P13.2

证明：以工厂为点，有业务联系关系为边，建立无向图。若每个点都与其它 3 个边相连，则图的总度数将为 27，与图的总度数为偶数矛盾；若仅有 4 个点的度数为偶数，则剩余 5 个点的度数均为奇数，那么图的总度数也将为奇数，与图的总度数为偶数矛盾。

P13. 4

证明：用反证法，假设存在孤立结点，则根据简单图的定义，刨去一个孤立节点后的图仍然是简单图。而对结点数为$n-1$的简单图，存在不等式：

$$m \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

而题目中的条件为：$m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，矛盾，所以假设不成立，$G$中不存在孤立结点。

P13. 6

证明：用数学归纳法证明，设$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m, m \geq 0$，当$m=0$时，只要$n$个点度数都为 0 即可。若$m=k$时结论成立，$m=k+1$时，不妨设$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$，则必定有$d_1 \geq 2$或$d_1 = d_2 = 1$。若$d_1 \geq 2$，由归纳假设，存在一个图的度序列为$d_1 - 2, d_2, \ldots, d_n$，只要在该图基础上，对于结点$v_1$连接一个自环，即得到度序列为$d_1, \ldots, d_n$的图；若$d_1 = d_2 = 1$，由归纳假设，存在一个图的度序列为$d_1 - 1, d_2 - 1, \ldots, d_n$，只要在$v_1, v_2$之间连接一条边即可。

P13. 7

证明：在有向完全图中，任意一个结点的总度数$d^+(v_i) + d^-(v_i) = n-1$。因此，

$$\sum_{v_i \in V} (d^+(v_i))^2 - \sum_{v_i \in V} (d^-(v_i))^2 = \sum_{v_i \in V} (d^+(v_i) + d^-(v_i))(d^+(v_i) - d^-(v_i))$$

$$= \sum_{v_i \in V} (n-1)(d^+(v_i) - d^-(v_i)) = (n-1) \sum_{v_i \in V} (d^+(v_i) - d^-(v_i))$$

$$= (n-1)(\sum_{v_i \in V} d^+(v_i) - \sum_{v_i \in V} d^-(v_i))$$

$= 0.$

这就完成了证明。

P14. 10

证明：可分以下三种情况讨论。(1)若存在一个人a，至少认识其中 8 个人中的 6 个人，则这 6 个人中，要么 3 个人相互认识，要么 3 个人相互不认识，加上a，则是要么 4 个人相互认识，要么 3 个人相互不认识。(2) 若存在一个人b，至少不认识其中 8 个人中的 4 个人，则这 4 个人中若有两人不认识，加上b则是 3 个人相互不认识。否则，这 4 个人相互认识。(3)若每个人都恰好认识 5 个人，则图的度数和为 45，与握手定理矛盾。

P14. 16

邻接矩阵

0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0

关联矩阵

1	-1	1	-1	0	0	0	0	0
-1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	-1	-1	0
0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1
0	0	0	0	-1	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	1

边列表

1	3	1	6	2	3	5	6	6
2	1	4	1	5	4	3	3	4

正向表

1	3	4	6	6	7	10	Null	null
2	4	5	1	4	3	1	3	4

P14. 17

令$F(1)=b, F(2)=a, F(3)=c, F(4)=e, F(5)=d, F(6)=f$,则 F是V_1, V_2之间的双射，且可以验证$e=(u,v)\in E_1$的充分必要条件是$e'=(f(u),f(v))\in E_2$。因此两图同构。

P14. 21

(1) n^2

(2) mn

(3) $2m$

(4) $m+n+1$

P50. 1

用数学归纳法证明，$k=1$时，由完全图边的数量，这显然成立。若对所有连通分支数$\leq k$的图，结论都成立，对于连通分支数为$k+1$时，一定可以分解成一个具有n_1个结点， 具有k个连通分支的子图，以及一个具有n_2个结点的连通分支，$n_1+n_2=n$，$n-k\geq n_2\geq 1$。由归纳假设，

$$m\leq\frac{1}{2}(n_1-k+1)(n_1-k)+\frac{1}{2}n_2(n_2-1).$$

容易验证$n_1-k+1\leq n-k$且$n_2\leq n-k$，因此

$$m\leq\frac{1}{2}(n-k)\big(n_1-k+(n_2-1)\big)=\frac{1}{2}(n-(k+1)+1)\big(n-(k+1)\big).$$

也就是连通分支数为$k+1$时不等式也成立，这就完成了归纳证明。

P50. 2

证明：若G为非连通图，设G有k个连通分支，则G中某连通支内任意点与其余$k-1$各连通支的点无连线，那么在$\bar{G}$中这个点与其余$k-1$个连通支的点都有连线。所以，不同连通支中的任意两个点之间在$\bar{G}$中都有连线。在G中位于同一连通支内的任两点，在$\bar{G}$中可以通过与其余$k-1$个连通支的某一点相连而形成通路。

所以，$\bar{G}$为连通图。同理，若$\bar{G}$非连通，则G连通。证毕。

P50. 3

证明：

设L_1, L_2是连通图G的两条最长路，且L_1, L_2无公共结点。设L_1, L_2的长度（边数）为p。由于G是连通的，故L_1上必有一结点V_1与L_2上一结点V_2有道路L'相通，且L'除了两端点外，不包含L_1, L_2上的其他结点。V_1将L_1分为两部分，其中一部分的长度$\geq \frac{p}{2}$，记此部分道路为L_3。同样，V_2将L_2分为两部分，其中一部分L_4的长度$\geq \frac{p}{2}$。这样，$L_3 + L' + L_4$。就是G的一条新的道路，且其长度大于p，这与G的最长路的长度是p的假设矛盾。

P50. 4

证明：若$n = 4, m \geq 5$，易通过枚举说明必存在带弦回路。当$n > 4$时，若对于任意$v \in G$，$d(v) \geq 3$，由书中例 2.1.3 知G中存在带弦回路，否则，存在v_i使得 $d(v_i) \leq 2$，去掉v_i后，$m \geq 2(n-1)-3$，变为$n-1$个顶点的问题。

P50. 5

(1)若$(v_i, v_j) \in E$，由于G中不含三角形，因此没有同时与v_i, v_j都关联的结点，即

$$d(v_i) + d\left(v_j\right) \leq n - 2 + 2 = n.$$

对所有G中的边都有上述不等式，将所有不等式累加，左边：每个结点v_i共累加了$d(v_i)$次，因此等于$\sum d^2(v_i)$，由于一共m条边，因此右边等于mn，也就是$\sum d^2(v_i) \leq mn$.

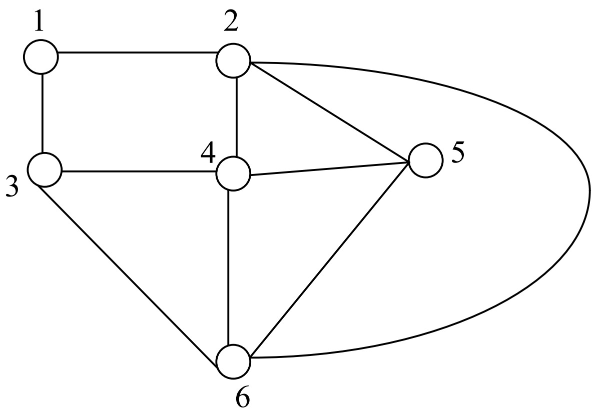
(2)带入(1)的结论，结合 Cauchy 不等式：

$$mn^2 = mn \times n \geq \left(\sum d^2(v_i)\right)(1+..+1) \geq \left(\sum d(vi)\right)^2 = (2m)^2.$$

P50. 11

解：将 5 个房间和房间外区域看成是 6 个节点，两个房间之间有门则用边连接。该问题被转化为图中是否存在一条欧拉道路。

经过转换的图：



在上图中，只有结点 3 和 5 的度为奇数，所以，存在欧拉道路。所以，存在一条路过各门一次。

P50. 12

根据例 2.3.3 可得做法。 (a) 2 笔 (b) 2 笔 (c)2 笔 (d) 1 笔。在补边后的欧拉回路中断开新补的边，即得到方案。

P13.9

建模为哈密顿回路问题。对于任意$v, d(v) = 3 \geq \frac{n}{2}$，存在哈密顿回路，因此可以重新入座。

P53.18

证明：假设存在两结点v_i, v_j，使得$d(v_i) + d\left(v_j\right) < n$，由于与任两点连结的边最多有$n-1+n-2 = 2n-3$条，又$d(v_i) + d\left(v_j\right) \leq n-1$，至多有$n-1$条边与这两点相连，故至少有$2n-3-(n-1) = n-2$条边不与这两点相连。所以$m \leq C_n^2 - (n-2) = \frac{1}{2}(n-1)n - (n-2) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1$ ， 而 $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2$，矛盾。故$\forall v_1, v_2, d(v_1) + d(v_2) \geq n$，存在$H$回路。

P53.24

(a) 存在哈密顿回路，如 17234561.

(b) 不存在，去掉里面正方形的四边中点后，去掉 4 个点但有 6 个连通分支。

P54.28

不存在。受到真实国际象棋盘的启发，用黑，白两种颜色着色，左上角着黑色，并且相邻点着不同颜色。随后，以每个格子为结点建立一个图，若马能一步从v_i对应格子跳到v_j，则v_i, v_j之间有边相连，最终会得到二分图，因为根据马的行走规则，相同颜色格子之间一定没有边。由于m, n都是奇数，二分图中两个集合的结点数目不同，因此不存在哈密顿回路。

P54.31

设结点为$v_1(0,\ 0)$ $v_2(2,\ 5)$ $v_3(9,\ 3)$ $v_4(8,\ 9)$ $v_5(6,\ 6)$

利用分支与界法，将边权由小到大进行排列

R_{ij}:	e_{25}	e_{45}	e_{35}	e_{12}	e_{34}	e_{23}	e_{24}	e_{13}	e_{15}	e_{14}
l_{ij}:	5	5	6	7	7	9	10	12	12	17

采用 DFS 与分支判断如下：

$d(1) = d(e_{25}\ , e_{45}\ , e_{35}\ , *\ , *)$ 不满足要求

$d(2) = d(e_{25}\ , e_{45}\ , e_{12}\ , e_{34}\ , e_{23})$不满足要求

$d(3) = d(e_{25}\ , e_{45}\ , e_{12}\ , e_{34}\ , e_{24})$不满足要求

$d(4) = d(e_{25}\ , e_{45}\ , e_{12}\ , e_{34}\ , e_{13}) = 36 *$

$d(5) = d(e_{25}\ , e_{45}\ , e_{34}\ , e_{23}\ , e_{24})$不满足要求

$d(6) = d(e_{25}\ , e_{45}\ , e_{34}\ , e_{23}\ , *) > d_{min}$不满足要求

$d(7) = d(e_{25}\ , e_{45}\ , *\ , *\ , *) > d_{min}$不满足要求

同理，$d(8)$，$d(9)$，$d(10)$，$d(11)$均不满足要求

$d(11) = d(e_{45}\ , e_{35}\ , e_{12}\ , e_{34}\ , e_{15}) = 42 * > d_{min}$

而$d(12)$，$d(13)$，$d(14)$，$d(15)$，$d(16)$，$d(17)$也均不满足回路

$d(18) = d(e_{25}\ , e_{35}\ , e_{34}\ , e_{24}\ , e_{15}) = 40 * > d_{min}$

同样$d(19)$，$d(20)$不符合要求

由于接下来的$d_{min} = d(e_{25}, e_{45}, e_{12}, e_{34}, e_{13})$而之后的均大于$d_{min}$

所以最短的路线为$(0, 0) \to (2, 5) \to (6, 6) \to (8, 9) \to (9, 3) \to (0, 0)$

最短路线长度为 36

P54.33

根据算法，一开始只有顶点v_1，第一步加入边(v_1, v_5)，然后加入(v_3, v_5)，下一个需要加入的边为(v_2, v_3)，经判断，加在v_1处比v_5更好。依照上述方法，最终的路径为 123465，近似解为 202。

补充题

不存在哈密尔顿回路。若存在，则与顶点a, f, g关联的边都要出现在回路中，则c在回路中出现三次，矛盾。

P56.45

关键路径：$1 \to 3 \to 2 \to 5 \to 9 \to 11$

3，5，10 的允许延误时间为：0，0，5

P57.47

(a) $v_0v_3v_7v_2v_4v_5v_6v_1v_8v_9v_{10}$

(b) $v_8v_2v_{12}v_6v_1v_{13}v_{10}v_7v_3v_{11}v_4v_9v_5$

答案不唯一。

P57.48

（a）增加重边v_1v_2，v_2v_3，v_4v_5

一条中国邮路为 123452451321.

P82.1

图中顶点总数$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$,

边数$m = n - 1$,

由握手定理 $2m = n_1 + 2n_2 + \cdots + kn_k$,

所以，$2(n_1 + n_2 + \cdots + n_k - 1) = n_1 + 2n_2 + \cdots + kn_k$,

所以，$n_1 = n_3 + 2n_4 + \cdots + (k-2)n_k + 2$.

P82.9

证明：

注：这里的有向连通图（记为G）为弱连通，即对应的无向图连通，因此其必存在支撑树T。首先去掉原图的自环，重边，若原图不是支撑树，可以从原图中找到回路，并去掉回路中的一条边，并重复此操作，这不会影响连通性，最终找不到回路时即得到支撑树，该方法称为“破圈法”。

(1) 若e是自环，显然不在G的任何支撑树中；若e不是自环，且不在G的任何支撑树中，可以取G的任一支撑树T，$T+e$存在回路，由于e不是自环，该回路必定存在不同于e的边e'，$T+e-e'$是支撑树，与e不在G的任何支撑树中矛盾，因此e是自环。

(2) 若e是割边，且不在G的某一支撑树T中，则$T+e$存在环，且e是环的一条边，去掉e不影响$T+e$的连通性，也必定不影响G的连通性，与e是割边矛盾。若e在G的任何一个支撑树中，但又不是割边，$G-e$连通，且存在支撑树T', T'也是T的支撑树，与e在G的任何一个支撑树中矛盾。

P83.16

解:

（a） 树的数目$=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 101$

（b） 树的数目$=\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 44$

（c） 树的数目= $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 60$

P83.17

解：

（d） 树的数目= $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 24$

（e） 树的数目= $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8$

（f） 树的数目= $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 9$

P85.27

（1） 基本回路矩阵 $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ e1 & e2 & e5 & e8 & e3 & e4 & e6 & e7 \end{bmatrix}$

P85.38

最小支撑树为$\{(v_1,v_3),(v_1,v_4),(v_4,v_7),(v_2,v_4),(v_4,v_5),(v_5,v_6)\}$，造价 48.

P85.43

最短树为 $\{(v_1,v_8),(v_8,v_7),(v_7,v_6),(v_8,v_4),(v_4,v_3),(v_2,v_4),(v_7,v_5)\}$ 或 $\{(v_1,v_8),(v_8,v_7),(v_7,v_6),(v_1,v_4),(v_4,v_3),(v_2,v_4),(v_7,v_5)\}$，边权和 22。

P103.1

(1) 设图G的顶点数为n,边数为m,由于每个点的度都大于等于3,知$2m \geq 3n$,

对一般平面图,有$n - m + d \geq 2$。

若G不存在边界数小于 5 的域,则有$2m \geq 5d$,

因此$d \geq 2 - n + m \geq 2 - \frac{2}{3}m + m = 2 + \frac{1}{3}m \geq 2 + \frac{5}{6}d$,即$d \geq 12$,

与题设矛盾,因此G至少有 1 个域的边界数小于 5。

P103.3

证明: 假设G和G的补图均为平面图,G中边数为m_1,G的补图中边数为m_2,

因为是简单图,所以有:

$m_1 \leq 3n - 6, m_2 \leq 3n - 6.$

所以,$m_1 + m_2 \leq 6n - 12,$

即$n(n-1) \leq 12n - 24.$

求出,$n \leq 10.77$,与$n > 10$矛盾。

补充题: