离散数学II

—图的着色

周旻
清华大学软件学院
软件工程与系统研究所

2024年6月7日
Friday

图的着色

- 点着色、色数与色数多项式
- 边着色
- 平面图的面着色

图的着色

图着色问题(**Coloring of Graph**)的研究起源于四色猜想。

四色问题是图论中最著名、最难的问题之一。

四色猜想：在平面上的任何一张地图总可以用至多四种颜色给每一个国家染色，使得任何相邻国家（公共边界上至少有一段连续曲线）的颜色是不同的。

- **1852**年**Guthrie**兄弟在通信中提出
- **1872**年**Cayley**在伦敦数学会上宣布了这个问题
- **Kempe**和**Tait**分别在**1879**和**1880**声称证明了这个问题
- **Heawood**和**Petersen**分别在**1890**和**1891**指出他们证明有误
- **1976**年**Appel**和**Haken**借助计算机用了**1200**多个小时证明了四色猜想成立。至今仍没有不借助计算机的数学证明。

图的着色

图着色问题(**Coloring of Graph**)的研究起源于四色猜想

着色问题包含

- 点着色
- 边着色
- 平面图的面着色

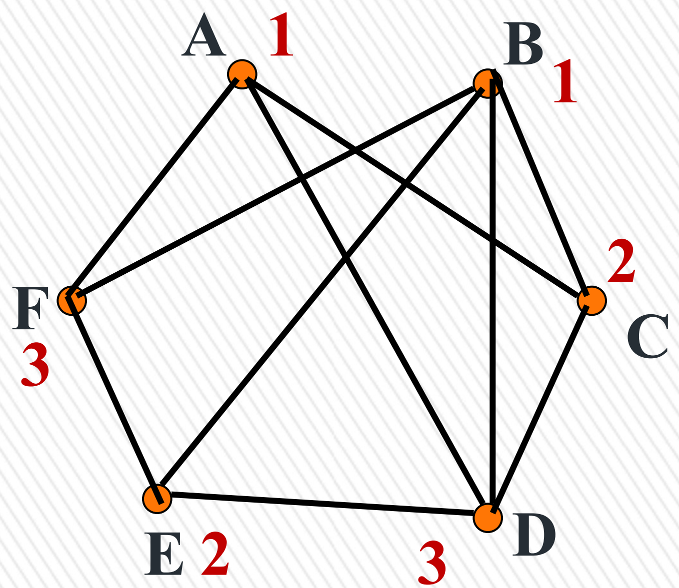
注意：很多问题可转化为着色问题，
虽然表面上和着色没有关系

点着色
色数和色数多项式

图的着色

(1) 定义

例：6种货物要存放在仓库里，其中一些货不能放在同一个仓库里。它们之间关系如图所示，其中$e=(i,j)$表示i和j不能放在同一个库房。那么至少要多少个库房才能存放呢？



顶点的着色

(1) 定义

定义4.5.1 给定图G，满足相邻结点着以不同颜色的最少颜色数目称为G的色数，记为$\gamma(G)$;

若能用k种颜色给G的顶点着色，则称对G进行了k着色，也称G是k-可着色的。

- G是k-可着色的，相当于把G的顶点分成k个独立集的一个分类$(V_1, V_2, \ldots, V_k)$
- G是k-色的 $\Leftrightarrow$ G的简单图是k-色的

顶点的着色

(2) 特例图的色数

一些熟悉的图的色数比较容易确定：

1. $\gamma(G) = 1$，当且仅当G是零图。
2. $\gamma(K_n) = n$。
3. $G = K_n - e$，$\gamma(G) = n - 1$
4. G是$2n$个结点的回路，$\gamma(G) = 2$
5. G是$2n+1$个结点的回路，$\gamma(G) = 3$
6. 奇阶轮图的色数均为3，而偶阶轮图的色数为4。
7. 设G中至少含一条边，则$\gamma(G)=2$，当且仅当G为二分图。
8. G是$n(n\geq 2)$个结点的树，$\gamma(G) = 2$

顶点的着色

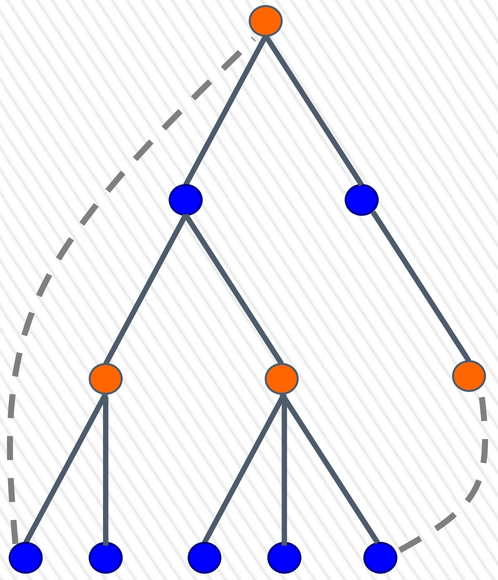
(2) 特例图的色数

定理4.5.1 一个非空图G，$\gamma(G) = 2$当且仅当它没有奇回路。

证明：充分性(构造法)

在G中确定一个林T'，其每个连通子图都是树T，$\gamma(T) = 2$

由于每个回路都是偶回路，所以加入每一条余树边都是连接某个奇数层结点和某个偶数层结点的，都不会使结点着色发生变化，因此$\gamma(G) = 2$



必要性(反证法)

如果G中有奇回路，则$\gamma(G) \geq 3$，矛盾

推论：二分图中的回路都是偶回路

顶点的着色

(2) 特例图的色数

例： 平面连通图G的域可2着色当且仅当G中存在欧拉回路

证明

G存在对偶图G^*，原命题变为：

G^*点2着色当且仅当连通图G有欧拉回路。

必要性

由定理4.5.1(即$\gamma(G)=2$当且仅当它没有奇回路)，因为G^*可点2着色，G^*无奇回路，即每个回路都是偶回路

G^*的域的每个边界数都是偶数

由于$(G^*)^*=G$，G^*的每个域f_i内都有G的一个结点v_i

由D过程知，$d(v_i)$是偶数

故G有欧拉回路

顶点的着色

(2) 特例图的色数

要证：G^*点2着色当且仅当连通图G有欧拉回路

充分性

G有欧拉回路

即G中每个结点的度都是偶数

因此G^*中包围每个结点v_i的回路都是偶回路

由于任意两个偶回路的对称差依然是偶回路

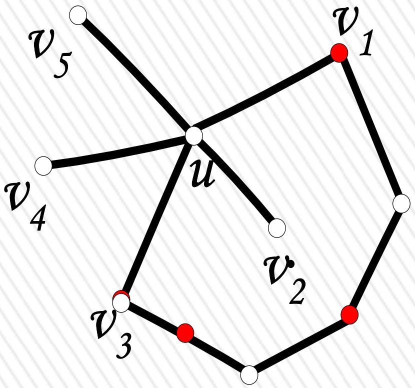
所以G^*中没有奇回路，$\gamma(G^*) = 2$

顶点的着色

图中结点的
最大度数

(3) 点着色的色数上界

定理4.5.2 对于任意不含自环的图G，有$\gamma(G) \leq \Delta(G) + 1$



证：对G的阶数n进行归纳。

1) 当$n = 1$时，结论显然为真。

2) 当$n = k(k \geq 1)$时，结论成立。

3) 当$n = k + 1$时

设：v为G中一个顶点，令$G' = G - v$，则G'的阶数为k。

由归纳假设可知： $\gamma(G') \leq \Delta(G') + 1 \leq \Delta(G) + 1$。

当将G'还原成G时，由于v至多与G'中$\Delta(G)$个顶点相邻，而在G'的点着色中，$\Delta(G)$个顶点至多用了$\Delta(G)$种颜色。

所以在$\Delta(G)+1$种颜色中至少存在一种颜色给v涂色，使v与相邻顶点涂不同颜色。

顶点的着色

(3) 点着色的色数上界

色数的Brooks定理

当图G既不是完全图也不是奇圈时，定理4.5.2给出的色数的上界可以改进。

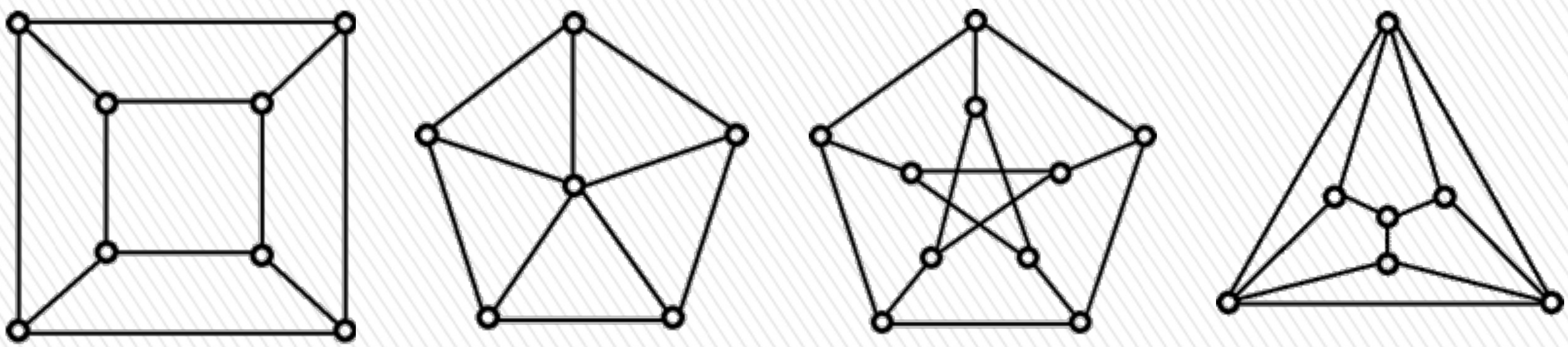
定理4.5.3 设连通图G不是完全图$K_n(n \geq 3)$，也不是奇圈，则：$\gamma(G) \leq \Delta(G)$。

本定理称为布鲁克斯(Brooks)定理，证明从略。

填空题 4分

设置

图(a)的点色数是[填空1]；
图(b)的点色数是[填空2]；
图(c)的点色数是[填空3]；
图(d)的点色数是[填空4]；



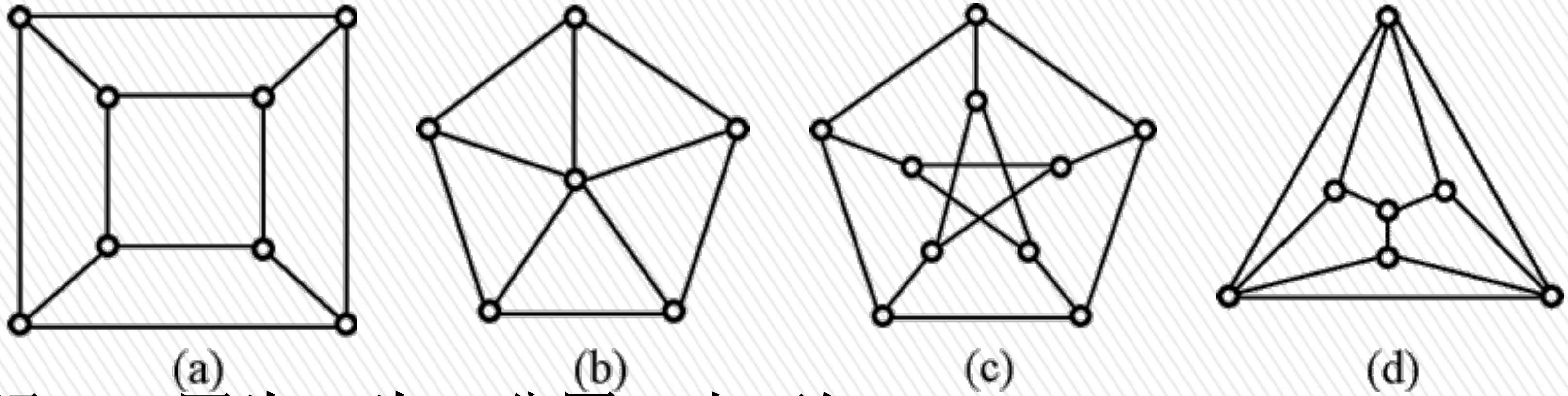
(a) (b) (c) (d)

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

顶点的着色

例：求下列各图的色数。



解：a) 因为G_1为二分图，由可知: $\gamma(G_1) = 2$

b) G_2为6阶轮图W_6, 可知: $\gamma(G_2) = 4$;

c) 由于$\Delta(G_3) = 3$，利用布鲁克斯定理可知：$\gamma(G_3) \le 3$；又因为G_3中有奇圈，知：$\gamma(G_3) \ge 3$，因此，$\gamma(G_3) = 3$。

d) 由布鲁克斯定理可知：$\gamma(G_4) \le \Delta(G_4) = 4$;

又因为G_4中有奇圈，于是$\gamma(G_4) \ge 3$，因此$\gamma(G_4)$为3或4。

发现用3种颜色不可能给G_4着色，所以$\gamma(G_4) = 4$。

顶点的着色

对*G*着色方法：(韦尔奇.鲍威尔法 **Welch.Powell**)

(1) 将图中所有点按度数大小递减排列。

(2) 使用第一种颜色，对编号最小的点涂色；然后接着使用第一种颜色，对与该点不相邻的点中，编号最小的点涂色；然后接着使用第一种颜色，对与已经涂了这种颜色的点不相邻的点中编号最小的点进行涂色…直到没有点可以使用第一种颜色了为止。

(3) 用第二种颜色对尚未着色的点重复步骤2。

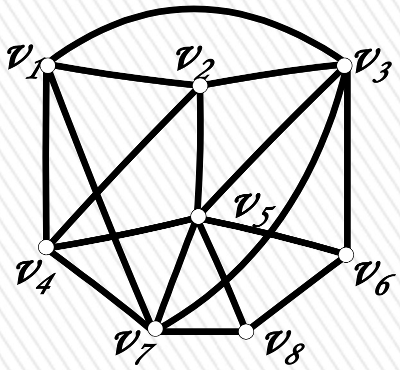
(4) 用第三种颜色继续这种做法，直到所有的点全部着上色为止。

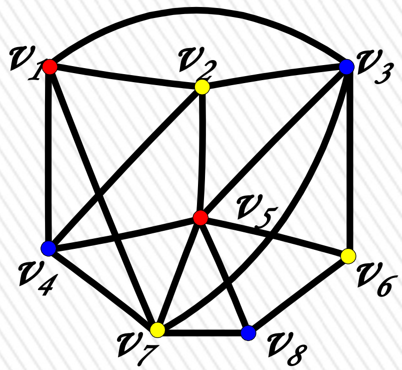
求解最小色数是NP-hard问题，这里是近似解法，无法保证所得色数为最小。

Welsh，D.J.A. and Powell，M.B. (1967) An Upper Bound for the Chromatic Number of a Graph and Its Application to Timetabling Problems. 《The Computer Journal》，10，85-86.

顶点的着色

例：用**Welch Powell**法对下图着色.





解：a) 根据度数递减次序排列各点

v_5， v_3， v_7， v_1， v_2， v_4， v_6， v_8

b) 对v_5点和与它不相邻的v_1点着第一种颜色

c) 第二种颜色对v_3着色，并对不相邻点v_4，v_8也着第二种颜色

d) 对点v_7和与它不相邻的点v_2，v_6着第三种颜色

主观题 10分

设置

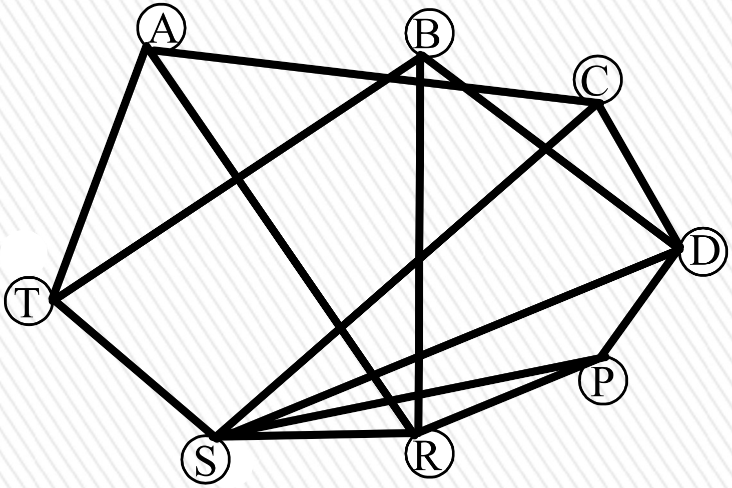
例：有8种化学药品A, B, C, D, P, R, S, T要放进储藏室保管，出于安全原因，下列各组药品不能储藏在同一室内：A-R, A-C, A-T, R-P, P-S, S-T, T-B, B-D, D-C, R-S, R-B, P-D, S-C, S-D, 问储藏这8种药品至少需要多少房间？请用图论中所学算法和定理分析求解并写出相应算法及针对该题的执行过程，只给出最后答案即使正确也不给分。

作答

顶点的着色

例：有8种化学药品A, B, C, D, P, R, S, T要放进储藏室保管，出于安全原因，下列各组药品不能储藏在同一室内：A-R, A-C, A-T, R-P, P-S, S-T, T-B, B-D, D-C, R-S, R-B, P-D, S-C, S-D，问储藏这8种药品至少需要多少房间？请用图论中所学算法和定理分析求解并写出相应算法及针对该题的执行过程，只给出最后答案即使正确也不给分。

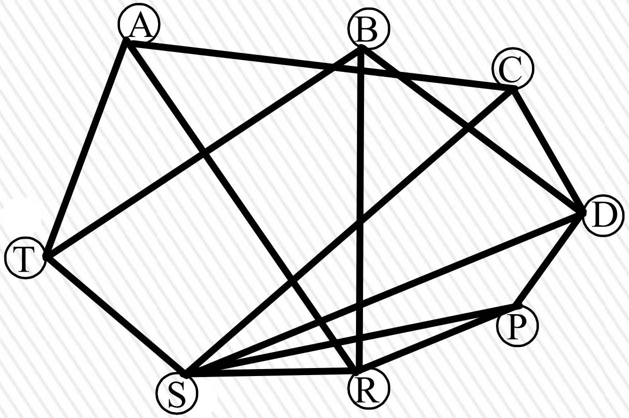
解：将每种化学药品抽象成一个顶点，不能储藏在同一室内的两顶点用边相连，构成一个图。该问题可以转换成顶点着色问题。



顶点的着色

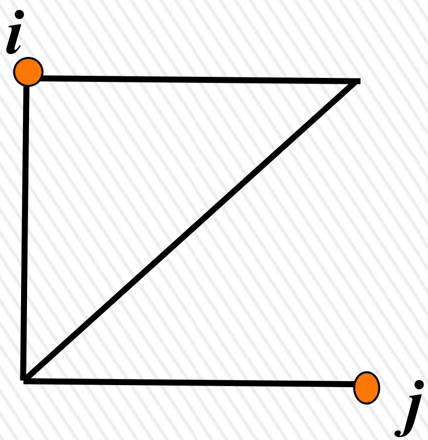
算法步骤：
(1) 将图中所有点按度数大小递减排列。
(2) 用第一种颜色对第一个点着色，并且按排列顺序对与前面着色点不相邻的每个点着上同样的颜色。
(3) 用第二种颜色对尚未着色的点重复步骤。
(4) 用第三种颜色继续这种做法，直到所有的点全部着上色为止。

解题步骤：
(1) 将图中所有点按度数大小递减排列，为S、D、R、A、B、C、P、T。
(2) 对S及不与之相邻点A、B着C_1色。
(3) 对R及不与之相邻点D、T着C_2色。
(4) 对P和C着C_3色。
故3种颜色可满足要求；
又因S、D、P为K_3子图，故着色数至少为3。
所以，储藏这8种药品至少需要3个房间

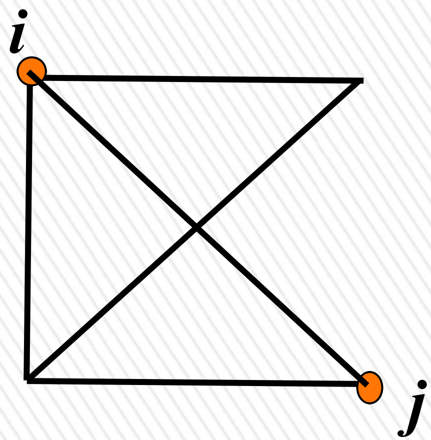


色数的确定

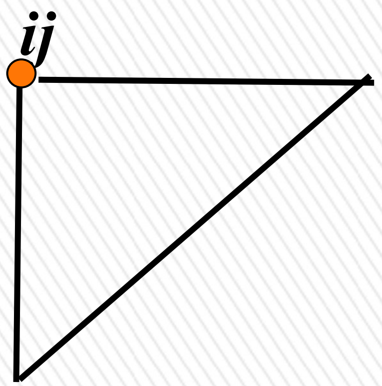
定义4.5.3 设i, j为简单图G不相邻的两个结点，我们将$\bar{G}_{ij} = G + e_{ij}$，$\mathring{G}_{ij}$为将边$e_{ij}$收缩后的结果。



G



$\bar{G}_{ij}$



$\mathring{G}_{ij}$

色数的确定

定理4.5.4 设i, j为简单图G不相邻的两个结点，则

$$\gamma(G)=\min\{\gamma(\bar{G}_{ij}),\ \gamma(\mathring{G}_{ij})\}$$

证：对G中结点的任何着色，i和j或者将着以同色，或者异色，二者必为其一。

设i，j着以异色情况下的G的最少色数为γ (G(i，j，异色)),

i，j着以同色情况下的最少着色数为γ (G(i，j，同色)),

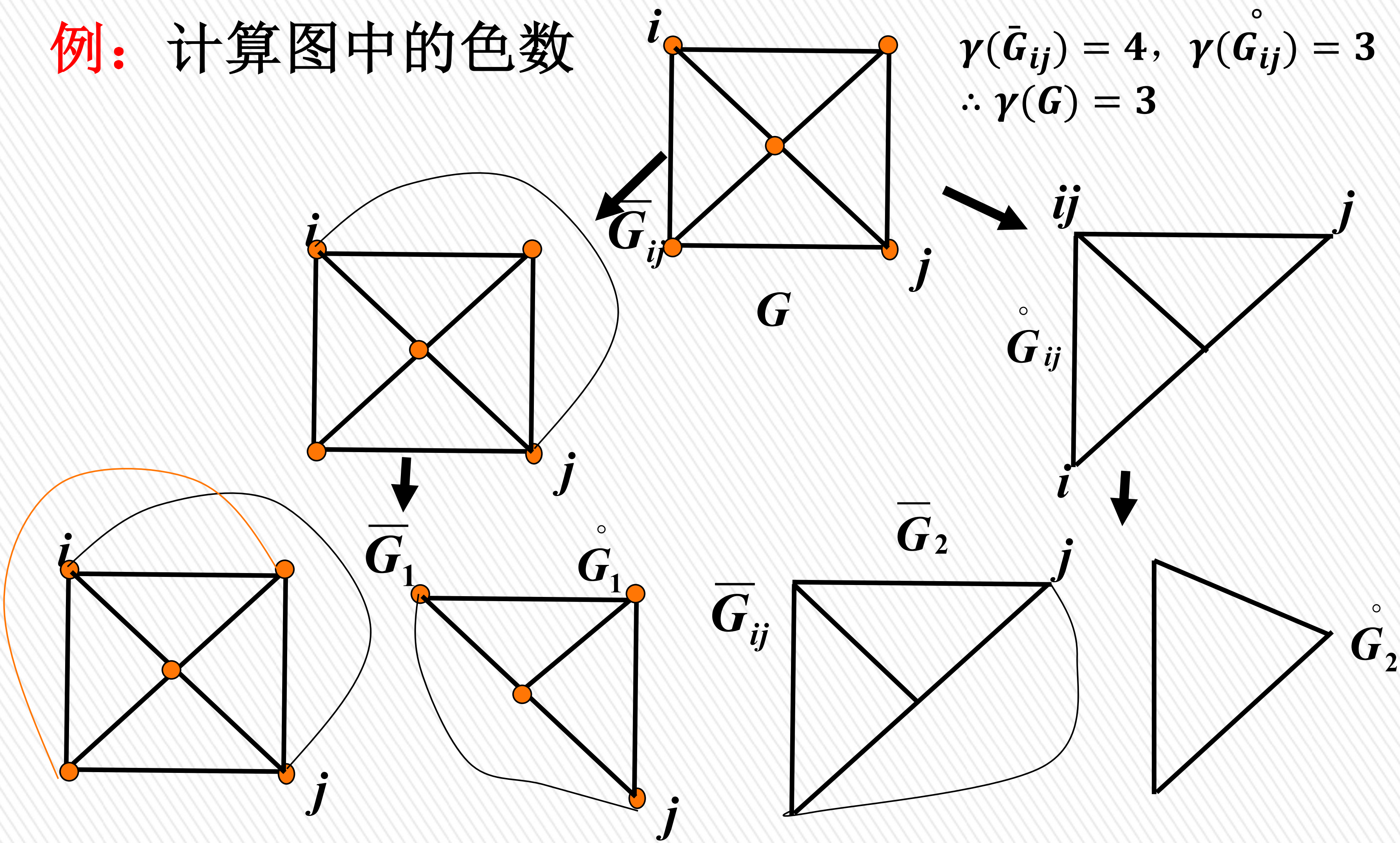
则$\gamma(G)=\min\{\gamma(\bar{G}_{ij}),\ \gamma(\mathring{G}_{ij})\}$

色数的确定

例：计算图中的色数

$\gamma(\bar{G}_{ij}) = 4$，$\gamma(\mathring{G}_{ij}) = 3$

$\therefore \gamma(G) = 3$



色数多项式

给定一个图G，如果最多使用t种颜色着色，需满足相邻结点着以不同颜色，所具有的方案数，可由色数多项式来得到。

$f(G，t)$：不同的结点着色方案数目

如果$t < \gamma(G)$，$f(G, t) = 0$

令m_i是i种颜色对G的结点着色的方案数，用t种颜对G着色，恰好用上了i种颜色的全部方案数是$m_i C(t, i)$

m_i只在$\gamma(G) \le i \le \min\{n, t\}$时才不为0

$$f(G, t) = m_1 C(t, 1) + m_2 C(t, 2) + \cdots + m_n C(t, n)$$

$$= m_1 t + \frac{1}{2!} m_2 t(t-1) + \cdots + \frac{1}{n!} m_n t(t-1)\cdots(t-n+1)$$

色数的确定

定理4.5.5 $f(K_n, t) = t(t-1)\ldots(t-n+1)$

如果$t < n$，$f(K_n, t) = 0$

如果$t = n$，$f(K_n, t) = n!$

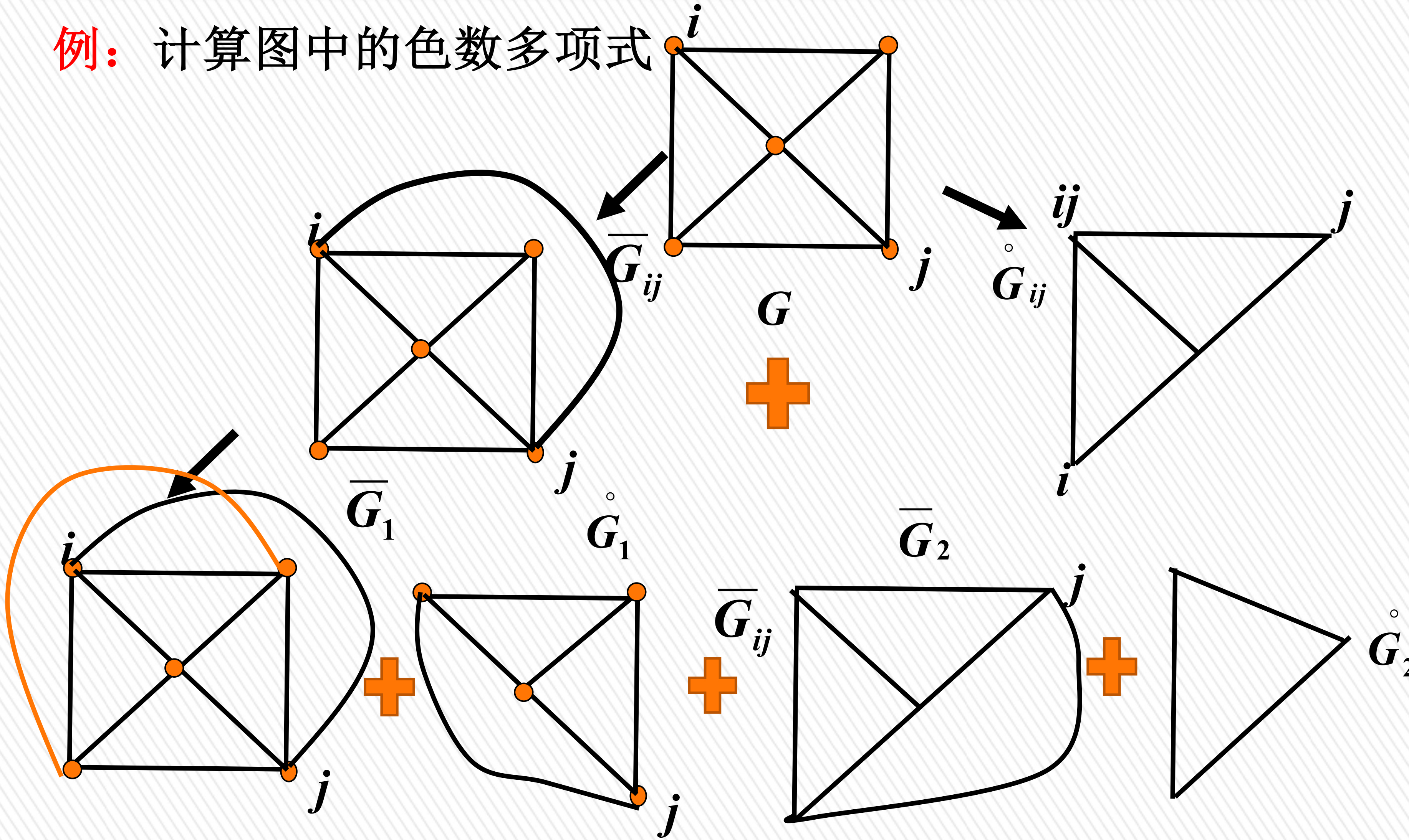
定理4.5.6 $f(T_n, t) = t(t-1)^{n-1}$

定理4.5.7 设i, j是G的不相邻结点，则

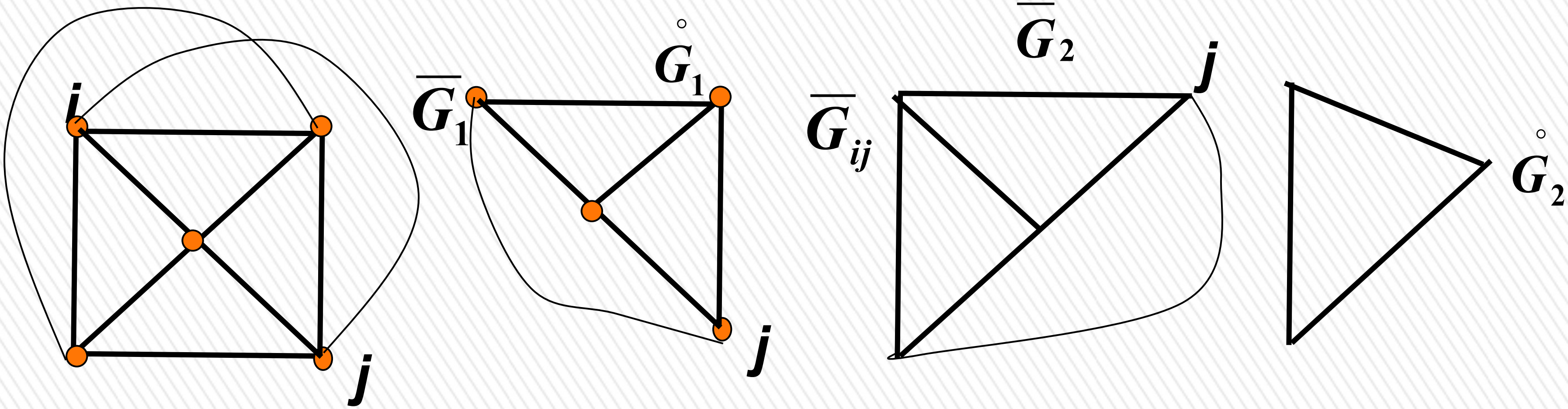
$$f(G,\ t) = f(\bar{G}_{ij},\ t) + f(\mathring{G}_{ij},\ t)$$

色数多项式

例： 计算图中的色数多项式



色数多项式



$$
\begin{aligned}
f(G,\ t) &= f(K_5,\ t) + 2f(K_4,\ t) + f(K_3,\ t) \\
&= t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4) + 2t(t-1)(t-2)(t-3) \\
&\quad + t(t-1)(t-2) \\
&= t(t-1)(t-2)(t^2-5t+7)
\end{aligned}
$$

如果至多采用3种颜色，则着色方案有6种。

边着色

（了解基本概念和主要结论即可）

边的着色

定义4.6.2 对图G的每条边涂上一种颜色，使相邻的边涂不同的颜色，称为对图G边的一种着色；

若能用k种颜色给G的边着色，则称G是k-边可着色的；

若G是k-边可着色的，不是$(k - 1)$-边可着色的，就称k是G的边色数，记作$\gamma'(G) = k$。

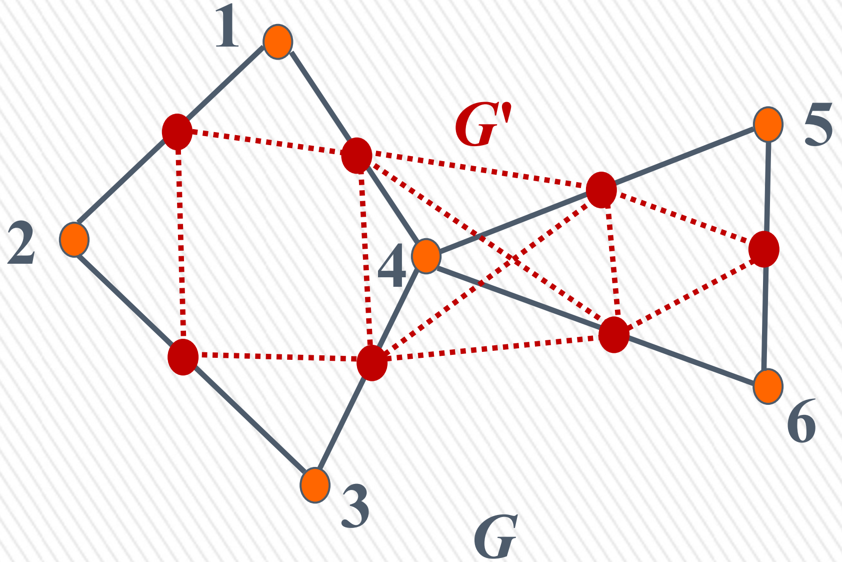
边的着色

边着色问题可以转化为点着色问题解决

- 在G的每条边e_{i}上设置一个结点v_i'
- 如果e_i与e_j关联于同一结点v_k，则G'中有边(v_i', v_j')
- G的边着色问题等价于虚线边所示G'的结点着色问题

$\gamma(G) = 3$

$\gamma'(G) = 4$



边的着色

定理4.6.4 设G是简单图，则$\Delta(G) \le \gamma'(G) \le \Delta(G) + 1$。

本定理称为维津(Vizing)定理，证明从略。

维津定理说明：对简单图来说，其边色数γ‘只能取两个值：Δ/Δ+1。但哪些图的γ'是Δ，还是Δ+1？至今仍是没有解决的问题。

例如：

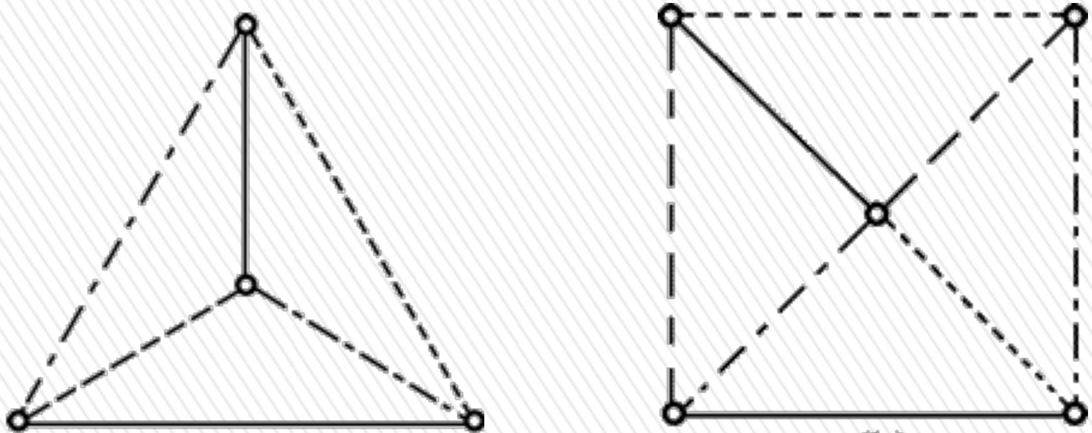
设G为长度大于等于2的偶圈，则$\gamma'(G) = \Delta(G) = 2$；

设G为长度大于等于3的奇圈，则$\gamma'(G) = \Delta(G) + 1 = 3$。

边的着色

例： $\gamma'(W_4) = \Delta(W_4) = 3$， $\gamma'(W_5) = \Delta(W_5) = 4$。

由维津定理、下图(a)和(b)可知：结论是正确的。



(a) (b)

边的着色

定理4.6.5 $\gamma'(W_n) = \Delta(W_n) = n - 1$，其中$n \geq 4$。

证：当$n = 4/5$时，上例给出了证明。

要证当$n \geq 6$时，$\Delta(W_n) = n - 1$。

W_n中间顶点关联的n-1条边必须用n-1种颜色着色，而外圈C_{n-1}上的任何边都与其余4条边相邻。

而这时$n - 1 \geq 5$，因此总可以从n-1种色中找到一种颜色为它涂色。

所以，$\gamma'(W_n) \leq n - 1$。

由维津定理可知：$\gamma'(W_n) \geq n - 1$。

所以，$\gamma'(W_n) = n - 1$。

边的着色

定理4.6.6 当$n(n \neq 1)$为奇数时，$\gamma'(K_n) = n$；

当n为偶数时，$\gamma'(K_n) = n - 1$。

证明：当n为奇数且$n \neq 1$时，由维津定理可知：

$$\gamma'(K_n) \leq \Delta + 1 = n$$

下面证明：$\gamma'(K_n) \geq n$。

构造K_n：画正n边形C_n，C_n上不相邻的顶点之间连线段，在K_n中共有n组平行边，每组$(n-1)/2$条边，而$(n-1)/2$条平行边已经关联了$n-1$个顶点，于是，在K_n的边着色中至多有$(n-1)/2$条同色边，因此，$(n-1)\gamma'(K_n)/2 \geq (n-1)n/2$，所以，$\gamma'(K_n) \geq n$。

边的着色

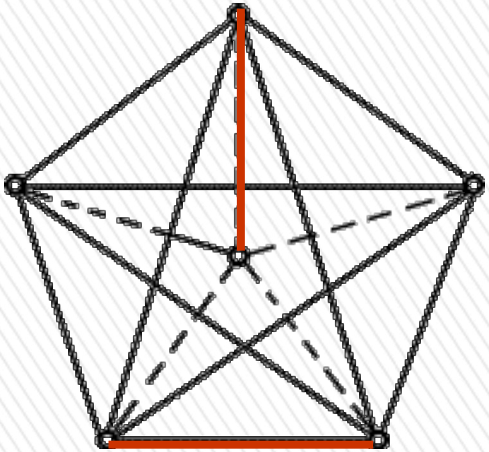
当n为偶数时，由维津定理已知:

$$n - 1 = \Delta \le \gamma'(K_n)。$$

下面证明：$\gamma'(K_n) \le n - 1$。

构造K_n：画K_{n-1}($n - 1$为奇数)，在K_{n-1}的内部放置一个顶点，使其与K_{n-1}上的所有顶点相邻，就得到了K_n($n = 6$时，如右图所示)。

用$\gamma'(K_{n-1}) = n - 1$种颜色先给K_{n-1}的边着色，然后将K_n中相互垂直的边涂上相同颜色，就完成了K_n边的n-1着色。



所以，$\gamma'(K_n) \le \gamma'(K_{n-1}) = n - 1$。

平面图的面着色

面的着色

定义4.6.3 对图G的每个面涂上一种颜色，使相邻的面涂不同的颜色，称为对图G面的一种着色；

若能用k种颜色给G的面着色，则称G是k-面可着色的；

若G是k-面可着色的，不是$(k-1)$-面可着色的，就称k是G的面色数，记作$\gamma''(G) = k$。

由对偶变换，每个平面图中

k顶点可着色的 $\Leftrightarrow$ k面可着色的

图的着色

图着色问题(**Coloring of Graph**)的研究起源于四色猜想。

四色问题是图论中最著名、最难的问题之一。

四色猜想：在平面上的任何一张地图总可以用至多四种颜色给每一个国家染色，使得任何相邻国家（公共边界上至少有一段连续曲线）的颜色是不同的。

1852年Guthrie兄弟在通信中提出

1872年Cayley在伦敦数学会上宣布了这个问题

Kempe和Tait分别在1879和1880声称证明了这个问题

Heawood和Petersen分别在1890和1891指出他们证明有误

1976年借助计算机用了1200多个小时证明了四色猜想成立。至今仍没有不借助计算机的数学证明。

面的着色

五色定理：每一个平面图都是5－面可着色的。

证：作G的对偶图G^*，命题转为证G^*的结点5-可着色

G^*也是可平面的

由于自环和重边不影响点染色，所以可以移去G^*中的自环、重边，得到简单图G_0

命题又转化为任意简单平面图G_0可以结点5着色

对$|V| = n$归纳。 $n = 1, 2, 3, 4, 5$时定理显然成立。

假设$n = k$时成立，

则当$n = k + 1$时，

$\because G_0$是平面图 $\therefore \delta \leq 5$，即存在u，使$d(u) \leq 5$

平面图

定理4.2.2 设G是简单平面图，则G的最小度$\delta \leq 5$。

证：假设：G是n阶简单平面图。

- 当$n \leq 6$时，结论显然成立。
- 当$n \geq 7$时，假设：$\delta \geq 6$。

由握手定理可知：$2m = \Sigma_{i=1\ldots n} d(v_i) \geq 6n$。

因此$m \geq 3n$。这与推论4.2.1“$m \leq 3n - 6$”相矛盾。

所以，G的最小度$\delta \leq 5$。

定理4.2.2在图着色理论中占有重要地位。

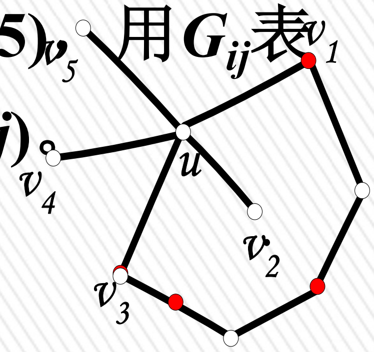
面的着色

五色定理：每一个平面图都是5—面可着色的。

证（续）：由归纳假设$G-\{u\}$是5顶点可着色的。

设$(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5)$是$G-\{u\}$的一个5顶点可着色图，若$d(u)<5$ 或者与u邻接的结点没有用完5种颜色，则与u邻接的点数≤ 4。显然可对u着色，而得到G的一个5顶点可着色。

若$d(u)=5$，且邻接结点恰好用完5种颜色，设与u邻接的点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5，且不妨设$v_i \in V_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$，用$G_{ij}$表示由$V_i \cup V_j$导出的子图，即$G_{ij} = G[V_i \cup V_j] (i \neq j)$。



面的着色

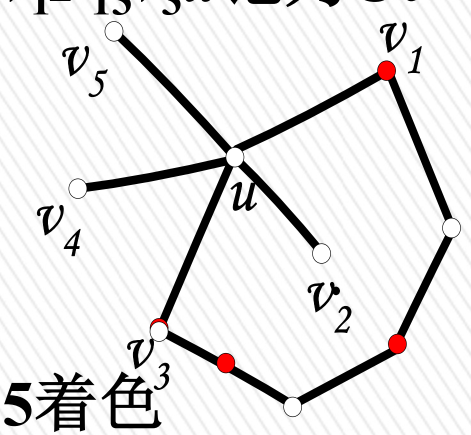
五色定理：每一个平面图都是5－面可着色的。

证（续）：

① 若$\exists v_i, v_j$，使v_i与v_j属于G_{ij}的两个不同的连通分支，则在v_i所在分支中交换颜色i和j，得到G-u的一个新的5着色，其中只有四种颜色分配给u的邻点(无颜色i)，此时只需给u着以颜色i即可。

② 对$\forall i \neq j$，v_i, v_j属于G_{ij}的同一个连通分支，设P_{ij}是G_{ij}中的v_i—v_j路，不失一般性，设$i = 1, j = 3$，并将圈$uv_1P_{13}v_3u$记为C。

$\because$ C分隔v_2和v_4(即$v_2 \in int$C，$v_4 \in ext$C)。



封闭回路把v_2和v_4, v_5分割在不同的连通支，

v_2和v_4之间不可能有通路，否则与平面图矛盾

将v_2所在连通支各结点的c_2, c_4颜色对换，

此时v_2着以c_4，于是可令u着以c_2从而使G_0可以5着色

面的着色

定理4.5.4 若任何一个3-正则平面图的域可4着色，则任意平面图的域也可以4着色

证明：

3-正则平面图是指每个结点的度都是3的平面图

(1) 任何一个平面图G，如果存在度为1的结点v，则它一定处于某个域的内部，移去v并不影响这个域的染色

(2) 如果存在度为2的结点v_i，删去v_i及其关联的(v_i, v_j), (v_i, v_k)，同时增加一条边(v_j, v_k)，也不会影响域的染色

面的着色

定理4.5.4 若任何一个3-正则平面图的域可4着色，则任意平面图的域也可以4着色

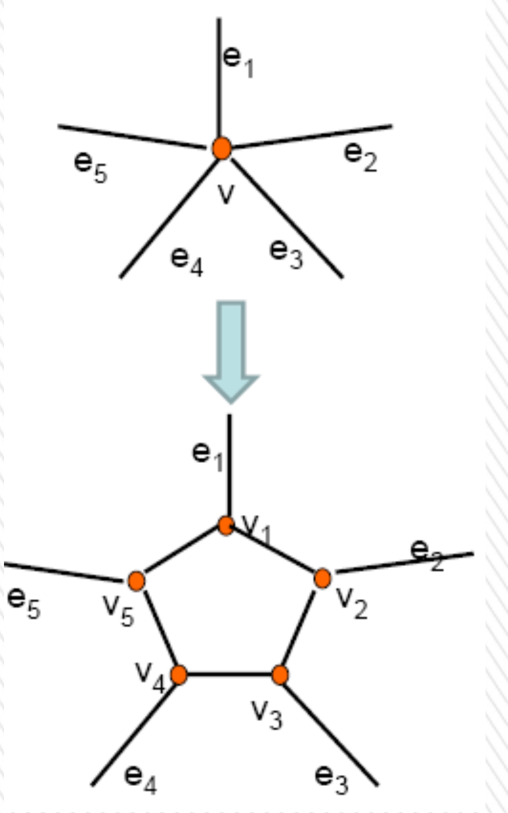
证明（续）：

如果存在结点v，满足$d(v) \geq 4$。它关联于边$e_1, e_2, \ldots, e_k$，设这些边依次环绕于v，

我们对应每一条e_i构造一个新结点v_i，然后移去v并加入新的边$(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_k, v_1)$

新加入的每一个结点的度为3

即图G转化为3-正则平面图G'



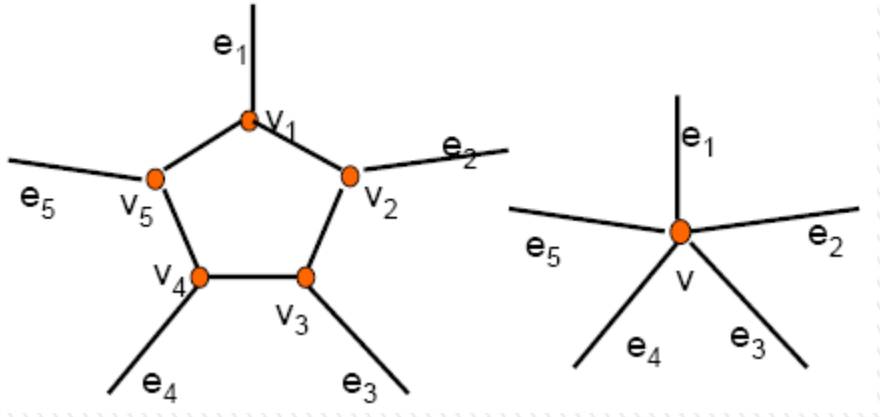
面的着色

定理4.5.4 若任何一个3-正则平面图的域可4着色，则任意平面图的域也可以4着色

证明（续）：

原图G转化为3-正则平面图G'

由已知条件G'的域可以四着色，再把由$v_1, v_2, \ldots, v_k$作为边界点的域收缩，最后还原成一个结点v，那么G'的域染色仍然适用。



面的着色

定理4.5.3 如果平面图有Hamilton回路，则四色猜想成立

证明：

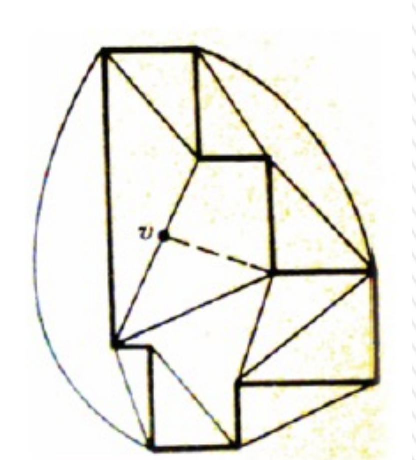
设C为G的Hamilton回路，则C将G的面分成圈内面与圈外面。

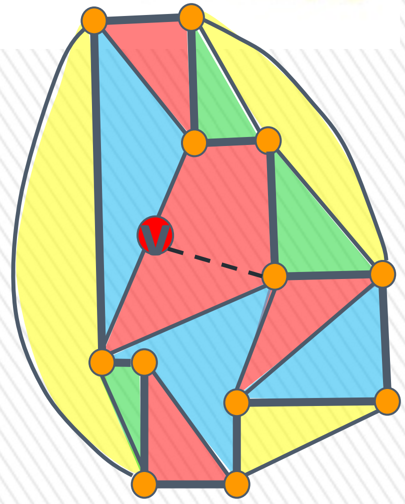
$\because$ *C*包含了*G*的所有顶点

$\therefore$ 任何三个面都不会互相邻接

不然，必出现右图v这样的结点。这与H是哈密顿回路相悖

$\therefore$ *C*内和外的面各用2种颜色可着色





无限域染绿色

面的着色

Tait猜想： 任何一个3-正则平面图都有哈密顿回路
。

如果Tait猜想可以证明，则四色定理也就证明了。
遗憾的是Tait猜想已经被证明不成立。

本章小结

- 平面图
- 极大平面图
- 图的平面性检测
- 对偶图
- 点着色、色数与色数多项式
- 边着色
- 平面图的面着色