第三次习题课答案（若当标准形）

1、设σ是实数域上的3维线性空间V的一个线性变换，它关于V的某个基的矩阵是$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}$

（1）求σ的极小多项式$m(x)$，并将$m(x)$在$R[x]$内分解为两个首项系数为1的不可约多项式的乘积：$m(x) = m_1(x)m_2(x)$；

（2）令$W_i = \{v \in V | m_i(\sigma)v = 0\}$，$i = 1, 2$，证明：$W_i$是$\sigma$的不变子空间，且$V = W_1 \oplus W_2$；

（3）在W_1和W_2中分别取基，凑成V的基，使得σ关于这个基下的矩阵只含3个非零元。

解：（1）$f_\sigma(x) = (x-2)(x^2+1)$，从而极小多项式为:$m(x) = (x-2)(x^2+1)$，令$m_1(x) = x-2$，$m_2(x) = x^2+1$。

（2）$\forall v \in W_1, m_1(\sigma)\sigma v = \sigma m_1(\sigma)v = 0$，即$\sigma v \in W_1$，所有$W_1$ 为σ不变的。同理W_2为σ不变的。

由于$m_1(x)$与$m_2(x)$互素，存在$u(x), v(x) \in R[x]$使得$u(x)m_1(x) + v(x)m_2(x) = 1$. 故$u(\sigma)m_1(\sigma) + v(\sigma)m_2(\sigma) = \varepsilon$. $\forall \alpha \in V$，上式两边同时对α作用，得到：$\alpha = u(\sigma)m_1(\sigma)\alpha + v(\sigma)m_2(\sigma)\alpha$，又有$m_2(\sigma)u(\sigma)m_1(\sigma)\alpha = 0$，$m_1(\sigma)v(\sigma)m_2(\sigma)\alpha = 0$, 所以$\alpha \in W_1 + W_2$，即$W_1 + W_2 = V$. $\forall \beta \in W_1 \cap W_2$，$\beta = \varepsilon(\beta) = u(\sigma)m_1(\sigma)\beta + v(\sigma)m_2(\sigma)\beta = 0$ 故$W_1 \cap W_2 = \{0\}$，从而$V = W_1 \oplus W_2$。

（3）首先$\dim(W_1) = 1$，故$\dim(W_2) = 2$。W_2中存在向量$v \neq 0$使得$v, \sigma v$线性无关，否则W_2为特征子空间，从而在W_2中取基并W_1的基，σ在上述基下的矩阵为对角阵，从而A在R上可以对角化，矛盾。再在W_1中取基η，于是σ在V的基$\eta, v, \sigma v$ 下的矩阵为$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，因为$v \in W_2$，$\sigma^2 v = -v$。

2、设σ是复数域上n维线性空间V的一个线性变换，证明存在可对角化的线形变换τ和幂零变换υ，使得$\sigma = \tau + \upsilon$, 且满足$\tau\upsilon = \upsilon\tau$. 如果已知$\sigma$在$V$的某个基下的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

试求τ和υ.

证明：设σ在V的基$\alpha_1, ..., \alpha_n$下的矩阵为A，特征多项式为$f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda-\lambda_n)^{n_s}$，则存在可逆矩阵$P$使得$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\mathrm{A_{11}}, \cdots, \mathrm{A_{1t_1}}, \cdots, \mathrm{A_{s1}}, ..., \mathrm{A_{st_s}})$，$A_{ij}$为对应于特征值$\lambda_i$的若当块。令$D = P\mathrm{diag}(\lambda_1\mathrm{I_{11}}, \cdots, \lambda_1\mathrm{I_{1t_1}}, \cdots, \lambda_\mathrm{s}\mathrm{I_{s1}}, ..., \lambda_\mathrm{s}\mathrm{I_{st_s}})\mathrm{P^{-1}}$，

$N = P\mathrm{diag}(\mathrm{A_{11}} - \lambda_1\mathrm{I_{11}}, \cdots, \mathrm{A_{1t_1}} - \lambda_1\mathrm{I_{1t_1}}, \cdots, \mathrm{A_{s1}} - \lambda_s\mathrm{I_{s1}}, ..., \mathrm{A_{st_s}} - \lambda_s\mathrm{I_{st_s}})\mathrm{P}^{-1}$，并设$D$，$N$所对应的线性变换分别为$\tau$ 和υ，即τ 和υ在V的基$\alpha_1, ..., \alpha_n$下的矩阵为D和N。显然N为幂零矩阵，即υ为幂零变换。由定义有$\sigma = \tau + \upsilon$，且$\tau\upsilon = \upsilon\tau$。

给定方阵$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，计算得$|\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$，且对应于特征值1和2的若当块分别为一个块。

$\lambda = 1$对应的特征向量$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$。$\lambda = 2$对应的特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，解方程$(A-2I)x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，得到广义特征向量$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。于是$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$。

令τ和υ为$P\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}P^{-1}$和$P\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$对应的线性变换即可。

3、设σ为三维线性空间V上的线性变换，σ 在V的基α_1, α_2, α_3 下的矩阵为$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求$\sigma$的所有不变子空间。

解：可求得$|\lambda I - A| = \lambda^2(\lambda - 2)$，故$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 2$，可求得$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$和$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$使得$P^{-1}AP = J$。令$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$，则$\sigma$在基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$下的矩阵为$J$。显然$U_0 = L(\beta_1, \beta_2)$，$U_2 = L(\beta_3)$。$U_0$的$\sigma$不变的子空间为$\{0\}, L(\beta_1), L(\beta_1, \beta_2)$，$U_2$的$\sigma$不变的子空间为$\{0\}$，$L(\beta_3)$。于是$\sigma$的所有不变子空间为$\{0\}, L(\beta_1), L(\beta_1, \beta_2)$，$L(\beta_3)$，$L(\beta_1, \beta_3)$，$L(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = V$。

4、设A、$B \in M_n(C)$满足$AB = BA$，且A可对角化。证明存在可逆矩阵P使得$P^{-1}AP$为对角阵，$P^{-1}BP$为若当标准型。

证明：由于A可对角化，故存在可逆阵P_1使得$P_1^{-1}AP_1$为对角阵$\mathrm{diag}(\lambda_1\mathrm{I_{n_1}}, \cdots, \lambda_s\mathrm{I_{n_s}})$，其中$\lambda_1, ..., \lambda_s$为$A$的所有不同的特征值。由已知$(P_1^{-1}AP_1)(P_1^{-1}BP_1) = (P_1^{-1}BP_1)(P_1^{-1}AP_1)$，但与$P_1^{-1}AP_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1\mathrm{I_{n_1}}, \cdots, \lambda_s\mathrm{I_{n_s}})$交换的矩阵为$\mathrm{diag}(\mathrm{B_1}, \cdots, \mathrm{B_s})$，其中$B_i$为$n_i$阶矩阵。对于$B_i$存在可逆矩阵$Q_i$使得$Q_i^{-1}B_iQ_i$为若当标准型，令$P_2 = \mathrm{diag}(\mathrm{Q_1}, \cdots, \mathrm{Q_s})$，以及$P = P_1P_2$，则$P$可逆，且$P^{-1}AP$为对角阵，$P^{-1}BP$为若当标准型。

5、设6阶复方阵A的特征多项式为$f(x)=(x-2)^2(x+3)^4$，极小多项式为$m(x)=(x-2)(x+3)^3$，写出A的若当标准形。如果极小多项式为$m(x)=(x-2)(x+3)^2$，A的若当标准形有几种可能？

解：特征值2的若当块为两块，阶数分别为1, 1；特征值为-3的若当块为两块，阶数分别为3, 1.

若不考虑若当块的排列次序，若当标准型可能为：特征值2的若当块为两块，阶数分别为1, 1，特征值为-3的若当块为两块，阶数分别为2, 2；或者特征值2的若当块为两块，阶数分别为1, 1，特征值为-3的若当块为三块，阶数分别为2, 1，1。

6、设

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\6&-1&-1&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\quad or\quad\begin{bmatrix}-3&4&0&2\\-4&5&-1&3\\0&0&-3&2\\0&0&-2&1\end{bmatrix}$$

求可逆矩阵P和若当标准形J使得$P^{-1}AP=J$。

解：只求解第一个矩阵。

$|\lambda I-A|=(\lambda-2)(\lambda+1)^3$，故$\lambda_1=-1,n_1=3$；$\lambda_2=2,n_2=1$.

对于$\lambda_1=-1$，可求得$t_1=2$，于是可以写出U_{-1}的基表为

$$\begin{array}{ll}x_1^{(1)}&x_1^{(2)}\\x_2^{(1)}&\end{array}$$

可求得$(A+I)x=0$的基础解系为$\eta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$; $\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$. 不妨设$x_1^{(1)}=a\eta_1+b\eta_2$，为了能求出$x_1^{(2)}$，必须要求$(A+I)x=x_1^{(1)}$的系数矩阵跟增广矩阵的秩相等，取$a=0,b=1$, 即$x_1^{(1)}=\eta_2$时有解，可求得$x_1^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$。再令$x_1^{(2)}=\eta_1$，就得到了$U_{-1}$的基表。

对于$\lambda_2=2$，可求得U_2的基表$x_1^{(3)}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$。

令$P=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_1^{(2)},x_1^{(3)})$，则$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$。

7、设$A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$，求$A^n$.

解：先求可逆阵P和若当标准型J使得$P^{-1}AP=J$. 省略过程。得$J=\begin{bmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$.

于是$A=PJP^{-1}$，$A^n=PJ^nP^{-1}$. 这里$J^n=\begin{bmatrix} (-1)^n & n & \\ & (-1)^n & \\ & & (-1)^n \end{bmatrix}$.

8. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 求 $A^{100}+2A^{90}+3A^{60}$.

解: $f_A(\lambda)=|\lambda I_3-A|=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$.

由 Cayley-Hamilton 定理, $A^3=A^2+A-I_3$

$A^4=A^3+A^2-A=A^2+A-I_3+A^2-A=2A^2-I_3$

$A^6=A^4\cdot A^2=2A^4-A^2=4A^2-2I_3-A^2=3A^2-2I_3$

猜: $A^{2k}=kA^2-(k-1)I_3$

验证: $k=1$ ✓ $k=2$ ✓

设 $k=r$ 成立. 即 $A^{2r}=rA^2-(r-1)I_3$

$$A^{2r+2}=A^{2r}\cdot A^{2}=rA^{4}-(r-1)A^{2}=r(2A^{2}-I_3)-(r-1)A^{2}$$
$$=(r+1)A^{2}-rI_3 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow A^{100}=50A^{2}-49I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\50&1&0\\50&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^{90}=45A^{2}-44I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\45&1&0\\45&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^{60}=30A^{2}-29I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\30&1&0\\30&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{100}+2A^{90}+3A^{60}=\begin{pmatrix}6&0&0\\230&6&0\\230&0&6\end{pmatrix}$$

法2. ① 求J.

$|\lambda I_3-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$ $\quad \mu_1=1,\ \mu_2=-1$

$r(A-I_3)=2 \Rightarrow$ 关于 $\mu_1=1$ 有1个Jordan块

$$\Rightarrow J=\begin{pmatrix}1&1&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$$

② 求P

$(A-I_3)\vec{x}=\vec{0} \quad \Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$(A-I_3)\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

$(A+I_3)\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow P=\begin{pmatrix}0&2&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix} \qquad P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix}1&1&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$

③ $A^k=PJ^kP^{-1}=P\begin{pmatrix}1&k&\\&1&\\&&(-1)^k\end{pmatrix}P^{-1}$. (略)

法3. 设 $g(\lambda)=\lambda^{100}+2\lambda^{90}+3\lambda^{60}$

$f_A(\lambda)=|\lambda I_3-A|=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$.

用 $f_A(\lambda)$ 除 $g(\lambda)$，作带余除法，得

$g(\lambda)=q(\lambda)f_A(\lambda)+r(\lambda)$ (*) $\deg r(\lambda)<3$ 或 $r(\lambda)=0$.

设 $r(\lambda)=c_2\lambda^2+c_1\lambda+c_0$.

令 $\lambda=1$，$g(1)=6=c_2+c_1+c_0$

令 $\lambda=-1$，$g(-1)=6=c_2-c_1+c_0$

(*)式求导，$g'(\lambda)=q'(\lambda)f_A(\lambda)+q(\lambda)f_A'(\lambda)+r'(\lambda)$

令$\lambda=1$，$g'(1)=460=2c_2+c_1$

上三式，可求得 $c_2=230$，$c_1=0$，$c_0=-224$

在(*)式中，令$\lambda=A$

$$g(A)=r(A)=230A^2-224I_3=\begin{pmatrix}6&0&0\\230&6&0\\230&0&6\end{pmatrix}.$$

9. 设 $A=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}$. 问：是否存在$B$，$B^2=A$？

解：求P和J_A，使$P^{-1}AP=J_A$

$$P=\begin{pmatrix}0&1&-\frac{1}{2}\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}&1\\0&\frac{1}{2}&0\\-2&1&0\end{pmatrix},\quad J_A=\begin{pmatrix}0&1&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$$

存在B，$B^2=A \iff$ 存在J_B，J_B^2相似于J_A

检查 $\begin{pmatrix}0&1&\\&0&1\\&&0\end{pmatrix}=J_B$，$J_B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\&0&0\\&&0\end{pmatrix}$

$r(J_B^2)=1 \Rightarrow J_B^2$的Jordan标准形的Jordan块有2个，即

J_A是J_B^2的Jordan标准形.

求 Q，使 $Q^{-1}J_B^2Q=J_A$

$Q=(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2)$

$$\Rightarrow A=PJ_AP^{-1}=P(Q^{-1}J_B^2Q)P^{-1}=PQ^{-1}J_B^2QP^{-1}$$
$$=(PQ^{-1}J_BQP^{-1})^2$$

令 $B=PQ^{-1}J_BQP^{-1}$

$$=P\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}&1\\0&-1&2\\-2&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}.$$