第十一周.正交变换和酉变换

参考：
课本10.1.2，10.4.1或
高等代数学9.4.

12.1 保积同构

定义：设$\mathbb{F}$是数域$\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$. 设V是一个$\mathbb{F}$上内积空间，$T : V \to V$是一个线性变换，满足$\forall \alpha, \beta \in V$,都有

$$(T(\alpha), T(\beta)) = (\alpha, \beta),$$

则称T是一个保持内积的线性变换.进一步，若T是双射，则T称为一个保积同构.

例如: $V = \mathbb{R}^n$ (标准内积). 给定一个n阶正交阵Q，定义 $T : V \to V$为$T(v) = Qv, \forall v \in V$, 则$T$是一个保积同构. 因为$(T(\alpha), T(\beta)) = (Q\alpha)^T(Q\beta) = \alpha^T\beta = (\alpha, \beta)$.

例如: $V = \mathbb{C}^n$ (标准内积). 给定一个n阶酉阵U，定义 $T : V \to V$为$T(v) = Uv, \forall v \in V$, 则$T$是一个保积同构. 因为$(T(\alpha), T(\beta)) = (U\alpha)^T(\overline{U\beta}) = \alpha^T\overline{\beta} = (\alpha, \beta)$.

12.1 保积同构

定理：设V是n维内积空间，$T : V \to V$是一个保持内积的线性变换，则T是一个保积同构.

证明：设$x \in \mathrm{Ker}T$, =T(x)=0, 则$(T(x), T(x)) = (x, x) = 0$, 从而$x = 0$. 这说明$T$是一个单射. 因为$\dim_{\mathbb{F}}\mathrm{Ker}T + \dim_{\mathbb{F}}\mathrm{Im}T = \dim_{\mathbb{F}}V = n$, 所以$\mathrm{Im}T = V$, 即$T$是一个满射.

定理：设V是n维内积空间，$T : V \to V$是一个线性变换，若T保持长度，即对于$\forall\alpha \in V$, $||T(\alpha)|| = ||\alpha||$, 则$T$是保积同构.

12.2 正交变换

定义：设V是n维欧几里得空间，$T: V \to V$是一个保积同构， 则T称为正交变换.

判别法1：设V是一个欧氏空间， $T : V \to V$是一个线性变换，则T是正交变换当且仅当$||T(\alpha)|| = ||\alpha||, \forall \alpha \in V$.

判别法2：设V是一个欧氏空间， $T : V \to V$是一个线性变换，则T是正交变换当且仅当T在一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

判别法3：设V是一个欧氏空间， $T : V \to V$是一个线性变换，则T是正交变换当且仅当T把一组标准正交基映到标准正交基.

判别法4：设V是一个欧氏空间， $T : V \to V$是一个线性变换，则T是正交变换当且仅当$T^* \circ T = id_V$.

12.2 正交变换

例：设T是欧氏空间V上正交变换，W是V的T-不变子空间, 则$W^{\perp}$也是T-不变子空间.

正交矩阵的性质：

1.例子： 二阶正交阵分成两类：旋转和反射.

2. 正交阵的行列式等于1或-1. (若一个正交变换在一组标准正交基下矩阵行列式等于1,称为第一类正交变换，否则，称为第二类正交变换.)

3. 正交阵的特征值的模长等于1.

4. 正交阵的乘积和逆均是正交阵.(全体n阶正交阵构成一个群)

12.3 酉变换

定义：设V是n维酉空间，$T: V \to V$是一个保积同构， 则T称为酉变换或酉算子.

判别法1：设V是一个酉空间， $T: V \to V$是一个线性变换，则T是酉变换当且仅当$||T(\alpha)|| = ||\alpha||, \forall \alpha \in V$.

判别法2：设V是一个酉空间， $T: V \to V$是一个线性变换，则T是酉变换当且仅当T在一组标准正交基下的矩阵是酉矩阵.

判别法3：设V是一个酉空间， $T: V \to V$是一个线性变换，则T是酉变换当且仅当T把一组标准正交基映到标准正交基.

判别法4：设V是一个酉空间， $T: V \to V$是一个线性变换，则T是酉变换当且仅当$T^* \circ T = id_V$.

12.3 酉变换

酉矩阵的性质：

1.例子： 二阶酉阵的结构.

2. 酉阵的行列式的模长等于1.

3. 酉阵的特征值的模长等于1.

4. 酉阵的乘积和逆均是正交阵.(全体n阶酉阵构成一个群)

12.4 QR分解

定理：设A是n阶实(或复)矩阵,则A可分解为$A = QR$, 其中Q是正交阵(或酉阵)，R是一个上三角阵且主对角线元素均大于等于零. 若A可逆，则这个分解是唯一的.

单选题 1分

设置

以下不是酉矩阵的是

A $\begin{pmatrix} e^{i}cos\theta & e^{i}sin\theta \\ -e^{i}sin\theta & e^{i}cos\theta \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} e^{i}cos\theta & e^{i}sin\theta \\ e^{-i}sin\theta & e^{i}cos\theta \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ e^{i\theta_2} & 0 \end{pmatrix}$

提交