清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　《形式语言与自动机》 A 卷　　　　2016 年 6 月 20 日

学号：____________　　姓名：____________　　班级：______

（注：解答可以写在答题纸上，也可以写在试卷上；交卷时二者都需要交回。）

一. (16 分) 判别下列各命题的真假性，回答 true 或者 false: (每小题 2 分)

1．存在判定一个 *DFA* 和一个正规表达式是否等价的通用算法。

____

2．存在两个非正规语言 L_1 和 L_2，$L_1 - L_2$ 是正规语言。

____

3．正规语言的补语言不一定是正规语言。

____

4．不存在通用算法可以判定两个正规语言的交是非空的。

____

5．在一个 DFA 中，若对于同一输入符号，状态 r 和 s 的后继状态之间是可区别的（回顾：DFA 最小化一节中的概念），则 r 和 s 之间也一定是可区别的。

____

6．语言 $L = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0$，若 i=1 则 j=k$\}$ 不满足针对正规语言的 Pumping 引理。

____

7．任何递归语言都存在一个可以接受它的带两个计数器的计数器机。

____

8．某些 P 问题不是 NP 问题。

____

二. (12 分) 选择填空　　(每小题 2 分)

1．语言 $\{0^i 1^j \mid i \geq j \geq 0\}$ ______________。

2．语言 $\{x \mid x \in \{0, 1\}^*$，且 x 为 ww 的形式 $\}$ ______________。

3．语言 $\{x \mid x \in \{0, 1\}^*$，且 x 为 $w^R w$ 的形式（w^R 是 w 的反向）$\}$ ______________。

4．语言 $\{0^i 1^j \mid i,j \geq 0, i = j\}$ ______________。

5．语言 $\{0^i 1^j \mid i,j \geq 0, i+j$ 为偶数 $\}$ ______________。

6．语言 $\{x \mid x \in (\{0, 1\}^* - L_u)$（$L_u$ 为课程中定义的通用语言）$\}$ ______________。

供选择的答案：

A. 是某个有限自动机的语言，也是某个空栈接受方式的 *DPDA* 的语言。

B. 是某个有限自动机的语言，但不是任何空栈接受方式的 *DPDA* 的语言。

C. 既是某个终态接受方式的 *DPDA* 的语言，又是某个空栈接受方式的 *DPDA* 的语言，但不是任何有限自动机的语言。

D. 是某个终态接受方式的 *DPDA* 的语言, 但不是任何空栈接受方式的 *DPDA* 的语言, 也不是任何有限自动机的语言。

E. 是某个 *PDA* 的语言，但不是任何 *DPDA* 的语言。

F. 是递归语言，但不是任何 *PDA* 的语言。

G. 是递归可枚举语言，但不是递归语言。

H. 不是递归可枚举语言。

三. (32 分) 简答题:

1. (4 分) 设 CFG G =（$\{S, A, B\}$, $\{a, b\}$, P, S），其中 P 由下列产生式集合构成：

$$
\begin{aligned}
&S \rightarrow SAB \mid aB \mid \varepsilon \\
&A \rightarrow b \\
&B \rightarrow A \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

先消去 P 中的 ε-产生式，得到产生式集合 $P1$；再消去 $P1$ 中的 *unit* 产生式得到产生式集合$P2$。

（1）指出 $P1$ 中所包含的全部产生式；（3分）

（2）指出 $P2$ 中所包含的全部产生式；（1分）

2. (4 分) 文法 G（S为开始符号）的产生式集合为：

$$
\begin{aligned}
&S \rightarrow AB \mid BA \mid SS \mid AC \mid BD \\
&C \rightarrow SB \\
&D \rightarrow SA \\
&A \rightarrow a \\
&B \rightarrow b
\end{aligned}
$$

X_{13}		
X_{12}	X_{23}	
X_{11}	X_{22}	X_{33}
a	***b***	***a***

上图表示对于文法 G 和字符串 *aba* 应用 CYK 算法时所构造的表。

(1) 分别计算图中所有 X_{ij} （$1 \le i, j \le 3$）

(2) 是否有 $aba \in L(G)$?

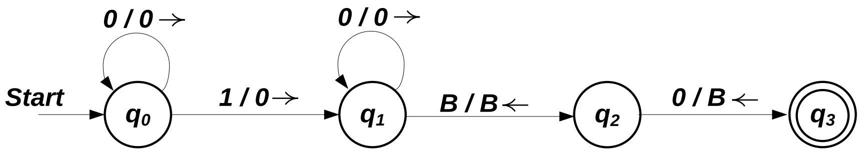
3. (6分) 设映射 h：$\{a, b\} \rightarrow \{0,1\}^*$ 定义为 $h(a) = \varepsilon$, $h(b) = 10$ 。定义 $\{a, b\}$ 上的一个正规表达式 $E = \varepsilon + (a+b)(ba)^*$ 。

(1) 给出一个正规表达式 E^R，使得 $L(E^R) = (L(E))^R$ （后者为 $L(E)$ 的反向）。（2分）

(2) 给出一个正规表达式 $h(E)$，使得 $L(h(E)) = h\,(L(E))$。　（2分）

(3) 试构造一个 $DFA\ A$，使得 $L(A) = \sim L(h(E))$。这里，~ 代表语言的补运算。

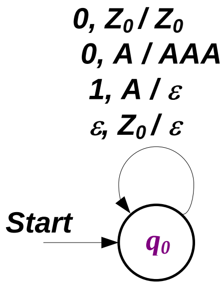
4. (4分) 下图描述了图灵机 $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_0, B, \{q_3\})$：



(1) 指出该图灵机的语言 $L(M)$　（2分）

(2) 对于每个$w\in L(M)$，该图灵机到达终态时带上呈现的0/1串与w是什么关系？（2分）

5. (4 分) 下图刻画了 PDA $P = (\{q_0\}, \{0,1\}, \{Z_0,A\}, \delta, q_0, Z_0)$ 的转移规则，试利用课程中介绍的从空栈接受的 PDA 到 CFG 的转换算法，定义一个与该 PDA 等价的 CFG，开始符号设为 S：



6. (4 分) 设有空栈接受方式的 $PDA\ P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_N, q_0, Z_0)$。依照课程中介绍的转换算法，定义一个等价于$P_N$ 的终态接受方式的 $PDA\ P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\})$。其中，新增状态$p_0$和$p_f$不属于$Q$，新增栈符号$X_0$不属于$\Gamma$。 试给出 δ_F 的严格定义（不可用示意图替代）。

7. (6 分) 对于语言 $L = \{\, a^m b^n c^p \mid m < n < p$，其中$m$、$n$、$p$ 均为自然数$\}$，可以利用 Pumping 引理证明 L 不是上下文无关语言，以下是一个证明概要：

考虑任意的 $n\geq 1$。取 $z =$ ＿＿①＿＿ $\in L$ 。
对任意满足条件 $z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq n$ 的 u, v, w, x, y,
若 ＿②＿ 时，取 $k =$ ＿③＿；
若 ＿④＿ 时，取 $k =$ ＿⑤＿。（若需更多分支，可自行添加）
则有 $uv^kwx^ky \notin L$。

试在其中 ①、②、③、④ 和 ⑤ 处填写适当的内容。（若需更多分支，可自行添加）

四. (25 分) 设计题：（必要时解释设计思路）

1. (5 分) 试构造接受下列语言的一个确定有限自动机（DFA），且该有限自动机的状态数不超过 6：

$L = \{\, w \mid w\in \{a,b\}^*$，$w$含相同个数的$a$和$b$，且$w$的每个前缀中$a$和$b$个数之差不超过 $1\,\}$

注：要求状态数不超过 6，并不意味着状态数一定会达到 6。后面的题目也类似。

2. (5 分) 试给出下列正规语言的一个正规表达式，且该表达式中运算符的总数不超过

10（只能使用 '+', '*' 以及 '连接' 3 种运算符和括号，不计括号数）：

$L = \{ w \mid w \in \{a, b\}^*，|w| \geq 1$，且当 w 以 a 结尾时，它的长度为奇数 $\}$

3. (5 分) 试给出下列语言的一个上下文无关文法，且该文法的非终结符数目不超过 3：

$L = \{ w \mid w \in \{a, b\}^*$，且 $w \neq w^R$（这里，w^R 是 w 的反向）$\}$

4. (5 分) 试构造接受下列语言的一个 PDA（终态接受和空栈接受均可），要求该 PDA 的状态数和堆栈符号数均不超过 5：

$L = \{ x \mid x \in \{a, b\}^*$，$x$ 的长度为偶数，且 x **不为** ww^R 的形式（w^R 是 w 的反向）$\}$

5. (5 分) 试给出下列语言的一个图灵机 $M = (Q, \{ a,b\}, \{ a,b, ..., B \}, \delta, q_0 ,B , \{ q_f\})$：

$L = \{ x \mid x \in \{a, b\}^*$，且 x **为** ww^R 的形式（w^R 是 w 的反向）$\}$

要求该图灵机的状态数不超过 8，初态为 q_0，唯一的终态为 q_f。用状态转移图描述你所设计的图灵机。

（对到达q_f时读写头所处位置不作要求）

五. (15 分) 证明题:（要求证明过程严谨，步骤明确。）

1. (5 分) 证明如下语言 L 不是正规语言：

$L = \{ w \mid w \in \{a, b, c\}^*$，且满足：若 w 中仅含一个 a，则 b 的个数不少于 c 的个数 $\}$

2. (5 分) 设 $CFG\ G = (V, T, P , S)$ ，构造一个空栈接受方式的 $PDA\ E = (\{q\} , T, V \cup T, \delta, q, S)$, 其中转移函数 δ 定义如下：

（1）对每一 $A \in V$,　$\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q,\beta) \mid "A \to \beta" \in P \}$;

（2）对每一 $a \in T$,　$\delta(q, a, a) = \{ (q, \varepsilon) \}$.

以下是证明 $N(E) \subseteq L(G)$ 的一个证明框架，试在此框架基础上补齐完整的证明过程。

证明：欲证 $N(E) \subseteq L(G)$，即对任何 $w \in T^*, w \in N(E) \Rightarrow w \in L(G)$.

即证明：对任何 $w \in T^*$,　*if*　$(q,w,S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$,　*then*　$S \Rightarrow^*_{lm} w$.

我们先用归纳法证明一个更一般的结论：对于任何 $A \in V$，*if* $(q,w,A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$, *then* $A \Rightarrow^*_{lm} w$。然后，用S替换其中的A，就可证明上述结论。下面是归纳证明的过程：

归纳于 $(q,w,A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$ 的步数 n.

基础　n=1。......

归纳　n>1。......

证毕。

3. (5 分) 给定上下文无关文法 $G = (V, T, P , S)$ ，且 $L(G) \neq \Phi$。定义 $G' = (V', T, P', S)$，其中 V' 归纳定义如下：

（1）基础：若 P 中有产生式 $A \to w$ ，其中 $w \in T^*$，则 $A \in V'$;

（2）归纳：若 P 中有产生式 $A \to X_1X_2 \ldots X_m$ ，其中 $X_i \in T \cup V'$ $(1 \leq i \leq m)$，则 $A \in V'$;

（3）V' 中的符号只能由以上步骤产生。

我们定义 $P' = \{ A \to X_1X_2\ldots X_m \mid A \to X_1X_2\ldots X_m \in P \wedge A \in V' \wedge X_i \in T \cup V' \ (1 \le i \le m) \}$。

试证明：$L(G)= L(G')$。