P103.16

证明：如果存在这样的平面图，那么它有对偶图，并且对偶图的顶点间两两都有边相连，即K_5子图。因为K_5图不是平面图，与对偶图是平面图矛盾。

或利用性质 3：极大平面图每个面的次数均为 3。

P104.20

证明：反证法。

设G的域可二着色，则其对偶图G^*的顶点可二着色。

所以，G^*为二分图。

因为，G的域的边界数除一个外均可被d整除，对应的，设G^*的顶点数为n，度数为d_1,d_2……,d_n.

令d_n为特例，即d_1,d_2……，d_{n-1}均可被d整除。

G^*为二分图，设结点分为 I，II 两部分，顶点v_n属于 I。

有 d（I）=d（II），由于等式两边，d（I）不可被 d 整除， d（II）可被 d 整除

所以，矛盾。等式不成立。

所以假设成立。

P104.21

由 20 题结论和例 4.5.3 可得到要证的结论。

P104.24

3

$t(t-1)(t-2)^3$

P104.37

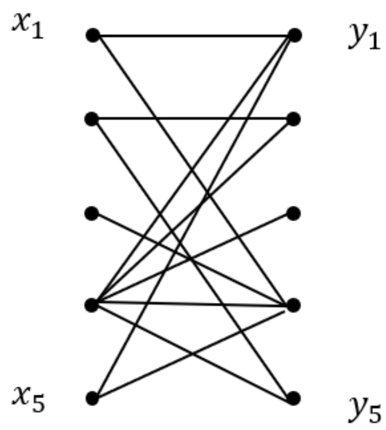
以课程为结点，有同学同时选的两门课之间连接一条边，该图存在三角形，因此色数大于等于 3，又找到 3 种颜色可以着色的方法，因此色数等于 3，即至少需要 3 天。

P119.1

$$M=\{(x_1,y_5),(x_2,y_1),(x_3,y_2),(x_4,y_3),(x_5,y_4)\}$$

P120.3

构造二分图，二分图的X,Y两个集合各 5 个顶点，分别表示行与列。若(i,j)位置可以摆放棋子，x_i与y_j之间有一条边。



执行最大匹配的算法，最终得到最大匹配包含 4 条边，因此最多可以摆 4 个棋子；或选择$A=\{x_1,x_3,x_5\}$，A中有三个顶点，但只与|Y|中两个顶点相邻，由 Hall 定理知不存在完全匹配，又$\{(x_1,y_4),(x_2,y_5),(x_4,y_2),(x_5,y_1)\}$是一个包含 4 条边的匹配，因此最大匹配包含 4 条边，最多可以摆 4 个棋子。

P120.9

解：能找到。

证明如下：

1）当$k=1$时，$A=P_1$，结论成立。

2）假设小于等于k时，结论均成立。

现考虑$k+1$的情况。

假设A为$m\times n$矩阵，则矩阵中有$m(k+1)$个元素，由于每列元素个数不超过$(k+1)$,得到$m\le n$。以点集X中的点表示A的行，以点集Y中的点表示A的列。X,Y之间有边(x_i,y_j)表示$A_{ij}=1$，

则对二分图$G(X,Y,E)$，有$|X|=m,|Y|=n,$

且$d(x_i)=k+1,d(y_j)\le k+1(x_i\in X,y_j\in Y)$。

$\therefore G$中存在X到Y的完全匹配M。

假设Y中有p个顶点满足$d(y_j)=k+1$，必有$p\le m$（若$p>m$，则A中1的个

数$> m(k+1)$，但A中只有$m(k+1)$个1，矛盾），

此时，考虑Y中这p个顶点与X的所有顶点构成的二分图$G'(X,Y',E')$,

在G'中，$d(y_j)=k+1(y_j\in Y')$，$d(x_i)\le k+1(x_i\in X)$且$|Y'|=p\le m=|X|$，

$\therefore G'$中存在Y'到X的完全匹配。

构造初始匹配为G'中Y'到X的完全匹配的所有边，这是$G(X,Y,E)$的匹配，但不是最大匹配。可以运行匈牙利算法，直至找到最大匹配，由完全匹配的存在性，最大匹配是完全匹配。在匹配的边数增加的过程中，虽然对边取了对称差，但原饱和的结点并不会变为非饱和，因此构造的$G(X,Y,E)$的完全匹配M中，Y中所有度为$k+1$的点仍然为$M-$饱和点。

此时在G中去掉M的所有边，得到矩阵A'满足每行有k个 1，每列最多k个1。

$\therefore A'=P_1+P_2+\cdots+P_k$。

以M构造对应的P_{k+1}，满足每行都有一个 1 元素，每列最多只有一个 1 元素，

则$A=P_1+P_2+\cdots+P_k+P_{k+1}$

得证。

P137.1

解：

最小切割为$\{(s,a),(s,b),(s,c)\}$,

最大流 29.

P137.2

解：最大流 21,

下图。