第二次习题课答案（矩阵的三角化，极小多项式，幂零变换）

一、　下面结论是否正确，请说明理由.

1. 矩阵 A 为幂零矩阵当且仅当 A 只有零特征值.

答：正确。

2. 任意复方阵都相似于一个下三角矩阵.

答：正确。

3. 一个幂零变换为循环变换当且仅当它的极小多项式和特征多项式相等.

答：正确。幂零变换在一组基下的矩阵为 $diag(N_1, N_2, \cdots, N_s)$，其中 $N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$，

设特征多项式为 λ^n，极小多项式为 λ^k，则 k 是使得 $diag(N_1, N_2, \cdots, N_s)^k = 0$ 的最小整数，k 等于矩阵 $N_1, N_2, \cdots, N_s$ 的最大阶数。于是幂零变换的特征多项式等于极小多项式 $\Leftrightarrow$ $k = n \Leftrightarrow s = 1 \Leftrightarrow$ 该幂零变换为循环变换。

4. 由线性变换 σ 的循环向量组生成的子空间是 σ 不变的子空间.

答：正确。

5. 设 $V = R_n[x]$（次数小于 n 的实多项式的全体），“求导”为 V 上的循环变换.

答：正确。因为 $\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \cdots, \dfrac{x^2}{2}, x, 1$ 为求导变换 $\dfrac{d}{dx}$ 的循环基。

6. 设 A, B 为 n 阶方阵，则 AB 和 BA 有相同的特征多项式.

答：正确。因为 $|\lambda I - AB| = |\lambda I - BA|$.

7. 设 A, B 为 n 阶方阵，则 AB 和 BA 有相同的极小多项式.

答：不对。如 $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，则 $AB==\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$m_{AB}(\lambda)=\lambda^2$，

$m_{BA}(\lambda)=\lambda$.

8. 设 A 为 n 阶方阵，满足 $r(A)=1$，则 A 要么可以相似对角化，要么幂零。

答：正确。可以假设 $n\geq 2$。因为 $r(A)=1$，所以特征值 0 的几何重数等于 $n-1$。若特征值 0 的代数重数等于 n，则 A 的所有特征值都为 0，故为幂零矩阵。若特征值 0 的代数重数等于 $n-1$，则 A 还有一个非零的特征值 λ，其代数重数等于 1，等于几何重数。所以 A 可以相似对角化

9. 幂零变换一定有一组循环基。

答：不对。

10. 设 σ 为线性空间 V 上的线性变换。若存在 $\alpha\in V$ 使得 $\alpha,\sigma\alpha,\sigma^2\alpha,\cdots,\sigma^{n-1}\alpha$ 为 V 的一组基，则 σ 为循环变换.

答：不对。σ 为循环变换当且仅当存在 $\alpha\in V$ 使得 $\alpha,\sigma\alpha,\sigma^2\alpha,\cdots,\sigma^{n-1}\alpha$ 为 V 的一组基，

且 $\sigma^n\alpha=0$.

二、计算，证明

1. 设 $A\in M_2(F)$，在线性空间 $M_2(F)$ 上定义线性变换：$T:M_2(F)\to M_2(F)\ (B\mapsto AB)$.
证明若 A 为幂零矩阵，则 T 为幂零变换。

证明：设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ T 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵为 $B=\begin{pmatrix}a_{11}&&a_{12}&\\&a_{11}&&a_{12}\\a_{21}&&a_{22}&\\&a_{21}&&a_{22}\end{pmatrix}$,

则 $f_B(\lambda)=|\lambda I-B|=|\lambda I-A|^2=f_A(\lambda)^2$. 因为 A 为幂零矩阵，则 $f_A(\lambda)=\lambda^2$，所以 $f_B(\lambda)=\lambda^4$。故 T 为幂零变换。

2. 设 A,B 为实方阵，证明 A,B 在 $\mathbb{C}$ 上相似（即有复可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$）当且仅当 A,B 在 $\mathbb{R}$ 上相似（即有复可逆矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ=B$）.

证明：设 $P=P_1+iP_2$，其中 P_1,P_2 为实矩阵，于是 $A(P_1+iP_2)=(P_1+iP_2)A$，得到 $AP_1=P_1A$，$AP_2=P_2A$，从而 $A(P_1+xP_2)=(P_1+xP_2)A$，$\det(P_1+xP_2)$ 为 x 的 n 次多项式，在 $\mathbb{R}$ 上至多有 n 个根，取一个实数 x_0 不是 $\det(P_1+xP_2)$=0 的根，则 $Q=P_1+x_0P_2$ 为可逆的实矩阵，使得 $Q^{-1}AQ=B$.

3. 设 A,B 都是上三角矩阵，证明 $AB-BA$ 为幂零矩阵.

证明：$AB-BA$ 为对角线元素都为零的上三角矩阵，所以幂零。

4. 设 V 为数域 F 上的 n 维线性空间，σ 为 V 上的线性变换，假设存在 $0\neq\alpha\in V$，使得 $\alpha,\sigma\alpha,\sigma^2\alpha,\cdots,\sigma^{n-1}\alpha$ 为 V 的一组基，求 σ 在基 $\sigma^{n-1}\alpha,\sigma^{n-2}\alpha,\cdots,\sigma\alpha,\alpha$ 下的矩阵，并求 σ 的特征多项式和极小多项式.

解：设 $\sigma^n\alpha=c_1\sigma^{n-1}\alpha+c_2\sigma^{n-2}\alpha+\cdots+c_{n-1}\sigma\alpha+c_n\alpha$，则 σ 在基 $\sigma^{n-1}\alpha,\sigma^{n-2}\alpha,\cdots,\sigma\alpha,\alpha$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} c_1 & 1 & & \\ c_2 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ c_n & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$.

于是 σ 的特征多项式为 $f_\sigma(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^n-c_1\lambda^n-\cdots-c_{n-1}\lambda-c_n$. 设 σ 的极小多项式为 $m(x)=\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+\cdots+a_{k-1}\lambda+a_k$，则 $m(\sigma)=0$.因此

$\sigma^k\alpha+a_1\sigma^{k-1}\alpha+a_2\sigma^{n-2}\alpha+\cdots+a_{k-1}\sigma\alpha+a_k\alpha=0$ 由于 $\sigma^{n-1}\alpha,\sigma^{n-2}\alpha,\cdots,\sigma\alpha,\alpha$ 线性无关，则 $k=n$. 所以 σ 的极小多项式就是 σ 的特征多项式.

5. 已知 $A=\begin{pmatrix} 0 & a & & \\ & 0 & b & \\ & & 0 & c \\ & & & 0 \end{pmatrix}$，求 A 的极小多项式。

解：A 的特征多项式为 $f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^4$，$A$ 的极小多项式整除 A 的特征多项式，且为 A 的阶数最低的化零多项式。于是当 a,b,c 都不等于零时 A 的极小多项式为 $m(\lambda)=\lambda^4$；当 $a=0,b\neq 0,c\neq 0$ 或者 $a\neq 0,b\neq 0,c=0$ 时 A 的极小多项式为 $m(\lambda)=\lambda^3$；当 a,b,c 中有一个不等于零或者 $a\neq 0,b=0,c\neq 0$ 时 A 的极小多项式为 $m(\lambda)=\lambda^2$；当 a,b,c 都等于零时 A 的极小多项式为 $m(\lambda)=\lambda$.

6. 设 V 为复数域 $\mathbb{C}$ 上 n 维的线性空间，$\sigma\in L(V)$，则 σ 有任意 r 维的不变子空间（$1\leq r\leq n$）.

证明：在 V 中有一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 使得 σ 在上述基下的矩阵为上三角矩阵

$\begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & \lambda_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & b_{n-1n} \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$，则 $W_r=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$ 为 r 维 σ 不变的子空间。任取 $\alpha=\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i\in W_r$，$\sigma\alpha=\sum_{i=1}^{r}k_i\sigma\alpha_i$，其中 $\sigma\alpha_i=\sum_{j=1}^{r}b_{ji}\alpha_j\in W_r\quad(1\leq i\leq r)$，从而 $\sigma\alpha\in W_r$。

附注：(矩阵语言 v.s. 线性变换语言)

设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，$T:\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}^n$，$T(\vec{x})=A\vec{x}$

设 A 相似于分块上三角阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ O & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ii} 是 n_i 阶阵

$i=1,\cdots,s$

则

(1) 存在T-不变子空间包含链：$V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_s = \mathbb{C}^n$

其中 V_i 是 $n_1+\cdots+n_i$ 维 T-不变子空间 $i=1,\cdots,s$.

(2) 进一步，若 $A_{ij}=0$, $i\neq j$, 则对于每个 V_i, 存在 T-不变子空间 W_i, $V_i = V_{i-1} \oplus W_i$, $i=1,\cdots,s$. 此时

$$\mathbb{C}^n = V_1 \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$$

7. 设 T 是复 n 维空间 V 上线性变换，T 在 V 的一组基下矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0^T & -a_0 \\ I_{n-1} & \vec{\alpha} \end{pmatrix}$$

其中 $\vec{\alpha} = (-a_1 \ \ -a_2 \ \ \cdots \ \ -a_{n-1})^T$

(1) 求 T 的特征多项式 $f_T(\lambda)$ 和极小多项式 $m_T(\lambda)$.

(2) T 是否可对角化？

解：令 $\vec{e_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ 第 i 位置 $\quad i=1,\cdots,n$

设 $m_A(\lambda)=\lambda^r+b_{r-1}\lambda^{r-1}+\cdots+b_1\lambda+b_0 \quad r\leq n$

若 $r<n$，则

$A\vec{e_1}=\vec{e_2},\quad A^2\vec{e_1}=A\vec{e_2}=\vec{e_3},\cdots,\ A^{r-1}\vec{e_1}=\vec{e_r}$

$$0=m_A(A)\vec{e_1}=(A^r+b_{r-1}A^{r-1}+\cdots+b_1A+b_0I_n)\vec{e_1}$$
$$=\vec{e}_{r+1}+b_{r-1}\vec{e_r}+\cdots+b_1\vec{e_2}+b_0\vec{e_1}$$

这与 $\vec{e_1},\vec{e_2},\cdots,\vec{e}_{r+1}$ 线性无关矛盾！

因此 $r=n$，$\quad m_A(\lambda)=f_A(\lambda)$

此时，$\quad 0=m_A(A)\vec{e_1}$
$$=A^n\vec{e_1}+b_{n-1}\vec{e}_{n-1}+\cdots+b_1\vec{e_2}+b_0\vec{e_1}$$
$$=A^n\vec{e_1}+\begin{pmatrix}b_0\\b_1\\\vdots\\b_{n-1}\end{pmatrix}$$

但 $A^n\vec{e_1}=A(A^{n-1}\vec{e_1})=A\vec{e_n}=\begin{pmatrix}-a_0\\-a_1\\\vdots\\-a_{n-1}\end{pmatrix}$

因此 $a_i=b_i,\quad i=0,1,\cdots,n-1$

$\Rightarrow f_T(\lambda)=f_A(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$

(2) T 可对角化 $\Leftrightarrow m_T(\lambda)=0$ 无重根

$\Leftrightarrow (f_T(\lambda),f_T'(\lambda))=1 \qquad f_T'(\lambda)$ 是形式导函数

8. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$，且 $\operatorname{rank}(AB-BA)=1$.

证明：$(AB-BA)^2 = O_{n\times n}$

证明：设 $C \in M_n(\mathbb{C})$，$tr(C)=0$ 且 $r(C)=1$

则存在 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{C}^n$，$C = uv^T$ 且 $tr(C)=v^Tu$

$C^2 = uv^Tuv^T = u(v^Tu)v^T = O_{n\times n}$

令 $C = AB-BA$ 即可.