样题仅供参考!

清华大学本科生考试试题　　　　姓名__________ 班号__________ 学号____________

考试课程《离散数学 1》　　2016 年 XX 月 XX 日　　（A 卷）　（共 2 页——正反两面）

该页面的所有题目的解答直接写在这张试题纸上，该试题纸一并上交。背面的题目写在答题本上

一、 选择题（共 13 分，每空 1 分） 在下列各小题中选择其中的一种答案，标注在小标题后面的括号中

1. （ ）简而言之，命题逻辑的公理系统是
   A. 用来建立公理的系统。 B. 由公理产生推理规则的系统。 C. 用来完善已有公理的系统。
   D. 从精选的几条公理出发，根据规定的演绎规则，推导出一系列定理的形式符号系统。
2. （ ）孔子曰：“己所不欲，勿施于人。”以下哪一选项不是这句话的逻辑推论？
   A. 只有己所欲，才能施于人。 B. 除非己所欲，否则不施于人。
   C. 若己所欲，则施于人。 D. 凡施于人的都应该是己所欲的。
3. （ ）与连续统假设（CH）的主要内容最接近的是：满足$\aleph_0 < K < \aleph_1$成立的基数K
   A. 已完整证明K肯定不存在。 B. 猜想K不存在。
   C. 猜想K存在但数值待定。 D. K已找到。
4. （ ）根据量词的定义，若 $(\exists x)P(x)$=F 成立，试从下面选择一个最准确清晰的描述：
   A. 对所有的 $x \in D$，都有 P(x)=F B. 至少存在一个 $x_0 \in D$，使 $P(x_0)$=F C. 根据 P(x)来定。
5. （ ）下面所有正确的联结词完备集是 A. 1,6 B. 1,2,3,5 C. 1,2,3,5,6 D. 1,2,3,6 其中
   1. $\{\neg, \vee, \wedge\}$; 2. $\{\neg, \wedge\}$; 3. $\{\neg, \vee\}$; 4. $\{\vee, \wedge\}$; 5. $\{\neg, \rightarrow\}$; 6. $\{\uparrow\}$.
6. 非空集合 A 上的恒等关系I_A是（ ）；全关系E_A是（ ）；空关系$\emptyset$是（ ）。
   A. 偏序关系但不是等价关系 B. 等价关系但不是偏序关系
   C. 既是等价关系又是偏序关系 D. 既不是等价关系也不是偏序关系
7. （ ）对任意集合 A，B 和 C，若$A \cup B = A \cup C$，且$A \cap B = A \cap C$，则$B = C$。 （标出√或×）
8. （ ）不存在这样的关系：它既不满足自反性，也不满足非自反性。 （标出√或×）
9. （ ）不存在这样的关系：它既不满足对称性，也不满足反对称性。 （标出√或×）
10. （ ）不存在这样的关系：它既满足对称性，同时又满足反自反性。 （标出√或×）
11. （ ）若希望所求关系 R 的闭包同时具有自反性(r)、对称性(s)和传递性(t)这三种性质，则可先求 r(R)，然后求出 sr(R)，最后再求 tsr(R)。 （标出√或×）

二、 填空题（共 17 分，每空 1 分）完成下列计算或填空

1. （1 分）在希尔伯特提出的 23 个数学问题中连续统假设位列第____位。
2. （2 分）设 $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$，则 $\bigcup A =$ __________________， $\bigcap A =$ ______________________。
3. （1 分）设$A = \{\emptyset, b, \{2\}\}$，则 $P(A)$ =___________________________。
4. （6 分）对 n 个命题变元，可定义____________个 n 元命题联接词。
   设 A = {1,2,3,4}，B = {a, b, c}，从 A 到 B 不同的二元关系共有__________个？ |A × B| =_______。
   从 A 到 B 不同的函数共有___________个？在集合 A 上，可定义________个不同的等价关系？
   在集合 B 上，写出等价类数目最多的那个等价关系 R__________________________________。
5. （4 分）对有限集合 A 和 B，|A| = m，|B| = n，试给出下列情形 m 和 n 应满足的条件：
   (1)_______时存在从 A 到 B 的单射函数；(2)________时存在从 A 到 B 的满射函数；
   (3) _______时存在从 A 到 B 的双射函数；且有__________个不同的双射函数。
6. （3 分）按照连续统假设，用最简洁的形式写出下列计算结果。
   $|N_N|$ =___________ $|R_R|$ =__________ $|N^P|$ =________ 注：$N^P = \{n | n \in N \wedge n是素数\}$

样题仅供参考!

（注：本页的题目均须写在答题本上）

三、 形式化下列语句，论域均为总论域（共 12 分，第小题 3 分）

1. 没有最大的素数。
2. 天下乌鸦一般黑（要求写出两种形式，一种仅用全称量词，另一种仅用存在量词）。
3. 斐波那契数列中的每个数有且仅有一个后继。
4. 并非所有人都天赋好，而且天赋不好的人未必就不成功（仅需写出一种形式但全称和存在量词均需出现）。

四、 写出计算与构造过程和结果（共 19 分，第 1 题 2 分，第 2 题 5 分，第 3,4,5 题每题 4 分）

1. 用空集∅构造一个集合序列$S_0, S_1, \cdots, S_{i-1}$，满足$|S_i|$ = i，且$S_i \subseteq S_{i+1}$，试写出序列的前 4 个集合S_0, S_1, S_2, S_3。
2. P ↓ Q = ¬(P∨Q)，试仅用或非联结词 ↓ 分别表示出¬P，P∨Q，P→Q 和 P ↔ Q（说明：详细运算步骤，要求结果尽量简洁。换句话说，当使用或非门分别实现上述每种运算时，要求所用的或非门最少）。
3. 对以下命题："集合 A 上的一个关系 R，如果 R 是对称的和传递的，则 R 一定是自反的，因为xRy，yRx蕴含xRx。"先指出该命题的错误，然后找出反例——在集合{a, b, c}上构造一个关系，使其是对称的和传递的，但不是自反的。
4. 求下式的主析取范式和主合取范式：¬(P ↔ Q) ∧ (¬P → R) （写出步骤，最后结果用数字表示的简洁形式）。
5. 求[99,1000]的范围内不能被 5,6,8 中任一个数整除的数的个数。

五、 证明题第一部分（共 12 分，第 1 题 3 分，第 2 题 5 分，第 3 题 4 分）

1. $(\exists x)\big(P(x) \to Q(x)\big) = (\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$是否正确，如正确试给出证明，如错误需举出反例。
2. 利用推理规则或归结推理法证明下列推理：
   $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \land (\forall x)(R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow (\forall x)(R(x) \to \neg P(x))$
3. 若 R 和 S 是 A 上的关系，且 S = {< a, b > | (∃c)(aRc∧cRb)}。若 R 是等价关系，证明 S 也是等价关系。

六、 设 A = {a, b, c, d, e, f, g}，R = I_A ∪ {< a, c >,< a, d >,< a, e >,<b,c>,<b,d>,<b,e>,<c,e>,<d,e>,<f,g>}，试完成以下 4 个步骤： （共 11 分）

1) 说明 R 是 A 上的偏序关系；
2) 画出偏序集< A, R >的哈斯图；
3) 写出< A, R >中所有最长的链和所有最长的反链；
4) 对< A, R >指出其极大元、极小元、最大元和最小元。

七、 证明题第二部分（共 16 分，第 1 题 6 分，第 2 题 5 分，第 3 题 5 分）

1. 利用罗素公理系统证明：$\vdash (P \lor Q) \to \Big(Q \to \big((P \lor Q)\big)\Big)$
2. 设 A、B 和 C 是任意的集合，证明：(A − B) − C = (A − C) − (B − C)
3. 用等势定义证明(0, c) ≈ R，其中 R 为实数域(−∞,+∞)，c 为大于 0 的具体实数。

罗素公理系统相关公式

定义：

1. $(A \to B)$ 定义为 $(\neg A \lor B)$
2. $(A \land B)$ 定义为 $\neg(\neg A \lor \neg B)$
3. $(A \leftrightarrow B)$ 定义为 $\big((A \to B) \land (B \to A)\big)$

样题仅供参考!

公理：

1. $\vdash \left((P \vee P) \to P\right)$
2. $\vdash \left(P \to (P \vee Q)\right)$
3. $\vdash \left((P \vee Q) \to (Q \vee P)\right)$
4. $\vdash \left((Q \to R) \to \left((P \vee Q) \to (P \vee R)\right)\right)$

定理：

1. $\vdash (Q \to R) \to \left((P \to Q) \to (P \to R)\right)$
2. $\vdash P \to P$
3. $\vdash \neg P \vee P$
4. $\vdash P \vee \neg P$
5. $\vdash P \to \neg\neg P$
6. $\vdash \neg\neg P \to P$
7. $\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$