高等线性代数选讲样题一

1. (24分) 填空题(每空3分):

   (1) 设$x^3+px^2+qx+r=0$的三个根是x_1,x_2,x_3. 写出一个三次方程____，它以x_1x_2,x_1x_3,x_2x_3为根.

   (2) 设m,n是大于1的正整数，则$x^{3m}+x^{3n}$除以x^2+x+1后的余式是____.

   (3) 设A是秩为1的3阶矩阵，且A的对角元之和等于0, 则A的Jordan标准形是____.

   (4) 设A是一个2阶反对称矩阵，即$A^T=-A$且A是一个实矩阵, 则e^A的行列式等于____.

   (5) 设A是一个n阶可逆复矩阵,它的极小多项式是x^3-3x+2，则A^{-1}的极小多项式等于____.

   (6) 设$A=\begin{pmatrix} a & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ b & c & d \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & e \end{pmatrix}$是正交阵，则$a=$____, $e=$____.

   (7) 设V是数域$\mathbb{F}$上3维线性空间，有一组基v_1,v_2,v_3. 设v_1^*,v_2^*,v_3^*是对偶基，则V中基$v_1,v_1+2v_2,v_1+2v_2+3v_3$的对偶基是____.

2. (12分) 设$n\geq 2$是一个自然数，$A\in M_n(\mathbb{R})$满足$A^2=A$且$rank(A)=r$，其中$1\leq r<n$.

   (1) 求A的特征多项式和极小多项式.

   (2) 求e^A.

3. (18分) 设$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 求过渡矩阵$P$和Jordan标准形$J$，使得$P^{-1}AP=J$.

4. (10分) 设$w=e^{i\frac{2}{3}\pi}=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则$w^3=1$且$w^2=\overline{w}$. 已知$A=\begin{pmatrix} 4 & w^2 & w \\ w & 4 & w^2 \\ w^2 & w & 4 \end{pmatrix}$.

(1) 证明：$A-3I_3=\begin{pmatrix} 1 \\ w \\ w^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & w^2 & w \end{pmatrix}$.

(2) 求酉阵U,使得$U^H AU$是对角阵.

5. (12分) 设V是n维欧式空间，β是V中长度为1的向量，令$T_\beta : V \to V$是一个线性变换定义为$T_\beta(v) = v - 2(\beta, v)\beta$.

(1) 证明：T_β是一个正交变换.

(2) 证明：T_β在V的一组标准正交基下矩阵的行列式等于-1.

(3) 证明：设$u, v \in V$满足$u \neq v$且$\|u\| = \|v\|$, 证明:存在$\beta \in V$, 满足$\|\beta\| = 1$且$T_\beta(u) = v$.

6. (10分) 设$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$是一个如下定义内积的欧式空间：$\forall f(x), g(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ 是它的子空间.

(1) 应用Gram-Schimidt正交化，由$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$的一组基$1, x, x^2$求相应的一组标准正交基.

(2) 设$f(x) = x^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, 求$u(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$使得对于任意$p(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$,有

$$\int_{-1}^{1} p(t)f(t)dt = \int_{-1}^{1} p(t)u(t)dt.$$

7. (8分) 设V是n维酉空间，$T : V \to V$是一个线性变换. 假设T属于任意特征值λ的特征向量均是伴随T^*(也称为共轭变换T^*)的属于特征值$\overline{\lambda}$的特征向量，求证：T是复正规变换.

8. (6分)

(1) 设A是n阶酉矩阵.证明：存在n阶Hermite 阵B, $e^{iB} = A$.

(2) 设A是n阶复可逆矩阵. 证明：存在n阶复矩阵B, $e^B = A$.