第一题解答

1. 求

$$I = \min_{|z| \le r} |z^n + \alpha|,$$

这里 $n \in N = \{1, 2, \cdots, \}$, $r > 0$, $\alpha \in C$, 并给出取得最小大值时，z及$z' = z^n + \alpha$ 的表达式来。(提示：分别考虑$r^n \le |\alpha|$ 及$r^n > |\alpha|$.)

(A). 当$\alpha = 0$时，显然有$I = 0$, 等号成立当且仅当$z = 0$. 这时$\min_{|z| \le r} |z^n + \alpha| = 0$.

(B). 当$\alpha \neq 0$时, 分别考虑$(I) : |\alpha| \le r^n$ 及$(II) : |\alpha| > r^n$.

$(I) : 0 < |\alpha| \le r^n$.

取$z^n = -\alpha = |\alpha| e^{\pi i} = |\alpha| e^{(2k-1)\pi i}$, $\forall k \in Z$. 则$\min_{|z| \le r} |z^n + \alpha| = 0$, 这时，$z = z_k = |\alpha|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{(2k-1)\pi i}{n}}$, $k = 1, 2, \cdots, n$; $|z| = |z_k| \le r^n$, $z' = z^n + \alpha = 0$.

$(II) : |\alpha| > r^n$.

$$|z^n + \alpha| \ge |\alpha| - |z^n| \ge |\alpha| - r^n > 0, \tag{0.1}$$

知$I \ge |\alpha| - r^n > 0$.

且当(0.1)的两个不等式同时取等号时等号成立。而(0.1)的第一个等号成立当且仅当z^n与$-\alpha$同向，即存在正数$\lambda > 0$, 使

$$z^n = -\lambda \alpha, \tag{0.2}$$

而(0.1)的第二个等号成立当且仅当

$$|z| = r, \tag{0.3}$$

将(0.3)代入(0.2)，得$r^n = \lambda |\alpha|$, 即$\lambda = \frac{r^n}{|\alpha|}$. 将此式代入(0.2)，得

$$z^n = -r^n \frac{\alpha}{|\alpha|} = r^n \frac{|\alpha| e^{i(\arg \alpha + \pi)}}{|\alpha|} = r^n e^{i(\arg \alpha + (2k-1)\pi)}, \quad k \in Z.$$

由此可得

$$z = z_k = r e^{i(\frac{\arg \alpha + (2k-1)\pi}{n})}, \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

这时，

$$z' = z^n + \alpha = z_k^n + \alpha = (|\alpha| - r^n) e^{i \arg \alpha}.$$

由上面的讨论可知，当$|\alpha| \le r^n$时，$\min_{|z|\le r}|z^n+\alpha|=0$, 这时$z=0$, 若$\alpha=0$. 而当$0<|\alpha|\le r^n$时，$z=z_k=|\alpha|^{\frac{1}{n}}e^{i(\frac{\arg\alpha+(2k-1)\pi}{n})}$, $k=1,2,\cdots,n$; $|z|=|z_k|=|\alpha|^{\frac{1}{n}}\le r^n$, $z'=z^n+\alpha=0$. 当$|\alpha|>r^n$时, $\min_{|z|\le r}|z^n+\alpha|=|\alpha|-r^n>0$. 且有$z=z_k=re^{i\frac{\arg\alpha+(2k-1)\pi}{n}}$, $\qquad k=1,2,\cdots,n$. 这时，

$$z'=z^n+\alpha=z_k^n+\alpha=(|\alpha|-r^n)e^{i\arg\alpha}.$$