


The background of the slide features a blue gradient. On the left side, there are several lines of binary code (0s and 1s) in a light blue, slightly blurred font. On the right side, there is a faint, white wireframe globe showing latitude and longitude lines.

第十三周. Hermite二次型、奇异值分解



参考：

高等代数学8.5, 9.9

线性代数与几何（下） 10.5

14.1. 复正规阵的极分解

定理： 设 A 是 n 阶酉阵，则存在Hermite阵 M ，使得 $A = e^{iM}$ 。

定理： 设 A 是 n 阶复正规阵，则存在半正定Hermite阵 R 和Hermite阵 M ，满足 $RM = MR$ 且 $A = Re^{iM}$ 。

14.2. Hermite二次型

定义： 设 $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \overline{x_i} x_j$, 其中 $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, 则 f 称为Hermite二次型.

矩阵形式： 设 $A = (a_{ij})$ 是一个Hermite矩阵, 则

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \overline{x_i} x_j = x^H A x, \quad \text{其中 } x = (x_1, \cdots, x_n)^T.$$

定理： 设 A, B 是两个Hermite阵满足 $x^H A x = x^H B x, \forall x \in \mathbb{C}^n$, 则 $A = B$.

14.2. Hermite二次型

惯性定理: 设 $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \overline{x_i} x_j = x^H A x$ 是一个Hermite二次型, 则通过可逆坐标变换 $x = Cz, f(x)$ 可以化为

$$h(z) = \overline{z_1} z_1 + \dots + \overline{z_p} z_p - \overline{z_{p+1}} z_{p+1} - \dots - \overline{z_r} z_r,$$

其中 r, p 是唯一的(不依赖于 C 的选取).

14.3. 正定Hermite阵

定义： 设 A 是Hermite阵， 则 A 是一个正定Hermite阵当且仅当 $x^H Ax > 0$, $\forall x \neq 0 \in \mathbb{C}^n$. A 是一个半正定Hermite阵当且仅当 $x^H Ax \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$.

判别法：

- (1) 设 A 是Hermite阵， 则 A 是一个正定Hermite阵当且仅当 A 的特征值均是正数；
- (2) 设 A 是Hermite阵， 则 A 是一个正定Hermite阵当且仅当存在可逆阵 P , $A = P^H P$.

14.4. 奇异值分解

定理： 设 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$, 则存在 m 阶酉阵 U 和 n 阶酉阵 V , 满足 $A = U\Sigma V^H$, 其中

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}, r = r(A), \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0.$$

设 A 是 n 阶复矩阵, 令 $R = U\Sigma U^H, S = UV^H$, 则 $A = RS$ 且 R 是半正定 Hermite 阵, S 是酉阵.

定理： 设 A 是 n 阶复矩阵, 则存在半正定 Hermite 阵 R 和 Hermite 阵 M , 使得 $A = Re^{iM}$.

以下**错误**的陈述是

- ☐ A Hermite阵的行列式是实数.
- ☐ B 酉阵的行列式是长度等于1的复数.
- ☐ C $A = I_n - 2uu^H, u \in \mathbb{C}^n, \|u\| = 1$ 是Hermite和酉阵
- ☒ D Skew-Hermite阵(即 $A^H = -A$)的行列式是纯虚数.

提交

设二阶实正规阵 A 不是实对称阵，则它是酉阵的充要条件是

- ☒ A A 的行列式 $=1$
- ☐ B A 的行列式 $=-1$
- ☐ C A 可逆
- ☐ D A 不可逆

提交