第一章 命题逻辑的基本概念

(1.6-2.4)

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

疑问与总结：命题和命题变项

- 命题：是一个能判断真假且非真即假的陈述句
- 命题变项：命题变项是用于表示一个尚未确定的命题的符号或变量。在逻辑表达式中，常用字母 p, q, r 等表示命题变项。
- 关系：
  – 命题变项是对命题的一种抽象或泛化。通过替换命题变项，可以得到具体的命题。
  – 命题变项提供了一种方式来研究命题的逻辑结构，而不用关注命题的具体内容。

疑问与总结：命题变项是命题吗？

- 命题变项不是命题
- 命题是一个具体的、能明确判定为真或假的陈述。
- 命题变项是一个抽象的符号，用于代表一个还未确定的命题。
- 命题变项只有在赋予了具体的命题后，才能确定其真假值。
- 命题变项本身没有真假值，它是用于构建逻辑表达式和进行逻辑推理的工具

抽象的概念

播报 编辑

抽象是从众多的事物中抽取出共同的、本质性的特征，而舍弃其非本质的特征的过程。具体地说，抽象就是人们在实践的基础上，对于丰富的感性材料通过去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的加工制作，形成概念、判断、推理等思维形式，以反映事物的本质和规律的方法。 [1]

实际上，抽象是与具体相对应的概念，具体是事物的多种属性的总和，因而抽象亦可理解为由具体事物的多种属性中舍弃了若干属性而固定了另一些属性的思维活动。 [1]

疑问与总结：合式公式是命题吗？

- 合式公式（Well-Formed Formula）本身不是命题，但它是构建命题的一种框架或结构
- 当合式公式中的所有命题变项都被具体的命题所替换，真假值确定时，才代表一个具体的命题。
- 合式公式和命题的关系：合式公式提供了一种用于构建和分析命题的逻辑结构。

疑问与总结：真值相关

- 存在x，x>3是否永远真值为一，因为x一定是存在的（还是这只是一个限定的特指表示）

- “存在x，x>3”是一个真命题，其真值为1，这里对于x的取值是没有限制的。

疑问与总结：争议

感觉“今天很冷” “个子高” “很胖”判断标准不明确，不能确定真值，那这些是不是就不是命题了?

- 如果作为祈使句来表达情感，那不是命题
- 但作为自然语言，有上下文可以确定真假值，那就是命题
  - 否则就不要搞自然语言处理了！

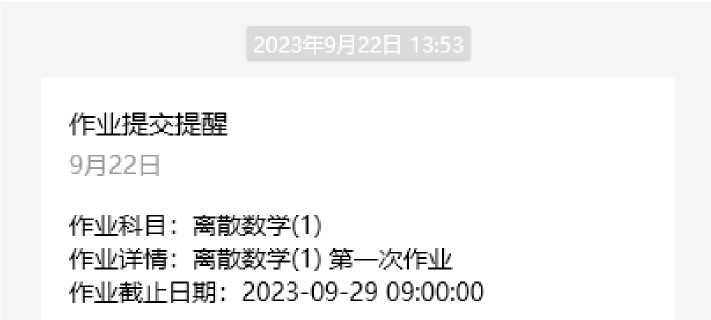
正确理解抽象

疑问与总结：离散数学学习

- 总是觉得数理逻辑这一块不够直观，有没有什么更直观的学习方法？
- 语文太烂了，看不明白自然语句
- 对于这些刚学习的陌生名词如何熟悉起来、反应更快呢？
- 对于自然语言和形式化的互换，希望多举例子，方便理解

对课程的建议

- 讲课相关
  - 老师上课声音可以大一些
  - 讲重点内容时语速可以稍微慢一点点
- 作业相关
  - 希望在作业里加一些难度较高的附加题或补充题
  - 希望和编程实践相结合
  - 雨课堂交作业麻烦，容易出错/希望有网络学堂提交作业的窗口
  - 雨课堂看不见作业截止时间，希望能够在微信群强调一下截止时间-> 这个在布置作业的时候会有推送，里面有作业截止时间，提前一天会通知，请大家关注



多选题 1分

Setting

下面哪个是命题

A 北京是中国的首都

B 任意充分大的偶数都可以表示成两个素数之和

C 我正在说假话。

D x大于y。

Submit

内容回顾：基本复合命题（5个常用联结词）的真值表

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

析取联结词“∨” 与 异或“$\bar{\vee}$”的真值表

（注：$\bar{\vee}$为∨上面加一横，见教材P10，不可兼或）

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \bar{\vee} q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

内容回顾：命题公式的分类

设A为任一命题公式，

1. 若A在它的各种赋值下取值均为真，则称A是重言式或永真式。

2. 若A在它的各种赋值下取值均为假，则称A是矛盾式或永假式。

3. 若A不是矛盾式，则称A是可满足式

单选题 1分

Setting

(1)

(2)

A (1)是对的， (2)是不对的

B (1)是不对的， (2)是对的

C 都不对

D 不好说

Submit

内容回顾：重言式与代入规则

代入规则

一个重言式，对其中所有相同的命题变项都用一合式公式代换，其结果仍为一重言式。这一规则称为代入规则。

换句话说，A是一个公式，对A使用代入规则得到公式B，若A是重言式，则B也是重言式。

代入规则的具体要求为：

1. 公式中被代换的只能是命题变项（原子命题），而不能是复合命题。

2. 对公式中某命题变项施以代入，必须对该公式中出现的所有同一命题变项施以相同的代换。

实例

例2： 判断 $((R\vee S)\wedge((R\vee S)\rightarrow(P\vee Q)))\rightarrow(P\vee Q)$为重言式.

不难验证$(A\wedge(A\rightarrow B))\rightarrow B$是重言式。作代入：

$$\frac{A}{(R\vee S)},\frac{B}{(P\vee Q)}$$

便知 $((R\vee S)\wedge((R\vee S)\rightarrow(P\vee Q))\rightarrow(P\vee Q)$ 是重言式。

1.5 命题形式化

所谓命题形式化（符号化），就是用命题公式的符号串来表示给定的命题。

- 命题符号化的方法

  1. 明确给定命题的含义。

  2. 对复合命题，找联结词，分解出各个原子命题。

  3. 设原子命题符号，并用逻辑联结词联结原子命题符号，构成给定命题的符号表达式。

化繁为简，各个击破

例1.说离散数学无用且枯燥无味是不对的。

P：离散数学是有用的。

Q：离散数学是枯燥无味的。

该命题可写成：$\neg(\neg P \wedge Q)$

例2.如果小张与小王都不去，则小李去。

P：小张去。 Q：小王去。 R：小李去。

该命题可写成：$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$

- 例3. 仅当天不下雨且我有时间，才上街。
  P：天下雨。Q：我有时间。R：我上街。
  该命题可写成：$R\rightarrow(\neg P\wedge Q)$

- 例4.人不犯我，我不犯人；人若犯我，我必犯人。
  P：人犯我。Q：我犯人。
  该命题可写成：$(\underbrace{\neg P\rightarrow\neg Q}_{\text{P是Q的必要条件}})\wedge(\underbrace{P\rightarrow Q}_{\text{P是Q的充分条件}})$

  或写成：$\underbrace{P\leftrightarrow Q}_{\text{P是Q的充分且必要条件}}$

例5：除非你努力，否则你将失败。

解：

可理解为：如果你不努力，那么你将失败.

设 P：你努力. Q：你失败.

该命题可写成：$\neg P \rightarrow Q$

- 注意：如果理解为“如果你努力，你将成功. ”，对吗？

思考题：程序设计语言简例

- 举例 (课上思考讨论题)
- IF …THEN…ELSE 是常用的编程语句
- 记 A 表示 IF P THEN Q ELSE R

  试将其形式化（用所学的联接词表示）

  进一步可尝试给出两种不同的表示

  （彼此等值）

多选题 1分

设置

IF …THEN…ELSE 是常用的编程语句
记 A 表示 IF P THEN Q ELSE R
试将其形式化（用所学的联接词表示）

A $A_1 = (P \to Q) \wedge (\neg P \to R)$

B $A_1 = (P \to Q) \wedge (\neg P \to \neg R)$

C $A_2 = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$

D $A_2 = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

提交

课堂思考题（续）

解：

记 A 表示 IF P THEN Q ELSE R

将其形式化（用所学的联接词表示）

记 $A_1 = (P \to Q) \wedge (\neg P \to R)$

记 $A_2 = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$

列出A_1 和A_2的真值表如下

课后思考题:如何由给出的真值表写出未知的命题公式

$A_1 = (P \to Q) \wedge (\neg P \to R)$ $A_2 = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$

P	Q	R	P→Q	¬P→R	A_1	P∧Q	¬P∧R	A_2
0	0	0	1	0				
0	0	1	1	1	1		1	1
0	1	0	1	0				
0	1	1	1	1	1		1	1
1	0	0	0	1				
1	0	1	0	1				
1	1	0	1	1	1	1		1
1	1	1	1	1	1	1		1

多选题 1分

Setting

若天不下雨，我就上街；否则在家。

设 P：天下雨。Q ：我上街。R：我在家。

A $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$

B $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge \neg(Q \wedge R)$

C $(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \bar{\vee} (P \wedge \neg Q \wedge R)$

D $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \wedge R)$

Submit

例6：若天不下雨，我就上街；否则在家。

设 P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。

该命题可写成：$(\neg P \to Q) \wedge (P \to R)$.

注意：中间的联结词一定是“∧”，而不是“∨”，也不是“$\bar{\vee}$”。

因为原命题表示：“天不下雨时我做什么，天下雨我又做什么”的两种作法，其中有一种作法是假的，则我说的是假话，所以中间的联结词一定是“∧”。

问题：若天不下雨，我就上街；否则在家

P Q R	¬P	¬P→Q	P→ R	(¬P→Q)∧(P→ R)
0 0 0	1	0	1	0
0 0 1	1	0	1	0
0 1 0	1	1	1	1
~~0 1 1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
1 0 0	0	1	0	0
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	0	1	0	0
~~1 1 1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~

例6：若天不下雨，我就上街；否则在家

P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。

该命题可写成：$(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge \neg(Q \wedge R)$

还可以形式化为：$(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \bar{\vee} (P \wedge \neg Q \wedge R)$

还可以形式化为：$(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$

两项不会同时为1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \bar{\vee} q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

问题：若天不下雨，我就上街；否则在家

P Q R	P	¬P→Q	P→ R	(¬P→Q)∧(P→ R)∧¬(Q∧R)
0 0 0	1	0	1	0
0 0 1	1	0	1	0
0 1 0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	0
1 0 0	0	1	0	0
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	0	1	0	0
1 1 1	0	1	1	0

1.6 波兰表达式

括号的使用，联结词的中缀、前缀、后缀形式的选择，都直接影响到同一公式描述和计算的复杂程度。

若用计算机来识别、计算、处理逻辑公式，不同的表示方法会带来不同的效率。

1.6.1 计算机识别括号的过程

合式公式的定义中使用的是联结词的中缀表示，又引入括号以便区分运算次序，这些都是人们常用的方法。

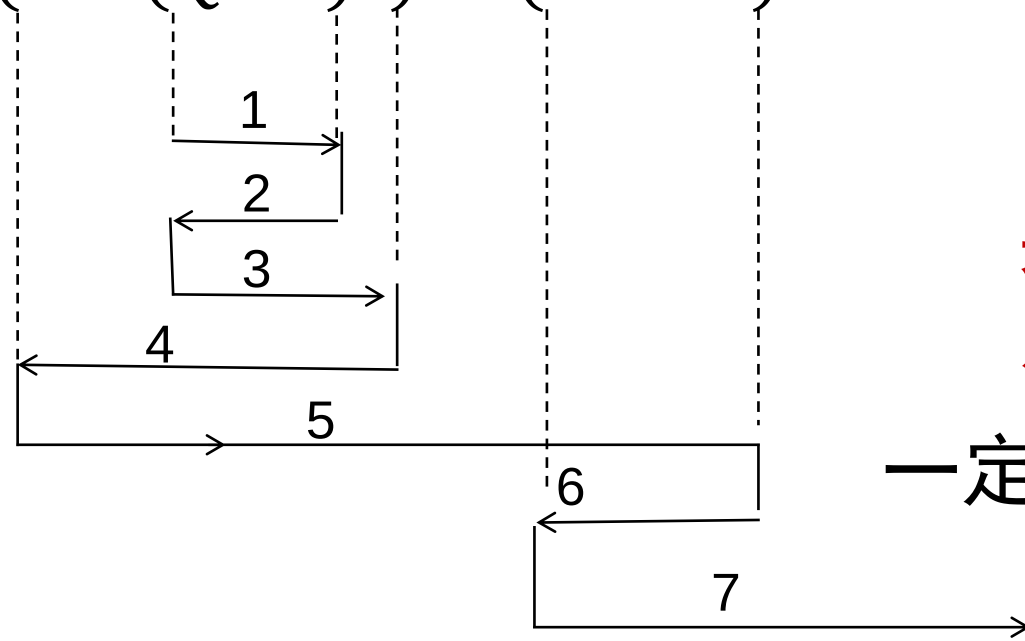
计算机识别处理中缀表示的公式，需反复自左向右，自右向左的扫描。如考察下面公式真值的计算过程

$$(P\vee(Q\wedge R))\vee(S\wedge T)$$

1.6.1 计算机识别括号的过程

如图所示的扫描过程1→2→3→…→6→7。

$(P \vee (Q \wedge R)) \vee (S \wedge T)$



扫描繁琐
存储状态
一定要括号吗？

开始**从左向右**扫描，至发现第一个右半括号为止，便返回至最近的左半括号，得部分公式(Q∧R)方可计算真值。

随后又向右扫描，至发现第二个右半括号，便返回至第二个左半括号，于是得部分公式(P∨(Q∧R))并计算真值，重复这个过程直至计算结束。

1.6.1 计算机识别括号的过程

公式中的运算符是否非要括号才能定义呢？

若一个式子中同时使用**两种或两种以上**运算符放置方式时，无论对运算符的优先级怎样进行规定，括号都不能完全避免。

例如：对数运算符 log 是前缀运算符；

阶乘运算符！是后缀运算符；

1.6.2 波兰式

一般而言，使用联结词构成公式有三种方式，

中缀式如 $P \vee Q$

前缀式如 $\vee PQ$

后缀式如 $PQ \vee$

前缀式用于逻辑学是由波兰的数理逻辑学家

J. Lukasiewicz提出的，故称之为波兰表达式。

解决方案：将中缀、后缀全部换成前缀

或将中缀、前缀全部换成后缀

这样，便可不使用任何括号。

1.6.2 波兰式

- 将公式$P\vee((Q\vee R)\wedge S)$ 化成波兰式，可由内层括号逐步向外层脱开(或由外层向内逐层脱开）的办法。

$$P\vee((Q\vee R)\wedge S)$$

1

∨QR

2

∧∨QRS

3

∨P∧∨QRS

1.6.2 中缀变前缀 P∨((Q∨R)∧S)

由里向外：

P∨((Q∨R)∧S)

P∨(∨QR∧S)

P∨∧∨QRS

∨P∧∨QRS

由外向里：

P∨((Q∨R)∧S)

∨P ((Q∨R)∧S)

∨P∧(Q∨R) S

∨P∧∨QRS

1.6.2 波兰式

举例：**中缀变后缀**　$P\vee((Q\vee R)\wedge S)$

$$P\vee((Q\vee R)\wedge S)$$

$$P\ ((Q\vee R)\wedge S)\vee$$

$$P\ (Q\vee R)\ S\wedge\vee$$

$$P\ QR\vee S\wedge\vee$$

是否还有其他转换方式?

例: $P \vee ((Q \vee R) \wedge S)$

Step 1: 对每个联结词都加上括号

$(P \vee ((Q \vee R) \wedge S))$

Step 2: 将每个联结词挪到对应括号的前面/后面，擦掉括号

前缀式(波兰式)

后缀式(逆波兰式)

设置

求$\neg\neg(P \vee Q) \wedge (\neg(\neg Q \to R) \to S)$的波兰表达式

A $\wedge \neg \neg \vee P\ Q \to \to \neg \neg Q\ R\ S$

B $\wedge \neg \neg \vee P\ Q \to \neg \to \neg Q\ R\ S$

C $\wedge \neg \neg \vee P\ Q \neg \to \to \neg Q\ R\ S$

D $\neg \wedge \neg \vee P\ Q \neg \to \to \neg Q\ R\ S$

提交

练习题

$\neg\neg(P \vee Q) \wedge (\neg(\neg Q \to R) \to S)$ 的波兰/逆波兰表达式为

Step 1：对每个联结词都加上括号(非运算符也加上了括号)

$((\neg (\neg (P \vee Q))) \wedge ((\neg ((\neg Q) \to R)) \to S))$

Step 2a：移动联结词至对应括号前面，擦掉括号

$\wedge(\neg(\neg(\vee(P\ Q))) \to (\neg(\to(\neg(Q)\ R))\ S))$

波兰式：$\wedge \neg \neg \vee P\ Q \to \neg \to \neg\ Q\ R\ S$

Step 2b：移动联结词至对应括号后面，擦掉括号

$((((P\ Q) \vee) \neg) \neg ((((Q) \neg R) \to) \neg\ S) \to) \wedge$

逆波兰式：$P\ Q \vee \neg \neg\ Q \neg\ R \to \neg\ S \to \wedge$

1.6.2 波兰式

- $(P \vee (Q \wedge R)) \vee (S \wedge T)$
- 波兰式：$\vee\vee P \wedge QR \wedge ST$
- 计算机如何进行求值？

$\vee\ \vee\ P\ \wedge\ Q\ R\ \wedge\ S\ T$

$(P \vee (Q \wedge R)) \vee (S \wedge T)$

1.6.2 波兰式

- 以波兰式表达的公式，当计算机识别处理时，可自右向左扫描一次完成，避免了重复扫描。
- 同样后缀表示（逆波兰式）也有类似的优点。而且自左向右一次扫描（看起来更合理）可识别处理一个公式，非常方便，常为计算机的程序系统所采用。
- 只不过这种表示的公式，人们阅读起来不大习惯。

悖论简介

一言难尽的悖论

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

自相矛盾

楚人有鬻盾与矛者，誉之曰：“**吾盾之坚，物莫能陷也。**”又誉其矛曰：“**吾矛之利，于物无不陷也。**”或曰：“以子之矛陷子之盾，何如？”其人弗能应也。众皆笑之。夫不可陷之盾与无不陷之矛，不可同世而立。

——《韩非子·难一》

无坚不摧的矛

牢不可破的盾

矛胜出了

⇓

盾不是“牢不可破”

悖论

盾胜出了

⇓

矛不是“无坚不摧”

无坚不摧的矛和牢不可破的盾不可能同时存在

我正在说假话

我正在说假话　真　⇒　“我正在说假话”是假话

↓

我正在说真话　⇒　假

我正在说假话　假　⇒　“我正在说假话”是真话

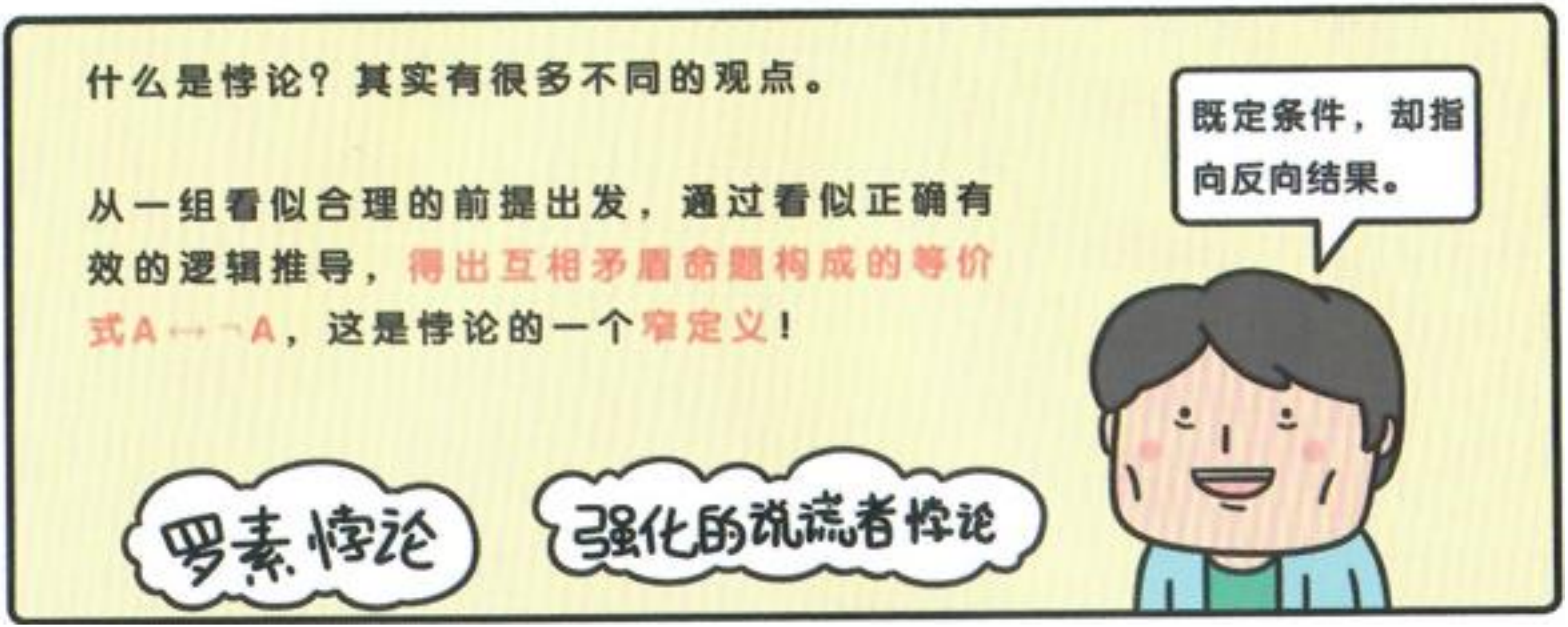
↓

我确实正在说假话　⇒　真

- 真→假
- 假→真
- 既不能为真，也不能为假

悖论

悖 论（Paradox）



什么是悖论？其实有很多不同的观点。
从一组看似合理的前提出发，通过看似正确有效的逻辑推导，得出互相矛盾命题构成的等价式A↔¬A，这是悖论的一个窄定义！
既定条件，却指向反向结果。
罗素悖论
强化的说谎者悖论

悖 论（Paradox）

- 悖论是自相矛盾的陈述（statement）。即如果承认这个陈述成立，就可推出它的否定陈述成立；反之，如果承认这个陈述的否定陈述成立，又可推出这个陈述成立

A paradox is a statement or group of statements that leads to a contradiction or a situation which defies intuition

逻辑学名词。一陈述A，如果承认A，可推得 $\neg$A 成立。

反之，如果承认 $\neg$A，又可推得 A 成立，称陈述A为一悖论。

——《辞 海》， P869

悖论的历史悠久

最早的悖论可以追溯到公元前6世纪古希腊克里特岛人埃匹门尼德提出的说谎者悖论。
在我国先秦时期，墨家曾经提出过："以言为尽悖。悖，说在其言。"
同时期的庄子在《齐物论》中讲述无法分清梦境与现实时曾提出"吊诡"一词，至今仍被一些学者用来表示悖论。

三个著名悖论

- 1900年前后, 在数学的集合论中出现了三个著名悖论：罗素悖论、康托尔悖论、布拉利—福尔蒂悖论。这些悖论特别是罗素悖论，在当时的数学界与逻辑界内引起了极大震动。触发了数学的第三次危机
  - 罗素悖论：所有集合组成的集合
  - 康托尔悖论:没有最大的基数
  - 布拉利—福尔蒂悖论：最大序数悖论

1902年罗素发现了集合论中的一个悖论，在数学界引起了震惊。

（内容见教材P131，留待后面章节介绍）

所有集合组成的集合

理发师悖论

- 例如比较有名的理发师悖论：某乡村有一位理发师，一天他宣布：只给不自己刮胡子的人刮胡子。这里就产生了问题：
- 理发师给不给自己刮胡子？如果他给自己刮胡子，他就是自己刮胡子的人，按照他的原则，他不能给自己刮胡子；如果他不给自己刮胡子，他就是不自己刮胡子的人，按照他的原则，他就应该给自己刮胡子。这就产生了矛盾。

书中习题的解释

考察如下两句话：

1. “这句话是错的。”
2. “本页上这一行的这句话是假话。”

问题：这句话究竟是真话还是假话！

若承认这句话的内容是对的，即承认这句话的断言为真，则可推出这句话是假话；

反之，若承认这句话的内容是不对的，即承认这句话的断言为假，则可推出这句话是真话。

这种语句称为“自指谓”语句。它的结论是对自身而言的。往往会产生自相矛盾的结论。

悖论举例2

古代有一个小国，百姓犯罪后，若被处以极刑有两种方式：

1. 若说真话，则上天堂（处以绞刑）
2. 若说假话，则下地狱（将被活埋）

一个逻辑学家犯罪后，在被处以极刑前稍加思索后说了一句话，令执行官左右为难，只得将他赦免。

问题：逻辑学家说的这句话的内容是什么?

1. 若说真话，则上天堂（处以绞刑）
2. 若说假话，则下地狱（将被活埋）

悖论举例2

逻辑学家说：“我将下地狱”（或“我将被活埋”）。

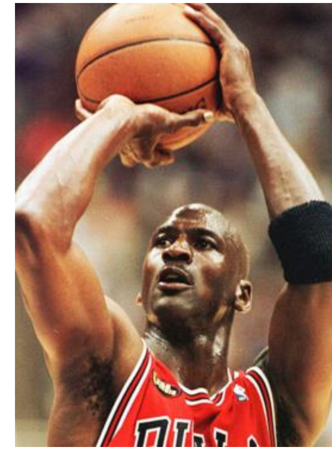
若承认为真话，则应处以绞刑；

但若施以绞刑，则“我将被活埋”应为假话。

若承认为假话，则应将其活埋；

但若将其活埋，“我将被活埋”将变成真话。

更多举例



Michael Jordan

- 先有鸡，还是先有蛋？
- 两小儿辩日
- 纸牌悖论（乔丹真值悖论）
  - 纸牌悖论就是纸牌的一面写着：“纸牌反面的句子是对的。”而另一面却写着：“纸牌反面的句子是错的。”

Philip Jourdain

- 上帝和石头
  - 上帝能创造出一块他搬不动的石头吗？

Michael Jordan

第一章小结

- 命题逻辑(Logic)
  - 研究命题的推理演算
  - 命题逻辑的应用
    - 数学上定理的推导
    - 在计算机科学上，验证程序的正确性
- 主要内容
  - 命题的基本概念
  - 命题联结词
  - 命题合式公式、重言式
  - 自然语句的形式化

第一章小结（续）

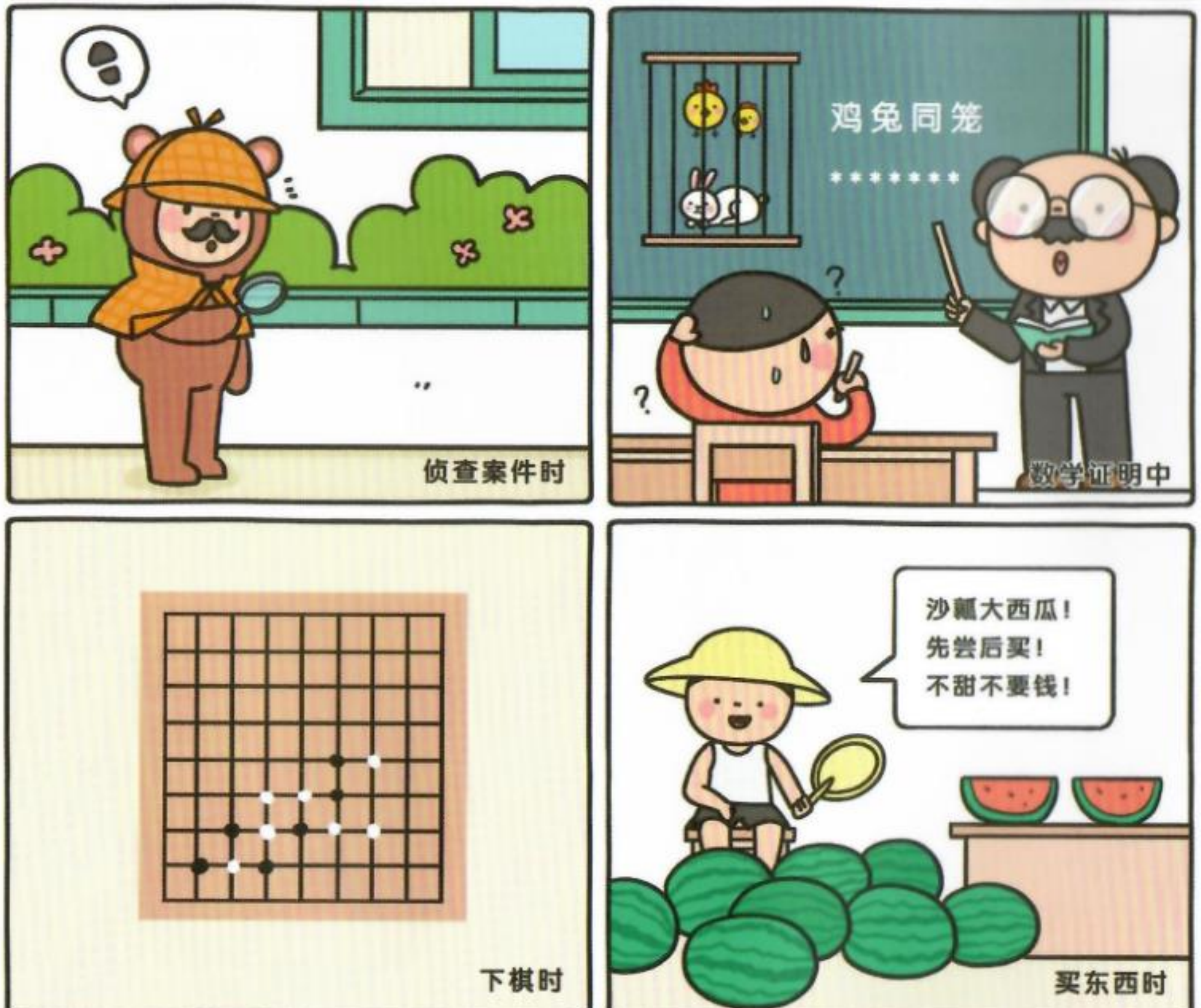
- 本章主要介绍了命题逻辑的基本概念，它是后面两章的基础；
- 介绍了命题、命题变项、简单命题和复合命题；
- 介绍了命题联结词及其真值表
  - 否定联结词$\neg$
  - 合取联结词$\wedge$
  - 析取联结词$\vee$
  - 蕴涵联结词$\rightarrow$
  - 双蕴涵联结词$\leftrightarrow$

第一章小结（续）

- 介绍了合式公式及其递归定义；
- 介绍了重言式、矛盾式和可满足式；在此基础上，介绍了代入规则以及如何利用代入规则证明重言式；
- 介绍了如何形成自然语句的合式公式（命题的形式化）以及较为复杂的自然语句形式化；
- 介绍了计算机识别合式公式（括号）的过程，在此基础上，介绍了波兰表达式及其在计算机识别处理过程的优势。

第二章：命题逻辑的等值和推理演算

推理无处不在



前言

- 推理形式和推理演算是数理逻辑研究的基本内容
- 推理形式是由前提和结论经蕴涵词联结而成的
- 推理过程是从前提出发，根据所规定的规则来推导出结论的过程
- 重言式是重要的逻辑规律，正确的推理形式、等值式都是重言式

2.1 等值定理

等值:

给定两个命题公式 A和 B，设$P_1, P_2, \ldots, P_n$为出现于A和B中的所有命题变项，则公式A和B共有2^n个解释。

若在任一解释下，公式A和B的真值都相同，则称A和B是等值的、或称等价记作

$A=B$ 或 $A\Leftrightarrow B$。

- 判断公式是否等值

$\boldsymbol{P\rightarrow(Q\rightarrow R)}$与$\boldsymbol{(P\wedge Q)\rightarrow R}$

$\boldsymbol{(P\rightarrow Q)\rightarrow R}$与$\boldsymbol{(P\wedge Q)\rightarrow R}$

$P \to (Q \to R)$与$(P \wedge Q) \to R$
$(P \to Q) \to R$与$(P \wedge Q) \to R$

P Q R	$Q \to R$	$P \wedge Q$	$P \to Q$	$P \to (Q \to R)$	$(P \wedge Q) \to R$	$(P \to Q) \to R$
0 0 0	1					
0 0 1	1					
0 1 0	0					
0 1 1	1					
1 0 0	1					
1 0 1	1					
1 1 0	0					
1 1 1	1					

$P\to(Q\to R)$与$(P\wedge Q)\to R$
$(P\to Q)\to R$与$(P\wedge Q)\to R$

P Q R	$Q\to R$	$P\wedge Q$	$P\to Q$	$P\to(Q\to R)$	$(P\wedge Q)\to R$	$(P\to Q)\to R$
0 0 0	1			1		
0 0 1	1			1		
0 1 0	0			1		
0 1 1	1			1		
1 0 0	1			1		
1 0 1	1			1		
1 1 0 `	0			0		
1 1 1	1			1		

$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$与$(P \wedge Q) \rightarrow R$
$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$与$(P \wedge Q) \rightarrow R$

P Q R	$Q \rightarrow R$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$
0 0 0	1	0		1		
0 0 1	1	0		1		
0 1 0	0	0		1		
0 1 1	1	0		1		
1 0 0	1	0		1		
1 0 1	1	0		1		
1 1 0	0	1		0		
1 1 1	1	1		1		

$$P\rightarrow(Q\rightarrow R)与(P\wedge Q)\rightarrow R$$

$$(P\rightarrow Q)\rightarrow R与(P\wedge Q)\rightarrow R$$

$P\ Q\ R$	$Q\rightarrow R$	$P\wedge Q$	$P\rightarrow Q$	$P\rightarrow(Q\rightarrow R)$	$(P\wedge Q)\rightarrow R$	$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$
0 0 0	1	0		1	1	
0 0 1	1	0		1	1	
0 1 0	0	0		1	1	
0 1 1						
1 0 0	1	0		1	1	
1 0 1	1	0		1	1	
1 1 0	0	1		0	0	
1 1 1	1	1		1	1	

$$P\rightarrow(Q\rightarrow R)=(P\wedge Q)\rightarrow R$$

$P\rightarrow(Q\rightarrow R)$与$(P\wedge Q)\rightarrow R$
$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$与$(P\wedge Q)\rightarrow R$

$P\ Q\ R$	$Q\rightarrow R$	$P\wedge Q$	$P\rightarrow Q$	$P\rightarrow(Q\rightarrow R)$	$(P\wedge Q)\rightarrow R$	$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$
0 0 0	1	0	1	1	1	
0 0 1	1	0	1	1	1	
0 1 0	0	0	1	1	1	
0 1 1	1	0	1	1	1	
1 0 0	1	0	0	1	1	
1 0 1	1	0	0	1	1	
1 1 0	0	1	1	0	0	
1 1 1	1	1	1	1	1	

$P \to (Q \to R)$与$(P \wedge Q) \to R$
$(P \to Q) \to R$与$(P \wedge Q) \to R$

$P\ Q\ R$	$Q \to R$	$P \wedge Q$	$P \to Q$	$P \to (Q \to R)$	$(P \wedge Q) \to R$	$(P \to Q) \to R$
0 0 0	1	0	1	1	1	0
0 0 1	1	0	1	1	1	1
0 1 0	0	0	1	1	1	0
0 1 1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1
1 0 0	1	0	0	1	1	1
1 0 1	1	0	0	1	1	1
1 1 0	0	1	1	0	0	0
1 1 1	1	1	1	1	1	1

$$(P \to Q) \to R \neq (P \wedge Q) \to R$$

2.1 等值定理

- 定理2.1.1

  设A，B为两个命题公式，$A = B$的**充分必要条件**是$A \leftrightarrow B$为一个重言式。

1. 必要性：$\Leftarrow$

　　若$\boldsymbol{A \leftrightarrow B}$是重言式，则在任一解释下，$\boldsymbol{A \leftrightarrow B}$的真值均为真。

　　由 $\boldsymbol{A \leftrightarrow B}$的定义，仅当$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$真假值相同时，才有$\boldsymbol{A \leftrightarrow B} = \mathrm{T}$。

　　所以在任一解释下，**$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$都有相同的真值**，从而有$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$。

等值定理的证明

2．充分性：→

若有$A = B$，则在任一解释下，A和B都有相同的真值，依 $A\leftrightarrow B$的定义，$A\leftrightarrow B$的取值一定为真，故推出 $A\leftrightarrow B$是重言式。

证毕

等值定理

等值定理的实用性之一：

若证明两个公式等值，只要证明由这两个公式构成的双条件式是重言式。

等值关系满足等价关系的三个性质：

自反性 $A = A$.

对称性 若$A = B$，则$B = A$.

传递性 若$A = B$，$B = C$，则$A = C$

等价关系

命题的四种形式

原命题 **逆命题** **否命题** **逆否命题**

如果$x < -1$ 那么$x + \frac{1}{x} \le -2$

反过来说

否了原命题 的条件和结论 $\neq$ 命题的否定（只否结论）

$\ge$ $>$

反过来说，再否了

$\ge$ $>$

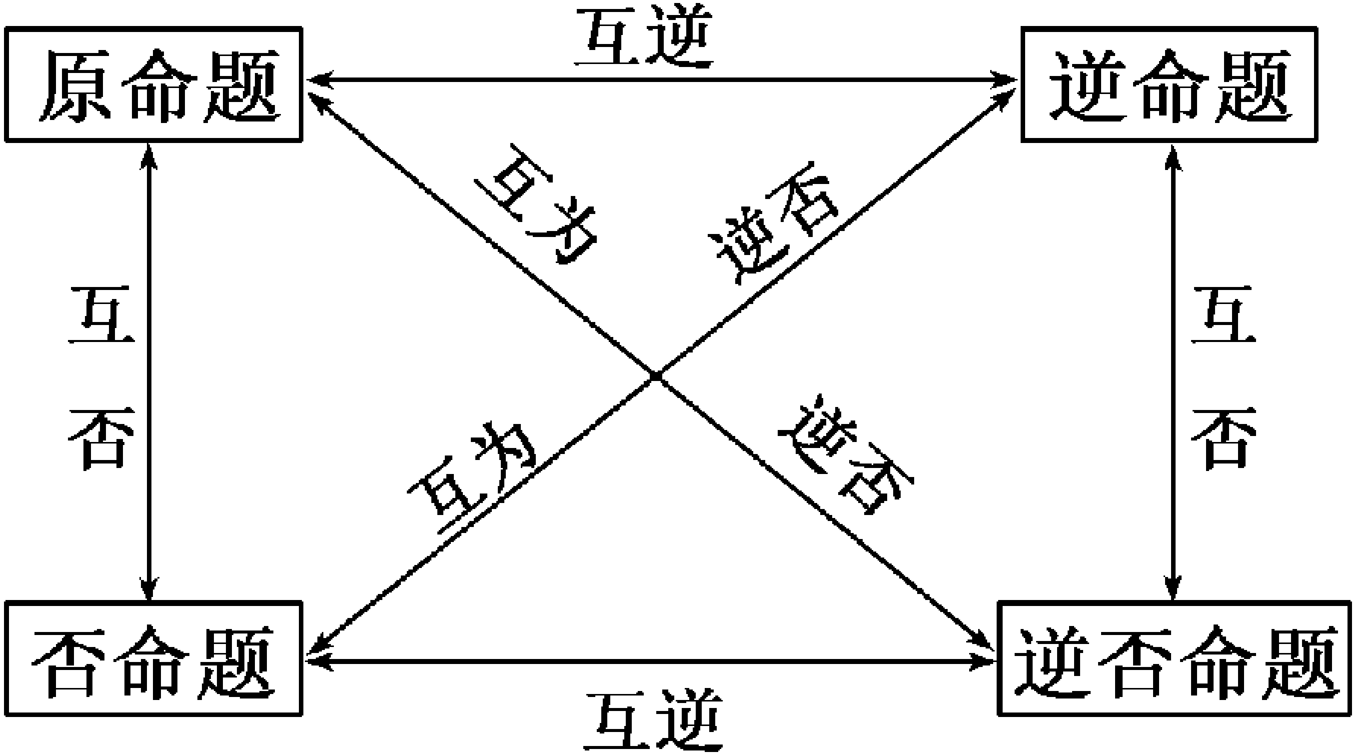
逆命题、否命题与逆否命题

若将$P \to Q$视为原命题，

逆命题：则称$Q \to P$为它的逆命题。

否命题：则称$\neg P \to \neg Q$为它的否命题。

逆否命题: 则称$\neg Q \to \neg P$为它的逆否命题。



逆命题、否命题与逆否命题

两个重要结论

1. 一个命题（**原命题**）与它的逆否命题等值

即 $P \rightarrow Q = \neg Q \rightarrow \neg P$

2. 一个命题的逆命题与它的否命题等值

即 $Q \rightarrow P = \neg P \rightarrow \neg Q$

举例 证明 若a^2是偶数，则a是偶数。利用结论1。

2.2 等值公式

2.2.1 子公式

若X是合式公式A的一部分，且X本身也是一个合式公式，则称X为公式A的子公式。

2.2.2 置换规则

设X为公式A的子公式，用与X等值的公式Y将A中的X施以代换，称为置换，该规则称为置换规则。

置换后公式A化为公式B，置换规则的性质保证公式A与公式B等值，即A=B。

且当A是重言式时，置换后的公式B也是重言式。

2.2 等值公式

定理2.2.1：

设$\Phi(A)$是含命题公式A的命题公式， $\Phi(B)$是用命题公式B置换了$\Phi(A)$中的A之后得到的命题公式

如果$A=B$，则$\Phi(A)=\Phi(B)$ 。

2.2.1 基本的等值公式(命题定律)

1. 双重否定律

$$\neg\neg P = P$$

2. 结合律

$$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$$

$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$$

$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$$

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

“$\rightarrow$” 不满足结合律

2.2.1 基本的等值公式(命题定律)

3. 交换律

$$P \vee Q = Q \vee P$$

$$P \wedge Q = Q \wedge P$$

$$P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$$

$$P \rightarrow Q \neq Q \rightarrow P$$

“$\rightarrow$” 不满足交换律

2.2.1 基本的等值公式(命题定律)

4. 分配律

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

$$P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \neq (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)$$

“$\leftrightarrow$” 不满足分配律

2.2.1 基本的等值公式(命题定律)

5. 等幂律（恒等律）

$$P \vee P = P$$

$$P \wedge P = P$$

$$P \rightarrow P = T$$

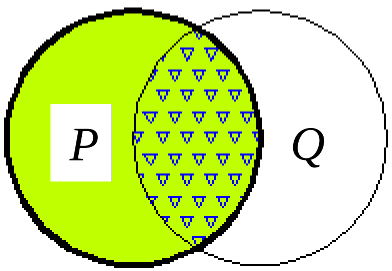
$$P \leftrightarrow P = T$$

2.2.1 基本的等值公式(命题定律)

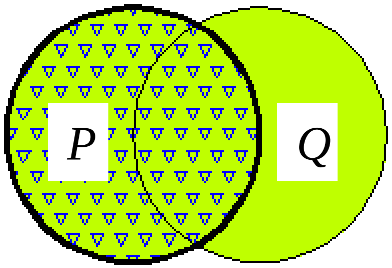
6. 吸收律

$$P \vee (P \wedge Q) = P$$

$$P \wedge (P \vee Q) = P$$



$P \vee (P \wedge Q)$



$P \wedge (P \vee Q)$

2.2.1 基本的等值公式(命题定律)

7. 摩根（De Morgan）律：

$$\neg (P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$

$$\neg (P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

对蕴含词、双条件词作否定有

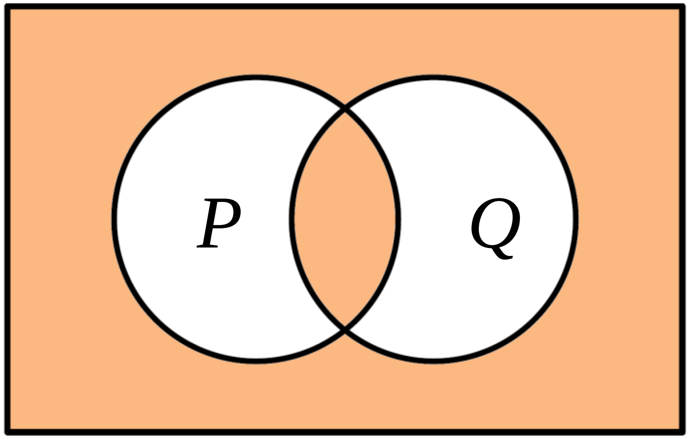
$$\neg(P \rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$$

$$\neg(P \leftrightarrow Q) = \neg P \leftrightarrow Q = P \leftrightarrow \neg Q$$

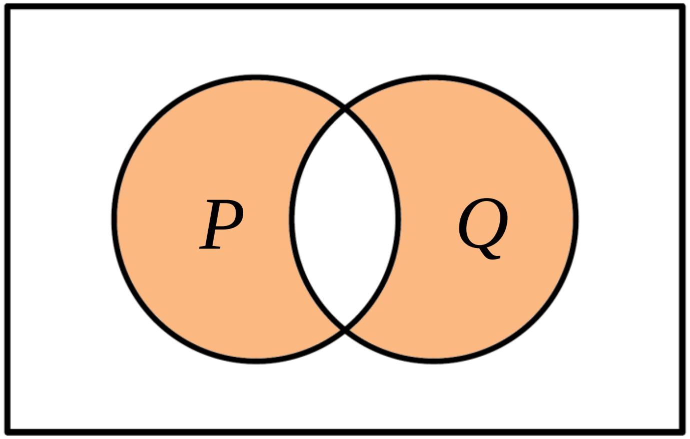
$$= (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$ （借助图形）

$P \leftrightarrow Q$ 和$\neg(P \leftrightarrow Q)$的文氏图

- $P \leftrightarrow Q = (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$
- $\neg(P \leftrightarrow Q) = (\neg \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q})$



$P \leftrightarrow Q$



$\neg(P \leftrightarrow Q)$

2.2.1 基本的等值公式(命题定律)

8. 同一律：

$P \vee F = P \qquad P \wedge T = P$

$T \rightarrow P = P \qquad T \leftrightarrow P = P$

还有

$P \rightarrow F = \neg P \qquad F \leftrightarrow P = \neg P$

2.2.1 基本的等值公式(命题定律)

9. 零律：

$$\boldsymbol{P \vee T = T}$$

$$\boldsymbol{P \wedge F = F}$$

还有

$$\mathrm{P \rightarrow T = T}$$

$$\mathrm{F \rightarrow P = T}$$

2.2.1 基本的等值公式(命题定律)

10. 补余律：

$\boldsymbol{P \vee \neg P = T}$　　　$\boldsymbol{P \wedge \neg P = F}$

还有

$$P \to \neg P = \neg P$$

$$\neg P \to P = P$$

$$P \leftrightarrow \neg P = F$$

常用的等值公式

- 蕴涵等值式 $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$
- 前提合取合并 $P\rightarrow(Q\rightarrow R) = (P\wedge Q)\rightarrow R$
- **等价等值式：**$P \leftrightarrow Q =(P \rightarrow Q) \wedge(Q \rightarrow P)$
- **假言易位：** $P \rightarrow Q = \neg Q \rightarrow \neg P$
- **等价否定等值式：** $P \leftrightarrow Q = \neg P \leftrightarrow \neg Q$
- **归谬论：**$(P \rightarrow Q)\wedge (P \rightarrow \neg Q) = \neg P$

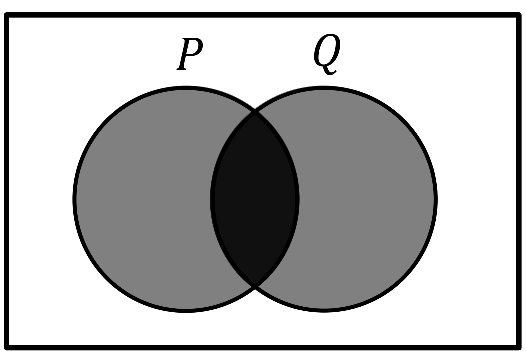
常用的等值公式

- $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 从取真来描述双条件
- $P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ 从取假来描述双条件
- $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = Q \rightarrow (P \rightarrow R)$ 前提交换
- $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) = (P \vee Q) \rightarrow R$ 前提析取合并

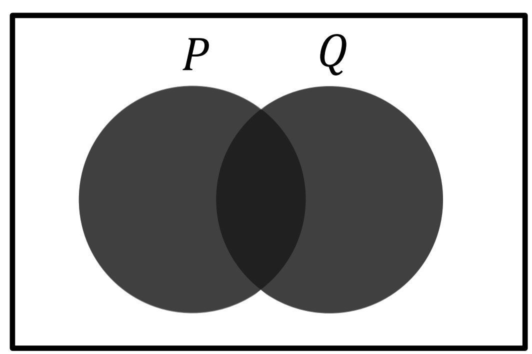
证明其他等值式

文氏图(Venn Diagram)

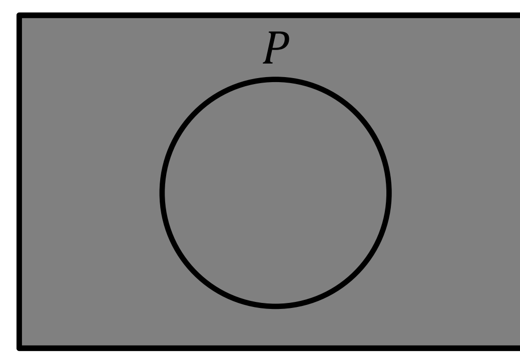
- 将P、Q理解为某总体论域上的子集合，并规定：
  - $P \wedge Q$为两集合的公共部分(交集合)
  - $P \vee Q$为两集合的全部(并集合)
  - $\neg P$为总体论域(如矩形域)中P的余集



$P \wedge Q$



$P \vee Q$

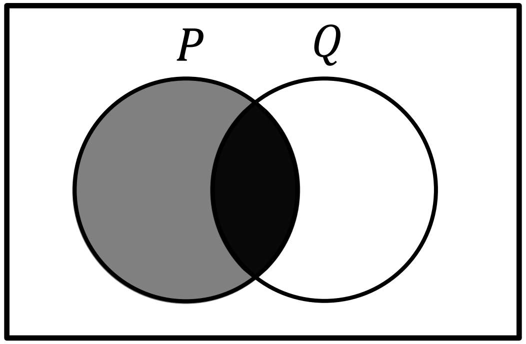


$\neg P$

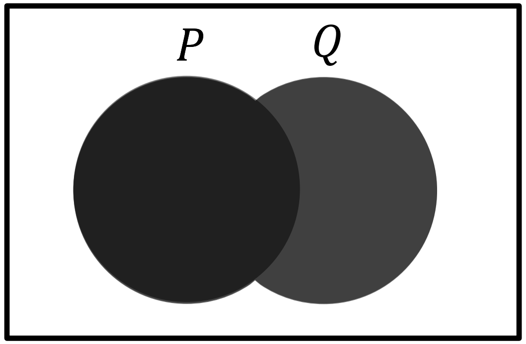
文氏图(Venn Diagram)

从Venn图，因$P \wedge Q$较P来得“小”，$P \vee Q$较P来得“大”，从而有

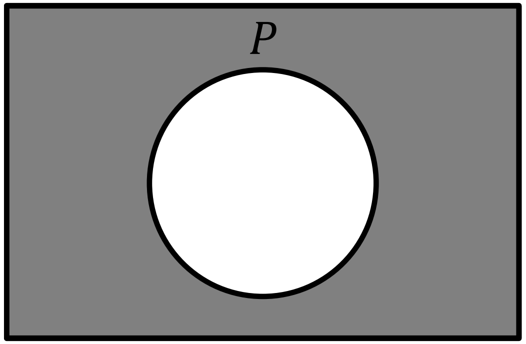
$$P \vee (P \wedge Q) = P \qquad P \wedge (P \vee Q) = P$$



$P \wedge Q$



$P \vee Q$



$\neg P$

2.2.4 等值演算

- 定义
  - 由已知等值式推演出另外一些等值式的过程称为等值演算（布尔代数和逻辑代数）。
- 方法
  - 方法1：列真值表。
  - 方法2：公式的等价变换.

置换定律:A是一个命题公式，X是A中子公式，如果X＝Y，用Y代替A中的X得到公式B，则A＝B。

公式等值演算的用途

- 判别命题公式的类型
  - 重言式
  - 矛盾式
  - 可满足式
- 验证两个公式等值
- 解决实际问题

用途1：判别命题公式的类型

- 例1 判别$\neg(P\wedge Q)\rightarrow(\neg P\vee(\neg P\vee Q))$公式类型.

解 原式

$\neg\neg(P\wedge Q)\vee((\neg P\vee\neg P)\vee Q)$ (蕴涵等值式，结合律)

$= (P\wedge Q)\vee(\neg P\vee Q)$ (双重否定律，幂等律)

$= (P\wedge Q)\vee(Q\vee\neg P)$ (交换律)

$= ((P\wedge Q)\vee Q)\vee\neg P$ (结合律)

$= Q\vee\neg P$ (吸收律) 可满足式

单选题 1分

Setting

判别$\neg(P \rightarrow (P \vee Q)) \wedge R$公式类型

A 可满足式

B 矛盾式

C 永真式

D 都不是

Submit

用途1：判别命题公式的类型

- 例2　　判别$\neg(P \rightarrow (P \vee Q)) \wedge R$公式类型.

解　原式

$= \neg(\neg P \vee P \vee Q) \wedge R$　(蕴涵等值式)

$= (P \wedge \neg P \wedge \neg Q) \wedge R$　(摩根律)

$= F \wedge R$　(补余律，零律)

$= \mathrm{F}$　(零律)

矛盾式

用途2：验证两个公式等值

例3：证明$P\to(Q\to R)=(P\land Q)\to R$

- 证明：

$P\to(Q\to R)=P\to(\neg Q\lor R)$ （置换）

$=\neg P\lor(\neg Q\lor R)$ （置换）

$=(\neg P\lor\neg Q)\lor R$ （结合律）

$=\neg(P\land Q)\lor R$ （摩根律）

$=(P\land Q)\to R$ （置换）

例4：证明$(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)=(P\vee Q)\rightarrow R$

$(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R) =$

$(\neg P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$	蕴含等值式
$(\neg P\wedge\neg Q)\vee R$	分配律
$\neg(P\vee Q)\vee R$	摩根律
$(P\vee Q)\rightarrow R$	蕴含等值式

例5：$(P\wedge(Q\vee R))\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)= P$

证明:

$(P\wedge(Q\vee R))\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

$= P\wedge(\ (Q\vee R)\vee(\neg Q\wedge\neg R)\ )$ 分配律

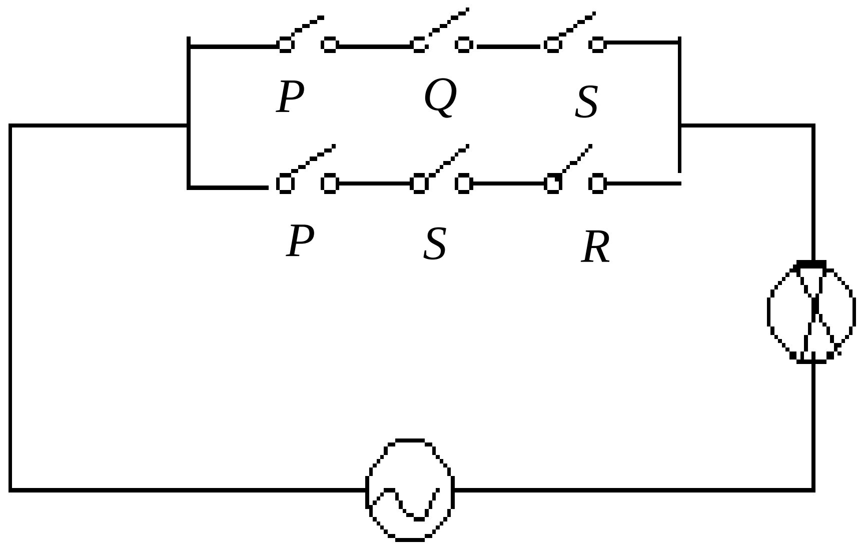
$= P\wedge((Q\vee R)\vee\neg(Q\vee R))$ 摩根律

$= P\wedge \mathrm{T}$ 同一律

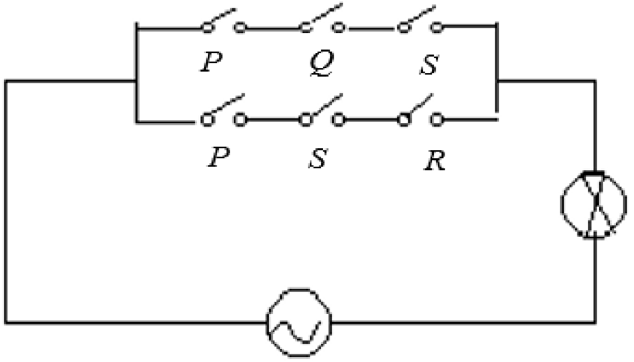
$= P$

用途3：解决实际问题

- 例6：试用较少的开关设计一个与下图有相同功能的电路。



解： **可将该图所示之开关电路用下述命题公式表示：**



$$(P\wedge Q\wedge S)\vee(P\wedge R\wedge S)$$

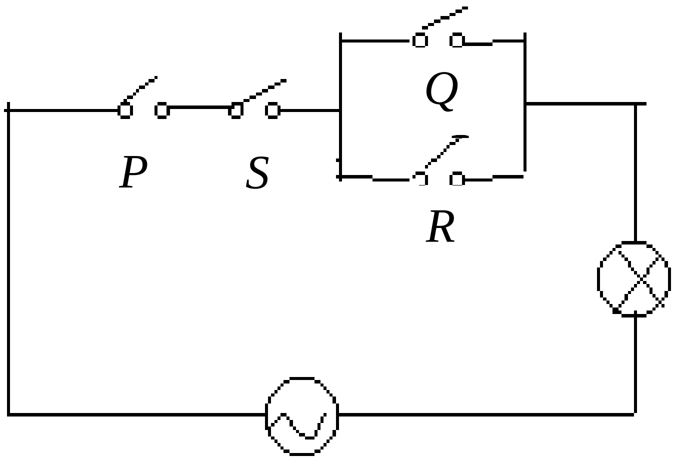
利用基本等值公式，将上述公式转化为：

$$(P\wedge Q\wedge S)\vee(P\wedge R\wedge S)$$

$$= ((P\wedge S)\wedge Q)\vee((P\wedge S)\wedge R)$$

$$= (P\wedge S)\wedge(Q\vee R)$$

所以其开关设计图可简化为



谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn