1. 设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. 已知 A 有一个单特征值 -3，求 a 的值并求正交阵 P，使得 P^TAP 是对角阵.

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3}+i & 0 \\ \sqrt{3}-i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 是否存在酉阵 U，U^HAU 是对角阵？

3. 设 V 是 n 维酉空间，$T: V \to V$ 线性变换，满足 $|T(v)| = |T^*(v)|$，$\forall v \in V$

证明：T 是复正规算子.

4. 证明或给出反例：

设 V n维内积空间，$T: V \to V$ 线性变换

$e_1, \cdots, e_n \in V$ 是一组标准正交基，满足

$$|T(e_i)| = |T^*(e_i)| \qquad i=1, \cdots, n$$

则 T 是一个正规变换，即 $T^* \circ T = T \circ T^*$.

（对比第3题）

5. 设 V 是一个欧氏空间，$\dim_{\mathbb{R}} V = 2k+1$，$k \in \mathbb{N}$，

$T: V \to V$ 是一个正交变换，证明：

1 或 -1 是 T 的特征值.

6. 设 $T: V \to V$ 是一个复正规变换，有

特征值 3 和 4，证明：存在一个向量 $v \in V$

满足 $|v| = \sqrt{2}$，$|T(v)| = 5$.

7. 构造 $T:\mathbb{C}^4\longrightarrow\mathbb{C}^4$ 线性变换，使得 T 是复正规变换，但不是 Hermite 变换.

8*. 设 A,B 是3阶实正规阵. 证明:

(1) 存在正交阵 Q，$Q^TAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & a & b\\ 0 & c & d\end{pmatrix}$ 其中 $\lambda_1\in\mathbb{R}$，$a,b,c,d\in\mathbb{R}$，且 $b=c$ 或 $a=d, b=-c$.

(2) 若 A 与 B 相似，则 A 与 B 必正交相似.

9*. 设 A 是 n 阶实正规阵

设 $Ax=\lambda x$，$0\neq x=x_1+ix_2$，$x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$

$\lambda=a+ib$，$a,b\in\mathbb{R}$，$b\neq 0$

证明：$|x_1|=|x_2|$ 且 $(x_1,x_2)=0$.