

一个单值解析映射

求出区域 $D = \{z : |z - a| > a, |z - b| < b, \text{ 这里 } 0 < a < b \text{ 是常数}\}$ 到单位圆盘 $|w| < 1$ 的一个单值解析映射.

解. 令

$$\begin{aligned} z' &= \frac{z - 2a}{z}, \\ z'' &= \frac{i\pi z'}{\frac{b-a}{b}} = \frac{ib\pi(z - 2a)}{(b-a)z}, \\ z''' &= e^{z''} = e^{\frac{ib\pi(z-2a)}{(b-a)z}}, \\ w &= \frac{z''' - i}{z''' + i} = \frac{e^{\frac{ib\pi(z-2a)}{(b-a)z}} - i}{e^{\frac{ib\pi(z-2a)}{(b-a)z}} + i}. \end{aligned}$$

以上各步的图形见下面各图: