第八周作业

1. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$，试求 A^m $(m\geq 1)$.

提示：求 P，J，$P^{-1}AP=J$，则 $A^m=PJ^mP^{-1}$.

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 求可逆阵 P 和 A 的 Jordan 标准型 J，

使得 $P^{-1}AP=J$.

3. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，若它的极小多项式 $m_A(x)$ 次数 $=n$.

证明：A 的 Jordan 标准型 J 中各个 Jordan 块的主对角线元素互不相同.

4. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，$A^2=A$. 证明：$|\lambda I_n-A|=\lambda^{n-r}(\lambda-1)^r$

其中 $r=\mathrm{rank}(A)$.

5. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$，$a\neq 0\in\mathbb{C}$，求 e^{At} 并验证：

$$\det(e^A)=e^{tr(A)}$$

（det：行列式. tr：对角元之和，这里 t 是一个数字）.

6. 设 $A^2=A$，求 e^A, $\sin A$ 和 $\cos A$.

7. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, t 是一个数字且 $AB=BA$. 证明：$Ae^{Bt}=e^{Bt}\cdot A$.

8. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$，令 A^H 表示 A 的转置再共轭，即 $A^H=\overline{A^T}=(\overline{A})^T$.

证明：(1) $(e^A)^H = e^{A^H}$.

(2) 若 $A=A^H$，则 $(e^{iA})\cdot(e^{iA})^H = I_n$ (即 e^{iA} 是一个酉阵)