第十五周答疑

（周二班第十五周作业见上周答疑）

1. $P_2(\mathbb{R})=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_i\in\mathbb{R}\}$ $(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$

定义 $\varphi_1: P_2(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}$, $\varphi_2: P_2(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}$

$\quad f(x)\longmapsto f(0)$ $\qquad f(x)\longmapsto f'(0)$

由Riesz表示定理，$P_2(\mathbb{R})^*=\{(-,g(x))\mid g(x)\in P_2(\mathbb{R})\}$

$\varphi_i\in P_2(\mathbb{R})^*$, $\varphi_i=(-,g_i(x))$ $\quad i=1,2$

求 $g_1(x)$, $g_2(x)$.

两种方法：

方法1. 取 $P_2(\mathbb{R})$ 的一组标准正交基 $\vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\vec{e}_2=\sqrt{\frac{3}{2}}x$,

$\vec{e}_3=\sqrt{\frac{45}{8}}(x^2-\frac{1}{3})$

$$\Rightarrow g_i(x)=\varphi_i(e_1)\vec{e}_1+\varphi_i(e_2)\vec{e}_2+\varphi_i(e_3)\vec{e}_3\ ,\quad i=1,2$$

$$g_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+0\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}x+\sqrt{\frac{45}{8}}\cdot(-\frac{1}{3})\cdot\sqrt{\frac{45}{8}}(x^2-\frac{1}{3})$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{15}{8}(x^2-\frac{1}{3})=-\frac{15}{8}x^2+\frac{9}{8}$$

$$g_2(x)=0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}x+0\cdot\sqrt{\frac{45}{8}}(x^2-\frac{1}{3})=\frac{3}{2}x$$

方法2. 设 $g_1(x)=ax^2+bx+c$

$\varphi_1 = (- , g_1(x))$

$1 = \varphi_1(1) = (1, g_1(x)) = \int_{-1}^{1} (ax^2+bx+c)dx = \left(\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx\right)\Big|_{-1}^{1}$

$= \frac{2}{3}a + 2c$

$0 = \varphi_1(x) = (x, g_1(x)) = \int_{-1}^{1} (ax^3+bx^2+cx)dx = \cdots$

同理，求 $g_2(x)$.

注：$v_1=1, v_2=x, v_3=x^2$ 是 $P_2(\mathbb{R})$ 的一组基

$\downarrow$ 对偶基

v_1^*, v_2^*, v_3^*

$v_1^*(\underbrace{a_0+a_1x+a_2x^2}_{f(x)=}) = a_0 v_1^*(1) + a_1 v_1^*(x) + a_2 v_1^*(x^2)$

$= a_0 = f(0)$

$v_2^*(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1 v_2^*(x) = a_1 = f'(0)$

---

2. $P_2(\mathbb{R})$ 如上. $\quad P_k(x) = \prod_{j\neq k}(x-b_j) \Big/ \prod_{j\neq k}(b_k-b_j) \in P_2(\mathbb{R})$

(1) $P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ 是 $P_2(\mathbb{R})$ 的一组基

证明：设 $\underline{c_1P_1(x)+c_2P_2(x)+c_3P_3(x)=0}$

令 $x=b_1$ 上式 $= c_1\cdot 1 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

同理 $c_2=c_3=0$

(2) 求 $P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ 的对偶基

设 $P_1^*(x), P_2^*(x), P_3^*(x) \in P_2(\mathbb{R})^*$ 是它们的对偶基

$\forall f(x) \in P_2(\mathbb{R})$，则 $f(x) = \underline{c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + c_3 P_3(x)}$

令 $x = b_1$，$f(b_1) = c_1 P_1(b_1) = c_1$

同理 $f(b_2) = c_2$，$f(b_3) = c_3$

$$P_1^*(x)[f(x)] = \underline{P_1^*(x)}[c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + c_3 P_3(x)]$$

$$= c_1 P_1^*(x)[P_1(x)] = c_1 = f(b_1)$$

同理，$P_2^*(x)[f(x)] = f(b_2)$，$P_3^*(x)[f(x)] = f(b_3)$

(3) 证明：给定 y_1, y_2, y_3，满足 $f(b_i) = y_i \quad i = 1, 2, 3$

的多项式 $f(x) \in P_2(\mathbb{R})$ 是唯一的.

证明：$P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ 是一组基. 由(2)讨论，

$\forall f(x) \in P_2(\mathbb{R})$.

$$f(x) = f(b_1) P_1(x) + f(b_2) P_2(x) + f(b_3) P_3(x)$$

$$f(b_i) = y_i \quad i = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow f(x) = y_1 P_1(x) + y_2 P_2(x) + y_3 P_3(x)$$

$\Rightarrow f(x)$ 唯一！

注：一般地，

$P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$

给定 $b_1, \cdots, b_{n+1} \in \mathbb{R}$ 互不相同

令 $P_1(x) = \dfrac{(x-b_2)\cdots(x-b_{n+1})}{(b_1-b_2)\cdots(b_1-b_{n+1})}$

$\vdots$

$P_i(x) = \dfrac{\prod\limits_{k\neq i}(x-b_k)}{\prod\limits_{k\neq i}(b_i-b_k)}$

$\vdots$

$P_{n+1}(x)$

则 $P_1(x), \cdots, P_{n+1}(x)$ 是 $P_n(\mathbb{R})$ 的一组基.

$\forall f(x) \in P_n(\mathbb{R})$, $\underline{f(x) = f(b_1)P_1(x) + \cdots + f(b_{n+1})P_{n+1}(x)}$

3. 设 g, h 是 V 上非退化双线性型，$v_1, \cdots, v_n \in V$ 一组基，g, h 在这组基下表示矩阵是 A, B

证明：$\exists\, \varphi: V \to V$, $\underline{g(\varphi(x), y)} = h(x, y)$.

分析：若 φ 存在，设 $(\varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_n)) = (v_1, \cdots, v_n)C$

则 $g(\varphi(x), y)$ 是 V 上双线性型，在 $v_1, \cdots, v_n$ 下矩阵是 $D = (d_{ij})$

$$d_{ij} = g(\varphi(v_i), v_j) = \underline{g}(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_{ki}\vec{v}_k}, \vec{v}_j)$$

$$= (c_{1i} \cdots c_{ni}) A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第}j\text{分量} = \underset{\substack{\uparrow \\ C\text{的第}i\text{列}}}{c_i^T} A e_j$$

$$\Rightarrow D\text{的第}j\text{列} = \begin{pmatrix} c_1^T A e_j \\ \vdots \\ c_n^T A e_j \end{pmatrix} = (C^T A) e_j$$

$$\Rightarrow D = C^T A$$

若 $g(\varphi(x), y) = h(x, y)$，则 $C^T A = B$

由 A, B 可逆．$\Rightarrow C = (BA^{-1})^T = (A^T)^{-1} B^T$

证明：令 $\varphi: V \longrightarrow V$ 满足

$$(\varphi(\vec{v}_1), \cdots, \varphi(\vec{v}_n)) = (\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n) \underline{(A^{-1})^T B^T}$$

$\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ 设 $\vec{\alpha} = x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n$ 令 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\vec{\beta} = y_1\vec{v}_1 + \cdots + y_n\vec{v}_n$ $\quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$g(\varphi(\vec{\alpha}), \vec{\beta}) = [\underbrace{\varphi(\vec{\alpha})}]^T A [\vec{\beta}]$$

$$= ((A^{-1})^T B^T \vec{x})^T A y$$

$[\vec{\beta}]$：β在基 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n$ 下坐标

$= x^T B A^{-1} A y$

$= x^T B y = h(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

4. $\mathbb{R}^4$ 上定义 $g(x,y) = x^T A y$, $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$(\mathbb{R}^4, g)$ Minkowski 空间

$\vec{\alpha}$ 光向量 $\Leftrightarrow$ $g(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) = 0$, $\vec{\alpha} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^4$

$\vec{\alpha}$ 空间向量 $\Leftrightarrow$ $g(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) > 0$, $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$

$\vec{\alpha}$ 时间向量 $\Leftrightarrow$ $g(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) < 0$, $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$

证明: 一个时间向量不能正交于光向量.

证明: 设 $\vec{u} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$ 是光向量. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 时间向量

则 $g(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow u^T A u = 0 \Leftrightarrow c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = c_4^2$

$g(\vec{x}, \vec{x}) < 0 \Leftrightarrow x^T A x < 0 \Leftrightarrow \underline{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < x_4^2}$

$g(\vec{x}, \vec{u}) = x^T A u = \underline{x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3} - \underline{x_4 c_4}$

由 Cauchy ~ Schwarz 不等式

$$|x_1c_1+x_2c_2+x_3c_3| \le \sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(c_1^2+c_2^2+c_3^2)}$$

$$< \sqrt{x_4^2c_4^2} = |x_4c_4|$$

$\Rightarrow g(\vec{x}, \vec{u}) \neq 0.$

注：同样证法可得两时间向量不正交.

对偶线性变换

设 $\varphi: V \longrightarrow V$ 线性变换，则

$$\varphi^*: V^* \longrightarrow V^*, \qquad \varphi^*(f) = f \circ \varphi$$

若 V 是一个欧氏空间，此时，$V^* = \{(-, \vec{u}) \mid \vec{u} \in V\}$

此时，$\forall f \in V^*$, $\quad f = (-, \vec{u})$

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi = \underline{(-, \vec{u}) \circ \varphi} \in V^*$$

$$\exists \vec{v} \in V, \quad (-, \vec{u}) \circ \varphi = (-, \vec{v})$$

实际上：令 $C_\varphi: V \to V$ 是 φ 的伴随，则

$\vec{v} = C_\varphi(\vec{u})$. 从而

有 $\underline{\varphi^*[(-, \vec{u})] = (-, C_\varphi(\vec{u}))}$

证明：$\forall \vec{\alpha} \in V$

$$\underline{\varphi^*[(-, \vec{u})]}(\vec{\alpha}) = (-, \vec{u})[\varphi(\vec{\alpha})]$$

$$= (\varphi(\vec{\alpha}), \vec{u})$$

$$= (\vec{\alpha}, C_\varphi(\vec{u}))$$

$$= \underline{(-, C_\varphi(\vec{u}))}(\vec{\alpha})$$