第十四周.双线性型I

参考：

高等代数学 10.1 对偶空间

10.2 双线性型

15.1. 线性函数

定义： 设V是数域$\mathbb{F}$上的线性空间, $f: V \to \mathbb{F}$是一个映射，满足对于$\forall \alpha, \beta \in V$, $c \in \mathbb{F}$, 有$f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$和$f(c\alpha) = cf(\alpha)$, 则$f$称为$V$上一个线性函数.

定理： 设V是数域$\mathbb{F}$上的n维线性空间, $v_1, \cdots, v_n$是一组基， $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$. 则存在唯一的一个$V$上线性函数$f$满足$f(v_i) = a_i$, $i = 1, \cdots, n$.

Riesz表示定理： 设V是数域$\mathbb{F}$上的n维内积空间, f是V上一个线性函数，则存在唯一的$u \in V$满足$\forall v \in V$, $f(v) = (v, u)$.

令V^*是V上全体线性函数构成的线性空间，称为V的共轭空间。当V是有限维空间时，V^*是V的对偶空间.

15.2. 对偶基

现设 V 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组基, 则 $V \to \mathbb{K}$ 的任一线性函数 f 被它在 V 基上的值唯一确定. 现定义 $f_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 如下:

$$f_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

这里 δ_{ij} 称为 Kronecker (克罗内克) 符号, 即当 $i = j$ 时, $\delta_{ii} = 1$; $i \neq j$ 时, $\delta_{ij} = 0$.

定理: $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 是 V^* 中线性无关的向量组, 组成 V^* 的一组基.

现在引进一个记号 $\langle\ ,\ \rangle$:

$$\langle f, x \rangle = f(x),$$

15.3. 对偶空间的线性映射

定理 10.1.1 设 V, U 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, φ 是 $V \to U$ 的线性映射, $\varphi^*: U^* \to V^*$ 是 φ 的对偶映射, 则

(1) 对任意的 $\boldsymbol{x} \in V$ 及任意的 $\boldsymbol{g} \in U^*$, 总成立:

$$\langle \varphi^*(\boldsymbol{g}), \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{g}, \varphi(\boldsymbol{x}) \rangle, \tag{10.1.2}$$

若 $\widetilde{\varphi}$ 是 $U^* \to V^*$ 的线性映射且等式

$$\langle \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{g}), \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{g}, \varphi(\boldsymbol{x}) \rangle \tag{10.1.3}$$

对一切 $\boldsymbol{x} \in V, \boldsymbol{g} \in U^*$ 成立, 那么 $\widetilde{\varphi} = \varphi^*$;

(2) 若 V, U 是有限维线性空间, 设 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的一组基, $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 是其对偶基; $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ 是 U 的一组基, $\{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_m\}$ 是其对偶基. 设 φ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 和基 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ 下的表示矩阵是 $\boldsymbol{A}$, 则 φ^* 在基 $\{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_m\}$ 和基 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}'$.

15.4 双线性型

定义 10.2.1 设 U, V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $U \times V$ 是它们的积集合. 若存在集合 $U \times V \to \mathbb{K}$ 的映射 g, 适合下列条件:

(1) 对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$, $\boldsymbol{z} \in V$, $k \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) &= g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}), \\ g(k\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) &= kg(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}); \end{aligned}$$

(2) 对任意的 $\boldsymbol{x} \in U$, $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in V$, $k \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}+\boldsymbol{w}) &= g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}), \\ g(\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{z}) &= kg(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}), \end{aligned}$$

则称 g 是 U 与 V 上的双线性函数或双线性型.

15.5 双线性型矩阵表示

$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m\}$ 与 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ 分别是 U 与 V 的基

g 是定义在 U 和 V 上的双线性型.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} g(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v}_1) & g(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & g(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v}_n) \\ g(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}_1) & g(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & g(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g(\boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{v}_1) & g(\boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & g(\boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{v}_n) \end{pmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{x} \in U, \boldsymbol{y} \in V$,

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} b_j \boldsymbol{v}_j,$$

则

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{A} \boldsymbol{\beta}.$$

单选题 1分

设置

以下**错误**的是

A 设$T: V \to U$是有限维空间的线性映射，关于一组基的表示矩阵是列满秩阵A，T^*是它的对偶映射，则T^*是一个满射.

B 设V是$\mathbb{F}$上二维空间，V^*是对偶空间,e_1, e_2是V的一组基，f_1, f_2是对偶基，则e_1, e_1+e_2的对偶基是f_1, f_1+f_2.

C 当V是$\mathbb{F}$上无限维空间时，设$T: V \to V^{**}$定义为$T(v) = \langle -, v\rangle$仍是一个单射.

提交