第二十三章

光的衍射

（Diffraction of light）

（三个不透明的圆屏的菲涅尔衍射图）

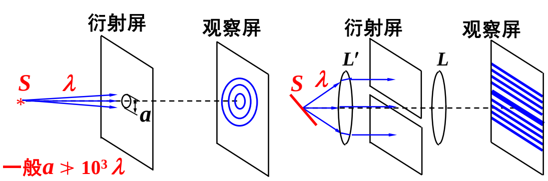
本章目录

§ 23.1 衍射现象、惠更斯—菲涅耳原理

一、光的衍射（ diffraction of light ）

1、定义： 光在传播过程中能绕过障碍物的边缘而偏离直线传播的现象叫光的衍射。

(进入几何阴影区继续传播且光强在空间重新分布)



孔的衍射(点光源、单孔)　缝的衍射(线光源、单缝)

障碍物尺寸a

$a \approx 10^3\lambda$ 以上，衍射效应不明显

$a \approx 10^3\lambda \sim 10\lambda$，衍射效应明显；

$a \approx \lambda$，向散射过渡

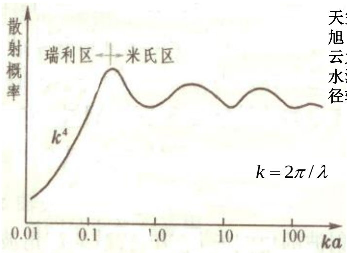
关于散射

分子理论：当入射光照射在介质（与波长相比拟的尺度）上时，将激起其中电子作受迫振动，从而发出相干的次波（注意：这儿的次波与惠更斯-菲涅耳原理中提及的次波不同）。理论上可以证明，只要分子的密度是均匀（波长范围内）的，次波相干叠加的结果，只剩下遵从几何光学规律的光线，沿其余方向的振动完全抵消。但如果尺度在波长数量级的邻近介质小块之间在光学性质上（如折射率等）有较大差异，在光波的作用下它们将成为强度差别交大的次波源，而且从他们到空间各点已有不可忽略 的光程差，这些次波相干叠加的结果，就产生了散射光。

瑞利散射：　散射体的尺度（分子尺度）比波长小

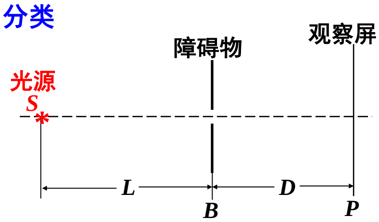
瑞利散射定律：散射光强度与波长的四次方成反比

米氏散射：颗粒较大，散射光强度与波长不敏感



天空为什么是蓝色的；
旭日和夕阳为什么是红的；
云为什么是白色的(云–小水滴和空气中的粉尘，直径较大）；

2、分类



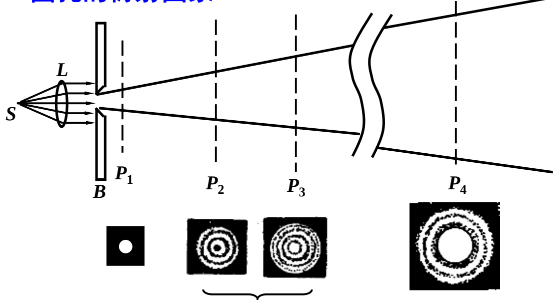
（1）菲涅耳（Fresnel）衍射(近场衍射)

L 和 *D*中至少有一个是有限值。

（2）夫琅禾费（Fraunhofer）衍射（远场衍射）

L 和 *D*皆为无限大（可用透镜实现）。

圆孔的衍射图象：

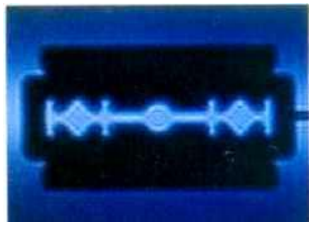


孔的投影　　菲涅耳衍射　　夫琅禾费衍射

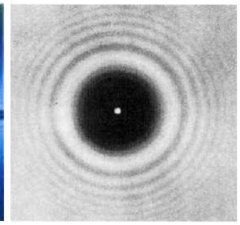
中心亮暗取决于距离

【演示】圆孔、单缝的夫琅禾费衍射

7



刀片边缘的衍射



圆屏衍射

（中间总是亮点）

（泊松点）

【演示】圆屏、细丝衍射

8

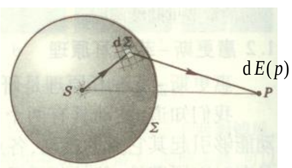
二、惠更斯—菲涅耳原理

（Huygens — Fresnel principle）

波传到的任何一点都是子波的波源。

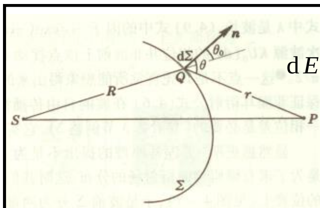
各子波在空间某点的相干叠加，决定了该点波的强度。

P点的总振幅



$$E(p)=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}E_p$$

9



$$\mathrm{d}E(p)=K\frac{a(Q)f(\theta,\theta_0)}{r}\mathrm{d}\Sigma$$

K为比例系数，$a(Q)$取决于波前上Q处的波的振动函数，$f(\theta)$称方向因子（倾斜因子）

1882年以后，基尔霍夫（Kirchhoff）求解电磁波动方程，修改和完善了$E(p)$的表示式，使得惠-菲原理有了坚实的理论基础。

基尔霍夫给出的倾斜因子为　$f(\theta_0,\theta)=\frac{1}{2}(\cos\theta_0+\cos\theta)$

10

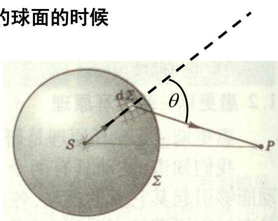
基尔霍夫给出的倾斜因子为　$f(\theta_0,\theta)=\frac{1}{2}(\cos\theta_0+\cos\theta)$

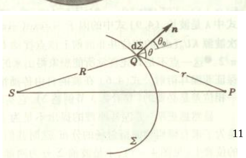
对于波面为以点光源为球心的球面的时候

$$f(\theta_0,\theta)=f(\theta)=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$$

菲涅耳当初的猜想为

$$f(\theta)=\begin{cases}\theta=0,\ f_{\max}=1;\\ \theta\uparrow,\ f(\theta)\downarrow;\\ \theta\ge\pi/2,\ f(\theta)=0\end{cases}$$





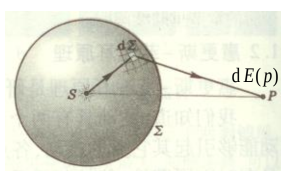
11

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{K}\frac{\boldsymbol{a}(\mathrm{Q})\boldsymbol{f}(\theta_0+\theta)}{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\Sigma\cos(\omega t-\frac{2\pi r}{k})$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{P})=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{K}\frac{\boldsymbol{a}(\mathrm{Q})\boldsymbol{f}(\theta_0+\theta)}{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\Sigma\cos(\omega t-\frac{2\pi r}{k})$$

$$=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{p})\cdot\cos[\omega t+\varphi(\boldsymbol{p})]$$

—菲涅耳积分。p 点波的强度 $I_p\propto E_0^2(p)$

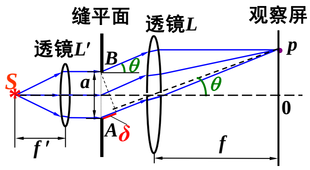


由菲涅耳积分计算观察屏上的强度分布，很复杂。常用半波带法、振幅矢量法。

12

§ 23.2 单缝的夫琅禾费衍射、半波带法

一、装置和光路



S：单色线光源

$\overline{AB}=a$：缝宽

θ：衍射角

$A\to p$和$B\to p$的光程差为

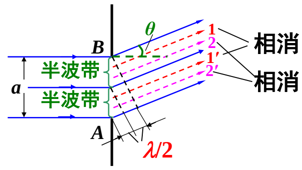
$$\boxed{\delta = a\sin\theta}$$

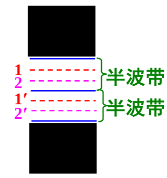
$\theta=0$，$\delta=0$ — 中央明纹（中心）

$\theta\uparrow\to\delta\uparrow\to I_p\downarrow$ —p点明亮程度降低

二、半波带法—计算观察屏上的强度分布

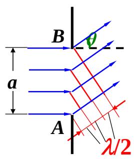
（1）当$a\sin\theta=\lambda$ 时，可将缝分为两个“半波带”





两个半波带发的光，在 p 点干涉相消形成暗纹。

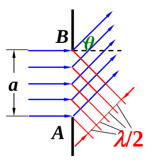
（2）当$a\sin\theta=\dfrac{3}{2}\lambda$时，可将缝分成三个半波带，



其中两相邻半波带的衍射光相消，余下一个半波带的衍射光不被抵消

— 在 p 点形成明纹（中心）

（3）当$a\sin\theta=2\lambda$ 时，可将缝分成四个半波带，两相邻半波带的衍射光相消，p 点形成暗纹。



半波带法得到的一般结果：

$\delta=a\sin\theta=0$ — 中央明纹中心 （准确）

$a\sin\theta=\pm k\lambda$，$k=1,2,3\cdots$ — 暗纹 （准确）

$a\sin\theta=\pm(2k'+1)\dfrac{\lambda}{2}$，$k'=1,2,3\cdots$ — 明纹中心（近似）

中央明纹中心和暗纹位置是准确的，其余明纹中心的位置是近似的，与准确值稍有偏离。

例 如图示，设有一波长为 λ 的单色平面波沿着与缝平面的法线成 θ 角的方向入射到宽为 a 的单缝 AB 上。

求 写出各级暗条纹对应的衍射角 φ 所满足的条件。

解 在狭缝两个边缘处，衍射角为 φ 的两光的光程差为

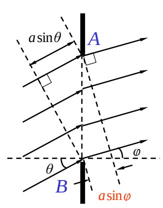
$$\Delta=a(\sin\varphi-\sin\theta)$$

对于暗纹有 $\Delta=\pm k\lambda$

则 $a(\sin\varphi-\sin\theta)=\pm k\lambda$

$$\sin\varphi=\pm\frac{k\lambda}{a}+\sin\theta$$

$(k=1,2,3,\cdots)$



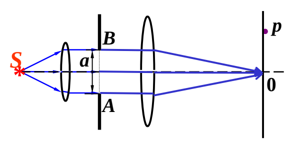
三、光强公式

用振幅矢量法（见后）可导出单缝衍射的

光强公式：$\boxed{I=I_0\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}$ 其中 $\alpha=\dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$，

1、主极大（中央明纹中心）位置

$\theta=0$处，$\alpha=0\ \to\ \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1\quad\to I=I_0=I_{max}$



$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \qquad \alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda},$$

2、极小（暗纹）位置

当　$\alpha = \pm k\pi$（$k = 1, 2, 3\cdots$）时，

$$\sin\alpha = 0 \rightarrow I = 0$$

由　$\alpha = \dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda} = \pm k\pi$

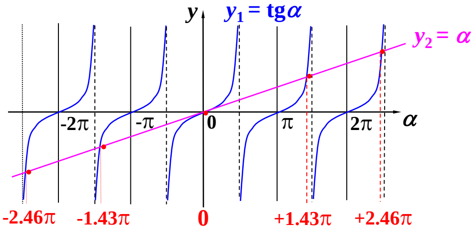
此时应有　$a\sin\theta = \pm k\lambda$

这正是缝宽可以分成偶数个半波带的情形。

3、次极大位置：

满足 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \rightarrow \mathrm{tg}\alpha = \alpha$

用图解法找出该方程的根



解得：$\alpha = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi, \cdots$

相应：$a\sin\theta = \pm 1.43\lambda, \pm 2.46\lambda, \pm 3.47\lambda, \cdots$

半波带法：　$\pm 1.50\lambda, \pm 2.50\lambda, \pm 3.50\lambda, \cdots$

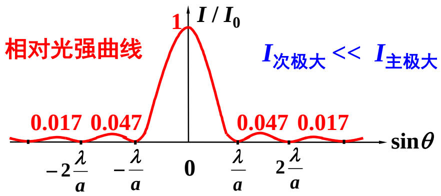
4、光强：

将 $\alpha = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi, \cdots$

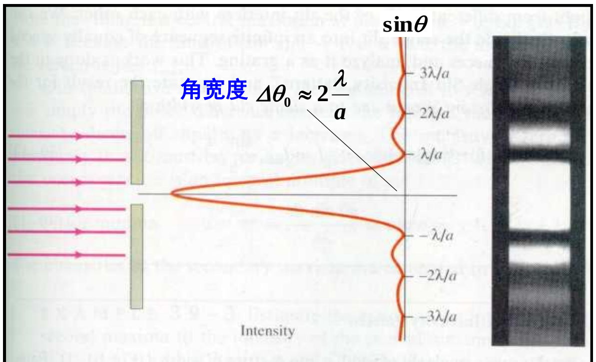
依次代入光强公式 $I = I_0\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$，得到

从中央（光强 I_0）往外各次极大的光强依次为 $0.0472I_0$，$0.0165I_0$，$0.0083I_0$ …

相对光强曲线



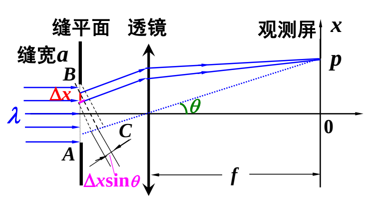
$I_{次极大} << I_{主极大}$



单缝衍射图样(与杨氏双缝干涉图样对比有何不同？)

【演示】（可调）单缝衍射

△四、用振幅矢量法推导光强公式



将缝等分成 N 个窄带，每个窄带宽：

$$\Delta x = \frac{a}{N}$$

各窄带发的子波在 p 点振幅近似相等，设为 ΔE_0，

相邻窄带发的子波到 p 点的相位差为：

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta x\sin\theta}{\lambda}\cdot 2\pi = \frac{a\cdot\sin\theta}{N}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\quad（N\text{ 很大}）$$

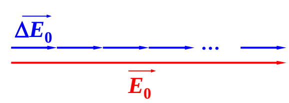
$$\Delta\varphi = \frac{a\cdot\sin\theta}{N}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}$$

在 p 点，N 个同方向、同频率、同振幅、初相依次差恒量 $\Delta\varphi$ 的简谐振动合成，合成的结果仍为简谐振动。

p 点合振幅 E_p 是各子波振幅矢量和的模。

对于中心点：

$$\theta = 0, \Delta\varphi = 0 \rightarrow E_0 = N\,\Delta E_0$$



对于其他点 p： $\Delta\varphi \neq 0, E_p < E_0$。

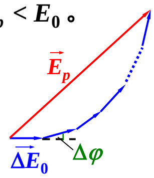
当 $N \to \infty$ 时， N 个相接的折线将变为一个圆弧，

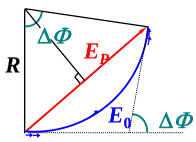
圆弧对应的圆心角为 $\Delta\Phi$

$$\Delta\Phi = N\Delta\varphi = \frac{a\sin\theta}{\lambda}2\pi$$

$$E_p = 2R\sin\frac{\Delta\Phi}{2},\ E_0 = R\Delta\Phi$$

$$\therefore\quad E_p = \frac{E_0}{\Delta\Phi/2}\sin\frac{\Delta\Phi}{2}$$





25

设 $\alpha = \frac{\Delta\Phi}{2} = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$

$$E_p = \frac{E_0}{\Delta\Phi/2}\sin\frac{\Delta\Phi}{2} = E_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$I \propto E_p^2,\quad I_0 \propto E_0^2$$

因此，光强为

$$\boxed{I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}$$

I_0 — 中央明纹中心光强

26

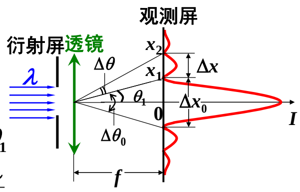
五、条纹的宽度

1、中央明纹宽度：两个第一级暗纹间的距离。

第一级暗纹位置

$a\sin\theta_1 = \lambda \Rightarrow \sin\theta_1 = \lambda/a$

一般 θ 角较小， $\sin\theta_1 \approx \theta_1$



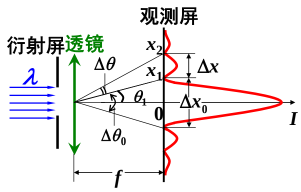
角宽度 $\Delta\theta_0 = 2\theta_1 \approx 2\frac{\lambda}{a}$

线宽度 $\Delta x_0 = 2f\cdot \mathrm{tg}\theta_1 = 2f\theta_1 = 2f\frac{\lambda}{a}$

$\boxed{\Delta x_0 \propto \frac{\lambda}{a}}$ — 衍射反比定律

27

2、其他明纹（次极大）宽度



第 k 级暗纹的位置

$a\sin\theta_k = k\lambda$

第 k+1 级暗纹的位置

$a\sin\theta_{k+1} = (k+1)\lambda$

第 k 级明纹宽度

$\Delta x_k = f\mathrm{tg}\theta_{k+1} - f\mathrm{tg}\theta_k$

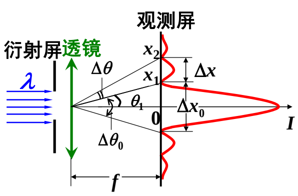
在 $\mathrm{tg}\theta \approx \sin\theta \approx \theta$ 时，有

$$\therefore\quad \Delta x \approx f\frac{\lambda}{a} = \frac{1}{2}\Delta x_0$$

—单缝衍射明纹宽度的特征

28

3、波长对条纹间隔的影响



$$\therefore\quad \Delta x \approx f\frac{\lambda}{a} = \frac{1}{2}\Delta x_0$$

$\Delta x \propto \lambda$ — 波长越长，条纹间隔越宽。

29

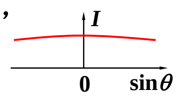
4、缝宽变化对条纹的影响

$\Delta x = f\frac{\lambda}{a}$ — 缝宽越小，条纹间隔越宽。

对于第一级暗纹位置 $a\sin\theta_1 = \lambda \Rightarrow \sin\theta_1 = \lambda/a$

当 $a > \lambda$ 且 $\frac{\lambda}{a} \sim 1$ 时， $\theta_1 \to \frac{\pi}{2}$，

只有中央明纹，屏幕一片亮。



当 $a\uparrow$ 且 $\frac{\lambda}{a} \to 0$ 时， $\Delta x \to 0$， $\theta_k \to 0$，

只显出单一的明条纹 — 单缝的几何光学像

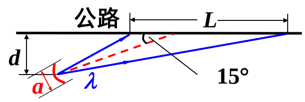
几何光学是波动光学在 $a >> \lambda$ 的极限情形。

30

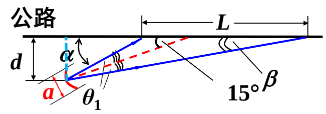
六、干涉和衍射的联系与区别

干涉和衍射都是波的相干叠加， 但干涉是有限多个分立光束的相干叠加，衍射是波阵面上无限多个子波的相干叠加。二者又常出现在同一现象中。

【例】如图示：



已知：一波长为$\lambda = 30$mm的雷达在距离路边为$d = 15$m处，雷达射束与公路成15°角，天线宽度$a = 0.20$m。求雷达监视范围内公路的长度L。



解：将雷达波束看成是单缝衍射的 0 级明纹

由 $a \cdot \sin\theta_1 = \lambda$

有 $\sin\theta_1 = \dfrac{\lambda}{a} = \dfrac{30\text{mm}}{0.2\text{m}} = 0.15 \rightarrow \theta_1 \approx 8.63°$

如图 $\alpha = 15° + \theta_1 = 23.63°$，$\beta = 15° - \theta_1 = 6.37°$

所以 $L = d(\text{ctg}\,\beta - \text{ctg}\,\alpha)$

$= 15(\text{ctg}\,6.37^0 - \text{ctg}\,23.63^0) \approx 100\text{m}$

§ 23.3 光栅衍射

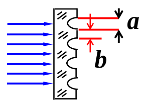
一、光栅（grating）

光栅是现代科技中常用的重要光学元件。

光通过光栅衍射可以产生明亮尖锐的亮纹，复色光入射可产生光谱，用以进行光谱分析。

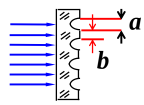
1、光栅的概念

光栅是由大量的等宽等间距的平行狭缝构成的光学元件



从广义上理解，任何具有空间周期性的衍射屏，都可叫作光栅。

2、光栅常数 (空间周期性的表示)



$\boxed{d = a + b}$

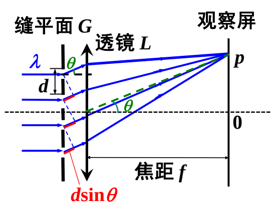
a — 透光部分的宽度

b — 不透光部分的宽度

普通光栅刻线为数十条/mm — 数千条/mm，用电子束刻制可达数万条/mm（$d \sim 10^{-1}\mu$m）。

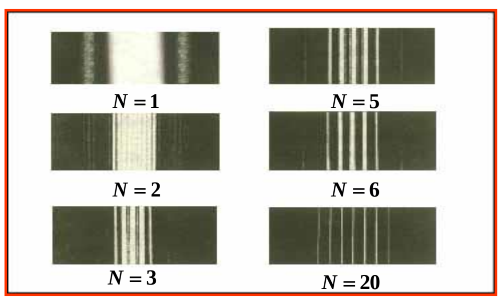
【演示】一维和正交光栅衍射

二、光通过光栅后的光强分布

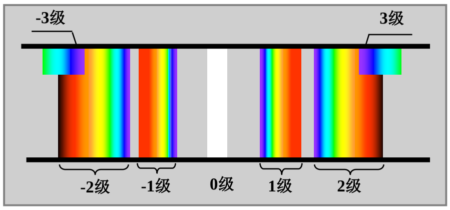


各缝之间的干涉和每缝自身的夫琅禾费衍射，决定了光通过光栅后的光强分布 — 多光束干涉和单缝衍射联合作用的结果。

光栅衍射是单缝衍射和缝间干涉的共同结果



几种缝的光栅衍射

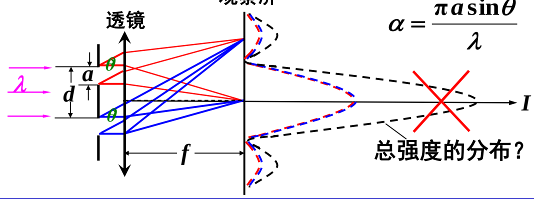


白光的光栅光谱

1、各缝衍射光强度极大值位置重叠

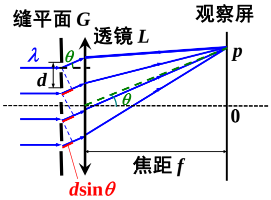
以双缝为例　　　　缝衍射：$I = I_0\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$

$$\alpha = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$$



缝衍射光强极大值的位置，在屏上重叠。
（只要衍射角相同，衍射光都会汇聚到同一处，与"哪条缝"没有关系）
总强度的分布，是两束光的相干叠加。

2、多光束干涉（multiple-beam interference）

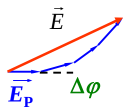


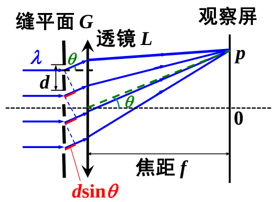
以4缝为例

每个缝发的光在对应衍射角θ方向的p点的光振动的振幅为E_p

相邻缝发的光在p点的相位差为$\Delta\varphi$。

p点光振动的合振幅

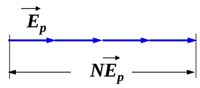




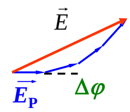
$\boxed{d\sin\theta = \pm k\lambda}$

— 正入射光栅方程

$\Delta\varphi = \pm 2k\pi,\ k = 0,1,2,\ldots$



p点光振动的合振幅



p点为干涉主极大

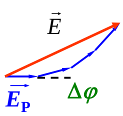
0 级亮纹中心：　$\Delta\varphi = 0$

1 级亮纹中心：　$\Delta\varphi = 2\pi$

多光束干涉主极大的位置与缝的个数无关

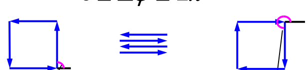
0 级亮纹和1级亮纹之间有暗纹吗？

p点光振动的合振幅



暗纹条件：各振幅矢量构成闭合多边形（合振幅为零）

$$0 \le \Delta\varphi \le 2\pi$$

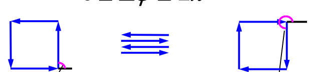


$\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{2}$　　$\Delta\varphi = \pi$　　$\Delta\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$

$\sin\theta = \dfrac{\lambda}{4d}$　　$\sin\theta = \dfrac{\lambda}{2d}$　　$\sin\theta = \dfrac{3\lambda}{4d}$

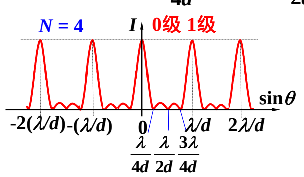
暗纹条件：各振幅矢量构成闭合多边形（合振幅为零）

$$0 \le \Delta\varphi \le 2\pi$$



$\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{2}$　　$\Delta\varphi = \pi$　　$\Delta\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$

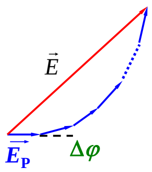
$\sin\theta = \dfrac{\lambda}{4d}$　　$\sin\theta = \dfrac{\lambda}{2d}$　　$\sin\theta = \dfrac{3\lambda}{4d}$



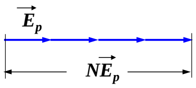
- 主极大位置不变
- 相邻主极大间有3个暗纹和2个次极大
- 条纹变窄、变亮。

如有N个缝

p点光振动的合振幅



p点为干涉主极大时： $\Delta\varphi = \pm 2k\pi,\ k = 0,1,2,\ldots$



0 级亮纹中心：$\Delta\varphi = 0$

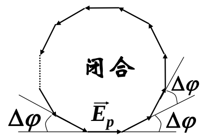
1 级亮纹中心：$\Delta\varphi = 2\pi$

43

0 级亮纹和1级亮纹之间暗纹位置

N个缝的暗纹，要求：$N\Delta\varphi = \pm 2k'\pi \quad \Delta\varphi = \dfrac{\pm 2k'\pi}{N}$

$k' = 1,2,\cdots N-1$



而：$\Delta\varphi = \dfrac{d\cdot\sin\theta}{\lambda}\cdot 2\pi$

$d\cdot\sin\theta = \dfrac{\pm k'}{N}\lambda \quad k' = 1,2,\cdots N-1$

k级亮纹与k＋1级亮纹之间的暗纹位置

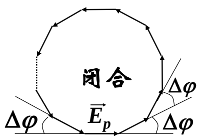
亮纹位置 $d\sin\theta_k = k\lambda \quad \Delta\varphi = 2k\pi$

$d\sin\theta_{k+1} = (k+1)\lambda \quad \Delta\varphi = 2(k+1)\pi$

暗纹位置 $\Delta\varphi = 2k\pi + \dfrac{2\pi}{N}, 2k\pi + \dfrac{4\pi}{N} \ldots\ldots, 2k\pi + \dfrac{2m\pi}{N} \qquad m = N-1$

44

相邻主极大（中心位置）间距：



$d\sin\theta_k = k\lambda \quad d\sin\theta_{k+1} = (k+1)\lambda$

$d\sin\theta_{k+1} - d\sin\theta_k = \lambda$

$\Delta|d\sin\theta| = \lambda$

（其间）相邻暗纹间距（次极大宽度）：

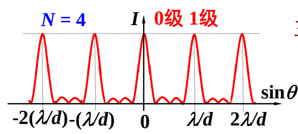
$\Delta\varphi = 2k\pi + \dfrac{2\pi}{N}, 2k\pi + \dfrac{4\pi}{N} \ldots\ldots, 2k\pi + \dfrac{2m\pi}{N}$

$d\sin\theta_{k'} = (k + \dfrac{k'}{N})\lambda \quad d\sin\theta_{k'+1} = (k + \dfrac{k'+1}{N})\lambda$

$d\sin\theta_{k'+1} - d\sin\theta_{k'} = \dfrac{1}{N}\lambda \qquad \Delta|d\sin\theta| = \lambda/N$

45

相邻主极大间有?个暗纹和?个次极大



主极大 $d\sin\theta_k = k\lambda$

$d\sin\theta_{k+1} = (k+1)\lambda$

暗纹 $d\sin\theta_{k'} = (k + \dfrac{k'}{N})\lambda$

$k' = 1,2\cdots N-1$

相邻主极大间有$N-1$个暗纹和$N-2$个次极大

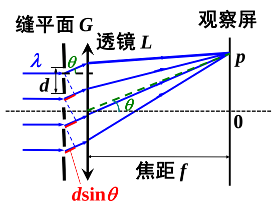
量变（从双缝到多缝） ⟹ 质变（主极大与次极大）

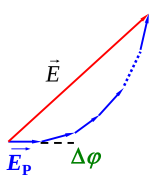
杨氏双缝干涉：
相邻主极大（中心位置）间距 ＝ 明纹宽度 ＝ 相邻暗纹间距，明纹等宽。

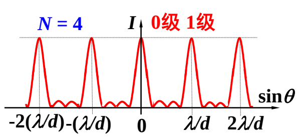
多光束（多缝）干涉：
上述情况都不成立，出现次级大，原明纹被分割，主次明纹不等宽。
此处没有考虑“衍射”的作用。

46

3、光栅衍射（grating diffraction）

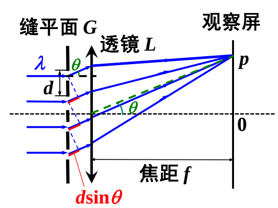


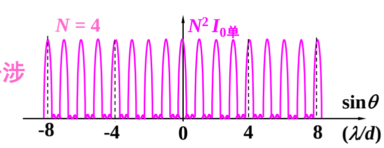




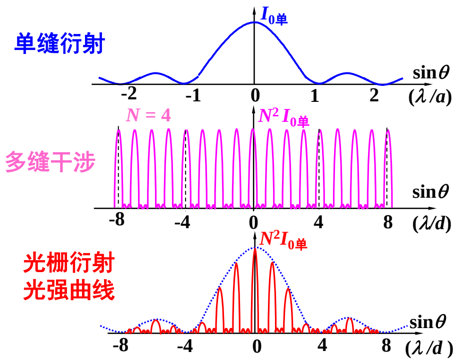
47

（1）多缝干涉主极大受单缝衍射的调制





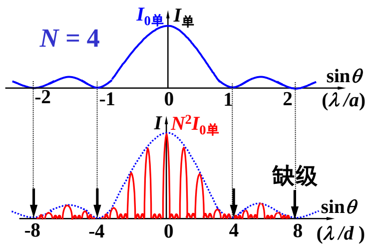
48



49

（2）缺级现象（单缝衍射暗纹位置）

例如：$d = 4a$



50

干涉明纹位置： $d\sin\theta = \pm k\lambda$， $k = 0,1,2,\cdots$

衍射暗纹位置：$a\sin\theta' = \pm k'\lambda$， $k' = 1,2,3,\cdots$

$\theta = \theta'$，时， $\dfrac{d}{a} = \dfrac{k}{k'}$ 此时在应该干涉加强的位置上没有衍射光到达，从而出现缺级。

干涉明纹缺级级次：

$$\boxed{k = \pm\frac{d}{a}k'}\ ,k' = 1,2,3,\cdots$$

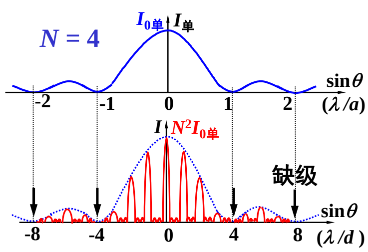
$\dfrac{d}{a}$总能化成整数比，出现明纹缺级。

51

例如：$d = 4a$

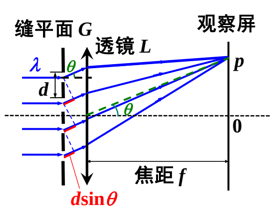
干涉明纹（主极大）缺级的级次：

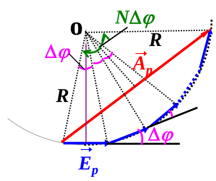
$$k = \pm\frac{d}{a}k' = \pm 4k' = \pm 4, \pm 8, \cdots$$



52

4、光栅衍射的光强公式





每个单缝在 p点（对应衍射角θ）均有

$$E_p = E_{0单}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

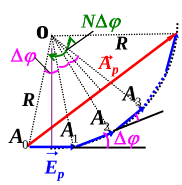
相邻缝在 p点的相位差

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot d\cdot\sin\theta$$

53

每个单缝在 p点（对应衍射角θ）均有

$$E_p = E_{0单}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\ ,\ \alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$



相邻缝在 p点的相位差

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot d\cdot\sin\theta$$

p点合振幅为

$$A_p = 2R\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}\ ,$$

又 $E_p = 2R\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}$

综合两式，消除$2R$，得到

可以证明所有矢量的起点和终点都在一个圆上(见后)，所有的等腰三角形全等

$\angle A_0OA_1 = \angle A_1OA_2 = \Delta\varphi$

总圆心角等于 $N\Delta\varphi$

54

$$\therefore\ A_p = E_p \cdot \frac{\sin N\frac{\Delta\varphi}{2}}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}} = E_{0单} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin N\beta}{\sin\beta}$$

光栅衍射的光强：

$$\boxed{I_p = I_{0单}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2}$$

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta \qquad \beta = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi d}{\lambda}\cdot\sin\theta$$

$I_{0单}$ —— 单缝中央主极大光强

$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$ —— 单缝衍射因子

$\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$ —— 多光束干涉因子

讨论

一、关于极大的情况

$\theta = 0$ 处，$\alpha = 0 \ \rightarrow\ \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$

而且 $\beta = \pm k\pi$（$k = 1, 2, 3\cdots$）时，

$\sin N\beta = 0, \sin\beta = 0 \rightarrow \frac{\sin N\beta}{\beta} = N \rightarrow \left(\frac{\sin N\beta}{\beta}\right)^2_{\max} = N^2$

$\rightarrow I_p = N^2 I_{0单} = I_{\max}$

此时k也是I_p取极（大）值的级次。

二、关于极小的情况

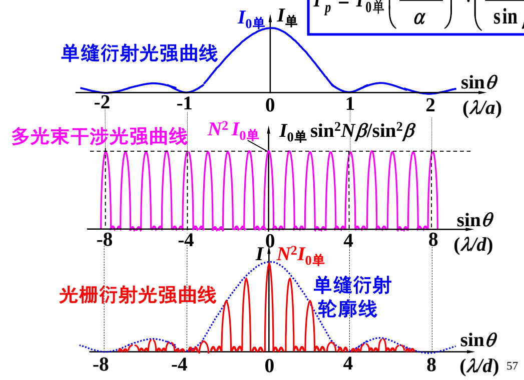
$\sin\alpha = 0$而$\alpha \neq 0$，单缝衍射时的极小

$\sin N\beta = 0$而$\sin\beta \neq 0$，多光束干涉时的极小

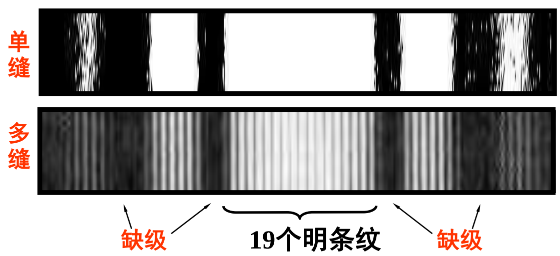
$\rightarrow I_p = 0$

例如： $N = 4$，$d = 4a$

$$I_p = I_{0单}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$



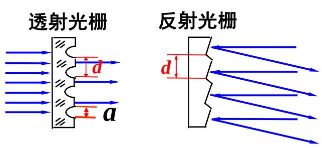
单缝衍射和多缝衍射干涉的对比 （d =10a）



【演示】 单、双、三、多缝的衍射（多缝板A、C、D）

圆板上的光阑（空、缝）

5、光栅的种类：



光栅是由大量的等宽等间距的平行狭缝

（或反射面）构成的光学元件。

从广义上理解 *任何具有空间周期性的衍射屏，都可叫作光栅。*

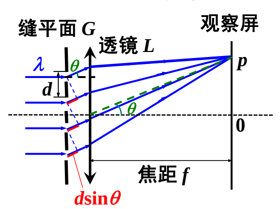
$d = a+b$ 　a —— 透光（或反光）部分的宽度

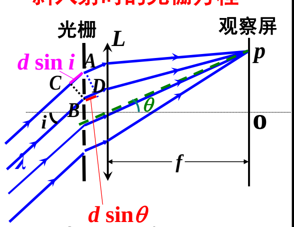
　　　　b —— 不透光（或不反光）部分的宽度

三、斜入射光栅 相控阵雷达

1、光线斜入射时的光栅方程

—— 正入射光栅方程　　　　斜入射时的光栅方程





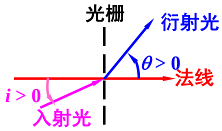
$$\boxed{\begin{array}{c} d\sin\theta = \pm k\lambda \\ k = 0,1,2,\ldots \end{array}}$$

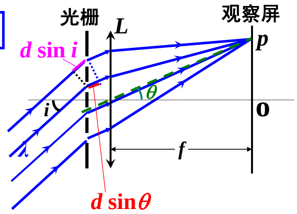
$$\delta = d(\sin\theta - \sin i)$$

$$\boxed{d(\sin\theta - \sin i) = \pm k\lambda}$$

$$\boxed{d(\sin\theta - \sin i) = \pm k\lambda}$$

角度符号规定：由法线转向光线，逆时针为正。





$$\delta = d(\sin\theta - \sin i)$$

斜入射可获得更高级次条纹（教材例23.6），色分辨率高，但能观察到的条纹总数不变。

对于确定的级次k，i变化，则θ 也变化。

61

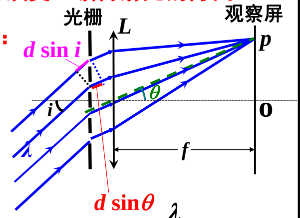
例如0级衍射光（$k=0$），有 $\sin\theta = \sin i$

改变入射光的角度，即可改变 0 级衍射光的方向。

改变入射光的角度的本质：

相邻入射光的相位差：

$$\Delta\varphi = \frac{d\cdot\sin i}{\lambda}\cdot 2\pi$$



$$\Delta\varphi = \frac{d\cdot\sin i}{\lambda}\cdot 2\pi = \frac{d\cdot\sin\theta}{\lambda}\cdot 2\pi \rightarrow \sin\theta = \frac{\lambda}{2\pi\, d}\cdot\Delta\varphi$$

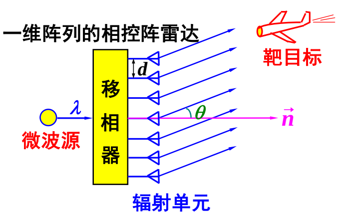
改变相邻入射光的位相差，即可改变 0 级衍射光的方向。

62

2、相控阵雷达

（1）扫描方式

- 相位控制扫描
- 频率控制扫描



（2）回波接收

通过同样的天线阵列接收。

63

（3）相控阵雷达的优点

- 无机械惯性，可高速扫描。

  一次全程扫描仅需几微秒。

- 由计算机控制可形成多种波束。

  能同时搜索、跟踪多个目标。

- 不转动、天线孔径可做得很大。

  辐射功率强、作用距离远、分辨率高…

相控阵雷达除军事应用外，还可民用：

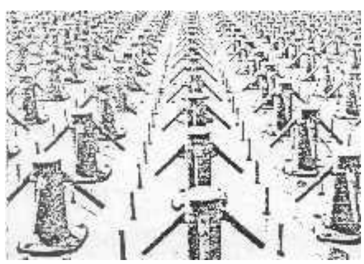
如地形测绘、 气象监测、 导航、测速（反射波的多普勒频移）…

64

设在澳大利亚Sydney大学的一维射电望远镜阵列，

（N=32，λ=21cm，a = 2m，d = 21m，阵列长213m）

65



设在美国鳕角（Cape cod）的相控阵雷达照片

阵列宽31m，有1792个辐射单元，覆盖240°视野。

能探测到5500公里范围内的10m²大小的物体。

用于搜索洲际导弹和跟踪人造卫星。

66

例 一束波长为 480 nm 的单色平行光，照射在每毫米内有600条刻痕的平面透射光栅上。

求 (1) 光线垂直入射时，最多能看到第几级光谱？

(2) 光线以 30°入射角入射时，最多能看到第几级光谱？

解 (1) $d\sin\varphi=\pm k\lambda$　　$d=\dfrac{1}{600\times10^{3}}=\dfrac{1}{6}\times10^{-5}\ \mathrm{m}$

$$k_{\max}=[d/\lambda]=\left[\frac{10^{-5}}{6\times4.8\times10^{-7}}\right]=3$$

(2) $d(\sin\varphi+\sin30^{\circ})=\pm k\lambda$

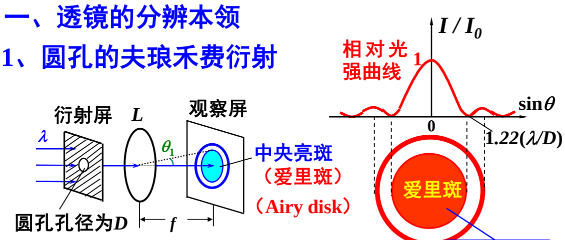
当 $\varphi=90^{\circ}$ 时　$k_{+\max}=5$

当 $\varphi=-90^{\circ}$ 时　$k_{-\max}=-1$

§23.4 光学仪器的分辨本领 光栅光谱

一、透镜的分辨本领

1、圆孔的夫琅禾费衍射



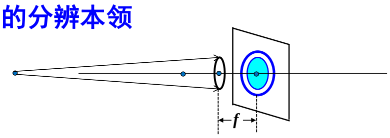
$\boxed{D\cdot\sin\theta_1\approx1.22\lambda}$　$\left.\begin{matrix}D\uparrow\\ \lambda\downarrow\end{matrix}\right\}$ 爱里斑变小

集中了约84%的衍射光能。

菲涅尔—基尔霍夫公式，一级暗纹条件。

【演示】圆孔衍射

2、透镜的分辨本领



几何光学：　（经透镜）

物点 ⇒ 象点

物（物点集合）⇒ 象（象点集合）

波动光学：　（经透镜）

物点 ⇒ 象斑

物（物点集合）⇒ 象（象斑集合）

衍射限制了透镜的分辨能力。

估算人眼瞳孔爱里斑的大小

$D\ \ 2-8\,mm$

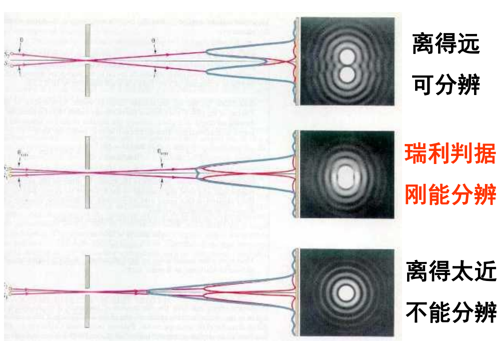
$let\ \lambda=0.55\ \mu m,\ D=2\ mm$

$$Then\ \ \Delta\theta=1.22\frac{\lambda}{D}=3.4\times10^{-4}\ rad\approx1'$$

$if\ \ f\approx20\ mm, then$ the diameter of the Airy disk

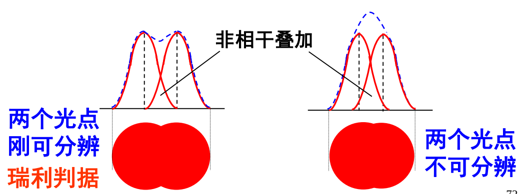
$d=2f\Delta\theta=14\ \mu m$

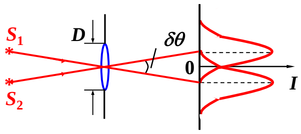
小孔（直径D）对两个靠近的遥远的点光源的分辨



瑞利判据 (Rayleigh criterion)：

对于两个等光强的非相干的物点，如果一个象斑的中心恰好落在另一象斑的边缘（第一暗纹处），则此两物点被认为是刚刚可以分辨的。若象斑再靠近就不能分辨了。





最小分辨角（angle of minimum resolution）：

$$\boxed{\delta\theta = \theta_1 \approx 1.22\frac{\lambda}{D}}$$

分辨本领（resolving power）：

$$\boxed{R \equiv \frac{1}{\delta\theta} = \frac{D}{1.22\lambda}} \qquad \left.\begin{matrix} D\uparrow \\ \lambda\downarrow \end{matrix}\right\} \rightarrow R\uparrow$$

望远镜：λ不可选择，但$\uparrow D \rightarrow \uparrow R$

▲ 世界上最大的光学望远镜：

D = 8 m

建在了夏威夷山顶。

▲世界上曾经最大的射电望远镜：

D = 305 m

建在了波多黎各岛的Arecibo，能探测射到整个地球表面仅10^{-12}W的功率，也可探测引力波。

(1963年~2020年12月01日)

BUSINESS INSIDER Japan (2020.12.06 8:10):
中国の探査機が月に行ったその日、アメリカの宇宙観測の象徴「アレシボ天文台」が崩壊
[原文：On the same day China landed a probe on the moon, the US’s massive telescope in Puerto Rico collapsed]

显微镜：D不会很大，但$\downarrow \lambda \rightarrow \uparrow R$

电子λ：0.1Å ~ 1Å（10^{-2}~10^{-1} nm）

所以电子显微镜分辨本领很高，可观察物质的结构。

▲ 在正常照明下，人眼瞳孔直径约为3mm，对λ = 0.55 μm（5500Å）的黄光，$\delta\theta \approx 1'$，可分辨约 9m 远处的相距 2mm 的两个点（见书P39例23.2）。

▲ 夜间观看汽车灯，远看是一个亮点，逐渐移近才看出是两个灯。视角与分辨（截选）.mpg

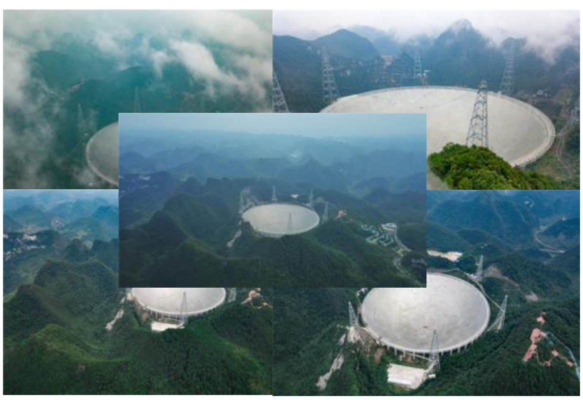
▲视力表的设计

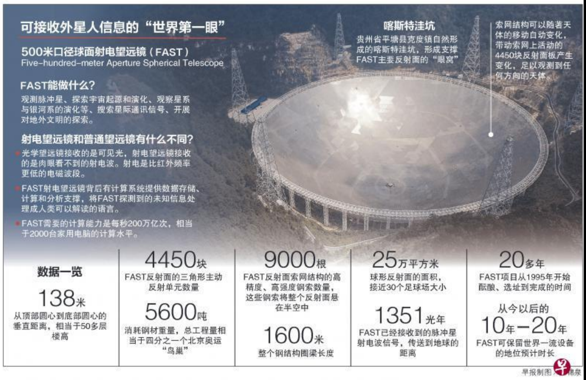
？请问航天员杨利伟从神舟五号飞船上能看清楚万里长城吗？为什么？

新华网 发布时间：2018/9/13 12:23:00

被誉为“中国天眼”的500米口径球面射电望远镜（FAST），经过两年的紧张调试工作，现已经实现了跟踪、漂移扫描、运动中扫描等多种观测模式。截至目前，“中国天眼”已发现59颗优质的脉冲星候选体，其中有44颗已被确认为新发现的脉冲星。

超级震撼！100秒看延时镜头下的中国天眼





“是什么让女人的触觉更敏感？”

2015.01.19《科学画报》报道

加拿大的最新研究显示，这种触觉上的差异实际并不是性别造成的，而是手指大小的不同造成的。选出100名学生，给他的某个手指编号并测量手指的表面积，然后再让这些同学触摸刻有不同尺寸槽底的测试板。当测试版的槽痕越来越细，超出了人们手指的分辨力，测试就会给人光滑的感觉。

经过统计，男性能够分辨出来的槽痕平均宽度是1.59mm，女性的则是1.41mm。当手指的触摸面积每扩大1平方cm，手指的触觉分辨力就会降低0.25mm。

手指越细，手指的汗腺也就越密。由此类推，手指上的触觉感受器也会随之密集。这也就是为什么细手指的灵敏度会更高。

One example to break the diffraction limit

Super-resolution ultrasound

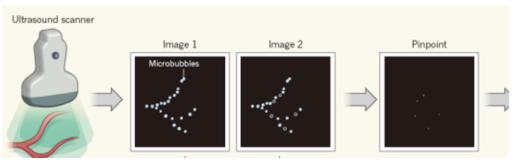
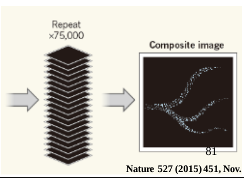


Figure 1 | Vessels visualized. Errico *et al.*1 obtained ultrasound images of rat blood vessels infused with gas-filled microbubbles, which reflect ultrasound waves. By taking images rapidly (at 500 frames per second) and generating difference data to compare sequential images, they were able to pinpoint the locations of the few, well-separated microbubbles that degraded between each image (only a small number of microbubbles are shown here for simplicity, and are not to scale). By repeating this process over many frames, a composite image was built up that revealed the locations of many thousands of microbubbles, making super-resolution images possible in around 150 seconds.



Nature 527 (2015) 451, Nov. 26

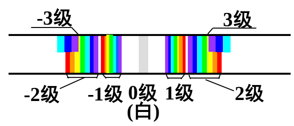
二、光栅光谱，光栅的色散本领、分辨本领

1、光栅光谱

正入射：$\boxed{d\sin\theta = \pm k\lambda,\ \ k = 0,1,2,\cdots}$

k 一定时，$\lambda\uparrow \rightarrow \theta\uparrow$，不同颜色光的主极大位置也不同，形成同一级光谱。

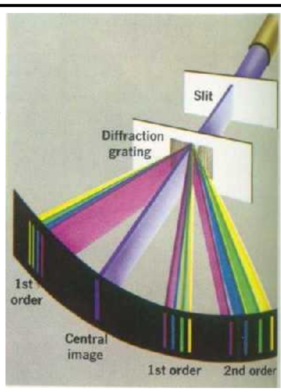
白光（350~770nm）的光栅光谱是连续谱：



汞原子可吸收或发射一系列特定波长的光，是线状（分立）光谱。

注意：
不同颜色的光的谱线能否被分辨开，取决于光栅的色散能力和谱线本身的宽度。

【演示】气体光谱



汞的光栅光谱

Δ* 2、光栅的色散本领

色散本领：把不同波长的光在谱线上分开的能力

设：波长为λ的谱线，衍射角为 θ，位置为 x；

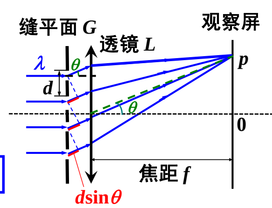
波长$\lambda+\delta\lambda$ 的谱线，衍射角$\theta+\delta\theta$，位置 $x+\delta x$

定义：

角色散本领 $\boxed{D_\theta \equiv \dfrac{\delta\theta}{\delta\lambda}}$

线色散本领 $\boxed{D_l \equiv \dfrac{\delta x}{\delta\lambda}}$

二者的关系 $\boxed{D_l = f\cdot D_\theta}$



f—光栅后的透镜焦距

由 $\sin\theta - \sin i = k\dfrac{\lambda}{d}$，$\to \cos\theta \cdot \delta\theta = k\dfrac{\delta\lambda}{d}$，

有 $\boxed{D_\theta = \dfrac{k}{d \cdot \cos\theta}}$

和 $\boxed{D_l = \dfrac{k \cdot f}{d \cdot \cos\theta}}$

（以上两式）与光栅缝数N无关

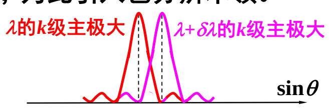
减小 d 可增大色散本领，对级次k更高的光谱，色散本领还可进一步增大。增大透镜的焦距 f（通常可达数米），还可以再增大线色散本领。

由 $D_\theta = \dfrac{k}{d \cdot \cos\theta}$ 和 $D_l = \dfrac{k \cdot f}{d \cdot \cos\theta}$ 可看出：

若在 θ不大处观察光栅光谱，$\cos\theta$ 几乎不变，所以 D_θ和D_l差不多是常数，于是有$\delta\theta \propto \delta\lambda$和$\delta x \propto \delta\lambda$，此时的光谱称匀排光谱（棱镜光谱为非匀排光谱）。根据拍好的匀排光谱谱片来测量未知波长时，可采用线性内插法。

3、光栅的色分辨本领（resolving power of grating）

色散本领只反映谱线主极大中心分离的程度，但不能说明谱线是否重叠，因为谱线本身是有宽度的，为此引入色分辨本领。

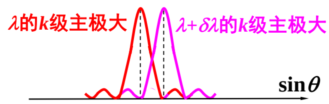


设入射波长为λ和$\lambda+\delta\lambda$时，两谱线刚能分辨。

定义：光栅的色分辨本领 $\boxed{R \equiv \dfrac{\lambda}{\delta\lambda}}$

下面分析 R 和哪些因素有关。

按瑞利判据：



λ的k级主极大与$\lambda+\delta\lambda$的k级主极大之前的第一个零点重合

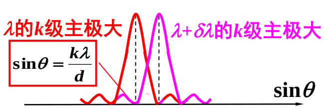
λ的k级主极大 $d\sin\theta = k\lambda \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{k\lambda}{d}$

$\lambda+\delta\lambda$的k级主极大 $d\sin\theta = k(\lambda+\delta\lambda)$

$\lambda+\delta\lambda$ k级主极大前的第一个零点

$$d\sin\theta = k(\lambda+\delta\lambda) - \frac{1}{N}(\lambda+\delta\lambda) \Rightarrow Nd\sin\theta = (Nk-1)(\lambda+\delta\lambda)$$

$$d\sin\theta = k(\lambda+\delta\lambda) - \frac{1}{N}(\lambda+\delta\lambda) \Rightarrow Nd\sin\theta = (Nk-1)(\lambda+\delta\lambda)$$



由图，有：$d\sin\theta = k\lambda = k(\lambda+\delta\lambda) - \dfrac{\lambda+\delta\lambda}{N}$

得 $R = \dfrac{\lambda}{\delta\lambda} = Nk - 1 \approx Nk,\ (k \neq 0)$ $(N >> 1)$ $\therefore \left.\begin{matrix}\uparrow N \\ \uparrow k\end{matrix}\right\} \to \uparrow R$

光栅的色分辨本领：

$$\boxed{R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nk,\ (k \neq 0)}$$

例如，对波长靠得很近的Na双线：

$$\lambda_1 = \lambda = 589\ \text{nm}$$

$$\lambda_2 = \lambda + \delta\lambda = 589.6\text{nm}$$

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{589}{0.6} \approx 982 = Nk$$

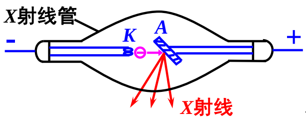
若 $k = 2$，则 $N = 491$
若 $k = 3$，则 $N = 327$
} 都可分辨出Na双线

§ 23.5 X 射线的衍射（ diffraction of *X*-rays ）

一、X 射线的产生

1895年德国物理学家**伦琴**发现了**高速电子撞击固体可产生**一种能使胶片感光、空气电离、荧光质发光… 的中性射线，称为 **X 射线。**

X 射线管的结构如下： X射线.MPG



K — 阴极，*A* — 阳极

A– *K*间加几万伏高压，

加速阴极发射的热电子

91

照骨术

92

威廉 . 伦琴

Wilhelm C.RÖntgen

1845 — 1923

德国人

由于发现*X*射线

获1901年（首届）

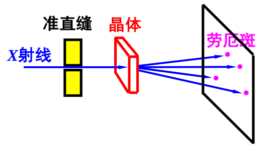
诺贝尔物理奖

95

伦琴在此楼发现X光射线

96

劳厄（Laue）实验（1912）：



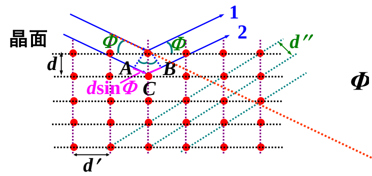
晶体相当于三维光栅

衍射图样证实了X射线的波动性。

X射线 λ : 10^{-2}—10^{1}nm

（10^{-1}—10^{2} Å）

二、X射线在晶体上的衍射

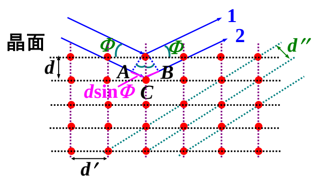


Φ: 掠射角

晶格、晶向、晶面、晶格常数

d： 晶面间距 （晶格常数）NaCl d =0. 28nm

同一入射线对不同的晶面有不同的掠射角



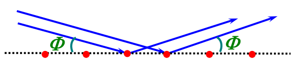
d： 晶面间距（晶格常数）

NaCl d =0. 28nm

Φ: 掠射角

1、衍射中心：每个原子都是散射子波的波源

2、同一层晶面上点间散射光的干涉：



符合反射定律的散射光加强

3 、面间散射光的干涉：$\delta = \overline{AC} + \overline{CB} = 2d \cdot \sin\Phi$

散射光干涉加强条件：

$\boxed{2d \cdot \sin\Phi = k\lambda}$ （ k = 1,2,⋯ ）

——布拉格公式

三、应用

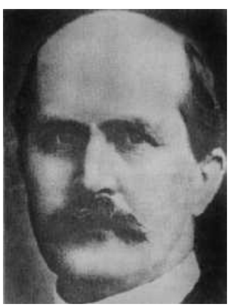
已知Φ、λ可测d —X射线晶体结构分析。

已知Φ、d可测λ —X射线光谱分析。

布拉格父子（W.H.Bragg， W.L.Bragg ）

由于利用X射线分析晶体结构的杰出工作，

共同获得了1915年的诺贝尔物理学奖。



威廉 .亨利 . 布拉格（父）

1862 — 1942

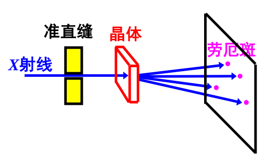
威廉 . 劳伦斯 . 布拉格（子）

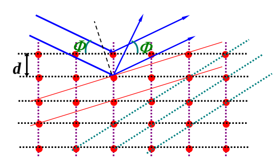
1890 — 1971

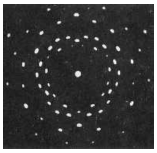
四、实际观察X射线衍射的作法

1、劳厄法：$2d \cdot \sin\Phi = k\lambda$ （k = 1,2,⋯ ）

使用λ连续的X射线照射晶体，得到所有晶面族反射的主极大。每个主极大对应一个亮斑（劳厄斑）。这样得到的衍射图叫劳厄 (Laue)相。此法可定晶轴方向。



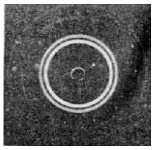




SiO_2 的劳厄相

2、粉末法：$2d \cdot \sin\Phi = k\lambda \quad (k=1,2,\cdots)$

用确定λ的X射线入射到多晶粉末。大量无规晶面取向，总可使布拉格条件满足。这样得到的衍射图叫德拜 (Dedye)相。此法可定晶格常数。



粉末铝的德拜相

五、X 射线衍射与普通光栅衍射的区别

▲ X 射线衍射有一系列的布喇格条件。

晶体内有许多晶面族， 入射方向和λ一定时，对第i个晶面族有：$2d_i \cdot \sin\Phi_i = k_i\lambda$，$i=1,2,3\ \cdots$

一维光栅只有一个干涉加强条件：

$d(\sin\theta - \sin i) = \pm k\lambda$ —光栅方程。

▲ 晶体在 d_i、Φ_i、λ 都确定时，不一定能满足布喇格公式 $2d_i \cdot \sin\Phi_i = k_i\lambda$ 的关系。

一维光栅在λ和入射方向角 i 确定后，总能有衍射角θ满足光栅方程。

衍 射 小 结

1、一个原理

惠更斯——菲涅耳原理

2、两种方法

半波带法 振幅矢量法

3、三类问题

单缝、圆孔衍射——单纯衍射

光栅 —— 衍射和干涉的综合

X光衍射 —— 空间光栅， 总体是衍射，
具体处理是多光束干涉

4、四点结论

（1）无论孔、缝，衍射都出现光的扩展

$a >> \lambda$， $D >> \lambda$ → 几何光学

（2）任何光学仪器都存在分辨率的问题

透镜：$\boxed{R \equiv \frac{1}{\delta\theta} = \frac{D}{1.22\lambda}}$ （角）

光栅：$\boxed{R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nk}$ （色）

（3）光栅方程

$\boxed{d(\sin\theta - \sin i) = \pm k\lambda}$ $\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$

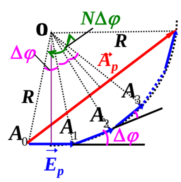
i： 入射角 $\qquad \theta$：衍射角

（4）布喇格公式

$\boxed{2d \cdot \sin\Phi = k\lambda}$ $\quad k = 1,\ 2,\ \cdots$

Φ：掠射角

第二十三章结束



可以证明所有矢量的起点和终点都在一个圆上

$A_0\ A_1\ A_2$

不共面的三点确定一个圆，圆心为O点

先证明 $\Delta OA_1A_2 \cong \Delta OA_3A_2$

$\angle A_0A_1A_2 = \angle A_1A_2A_3$

(相同角度的补角相等)

$\angle A_0A_1O = \angle OA_1A_2 = \angle A_1A_2O$

$\therefore \angle A_0A_1O = \angle OA_1A_2 = \angle A_1A_2O = \angle A_3A_2O$

显然 $A_1A_2 = A_2A_3$ 所以得证

$\angle A_0OA_1 = \angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \Delta\varphi$