样题仅供参考!

清华大学本科生考试试题　　　　姓名________　班号________　学号__________

考试课程《离散数学 1》　　2016 年 XX 月 XX 日　　（A 卷）　（共 2 页——正反两面）

该页面的所有题目的解答直接写在这张试题纸上，该试题纸一并上交。背面的题目写在答题本上

一、 选择题（共 13 分，每空 1 分） 在下列各小题中选择其中的一种答案，标注在小标题后面的括号中

1. （ D ）简而言之，命题逻辑的公理系统是
   A. 用来建立公理的系统。　B. 由公理产生推理规则的系统。　C. 用来完善已有公理的系统。
   D. 从精选的几条公理出发，根据规定的演绎规则，推导出一系列定理的形式符号系统。
2. （ C ）孔子曰：“己所不欲，勿施于人。”以下哪一选项不是这句话的逻辑推论？
   A. 只有己所欲，才能施于人。　B. 除非己所欲，否则不施于人。
   C. 若己所欲，则施于人。　D. 凡施于人的都应该是己所欲的。
3. （ B ）与连续统假设（CH）的主要内容最接近的是：满足$\aleph_0 < K < \aleph_1$成立的基数K
   A. 已完整证明K肯定不存在。　B. 猜想K不存在。
   C. 猜想K存在但数值待定。　D. K已找到。
4. （ A ）根据量词的定义，若 $(\exists x)P(x)$=F 成立，试从下面选择一个最准确清晰的描述：
   A. 对所有的 $x\in D$，都有 $P(x)$=F　B. 至少存在一个 $x_0\in D$，使 $P(x_0)$=F　C. 根据 $P(x)$来定。
5. （ C ）下面所有正确的联结词完备集是　A. 1,6　B. 1,2,3,5　C. 1,2,3,5,6　D. 1,2,3,6　其中
   1. $\{\neg, \vee, \wedge\}$;　2. $\{\neg, \wedge\}$;　3. $\{\neg, \vee\}$;　4. $\{\vee, \wedge\}$;　5. $\{\neg, \rightarrow\}$;　6. $\{\uparrow\}$.
6. 非空集合 A 上的恒等关系I_A是（ C ）；全关系E_A是（ B ）；空关系$\emptyset$是（ D ）。
   A. 偏序关系但不是等价关系　B. 等价关系但不是偏序关系
   C. 既是等价关系又是偏序关系　D. 既不是等价关系也不是偏序关系
7. （ √ ）对任意集合 A，B 和 C，若$A\cup B = A\cup C$，且$A\cap B = A\cap C$，则$B = C$。（标出√或×）
8. （ × ）不存在这样的关系：它既不满足自反性，也不满足非自反性。（标出√或×）
9. （ × ）不存在这样的关系：它既不满足对称性，也不满足反对称性。（标出√或×）
10. （ × ）不存在这样的关系：它既满足对称性，同时又满足反自反性。（标出√或×）
11. （ √ ）若希望所求关系 R 的闭包同时具有自反性(r)、对称性(s)和传递性(t)这三种性质，则可先求 r(R)，然后求出 sr(R)，最后再求 tsr(R)。（标出√或×）

二、 填空题（共 17 分，每空 1 分）完成下列计算或填空

1. （1 分）在希尔伯特提出的 23 个数学问题中连续统假设位列第__1__位。
2. （2 分）设 $A=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$，则 $\bigcup A =$__$\{\emptyset\}$__，$\bigcap A =$__$\emptyset$__。
3. （1 分）设$A=\{\emptyset, b, \{2\}\}$，则 $P(A)$ =$\{\emptyset, \{\emptyset\},\{b\},\{\{2\}\},\{\emptyset, b\},\{\emptyset,\{2\}\},\{b,\{2\}\},\{\emptyset, b,\{2\}\}$。
4. （6 分）对 n 个命题变元，可定义__2^{2^n}__个 n 元命题联接词。
   设 A = {1,2,3,4}，B = {a, b, c}，从 A 到 B 不同的二元关系共有__2^{12}__，$|A\times B|$ =__12__。
   从 A 到 B 不同的函数共有__81__个？在集合 A 上，可定义__15__个不同的等价关系？
   在集合 B 上，写出等价类数目最多的那个等价关系 R=__{<a,a>,<b,b>,<c,c>}__。
5. （4 分）对有限集合 A 和 B，|A| = m，|B| = n，试给出下列情形 m 和 n 应满足的条件：
   (1)__$m\le n$__时存在从 A 到 B 的单射函数；(2)$m\ge n>0 \vee m=n=0$时存在从 A 到 B 的满射函数；
   (3)__$m=n$__时存在从 A 到 B 的双射函数；且有__$n!$__个不同的双射函数。
6. （3 分）按照连续统假设，用最简洁的形式写出下列计算结果。
   $|N_N|$ =__$\aleph_1$__　$|R_R|$ =__$\aleph_2$__　$|N^P|$ =__$\aleph_0$__　注：$N^P=\{n|n\in N \wedge n是素数\}$

样题仅供参考!

（注：本页的题目均须写在答题本上）

三、 形式化下列语句，论域均为总论域（共 12 分，第小题 3 分）

1. 没有最大的素数。

$\neg(\exists x)\Big(P(x)\wedge(\forall y)\big(P(y)\to Q(x,y)\big)\Big)$ 其中，P(x)表示 x 是素数，Q(x, y)表示 x 比 y 大

2. 天下乌鸦一般黑（要求写出两种形式，一种仅用全称量词，另一种仅用存在量词）。

$(\forall x)\Big(P(x)\to(\forall y)\big(P(y)\to Q(x,y)\big)\Big),\neg(\exists x)\Big(P(x)\wedge(\exists y)\big(P(y)\wedge\neg Q(x,y)\big)\Big)$

其中，P(x)表示 x 是乌鸦，Q(x, y)表示 x 和 y 一般黑

3. 斐波那契数列中的每个数有且仅有一个后继。

$(\forall x)\Big(\mathrm{P(x)}\to(\exists y)\Big(\mathrm{P(y)}\wedge\mathrm{Q(x,y)}\wedge(\forall z)\big(\mathrm{P(z)}\wedge\mathrm{Q(x,z)}\to\mathrm{E(y,z)}\big)\Big)\Big)$

其中，P(x)表示 x 是斐波那契数，Q(x, y)表示 y 是 x 的后继，E(x,y)表示 x 和 y 相等

4. 并非所有人都天赋好，而且天赋不好的人未必就不成功（仅需写出一种形式但全称和存在量词均需出现）。

$(\exists x)\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\wedge\neg(\forall x)\big(P(x)\wedge Q(x)\to\neg R(x)\big)$
其中，P(x)表示 x 是人，Q(x)表示 x 天赋不好，R(x)表示 x 是成功的

四、 写出计算与构造过程和结果（共 19 分，第 1 题 2 分，第 2 题 5 分，第 3,4,5 题每题 4 分）

1. 用空集∅构造一个集合序列$S_0,S_1,\cdots,S_{i-1}$，满足$|S_i|$ = i，且$S_i\subseteq S_{i+1}$，试写出序列的前 4 个集合S_0,S_2,S_2,S_3。

$$S_0=\emptyset,S_1=\{\emptyset\},S_2=\{\emptyset,\{\emptyset\}\},S_3=\Big\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\Big\}$$

2. P↓Q = ¬(P∨Q)，试仅用或非联结词↓分别表示出¬P，P∨Q，P→Q 和 P↔Q（说明：详细运算步骤，要求结果尽量简洁。换句话说，当使用或非门分别实现上述每种运算时，要求所用的或非门最少）。 【作业题】

$$\neg p=p\downarrow p,p\vee q=(p\downarrow q)\downarrow(p\downarrow q),p\to q=\big((p\downarrow p)\downarrow q\big)\downarrow\big((p\downarrow p)\downarrow q\big),$$

$$p\leftrightarrow q=\bigg(\Big(\big((p\downarrow p)\downarrow q\big)\downarrow\big((p\downarrow p)\downarrow q\big)\Big)\downarrow\Big(\big((p\downarrow p)\downarrow q\big)\downarrow\big((p\downarrow p)\downarrow q\big)\Big)\bigg)$$

$$\downarrow\bigg(\Big(\big((q\downarrow q)\downarrow p\big)\downarrow\big((q\downarrow q)\downarrow p\big)\Big)\downarrow\Big(\big((q\downarrow q)\downarrow p\big)\downarrow\big((q\downarrow q)\downarrow p\big)\Big)\bigg)$$

3. 对以下命题："集合 A 上的一个关系 R，如果 R 是对称的和传递的，则 R 一定是自反的，因为xRy，yRx蕴含xRx。"先指出该命题的错误，然后找出反例——在集合{a, b, c}上构造一个关系，使其是对称的和传递的，但不是自反的。 【作业题】

由定义:
R 是 A 上对称的 $\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)\big((x\in A\wedge y\in A\wedge xRy)\to yRx\big)$
R 是 A 上传递的 $\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge xRy\wedge yRz)\to xRz\big)$
R 是 A 上自反的 $\Leftrightarrow(\forall x)(x\in A\to xRx)$
因此，R 是 A 上对称的和传递的 $\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)\big((x\in A\wedge y\in A\wedge xRy)\to xRx\big)$
因此，R 是 A 上对称的和传递的，但不一定是自反的。
例如，$R=\{<b,c>,<c,b>,<b,b>,<c,c>\}$

4. 求下式的主析取范式和主合取范式：¬(P↔Q) ∧ (¬P → R) （写出步骤，最后结果用数字表示的简洁形式）。 【可用真值表法，或填满命题变项法】

主析取范式$\vee_{3,4,5}$ ，主合取范式$\wedge_{0,1,5,6,7}$

5. 求[99,1000]的范围内不能被 5,6,8 中任一个数整除的数的个数。

用 A、B、C 表示[99,1000]之间分别能被 5,6,8 整除的整数的个数，则

|A|=1000/5-98/5 = 181 |B|=1000/6-98/6=150 |C|=1000/8-98/8=113

$|A\cap B|=\frac{1000}{30}-\frac{98}{30}=30$ $|A\cap C|=\frac{1000}{40}-\frac{98}{40}=23$ $|B\cap C|=\frac{1000}{24}-\frac{98}{24}=37$

$|A\cap B\cap C|=\frac{1000}{120}-\frac{98}{120}=8$

说明：所有除法为整数除法的下取整除法

$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=E-|A\cup B\cup C|=E-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|$

= 902-181-150-113+30+23+37-8=540

五、 证明题第一部分（共 12 分，第 1 题 3 分，第 2 题 5 分，第 3 题 4 分）

1. $(\exists x)\big(P(x)\to Q(x)\big)=(\forall x)P(x)\to(\exists x)Q(x)$是否正确，如正确试给出证明，如错误需举出反例。

正确。

$$(\exists x)\big(P(x)\to Q(x)\big)=(\exists x)\big(\neg P(x)\vee Q(x)\big)$$
$$=(\exists x)\neg P(x)\vee(\exists x)Q(x)=\neg(\forall x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)=(\forall x)P(x)\to(\exists x)Q(x)$$

2. 利用推理规则或归结推理法证明下列推理：

$(\forall x)(P(x)\to Q(x))\wedge(\forall x)(R(x)\to\neg Q(x))\Rightarrow(\forall x)(R(x)\to\neg P(x))$

①$(\forall x)(P(x)\to Q(x))$ 前提

②$(\forall x)(R(x)\to\neg Q(x))$ 前提

③$P(x)\to Q(x)$ ①全称量词消去

④$R(x)\to\neg Q(x)$ ②全称量词消去

⑤$\neg Q(x)\to\neg P(x)$ ③置换

⑥$R(x)\to\neg P(x)$ ④⑤三段论

⑦$(\forall x)(R(x)\to\neg P(x)$ ⑥全称量词引入

3. 若 R 和 S 是 A 上的关系，且 S = {< a, b > |(∃c)(aRc∧cRb)}。若 R 是等价关系，证明 S 也是等价关系。

【作业题】

证明：若 R 是等价关系，则对任意的 $a,b\in A$

自反关系：$aRa\wedge aRa\Leftrightarrow aSa$

对称关系：$aSb\Leftrightarrow aRc\wedge cRb\Leftrightarrow bRc\wedge cRa\Leftrightarrow bSa$

传递关系：

$aSb\wedge bSc$

$\Leftrightarrow(aRx\wedge xRb)\wedge(bRy\wedge yRc)$

$\Leftrightarrow aRx\wedge xRy\wedge yRC$

$\Leftrightarrow aRy\wedge yRc$

$\Leftrightarrow aSc$

所以，S 是等价关系.

六、 设 A = {a, b, c, d, e, f, g}，R = $I_A\cup$ {< a, c >,< a, d >,< a, e >,<b,c>,<b,d>,<b,e>,<c,e>,<d,e>,<f,g>}，

试完成以下 4 个步骤：（共 11 分）

1) 说明 R 是 A 上的偏序关系；

2) 画出偏序集< A, R >的哈斯图；

3) 写出< A, R >中所有最长的链和所有最长的反链；

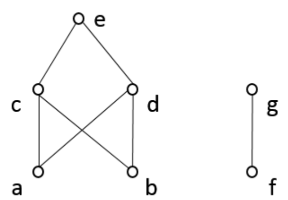
4) 对< A, R >指出其极大元、极小元、最大元和最小元。

（1）R 的关系矩阵：

	a	b	c	d	e	f	g
a	1	0	1	1	1	0	0
b	0	1	1	1	1	0	0
c	0	0	1	0	1	0	0
d	0	0	0	1	1	0	0
e	0	0	0	0	1	0	0
f	0	0	0	0	0	1	1
g	0	0	0	0	0	0	1

从关系矩阵中可以看出，R 是自反和反对称的，并可验证 R 是传递的，故它是偏序关系。

（2）< A, R >的哈斯图如下



（3）最长的链：{a,c,e},{a,d,e},{b,c,e},{b,d,e}

最长的反链：{a,b,f},{a,b,g},{c,d,f},{c,d,g}

（4）极大元：e,g　　　　极小元：a,b,f　　　　无最大元和最小元

七、 证明题第二部分（共 16 分，第 1 题 6 分，第 2 题 5 分，第 3 题 5 分）

1. 利用罗素公理系统证明：$\vdash (P \vee Q) \to \big(Q \to ((P \vee Q))\big)$

答案：

1) $\vdash (Q \to R) \to \big((P \to Q) \to (P \to R)\big)$　　定理 1

2) $\vdash ((P \vee Q) \to (Q \vee P)) \to \big((P \to (P \vee Q)) \to (P \to (Q \vee P))\big)$　　(1)代入$\frac{Q}{P\vee Q}$,$\frac{R}{Q\vee P}$

3) $\vdash (P \vee Q) \to (Q \vee P)$　　公理 3

4) $\vdash (P \to (P \vee Q)) \to (P \to (Q \vee P))$　　(2)(3)分离

5) $\vdash P \to (P \vee Q)$　　公理 2

6) $\vdash P \to Q \vee P$　　(4)(5)分离

7) $\vdash P \to \neg Q \vee P$　　(6)代入$\frac{Q}{\neg Q}$

8) $\vdash (P \vee Q) \to \big(\neg Q \vee ((P \vee Q))\big)$　　(7)代入$\frac{P}{P\vee Q}$

9) $\vdash (P \vee Q) \to \big(Q \to ((P \vee Q))\big)$　　(8)定义 1

2. 设 A、B 和 C 是任意的集合，证明：(A – B) – C = (A – C) – (B – C)

【作业题】

$$
\begin{aligned}
(A-C)-(B-C) &= (A\cap -C)\cap -(B\cap -C) \\
&= A\cap -C\cap(-B\cup C) \\
&= (A\cap -C\cap -B)\cup(A\cap -C\cap C) \\
&= ((A-B)-C)\cup\varnothing \\
&= (A-B)-C
\end{aligned}
$$

3. 用等势定义证明(0, c) $\approx$ R，其中 R 为实数域(−∞,+∞)，c 为大于 0 的具体实数。

存在双射函数$\mathrm{f}: (0,\mathrm{c}) \rightarrow \mathrm{R}$,

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \tan\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{c}x-1\right), \mathrm{x}\in(0,\mathrm{c})$$