一个积分

求实积分$I_{r,n}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{r^{2n}+x^{2n}}$, 这里$r>0$, n是正整数.

解.

$$I_{r,n}=\frac{1}{r^{2n}}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{r}\right)^{2n}}=\frac{1}{r^{2n-1}}\int_0^{+\infty}\frac{d\left(\frac{x}{r}\right)}{1+\left(\frac{x}{r}\right)^{2n}}$$

令$t=\frac{x}{r}$, 则有

$$I_{r,n}=\frac{1}{r^{2n-1}}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^{2n}}=\frac{1}{r^{2n-1}}I_{1,n}.$$

故可先计算$I_{1,r}$. 取$R>1$, 作闭曲线$\Gamma_R:[-R,R]\cup C_R$, 这里$C_R:z=Re^{i\theta},\theta\in[0,\pi]$. 再作闭曲线积分:

$$\oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{1+z^{2n}}=\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^{2n}}+\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^{2n}}.$$

由复合闭路定理，上式等于

$$2\pi i\cdot\left\{\sum_{k=1}^{n}Res\left[\frac{1}{1+z^{2n}},z_k\right]\right\}.$$

即下列等式成立：

$$\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^{2n}}+\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^{2n}}=2\pi i\cdot\left\{\sum_{k=1}^{n}Res\left[\frac{1}{1+z^{2n}},z_k\right]\right\}. \tag{0.1}$$

令$R\to+\infty$, 由于$\deg 1=0$, $\deg(1+z^{2n})=2n$, 被积函数是有理分式，其分子的次数为0，而其分母的次数为$2n$, 故其分母的次数比其分子的次数至少高2次. 因而

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^{2n}}=0.$$

在(0.1)两边取极限，可得

$$2I_{1,n}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}=2\pi i\left\{\sum_{k=1}^{n}Res\left[\frac{1}{1+z^{2n}},\ z_k\right]\right\}.$$

即

$$I_{1,n}=\pi i\left\{\sum_{k=1}^{n}Res\left[\frac{1}{1+z^{2n}},\ z_k\right]\right\}.$$

因

$$Res\left[\frac{1}{1+z^{2n}},\ z_k\right]=\frac{1}{2nz_k^{2n-1}},$$

由上式可得

$$I_{1,n}=\pi i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2nz_k^{2n-1}}=\frac{\pi i}{2n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k^{2n-1}}\right).$$

因z_k是方程$z^{2n}=-1$的根，故$z_k^{2n}=-1$, 即$\frac{1}{z_k^{2n-1}}=-z_k, k=1,\,2,\,\cdots,\,n$. 因而有

$$I_{1,n}=\left(\frac{-\pi i}{2n}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}z_k\right).$$

解方程：

$$z_k^{2n}=-1=e^{\pi i}=e^{\pi i+2(k-1)\pi i}=e^{(2k-1)\pi i},\quad k=1,\,2,\,\cdots,n.$$

可得

$$z_k=e^{\frac{(2k-1)\pi i}{2n}}=\frac{e^{\frac{k\pi i}{n}}}{e^{\frac{\pi i}{2n}}},\quad k=1,\,2,\,\cdots,n.$$

令$q=e^{\frac{\pi i}{n}},\theta=\frac{\pi}{2n}$, 则$q^n=e^{\pi i}=-1$. 这时有

$$\begin{aligned}
I_{1,n}&=\left(\tfrac{-\pi i}{2ne^{\frac{\pi i}{2n}}}\right)\cdot\left(\textstyle\sum_{k=1}^{n}q^k\right)\\
&=\left(\tfrac{-\pi i}{2ne^{\frac{\pi i}{2n}}}\right)\cdot\tfrac{q(1-q^n)}{1-q}\\
&=\tfrac{-\pi ie^{\frac{\pi i}{n}}(1-(-1))}{2ne^{\frac{\pi i}{2n}}(1-e^{\frac{\pi i}{n}})}\\
&=\tfrac{-\pi ie^{\frac{\pi i}{2n}}}{n(1-e^{\frac{\pi i}{n}})}\\
&=\tfrac{\pi i}{n}\cdot\tfrac{e^{i\theta}}{(e^{2i\theta}-1)}\\
&=\tfrac{\frac{\pi}{2n}}{\frac{e^{2i\theta}-1}{2ie^{i\theta}}}\\
&=\tfrac{\pi}{2n}\cdot\tfrac{1}{\sin\theta}\\
&=\tfrac{\pi}{2n\sin\frac{\pi}{2n}}.
\end{aligned}$$

这里用到

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{e^{2i\theta}-1}{2ie^{i\theta}}.$$

此外，由上式可得

$$
\begin{aligned}
I_{1,n} &= \tfrac{-\pi i}{n}\tfrac{e^{i\theta}}{1-e^{2i\theta}} \\
&= \tfrac{-\pi i}{n}\tfrac{e^{i\theta}}{1-\cos 2\theta-i\sin 2\theta} \\
&= \tfrac{-\pi i}{n}\tfrac{e^{i\theta}}{2\sin^2\theta-2i\sin\theta\cos\theta} \\
&= \tfrac{-\pi i}{2n}\tfrac{e^{i\theta}}{\sin\theta(\sin\theta-i\cos\theta)} \\
&= \tfrac{-\pi i}{2n}\tfrac{e^{i\theta}}{(-i)\sin\theta(\cos\theta+i\sin\theta)} \\
&= \tfrac{\pi}{2n}\tfrac{e^{i\theta}}{\sin\theta e^{i\theta}} \\
&= \tfrac{\pi}{2n\sin\theta} \\
&= \tfrac{\pi}{2n\sin\frac{\pi}{2n}}.
\end{aligned}
$$

从而有

$$
I_{r,n} = \frac{\pi}{2nr^{2n-1}\sin\frac{\pi}{2n}}.
$$

另外，$I_{1,n}$ 也可以有以下方法求得：由上式可得

$$
\begin{aligned}
I_{1,n} &= \tfrac{-\pi i}{n}\tfrac{e^{i\theta}}{1-e^{2i\theta}} \\
&= \tfrac{\pi i}{n}\tfrac{e^{i\theta}}{e^{2i\theta}-1} \\
&= \tfrac{\pi i}{n}\tfrac{e^{i\theta}}{\cos 2\theta-1+i\sin 2\theta} \\
&= \tfrac{\pi i}{n}\tfrac{e^{i\theta}}{-2\sin^2\theta+i2\sin\theta\cos\theta} \\
&= \tfrac{\pi i}{2ni}\tfrac{e^{i\theta}}{\sin\theta(\cos\theta+i\sin\theta)} \\
&= \tfrac{\pi i}{2ni}\tfrac{e^{i\theta}}{\sin\theta(e^{i\theta})} \\
&= \tfrac{\pi}{2n\sin\theta} \\
&= \tfrac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}.
\end{aligned}
$$