



清華大學

Tsinghua University

离散数学(1) Discrete Mathematics

第九章 集合

刘世霞

shixia@tsinghua.edu.cn

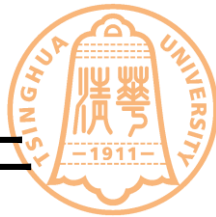


一个作业题

9. 给出一个公式,使其在 $\{1,2\}$ 域上是可满足的,而在 $\{1\}$ 域上是不可满足的.

解:

- (1) $(\exists x)(\exists y)P(x,y)$,其中 $P(x,y)$ 表示 $x < y$.
- (2) $(\exists x)P(x) \wedge (\exists y)\neg P(y)$,其中 $P(x)$ 表示 $x > 1$.
- (3) $(\exists x)P(x)$,其中 $P(x)$ 表示 $x > 1$.



公式的可满足性和普遍有效性依赖于 个体域中个体的个数

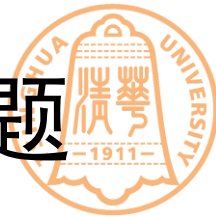
- $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)\neg P(x)$

在D1上不可满足，但在D2上可满足

- $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)\neg P(x)$

在D1上普遍有效，但在D2上则不一定。

$$D1 = \{0\}; D2 = \{0, 1\}$$
$$\text{令 } P(0) = 1, P(1) = 0$$



4.6 公式的普遍有效性和判定问题

4-6-1 普遍有效公式

设 A 为一个谓词公式，若 A 在任何解释下真值均为真，则称 A 为普遍有效的公式。

例: $(\forall x) (P(x) \vee \neg P(x))$

$(\forall x)P(x) \rightarrow P(y)$ (y 是 x 个体域中的一个元素)

$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$

$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) =$

$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \vee$

$(P(1) \wedge Q(2)) \vee (Q(1) \wedge P(2))$

4.6 公式的普遍有效性和判定问题



4-6-2 不可满足公式

设 A 为一个谓词公式，若 A 在任何解释下真值均为假，则称 A 为不可满足的公式。

例: $(\exists x)(P(x) \wedge \neg P(x))$
 $(\forall x)P(x) \wedge (\exists y)\neg P(y)$



4.6 公式的普遍有效性和判定问题

4-6-3 可满足公式

设 A 为一个谓词公式，若至少存在一个解释使 A 为真，则称 A 为可满足的公式

- 普遍有效的公式一定是可满足的公式
- $(\exists x)P(x)$ 在任一非空的个体域中可满足

内容回顾



- 命题演算
- 谓词演算



第二次数学危机

- 起因：十七世纪末，牛顿和莱布尼兹创立的微积分理论在实践中取得了成功的应用。但是，当时的微积分理论主要是建立在无穷小分析之上的，而无穷小分析后来证明是包含逻辑矛盾的。
- 经过：1734年，英国大主教贝克莱发表《分析学者，或致一个不信教的数学家。其中审查现代分析的对象、原则与推断是否比之宗教的神秘与教条，构思更为清楚，或推理更为明显》一书，对当时的微积分学说进行了猛烈的抨击。他说牛顿先认为无穷小量不是零，然后又让它等于零，这违背了背反律（数学要按照形式逻辑的不矛盾律来思维）
- 贝克莱悖论产生的原因在于无穷小量的辩证性与数学方法的形式特性的矛盾。



第二次数学危机

- 影响：第二次数学危机的产物——分析基础理论的严密化与集合论的创立。



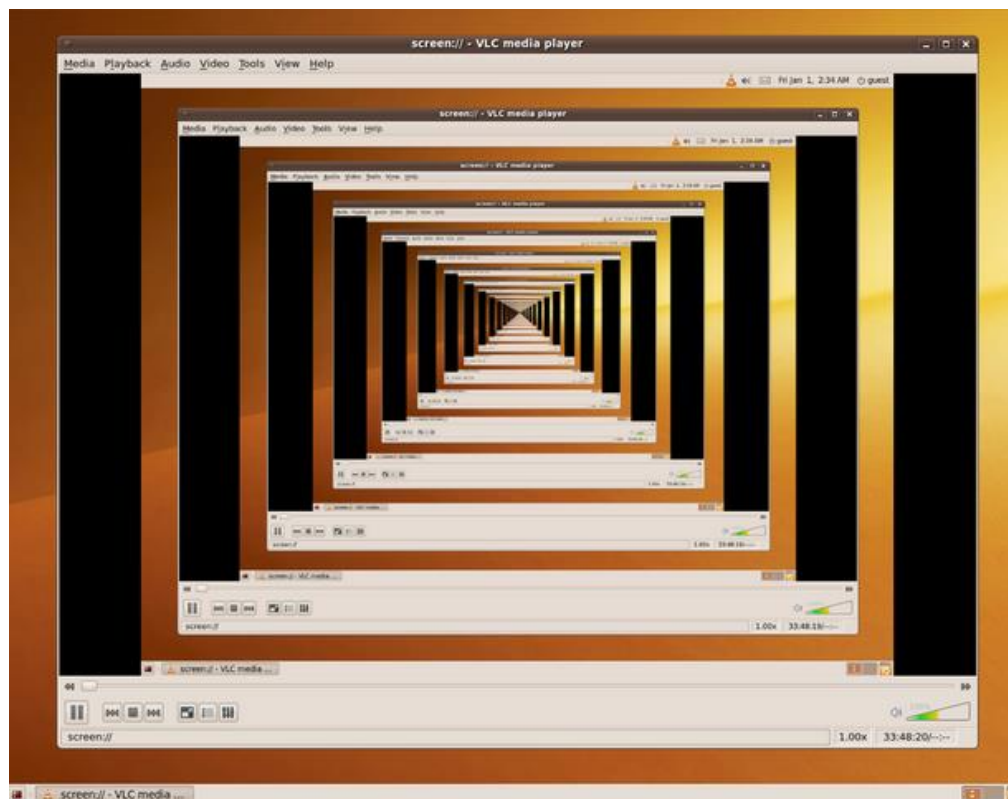
集合论是研究集合（由一堆抽象事物构成的整体）
的数学理论

集合论的全部历史都是围绕无穷集合而展开的



无穷

- Infinity (∞)





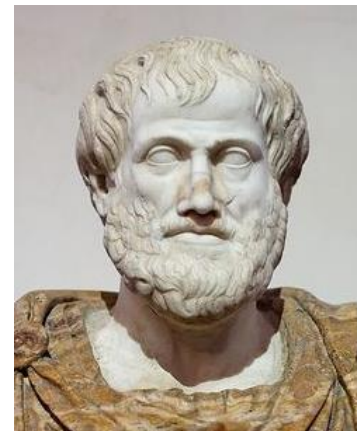
无穷

- 无穷大，无穷小…….
- 潜无穷
- 实无穷

无穷可以比大小吗？

全体自然数存在吗？

拒绝无穷的数学家们



- 两千年前古希腊人已经认识到无穷。
- 潜无穷
 - 把无限看作永远在延伸着的, 一种变化着成长着被不断产生出来的东西来解释. 它永远处在构造中, 永远完成不了, 是潜在的, 而**不是实在的。把无限看作为永远在延伸着的**（即不断在创造着的永远完成不了的）过程。

——亚里士多德



- 潜无穷
 - 不是实在. 把无限看作为永远在延伸着的

无穷可以比大小吗？

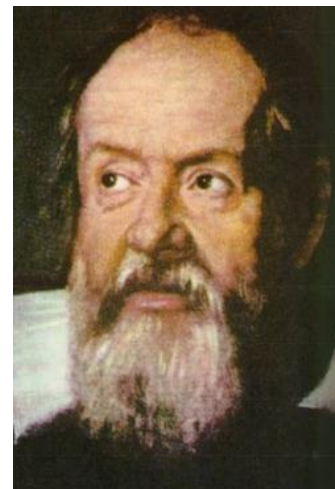
全体自然数存在吗？

亚里士多德(公元前384~前322)



- 至于“无穷”虽然潜能上由此存在，然而这类潜能的命意并不指望其实现，这只在意识上有此潜在而已。潜在的无穷是有的。但这无限不得实现为独立的存在。
- 自然数是数不完的，这表明自然数的产生是个无穷无尽的过程。只有这个过程结束了，才得到自然数的全体。但这个过程永不结束，因而无法得到自然数的全体。但是，自然数可以越来越多，多得超过任何具体的数目，因而是无穷的。这无穷表现为变化发展的过程，因而叫做“潜无穷”。

伽利略 (1564-1642)



- 《两种新科学》

- 是自然数多呢?还是完全平方数多呢?
- 直观上看, 自然数多。
- 但从另一个角度看, 有一个自然数, 便有一个完全平方数:

- 最后伽利略据此得出结论说:

- 比较无穷量是不可能的
- 所有无穷量都一样!

1	2	3	4	...	n	...
1	4	9	16	...	n^2	...

一一对应

拒绝无穷的数学家们



- 莱布尼茨 (1646—1716)
 - “所有整数的个数”这一提法自相矛盾，应该抛弃。
- 高斯 (1777—1855)
 - 我反对使用无穷量……这在数学中是绝对不允许的。
 - 我极力反对把无穷量当成一种完成的东西来使用，这在数学上是绝对不允许的。无穷个只不过是实际谈论极限时的一个说法。





绕不过去的坎

- 毕达哥拉斯
 - 当时的数学知识只能认识到整数，虽然分数总可以用整数表达
 - 数学之美在于有理数能解释一切自然现象
 - 对无理数的存在视而不见
- 无理数的发现
 - 希伯索斯：一个正方形的对角线与其一边的长度是不可公度的（若正方形的边长为1）
 - 与毕氏学派的“万物皆为数”（指有理数）的哲理大相径庭
 - 希帕索斯因为发现了根号2“无理数”的存在，为揭示了一个科学的真理而付出了生命的代价

绕不过去的坎 $\sqrt{2}$



- 无理数

- 无理数不能用有穷个有理数来表示。
- 无理数存在
- 柯西提出极限的概念，

$\sqrt{2}$ 可以看作有理数序列：1.4, 1.41, 1.414……. 的极限

- 逻辑上的循环，需要先知道 $\sqrt{2}$ ，才能确定这个有理序列是否收敛于 $\sqrt{2}$ ；但是在定义无理数之前，我们并不知道 $\sqrt{2}$ 是什么？



绕不过去的坎

- Karl Weierstrass (1815—1897)
 - 利用单调有界的有理数数列来定义无理数，从而在严格的逻辑基础上建立了实数理论.
 - $\sqrt{2}$ 即 $\{1.4, 1.41, 1.414, \dots\}$ 为“完成了的整体”
 - 序列 $1.4, 1.41, 1.414, \dots$ 的极限看作集合。
 - $\sqrt{2}$ 即 $\{1.4, 1.41, 1.414, \dots\}$
- 实无穷：把无限的整体本身作为一个现成的单位，是已经构造完成了的东西，换言之，即是把无限对象看成为可以自我完成的过程或无穷整体.



潜无穷和实无穷

- 希尔伯特认为：“在分析中，我们只是把无限大和无限小当作极限概念，当作某种正在到来、正在发生的東西来研究，即我们研究的是潜无限……或者当我们把一个区间的点看作同时存在的许多事物的总体时，这种无限性称为实无限性。”
- 美国数学家丹奇克指出：“无穷的概念既不是实验的天然物，也不是逻辑的必然物；而是数学的必然物。我们对头脑的这种肯定也许是一种纯粹的幻想，然而它却是一种必要的幻想了。”



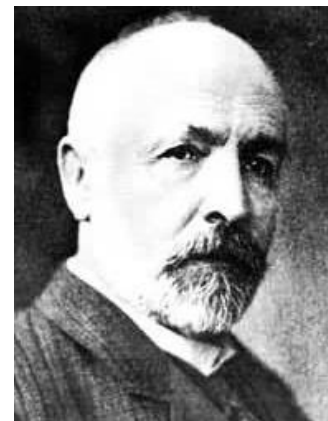
潜无穷和实无穷

- 潜无穷是把无限数量放入无限时间中：
 - 一尺之捶，日截其半，万世不竭。
- 实无穷是把无限数量放入有限时间中，实无穷可以被数尽。如同有一个点在数轴上从0点向1点移动，这个点一定会在有限时间内经过0与1之间所有的点，数完0与1之间的无穷多的点：
 - 一尺之捶，时进其距，穷其无穷。



康托尔对无穷的探索

- 最早认识到无穷集合的是捷克数学家，哲学家 Bolzano (1781–1848)
 - 集合论的先驱
 - 萌发了集合论的思想
- 康托尔创立了朴素集合论
 - 格奥尔格·康托尔 (Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philipp, 1845.3.3-1918.1.6)
 - 德国数学家，集合论的创始人。





康托尔对无穷的探索

- 哈雷大学任教（1869–1913）
- 受到其数学老师Karl Weierstrass的影响，开始研究“当函数 $f(x)$ 具有无穷多个间断点时，其三角级数展开是否唯一？”
 - 认识到无穷集合的重要性
- 1873年11月29日，康托尔在给德国数学家Dedekind的一封信中
 - **正整数集与实数集**之间能否建立一一对应呢？
 - 集合论的誕生日

正整数集与实数集之间能否
建立一一对应呢？

一个帝国



- 12月7日
- 再次致信给Dedekind说“他已经证明了正整数集和实数集之间不能建立一一对应”。
- 1874年，他提出可数集的概念。
 - On a Characteristic Property of All Real Algebraic Numbers
- 1877年，证明了平面与直线之间的点可以建立一一对应
 - 集合拓扑研究的开端



无穷集合比大小

Hilbert's paradox of Grand Hotel

- 内设无限个房间，所有的房间都客满了
- 有一位新客，想订个房间
- 1号房间的旅客移到2号房间，2号房间的旅客移到3号房间，3号房间的旅客移到4号房间等等……
- 新客就被安排住进了已被腾空的1号房间





- 又来了无穷多位要求订房间的客人
- 把1号房间的旅客移到2号房间，2号房间的旅客移到4号房间，3号房间的旅客移到6号房间，如此等等，这样继续下去。
- 现在，所有的单号房间都腾出来了，新来的无穷多位客人可以住进去，问题解决了！





又来了无穷多个旅行团，
每个旅行团有无穷多个旅客？





分析

- 这一问题虽然被称作“悖论”，但事实上它并不矛盾，而仅仅是与我们直觉相悖而已。在有无限个房间时，“每个房间都客满”与“无法入住新的客人”两者其实并不等价。
- 无限集合的性质与有限集合的性质并不相同。对于拥有有限个房间的旅馆，其奇数号房间的数量显然总是小于其房间总数的。然而，在希尔伯特所假想的这一旅馆中，奇数号房间数与总房间数是相同的。
- 在数学上可以表述为包含所有房间的集合的基数与包含所有奇数号房间的子集的基数相同。

宇宙哲学争论



- 由于希尔伯特的这一悖论违反了我们的直觉，因而经常被用于反对实无穷的存在，
 - 如美国哲学家威廉·莱恩·柯莱格（William Lane Craig）就曾这样来证明上帝的存在：尽管在数学上这种旅馆（或任何无限的事物）并非是不可能的，但从直觉上这样的事物永远不可能存在，不仅如此，任何实无穷都不可能存在。如果一个时间序列能够无限地回退到过去那就会建立起一个实无穷，既然实无穷不存在，那时间就必然有个“起点”。每个事物都有其发生的原因，而时间起始的原因不可能是其他事物，只能是上帝

有限的酒店，无限的可能

Nothing is impossible



- 一对年老的夫妻走进一家旅馆，他们想要一个房间。前台侍者回答说：“对不起，我们旅馆已经客满了，一间空房也没有剩下。”。
- 好心的侍者将这对老人引领到一个房间，说：“也许它不是最好的，但现在我只能做到这样了。”
- 第二天，当他们来到前台结账时，侍者却对他们说：“不用了，因为我只不过是把自己的屋子借给你们住了一晚，祝你们旅途愉快！”



有限的酒店，无限的可能

- 侍者接到了一封信函 打开看 里面有一张去纽约的单程机票并有简介
- 他乘飞机来到一个地方，
抬眼一看，
- 他接待的是富翁。富翁为
这个侍者买了一个大
酒店。





实数集合不可数

- 同样是无穷集合，如果集合里的元素能够与全体正整数构成一一对应的关系，我们就说它是可数的，否则就说它是不可数的。
- 1874 年，Cantor 发表了一篇重要的论文，论文中证明了全体有理数甚至是全体代数数都是可数的，但全体实数却是不可数的。换句话说，同样是无穷多，实数的数量比有理数、代数数的数量都高出了一个级别。



对角线方法（1891年）

- **Cantor's Diagonal Method**
- 假设你把实数区间 $(0, 1)$ 里的所有数按照某种顺序排列起来

- $a_1 = 0.\underline{0}147574628\dots$
 $a_2 = 0.3\underline{7}2111111\dots$
 $a_3 = 0.23\underline{2}3232323\dots$
 $a_4 = 0.000\underline{4}838211\dots$
 $a_5 = 0.0516\underline{0}00000\dots$
.....

小数点后第一位不等于 a_1 的第一位，

小数点后第二位不等于 a_2 的第二位，

.....

总之小数点后第 i 位不等于 a_i 的第 i 位。

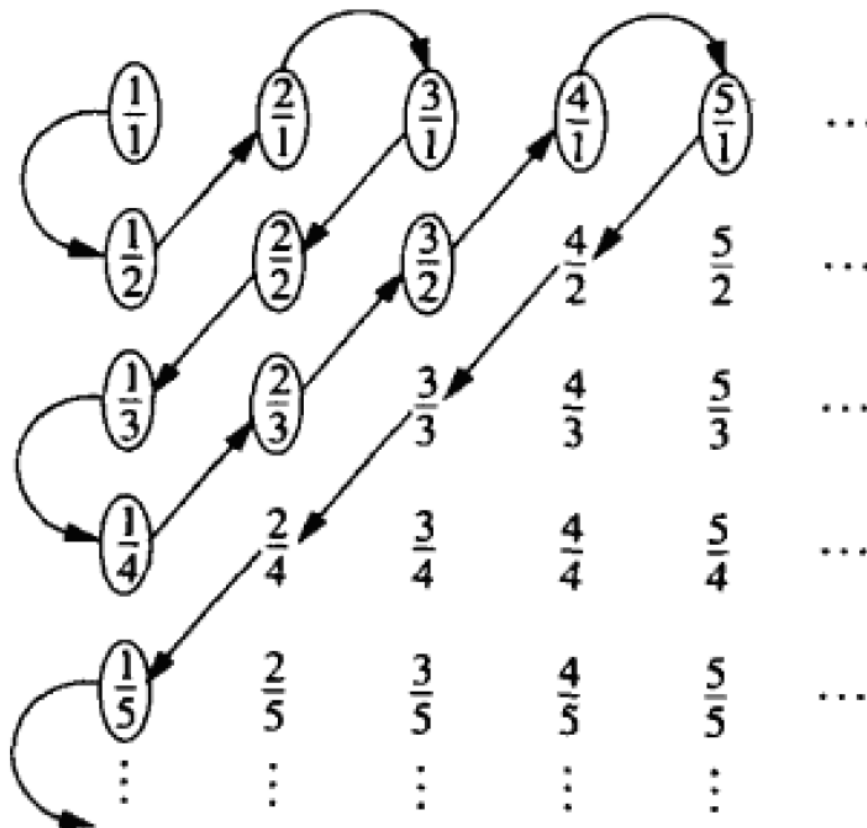
这个数属于实数区间 $(0, 1)$ ，但它显然不在你的列表里，因为它和你列表里的每一个数都有至少一位是不同的。

我们就证明了实数区间是不可数的。



正有理数是可数的

- 把正有理数(p/q)排成序列
 - 第一行列出分母 $q=1$ 的正有理数, 第2行列出 $q=2$ 的正有理数
- 排列
 - 先列出 $p+q=2$ 的正有理数, 再列出 $p+q=3$ 的正有理数





康托尔的乐园

- 1879年–1884年 线性连续统
 - 《关于无穷的线性点集》
 - 1883年 《一般集合论基础》
- 1895年 《对超穷集合论基础的贡献》
 - 以集合作为基础，符号化
 - 基数
 - 运算



连续统假设

- 1874, 可数集基数和实数基数之间没有别的基数。
- Hilbert二十三个数学问题之首（巴黎第二届国际数学会会议）。
- 1938年哥德尔证明了连续统假设和世界公认的ZFC公理系统不矛盾。
- 1963年美国数学家科亨证明连续假设和ZFC公理系统是彼此独立的。
 - 连续统假设不能在ZFC公理系统内证明其正确性与否。



磨难

- 反对，粗暴攻击

- 由于学术观点上受到的沉重打击，使康托尔曾一度患精神分裂症，虽在1887年恢复了健康，继续工作，但晚年一直病魔缠身。1918年1月6日在德国哈雷（Halle）-维滕贝格大学附属精神病院去世。
- 柏林学派的代表人物之一、构造主义者克罗内克。克罗内克认为，数学的对象必须是可构造出来的，不可用有限步骤构造出来的都是可疑的，不应作为数学的对象，他反对无理数和连续函数的理论，同样严厉批评和恶毒攻击康托尔的无穷集合和超限数理论不是数学而是**神秘主义**。

克罗内克是康托尔的老师



磨难

- 病态，不认可
 - 法国数学家庞加莱（Poincare, Jules Henri, 1854.4.29–1912.7.17）
 - “我个人，而且还不只我一人，认为重要之点在于，切勿引进一些不能用有限个文字去完全定义好的东西”。他把集合论当作一个有趣的“病理学的情形”来谈，并且预测说：“后一代将把（Cantor）集合论当作一种疾病，而人们已经从中恢复过来了”。



磨难

- 病态

- 德国数学家外尔（Weyl, Claude Hugo Hermann, 1885.11.9—1955.12.8）认为，康托尔关于基数的等级观点是“雾上之雾”。
- 数学家H. A. 施瓦兹原来是康托尔的好友，但他由于反对集合论而同康托尔断交。
- 集合论的悖论出现之后，他们开始认为集合论根本是一种病态，他们以不同的方式发展为经验主义、半经验主义、直觉主义、构造主义等学派，在基础大战中，构成反康托尔的阵营。



病痛，磨难

- 老师**克罗内克**：“康托尔走进了超穷数的地狱”
 - 上帝创造了正整数，其余的是人的工作
- 1884年，连续统假设长期得不到证明，再加上与克罗内克的尖锐对立，精神上屡遭打击……
- 5月底，他支持不住了，第一次精神崩溃。他的精神沮丧，不能很好地集中研究集合论，从此深深地卷入神学、哲学及文学的争论而不能自拔。
- 不过每当他恢复常态时，他的思想总变得超乎寻常的清晰，继续他的集合论的工作



拨开云雾见月明

- 1897, 瑞士苏黎世召开的第一届国际数学家大会。
- 苏黎世理工大学教授胡尔维茨 (Hurwitz, Adolf, 1859—1919) 在他的综合报告中, 明确地阐述康托尔集合论对函数论的进展所起的巨大推动作用。
 - 这破天荒第一次向国际数学界显示康托尔的集合论不是可有可无的哲学, 而是真正对数学发展起作用的理论工具。
 - 康托尔的集合论得到公开的承认和热情的称赞。



高度赞誉

- 希尔伯特(Hilbert David, 1862.1.23-1943.2.14)高度赞誉康托尔的集合论
 - “是数学天才最优秀的作品”
 - “是人类纯粹智力活动的最高成就之一”
 - “是这个时代所能夸耀的最巨大的工作”。
 - 在1900年第二届国际数学家大会上，希尔伯特高度评价了康托尔工作的重要性，并把康托尔连续统假设列入20世纪初有待解决的23个重要数学问题之首。



现代数学的基石

- 人类认识史上第一次给无穷建立起抽象的形式符号系统和确定的运算，它从本质上揭示了无穷的特性，使无穷的概念发生了一次革命性的变化。
- 从根本上改造了数学的结构，促进了数学的其他许多新的分支的建立和发展，成为实变函数论、代数拓扑、群论和泛函分析等理论的基础，还给逻辑和哲学带来了深远的影响。

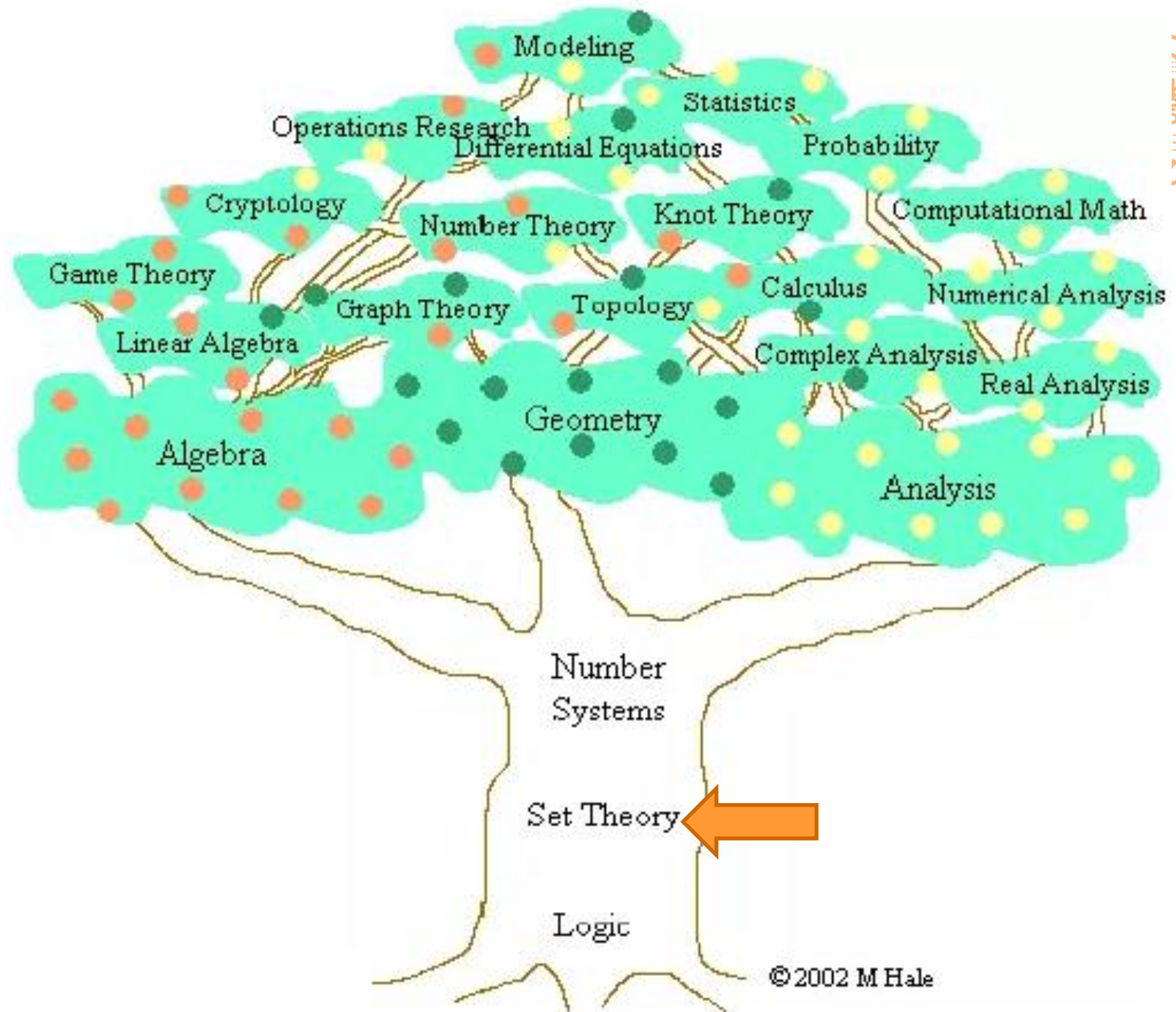
[shù xué] 🔊

数学 (学科)



数学 (mathematics或maths)，是研究数量、结构、变化、空间以及信息等概念的一门学科，从某种角度看属于形式科学的一种。

借用《数学简史》的话，数学就是研究集合上各种结构（关系）的科学，可见，数学是一门抽象的学科，而严谨的过程是数学抽象的关键。





集合论的主要内容

- 在朴素集合论中，集合被当做一堆物件构成的整体之类的自证概念
- 在公理化集合论中，集合和集合成员并不直接被定义，而是先规范可以描述其性质的一些公理。
- 由集合构造出的离散结构包括
 - 组合：无序对象汇集，广泛用于计数
 - 关系：序偶的集合用于表示对象之间的关系
 - 图：节点和连接节点的边的集合
 - 有限状态机：为计算机机器建模



集合论的应用

- 构造性数学的重要基础
 - 数理逻辑，抽象代数、图论等
- 计算数学理论的重要基础
 - 计算理论、模型论、形式语言与自动机理论、形式语义学
- 软件理论与技术的重要基础
 - 数据结构、编译原理和数据库原理中得到了重要的应用



在希尔伯特提出的 23 个数学问题中连续统假设位列第 ()

- ☐ A 2
- ☐ B 3
- ☒ C 1
- ☐ D 23



第九章 集合

- 9.1 集合的概念与表示方法
- 9.2 集合间的关系和特殊集合
- 9.3 集合的运算
- 9.4 集合的图形表示法
- 9.5 集合运算的性质和证明
- 9.6 有限集合的基数
- 9.7 集合论公理系统



9.1 集合的概念与表示方法



集合论

- 原始概念

- 不加严格定义而直接使用 例：点、线、面

- 集合，元素

- 属于，不属于

- 康托尔的说法

- 把满足一定性质的事物概括成一个整体就做成了一个集合(set)，组成集合的事物成为集合的元素(element)，若某一事物是一个集合的元素，则称这个事物属于这个集合，否则就称这个事物不属于这个集合。



9-1-1 集合(Set)的概念

- 集合是一些确定的、可以区分的事物汇聚在一起组成的一个整体。组成一个集合的每个事物称为该集合的一个元素。

—— 教材 P129

- 吾人直观或思维之对象，如为相异而确定之物，其总括之全体即谓之集合，其组成此集合之物谓之集合之元素。

—— 肖文灿 《集合论初步》

在中国出版的第一本集合论书籍



集合的表示法

- 集合的元素可以是任何事物
- 各个元素可以区分，不重复(互异性)
- 各个元素之间无次序(无序性)
- 任何事物是否属于一个集合，结论是确定的。

$$B=\{9,8,8,7\}$$

$$B=\{9,8,7\}$$

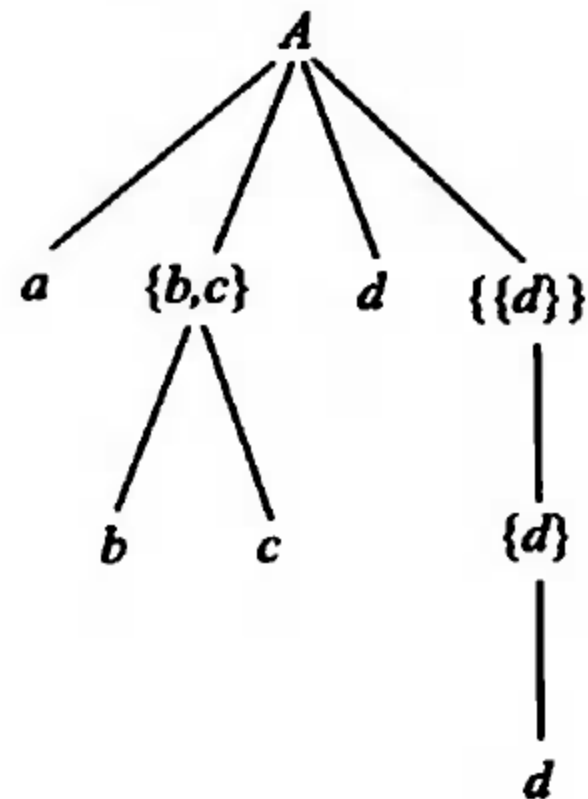
$$B=\{7,8,9\}$$

$$B=\{7,\{8,\{9\}\}\}$$



集合举例

- $A = \{a, \{b, c\}, d, \{\{d\}\}\}$
- b 是集合 A 的元素吗?
- c 是集合 A 的元素吗?
- d 是集合 A 的元素吗?





- \mathbb{N} : 全体自然数集合
- 0是不是自然数?
- \mathbb{N}^+ : 除0以外的其他自然数的全体构成的集合
- \mathbb{Z} : 全体整数集合
- \mathbb{Z}^+ : 全体正整数集合
- \mathbb{Q} : 全体有理数集合
- \mathbb{R} : 全体实数集合
- 若元素 a 属于集合 A , 记为 $a \in A$, 否则记为 $a \notin A$



- 集合的描述性定义是康托尔根据概括原则 (Principle of Comprehension) 而定义的。
- 发现不加限制使用概括原则会导致悖论。
 - “康托尔定理”：任意集合（包括无穷集）的幂集的基数大于该任意集合的基数。
 - 所有的集合可以构成一个集合M的话，
 - 所有M的子集构成的集合，哪个大？
 - 1899年康托尔悖论
 - 规定：一个集合自身不能作为它的元素。
 - 对任何集合A 都有 $A \notin A$



9-1-3 集合的表示法

- 外延表示法
 - 穷举法(Method of Enumeration)或列举法
- 内涵表示法
 - 描述法, 概括法, 谓词表示法, 即用谓词来概括集合中元素的性质。一般而言, 如果 $P(x)$ 表示一个谓词, 则可以用 $\{x \mid P(x)\}$ 或 $\{x : P(x)\}$ 表示一个集合。



9-1-3 集合的表示法

- 内涵表示法（续）

- $\{x \mid P(x)\}$ 是使得 $P(x)$ 为真的所有元素 x 组成的集合。

- 即，若 $P(a)$ 为真，则 a 属于该集合。

- 归纳定义法(Inductive Definition)

- $G = \{x \mid x=1 \vee (\exists y)(y \in G \wedge x = \{y\})\}$



- 结论

用自然语言表达的条件其明确性需加以特别注意

- 有些貌似明确的条件其实并不明确。



悖论

- 悖论 (paradox) 来自希腊语 “para+dokein”，意思是 “多想一想”。
- 这个词的意义比较丰富，它包括一切与人的直觉和日常经验相矛盾的数学结论，那些结论会使我们惊异无比。



- 《唐·吉珂德》(17世纪)
- 唐·吉珂德的仆人桑乔·潘萨跑到一个小岛上，成了这个岛的国王。
 - 每一个到达这个岛的人都必须回答一个问题：“你到这里来做什么？”如果回答对了，就允许他在岛上游玩，而如果答错了，就要把他绞死。
 - 一天，有一个胆大包天的人来了，这个人的回答是：“我到这里来是要被绞死的。”

Russell 悖论 (1903) 教材P131 例5



- 分析如下集合：
 $H = \{x \mid x \text{ 是一个集合} \wedge x \notin x\}$
- 任一集合 x , 若 $x \notin x$, 则这个 x 就是集合 H 的元素。
 $\because x$ 是集合, 任一事物都可明确是否属于它, 于是 $x \notin x$ 是有意义的。
- 问题: H 是集合吗?



结论与证明

- $H = \{x \mid x \text{ 是一个集合} \wedge x \notin x\}$
- **H不能确定一个集合，或集合H不存在。**

问题：集合H属于它本身吗？

- 设 $y = H$,
若 $y \in H$, $\because y$ 是 H 的元素, y 就具有 H 中元素的性质,
 $y \notin y$ (注意现在 $y = H$)
 $\therefore y \notin H$.
- 若 $y \notin H$, 则 y 不具备 H 中元素的性质,
则由 $y \in y \Rightarrow y \in H$. 均与前提矛盾。



罗素悖论

- 罗素悖论一提出就在当时的数学界与逻辑学界内引起了极大震动。
 - 德国的著名逻辑学家弗里兹在他的关于集合的基础理论完稿付印时，收到了罗素关于这一悖论的信。
 - 他只能在自己著作的末尾写道：“一个科学家所碰到的最倒霉的事，莫过于是在他的工作即将完成时却发现所干的工作的基础崩溃了。”
- 第三次数学危机



危机？

- 当康托尔的朴素集合论出现一系列悖论时，克罗内克的后继者布劳威尔（1881. 2. 27—1966. 12. 2）等人借此大做文章，希尔伯特用坚定的语言向他的同代人宣布：

谁都不能把我们从康托尔为我们创造的乐园中赶出去！





问题在于：

错误地假设 H 是集合，
实际上 H 不是集合。



重要结论：

集合论不能研究

“由所有集合组成的集合”。



罗素悖论的解决

- 既然 $\{ x \mid x \text{ 是一个集合} \wedge x \notin x \}$ 不是集合
那么其它的 $\{ x \mid P(x) \}$ 都是集合吗？
- 集合论的公理系统回答了上述问题。
- 包括一些基本集合的存在性，以及如何由已知集合构造新的集合。将在9.7节集合论公理系统中介绍。

9.2 集合间的关系和特殊集合



- 把满足一定性质的事物概括成一个整体就做成了一个**集合(set)**,组成集合的事物成为集合的**元素(element)**,若某一事物是一个集合的元素,则称这个事物**属于**这个集合,否则就称这个事物**不属于**这个集合。
- 类比数字 $=, \leq, <, >, \geq$



定义9.2.1 集合的相等

- 两个集合 A, B 相等，当且仅当它们**具有相同**的元素。则记作 $A = B$ ；否则记作 $A \neq B$ 。
- 该定义的符号化表示为

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x) \neg (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$



定义9.2.2 子集(subset)

- 设 A, B 为集合，若 A 中的每个元素都是 B 的元素，则称 A 为 B 的子集合，简称子集。
- 这时称 B 包含 A ，记作 $A \subseteq B$ 。该定义的符号化表示为

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

- 空子集？



定理9. 2. 1

- 两个集合相等的充要条件是它们互为子集。
- 符号化表示为

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$



定理9.2.2

- 对任意的集合 A , B 和 C , 包含关系 \subseteq 分别具有下列性质:
 - (1) $A \subseteq A$ (自反性)
 - (2) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow A = B$ (反对称性)
 - (3) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$ (传递性)
- 思考: 将上面的 ' \subseteq ' 换为属于 ' \in ' 是否仍满足传递性



练习题

设 $A=\{a,\{a\},\{a,b\},\{\{a,b\},c\}\}$ 判断下面命题的真值。

(1) $\{a\} \in A$

(2) $\neg(\{a\} \subseteq A)$

(3) $c \in A$

(4) $\{a\} \subseteq \{\{a,b\},c\}$

(5) $\{\{a\}\} \subseteq A$

(6) $\{a,b\} \in \{\{a,b\},c\}$

(7) $\{\{a,b\}\} \subseteq A$

(8) $\{a,b\} \subseteq \{\{a,b\},c\}$

(9) $\{c\} \subseteq \{\{a,b\},c\}$

(10) $(\{c\} \subseteq A) \rightarrow (a \in \emptyset)$

定义9.2.3 真子集 (proper subset)



- 对任意两个集合 A 和 B ，若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ ，则称 A 是 B 的真子集，或称 B 真包含 A 。记作 $A \subset B$ 。该定义的符号化表示为

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$



定义9.2.4 两集合不相交

- 若两个集合 A 和 B 没有公共元素，就称 A 和 B 是不相交的。该定义也可写成

$$A \text{ 和 } B \text{ 不相交} \Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$$

定义9.2.5 空集 (empty set)



- 不含任何元素的集合称为**空集**，记作 \emptyset 。
- 念oe，为拉丁字母，区别于希腊字母 Φ (念fi)) 或者 $\{ \}$ 表示
- 空集可符号化为 $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$
- 为何要引入？表述问题方便、准确



定理9.2.3 空集是一切集合的子集

- 空集是一切集合的子集。
- 即，对任意的集合 A ， $\emptyset \subseteq A$ 。
- 证明：反证法，假设存在集合 A ，使 $\emptyset \not\subseteq A$ ，则存在 x ，使 $x \in \emptyset$ ，且 $x \notin A$ 。
- 这与空集 \emptyset 的定义矛盾，所以定理得证。
 $(\forall x)(x \notin \emptyset)$ 为永真式，恒成立。



推论 空集是唯一的

证 假设存在空集 \emptyset_1 和 \emptyset_2 ，由定理9.2.3有

$$\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2 \text{ 和 } \emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$$

根据集合相等的定义，有 $\emptyset_1 = \emptyset_2$

定义9.2.6 全集 (universal set)



- 在给定的问题中，所考虑的所有事物的集合称为**全集**，记作 E 。该定义亦可叙述为，在一个具体问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为全集。全集的定义可符号化表示为

$$E = \{ x \mid x = x \}$$

- 全集是有相对性的，不同的问题有不同的全集。即使同一个问题也可以取不同的全集。
- 性质：**对于任何集合 A ，都有 $A \subseteq E$ 。



9.3 集合的运算



定义9.3.1 （五种基本运算）

- 集合的基本运算包括并，交，差（相对补），余集和对称差。
- 在原来集合的基础上，通过这些运算产生新的集合。
- 分别定义如下：对集合 A 和 B

(1) 并集(**union**) $A \cup B$ 定义为

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

(2) 交集(**intersection**) $A \cap B$ 定义为

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$



定义9.3.1 （五种基本运算）

(3) 差集 (difference) $A - B$ 定义为

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

又称 B 对 A 的相对补集。

差运算与并运算之间不是逆运算。

一般而言，
 $(A - B) \cup B \neq A$
 $(A \cup B) - B \neq A$



定义9.3.1 (五种基本运算)

(4) A 的余集(**complement**) $-A$ 定义为

$$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$$

其中 E 为全集。 A 的余集又称 A 的绝对补集，也是 A 对 E 的相对补集

(5) 对称差(**symmetric difference**) $A \oplus B$ 定义为 *

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \bar{\vee} x \in B\}$$

只有 A 或者 B 出现的元素



- https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_difference
- http://baike.baidu.com/link?url=vKkHOMyCRsTePFSMQtb1MugyVi_6KJ3N06Dy-Mr6B9pQCsUsGX6VQs00VwsNLq3BkAx1gdLCR2Yz8JcZHGKEia



定义9.3.2 广义并和广义交

- 设 A 为集合， A 的元素也都是集合，则将 **A 的所有元素的元素组成的集合称为 A 的广义并**，记作 $\cup A$ ；符号化表示为

$$\cup A = \{ x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z) \}$$

$$\cup A = \{ x \mid x \in \text{某个 } z \in A \} \quad (\text{简化写法})$$

- 此外，对空集 \emptyset 可以进行广义并， $\cup \emptyset = \emptyset$ 。
- 并集的推广，去掉内层括号，重复元仅计一次

若 $A = \{ A_1, A_2, \dots, A_n \}$ ，则 $\cup A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$



定义9.3.2 广义并和广义交

- 设 A 为非空集合， A 的元素也都是集合，将 A 的所有元素的公共元素组成的集合称为 A 的广义交，记作 $\cap A$ 。符号化表示为

$$\cap A = \{ x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z) \}$$

$$\cap A = \{ x \mid x \in \text{每个 } z \in A \} \quad (\text{简化写法})$$

- $\cap \emptyset$ 不是集合，没有意义。空集 \emptyset 不含任何元素， $\cap \emptyset$ 无意义。

若 $A = \{ A_1, A_2, \dots, A_n \}$ ，则 $\cap A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$



广义并和广义交举例

$$\bigcup A = \{ x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z) \}$$

$$\bigcap A = \{ x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z) \}$$

- $A = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}\}$
- $\bigcup A = \{a, b, c, d\}$
- $\bigcap A = \{b\}$



定义9.3.3 幂集 (power set)

- 设 A 为集合，由 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集，记作 $P(A)$ 。符号化表示为

$$P(A) = \{x | x \subseteq A\}$$

对任意的集合 A ，有 $\emptyset \subseteq A$ 和 $A \subseteq A$ ，因此有 $\emptyset \in P(A)$ 和 $A \in P(A)$ 。

$$x \in P(A) \Leftrightarrow x \subseteq A$$

- 思考：集合的广义并与求幂之间的关系

$$\bigcup(P(A)) = A$$



A的幂集有多少个元素？

- $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

- $A = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}\}$

$$\cup A = \{a, b, c, d\}$$

$$P(\{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}\}) = \{ \emptyset, \\ \underline{\{\{a, b, c\}\}}, \underline{\{\{a, b, d\}\}}, \underline{\{\{b, c, d\}\}}, \underline{\{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}}, \\ \underline{\{\{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}}, \underline{\{\{a, b, d\}, \{b, c, d\}\}}, \\ \underline{\{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}\}} \}$$

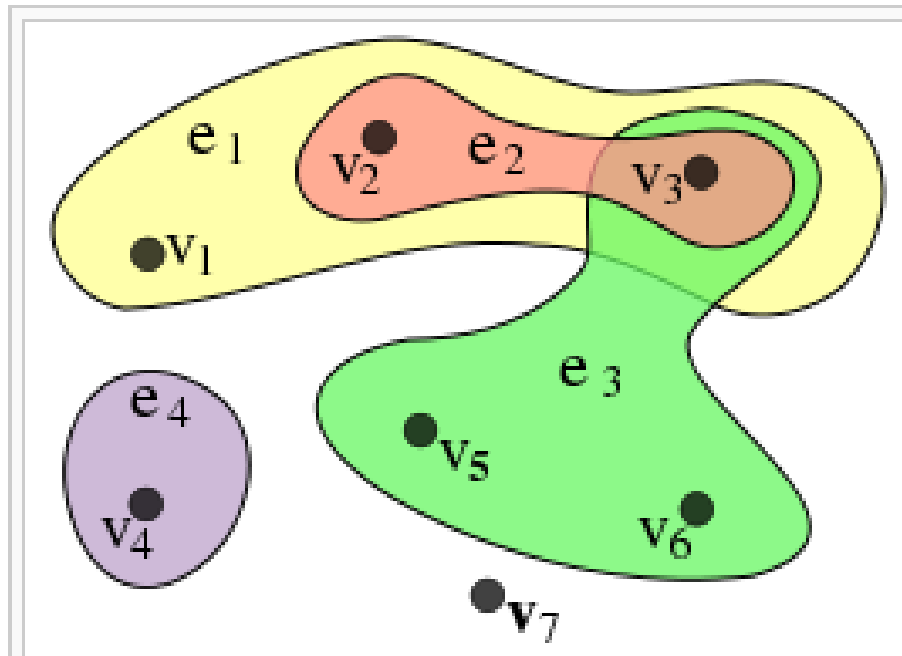
Application Example-Hypergraph



- In mathematics, a **hypergraph** is a generalization of a graph in which an edge can connect any number of vertices.
- Formally, a hypergraph H is a pair $H = \{X, E\}$, where X is a set of elements called nodes or vertices, and E is a set of non-empty subsets called hyperedges or edges.
- Therefore, E is a subset of $P(X) - \emptyset$, where $P(X)$ is the **power set** of X .



An Example



An example of a hypergraph, with
 $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$
and $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} =$
 $\{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\},$
 $\{v_3, v_5, v_6\}, \{v_4\}\}.$



Applications

- Recommender system
 - Communities as hyperedges
- Image retrieval/Image classification
 - Correlations as hyperedges
- Image segmentation
 - Similar neighboring pixels as hyperedges
- ...



子集的个数

- **定理：** 设 A 为一个有限集，且 $|A|=n$ ，则 A 的子集个数为 2^n

– **证明：** 集合 A 的子集最多有 n 个元素，最少有 0 个元素。

0 个元素的子集共有 $C(n, 0)$ 个；

1 个元素的子集共有 $C(n, 1)$ 个；

.....

n 个元素的子集共有 $C(n, n)$ 个.

因此，集合 A 共有子集 $C(n, 0) + C(n, 1) + \dots$

$C(n, n) = 2^n$ 个。



思考题

仅用空集 \emptyset 构造：

1. 一个相异集合的无穷序列，序列中每个集合至多仅包含一个元素；
2. 一个相异集合的无穷序列，序列中第 i 个集合恰包含 i 个元素 ($i = 0, 1, \dots$)。



解答

- $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots$
- $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\} \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$
 $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$



9-3-4 有序对

- 由两个元素 x 和 y （允许 $x=y$ ）按给定次序排列组成的二元组称为一个有序对或序偶，记作 $\langle x, y \rangle$ ，其中 x 是它的第一元素， y 是它的第二元素。
- 有序对 $\langle x, y \rangle$ 具有以下性质：
 1. 当 $x \neq y$ 时， $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$ 。
 2. $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ 的充要条件是 $x = u$ 且 $y = v$ 。



定义9.3.4

- 用集合的形式，有序对 $\langle x, y \rangle$ 定义为

$$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$



定义9.3.5 n 元组

- 若 $n \in N$ 且 $n > 1$, x_1, x_2, \dots, x_n 是 n 个元素, 则 n 元组 $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ 定义为

当 $n = 2$ 时, 二元组是有序对 $\langle x_1, x_2 \rangle$ 。

当 $n \neq 2$ 时,

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \langle \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$$

定义9.3.6 集合A和B的笛卡儿积 (Descartes product)



- 设 A, B 为集合，用 A 中元素为第一元素， B 中元素为第二元素构成有序对。
- 所有这样的有序对组成的集合称为 A 和 B 的笛卡儿积，记作 $A \times B$ 。
- A 和 B 的笛卡儿积的符号化表示为

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$$



9-3-7 n 阶笛卡儿积

- 若 $n \in N$ 且 $n > 1$, A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个集合, 它们的 n 阶笛卡儿积记作 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, 并定义为

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

$$= \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n \}$$



9-3-7 n 阶笛卡儿积

- $A=\{a,b\}$ $B=\{0,1,2\}$
- $A \times B = \{ \langle a,0 \rangle, \langle a,1 \rangle, \langle a,2 \rangle, \langle b,0 \rangle, \langle b,1 \rangle, \langle b,2 \rangle \}$
- $B \times A = \{ \langle 0,a \rangle, \langle 1,a \rangle, \langle 2,a \rangle, \langle 0,b \rangle, \langle 1,b \rangle, \langle 2,b \rangle \}$
- $A \times A = A^2 = \{ \langle a,a \rangle, \langle a,b \rangle, \langle b,a \rangle, \langle b,b \rangle \}$



9-3-8 集合运算的优先顺序

- 称广义并，广义交，幂集，绝对补运算($\cup A$, $\cap A$, $P(A)$, $-A$)为一元运算；
- 并，交，对称差，笛卡儿积，相对补运算($-$, \cup , \cap , \oplus , \times)为二元运算。

9-3-8 集合运算的优先顺序 (续)



- 一元运算($\neg A$, $P(A)$, $\cap A$, $\cup A$)优先于二元运算(\neg , \cap , \cup , \oplus , \times);
- 二元运算优先于集合关系运算($=$, \subseteq , \subset , \in);
- 集合运算优先于逻辑运算(\neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow , \Leftrightarrow , \Rightarrow)。
- 括号内优先于括号外的; 同一层括号内, 相同优先级的, 按从左到右的顺序进行。



9.4 集合的图形表示法

9-4-1 文氏图 (Venn Diagram)



- 英国逻辑学家J.Venn(1834-1923)于1881年在《符号逻辑》一书中，首先使用相交区域的图解来说明类与类之间的关系。
- 后来人们以他的名字来命名这种用图形来表示集合间的关系和集合的基本运算的方法。简称文氏图。

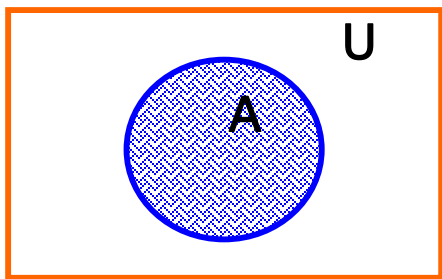
9-4-1 文氏图 (Venn Diagram)



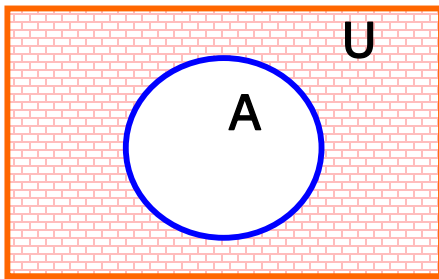
- 其构造如下：用一个大的矩形表示全集的所有元素（有时为简单起见，可将全集省略）。
- 在矩形内画一些圆（或任何其它形状的闭曲线），用圆的内部的点表示相应集合的元素。不同的圆代表不同的集合。用阴影或斜线的区域表示新组成的集合。
- 文氏图的优点是形象直观，易于理解。
缺点是理论基础不够严谨。因此只能用于说明，不能用于证明。



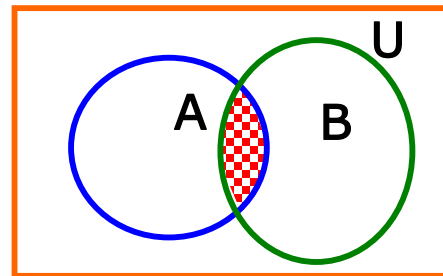
文氏图表示的集合并、交、差、补运算



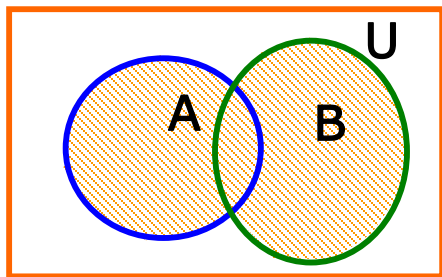
A



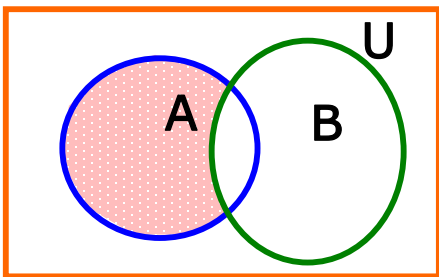
$-A$



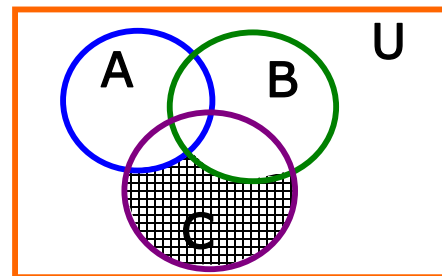
$A \cap B$



$A \cup B$

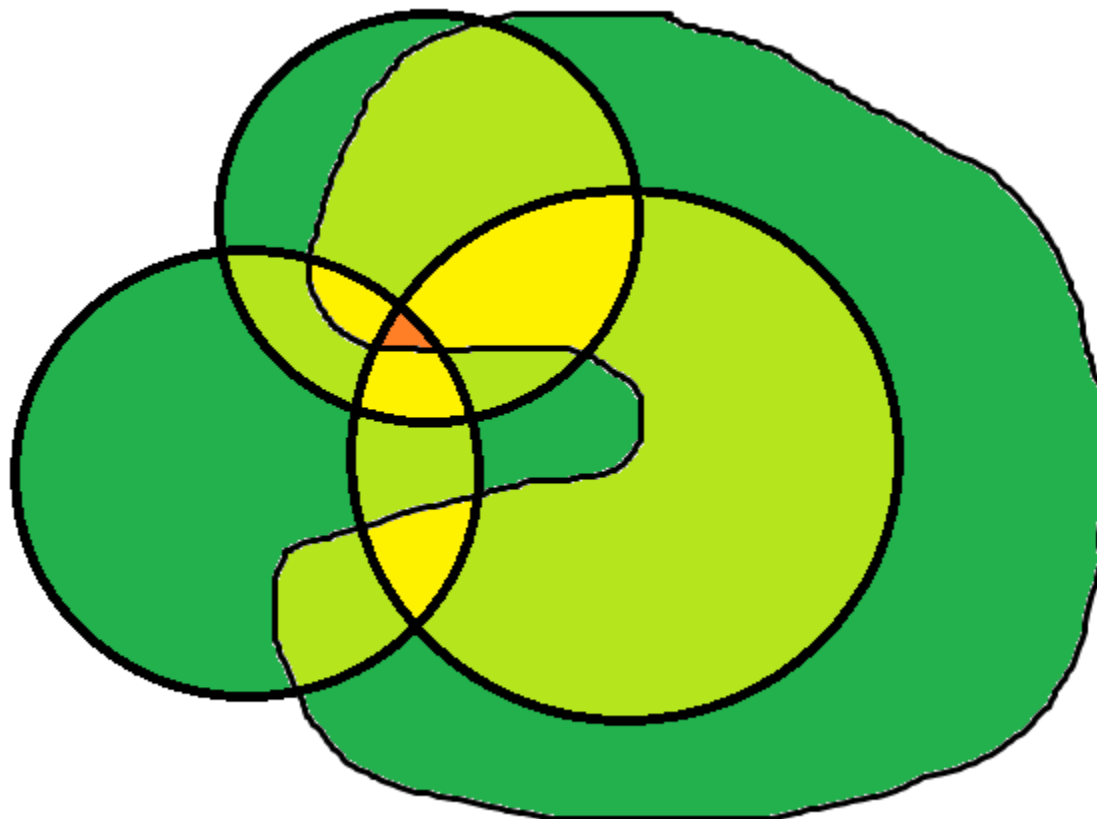


$A - B$

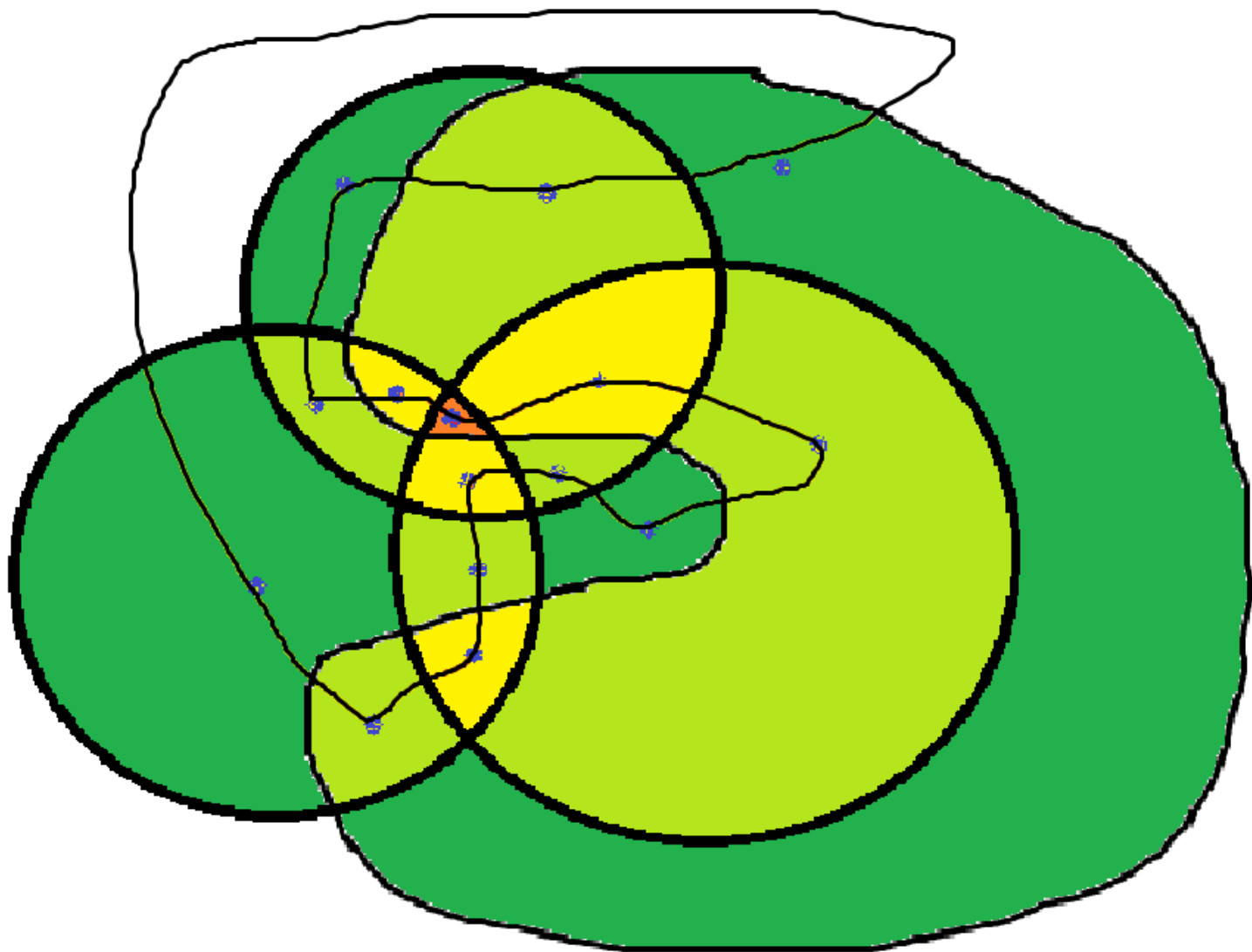


$-(A \cup B) \cap C$

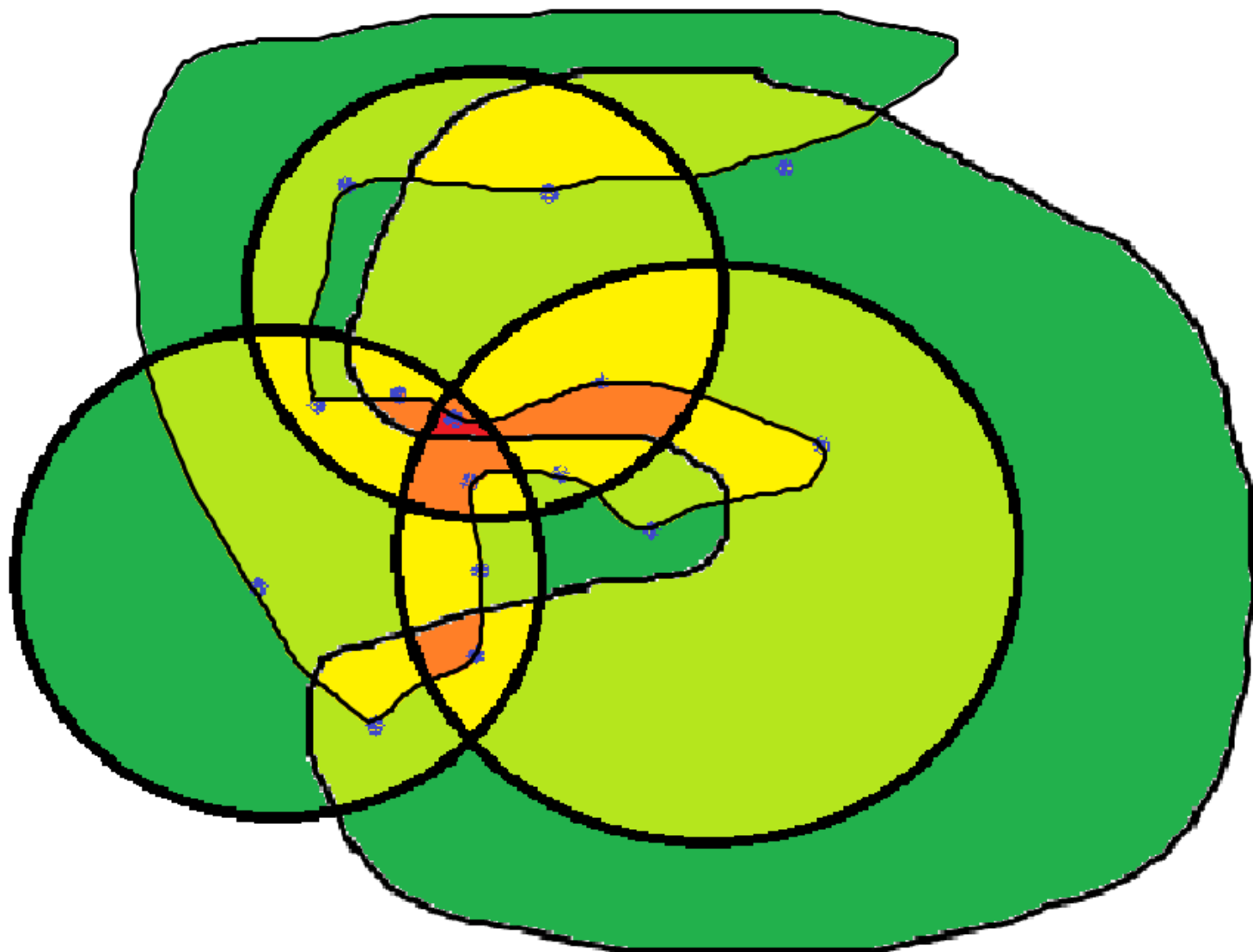
文氏图



文氏图

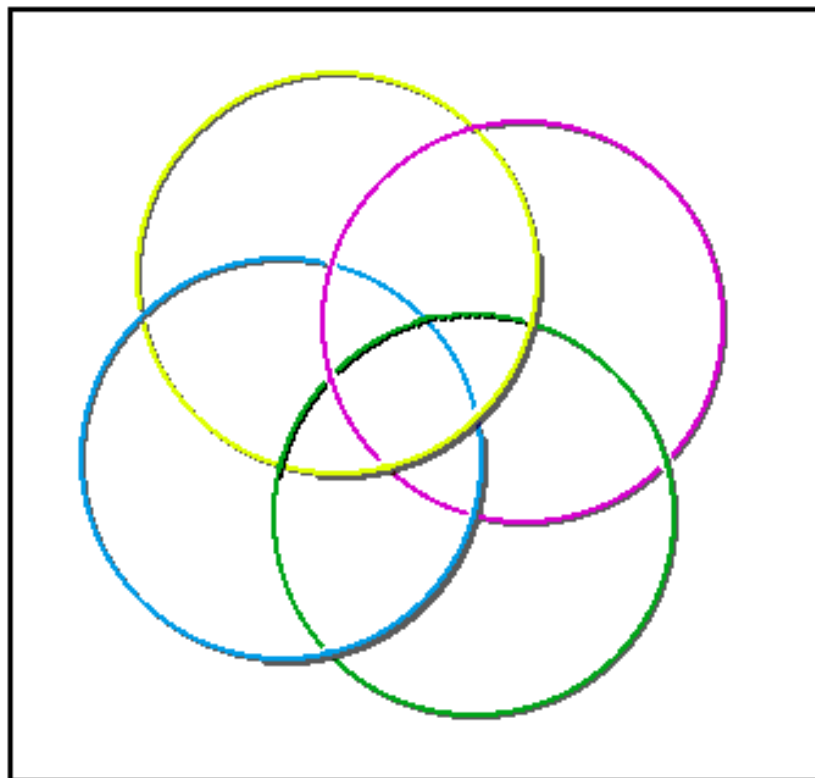


文氏图



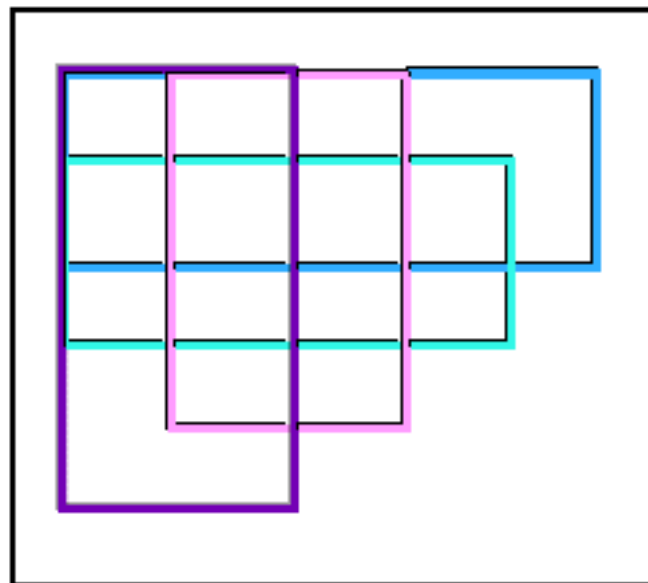
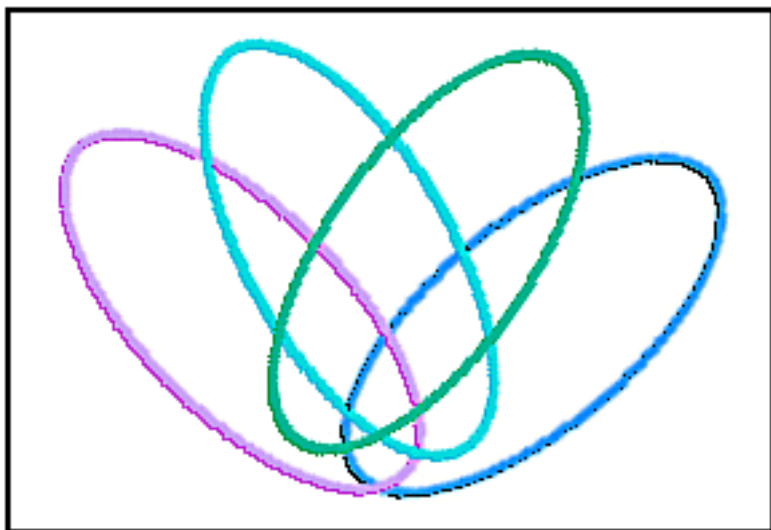


文氏图？



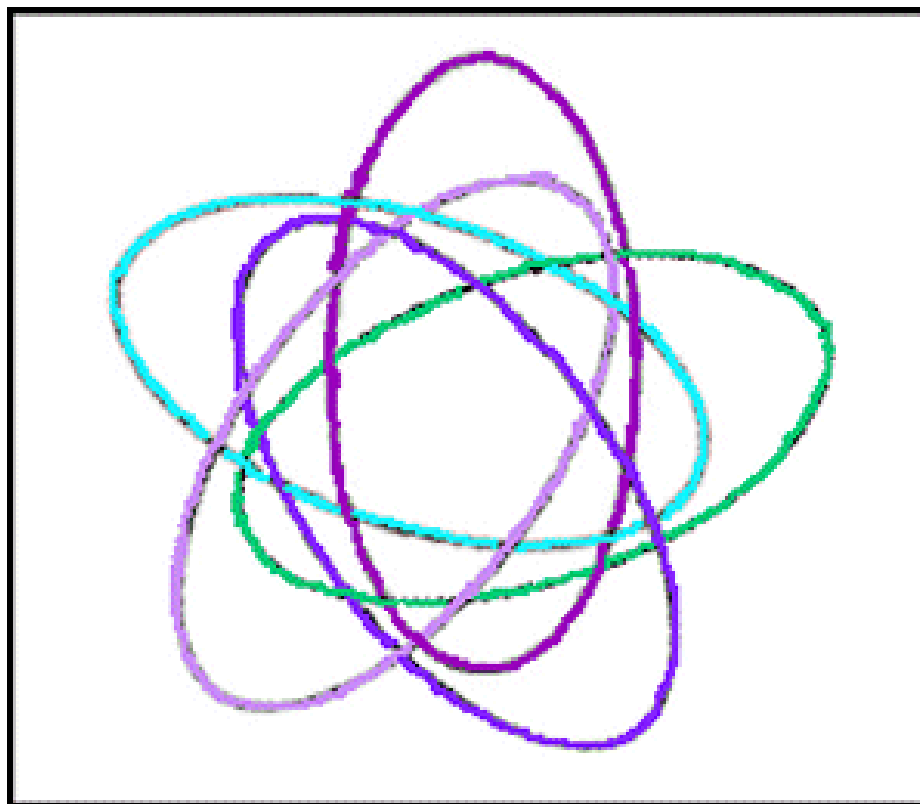
不存在：紫色和蓝色； 绿色和黄色

4个集合



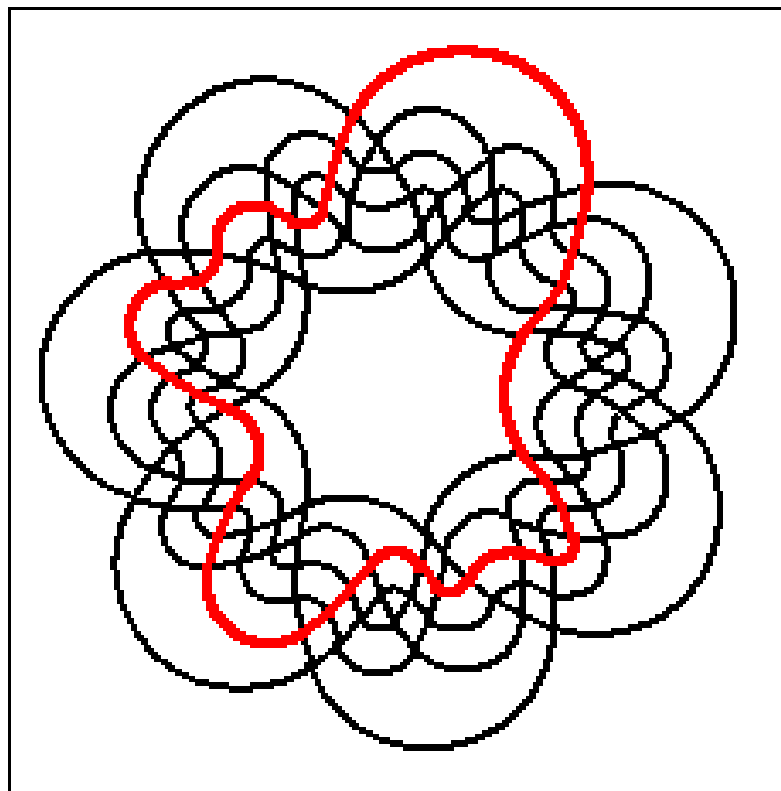


5个集合

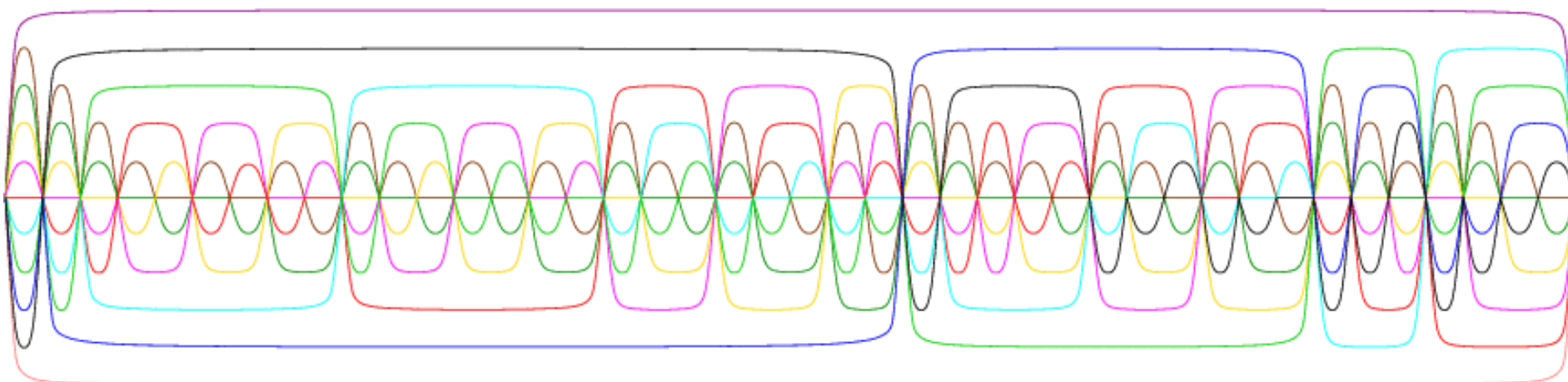


包含5个集合所有相交的可能：32个区域，每个集合包含了16个区域

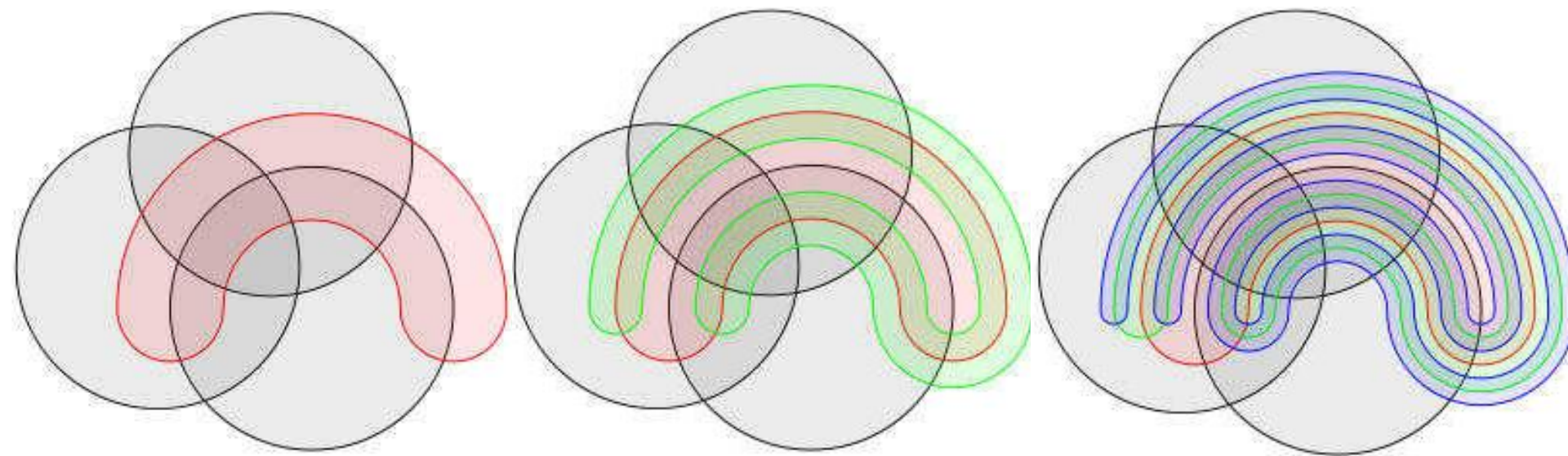
7个集合

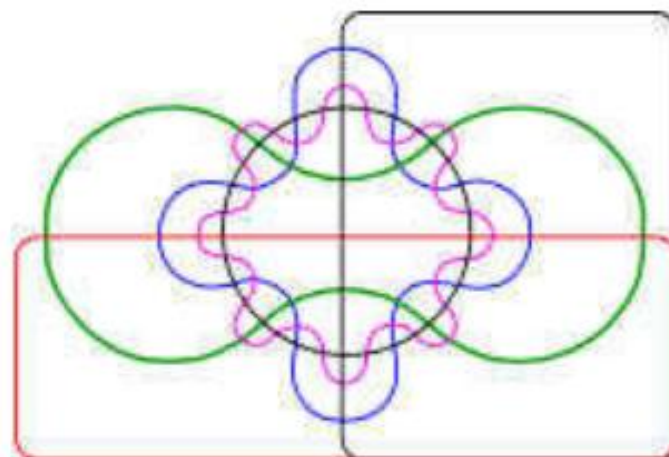
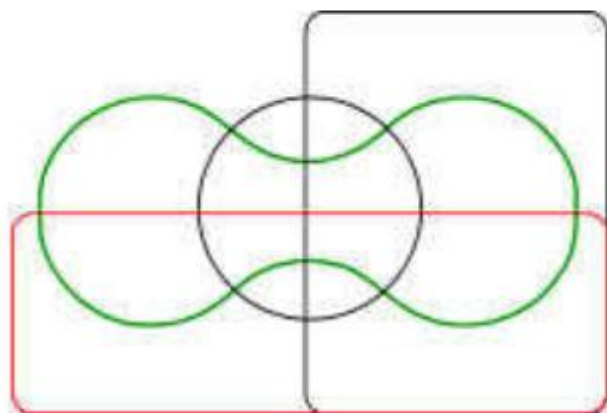
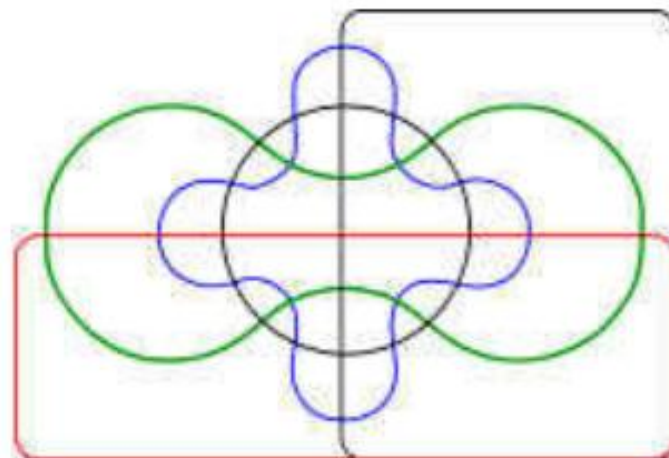
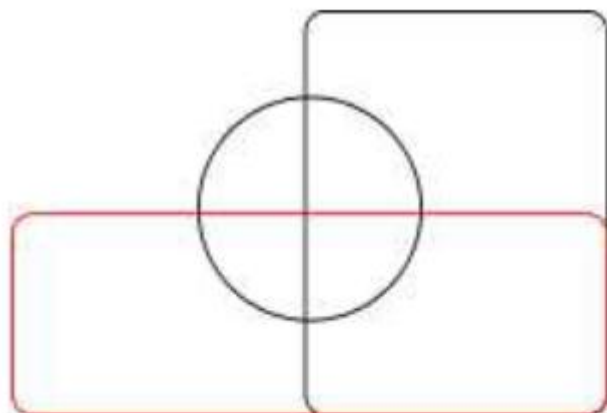


11个集合



彩虹画法



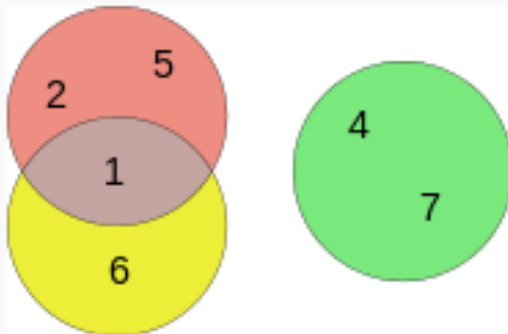




文氏图和欧拉图

- $A = \{1, 2, 5\}$
- $B = \{1, 6\}$
- $C = \{4, 7\}$

The Venn and the Euler diagram of those sets are:



Euler diagram



Venn diagram

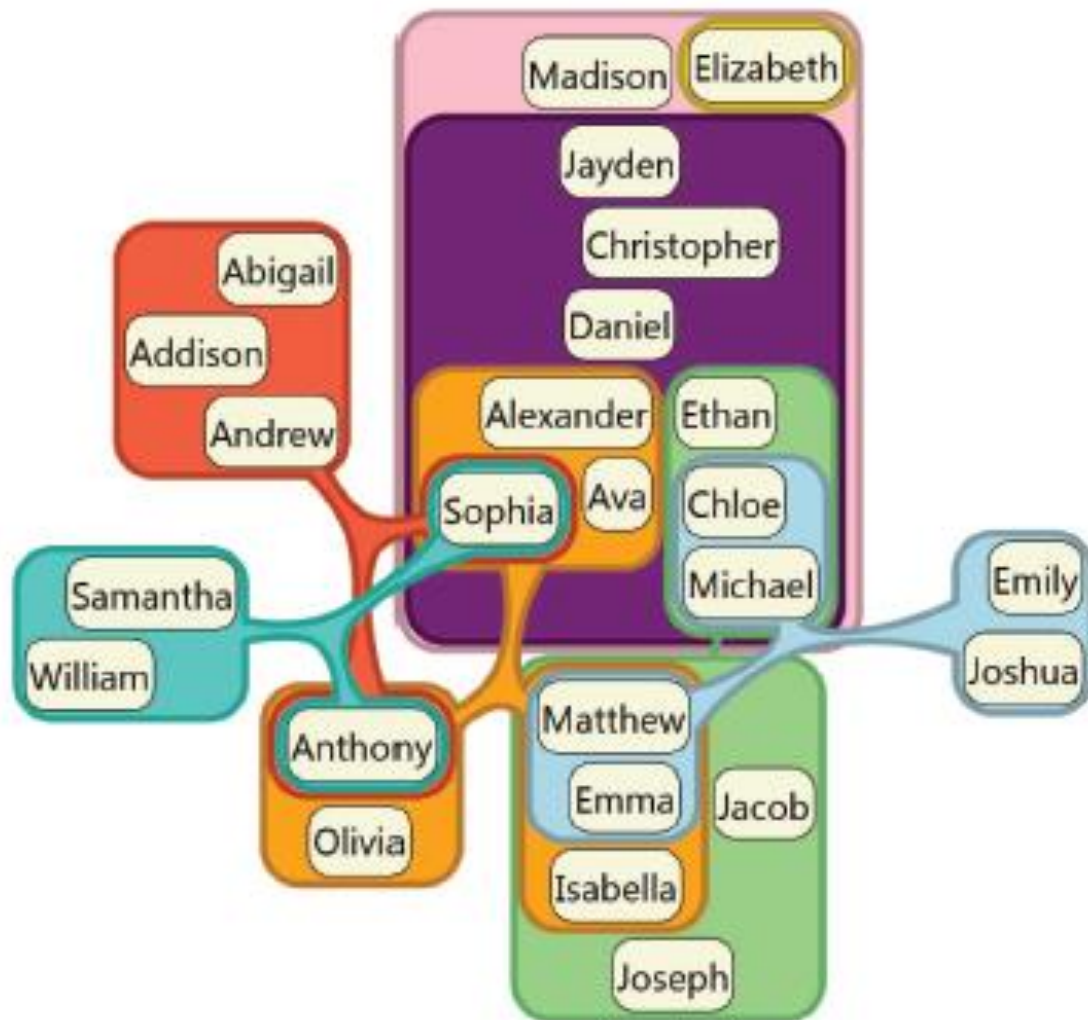
联系与区别



- Venn diagrams represent all sets and their possible intersections with overlapping elliptical shapes.
- Euler diagrams are a relaxation of Venn diagrams in which the shapes corresponding to sets are not required to overlap if their corresponding intersection is empty

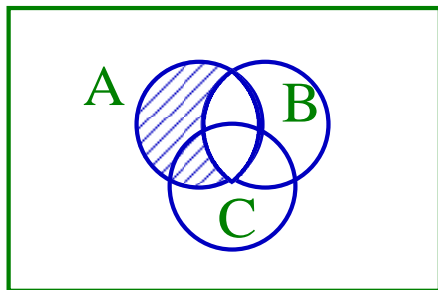


实例

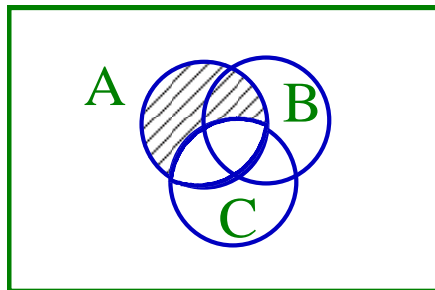




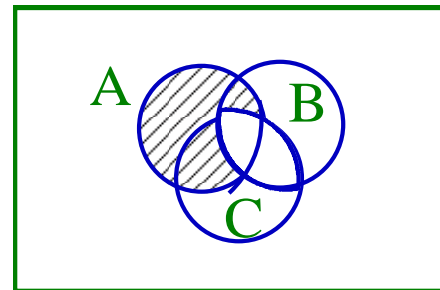
举例： $(A-B) \cup (A-C) = A-(B \cap C)$



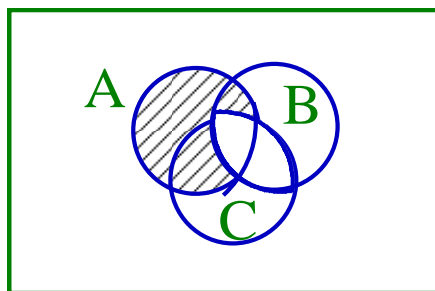
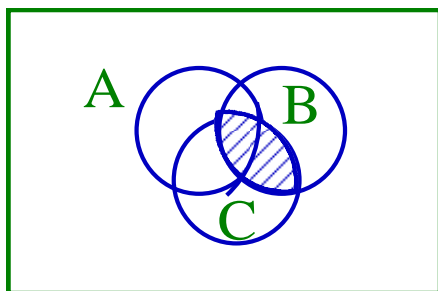
$A - B$



$A - C$



$(A - B) \cup (A - C)$



$A - (B \cap C)$



读书的方法

- 把书读厚
 - 补充证明
 - 找错
 - 挖掘内涵
- 将书读薄
 - 归纳、总结（用一句最精炼的话高度概括一门课程）
 - 了解知识产生、发展和应用的背景
 - 由点到面，由表入里地真正掌握课程的主要内容
- 多做题，做好题
- 先猜，后证-大多数的发现之路

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \bar{\vee} x \in B\}$$

$$\neg A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$



元素 x \in 集合 A

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x) \neg (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

$$E = \{x \mid x = x\}$$

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

对任意的集合 A , $\emptyset \subseteq A$

$$A \text{ 和 } B \text{ 不相交} \Leftrightarrow \neg (\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$$

$$\bigcup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$$

$$\bigcup \emptyset = \emptyset$$

$$\bigcap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

$\bigcap \emptyset$ 无意义

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$



谢谢
shixia@tsinghua.edu.cn