§1 复数与复向量空间

1.1 复数定义和基本性质

我们学习的大部分线性代数知识都只考虑了实数情形,但复数情形不可避免会遇到.

例如 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 没有实特征值（除了极特殊情形）

1.1 复数基本性质

①复数复习：

$i^2 = -1$, 一个复数$a + bi = z$, 长度$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

a实部(real part)　b虚部(imaginary part)

共轭(complex conjugate)

$z = a + bi \longrightarrow \bar{z} = a - bi$

$z = \bar{z}$ 当且仅当 $z \in \mathbb{R}$

$z = -\bar{z}$ 当且仅当 $z = bi, b \in \mathbb{R}$

1.1 复数基本性质

复数的运算：设 $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$， 则

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$$

$$z_1 \cdot \overline{z_1} = a_1^2 + b_1^2 = \mid z_1 \mid^2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{\mid z_2 \mid^2} \quad (z_2 \neq 0.)$$

1.2 复数的极分解形式

极分解(polar decomposition)

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = re^{i\theta} \quad z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (Euler formula)

单位根 $x^n = 1$有n个复根$e^{\frac{2k\pi i}{n}} k = 0,1,\ldots,n-1$

令$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}, 1 + \omega + \cdots \omega^{n-1} = 0$

例 求$(1+i)^8$

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (1+i)^8 = (\sqrt{2})^8 e^{i2\pi} = 16$$

1.3 复数的幂

设 $z = re^{i\theta}, a \in \mathbb{R}$, 定义 z^a 如下：(设$r > 0$)

若 $a \in \mathbb{N}, z^a = r^a \cdot e^{ia\theta}$,

若 $-a \in \mathbb{N}, z^a = \dfrac{1}{z^{-a}}$,

若 $a = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, z^a = r^a \cdot e^{i(\frac{1}{n}\theta + \frac{2k\pi}{n})}, 0 \le k \le n-1$

若 $a = \dfrac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}, z^a = (z^m)^{\frac{1}{n}} = (z^{\frac{1}{n}})^m$

若 $a \in \mathbb{R}, a \notin \mathbb{Q}, z^a = r^a \cdot e^{i(a\theta + 2ka\pi)}, k \in \mathbb{Z}$

注: $r^a = e^{a \ln r}$

1.4 复数的矩阵表示

{长度为1（单位圆上）的复数} $\longrightarrow$ {二阶旋转矩阵}，且保持乘法

$$z = cos\theta + i\sin\theta \longrightarrow A_z = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

一般地，定义 $z = a + bi$ 对应到 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

性质：这个对应是保持乘法的一一对应

1.5 复向量空间

设 $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$. 定义它的共轭是 $\overline{u} = \begin{pmatrix} \overline{u_1} \\ \vdots \\ \overline{u_n} \end{pmatrix}$. 共轭转置是 $(\overline{u})^T = \overline{u^T}$.

复向量的点积（或内积）：设 $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$. 则

$$u \cdot v = u_1\overline{v_1} + \cdots + u_n\overline{v_n}.$$

性质：（1）$u \cdot u = u_1\overline{u_1} + \cdots + u_n\overline{u_n} > 0.$

（2）若 $u \cdot v = 0$，则称两向量互相垂直

（3）$u = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$.（一个复向量是两个实向量的复线性组合）

（4）设 $A = (a_{ij})_{m\times n}, a_{ij} \in \mathbb{C}, u \in \mathbb{C}^n$，则 $\overline{Au} = \overline{A}\overline{u}$.

1.5 复向量空间

回忆：一个实向量空间是一个非空集合，其上有两种运算：加法和数乘，满足八条公理。

一个复向量空间只是将上述的数乘中的 $\mathbb{R}$ 换成 $\mathbb{C}$， 八条公理不变。
最典型的例子是：$\mathbb{C}^n$. 一个复向量空间也可以看做实向量空间，但维数不同。

性质：$dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n = 2n, dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n = n.$

1.6 复向量空间上的线性变换

定义: 设V, W是数域$\mathbb{C}$上的向量空间, V到W的映射$T: V \to W$若保持加法和数乘运算, 即

$$\boxed{T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}),\ T(k\mathbf{x}) = kT(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \forall k \in \mathbb{C}}$$

则称$T: V \to W$是一个**线性变换(linear transformation).**

1.7 线性变换的矩阵表示

在W中取一组基 $\mathbf{B}_W = \{\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m\}$. 则

$$\begin{cases} T(\mathbf{v}_1) = a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{w}_m, \\ T(\mathbf{v}_2) = a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbf{w}_m, \\ \qquad \vdots \\ T(\mathbf{v}_n) = a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{w}_m, \end{cases}$$

$T(\mathbf{v}_j)$在 $\mathbf{B}_W = \{\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m\}$ 下坐标为

$$[T(\mathbf{v}_j)]_{\mathbf{B_W}} = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^T.$$

1.7 线性变换的矩阵表示

即

$$T(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n) = (T(\mathbf{v}_1) \cdots T(\mathbf{v}_n)) = (\mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_m) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A}$$

称$m \times n$矩阵A为线性变换T在V中给定基$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$和W中给定基 $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m$ 下的矩阵表示.

性质： $\boxed{[T(v)]_{\mathbf{B}_W} = A \cdot [v]_{\mathbf{B}_V}.}$

1.8 线性变换在不同基下的矩阵

设 $V=\mathbb{C}^n$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$和$\beta_1,\cdots,\beta_n$是V的两组基, 且

$$(\beta_1 \ \cdots \ \beta_n) = (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n)P$$

其中P可逆. 设$\sigma : V \to V$是V上的线性变换, σ在这两组基下的矩阵分别是A, B, 即

$$\sigma(\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n) = (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n)A$$

$$\sigma(\beta_1 \ \cdots \ \beta_n) = (\beta_1 \ \cdots \ \beta_n)B$$

1.8 线性变换在不同基下的矩阵

则

$$\sigma(\beta_1 \ \cdots \ \beta_n) = \sigma((\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n)P) = \sigma(\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n)P = (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n)AP,$$

又

$$\sigma(\beta_1 \ \cdots \ \beta_n) = (\beta_1 \ \cdots \ \beta_n)B = (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n)PB.$$

由于$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性无关, 故有AP = PB, 即

$$B = P^{-1}AP.$$

1.8 线性变换在不同基下的矩阵

定理: n维复向量空间V上的线性变换σ在V的不同基下的矩阵是相似矩阵.

目标1：选择合适的基，使得σ在这组基下的表示矩阵是最“简单”的?

目标2：若V上可以定义“垂直”，则可以引入标准正交基（即V的一组基，基向量长度为1且互相垂直）。问：当σ满足什么条件，存在V的一组标准正交基，使得σ的矩阵表示是一个对角阵?