第九周：矩阵函数（II）+内积空间（I）

参考：线性代数与几何（下）第十一章 11.3 第十章 10.1，10.3
或高等代数学 第七章 7.8 第九章 9.1-9.2

矩阵指数函数

性质1. 设$A, B \in M_n(\mathbb{C})$,且$AB = BA$, 则$e^A \cdot e^B = e^{A+B}$.

性质2. 给定Jordan块$J_0 = \lambda_0 I_r + N = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{pmatrix}_{r\times r}$, 则

$$e^{tJ_0} = e^{\lambda_0 t}(I_r + tN + \tfrac{t^2}{2}N^2 + \cdots + \tfrac{t^{r-1}}{(r-1)!}N^{r-1}).$$

内积空间

定义: 设 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$,V 是数域$\mathbb{F}$上的向量空间. V 上一个内积(inner product)是 $V\times V$ 上一个函数，对于$(u,v)\in V\times V$，有一个取值 $\langle u,v\rangle\in\mathbb{F}$，满足：

(1)线性性： $\langle\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2,v\rangle=\lambda_1\langle u_1,v\rangle+\lambda_2\langle u_2,v\rangle$
对于任意 λ_1 $\lambda_2\in\mathbb{F}$ 和 $u_1,u_2,v\in\mathbb{F}$.

(2)共轭对称性：$\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$.

(3)正定性：对于任意$u\in\mathbb{F}$，$\langle u,u\rangle\geq 0$.
$\langle u,u\rangle=0$ 当且仅当 $u=0$.

内积空间

例: 1. $\forall u, v \in \mathbb{C}^n$，定义 $\langle u, v\rangle = u^T\overline{v}$. 这定义了 $\mathbb{C}^n$ 上一个内积.

2. 设 V 是周期 2π 的复值函数全体，这是$\mathbb{C}$ 上的向量空间. 任意 $f(t), g(t) \in V$ ，定义

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

这定义了 V 上一个内积.

内积空间

定义：一个带着内积结构的向量空间称为内积空间. 实数域上内积空间称为欧式空间，复数域上的内积空间称为酉空间。

注：一个向量空间可以存在多个内积结构. 例如：$\mathbb{C}$ 上标准内积是

$$\langle z_1, z_2\rangle = z_1\overline{z_2}$$

也可以定义新内积: $\langle z_1, z_2\rangle = 2z_1\overline{z_2}$.

基本性质

设 V 是一个内积空间.

(1) 任意$v \in V$ ，定义长度(norm)$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

(2) 两个向量 $u, v \in V$ 是正交垂直的(orthogonal) 如果 $\langle u, v\rangle = 0$.

(3) 若 $u, v \in V$ 垂直，则$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

(4) 设 $u, v \in V$ 且$v \neq 0$. 则 存在 $c \in \mathbb{C}$, 满足 $u = cv + w$ 且$\langle v, w\rangle = 0$.

(5) 设 $u, v \in V$ ， 则$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$.

(6) 设 $u, v \in V$ ， 则 $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

标准正交基

定义 设V是一个内积空间，$\mathbf{B}=\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}\subseteq V$ 满足

(1) 任意$v\in V$ 是$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n$ 的线性组合；

(2) 有 $\langle v_i,v_j\rangle=0,\ \text{if } i\neq j, \langle v_i,v_j\rangle=1,\ \text{if } i=j.$

则 $\mathrm{B}=\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ 是线性无关的， 称为V 的一组标准正交基.

标准正交基

例1. 考虑带标准内积的酉空间$\mathbb{C}^n$, $\mathbf{B}=\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ 是标准正交基当且仅当矩阵 $U=(\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v})$ 是酉矩阵，即 $U^T\overline{U}=I_n$.

例2. 设 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})=\{a_0+a_1x+a_2x^2\mid a_i\in\mathbb{R}\}$. 这是一个向量空间，定义内积:

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx.$$

则它成为一个欧式空间. 它有如下标准正交基:

$$\sqrt{\frac{1}{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}x,\ \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

标准正交基

性质：设 $e_1, \cdots, e_k \in V$ 是标准正交的一组向量，令

$$W = \{c_1 e_1 + \cdots + c_k e_k \mid c_i \in \mathbb{F}\} \subseteq V.$$

给定 $v \in V$，则 $v_p = \langle v, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_k\rangle e_k$ 满足

$$v_p \in W, v - v_p \perp W$$

向量v_p 称为 v 在 W 上投影.

单选题 1分

设置

以下**错误**的陈述是

A 设$A \in M_n(\mathbb{C})$, 若$A^2 = 0$,则$sinA = A$.

B 设$A \in M_n(\mathbb{C})$, 若$A^2 = 0$,则$cosA = I_n$.

C 设$A \in M_n(\mathbb{C})$, 若$A^2 = 0$,则$ln(I_n + A) = A$.

D 设$A \in M_n(\mathbb{C})$, 若A是幂零阵,则$sinA$, $cosA$, $I_n + A$, e^A均是可逆阵.

提交