

第 6 次计算题作业 - 答案

- 1、如果宇宙每立方米中有 3 亿个中微子, 而且中微子只能解释宇宙 5% 的质量 (包括暗物质) 密度, 那么一个中微子的质量是多少? (23-35)

$$n_{\text{中微子}} = 3 \times 10^8 / \text{m}^3, \quad \rho_{\text{中微子}} = n_{\text{中微子}} m_{\text{中微子}} = 0.05 \rho_{\text{宇宙}}, \quad \rho_{\text{宇宙}} \approx 3 \times 10^{-28} \text{ kg/m}^3$$

$$m_{\text{中微子}} = \frac{0.05 \rho_{\text{宇宙}}}{n_{\text{中微子}}} \approx \frac{0.05 \times 3 \times 10^{-28} \text{ kg/m}^3}{3 \times 10^8 / \text{m}^3} = 5.0 \times 10^{-38} \text{ kg}$$

- 2、请比较红移 $z = 0.5, z = 4$ 和 $z = 8$ 的星系。光从这些不同红移的星系发出时宇宙的年龄和尺度因子分别是多少? 如果在波长 500nm 拍摄到了这些不同红移星系的图像, 那么这些 500nm 的光子从这些星系发出时的波长是多少? (23-44)

观测红移对应的发出光时的宇宙年龄参见课件“21st Century Astronomy”中的表 23.1 (见右图)。

$$R_u = \frac{1}{1+z}, \quad z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{rest}}}{\lambda_{\text{rest}}} \Rightarrow \lambda_{\text{rest}} = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{1+z} = \frac{500 \text{ nm}}{1+z}$$

$$t_1 = 86 \text{ 亿年}, \quad R_{u,1} = 0.6667, \quad \lambda_{\text{rest},1} = 333.33 \text{ nm}$$

$$t_2 = 16 \text{ 亿年}, \quad R_{u,2} = 0.2000, \quad \lambda_{\text{rest},2} = 100.00 \text{ nm}$$

$$t_3 = 6.5 \text{ 亿年}, \quad R_{u,3} = 0.1111, \quad \lambda_{\text{rest},3} = 55.556 \text{ nm}$$

TABLE 23.1 Redshift and Age

Observed z	Age of Universe (years)
1,100	380,000 (recombination)
30	100 million
20	200 million
15	270 million
10	480 million
9	560 million
8	650 million
7	750 million
6	900 million
5	1.2 billion
4	1.6 billion
3	2.2 billion
2	3.3 billion
1	5.9 billion
0.5	8.6 billion
0.25	10.5 billion
0	13.8 billion

- 3、假设一个矮星系在环绕着某个星系团中心的一个巨型椭圆星系转动。这个矮星系距星系团中心 4 Mpc, 转动速率 800 km/s, 请估计这个星系团的引力质量。(23-45)

$$R = 4 \text{ Mpc} = 1.234 \times 10^{23} \text{ m}, \quad v = 800 \text{ km/s}$$

$$M_g = \frac{Rv^2}{G} = 1.183 \times 10^{45} \text{ kg}$$

- 4、若宇宙中只含氢原子, 那宇宙临界密度要求每立方米内平均有多少个氢原子? (22-38)

$$\rho_c = 9.5 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3, \quad m_H = 1.6735 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$n_H = \frac{\rho_c}{m_H} = 5.6766 / \text{m}^3$$

- 5、目前宇宙的平均密度为 $\rho_0 = 3 \times 10^{-28} \text{ kg/m}^3$ 。假设平均密度和宇宙尺度因子的依赖关系为 $\rho = \rho_0 / R_U^3$ 。当宇宙平均密度等于地球表面密度 $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ 时, 宇宙的尺度因子是多少? (22-39)

$$R_U = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3} = \left(\frac{3 \times 10^{-28} \text{ kg/m}^3}{1.2 \text{ kg/m}^3} \right)^{1/3} = 6.3 \times 10^{-10}$$

- 6、宇宙中每一个氢原子对应 5 亿个 CMB 光子。利用爱因斯坦质能方程, 计算这些宇宙 CMB 光子的等效质量。这些质量与宇宙平均密度的比值是多少? (22-41)

$$E_H = m_{\text{Total CMB}} c^2 = (5 \times 10^8) \frac{hc}{\lambda_{\text{CMB}}}, \quad \lambda_{\text{CMB}} = \frac{b}{T} = \frac{0.29 \text{ cmK}}{2.726 \text{ K}} = 1.063 \text{ mm}$$

$$m_{\text{Total CMB}} = (5 \times 10^8) \frac{h}{\lambda_{\text{CMB}} c} = 1.039 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

$$m_{\text{Total CMB}} / \rho_{\text{宇宙}} = 3.463 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$