

## 第十六章 恒定电流 (Steady Current)

本章从“场”的角度出发，以电场的规律为基础，研究电路的基本规律。

- § 16.1 电流密度
- § 16.2 稳恒条件
- § 16.3 欧姆定律微分形式
- § 16.4 电动势 \* △温差电现象
- △ § 16.5 含源电路
- △ § 16.6 电容器的充电与放电
- \* △ § 16.7 电流的一种经典微观图象

### § 16.1 电流密度 (current density)

#### 1. 电流强度 (electric current strength)

电流—带电粒子 (载流子) 的定向运动。  
载流子—电子、质子、离子、空穴

### 电流强度

单位时间内通过导体某一横截面的电量

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

对细导线用 **电流强度** 的概念就够了。对大块导体，还需 **电流密度** 的概念来进一步描写电流的分布。

例如：电阻法探矿

带电粒子在电场作用下的定向运动⇒电流

$\vec{E} = 0$        $\vec{E} \neq 0$

$dQ = u dt ds \cos \theta nq$   
 $dI = nq u ds \cos \theta = nq \vec{u} \cdot d\vec{s}$   
 $\vec{j} = nq \vec{u}$        $\vec{u}$  —  $q$  定向移动速度

$dI = nq u ds \cos \theta = nq \vec{u} \cdot d\vec{s} = \vec{j} \cdot d\vec{s} = j ds_{\perp}$

定义：电流密度  $\vec{j} = \frac{dI}{ds_{\perp}} \vec{e}_u$

大块导体

$\vec{j}$  { 方向 //  $\vec{u}$   
大小:  $j = |\vec{j}| = \frac{dI}{ds_{\perp}}$

$\vec{j} = nq \vec{u}$

$\vec{e}_u$  —  $P$  处正电荷定向移动速度方向上的单位矢量

漂移速度  $\vec{u}$

$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$

$$\vec{j} = n q \vec{u}$$

对Cu: Cu的原子量63.5, 密度8.9 g/cm<sup>3</sup>

$$n = \frac{8.9}{63.5} \times 6.02 \times 10^{23} = 8.4 \times 10^{22} / \text{cm}^3$$

$$j = 1 \text{ A/mm}^2 \text{ 时,}$$

$$u \approx 7.4 \times 10^{-2} \text{ mm/s}$$

∴ 电流有热效应, 故应限制  $j$  的大小:

例如对Cu导线要求:  $j \leq 6 \text{ A/mm}^2$  (粗)

$j \leq 15 \text{ A/mm}^2$  (细)

对于超导线,  $j$  可达  $10^4 \text{ A/mm}^2$ 。

7

为形象描写电流分布, 引入“电流线”的概念:

要求:

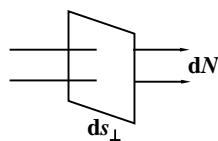
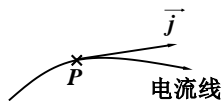
1) 电流线上某点的切向

与该点  $\vec{j}$  的方向一致;

2) 电流线的密度等于  $j$ ,

$$\text{即: } \frac{dN}{ds_{\perp}} = j$$

$$\therefore dN = dI$$



8

## § 16.2 稳恒条件

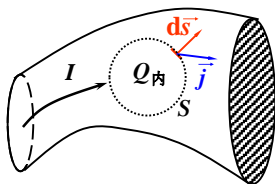
闭合曲面  $S$

$$\vec{j} \cdot d\vec{s}$$

$\vec{j} \cdot d\vec{s} > 0$  有正电荷自该处流出

$\vec{j} \cdot d\vec{s} < 0$  有正电荷自该处流入

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{dQ_{\text{内}}}{dt} \quad \text{— 电荷守恒定律}$$



9

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{dQ_{\text{内}}}{dt}$$

$$\iiint \nabla \cdot \vec{j} dV = -\frac{d}{dt} \iiint \rho dV$$

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

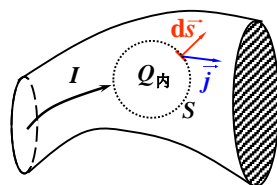
连续性方程的微分形式

稳恒条件:

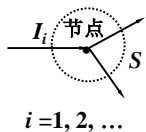
$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (\text{积分形式})$$

$$\frac{dQ_{\text{内}}}{dt} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (\text{微分形式})$$



10



对电路的“节点”:

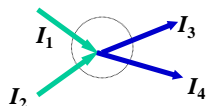
$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0 \rightarrow \sum_i I_i = 0$$

$i = 1, 2, \dots$

稳恒电流的电流线必定闭合!

节点电流方程: — 基尔霍夫第一定律 (Kirchhoff first law)

规定从节点流出:  $I > 0$ , 流入节点:  $I < 0$ 。



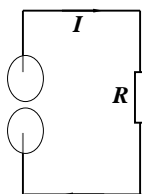
$$\sum_i I_{i,in} = \sum_i I_{i,out}$$

11

由基尔霍夫第一定律可知

电路I 稳恒情况 必有  $I = 0$  电路II

二端网络  $I_{\lambda}$  稳恒情况必有  $I_{\lambda} = I_{\text{出}}$



要维持稳恒电流, 电路必须闭合。

$$\therefore \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0 \rightarrow \sum_i I_i = 0$$

12

### § 16.3 欧姆定律的微分形式

欧姆定律 (Ohm's law)  $U = IR$  ( $U = \varphi_a - \varphi_b$ )

对一段均匀金属导体:

电阻  $R = \rho \cdot \frac{L}{S}$

$\rho$  — 电阻率 (resistivity), 单位:  $\Omega \cdot \text{m}$

电导:  $G = \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{S}{L} = \sigma \frac{S}{L}$ , 单位:  $\frac{1}{\Omega} = \text{S}$  (西门子)

$\sigma = \frac{1}{\rho}$  — 电导率 (conductivity), 单位:  $\frac{1}{\Omega \cdot \text{m}}$

13

将欧姆定律用于大块导体中的一小段, 有:

$dU = \varphi - (\varphi + d\varphi) = -d\varphi$   
 $-d\varphi = j \cdot dl \cdot \rho \cdot \frac{dl}{S}$   
 $j = -\frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{dl} = \sigma \cdot E$   
 $\vec{j} \parallel \vec{E} \rightarrow \boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}$

— 欧姆定律微分形式

上式对非均匀导体, 非稳恒电流也成立。

14

例1 一球形导体带电, 因周围空气微弱导电而漏电。

设导体初始带电量为 $Q_0$ , 半径为 $a$ , 空气电导率为 $\sigma$ 。  
求: 漏电规律及任一时刻的漏电电流

解: 因导体电阻可不计, 认为导体等势;

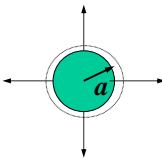
为似稳场, 场强方向和电流都沿球的径向

在空气中作同心球面

由高斯定理有  $\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$

由电流连续性方程有  $\oint_s \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{dQ}{dt}$

由欧姆定律微分式  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$



15

三者联立得

$-\frac{1}{\sigma} \frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{\frac{dQ}{Q} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} dt}$

解微分方程,

代入初始条件, 得

$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_0} t}$

漏电电流

$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma Q_0}{\epsilon_0} e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_0} t}$

$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_0} t} = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}} \quad \tau_0 = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$

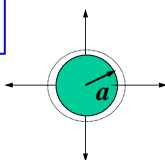
对于Cu,  $\sigma = 5.9 \times 10^7 \text{ S/m}$

16

导体静电平衡条件: 电荷只能分布在导体表面

如有一涨落

$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_0} t}$



17

[例2] 如图所示, 已知: 大地的 $\sigma$ ,  $h \gg a$ 。

求: 接地电阻  $R$

解: 设接地电流为 $I$ 。

$\because h \gg a, \therefore \vec{j}$  球对称

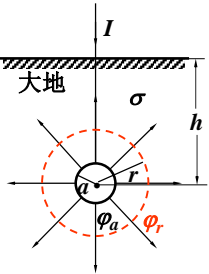
$\vec{j} = \frac{I}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_r \rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} = \frac{I}{4\pi \sigma r^2} \cdot \vec{e}_r$

$U = \varphi_a - \varphi_\infty = \int_a^\infty E dr = \int_a^\infty \frac{I}{4\pi \sigma r^2} \cdot dr = \frac{I}{4\pi \sigma a}$

$\therefore R = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi \sigma a} \propto \frac{1}{\sigma a}$  (一般  $R \sim 10^{-2} \Omega$ )

18

分析影响接地电阻的关键:



$$\varphi_r = \int_r^\infty \frac{I}{4\pi\sigma r^2} \cdot dr = \frac{I}{4\pi\sigma r}$$

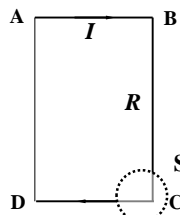
$$= \frac{I}{4\pi\sigma a} \cdot \frac{a}{r} = U \cdot \frac{a}{r}$$

当  $r=10a$  时,  $\varphi_a - \varphi_r = 0.9 U$ ,  
即 90 % 的电势降落在  $r=10a$  的范围内。所以改善接地点附近的电阻, 是减小整个接地电阻的关键。

说明: 该例只是极其理想化的接地模型, 事实上影响接地电阻的因素很多, 接地电阻是个不可精确测量的物理量。<sup>19</sup>

### § 16.4 电动势、\*Δ温差电现象

#### 一. 电动势 (electromotive force, 简写作 emf)



如果只有静电力就会有问题  
对封闭面 S 而言,  $I_{\text{流入}} = I_{\text{流出}}$   
而这不满足 (对非超导体)

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

必须有非静电力  $\vec{F}_K$  存在, 才能在闭合电路中形成稳恒电流。

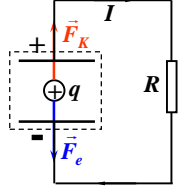
20

必须有非静电力  $\vec{F}_K$  存在,  
才能在闭合电路中形成稳恒电流。

从能量角度看

$\vec{F}_K$ : 电磁, 化学, 热, 光...

定义非静电性场强  $\vec{E}_K = \frac{\vec{F}_K}{q}$



同时存在静电场  $\vec{E}_S$  和非静电性场强  $\vec{E}_K$  时

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_K = q(\vec{E}_S + \vec{E}_K)$$

21

仿照电势差 (电压) 的定义

$$U = \varphi_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{A_{\text{电}}}{q}$$

— 电势降

定义电动势

$$\mathcal{E}_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = \frac{A_{\text{非}}}{q}$$

— 电势升

电源内负极到正极的方向, 即电势升高的方向为电动势的方向。

22

### \* Δ二. 温差电现象 (席贝克 [Seebeck] 效应, 1821)



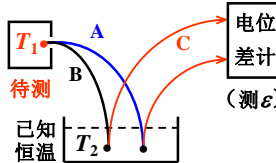
两种金属接成一个回路,  
若两个接头处的温度不同,  
则回路中形成温差电动势。

温差电动势的成因:

- ▲ 在同种金属中, 温差形成自由电子的热扩散 (汤姆孙 [Thomson] 电动势)
- ▲ 在不同金属中, 因自由电子浓度不同, 在接头处产生与温度有关的扩散 (珀耳帖 [Peltier] 电动势) (见赵凯华等著《电磁学》上册, 第三章 §5)

23

### 热电偶:



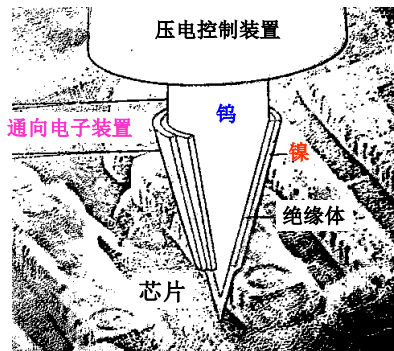
一般  $\mathcal{E} \sim \text{mV}/100^\circ\text{C}$   
 $\text{Bi-Sb } \mathcal{E} \sim 10^{-2} \text{V}/100^\circ\text{C}$  (铋) (锑)

优点: ▲ 热容小, 灵敏度高 ( $10^{-3}^\circ\text{C}$ )  
▲ 可逐点测量, 测小范围内温度变化  
▲ 测温范围大 ( $-200^\circ\text{C} - 2000^\circ\text{C}$ )  
▲ 便于自动控制

演示 测温热电偶, 温差电磁铁

TV 温差电偶和温差电堆 [温差电偶和温差电堆.m4](#)

### 温差电现象的现代应用实例：



扫描热显微镜

钨和镍在探针尖处相接，形成热电偶的测温端。

25

### 扫描热显微镜简介

- ▲性能：热探针针尖直径只有约30nm，可在数十纳米的尺度上，测出万分之一的温度变化。
- ▲工作原理：通电流使探针加热并接近试样表面。针尖和被测表面距离↓→针尖散热↑→温度↓；针尖和被测表面距离↑→针尖散热↓→温度↑。由此可反映出探针尖与试样表面间隙的大小。当探针在试样表面上扫描时，就能测出试样表面的起伏状况。

26

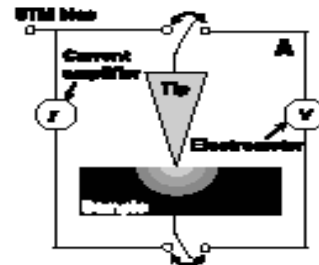
### ▲扫描热显微镜的应用：

- ◆检测电子芯片表面的质量。
- ◆探测活细胞中温度的变化，从而给出新陈代谢方式的线索。
- ◆通过探针尖端热量的散失情况，测定微细气流或液流的流量。
- ◆检测试样表面成分（光热吸收分光术）：用激光照射试样，改变激光波长，同时测试样温度的变化，进而给出试样表面成分在极小尺度上的变化，实现微观尺度上的光谱分析。

27

### Profiling the Thermoelectric Power of Semiconductor Junctions with Nanometer Resolution

by Ho-Ki Lyeo, I A. A. Khajetoorians, I Li Shi, 2,3\*  
SCIENCE 303(2004)816



28

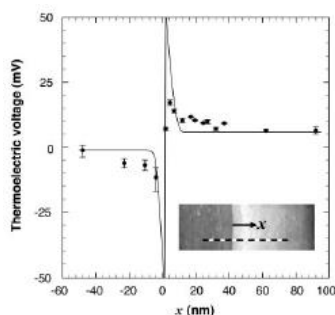


Fig. 2. Measured thermoelectric voltage (circles) and calculated  $S$  multiplied by 22 K (line) across a GaAs  $p$ - $n$  junction as a function of distance ( $x$ ). The sample was heated 30 K above the tip (room) temperature. Because of the temperature

29

### 三、液体流动产生的电动势

Carbon Nanotube Flow Sensors  
Science 14, Feb, 2003 V299, 1042

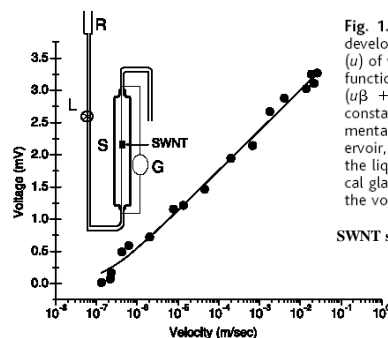
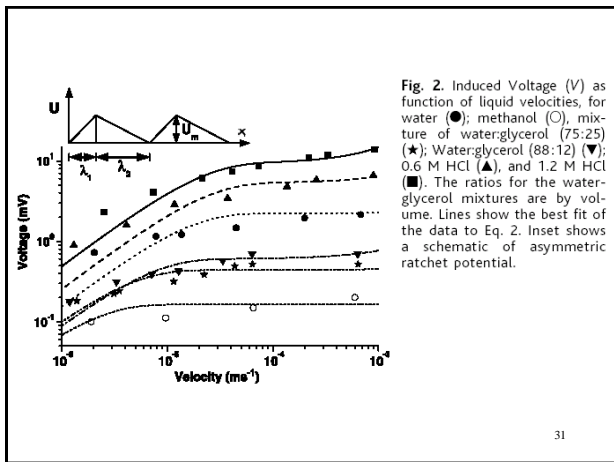


Fig. 1. Variation of voltage ( $V$ ) developed as function of velocity ( $u$ ) of water. Solid line is a fit to functional form as  $V = \alpha \log(u\beta + 1)$ , where  $\alpha$  and  $\beta$  are constants. Inset shows experimental setup where R is the reservoir, L is the valve controlling the liquid flow, S is the cylindrical glass flow chamber, and G is the voltmeter.

SWNT single walled carbon nanotube

30



31

## △ § 16.5 含源电路

### 一. 单闭合回路

考虑到  $\vec{E}_K$ ，欧姆定律的微分形式应为：

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_K)$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = \oint_L \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot d\vec{l}$$

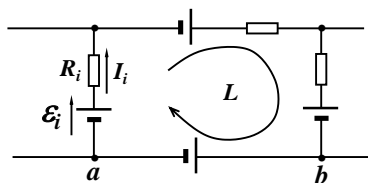
$$0 + \varepsilon_{\text{总}} = \oint_L I \frac{\rho}{S} \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon_{\text{总}} = I \oint_L dR \rightarrow \varepsilon_{\text{总}} = IR_{\text{总}}$$

对上图单回路： $\varepsilon_{\text{总}} = \varepsilon = I(R+r) = U + Ir$

$U$  — 电源的端电压 32

### 二. 有分叉的回路



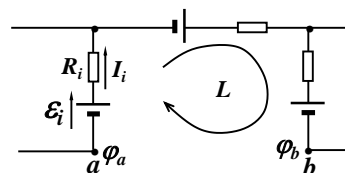
$$\sum \varepsilon_i = \sum I_i R_i \quad \text{— 基尔霍夫第二定律 (Kirchhoff second law)}$$

$I_i, \varepsilon_i$  与  $L$  绕向一致为正。

33

### 三. 一段含源电路

例如，上面电路从  $a, b$  间断开：



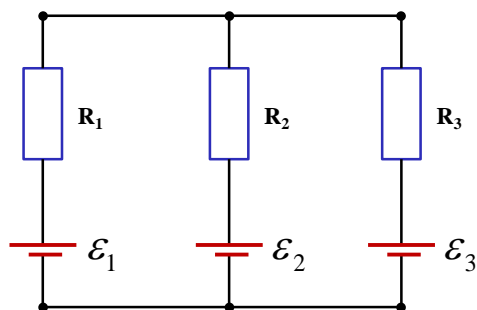
$$\sum \varepsilon_i = \sum I_i R_i + (\varphi_b - \varphi_a), \quad \text{令电压 } U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$$

有  $U_{ab} = \sum I_i R_i - \sum \varepsilon_i$  — 一段含源电路的欧姆定律

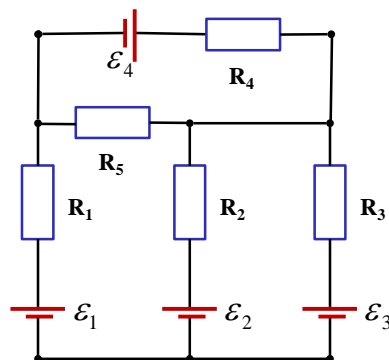
$I_i, \varepsilon_i$  的正向： $a \xrightarrow{\text{沿电路}} b$

34

### 四. 典型电路的求解



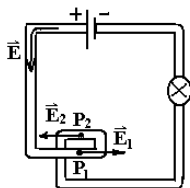
35



36

## 五、产生稳恒电场的电荷分布在何处？

### 1. 电场决不仅仅是由电源两端的电荷产生。



如图，如果仅仅是由电源两端的电荷产生， $\vec{E}_1$  与  $\vec{E}_2$  的方向决不可能截然相反！

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

37

### 2. 均匀导体内无净电荷

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

均匀导体内无净电荷

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = \oint_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sigma \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_0 + \rho'}{\epsilon_0}$$

38

### 3. 电荷分布在导体表面、电导率不均匀的界面 (体电荷积累)

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0$$

在交界面上作一个小扁盒(图 4-47)，不难证明界面两侧电流密度相等，即

$$j_1 = j_2$$

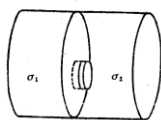
$$\sigma_1 \neq \sigma_2$$

$$j_1 = \sigma_1 E_1$$

$$j_2 = \sigma_2 E_2$$

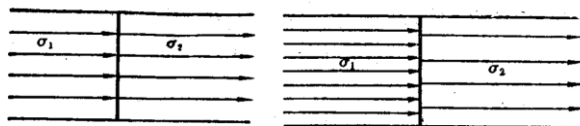
$$E_1 \neq E_2$$

但  
面  
故



$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_0 + \rho'}{\epsilon_0}$$

39



(a)  $j$  线连续

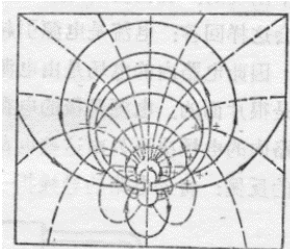
(b)  $E$  线不连续

交界面上  $j$  线连续而  $E$  线不连续

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_0 + \rho'}{\epsilon_0}$$

40

### 4. 产生稳恒电场的电荷不仅在导体内产生电场，在导体外也激发电场。



载有稳恒电流的圆形导线外部的电力线(实线)及等位面(虚线)，电源没有画出

41

### 5. 电路从开始接通到稳恒状态，有一个电荷积累过程，是非稳恒状态，但这一过程是非常短的( $10^{-8}s$ )



电路的形状发生改变，电场分布变化否？

▲对于通有稳恒电流的电路

导体内存在稳恒电场

▲稳恒电场 由不随时间改变的电荷分布产生

▲电荷只分布在导体表面和两种导体的界面

42

\*6、稳恒电场的性质（与静电场对比）

相同处：因为电荷分布不变，所以稳恒电场也

- ◆ 满足高斯定理
- ◆ 满足环路定理 同样可引入电势概念

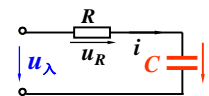
不同处：◆ 导体内有电荷流动

- ◆ 导体内场强不为零；

→ 维持稳恒电场需要提供能量

43

△ § 16.6 .电容器的充电与放电



充电：

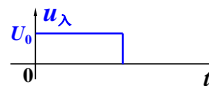
$$u_{\lambda} = u_R + u_c$$

$$U_0 = u_R + u_c$$

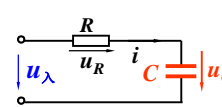
$$U_0 = iR + \frac{Q}{C} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{U_0}{R} - \frac{Q}{RC} = \frac{1}{RC} (CU_0 - Q)$$

$$Q = CU_0 (1 - e^{-t/RC}) \quad i = \frac{U_0}{R} e^{-t/RC}$$

$$u_c = U_0 (1 - e^{-t/RC})$$


44



充电：  $i = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$

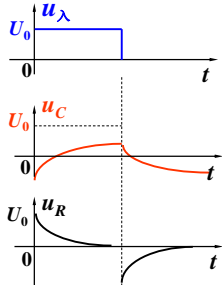
$$u_c = U_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

时间常数(time constant):  $\tau = RC$

放电：  $i = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$

$$u_c = U_0 e^{-t/\tau}$$

特点：  $u_c$  不能突变。



45

△ § 7 电流的一种经典微观图象

（本节全部自学）

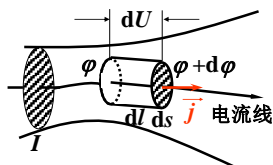
$$\vec{j} = n q \vec{u} \quad \vec{j} = n q \vec{u}$$

$$\vec{u}_0 = 0 \quad \vec{u}_1 = \vec{a} \tau = \frac{q \vec{E}}{m} \tau \quad \tau \text{ 平均自由飞行时间}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{u}_0 + \vec{u}_1}{2} = \frac{q \vec{E}}{2m} \tau \quad \vec{j} = n q \vec{u} = \frac{n q^2 \vec{E}}{2m} \tau = \frac{n q^2 \tau}{2m} \vec{E}$$

$$\sigma = \frac{n q^2 \tau}{2m} \quad \tau = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}} \quad \bar{v} \text{ 不同于 } \vec{u}$$

46



$$dP = dI \cdot dU = (j ds)^2 dR = (j ds)^2 \rho \frac{dl}{ds}$$

$$= (\sigma E)^2 \rho dV = \sigma E^2 dV$$

$$p = \sigma E^2 \quad \text{热功率密度(单位体积发热功率)}$$

电场的加速过程和晶格、杂质的散射过程导致了欧姆定律

由于电阻的存在，所以有焦耳热

$$\text{整段导体的热功率} \quad P = I^2 R$$

47



第十六章结束

48