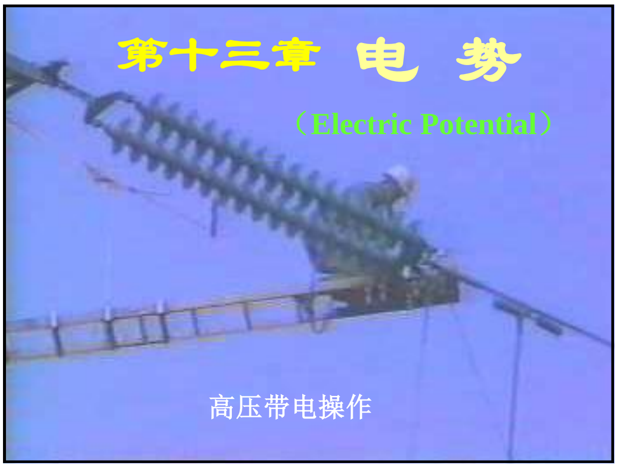


第十三章 电势（Electric Potential）

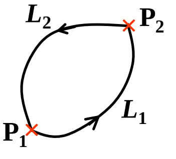
作为矢量场，电场的环流特性如何？

本章给出静电场的环路定理，揭示静电场有势性，研究电场力作功的性质，进而研究静电场的能量。

功能的问题始终是物理学所关注的问题。

本章目录

§ 13.1 静电场的环路定理
(circuital theorem of electrostatic field）



研究线积分 $\oint_L \vec E\cdot d\vec l$ 的特点：

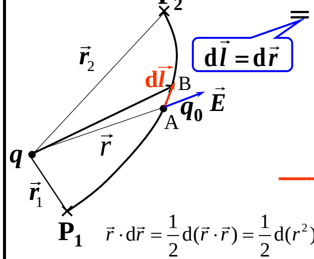
- 对点电荷：$\int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec E\cdot d\vec l = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \frac{q\vec e_r\cdot d\vec l}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \frac{q\vec r\cdot d\vec l}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

$\boxed{\vec e_r = \vec r/r}$

$\boxed{d\vec l = d\vec r}$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \frac{q\vec r\cdot d\vec r}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$



$\vec r\cdot d\vec r = \frac{1}{2}d(\vec r\cdot\vec r) = \frac{1}{2}d(r^2) = r\,dr$

——只与P_1、P_2位置有关，而与L无关。

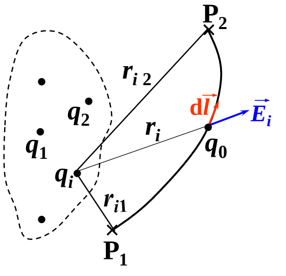
- 对点电荷系：$\int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec E\cdot d\vec l$

$$= \int_{(P_1)}^{(P_2)} (\sum_i \vec E_i)\cdot d\vec l$$

$$= \sum_i \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec E_i\cdot d\vec l$$

$$= \sum_i \int_{(P_1)}^{(P_2)} \frac{q_i\vec r_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}\cdot d\vec l$$

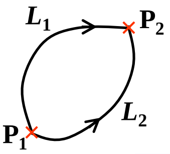
$$= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{i1}}-\frac{1}{r_{i2}}\right)$$



——只与P_1、P_2位置有关，而与L无关。

- 对任意电荷系：$\int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 也应与L无关。

二．环路定理(circuital theorem)



$$\underset{(L_1)}{\int_{(P_1)}^{(P_2)}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \underset{(L_2)}{\int_{(P_1)}^{(P_2)}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\underset{(-L_2)}{\int_{(P_2)}^{(P_1)}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\underset{(L_1)}{\int_{(P_1)}^{(P_2)}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \underset{(L_2)}{\int_{(P_2)}^{(P_1)}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$\therefore$ $\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$ —— 静电场的环路定理

$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 称为静电场的“环流”(circulation)。

7

$$\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S \nabla\times\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{E} = 0}$$

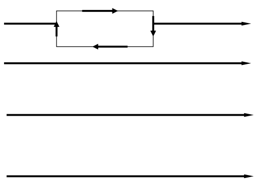
$$\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$$

静电场是无旋的

8

静电场的环路定理说明静电场为保守场，静电场的电场线不能闭合。 否则上述积分不等于零

思考 电场线平行但不均匀分布是否可能？

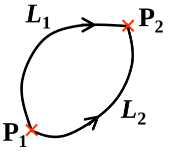


静电场的$\vec{E}$ 线？

9

Δ § 13.2 电势差、电势

由$\int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$与路径无关，



$$\underset{(L_1)}{\int_{(P_1)}^{(P_2)}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \underset{(L_2)}{\int_{(P_1)}^{(P_2)}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$$

静电场的环路定理说明静电场为保守场 10

一. 电势差（electric potential difference）

由$\int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$与路径无关，

存在着一个由电场中各点的位置所决定的标量函数，此函数在P_1和P_2两点的数值之差等于从P_1点到P_2点电场强度沿任意路径的线积分。这个函数就叫电场的电势

φ_1 φ_2

定义P_1对P_2的电势差：

$$\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

11

二. 电势（electric potential）

$$\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

设P_0为电势参考点，即$\varphi_0 = 0$，

则任一点P_1处电势为：$\varphi_1 = \varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_{10} = \int_{(P_1)}^{(P_0)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

$$\therefore\ \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(P_1)}^{(P_0)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_{(P_2)}^{(P_0)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \varphi_{12}$$

这说明 P_0点的不同选择，不影响电势差。

12

P_0选择有任意性，习惯上如下选取电势零点：

理论中：对有限电荷分布，选 $\varphi_\infty = 0$ 。

对无限大电荷分布，选有限区域中的某适当点为电势零点。

实际中：选大地或机壳、公共线为电势零点。

演示 高压带电操作(应用等电势概念)

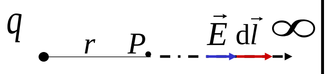
TV 实际的高压带电操作 高压带电操作.mpg

利用电势定义可以求得如下结果：

13

1）点电荷

$$\varphi = \int_{(P)}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$



$$= \int_r^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

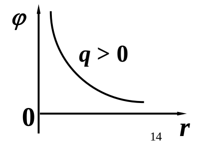
$d\vec{l} = d\vec{r}$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \propto \frac{1}{r}, \quad \varphi_\infty = 0$$

☞球对称

☞标量

正负



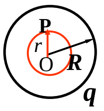
14

2）均匀带电球面

均匀带电球面电场的分布为

$r<R \quad E = 0$

$r>R \quad \vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$



若场点在球内 即 $r<R$ 如图

$$\varphi = \int_{(P)}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^R 0dr + \int_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

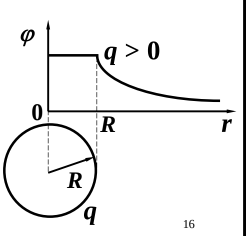
15

$$= \int_r^R 0dr + \int_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

场点在球面外 即 $r>R$

$$\varphi = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & （壳内） \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & （壳外） \end{cases}$$

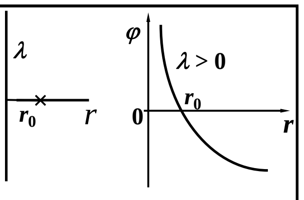


16

3）无限长均匀带电直线

r_0处为电势零点

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$$



$$\varphi = \int_r^{r_0} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^{r_0} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_r^{r_0} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

17

1）点电荷 $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$， $\varphi_\infty = 0$

2）均匀带电球面

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & （面内） \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & （面外） \end{cases} \qquad \varphi_\infty = 0$$

3）无限长均匀带电直线

$\varphi = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_0}{r}$ r_0处为电势零点

18

Δ § 13.3 电势叠加原理

(principle of superposition of electric potential)

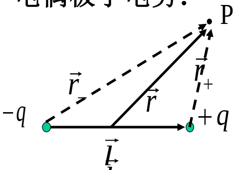
由 $\varphi=\int_{(P)}^{(P_0)}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 及 $\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$， 得：

$$\varphi=\int_{(P)}^{(P_0)}\left(\sum_i\vec{E}_i\right)\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum_i\int_{(P)}^{(P_0)}\vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum_i\varphi_i$$

注意：电势零点P_0必须是共同的。

- 对点电荷系： $\varphi=\sum\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$， $\varphi_\infty=0$
- 对连续电荷分布：$\varphi=\int_q\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$， $\varphi_\infty=0$

电偶极子电势：



$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_--r_+}{r_-r_+}$$

$$\vec{r}_+=\vec{r}-\frac{\vec{l}}{2}\qquad \vec{r}_-=\vec{r}+\frac{\vec{l}}{2}$$

$$r_+^2=r^2+\frac{l^2}{4}-\vec{r}\cdot\vec{l}\qquad r_-^2=r^2+\frac{l^2}{4}+\vec{r}\cdot\vec{l}$$

$$r_+=r\left(1+\frac{l^2}{4r^2}-\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\qquad r_-=r\left(1+\frac{l^2}{4r^2}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$r_+=r\left(1+\frac{l^2}{4r^2}-\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\qquad r_-=r\left(1+\frac{l^2}{4r^2}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

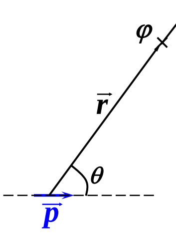
if $r>>l$

$$r_+=r\left(1-\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{2r^2}\right)\qquad r_-=r\left(1+\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{2r^2}\right)$$

$$r_--r_+=r\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{r^2}=\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{r}$$

$$r_-\cdot r_+=r^2\left(1-\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{2r^2}\right)^2\right)=r^2$$

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_--r_+}{r_-r_+}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{r}$$



$$\varphi=\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

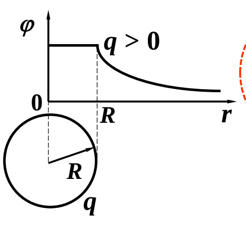
$$\varphi=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\quad\propto\frac{1}{r^2}$$

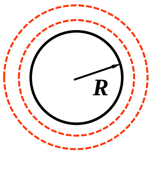
§ 4 电势梯度（electric potential gradient）

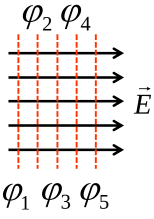
一、等势面

由电势相等的点组成的面叫等势面

满足方程 $\boxed{\varphi(x,y,z)=C}$

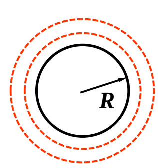


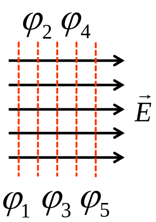




二、电场（力）线与等势面的关系

1. 电场（力）线处处垂直等势面





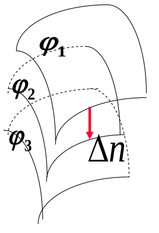
在等势面上任取两点 a、b，则

$$\int_{a}^{b}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\varphi_a-\varphi_b \xrightarrow{\text{等势}} =0$$

$\because$ a、b 任取

$\therefore$ 处处有

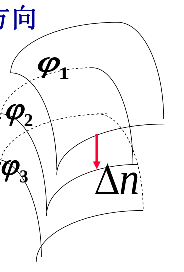
$\boxed{\vec{E}\perp d\vec{l}}$



2. 电场（力）线指向电势降的方向

$$\varphi_{12}=\varphi_1-\varphi_2$$

$$=\int_{1}^{2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=E\cdot\Delta n$$



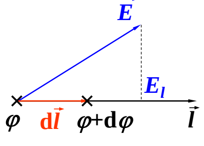
等势面的疏密反映
了场的强弱

$if\ \varphi_1>\varphi_2$

电场（力）线指向电势降的方向

三、电势梯度

$$\int_{p_1}^{p_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\varphi_1-\varphi_2$$



场强与电势的微分关系：

$$\vec{E}\cdot d\vec{l}=-d\varphi$$

$$E_l\cdot dl=-d\varphi$$

$$\boxed{E_l=-\frac{\partial\varphi}{\partial l}}$$ —— φ的方向导数

$\varphi=\varphi(x,y,z)$ 则有：

$$E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

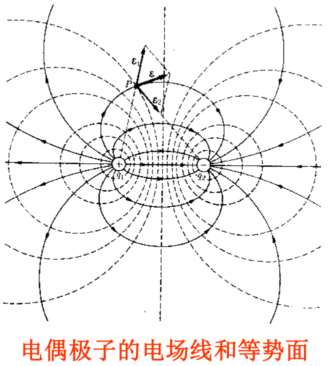
$$\vec{E}=(E_x,E_y,E_z)$$

$$=-(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k})$$

$$=-\mathrm{grad}\,\varphi$$

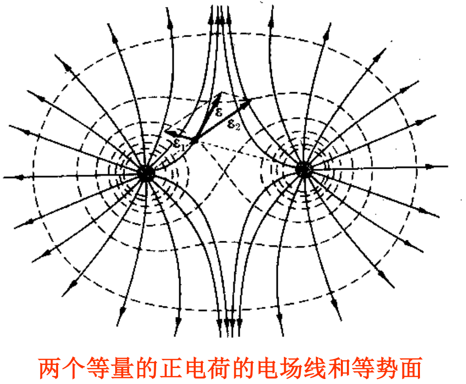
$\mathrm{grad}\,\varphi$ —— φ 的梯度（gradient）

▲某些等势面：



- 某点P的电场强度；
- 等势面的疏密与电力线的疏密
- 电力线处处与等势面垂直

电偶极子的电场线和等势面



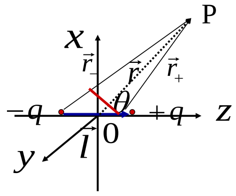
两个等量的正电荷的电场线和等势面

[例] 由偶极子的电势求场强：方法1

$$\varphi(\theta, r)=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

系统关于z轴有旋转对称性

在x-z平面内



$$\cos\theta=\frac{z}{r}$$

$$\varphi=\frac{pz}{4\pi\varepsilon_0(x^2+z^2)^{3/2}}$$

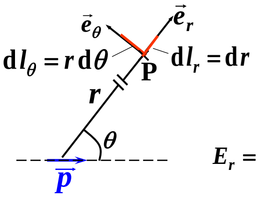
$$\varphi=\frac{pz}{4\pi\varepsilon_0(x^2+z^2)^{3/2}}$$

$$E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{pz}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3x}{(x^2+z^2)^{5/2}} \quad =\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3xz}{r^5}$$

$$E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}\right)$$

$$\boxed{\vec E=E_x\vec i+E_z\vec k} \rightarrow \boxed{\vec E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(-\vec p+(3\vec p\cdot\hat r)\hat r\right)}$$

[例] 由偶极子的电势求场强：方法2



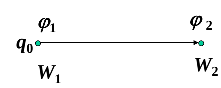
$$\varphi(\theta, r)=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E_r=-\frac{\partial\varphi}{\partial l_r}=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta=-\frac{\partial\varphi}{\partial l_\theta}=-\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}=\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\vec E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(-\vec p+(3\vec p\cdot\hat r)\hat r\right)$$

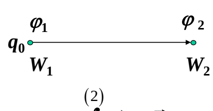
Δ § 13.5 点电荷在外电场中的电势能



把电荷q_0从电场中的1点移到2点过程中，电场力作的功为

$$A_{12}=\int_1^2 q_0\vec E\cdot\mathrm{d}\vec l=q_0\int_1^2\vec E\cdot\mathrm{d}\vec l$$

$$=q_0(\varphi_1-\varphi_2)=W_1-W_2=-\Delta W \qquad W=q_0\varphi$$



$$W=q_0\varphi$$

$$A_{12}=q_0\int_{(1)}^{(2)}\vec E\cdot\mathrm{d}\vec l=q_0(\varphi_1-\varphi_2)=W_1-W_2=-\Delta W$$

1、点1和点2之间的电势差，等于将单位正电荷从点1移动到点2 电场力所做的功。

2、在静电场中电场力作功与路径无关

3、电势的零点就是电势能的零点

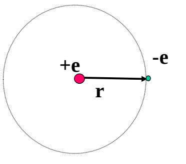
4、电荷 q_0 在该电场中的电势能为 $W=q_0\varphi$

电势能与电势的关系为 $W=q_0\varphi$ （点点对应）

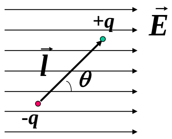
5、电势能是属于电荷q_0和场源所共有的（正像重力势能是属于物体和地球所共有的一样）也叫相互作用能。

例1. 氢原子中的电子在原子核电场中的电势能

$$W=(-e)\varphi=(-e)\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



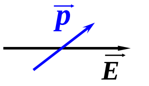
例2. 一个电偶极子在均匀电场中的电势能为



$$W = W_+ + W_- = q(\varphi_+ - \varphi_-)$$
$$= q\int_{+q}^{-q} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -q\int_{-q}^{+q} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$
$$= -q\vec{E}\cdot\int_{-q}^{+q} d\vec{l} = -q\vec{E}\cdot\vec{l} = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

点电荷的电势能： $\boxed{W = q\varphi}$

电偶极子的电势能：



$\boxed{W = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$ $\vec{p} \parallel \vec{E}$ 时电势能最低。

电偶极子在均匀电场中所受的力矩

$\boxed{\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E}}$

§ 13.6 电荷系的静电能

一.点电荷系的相互作用能（电势能）

相互作用能$W_{互}$：把各点电荷由当前的位置分散至相距无穷远的过程中，电场力作的功。

两个点电荷： $W_{互} = \int_{(2)}^{\infty} q_2\vec{E}_1\cdot d\vec{l} = q_2\cdot\varphi_{21}$

1 q_1 φ_{12} 2 q_2 φ_{21} ---→ ∞ 同理： $W_{互} = q_1\cdot\varphi_{12}$

（注意，这里必须规定$\varphi_\infty = 0$）

写成对称形式： $W_{互} = \frac{1}{2}(q_1\varphi_{12} + q_2\varphi_{21})$

三个点电荷：

移动顺序 $q_2\ q_3\ q_1$

$W_{互} = q_2(\varphi_{21} + \varphi_{23}) + q_3\varphi_{31}$

先 q_2 → ∞ 作功 $q_2(\varphi_{21}+\varphi_{23})$

移动顺序 $q_2\ q_1\ q_3$

$W_{互} = q_2(\varphi_{21} + \varphi_{23}) + q_1\varphi_{13}$

后 q_1 q_3 → ∞ 作功 $q_3\varphi_{31}$

移动顺序 $q_1\ q_2\ q_3$

$W_{互} = q_1(\varphi_{12} + \varphi_{13}) + q_2\varphi_{23}$

移动顺序 $q_1\ q_3\ q_2$

$W_{互} = q_1(\varphi_{12} + \varphi_{13}) + q_3\varphi_{32}$

移动顺序 $q_3\ q_1\ q_2$

$W_{互} = q_3(\varphi_{31} + \varphi_{32}) + q_1\varphi_{12}$

移动顺序 $q_3\ q_2\ q_1$

$W_{互} = q_3(\varphi_{31} + \varphi_{32}) + q_2\varphi_{21}$

三个点电荷

$W_{互} = q_2(\varphi_{21} + \varphi_{23}) + q_3\varphi_{31}$	$W_{互} = q_1(\varphi_{12} + \varphi_{13}) + q_3\varphi_{32}$
$W_{互} = q_2(\varphi_{21} + \varphi_{23}) + q_1\varphi_{13}$	$W_{互} = q_3(\varphi_{31} + \varphi_{32}) + q_1\varphi_{12}$
$W_{互} = q_1(\varphi_{12} + \varphi_{13}) + q_2\varphi_{23}$	$W_{互} = q_3(\varphi_{31} + \varphi_{32}) + q_2\varphi_{21}$

$$W_{互} = \frac{1}{2}q_1(\varphi_{12} + \varphi_{13}) + \frac{1}{2}q_2(\varphi_{21} + \varphi_{23}) +$$
$$+\frac{1}{2}q_3(\varphi_{31} + \varphi_{32}) = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + q_3\varphi_3)$$

推广至一般点电荷系： $\boxed{W_{互} = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i}$

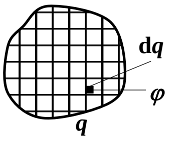
φ_i — 除 q_i 外，其余点电荷在 q_i 所在处的电势。

二. 连续带电体的静电能（自能）

静电能W：把电荷无限分割，并分散到相距无穷远时，电场力作的功。

- 只有一个带电体：

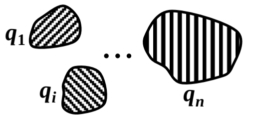
$$W = W_{自} = \frac{1}{2}\int_q \varphi\, dq$$



点电荷的自能=?

点电荷的自能无限大，所以是无意义的。

- 多个带电体：



第一步：把初始状态的带电体A、B、C移至相距无穷远。

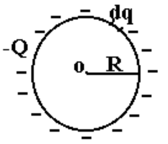
第二步：把各带电体A、B、C，分别无限分割并移至相距无穷远。

静电力是保守力，静电能只和状态有关，而和中间过程无关，这样的分步对分析问题没有影响。

总静电能 $W=\sum_i W_{自i}+\sum_{i<j} W_{互ij}$

43

[例1] 设有一半径为R的均匀带电球面，带电量为$-Q$。求此带电体的自能。



【解】均匀带电球面上的电势为

$$\varphi=\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

故其自能为

$$W=\frac{1}{2}\int\varphi\mathrm{d}q=\frac{1}{2}\int\left(\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)\mathrm{d}q$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)(-Q)=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}>0$$

44

$$W=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

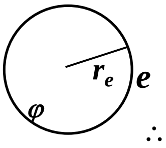
可以看出，虽然它带负电，它的自能仍是正的。

一个带电体的自能，由它的形状、大小、带电量以及电荷的分布情况所决定。如果这些都不变，那么它的自能就不变，因此常常不考虑它。

45

[例2] 估算电子的经典半径，设$W\approx m_0c^2$，

且电荷均匀分布于电子表面。



$$W=\frac{1}{2}\int_e\varphi\mathrm{d}q=\frac{1}{2}\varphi(-e)$$

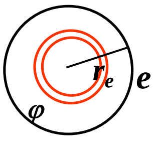
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e}\approx m_0c^2$$

$$\therefore r_e\approx\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0c^2}\approx 1.4\times10^{-15}\ \mathrm{m}$$

46

若将电子看作均匀带电球，则：

$$W=\frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e},\qquad r_e=\frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0c^2}$$



$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0}, & (内)\\[2mm] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r, & (外)\end{cases}$$

$$\varphi(r)=\frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 r_e}-\frac{qr^2}{8\pi\varepsilon_0 r_e^3}\qquad r<r_e$$

$$W=\frac{1}{2}\int_0^R\varphi\mathrm{d}q=\frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e}$$

47

若将电子看作均匀带电球 $r_e\approx\frac{3}{5}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0c^2}$

电荷均匀分布于电子表面 $r_e\approx\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0c^2}$

两种带电情况得到的r_e的数量级相同。

1980.7.11丁肇中在北京报告他领导的小组的实验结果为$r_e<10^{-18}$ m，它远远小于电子的经典半径（~10^{-15} m）， 这说明电子并非经典粒子。

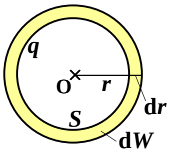
48

§ 13.7 静电场的能量

按上节给出的静电能表示式 $W=\dfrac{1}{2}\int_q \varphi\,\mathrm{d}q$

似乎能量集中在电荷上。但从场的角度来看，能量应该是储存在电场中。

设一个半径为 r 表面均匀带电 的气球，总电量为q。由于电荷之间的斥力，气球将会膨胀。设在某一时刻球的半径为r，则带电气球的静电能量为:



$$W=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

当气球半径因膨胀增大dr时，由于电荷间斥力作了功，带电气球的能量减小了，所减小的能量为

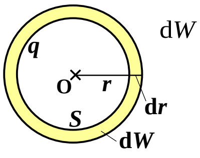
$$W=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r} \qquad -\mathrm{d}W=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

分析能量减小的原因:球壳内的电场强度变为零！！

该减小的能量原来就储存在dr的球壳内

原来球壳内的电场强度为:

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



$$\mathrm{d}W=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}W=\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}W=\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\mathrm{d}V$$

电场能量密度 $\boxed{w_e=\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V}=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$

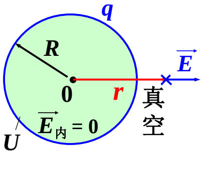
以上w_e的表示式也适用于静电场的一般情况。

在电场存在的空间V中，静电场能（静电能）：

$$W=\int_V w_e\,\mathrm{d}V=\int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\,\mathrm{d}V$$

在静电学中，上式和 $W=\dfrac{1}{2}\int_q \varphi\,\mathrm{d}q$ 是等价的。

例如，对均匀带电球壳的电场能W:



在球壳外

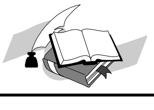
$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2=\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$$

$$W=\int_R^\infty \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

球面电势 $\varphi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ 一致

$$W=\frac{1}{2}\int_q \varphi\,\mathrm{d}q=\frac{1}{2}\varphi\cdot q=\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

虽然如此，两种表示反映的却是两种不同观点。在变化的电磁场中，电场储能的概念被证明为不仅必要，而且是唯一客观的实在了。



第十三章结束

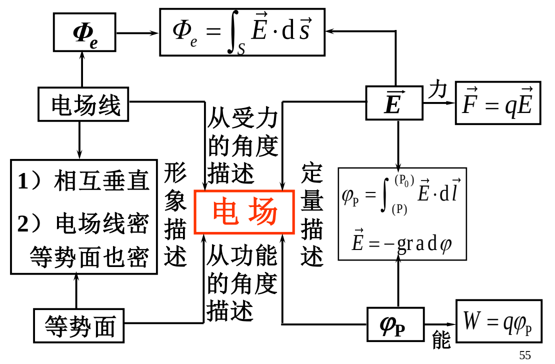
真空中静电场小结提纲

一. 线索（基本定律、定理）：

$$\left.\begin{array}{l}\text{库仑定律}\\ \vec{E}=\vec{F}/q_0\\ \vec{E}=\sum\vec{E}_i\end{array}\right]\rightarrow \vec{E}=\sum_i\frac{q_i\vec{e}_{r_i}}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\rightarrow\left[\begin{array}{l}\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\dfrac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}\\ \oint_L\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0\end{array}\right.$$

还有电荷守恒定律，它时刻都起作用。

二. 基本物理量之间的关系：



55

三. 求场的方法：

1. 求$\vec{E}$

- 叠加法（补偿法）： $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ ，
  $\vec{E} = \int_q \frac{\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dq$ ；
- 高斯定理法： $\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$；
- 微分法： $\vec{E} = -\nabla\varphi$， $E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ 。

56

2.求φ

- 场强积分法： $\varphi_P = \int_{(P)}^{(P_0)} \vec{E}\cdot d\vec{l}$，
  （$\vec{E}$分段，积分也要分段）；
- 叠加法： $\varphi = \sum_i \varphi_i$ （零点要同）；
  $\varphi = \int_q \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$ ， （$\varphi_\infty = 0$）。

四.几种典型电荷分布的场强和电势:（自己总结）

点电荷；均匀带电薄球壳；均匀带电大平板；

均匀带电长直线；均匀带电长圆筒。

—完—

57