离散数学(1)
Discrete Mathematics

第三章 命题逻辑的公理化

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

问题：推理相关

- 证明推理关系的时候可以用定理2.8.1（直接证明）和2.8.2（反证法），也可以用推理规则和归结推理法是吗？
  - 2.8.1和2.8.2分别是推理演算和归结法的理论依据

两个重要的定理引出两种推论方法

定理2.8.1

$A \Rightarrow B$成立的充分必要条件是$A \rightarrow B$为重言式（直接推导）。

定理2.8.2

$A \Rightarrow B$成立的充分必要条件是$A \land \neg B$为矛盾式（反证法）。

- 推理中，如果有一个前提是$P \land Q$，那引入前提的时候可以只引入Q吗？
  - 需要写清楚Q怎么得到的：

$P \land Q$	(前提引入)
Q	(基本公式：$P \land Q \Rightarrow Q$)

推理演算举例：

$$(\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow\neg(R\vee S))\wedge((Q\rightarrow P)\vee\neg R)\wedge R \Rightarrow (P\leftrightarrow Q)$$

1.	$(Q\rightarrow P)\vee\neg R$	**前提引入**
2.	$R\rightarrow(Q\rightarrow P)$	1**置换**
3.	R	**前提引入**
4.	$Q\rightarrow P$	2、3**分离**
5.	$\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow \neg(R\vee S)$	**前提引入**
6.	$(R\vee S)\rightarrow(P\rightarrow Q)$	5**置换**
7.	$R\vee S$	3 + **基本公式4** $P \Rightarrow P\vee Q$
8.	$P\rightarrow Q$	6、7**分离**
9.	$P \leftrightarrow Q$	4、8

（注：教材中的证明用了15个步骤，这里用一种更为简洁的方法）

问题：作业规范相关

- 使用推理规则证明时应该规范书写，正确地使用推理规则
- 一些作业中的案例

(1) S (2) $(E \to U) \to \neg S$ (3) $\neg(E \to U)$	前提引入 前提引入 (1)(2)归结	推理规则中没有归结！ 应该先把(2)置换再用分离规则
(1) $S \to (\mathrm{E} \wedge U)$ (2) $S \to E$	前提引入 (1) 分离	不是标准的分离规则！
(1) $S \to (Q \to R)$ (2) Q (3) $S \to R$	前提引入 前提引入 (1)(2)分离	不是标准的分离规则！
(1) $(S \wedge Q) \to R$ (2) Q (3) $S \to R$	前提引入 前提引入 (1)(2)分离	不是标准的分离规则！

问题：作业规范相关

- 用推理规则证明的时候需要有每条式子的标号，以及需要写出每一步推理使用到的规则，注意书写的规范，可以参考书上例题的写法，例如：

证明：$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \Rightarrow S \vee R$

(1) $P \vee Q$	前提引入
(2) $\neg P \rightarrow Q$	(1) 置换
(3) $Q \rightarrow S$	前提引入
(4) $\neg P \rightarrow S$	(2)、(3) 三段论
(5) $\neg S \rightarrow P$	(4) 置换
(6) $P \rightarrow R$	前提引入
(7) $\neg S \rightarrow R$	(5)、(6) 三段论
(8) $S \vee R$	(7) 置换

问题：归结相关

- 对子句集S当中的子句作归结的时候，已经被归结掉的式子仍然要放进S当中吗？
  - 归结法不会把“归结掉的式子”从S中拿走，只会把新的子句（归结结果）放到S中

3. 对S 中的子句作归结（消互补对），归结结果（归结式）仍放入S 中。重复此步。

- 归结法中的$C_1 = L \vee C_1'$中的C_1与C_1'有什么关系
  - 这就是一个单纯的等式，不要求C_1与C_1'有特定的关系
  - 归结法的关键是把需要归结的两个式子$C_1 = L \vee C_1'$，$C_2 = \neg L \vee C_2'$中对应的L和$\neg L$找到

问题：归结相关

- 本次作业第10题，按照语义理解，条件之间并不矛盾，但符号化后又能推出矛盾，感觉问题在于张三受罚(P)将破产(Q)这句话的符号化，需不需要考虑之后银行是否会贷款(R)给张三，究竟应该符号化成$P \to Q$还是$P \land \neg R \to Q$?
  - 理解“张三受罚将破产”这句话，是不能带有任何额外前提的，这句话的意思就是说：“**无论银行是否贷款**，只要张三受罚，他都会破产”，这也是导致了条件之间出现矛盾的关键
  - 这句话应符号化为$P \to Q$，引入$\neg R$会歪曲了原义

10. 如果合同是有效的，那么张三应受罚. 如果张三应受罚，他将破产. 如果银行给张三贷款，他就不会破产. 事实上，合同有效并且银行给张三贷款了. 验证这些前提是否有矛盾.

P：张三受罚；Q：张三破产；R：银行贷款给张三

问题：公理系统相关

- 为什么归结法和罗素系统无法证明某一公式不是定理？
  - 归结法：

归结法步骤：

1. 从$A \wedge \neg B$ 出发（欲证$A \Rightarrow B$，等价于证 $A \wedge \neg B$ 是矛盾式）
2. 建立子句集S，将$A \wedge \neg B$ 化成合取范式：

   $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$

   其中C_i 为析取式。由诸C_i 构成子句集

   $S = \{ C_1, C_2, \ldots, C_n \}$
3. 对S 中的子句作归结（消互补对），归结结果（归结式）仍放入S 中。重复此步。
4. 直至归结出矛盾式（□）。

  - 额外加一个终止条件
  - 罗素公理系统：搜索路径可能无法穷举

问题：罗素公理系统可以用三段论嘛?

一个简便的用三段论的方法

(1) $\vdash (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$　　定理3.2.1

(2) $\vdash (Q \to R)$　　前提成立的话

(3) $\vdash (P \to Q) \to (P \to R)$　　(1) (2)分离

(4) $\vdash (P \to Q)$　　前提成立的话

(5) $\vdash P \to R$

- **代入规则**

　　如果 $\vdash A$，那么 $\vdash A\frac{\pi}{B}$（将合式公式A中出现的符号π 处处都代以合式公式B）。

- **分离规则**

　　如果 $\vdash A$，$\vdash A \to B$，那么 $\vdash B$。

- **置换规则**

　　定义的左右两边可互相替换。设公式A，替换后为B，则如果 $\vdash A$，那么 $\vdash B$。

问题：考试相关

- 演绎定理考不考？
- 公理系统中课本上的每一个定理都要求会证明吗？要求背下来使用吗？
- 公理系统证明有没有什么技巧？
  - (1)吃透课本和课件中定理、例题的证明过程，其中的很多思路是非常值得借鉴的
  - (2)注意观察待证的式子和已有的定理公理有什么相似点，思考如何通过代入得到有用的结论
  - (3)也可以从结论出发，反推使待证式成立所需的结论

定理证明的思路

1. 找出合适的公理或已证的定理；
2. 选择适当的代入做符号变换；
3. 设法将$\boldsymbol{A \rightarrow B}$ 的结论部分变成欲证的内容。

- **代入规则**

  如果 $\vdash A$，那么 $\vdash A\frac{\pi}{B}$（将合式公式A中出现的符号π 处处都代以合式公式B）。

- **分离规则**

  如果 $\vdash A$，$\vdash A \rightarrow B$，那么 $\vdash B$。

- **置换规则**

  定义的左右两边可互相替换。设公式A，替换后为B，则如果 $\vdash A$，那么 $\vdash B$。

公理1 $\vdash((P\vee P)\to P)$（重言律） 等幂律

公理2 $\vdash(P\to(P\vee Q))$

（∨引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3 $\vdash((P\vee Q)\to(Q\vee P))$（类似析取交换律）

公理4 $\vdash((Q\to R)\to((P\vee Q)\to(P\vee R)))$

复习：证明实例

$\vdash(Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$ 定理3.2.1

定理3.2.2 $\vdash P\to P$

证明：

(1)	$\vdash P\to P\vee Q$	公理2
(2)	$\vdash P\to P\vee P$	(1)代入$\frac{Q}{P}$
(3)	$\vdash P\vee P\to P$	公理1
(4)	$\vdash(Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$	定理3.2.1
(5)	$\vdash(P\vee P\to P)\to((P\to P\vee P)\to(P\to P))$	(4)代入$\frac{Q}{P\vee P}$，$\frac{R}{P}$
(6)	$\vdash(P\to P\vee P)\to(P\to P)$	(3), (5)分离
(7)	$\vdash P\to P$	(2), (6)分离

证毕

证明实例：$\vdash (P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)$

(1) $\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ 定理3.2.7

(2) $\vdash ((P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)) \rightarrow (\neg(Q \vee P) \rightarrow \neg(P \vee Q))$ 代入 $\frac{P}{P \vee Q}, \frac{Q}{Q \vee P}$

(3) $\vdash (P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$ 公理3

(4) $\vdash \neg(Q \vee P) \rightarrow \neg(P \vee Q)$ (2)(3)分离

(5) $\vdash \neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg(\neg Q \vee \neg P)$ 代入 $\frac{P}{\neg Q}, \frac{Q}{\neg P}$

(6) $\vdash (P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)$ 定义2

和公理3最接近

析取-》合取：定义2

交换前面需要有否定

符合：定理3.2.7

(1) $(A \rightarrow B)$ 定义为 $(\neg A \vee B)$。

(2) $(A \wedge B)$ 定义为 $\neg(\neg A \vee \neg B)$。

(3) $(A \leftrightarrow B)$ 定义为 $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$。

公理1 $\vdash ((P \vee P) \rightarrow P)$（重言律） 等幂律

公理2 $\vdash (P \rightarrow (P \vee Q))$

（v引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3 $\vdash ((P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P))$（类似析取交换律）

公理4 $\vdash ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R)))$

Setting

简而言之，命题逻辑的公理系统是

A 用来建立公理的系统

B 由公理产生推理规则的系统

C 用来完善已有公理的系统

D 从精选的几条公理出发，根据规定的演绎规则，推导出一系列定理的形式符号系统

Submit

复习：罗素(Russell)公理系统

3，定义

(1) $(A \rightarrow B)$ 定义为 $(\neg A \vee B)$。

(2) $(A \wedge B)$ 定义为 $\neg(\neg A \vee \neg B)$。

(3) $(A \leftrightarrow B)$ 定义为 $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ 。

复习：罗素(Russell)公理系统

4. 公理

公理1　$\vdash((P\vee P)\rightarrow P)$（重言律）　　**等幂律**

公理2　$\vdash(P\rightarrow(P\vee Q))$

（∨引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3　$\vdash((P\vee Q)\rightarrow(Q\vee P))$ (类似析取交换律）

公理4　$\vdash((Q\rightarrow R)\rightarrow((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R)))$

基本推理公式15

如果$y<z$,那么$x+y<x+z$

复习：罗素(Russell)公理系统

5. 变形(推理)规则

- **代入规则**

如果 $\vdash A$，那么 $\vdash A\frac{\pi}{B}$（将合式公式A中出现的符号π处处都代以合式公式B）。

- **分离规则**

如果 $\vdash A$，$\vdash A \rightarrow B$，那么 $\vdash B$。

- **置换规则**

定义的左右两边可互相替换。设公式A，替换后为B，则如果 $\vdash A$，那么 $\vdash B$。

离散数学(1)
Discrete Mathematics

第四章 谓词逻辑的基本概念

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

第四章 谓词逻辑的基本概念

4.1 谓词和个体词

4.2 函数和量词

4.3 合式公式

4.4 自然语句的形式化

4.5 有限域下公式的表示法

4.6 公式的普遍有效性

复习-命题演算

- 基本概念
- 等值和推理演算
- 公理化系统

- 基本思想：讨论句子层次的形式化及推演

命题逻辑的局限性 &
引入谓词逻辑的必要性

举例1：

P：张三是学生

Q：李四是学生

P，Q 两个独立的命题，未能反映或突出二者的共性与特点。

因此，有必要深入研究它们的形式结构和逻辑关系。

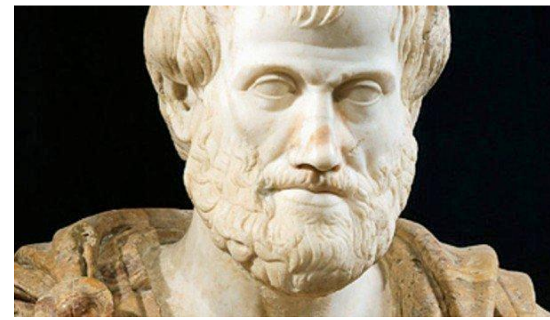
命题逻辑的局限性 & 引入谓词逻辑的必要性

$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R) \Rightarrow P\rightarrow R$ 三段论

举例2：

P：凡是人都是要死的

Q：苏格拉底是人



亚里士多德

R：所以苏格拉底是要死的

利用命题逻辑，仅能形式化为（$P\wedge Q$）$\rightarrow R$

显然，对于任意的P，Q，R来说，这个推理形式不是重言式，即，在命题逻辑中无法给出完整准确的描述。

问题的提出

- 需要进一步分析推理结构
  - 上述推理中，各命题之间的关系在于简单命题的成分之间

- 需要进一步分解简单命题

- 简单命题的符号化

主谓宾

简单命题的结构

主语	谓语	宾语
↑	↑	↑
讨论对象	对象的性质或关系	讨论对象
↓	↓	↓
个体词(组)	谓词	个体词(组)

- 个体词，谓词

命题逻辑与谓词逻辑

- 命题逻辑存在的问题
  - 问题出在“凡”字
  - 没有表达出个体和总体之间的内在联系和数量关系

凡有理数都是实数

- 关系
  - 谓词逻辑是命题逻辑的推广
  - 命题逻辑是谓词逻辑的特殊情形
- 例子

P(x)表示“x是学生” **P(张三)**

例1：分析下列各命题的个体词和谓词

- π是无理数
- 张三与李四同在软件学院
- x和y的和等于z （x，y，z是确定的数）
- π的平方是非负的
- 所有实数的平方都是非负的
- 有一个比2^{1000}大的素数

π是无理数

- 解

个体：π（代表圆周率）

谓词：…是无理数，表示“π”的性质

张三与李四同在软件学院

- 解

个体：张三、李四

谓词：…与…同在软件学院，表示张三和李四的关系

个体：张三

谓词： …与李四同在软件学院，表示张三的性质

个体：李四

谓词：张三与…同在软件学院，表示李四的性质

x和y的和等于z （x，y，z是确定的数）

个体：x、y、z

谓词：…和…的和等于…

个体：x、z

谓词：…和y的和等于…

个体：y

谓词：x和…的和等于z

谓词可以表示：1）单个个体的性质（一元谓词）；2）两个个体词之间的关系（2元谓词）；3）n个个体之间的关系或性质（n元谓词）

π的平方是非负的

个体：π

谓词：　…的平方是非负的

个体：π的平方

谓词：　…是非负的

“π的平方”是一个复合个体，需要进一步分解

个体：π

函数：…的平方

谓词：…是非负的

所有实数的平方都是非负的

个体：每一个实数

函数：…的平方

谓词：…是非负的

“所有”是什么

量词：所有

有一个比2^{1000}大的素数

个体：一个素数

谓词：…比2^{1000}大

“有一个”是什么

量词：有一个

4.1 谓词和个体词

- 谓词逻辑：区分主语、谓语，引入变元，
  引入谓词、量词
- 可将谓词逻辑理解为
  命题逻辑 **+ {个体词，谓词，量词，函数}**
- 这里讨论的是**一阶谓词逻辑**，或称**狭谓词逻辑**。
  - 限定量词仅作用于个体变项，不允许量词作用于命题变项和谓词变项
- 谓词逻辑的三要素
  - 个体词，谓词和量词
  - 函数

4.1 谓词和个体词

4-1-1　个体词（主词）

- 个体词是指所研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的客体。
  - 张三，李四
- 在一个命题中，个体词通常是表示思维对象的词，又称作主词。

4.1 谓词和个体词

4-1-2 个体常项与个体变项

- 将表示具体或特定客体的个体词称作个体常项，用小写字母a，b，c，…表示；
- 将表示抽象或泛指的个体词称作个体变项，用小写字母x，y，z，…表示；
- 并称个体变项的取值范围为个体域或论域，以D表示。
- 约定有一个特殊的个体域，它由世间一切事物组成，称之为总论域。

4.1 谓词和个体词

4-1-3 谓词(Predicate)

- 谓词是用来刻划个体词的性质或多个个体词间关系的词，$P(x), Q(x, y)$
- 谓词又可看作是由给定的个体域到集合$\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$上的一个映射。

4-1-4 谓词常项与谓词变项

- 表示具体性质或关系的谓词称作谓词常项;
- 表示抽象或泛指的性质或关系的谓词称作谓词变项。
- 谓词常项与谓词变项都用大写英文字母$P, Q, R, \ldots$表示，可根据上下文区分。**如果没有特殊说明，是谓词变项**。

4.1 谓词和个体词

4-1-5 一元与多元谓词

- 在一个命题中，如果个体词只有一个，这时表示该个体词性质或属性的词便是一元谓词，以 P(x), Q(x), … 表示。
- 如果命题中的个体词多于一个，则表示个体词间关系的词便是多元谓词，以P(x, y)，Q(x, y, z), …等表示。
- 一般地，用P(a)表示个体常项a具有性质P，用P(x)表示个体变项x具有性质P。
- 用P(a, b)表示个体常项a, b具有关系P，用P(x, y)表示个体变项x, y具有关系P。
- 更一般地，用$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$表示含n ($n \geq 1$)个命题变项$x_1, x_2, \ldots, x_n$的n元谓词。

4.1 谓词和个体词

4-1-6 谓词逻辑与命题逻辑

- 有时将不带个体变项的谓词称作零元谓词。当此时的零元谓词又为谓词常项时，零元谓词即化为命题。
- 因此，命题逻辑中的命题均可以表示成零元谓词，或认为一个命题是没有个体变项的零元谓词。

4.2 函数和量词

4-2-1 谓词逻辑中的函数

- 在谓词逻辑中可引入函数，它是某一个体域（不必是实数）到另一个体域的映射。
- 谓词逻辑中的函数一般不单独使用，而是嵌入在谓词中。约定函数符号用小写字母表示。

函数举例

- 如函数 $father(x)$ 表 x 的父亲，若 $P(x)$ 表 x 是教师
- 则 $P(father(x))$ 就表示 x 的父亲是教师。
- 当 x 的取值确定后，$P(father\ (x))$ 的值或为真或为假。
- “张三的父亲和母亲是同学”可描述成 $CLASSMATE(father$(张三)$, mother$(张三)$)$
  - 谓词 $CLASSMATE(x, y)$ 表示 x 和 y 是同学
  - $father(x)$、$mother(x)$ 是函数。

4.2 函数和量词

4-2-2 量词(Quantifier)

- 表示个体数量的词称为**量词**。
- 量词是对个体词所加的限制或约束的词。
- 量词分为**全称量词**和**存在量词**两种。

4.2.2 全称量词(Universal quantifier)

- 思考：下列语句是命题吗?(1)与(3)之间，(2)与(4)之间有什么关系?

(1) $x > 3$

(2) 2x+1是整数;

(3)对所有的 $x \in R, x > 3$;

(4)对任意一个 $x \in Z$，2x+1是整数.

4-2-2 全称量词

- 日常生活和数学中常用的“所有的”，“一切的”，“任意的”，“每一个”，“凡”等词可统称为全称量词；
- 将它们符号化为“$\forall$”，并用$(\forall x)$, $(\forall y)$等表示个体域中所有的个体。
- 用$(\forall x)P(x)$,$(\forall y)Q(y)$等分别表示个体域中所有个体都有性质P和性质Q。

全称量词

全称量词的定义

- 命题$(\forall x)P(x)$当且仅当对论域中的所有x，$P(x)$均为真时方为真。
- 而$(\forall x)P(x) = F$成立，**当且仅当至少**存在一个$x_0 \in D$，使$P(x_0) = F$。
- 注意$((\forall x)P(x)) = F$与 **Not all: 不是所有的x都是女生**

$(\forall x)(P(x) = F)$的区别 **None: 所有的x都不是女生**

$P(x)$表示x是**女生**

4-2-3 存在量词(Existential quantifier)

- 思考：下列语句是命题吗？(1)与(3)，(2)与(4)之间有什么关系？
- (1)$2x+1=3$；
- (2)x能被2 和3 整除；
- (3)存在一个$x_0 \in R$，使$2x_0+1=3$；
- (4)至少有一个$x_0 \in Z$，x_0能被2 和3 整除.

4-2-3 存在量词

- 日常生活和数学中常用的“存在一个”，“有一个”，“有些”，“有的”等词可统称为存在量词，将它们符号化为“∃”；
- 用$(\exists x)$,$(\exists y)$等表示个体域中有的个体；
- 用$(\exists x)P(x)$,$(\exists y)Q(y)$等分别表示在个体域中存在个体具有性质P，存在个体具有性质Q。

全称量词和存在量词的含义归纳

	何时为真	何时为假
$\forall xP(x)$	对个体域中的每个x, $P(x)$都为真	至少存在一个x，使$P(x)$为假
$\exists xP(x)$	个体域中至少有一个x，使$P(x)$为真	对个体域中的每个x, $P(x)$都为假

练习

1.判断下列语句是全称命题还是特称命题：

(1)没有一个实数α，$\tan\alpha$无意义. 全称

(2)存在一条直线其斜率不存在. 特称

(3)所有圆的圆心到其切线的距离都等于半径吗？不是命题

(4)任意圆外切四边形，其对角互补. 全称

(5)有的指数函数不是单调函数. 特称

4-2-4 约束变元与自由变元

- 量词所约束的范围称为量词的辖域。
- 在公式$(\forall x)A$ 和$(\exists x)A$ 中，A为相应量词的辖域。
- 在$(\forall x)$和$(\exists x)$的辖域中，x的所有出现都称为约束出现。
- 所有约束出现的变元称为约束变元。
- A中不是约束出现的其它变元均称为自由变元。

辖域例子

量词的优先级高于逻辑联结词

- $(\forall x)P(x)\vee Q(y)$
- $(\forall x)P(x)\vee Q(x)$
- $(\forall x)(\ P(x,y) \rightarrow Q(x,z)\ )$
- $(\forall x)(\ P(x) \rightarrow Q(y)\ ) \rightarrow (\exists y)(\ H(x) \wedge L(x,y,z)\ )$
- $\forall x\exists y\forall z(A(x,y)\rightarrow B(x,y,z))\wedge C(t)$

∀z的辖域

∃y的辖域

∀x的辖域

说明

对约束变元和自由变元有如下几点说明：

(1) 对约束变元用什么符号表示无关紧要。

(2) 一个谓词公式如果无自由变元，它就表示一个命题。

3) 一个n元谓词$P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，若在前边添加k个量词，使其中的k个个体变元变成约束变元，则此n元谓词就变成了n-k元谓词。

4.3 合式公式

4-3-1 一阶谓词逻辑

- 在所讨论的谓词逻辑中，限定量词仅作用于个体变项，不允许量词作用于命题变项和谓词变项，也不讨论谓词的谓词。

非一阶示例：$\forall p(p \to Q(x))$， $\exists Q(Q(x) \to P(x))$

- 在这样的限定范围内的谓词逻辑称为一阶谓词逻辑。一阶谓词逻辑是相对于高阶谓词逻辑而言的。

4.3 合式公式

4-3-2 一阶谓词逻辑的符号集

- 个体常项：$a, b, c, \ldots$（小写字母）。
- 个体变项：$x, y, z, \ldots$（小写字母）。
- 命题变项：$p, q, r, \ldots$（小写字母）。
- 谓词符号：$P, Q, R, \ldots$（大写字母）。
- 函数符号：$f, g, h, \ldots$（小写字母）。
- 联结词符号 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$。
- 量词符号：$\forall, \exists$。
- 括号与逗号：（ ） ,

4-3-3 合式公式定义

(1) 命题常项、命题变项、和原子谓词公式（不含联结词的谓词公式）是合式公式。

(2) 若A是合式公式，则$(\neg A)$也是合式公式。

(3) 若A,B是合式公式，而无变元x在A,B的一个中是约束的而在另一个中是自由的，则$(A\land B)$, $(A\lor B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式（最外层括号可省略）。

(4) 若A是合式公式，则$(\forall x)A$, $(\exists x)A$也是合式公式

（此处教材限制较严）

(5) 只有有限次地应用(1)-(4)构成的符号串才是合式公式。

谓词逻辑中的合式公式也称为谓词公式，简称公式。

4.4 自然语句的形式化

- 利用计算机进行推理的基础工作。
- 在分析的基础上，将问题分解成一些合适的谓词表示；即先做一些谓词（函数）设定；
- 然后使用量词、联接词将设定的谓词构成合式公式。

符号化：π是无理数

- 解

个体：π（代表圆周率）

谓词：… 是无理数，以F表示

符号化：$F(\pi)$

张三与李四同在软件学院

个体：张三、李四

谓词：…与…同在软件学院，以G表示

符号化： G(张三,李四)

个体：张三

谓词： …与李四同在软件学院，以G'表示

符号化： G'(张三)

个体：李四

谓词：张三与…同在软件学院，以G''表示

符号化： G''(李四)

x和y的和等于z （x，y，z是确定的数）

个体：x、y、z

谓词：…和…的和等于…，以R表示

符号化：$R(x,y,z)$

个体：x、z

谓词：…和y的和等于…，以R'表示

符号化：$R'(x, z)$

个体：x、y、z

函数：…与…的和，以f表示

谓词：…等于…，以R''表示

符号化：$R''(f(x,y),z)$

所有实数的平方都是非负的

个体：每一个实数，以x表示

函数：...的平方，以f表示

谓词：...是非负的，以R表示

“所有”是什么？

量词：所有，以$\forall$表示

符号化：$(\forall x)R(f(x))$

所有实数的平方都是非负的

另解：

个体：每一个数，以z表示

谓词：是一个实数，以R'表示

函数：...的平方，以f表示

谓词：...是非负的，以R表示

量词：所有，以$\forall$表示

符号化：$(\forall z)(\ \mathrm{R}'(z) \rightarrow R(f(z))\ )$

有一个比2^{1000}大的素数

个体：一个素数，以x表示

谓词：...比2^{1000}大，以P_1表示

“有一个”是什么？

量词：有一个，以∃表示

符号化： $(\exists x)\ P_1(x)$

还可以表示为：$(\exists x)\ (\ P_2(x) \land P_1(x)\ )$

x：一个数　　P_2: ...是一个素数

4.4.1 “所有的有理数都是实数”的形式化

分析：所有的有理数都是实数

即对任一事物而言，如果它是有理数，则它是实数。

即对任一x而言，如果x是有理数，那么x是实数。

设$P(x)$：x是有理数，$Q(x)$：x是实数，

这句话的形式描述应为

$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

4. 4. 1 “所有的有理数都是实数”的形式化

- 因为x的论域是一切事物的集合, 所以x是有理数是一个条件。
- 需注意这句话不能形式化为

$$(\forall x)(P(x) \land Q(x))$$

上式的意思是说， 对所有的x， x是有理数而且又是实数.

- “所有的…都是…”，这类语句的形式描述只能使用“→”而不能使用“∧”。

八股原则

4.4.2 “有的实数是有理数”的形式化

- 同前 $P(x)$：x是有理数，$Q(x)$：x是实数

  则这句话的形式描述应为

  $$(\exists x)(Q(x) \land P(x))$$

- 需注意的是不能使用

  $$(\exists x)(Q(x) \rightarrow P(x))$$

4.4.3 “没有无理数是有理数”的形式化

- 该句中有否定词，对任一x而言，如果x是无理数，那么x不是有理数。
- 设$A(x)$:　x是无理数，

  $B(x)$：x是有理数，

这句话的形式描述为

$$\neg(\exists x)(A(x)\wedge B(x))$$

“没有无理数是有理数”的形式化

其它逻辑上等价的描述包括

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow \neg B(x))$$

$$(\forall x)(B(x) \rightarrow \neg A(x))$$

设$A(x)$: x是无理数，

$B(x)$：x是有理数，

4.4.4 命题符号化（1）

- 在个体域分别限制为(a)和(b)条件时，将下面两个命题符号化

(1)凡是人都呼吸

(2)有的人用左手写字

其中: (a) 个体域D_1为人类集合；

(b) 个体域D_2为全总个体域.

4.4.4 命题符号化(1)

解 (a) 令$F(x)$: x呼吸. $G(x)$: x用左手写字

在D_1中除人外，再无别的东西，因而

(1) 符号化为 $(\forall x)\,F(x)$

(2) 符号化为 $(\exists x)\,G(x)$

(1)凡是人都呼吸
(2)有的人用左手写字
其中: (a) 个体域D_1为人类集合；
(b) 个体域D_2为全总个体域.

4. 4. 4 命题符号化（1）

(b) D_2中除有人外，还有万物， 因而在（1)，(2)符号化时，必须考虑将人分离出来。令$M(x)$: x是人在D_2中，

用于表明x的特性

(1)对于宇宙间一切事物而言，如果事物是人，则他要呼吸; (2)在宇宙间存在着用左手写字的人.

(1)，(2)的符号化形式分别为

$(\forall x)\ (M(x)\rightarrow F(x))$ 和 $(\exists x)(M(x)\wedge G(x))$

其中$F(x)$与$G(x)$的含义同(a)中.

(1)凡是人都呼吸

(2)有的人用左手写字

其中: (a) 个体域D_1为人类集合；

(b) 个体域D_2为全总个体域.

令$F(x)$: x呼吸. $G(x)$: x用左手写字

在谓词演算中，命题的符号表达式与论域有关系。

1.每个自然数都是整数。

(1).如果论域是自然数集合N，令 $I(x)$：x是整数，则命题的表达式为 $\forall x I(x)$。

(2).如果论域扩大为全总个体域时，上述表达式 $\forall x I(x)$ 表示“所有客体都是整数”，显然这是假的命题，此表达式已经不能表达原命题了。

因此需要添加谓词 $N(x)$：x是自然数，用于表明x的特性，于是命题的符号表达式为 $\forall x(N(x) \rightarrow I(x))$

2.有些大学生吸烟。

(1).如果论域是大学生集合S，令A(x)：x吸烟，则命题的表达式为 $\exists x A(x)$

(2).如果论域扩大为全总个体域时，上述表达式 $\exists x A(x)$ 表示“有些客体吸烟”，就不是表示此命题了，故需要添加谓词 S(x)：x是大学生，用于表明x的特性，于是命题的表达式为 $\exists x(S(x) \wedge A(x))$

- 从上述两个例子可以看出，命题的符号表达式与论域有关。当论域扩大时，需要添加用来表示客体特性的谓词，称此谓词为特性谓词。特性谓词往往就是给定命题中量词后边的那个名词。如上面两个例子中的“所有*自然数*”、“有些*大学生*”。
- 特性谓词的添加方法如下：
  – 如果前边是全称量词，特性谓词后边是蕴含联结词“→”；如果前边是存在量词，特性谓词后边是合取联结词“∧”。 **八股原则**

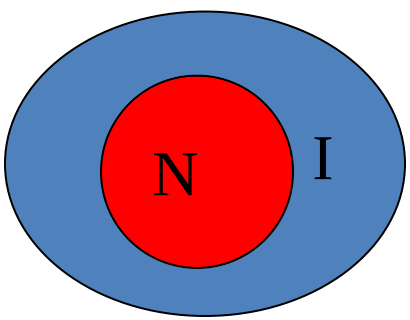
如何添加特性谓词，与前边的量词有关。

- 为什么必须这样添加特性谓词？

1. 每个自然数都是整数。
2. 有些大学生吸烟。

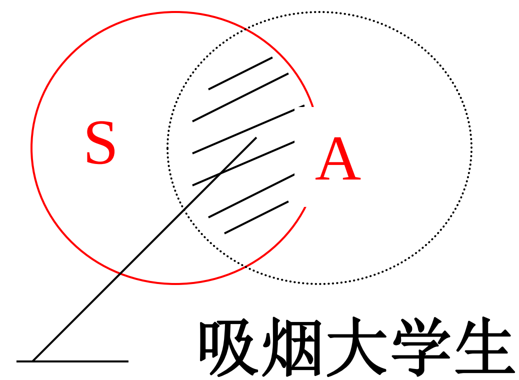
令N：自然数集合，I：整数集合，

S：大学生集合，A：烟民的集合。



I包含N

$\forall x(N(x)\rightarrow I(x))$



吸烟大学生是S与A的交集

$\exists x(S(x)\wedge A(x))$

4.4.4 命题符号化（2）

1）对于任意的x，均有x^2-3x+2=(x-1)(x-2)

2）存在x，使得x+5=3

其中： (a) 个体域D_1=**N**　　(b) D_2=**R**

解

(a) 令 $F(x)$: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, $G(x)$: $x+5=3$ 则有

命题1)为　$(\forall x)\ F(x)$，命题2)为 $(\exists x)\ G(x)$

在D_1内，命题1）为真，命题2）为假

(b) 在D_2内，符号化形式相同。命题1）为真，命题2）为真

说明

从4. 4. 4的几个例子可以看出

- 在不同个体域内，同一个命题的符号化形式可能不同，也可能相同.
- 同一个命题，在不同个体域中的真值也可能不同.

命题符号化，并讨论真值

（1）每个人都长着黑头发。

解： 由于本题未指明个体域，因而应用总论域，并令 $H(x)$: x是人。

令**B(x): x长着黑头发**。则命题（1）符号化为

$$(\forall x)\ (H(x) \rightarrow B(x))$$

设a为某金发姑娘，则$H(a)$为真，而$B(a)$为假，所以$H(a) \rightarrow B(a)$为假，故上式所表示的命题为假。

命题符号化，并讨论真值

(2) 有的人登上过月球。

解： 令$H(x)$: x是人，$M(x)$: x登上过月球。

有的人登上 过月球 符号化为

$$(\exists x)\ (H(x) \land M(x))$$

设a是1969年完成阿波罗登月计划的美国人，则 $H(a) \land M(a)$为真，所以上式命题为真。

命题符号化，并讨论真值

(3)没有人登上过木星

解：令$H(x)$: x是人, $J(x)$: x登上过木星。

没有人登上过木星符号化为

$$\neg(\exists x)\ (H(x) \land J(x))$$

到目前为止，还没有任何人登上过木星，所以对任何人a，$H(a) \land J(a)$均为假，因而$(\exists x)\ (H(x) \land J(x))$为假，故上式命题为真。

命题符号化，并讨论真值

(4)在校学习的大学生不都住在学校

解：令$S(x)$: x是大学生，$L(x)$: x住在学校。

在校学习的大学生未必都住在学校

符号化为

$$\neg(\forall x)\ (S(x) \rightarrow L(x))$$

容易讨论，(4)中命题为真。

$$(\exists x)\ (S(x) \wedge \neg L(x))$$

n（$n \geq 2$）元谓词的符号化

例　将下列命题符号化：

（1）兔子比乌龟跑得快。

（2）有的兔子比所有的乌龟跑得快。

（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。

（4）不存在跑得同样快的两只兔子。

（1）兔子比乌龟跑得快。

（2）有的兔子比所有的乌龟跑得快。

（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。

（4）不存在跑得同样快的两只兔子。

解　本题未指明个体域。故默认为总论域。

出现二元谓词，故引入两个个体变项x与y

令 R(x): x是兔子;　T(y): y是乌龟;

F(x, y): x比y跑得快;

S(x, y): x与y跑得同样快

这4个命题分别符号化为

（1）兔子比乌龟跑得快。

$$(\forall x)(\forall y)(R(x) \wedge T(y) \rightarrow F(x, y))$$

（2）有的兔子比所有的乌龟跑得快。

$$(\exists x)(R(x) \wedge (\forall y)(T(y) \rightarrow F(x, y)))$$

R(x): x是兔子;　T(y): y是乌龟;

F(x, y): x比y跑得快;

S(x, y): x与y跑得同样快

（1）兔子比乌龟跑得快。

$(\forall x)(\forall y)(R(x) \wedge T(y) \rightarrow F(x, y))$

（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑得快

$\neg(\forall x)(\forall y)(R(x) \wedge T(y) \rightarrow F(x, y))$

（4）不存在跑得同样快的两只兔子

$\neg(\exists x)(\exists y)(R(x) \wedge R(y) \wedge S(x, y))$ X

$\neg(\exists x)(\exists y)(R(x) \wedge R(y) \wedge \neg \mathrm{E}(x, y) \wedge S(x, y))$

$\mathrm{E}(x, y)$：x, y是相同的

R(x): x是兔子;　T(y): y是乌龟;

F(x, y): x比y跑得快;

S(x, y): x与y跑得同样快

有些语句的形式化可能有多种形式

“并不是所有的兔子都比乌龟跑的快。”

令$R(x)$：x是兔子，$T(y)$：y是乌龟，$F(x, y)$：x比y跑得快

这句话可形式化为

$$\neg(\forall x)(\forall y)(R(x)\wedge T(y) \rightarrow F(x, y))$$

也可以形式化为 $(\exists x)(\exists y)(R(x)\wedge T(y)\wedge\neg F(x, y))$

若令$E(x, y)$：x与y跑得同样快, 则符号化为

$$(\exists x)(\exists y)(R(x)\wedge T(y)\wedge E(x, y))$$

问： 和原句是否等价？

例：不管白猫黑猫，抓到老鼠就是好猫

设C(x)：x是猫　　B(x)：x是黑的

W(x)：x是白的　G(x)：x是好的

M(y)：y是老鼠

K(x,y)：x抓住y

命题的表达式为:

$$\forall x\,(\ C(x)\wedge(W(x)\,\bar{\vee}\,B(x)) \rightarrow (\ \exists y(M(y)\wedge K(x,y))\rightarrow G(x)\ )\ )$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$$

4.4.5 自然数集的形式描述

论域是自然数集，将下列语句形式化：

1. 对每个数， 有且仅有一个相继后元。
2. 没有这样的数， 0是其相继后元。
3. 对除0而外的数，有且仅有一个相继前元。

* 可将这三句话作为建立自然数集合的公理。

引入谓词：$E(x, y)$ 表示 $x = y$,

函数 $f(x)$ 表示个体 x 的相继后元， $f(x) = x+1$。

函数 $g(x)$ 表示个体 x 的相继前元，$g(x) = x-1$。

4.4.5 自然数集的形式描述（续）

- 语句1需注意“唯一性”的描述，常用的办法是如果存在两个则它们必相等。
- 即若对每个x都存在y，y是x的相继后元，而且对任一z，如果z也是x的相继后元，那么y和z必相等。

于是对语句1的描述为

$$(\forall x)(\exists y)(\ E(y, f(x)) \land (\forall z)(\ E(z, f(x)) \rightarrow E(y, z)\ )\ )$$

语句1. 对每个数，有且仅有一个相继后元。

引入谓词：$E(x, y)$表示 $x = y$，

函数 $f(x)$ 表示个体 x 的相继后元， $f(x) = x+1$

函数 $g(x)$ 表示个体 x 的相继前元，$g(x) = x-1$

关于“唯一性”的一般描述

“唯一性”的一般描述：

常用的办法是：

先表示存在一个，同时如果还能找到另一个的话，则它们一定相等。

一般描述可表述为：

$(\exists x)(\ P(x) \land (\forall y)(P(y) \rightarrow E(x, y))\ )$

其中 $E(x, y)$表示 $x = y$。

4.4.5　自然数集的形式描述（续）

语句 2. 没有这样的数，0是其相继后元。

描述比较简单，即，

不存在这样的x，它的相继后元等于0。可写成

$$\neg(\exists x)E(0, f(x)) \quad \text{或}$$

$$(\forall x)\neg E(0, f(x))$$

引入谓词：$E(x, y)$表示 $x = y$,

函数 $f(x)$ 表示个体 x 的相继后元， $f(x) = x+1$

函数 $g(x)$ 表示个体 x 的相继前元，$g(x) = x-1$

4.4.5 自然数集的形式描述（续）

语句3. 对除 0 而外的数, 有且仅有一个相继前元。

需注意的是对“除 0 而外”的描述，可理解为如果 $x \neq 0$，则...的形式。

于是语句3可描述为

$$(\forall x)\ (\neg E(x, 0) \rightarrow (\exists y)(E(y, g(x)) \wedge$$

$$(\forall z)(E(z, g(x)) \rightarrow E(y, z))))$$

除$\neg E(x, 0)$外，与语句1的结构完全相同

$(\forall x)(\exists y)(\ E(y, f(x)) \wedge (\forall z)(\ E(z, f(x)) \rightarrow E(y, z)\ )\ )$

函数 $f(x)$ 表示个体 x 的相继后元，$f(x) = x+1$

函数 $g(x)$ 表示个体 x 的相继前元，$g(x) = x-1$

4.4.6 “至少有一偶数是素数”与“至少有一偶数并且至少有一素数”的形式化

需注意两者的区别

记 $A(x)$ 表示x是偶数，$B(x)$ 表示x是素数，则两句话可分别形式描述为

$(\exists x)(A(x)\wedge B(x))$ 与

$(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$

这两个逻辑公式并不等值。

4.4.6 （续）

同样，“一切事物它或是生物或是非生物”

与“或者一切事物都是生物，或者一切事物都是非生物”

的形式化也是不同的，可分别形式描述为：

$$(\forall x)(A(x) \lor \neg A(x)) \qquad 1$$

$$(\forall x)A(x) \lor (\forall x) \neg A(x) \qquad 0$$

这两个逻辑公式也不等值。

4.4.6 （续）

“一切素数都是奇数”与

“若一切事物都是素数，那么一切事物都是奇数”

分别形式化为：

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \qquad 0$$

与 $(\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x) \quad 1$

两者显然也不等值。

4.4.9 “函数$f(x)$在$[a, b]$上的点x_0处连续” 的形式描述

“函数$f(x)$在$[a, b]$上的点x_0处连续” 的形式描述（可考虑加一些函数设定）

$$(\forall\varepsilon)(\varepsilon>0\rightarrow(\exists\delta)(\delta>0\wedge(\forall x)$$

$$(|x-x_0|<\delta\rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)))$$

P(x, ε): x的绝对值小于ε

$$(\forall\varepsilon)(\varepsilon>0\rightarrow(\exists\delta)(\delta>0\wedge(\forall x)$$

$$(P(x-x_0, \delta)\rightarrow P(f(x)-f(x_0), \varepsilon))))$$

4.4.10 对谓词变元多次量化的分析

(1) $(\forall x)(\forall y)P(x,y) = (\forall x)((\forall y)P(x,y))$

(2) $(\forall x)(\exists y)P(x,y) = (\forall x)((\exists y)P(x,y))$

(3) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) = (\exists x)((\forall y)P(x,y))$

(4) $(\exists x)(\exists y)P(x,y) = (\exists x)((\exists y)P(x,y))$

4.5 有限域下公式的表示法

4-5-1 有限域下全称量词和存在量词的表示

将论域限定为有限集，不失一般性，用 $\{1,2, \ldots,k\}$来表示，这时全称量词和存在量词可化为如下公式：

$$(\forall x)P(x) = P(1) \land P(2) \land \ldots \land P(k)$$

$$(\exists x)P(x) = P(1) \lor P(2) \lor \ldots \lor P(k)$$

这种情况下可以说，**全称量词是合取词的推广；**

存在量词是析取词的推广。

4.5 有限域下公式的表示法

- 在有限域下，可将$(\forall x)P(x)$化成由合取词来描述的命题公式。
- 在有限域下，可将$(\exists y)P(y)$化成由析取词来描述的命题公式。
- 但是**在无限域下，谓词逻辑的公式不能转换为命题逻辑的公式。**

- 严格地说，在无穷集$\{1, 2, \ldots, k, \ldots\}$上

  $P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k) \wedge \ldots$

  $P(1) \vee P(2) \vee \ldots \vee P(k) \vee \ldots$

  都是没有定义的, 不是合式公式。

- 一般而言，谓词逻辑的公式不能转换为命题逻辑的公式。

4.5.2 在{1, 2}域上多次量化公式(4-1)

$(\forall x)(\forall y)\,P(x, y)$

$= (\forall y)\,P(1, y) \wedge (\forall y)P(2, y)$

$= (P(1, 1) \wedge P(1, 2)) \wedge (P(2, 1) \wedge P(2, 2))$

$(\exists x)(\forall y)\,P(x, y)$

$= (\forall y)P(1, y) \vee (\forall y)P(2, y)$

$= (P(1, 1) \wedge P(1, 2)) \vee (P(2, 1) \wedge P(2, 2))$

4.5.2 在{1, 2}域上多次量化公式(4-2)

$$(\forall y)(\exists x)P(x, y)$$

$$= (\exists x)P(x, 1) \land (\exists x)P(x, 2)$$

$$= (P(1, 1) \lor P(2, 1)) \land (P(1, 2) \lor P(2, 2))$$

$$(\exists x)(\exists y)P(x, y)$$

$$= (\exists y)P(1, y) \lor (\exists y)P(2, y)$$

$$= (P(1, 1) \lor P(1, 2)) \lor (P(2, 1) \lor P(2, 2))$$

设置

$(\forall y)(\exists x)P(x, y)$和$(\exists x)(\forall y)P(x, y)$的关系

A $(\exists x)(\forall y)\ P(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\ P(x, y)$

B $(\exists x)(\forall y)\ P(x, y) = (\forall y)(\exists x)\ P(x, y)$

C $(\forall y)(\exists x)\ P(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)\ P(x, y)$

D 不知道

提交

4.5.2　在域{1, 2}上多次量化公式(4-3)

- 将$(\forall y)(\exists x)P(x,\ y)$写成析取范式可明显看出它与$(\exists x)(\forall y)P(x, y)$　的差别：

$$(\forall y)(\exists x)P(x,\ y)$$

$$= (P(1, 1)\wedge P(1, 2))\vee(P(2, 1)\wedge P(2, 2))\vee$$

$$(P(1, 1)\wedge P(2, 2))\vee(P(2, 1)\wedge P(1, 2))$$

$$= (\exists x)(\forall y)P(x, y)\vee$$

$$(P(1, 1)\wedge P(2, 2))\vee(P(2, 1)\wedge P(1, 2))$$

$$(\exists x)(\forall y)P(x, y)$$

$$= (\forall y)P(1, y)\vee(\forall y)P(2, y)$$

$$= (P(1, 1)\wedge P(1, 2))\vee(P(2, 1)\wedge P(2, 2))$$

4.5.2 在域{1, 2}上多次量化公式(4-4)

- 从而有

  $(\exists x)(\forall y)\ P(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\ P(x, y)$

- 当对有的谓词公式难于理解时, 可在有限域{1, 2}上转换成命题逻辑公式做些分析, 常会帮助理解。

$(\forall y)(\exists x)P(x, y)$

$= (\exists x)(\forall y)P(x, y) \vee (P(1, 1) \wedge P(2, 2)) \vee (P(2, 1) \wedge P(1, 2))$

- $P(x, y)$表示x和y是好朋友

  $(\exists x)(\forall y)\ P(x, y)$ 存在万人迷

  $(\forall y)(\exists x)\ P(x, y)$ 所有人都有朋友

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

4-6-1 普遍有效公式

设A为一个谓词公式，若A在任何解释下真值均为真，则称A为普遍有效的公式。

例：　$(\forall x)(P(x) \vee \neg P(x))$

$$(\forall x)P(x) \rightarrow P(y) \quad (y\text{是}x\text{个体域中的一个元素})$$

$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) = (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \vee (P(1) \wedge Q(2)) \vee (Q(1) \wedge P(2))$$

4. 6 公式的普遍有效性和判定问题

4-6-2 不可满足公式

设A为一个谓词公式，若A在任何解释下真值均为假，则称A为不可满足的公式。

例: $(\exists x)(P(x)\land\neg P(x))$

$(\forall x)P(x) \land (\exists y)\neg P(y)$

解释一下什么叫“任何解释？”

给定的个体域D：自由个体变项a，谓词变项P，函数f

解释

- 给定非空个体域D，一个解释I由下面部分构成
  - 给每个自由个体变项符号指定一个D中的元素
  - 给每个谓词变项符号指定一个D上的谓词
  - 给每个函数符号指定一个D上的函数
- 例如，在个体域N上，有公式$(\forall x)F(g(x,a),x)$
- 给定解释I
  - 自由个体变项：$a=0$
  - 函数$g(x,a)=x*a$
  - 谓词$F(x,y)$为$x=y$
- 在解释I下，公式被解释为$(\forall x)(x*0=x)$，它是一个假命题

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

4-6-3 可满足公式

设A为一个谓词公式，若至少存在一个解释使A为真，则称A为可满足的公式

- 普遍有效的公式一定是可满足的公式
- $(\exists x)P(x)$ 在任一非空的个体域中可满足

公式的可满足性和普遍有效性依赖于个体域中个体的个数

- $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)\neg P(x)$

  在D1上不可满足，但在D2上可满足

- $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)\neg P(x)$

  在D1上普遍有效，但在D2上则不一定。

D1 = {a}; D2= {a,b}

令P(a) =1, P(b)=0

总结：谓词逻辑的基本概念

- 4.1 谓词*和个体词
- 4.2 函数和量词*
- 4.3 合式公式
- 4.4 自然语句的形式化*
- 4.5 有限域下公式的表示法
- 4.6 公式的普遍有效性

谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn