结论** 依上述构造方法, 从 $PDA\ E = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$ 构造一个 $CFG\ G = (V, \Sigma, P, S)$, 则有 $N(E) = L(G)$.

✧ **证明思路** 欲证, 对任何 $w \in \Sigma^*$, $w \in N(E) \Leftrightarrow w \in L(G)$.
即证明: 存在 $p \in Q$. $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$ **iff** $S \Rightarrow^* w$.

先证明对 $q, p \in Q, X \in \Gamma$, $(q, w, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$ **iff** $[qXp] \Rightarrow^* w$.

这样, **if** $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$, **then** $[q_0Z_0p] \Rightarrow^* w$.

因为 G 中包含产生式 $S \rightarrow [q_0Z_0p]$, 所以 $S \Rightarrow^* w$.

反之, 若 $S \Rightarrow^* w$, 由 G 的构造过程,
存在 p , 满足 $[q_0Z_0p] \Rightarrow^* w$, 从而有 $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$

•

以下推自动机构造等价的上下文无关文法

◇ 证明思路 (续前)

现证明对 $q, p \in Q$, $(q, w, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$ **iff** $[qXp] \xRightarrow{*} w$.

\Rightarrow 归纳于 $(q, w, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$ 的步数 n .

基础 $n=1$, 必有 w 或为 ε 或为单个符号, 且 $(p, \varepsilon) \in \delta(q, w, X)$.

由 G 的构造, $[qXp] \rightarrow w$ 为一个产生式, 所以 $[qXp] \xRightarrow{*} w$.

归纳 $n>1$, 设第一步推导为 $(q, w, X) \vdash (p_0, x, X_1 X_2 \dots X_k)$, 其中 $w=ax$, a 或为 ε 或为单个符号, 且 $(p_0, X_1 X_2 \dots X_k) \in \delta(q, a, X)$.

可以将 x 分为 $x=x_1 x_2 \dots x_k$, 存在 p_1, p_2, \dots, p_{k-1} , 满足 $(p_{i-1}, x_i, X_i) \vdash^* (p_i, \varepsilon, \varepsilon)$, $1 \leq i < k$; $(p_{k-1}, x_k, X_k) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$,

由归纳假设, $[p_{i-1} X_i p_i] \xRightarrow{*} x_i$, $1 \leq i < k$; $[p_{k-1} X_k p] \xRightarrow{*} x_k$.

由 G 的构造, $[qXp] \rightarrow a[p_0 X_1 p_1][p_1 X_2 p_2] \dots [p_{k-1} X_k p]$ 为产生式.

所以, $[qXp] \xRightarrow{*} ax_1 x_2 \dots x_k = w$.

以下推自动机构造等价的上下文无关文法

☆ 证明思路 (续前)

继续证明对 $q, p \in Q$, $(q, w, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$ **iff** $[qXp] \xRightarrow{*} w$.

⇐ 归纳于 $[qXp] \xRightarrow{*} w$ 的步数 n .

基础 $n=1$, $[qXp] \rightarrow w$ 必为一个产生式, 由 G 的构造, w 或为 ε 或为单个符号, 且 $(p, \varepsilon) \in \delta(q, w, X)$. 所以 $(q, w, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$.

归纳 $n>1$, 设第一步推导为 $[qXp] \vdash a[p_0X_1p_1][p_1X_2p_2]\dots[p_{k-1}X_kp]$.

可以将 w 分为 $w = ax_1x_2\dots x_k$, 使得

$[p_{i-1}X_ip_i] \xRightarrow{*} x_i$, $1 \leq i < k$; $[p_{k-1}X_kp] \xRightarrow{*} x_k$.

由归纳假设,

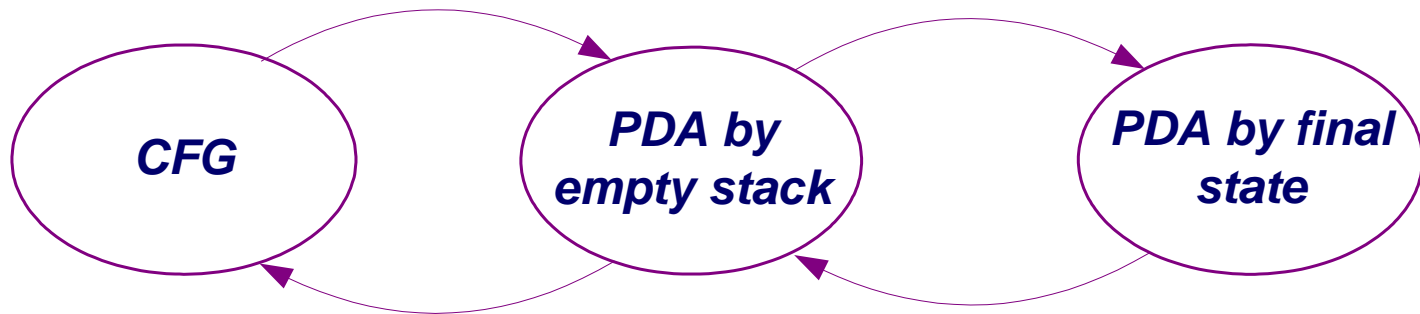
$(p_{i-1}, x_i, X_i) \vdash^* (p_i, \varepsilon, \varepsilon)$, $1 \leq i < k$; $(p_{k-1}, x_k, X_k) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$,

由 G 的构造, $(p_0, X_1X_2\dots X_k) \in \delta(q, a, X)$.

所以, $(q, w, X) \vdash (p_0, x_1x_2\dots x_k, X_1X_2\dots X_k) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$.

上下文无关文法与下推自动机的等价性

✧ 小结



✧ 必做题:

- *Ex.6.3.2*
- *Ex.6.3.4*
- *!Ex.6.3.5 (c)*

That's all for today.

Thank You