

第三次习题课（若当标准形）

1、设 σ 是实数域上的3维线性空间 V 的一个线性变换，它关于 V 的某个基的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

(1) 求 σ 的极小多项式 $m(x)$ ，并将 $m(x)$ 在 $R[x]$ 内分解为两个首项系数为1的不可约多项式的乘积： $m(x) = m_1(x)m_2(x)$ ；

(2) 令 $W_i = \{v \in V | m_i(\sigma)v = 0\}$, $i = 1, 2$ ，证明： W_i 是 σ 的不变子空间，且 $V = W_1 \oplus W_2$ ；

(3) 在 W_1 和 W_2 中分别取基，凑成 V 的基，使得 σ 关于这个基下的矩阵只含3个非零元。

2、设 σ 是复数域上 n 维线性空间 V 的一个线性变换，证明存在可对角化的线形变换 τ 和幂零变换 ν ，使得 $\sigma = \tau + \nu$ ，且满足 $\tau\nu = \nu\tau$ 。如果已知 σ 在 V 的某个基下的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

试求 τ 和 ν 。

3、设 σ 为三维线性空间 V 上的线性变换， σ 在 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，

求 σ 的所有不变子空间。

4、设 $A, B \in M_n(C)$ 满足 $AB = BA$ ，且 A 可对角化。证明存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵， $P^{-1}BP$ 为若当标准型。

5、设6阶复方阵 A 的特征多项式为 $f(x) = (x-2)^2(x+3)^4$ ，极小多项式为 $m(x) = (x-2)(x+3)^3$ ，写出 A 的若当标准形。如果极小多项式为 $m(x) = (x-2)(x+3)^2$ ， A 的若当标准形有几种可能？

6、设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

求可逆矩阵 P 和若当标准形 J 使得 $P^{-1}AP = J$ 。

7、设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$ ，求 A^n 。

8. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 求 $A^{100} + 2A^{90} + 3A^{60}$.

9. 设 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 问: 是否存在 B , $B^2 = A$?