

第 3 次计算题作业 - 答案

- 1、太阳发光的本质是根据 $E = mc^2$ 把质量转换为能量的。太阳每秒产生 $3.85 \times 10^{26} \text{ J}$ (焦耳) 的能量 (即太阳光度), 证明太阳每秒必须把 $4.3 \times 10^9 \text{ kg}$ 的质量转换为能量。(14-36)

$$m/t = \frac{\frac{E}{t}}{c^2} = \frac{3.85 \times 10^{26} \frac{\text{J}}{\text{s}}}{(2.998 \times 10^8 \text{ ms}^{-1})^2} = 4.28 \times 10^9 \text{ kg/s} \approx 4.3 \times 10^9 \text{ kg/s}$$

- 2、一个太阳黑子的亮度约为其周围光球层亮度的 70%。太阳光球层的温度约为 5780K, 太阳黑子的温度是多少? (14-41)

$$\mathcal{F}_{\text{黑子}} = 70\% \times \mathcal{F}_{\text{光球层}} = 0.7 \mathcal{F}_{\text{光球层}}, \quad T_{\text{光球层}} = 5780 \text{ K}, \quad \text{根据斯 - 玻定律:}$$

$$\frac{\mathcal{F}_{\text{黑子}}}{\mathcal{F}_{\text{光球层}}} = 0.7 = \frac{\sigma T_{\text{黑子}}^4}{\sigma T_{\text{光球层}}^4}$$

$$T_{\text{黑子}} = T_{\text{光球层}} \cdot (0.7)^{1/4} = 5286.92 \text{ K}$$

- 3、如果太阳能量来自引力坍缩, 那么太阳的寿命为 $(GM_{\text{Sun}}^2)/(R_{\text{Sun}}L_{\text{Sun}})$ 。如果太阳以目前的光度辐射, 那么太阳能维持多长的时间 (以年为单位)? (14-45)

$$L_{\text{Sun}} = 3.828 \times 10^{26} \text{ Js}^{-1}, \quad M_{\text{Sun}} = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad R_{\text{Sun}} = 6.963 \times 10^8 \text{ m},$$

$$t_{\text{Sun}} = \frac{GM_{\text{Sun}}^2}{R_{\text{Sun}}L_{\text{Sun}}} = 0.9906 \times 10^{15} \text{ s} = 3.139 \times 10^7 \text{ years}$$

- 4、大犬座的天狼星是一个包含两颗 A 型星的双星系统。天狼 A (“Dog Star”) 的亮度是天狼 B (“Pup Star”) 的 6800 倍。请比较两颗星的表面温度、光度和半径。(提示: 两颗星到地球的距离和表面温度相同)。(13-37)

$$\mathcal{F}_A = 6800 \cdot \mathcal{F}_B, \quad d_{A-\text{Earth}} = d_{B-\text{Earth}}$$

$$\frac{L_A}{L_B} = \frac{\mathcal{F}_A \cdot 4\pi d_{A-\text{Earth}}^2}{\mathcal{F}_B \cdot 4\pi d_{B-\text{Earth}}^2} = 6800$$

$$T_A = T_B$$

$$\frac{R_A}{R_B} = \sqrt{\frac{L_A}{L_B}} \times \frac{T_B^2}{T_A^2} = \sqrt{6800} = 82.46$$

- 5、天狼星和它的伴星环绕它们质心轨道运动的周期为 50 年。天狼星质量是太阳质量的 2 倍。如果伴星的轨道速度是天狼星的 2.35 倍, 那么伴星的质量和轨道半径各是多少? (提示: 假设圆轨道平面沿视线方向)。(13-38)

$$P_{\text{years}} = 50 \text{ years}, \quad M_{\text{天狼星}} = 2M_{\text{Sun}} = 3.978 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad v_{\text{伴星}} = 2.35v_{\text{天狼星}}$$

$$\frac{v_{\text{伴星}}}{v_{\text{天狼星}}} = 2.35 = \frac{M_{\text{天狼星}}}{M_{\text{伴星}}} \Rightarrow M_{\text{伴星}} = \frac{2M_{\text{Sun}}}{2.35} = 1.693 \times 10^{30} \text{ kg} = 0.851 \cdot M_{\text{Sun}}$$

$$\frac{M_{\text{伴星}}}{M_{\text{Sun}}} + \frac{M_{\text{天狼星}}}{M_{\text{Sun}}} = 0.851 + 2 = \frac{A_{\text{AU}}^3}{P_{\text{years}}^2} \Rightarrow A_{\text{AU}} = (2.851 \cdot 50^2)^{\frac{1}{3}} = 19.24 \text{ (AU)}$$

$$\frac{A_{\text{伴星}}}{A_{\text{天狼星}}} = \frac{v_{\text{伴星}}}{v_{\text{天狼星}}} = 2.35, \quad (\text{由上}) A_{\text{伴星}} + A_{\text{天狼星}} = 19.24 \text{ AU}$$

$$\therefore A_{\text{伴星}} = \frac{19.24 \text{ AU}}{1 + 1/2.35} = 13.50 \text{ AU}$$

- 6、猎户座的参宿四和参宿七的视差分别为 0.00763 和 0.00412 角秒。两颗星到我们的距离分别是多少（以光年为单位）？假定它们的亮度相同，那么哪颗星的光度更高？已知参宿四的颜色偏红，而参宿七的颜色为蓝白，请问哪颗星的半径更大？理由是什么？（13-40 和 13-41）

$$d_{\alpha} = \frac{1}{p_{\alpha}} = \frac{1}{0.00763''} = 131.06 \text{ pc} = 131.06 \times 3.26 \text{ 光年} = 427.26 \text{ 光年}$$

$$d_{\beta} = \frac{1}{p_{\beta}} = \frac{1}{0.00412''} = 242.72 \text{ pc} = 242.72 \times 3.26 \text{ 光年} = 791.26 \text{ 光年}$$

若亮度相同，则由

$$\frac{L_{\alpha}}{L_{\beta}} = \frac{\mathcal{F}_{\alpha} \cdot 4\pi d_{\alpha}^2}{\mathcal{F}_{\beta} \cdot 4\pi d_{\beta}^2} = \frac{427.26^2}{791.26^2} = 0.292$$

可知猎户座的参宿七光度更高。

猎户座的参宿七颜色更偏蓝，估计为 $\lambda_{\beta} \sim 440 \text{ nm}$ ，另外估计参宿四颜色对应 $\lambda_{\alpha} \sim 750 \text{ nm}$ 。

由维恩位移定律可知其表面温度更高，根据光度-温度-半径关系及斯-玻定律：

$$\frac{R_{\alpha}}{R_{\beta}} = \sqrt{\frac{L_{\alpha}}{L_{\beta}} \cdot \frac{T_{\beta}^2}{T_{\alpha}^2}} = \sqrt{\frac{L_{\alpha}}{L_{\beta}} \cdot \frac{\lambda_{\alpha}^2}{\lambda_{\beta}^2}} \approx \sqrt{0.292} \cdot \frac{750^2}{440^2} = 1.57$$

因此参宿四的半径更大。

- 7、教材图 15.3b（无尘埃消光）和 15.3c（尘埃消光后）表示的是同一颗恒星的能谱，分别估计两种情况下的恒星的表面温度，并说明使用观测数据确定恒星的性质时，星际消光的影响。（15-34）

$$T_{\text{无}} = \frac{2,900,000 \text{ nm K}}{440 \text{ nm}} = 6590.91 \text{ K}$$

$$T_{\text{消光}} = \frac{2,900,000 \text{ nm K}}{720 \text{ nm}} = 4027.78 \text{ K}$$

天体发出的辐射会遭遇星际消光（被星际尘埃吸收、散射），波长较短（颜色更蓝）的辐射更容易遭遇星际消光，使得获取到的恒星观测数据中，光度更低且星际红化（长波长辐射占比比原来的占比大很多）。

- 8、太阳大气的氢原子数与碳原子数之比近似为 2400:1。这个比值也适用于分子云。如果一个巨分子云含有 100 倍太阳质量的 CO 分子，那么它含有多少质量的氢分子？（提示：CO 分子中碳原子质量占比为 3/7）。（15-40）

$$M_{\text{CO}} = 100M_{\text{Sun}} = 1.989 \times 10^{32} \text{ kg}, \quad N_{\text{H}}:N_{\text{C}} = 2400:1$$

$$M_C = \frac{3}{7} \cdot M_{Co}$$

单个碳原子质量为 12 u, 单个氢原子质量为 1 u (其中 1 u = 1.67377×10^{-27} kg), 则:

$$N_C = \frac{M_C}{12 \text{ u}}$$

$$N_H = 2400 N_C$$

$$\therefore M_H = N_H \times 1 \text{ u} = \frac{2400 \times M_C}{12 \text{ u}} \times 1 \text{ u} = \frac{2400 \times \left(\frac{3}{7} \times 1.989 \times 10^{32} \text{ kg}\right)}{12} = 1.7048 \times 10^{34} \text{ kg}$$

- 9、一倍太阳质量的原恒星, 初始时具有 3500K 的表面温度和 200 倍太阳目前的光度。估计这类原恒星的半径, 并与太阳目前的半径做比较。(15-43)

$$M = M_{\text{Sun}}, \quad T = 3500 \text{ K}, \quad L = 200 L_{\text{Sun}}$$

$$T_{\text{Sun}} = 5772 \text{ K}, \quad R_{\text{Sun}} = 696340 \text{ km}$$

$$\frac{L}{L_{\text{Sun}}} = 200 = \left(\frac{R}{R_{\text{Sun}}}\right)^2 \left(\frac{T}{T_{\text{Sun}}}\right)^4$$

$$\frac{R}{R_{\text{Sun}}} = \sqrt{200} \left(\frac{5772}{3500}\right)^2 = 38.462$$

$$R = 38.462 \times 696340 \text{ km} = 2.678 \times 10^7 \text{ km}$$

- 10、 已知太阳的主序寿命约为 100 亿年, 估计下列恒星的主序寿命: (a) 一颗 20% 太阳质量、1% 太阳光度的红矮星; (b) 一颗 3 倍太阳质量、30 倍太阳光度的恒星; (c) 一颗 10 倍太阳质量、1000 倍太阳光度的蓝巨星。基于你的结果总结恒星主序寿命与恒星质量的关系。(0-00)

$$(a) M_1 = 0.2 M_{\text{Sun}}, \quad L_1 = 0.01 L_{\text{Sun}}$$

$$\tau_1 = (1.0 \times 10^{10}) \times \frac{0.2}{0.01} \text{ years} = 2.0 \times 10^{11} \text{ years}$$

$$(b) M_2 = 3 M_{\text{Sun}}, \quad L_2 = 30 L_{\text{Sun}}$$

$$\tau_2 = (1.0 \times 10^{10}) \times \frac{3}{30} \text{ years} = 1.0 \times 10^9 \text{ years}$$

$$(c) M_3 = 10 M_{\text{Sun}}, \quad L_3 = 1000 L_{\text{Sun}}$$

$$\tau_3 = (1.0 \times 10^{10}) \times \frac{10}{1000} \text{ years} = 1.0 \times 10^8 \text{ years}$$

总结: 恒星质量越大, 其主序寿命越短