附加题 1

1. 设 $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{m}}$, $\xi_k = e^{\frac{i(2k+1)\pi}{m}}$ $k=0,1,\cdots,m-1$.

证明：(1) $x^m - 1 = \prod_{k=0}^{m-1}(x-\omega_k)$, $x^m+1 = \prod_{k=0}^{m-1}(x-\xi_k)$.

(2) $\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\cos\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$.

(提示：令 $\omega = e^{i\frac{\pi}{2n+1}}$, $x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x+1 = (x-\omega)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^{2n})$)

2. 已知一个对应 $\mathbb{C} \xrightarrow{\Phi} M_2(\mathbb{R})$ 定义为 $\Phi(a+bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

满足 $\Phi(z_1z_2) = \Phi(z_1)\cdot\Phi(z_2)$

问：①是否存在映射 $\Psi: M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{2n}(\mathbb{R})$ 定义为

$$\Psi(A+iB) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}, \quad A,B\in M_n(\mathbb{R})$$

且 $\Psi(M_1M_2) = \Psi(M_1)\cdot\Psi(M_2)$ $\quad M_1,M_2\in M_n(\mathbb{C})$?

② Φ 的定义是基于如下原理： $\mathbb{C}$ 看作 $\mathbb{R}$ 上 2 维空间.

基：$1, i$

$\forall z_0 = a_0+b_0 i$ 诱导了一个线性变换

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f_{z_0}} & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f_{z_0}(z) = z_0\cdot z \end{array}$$

f_{z_0} 在基 $1, i$ 下矩阵是 $\begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix}$, 因为：

$$f_{z_0}(1) = z_0 \cdot 1 = a_0 + b_0 i \longrightarrow \text{在}1,i\text{下坐标} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$f_{z_0}(i) = z_0 \cdot i = a_0 i - b_0 \longrightarrow \text{在}1,i\text{下坐标} \begin{pmatrix} -b_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

总结：$\forall z_0 \in \mathbb{C}$，$z_0$可看作$\mathbb{C}$上线性变换，在基$1,i$下

矩阵 $= \begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix}$

按此原理，考虑 $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

试定义一个对应：$\mathbb{F} \xrightarrow{\Phi} M_2(\mathbb{Q})$，满足 $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$?

③ 四元数集 $\mathbb{H} \overset{\text{定义}}{=} \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

其中 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$，$ij = k = -ji$，

$jk = -kj = i$，$ki = -ik = j$.

i, j, k的乘法诱导了两四元数乘法：

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)$$

$$= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)i$$
$$+ (a_1c_2 + a_2c_1 + b_2d_1 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)k.$$

按上述原理，能否定义一个对应 $\mathbb{H} \longrightarrow M_4(\mathbb{R})$？

3. (Partial fraction decomposition)

已知 $\frac{71}{24} \overset{①}{=} 2+\frac{23}{24} \overset{②}{=} 2+\frac{1}{3}+\frac{5}{8} \overset{③}{=\!=} 2+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}$

其中①是带余除法，②是应用 $24=3\times 8$，$(3,8)=1$

③是应用 $8=2^3$

一般地，设 $a,b\neq 0\in\mathbb{N}$，$b=p_1^{n_1}\cdots p_s^{n_s}$ p_i 素数，

则存在自然数 c，a_{ij}，$a_{ij}<p_i$

$$\frac{a}{b}=c+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{a_{ij}}{p_i^j}$$

我们类比上述结果到多项式.

证明：(1) 设 $f(x),g(x)\in\mathbb{F}[x]$ 且 $\deg f(x)<\deg g(x)$

设 $g(x)=g_1(x)g_2(x)$，且 $(g_1(x),g_2(x))=1$ 则

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}+\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$ 其中 $\deg f_i(x)<\deg g_i(x)$ $i=1,2$.

(2) 设 $f(x),g(x)\neq 0\in\mathbb{F}[x]$，$k>1\in\mathbb{N}$，$\deg f(x)<k\deg g(x)$，且 $g(x)$ 不可约

则 $$\frac{f(x)}{g^k(x)}=\frac{h_k(x)}{g^k(x)}+\frac{f_{k-1}(x)}{g^{k-1}(x)}$$

其中 $\deg h_k(x) < \deg g(x)$ 或 $h_k(x)=0$

$$\deg f_{k-1}(x) < \deg g^{k-1}(x) \text{ 或 } f_{k-1}(x)=0.$$

(3) 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$，且 $f(x)\neq 0$，$g(x)\neq 0$.

设 $g(x)=\prod_{i=1}^{k} P_i^{n_i}(x)$，$P_1(x),\cdots,P_k(x)$ 是互不相同的不可约多项式，$n_i \geq 1$ $i=1,\cdots,k$.

则存在（唯一）多项式 $b(x)$ 和 $a_{ij}(x)$ 满足

$$\deg a_{ij}(x) < \deg P_i(x) \text{ 或 } a_{ij}(x)=0$$

且 $$\frac{f(x)}{g(x)} = b(x) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{ij}}{P_i^j}$$

注：① $\frac{f_{k-1}(x)}{g^{k-1}(x)}$ 可迭代使用(2)继续拆分.

② 例 $$\int \frac{x^4+x^3+x^2+1}{x^2+x-2}\,dx$$

$$=\int\left(x^2+3+\frac{-3x+7}{(x+2)(x-1)}\right)dx = \int\left(x^2+3+\frac{-13/3}{(x+2)}+\frac{4/3}{(x-1)}\right)dx$$