1. 设 $V=P_2(\mathbb{R})=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_i\in\mathbb{R}\}$

内积是：$(f(x),g(x))=\int_0^1 f(x)g(x)dx$，从基 $\{1,x,x^2\}$

出发，由Gram-Schmidt正交化求V的标准正交基.

2. 设 $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1+i\end{pmatrix}$，$v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$v_3=\begin{pmatrix}i\\i\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3$

$\mathbb{C}^3$ 内积定义为 $(u,v)=u^T\bar{v}$，应用Gram-Schmidt正交化方法把它们化成一组标准正交基.

3. 设 $V=C[-\pi,\pi]=\{f(x) \mid f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上实值连续函数$\}$，内积是 $(f(x),g(x))=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$

证明：$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},$

$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$ 是V中一组标准正交向量.

4. 设V是一个内积空间，$\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 是一组标准正交向量

证明：$\forall \vec{v}\in V$，$|\vec{v}|^2=|(\vec{v},\vec{e}_1)|^2+\cdots+|(\vec{v},\vec{e}_n)|^2$

$\Leftrightarrow$ $\vec{v}$ 是 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 的线性组合.

5. 设 S 是 n 维欧氏空间 V 的子集, $W=\{c_1\beta_1+\cdots+c_k\beta_k \mid k\in\mathbb{N},\ \beta_i\in S,\ c_i\in\mathbb{R}\}$ 证明:

(1) $S^{\perp}=\{\alpha\in V \mid (\alpha,\beta)=0,\ \forall\beta\in S\}$ 是 V 的子空间, 且 $S^{\perp}=W^{\perp}$.

(2) $(W^{\perp})^{\perp}=W$ (由此 $(S^{\perp})^{\perp}=W$)

6. 设 $V=\mathbb{C}^2$ 带着标准内积 $(u,v)=u^T\bar{v}$.
设 $\varphi: V\longrightarrow V$ 满足 $\varphi\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $\varphi\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix}$.
求 φ 及 φ^* 在这组基下表示矩阵, 并求 $\varphi^*\left[\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right]$.

7. 设 V 是有限维内积空间, $\varphi: V\to V$ 线性算子. $N=\ker\varphi$ 求证: $\operatorname{Im}\varphi^*=N^{\perp}$.

8. 设 α,β 属于 n 维酉空间 V, $\varphi: V\to V$ 定义为:
$\forall x\in V$, $\varphi(x)=(x,\alpha)\beta$. 证明: φ 是线性变换并求 φ^*. 若 α,β 标准正交, 扩充为 V 的标准正交基: $e_1=\alpha,\ e_2=\beta,\ e_3,\cdots,e_n$. 求 φ,φ^* 在这组基下矩阵.