离散数学(1)

Discrete Mathematics

第十二章 实数集合与集合的基数

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

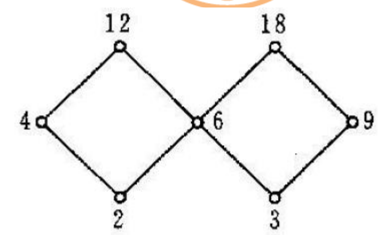
偏序关系

- 能否举例说明一下 上下界怎么算

定义 10.8.6 对偏序集$\langle A,\preccurlyeq\rangle$，且$B\subseteq A$，进一步

(1) 若$(\exists y)(y\in A\wedge(\forall x)(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y))$，则称 y 为 B 的上界，

(2) 若$(\exists y)(y\in A\wedge(\forall x)(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x))$，则称 y 为 B 的下界，



  - 上界：对于B中的每个元素x, 寻找A中满足$y \geq x$的元素集合，然后求交集
  - 例如$\{y|y \in A \wedge y \geq 4\} = \{4,12\}, \{y|y \in A \wedge y \geq 6\} = \{6,12,18\}, \{y|y \in A \wedge y \geq 9\} = \{9,18\}.$
  - 则$\{4,6\}$的上界为$\{4,12\} \cap \{6,12,18\} = \{12\}$, $\{4,6,9\}$的上界为$\{4,12\} \cap \{6,12,18\} \cap \{9,18\} = \emptyset$，无上界
- 没懂什么是哈斯图的集合
  - 哈斯图和偏序关系一一对应
  - 哈斯图的集合指的是它对应的偏序关系构成的集合

分解定理和Dilworth定理

- 能再讲解一下最长单调子序列的知识点吗，感觉这块讲得有点快
  - 最长链的个数=反链个数；最长反链个数=链划分个数
  - 对偏序集$\langle A, \leq \rangle$, 若A中元素为$mn+1$个，则A中或者存在一条长度为$m+1$的反链，或者存在一条长度为$n+1$的链
  - 实际做题中，根据题意构造出合适偏序关系，明确链/反链在当前场景中的意义，然后进行求解
- 请问用分解定理和dilworth定理求解的题一般是填空题还是解答题，要写过程吗，谢谢；

其他

- Zorn定理对于无穷长度的链是成立的吗，比如无限趋近于1的链
  - **佐恩引理**（Zorn's Lemma）也被称为**库拉托夫斯基-佐恩**（Kuratowski-Zorn）引理，是集合论中一个重要的定理，其陈述为：

    > 在任何一非空的偏序集中，若任何链（即全序的子集）都有上界，则此偏序集内必然存在（至少一枚）极大元。

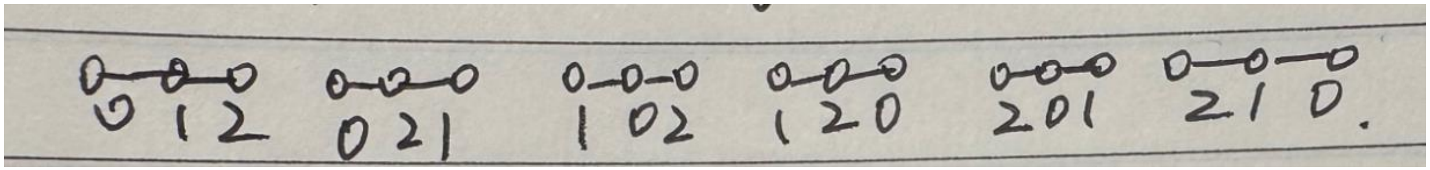
  - 对于任一非空偏序集都是成立的，因此对于无穷长度的链也是成立的。此时由于存在链没有上界，所以不保证有极大元
  - 例如无限集合 $A = \{0.9, 0.99, 0.999, \ldots\}$, $\langle A, \leq \rangle$ 构成一条无限链，该链不存在上界，因此不保证该偏序集中有极大元
- 请问$f \cap g$的定义域是什么，$f \cap g$是函数吗？谢谢。
  - 描述函数的时候应当明确函数的定义域
  - $\mathrm{dom}(f \cap g)$等于$f \cap g$的定义域时是函数，否则不是函数
  - 建议描述函数的时候，都明确定义域A和值域B

其他

- 创新作业和编程的ddl能不能延后一点啊(感觉平时好忙，希望能延到元旦后)

作业相关

- 哈斯图画得不规范，由于哈斯图上没有箭头，因此aRb应当将a放在b的下方



- 证明不规范
  - $x \in B$不能推出$\langle x, x\rangle \in R$，而是通过$R$是等价关系得到的

自反性：$x \in B \Rightarrow \langle x, x\rangle \in R \wedge \langle x, x\rangle \in B \times B$.

$\therefore \langle x, x\rangle \in R \wedge (B \times B)$

复习：第11章 函数

定义11.1.1（函数-function）

- 对集合A到集合B的关系f，若满足下列条件：

  (1)对任意的 $x \in dom(f)$，存在唯一的 $y \in ran(f)$,使xfy 成立；

  (2)$dom(f) = A$

- 则称f 为从A到B的函数，或称f把A映射到B（有的教材称f 为全函数、映射、变换）。
- 一个从A到B的函数f，可以写成f：$A \to B$。
- 这时若xfy，则可记作f：$x \mapsto y$ 或$f(x) = y$。

复习：概念

- 满射
- 单射
- 双射
- 常函数
- 恒等函数
- 单调函数
- 泛函
- 特征函数
- 自然映射

第十二章 实数集合与集合的基数

- 12.1 实数集合
  1. 整数集合Z
  2. 有理数集合Q
  3. 实数集合R
- 12.2 集合的等势
- 12.3 有限集合与无限集合
- 12.4 集合的基数
- 12.5 基数的算术运算
- 12.6 基数的比较
- 12.7 可数集合与连续统假设

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\overline{\vee}\, x \in B\}$

元素x $\in$ 集合A

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

A和B不相交 $\Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$

$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$

$E = \{\, x \mid x = x \,\}$

对任意的集合A， $\emptyset \subseteq A$

$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$

$\cup \emptyset = \emptyset$

$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$

$\cap \emptyset$无意义

$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

集合A 集合B

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

$|A|<|B|$?

无限集合比大小?

$A = R,\ \ B = R+ =\{x|x\in R\wedge x>0\}$

令f: $R\rightarrow R+$, $f(x)= e^x$。

实数集合与集合的基数

- 基数-----集合中元素的个数.
- 本章主要借助于函数讨论集合的所谓“大小”问题。
- 无限集合
  - 整数集
  - 实数集
  - 有理数集
  - ……

【课前思考】

- 无限集合的基数应该如何定义？
- 一个无限集合的子集是否与原集合的基数相同？
- 实数集的基数是否与自然数集的基数相同？
- 怎样判断两个无限集合的基数是否相等？
- 什么是连续统假设？

【课前思考】

- 无限集合，所含的元素有无穷多个，
- 基数如何定义？
- 怎样比较两个无限集合的大小？
- $|N| =?$ $|Q| =?$
- $|R| =?$ $|R^+| =?$
- $|P(N)| =?$

单选题 1分

设置

是自然数多呢?还是完全平方数多呢?

A 自然数多

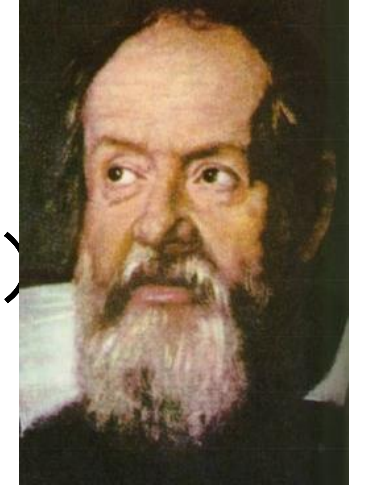
B 完全平方数多

C 一样多

D 无所谓

提交

伽利略(1564–1642)



- 《两种新科学》（Two New Science）
  - 是自然数多呢?还是完全平方数多呢？
  - 直观上看，自然数多。
  - 但从另一个角度看，有一个自然数，便有一个完全平方数：
- 最后伽利略据此得出结论说：
  - 比较无穷量是不可能的
  - 所有无穷量都一样！

1	2	3	4	…	n	…
1	4	9	16	…	n^2	…

一一对应

部分 = 全体（Galileo悖论）

- 1638年著名天文学家Galileo提出下列问题：
- $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$
- $N^2 = \{0, 1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots\}$
- 哪个集合元素更多？
- 一方面，$N^2 \subseteq N$，因为2, 3, 5等均不在N^2中；
- 另一方面，对于N中的每个元素，在N^2中都能找到一个元素与之对应。
- 当时它不仅困惑了Galileo，也使许多数学家束手无策。

部分 = 全体（Galileo悖论）

- 1874-1894年间，Cantor圆满地解决了Galileo悖论。
- 基本思想：“一一对应”

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$\updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \quad f: A \rightarrow n \quad n = \{0,1,2, \ldots n-1\}$$

$$0, 1, 2, 3$$

- 结论：N与N^2之间存在着一一对应（双射）

$$|N| = |N^2| \qquad \underline{\text{等势}}$$

自然数集合

- **每个自然数可表示为：**

比较大小？
负数？

$$0=\Phi$$

$$1=0^{+}=0\cup\{0\}=\{0\}=\{\Phi\}$$

$$2=1^{+}=1\cup\{1\}=\{0,1\}=\{\Phi,\{\Phi\}\}$$

$$3=2^{+}=2\cup\{2\}=\{0,1,2\}=\{\Phi,\{\Phi\},\{\Phi,\{\Phi\}\}\}$$

$$\cdots$$

$$n+1=n^{+}=n\cup\{n\}=\{0,1,\cdots,n\}.$$

12.1 实数集合

定义12.1.1 （整数） 对自然数集合N，令

$$Z_+ = N - \{0\}$$

$$Z_- = \{\langle 0, n\rangle \mid n \in Z_+\}$$

$$Z = Z_+ \cup \{0\} \cup Z_-$$

- 则称Z_+的元素为正整数，Z_-的元素为负整数，Z的元素为整数。

定义12.1.2 一个整数的相反数分别是

$-n = < 0, n >$ 当 $n \in Z_+$，

$-0 = 0$,

$-< 0, n > = n$ 当 $n \in Z_+$。

12.1 实数集合

定义12.1.3

- 在集合Z上定义小于等于关系$\le_Z$为，对任意的，$x,y\in Z$，$x\le_Z y$当且仅当

$$(x\in N\wedge y\in N\wedge x\le_N y)\vee(x\in Z_-\wedge y\in N)$$
$$\vee(x\in Z_-\wedge y\in Z_-\wedge -y\le_N -x).$$

- 在集合Z上定义小于关系 $<_Z$为，对任意的 $x,y\in Z$，$x<_Z y$ 当且仅当 $(x\le_z y)\wedge(x\ne y)$

分数？

有理数？

$$Z_+=N-\{0\}$$
$$Z_-=\{\langle 0,n\rangle\mid n\in Z_+\}$$
$$Z=Z_+\cup\{0\}\cup Z_-$$

定义12.1.4 （等价关系≅）

对整数集合Z，令

$$Q_1 = Z \times (Z - \{0\}) = \{< a, b > | a \in Z \wedge b \in Z \wedge b \neq 0\}$$

并称Q_1是Z上的因式的集合。

- 对$< a, b > \in Q_1$，可以a/b用代替$< a, b >$。
- 在Q_1上定义关系≅为对任意的 $a/b \in Q_1$，$\mathrm{c}/d \in Q_1$，$a/b \cong \mathrm{c}/d$ 当且仅当 $a \cdot d = b \cdot c$，其中$a \cdot d$是在Z上定义的乘法，$=$是Z上的相等关系。

12.1　实数集合

定理12.1.1

- Q_1上的关系$\cong$是等价关系。

1. 自反的
2. 对称的
3. 传递的

12.1　实数集合

定义12.1.5　（有理数集合）

- $Q = Q_1 /\cong$，即Q是集合Q_1对等价关系$\cong$的商集，
- 则称Q的元素为有理数，
- 一般用a/b表示Q中的元素$[< a, b >_{\cong}]$，
- 并习惯上取a、b是互素的整数，且 $b > 0$。
- $[1/2]=[< 1,2 >_{\cong}]=\{1/2,2/4,-1/-2,\ldots\}$.

定义12.1.6 在Q上定义等于关系$\leq_Q$为，

- 对任意的a/b，$c/d \in Q$，
- $a/b \leq_Q c/d$当且仅当 $a \cdot d \leq_Z b \cdot c$。
- $1/2 \leq_Q 3/4$

绕不过去的坎 $\sqrt{2}$

- 无理数
  - 无理数不能用有穷个有理数来表示。
  - 无理数存在
  - 柯西提出极限的概念，

$\sqrt{2}$可以看作有理数序列：1.4，1.41，1.414…….的极限

- 逻辑上的循环，需要先知道$\sqrt{2}$，才能确定这个有理序列是否收敛于$\sqrt{2}$；但是在定义无理数之前，我们并不知道$\sqrt{2}$是什么？

绕不过去的坎

- Karl Weierstrass （1815—1897）
  - 利用单调有界的有理数数列来定义无理数，从而在严格的逻辑基础上建立了实数理论.
  - $\sqrt{2}$ 即{1.4，1.41，1.414……}为“完成了的整体”
  - 序列1.4，1.41，1.414……的极限看作集合。
  - $\sqrt{2}$即{1.4，1.41，1.414……}
- 实无穷：把无限的整体本身作为一个现成的单位, 是已经构造完成了的东西, 换言之, 即是把无限对象看成为可以自我完成的过程或无穷整体.

12.1 实数集合

定义12.1.7 （基本函数）

- 如果f：$N \to Q$满足条件，

（1） $(\exists x)(x \in Q \wedge (\forall n)(n \in N \to |f(n)| < x))$ 有界的

（2） $(\exists n)(n \in N \wedge (\forall m)(\forall i)((m \in N \wedge i \in N \wedge n \le m \wedge n \le i \wedge m \le i) \to (f(m) \le f(i))))$ 单调非递减的

- 则f称是一个基本函数，或有界非递减函数。

12.1　实数集合

- 当f是一个基本函数时，则函数值

$$f(0), f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots$$

称为一个基本序列，它有时写为

$$r_0,\ r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots$$

- 在以下定义与定理中，B表示所有基本函数的集合。$BF(f)$表示f是一个基本函数。

12.1 实数集合

定理12.1.2 当$f: N \to Q$取常数值时，f是基本函数。即对任意的$r \in Q$，

$$r, r, r \ldots$$

是一个基本序列。

定理12.1.3 存在不是常值函数的基本函数。

$$f(n) = 1 - 1/(n+1)$$

定义12.1.7 （基本函数）

- 如果$f: N \to Q$满足条件，

(1) $(\exists x)(x \in Q \land (\forall n)(n \in N \to |f(n)| < x))$ 有界的

(2) $(\exists n)(n \in N \land (\forall m)(\forall i)((m \in N \land i \in N \land n \leq m \land n \leq i \land m \leq i) \to (f(m) \leq f(i)))$ 单调非递减的

12.1　实数集合

定义12.1.8

- 对基本函数的集合 B，定义 B 上的关系为 $\cong$，对任意的f，$g \in B$，

  $f \cong g$当且仅当

$$(\forall \varepsilon)((\varepsilon \in Q \wedge \varepsilon > 0) \to (\exists n)(n \in N \wedge (\forall m)$$
$$((m \in N \wedge n \le m) \to \left| f(m) - g(m) \right| < \varepsilon)))$$

- 直观上说，$f \cong g$等价于f和g的序列的极限相同。

12.1 实数集合

定理12.1.4

- B上的关系$\cong$是等价关系.

定理12.1.5

- 设$f: N \to Q$和$g: N \to Q$都是常值函数，且 $f \cong g$，则$f = g$。

$f \cong g$当且仅当

$$(\forall \varepsilon)((\varepsilon \in Q \wedge \varepsilon > 0) \to (\exists n)(n \in N \wedge (\forall m)((m \in N \wedge n \le m) \to |f(m) - g(m)| < \varepsilon)))$$

12.1 实数集合

定义12.1.9 （实数集）

- 令$R = B/\cong$，即R是集合B对等价关系$\cong$的商集，则称R的元素为实数，称R为实数集合。

x的等价类中有一个常数函数f(n)=r,则x为一个有理数，否则x是无理数

对比

- 对基本函数的集合B，定义B上的关系为$\cong$，$R = B/\cong$，即R是集合B对等价关系$\cong$的商集，则称R的元素为实数，称R为实数集合。
- 对整数集合Z，令
  $Q_1 = Z \times (Z - \{0\}) = \{< a, b > | a \in Z \land b \in Z \land b \neq 0\}$
- 并称Q_1是Z上的因式的集合。$Q = Q_1 /\cong$，即Q是集合Q_1对等价关系$\cong$的商集，则称Q的元素为有理数。

12.1 实数集合

定义12.1.10

- 在 B 上定义小于关系 $<_B$ 为，对任意的 f，$g \in B$

  $f <_B g$ 当且仅当

$$(\exists\varepsilon)((\varepsilon \in Q \wedge 0 < \varepsilon) \wedge (\exists n)(n \in N \wedge (\forall m)$$

$$((m \in N \wedge n \leq m) \to g(m) - f(m) > \varepsilon))))$$

$f \leq_B g$ 当且仅当 $(f <_B g) \vee (f = g)$

12.1 实数集合

定义12.1.11

- 在R上定义小于等于关系 $\leq_R$和 小于关系$<_R$为，对任意的$f, g \in B$，即对 $[f]_{\cong} \in R$和$[g]_{\cong} \in R$，

  $[f]_{\cong} \leq_R [g]_{\cong}$当且仅当$f \leq_B g$，

  $[f]_{\cong} <_R [g]_{\cong}$当且仅当$f <_B g$。

【课前思考】

- 无限集合的基数应该如何定义？
- 一个无限集合的子集是否与原集合的基数相同？
- 实数集的基数是否与自然数集的基数相同？
- 怎样判断两个无限集合的基数是否相等？
- 什么是连续统假设？

12.2 集合的等势

定义12.2.1 （集合的等势）

- 对集合A和B，如果存在从A到B的双射函数，就称A和B等势，记作$A \approx B$;
- 如果不存在从A到B的双射函数，就称A和B不等势，记作 $\neg A \approx B$
- 注意，$A \approx B$时不一定有$A = B$，
- 反之一定成立（$A = B$ 则必有 $A \approx B$ ）。

12.2 集合的等势

- 例1：$N \approx Z$。因为存在双射函数

$$f: N \to Z, f(n) = \begin{cases} -\dfrac{1+n}{2} & \text{当n是奇数} \\ \dfrac{n}{2} & \text{当n是偶数} \end{cases}$$

- 例2：$R \approx R^+$，其中R^+是正实数集合。因为存在双射函数
- $f: R \to R^+$，$f(x) = e^x$
- 所以$R \approx R^+$。

例：N≈Q.

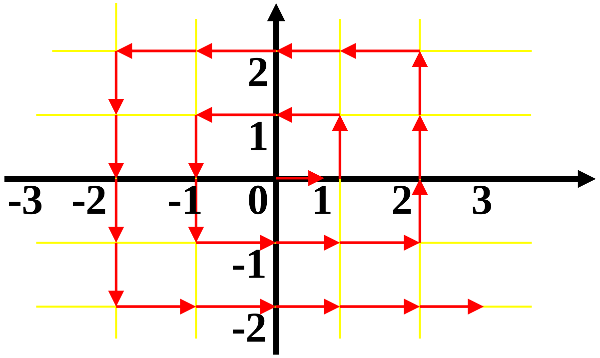
因为每个有理数都可以写成一个分数形式如下：

…	-3/1	-2/1	-1/1	0/1	1/1	2/1	3/1	…
…	-3/2	-2/2	-1/2	0/2	1/2	2/2	3/2	…
…	-3/3	-2/3	-1/3	0/3	1/3	2/3	3/3	…
…	-3/4	-2/4	-1/4	0/4	1/4	2/4	3/4	…
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

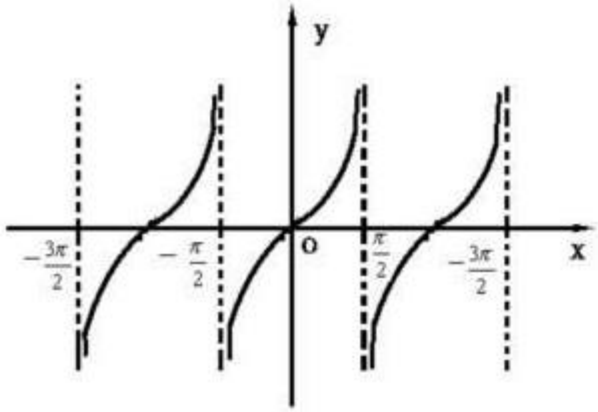
可以从0/1开始按照箭头指定次序排列Q中元素

所以N≈Q 。

另外 Z×Z≈N 如右图所示。



12.2 集合的等势



- 例6：$(0,1) \approx R$。
- 构造双射函数 $f: (0,1) \to R$,
- 已知 $\tan(x)$：$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to R$
- 设 $f(x) = \tan(ax+b)$,
- 由 $f(0) = \tan(b)$，$b = -\frac{\pi}{2}$
- 由 $f(1) = tan(a+b)$，$a = \pi$
- 代入 $f(x) = \tan\dfrac{\pi(2x-1)}{2}$

12.2 集合的等势

- 例7：$[0,1] \approx (0,1)$，构造双射函数
- $f: [0,1] \to (0,1)$,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{4} & \text{当}x=0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{当}x=1 \\ \dfrac{x}{4} & \text{当}x=2^{-n}, n=1,2,3,K \\ x & \text{当}x\text{取其它值} \end{cases}$$

其他双射函数？

- 当 $x = 2^{-n}$ 时，多乘一个¼

定理12.2.1 对任意的集合A，有$P(A) \approx A_2$

- 证明： 这里$2 = \{0,1\}$，所以A_2是所有函数 $f: A \to \{0,1\}$组成的集合。

A的特征函数χ_A定义为：

$$\chi_A : E \to \{0,1\}, \chi_A(a) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$$

- 构造函数 H: $P(A) \to A_2$,
- 对于任意 $B \in P(A)$, $H(B) = \chi_B(x)$: $A \to \{0,1\}$。
- 其中$\chi_B(x)$是以A为全集时B的特征函数。
- 1. 证H是单射的；
- 设B_1，$B_2 \in P(A)$ 且$B_1 \neq B_2$，则

  $H(B_1) = \chi_{B_1} \neq \chi_{B_2} = H(B_2)$，所以，$H$是单射的。
- 2. 证H是满射的；
- 对任意的$g \in A_2$，g: $A \to \{0,1\}$，存在集合

  $B = \{x \mid x \in A \wedge g(x) = 1\}$，则 $B \subseteq A$，即存在

  $B \in P(A)$，且$H(B) = g(x)$。所以，H是满射的。

12.2 集合的等势

- 由定理12.2.1, $P(N) \approx N_2$
- 可以证明 $P(N) \approx R$
- 因为$N \subset R$, 但$\neg N \approx R$
- 可以设想R和$P(N)$是比N更大的集合
- $P(R)$是比R更大的集合。
- $P(P(R))$是比$P(R)$更大的集合。
- 并可依此类推。

12.2 集合的等势

定理12.2.2

- 对任意的集合A、B和C，

  (1) $A \approx A$，

  (2) 若$A \approx B$，则 $B \approx A$，

  (3) 若$A \approx B$且 $B \approx C$ ，则 $A \approx C$。

- 该定理表明，等势具有自反性，对称性和传递性。

多选题 1分

Setting

下面哪些集合是等势的

A $N \approx N \times N$

B $N \times N \approx Z$

C $R+ \approx (0,1)$

D $Z \approx R$

Submit

12.2 集合的等势

- 由定理可知

$$N \approx Z \times Z \approx Z \approx Q$$

- 且

$$R \approx R^{+} \approx (0,1) \approx [0,1]。$$

$N \approx Z$　N≈Q　Z×Z≈N

$R \approx R^{+}$　$(0,1) \approx R$　$[0,1] \approx (0,1)$

12.2 集合的等势

- 若由简单直觉来观察，有理数的排列与整数的排列迥然不同。

- Q中元素的排列似乎远比N稠密，但其个数却竟然与N中的元素一样多，确实出乎人们的预料。

- 实际上，一个有理数可以看作是两个整数组成的数对。

12.2 集合的等势

- 当Cantor把这一结果通知Dedekind (比Cantor年长14岁，曾经是高斯的学生，抽象代数学的先驱，最早支持Cantor的集合论) 时，Dedekind 在回信中写道：
- “我看到了，但我简直不敢相信！”
- 这便是Cantor的又一个伟大的发现，也正是由于这一发现，使他进一步猜想：

$$|N| ?= |R| \quad or \quad N ? \approx R$$

单选题 1分

设置

下面哪个等式成立

(1) $\neg N \approx R$ ，

(2) 对任意的集合A， $\neg A \approx P(A)$

A (1)正确，(2)不正确

B (1)不正确，(2)正确

C (1)正确，(2)正确

D (1)不正确，(2)不正确

提交

12.2 集合的等势

定理12.2.3　康托定理(1890)

（1） $\neg N \approx R$ ，

（2） 对任意的集合A，　$\neg A \approx P(A)$。

有理数就像夜空里的星星，
而无理数则像无边的黑暗

对角线方法（1891年）

- **Cantor's Diagonal Method**
- 假设你把实数区间（0, 1）里的所有数按照某种顺序排列起来
- $a_1 = 0.0147574628\cdots$
  $a_2 = 0.3721111111\cdots$
  $a_3 = 0.2323232323\cdots$
  $a_4 = 0.0004838211\cdots$
  $a_5 = 0.0516000000\cdots$
  ………

小数点后第一位不等于 a_1 的第一位，
小数点后第二位不等于 a_2 的第二位，
……
总之小数点后第 i 位不等于 a_i 的第 i 位。
这个数属于实数区间 (0, 1)，但它显然不在你的列表里，因为它和你列表里的每一个数都有至少一位是不同的。
我们就证明了实数区间是不可数的。

- 证明:
- （1）只要证明 $\neg N \approx [0,1]$ 即可。
- 为此只要证明对任何函数 $f: N \to [0,1]$, 都存在 $x \in [0,1]$, 使$x \notin ran(f)$, 即任何函数$f: N \to [0,1]$都不是双射的。
- 反证：假设存在一个双射函数 $f: N \to [0,1]$

  则[0,1]中的元素必与N中的元素一一对应，

  那么[0,1]中的元素必可排列成如下的形式：

  $$ranf = [0,1] = \{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots\}$$
- 设每个x_i的小数形式是

  $$0.a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ij}\cdots, 且 a_{ij} \in \{0,1,\cdots 9\}$$
- 对任意一个$f: N \to [0,1]$, 顺序列出f 值

$$\neg N \approx R$$

对任意一个$f: N \to [0,1]$, 顺序列出f 值

$$f(0) = x_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \dots$$
$$f(1) = x_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \dots$$
$$f(2) = x_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \dots$$
$$f(3) = x_4 = 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} \dots$$
$$\dots$$
$$f(n-1) = x_n$$
$$= 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4} \dots$$
$$\dots$$

- 依假设

任一[0,1]中的实数均应出现在上表中的某一行

- 关键：如何找出一个[0,1]区间的小数，并证明该小数不在上表中出现。
- Cantor 提出按对角线构造一个新的小数x^*

$$x^* = 0.a_{11}^* a_{22}^* a_{33}^* \cdots a_{ii}^* \cdots$$

使得 $a_{ii}^* \neq a_{ii} \quad (i = 1,2,\cdots,n,\cdots)$

显然 $x^* \in [0,1]$,然而 x^*又不在上表中。

$\because x^*$与上表中的任一x_i至少总有一位数字相异。

于是 $x^* \notin ran(f)$， 即f不可能是满射，故不存在双射函数 $f: N \to [0,1]$。

对任意的集合A，$\neg A \approx P(A)$

（2）对任意的函数 $g: A \to P(A)$,

证明的核心在于**构造一个**$B \subseteq A$ 使得$B \notin ran\ (g)$，为此构造集合

$B = \{ x | x \in A \land x \notin g(x)\}$。

- 显然, $B \subseteq A$, $B \in P(A)$。对任意的 $x \in A$, 有$x \in B \Leftrightarrow x \notin g(x)$, 则$B \neq g(x)$。
- 所以$B \notin ran(g)$, 但$B \in P(A)$,
- 所以g不是满射的。当然也不是双射的。
- 不存在双射函数$g: A \to P(A)$。

主观题 10分

设置

$B = \{x \mid x \in A \land x \notin g(x)\}$, B是否可以为$\emptyset$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

证明的核心在于**构造一个**$B \subseteq A$ 使得$B \notin ran(g)$，其定义即为 $\forall x, x \in A \to B \neq g(x)$

为此，我们给出B的构造 $B = \{x \mid x \in A \land x \notin g(x)\}$。

那么对于$\forall x \in A$，我们都有 $x \in B \Leftrightarrow x \notin g(x)$，这就足以说明 $\forall x \in A, B \neq g(x)$，也就完成了我们的证明。

可以看到，该证明**并不关心**B是否为$\emptyset$，但我们不妨以 $B = \emptyset$ 为例：

从$B = \emptyset$ 我们得到了 $\forall x \in A, x \in g(x)$，也就是说$g(x)$至少有 x 这个元素，所以 $g(x) \neq \emptyset, \forall x \in A$ 进而 $g(x) \neq B, \forall x \in A$ 即$B \notin ran(g)$

例：$A = \{1,2,3\}$,$g(1) = \{1\}, g(2) = \{2\}, g(3) = \{3\}, B = \emptyset$

但是$g(x) \neq \emptyset$，所以$B \neq g(x)$。

$g : A \to P(A)$

- 例：

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$P(A) = \{\Phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$$

- 设$B = \{1, 2\}$, 显然, $B \subseteq A$, $B \in P(A)$

  $g(x) = \{3\}$ 满足$B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin g(x)\}$

  $B \neq g(x)$，$B \notin ran(g)$, $g：A \to P(A)$,
- 总之，不管给出的函数g为何种情形，均可按此法构造集合B，B是$P(A)$中的元素，但不在g的值域中。
- 所以g不是满射的。

Cantor定理及其理论意义

- Cantor首次对无穷集合从定性与定量两方面进行了深入的研究
- Cantor定理揭示：
- N与R是有本质区别的；
- 必须了解无穷集合基数的本质区别；
- 著名的证明方法 — *Cantor Diagonal Method*

  已成为数学与计算机科学中证明“否定性结论”的强有力工具

12.3 有限集合与无限集合

定义12.3.1 （有限集合与无限集合）

- 集合A是有限集合，当且仅当存在$n \in N$，使$n \approx A$；
- 集合A是无限集合当且仅当A不是有限集合，即不存在$n \in N$使$n \approx A$。

12.3 有限集合与无限集合

- 定理12.3.1　不存在与自己的真子集等势的自然数。
- 推论12.3.1　不存在与自己的真子集等势的有限集合。
- 推论12.3.2　任何与自己的真子集等势的集合均为无限集合。N 和R都是无限集合。
- 推论12.3.3　任何有限集合只与唯一的自然数等势。

12.4 集合的基数

定义12.4.1 对任意的集合A和B，它们的基数分别用 $card(A)$ 和 $card(B)$ 表示，

并且 $card(A) = card(B) \Leftrightarrow A \approx B$。

（有时把 $card(A)$ 记作 $|A|$ 或 $\#(A)$。）

- 对有限集合A和$n \in N$，若$A \approx n$，则$card(A) = n$。

- 基数理解：
  - 集合的基数是刻画一个集合大小（或度量）的精确数学概念
  - 可以理解为一个集合中元素“个数”的抽象，是有穷集合元素个数的推广

12.4 集合的基数

12-4-1 （自然数集合N的基数）

- N的基数不是自然数，因为N不与任何自然数等势。
- 通常用Cantor的记法，把 $card(N)$ 记作 $\aleph_0$，读作“阿列夫零”。
- 因此，$card(Z)=card(Q)=card(N\times N)=\aleph_0$

12.4　集合的基数

12-4-2　（实数集合R的基数）

- R的基数不是自然数，也不是$\aleph_0$(因为$\neg R \approx N$）。
- 通常把card(R)记作　$\aleph_1$，　读作“阿列夫壹”。
- 因此，$card([0,1]) = card((0,1)) = card(R^+) = \aleph_1$

例: A={a, b, c}, B={{a}, {b}, {c}}.

$N_{偶}=\{n \mid n\in N \land n为偶数\}$,

$N_{奇}=\{n \mid n\in N \land n为奇数\}$

$card(A)=card(B)=3$

$card(N_{偶})=card(N_{奇})=\aleph_0$

$card(\ [0, 1]\ )=card(\ (0, 1)\ )=\aleph_1$

12.5　基数的算术运算

定义12.5.1

- 对任意的基数 k 和 l,

(1) 若存在集合 K 和 L，$K \cap L = \emptyset$, $card(K) = k$，$card(L) = l$，则 $k + l = card(K \cup L)$

(2) 若存在集合K和L，$card(K) = k$，$card(L) = l$，则 $k \cdot l = card(K \times L)$

(3) 若存在集合K和L，$card(K) = k$，$card(L) = l$，则 $k^l = card(L_K)$, 其中L_K是从L到K的函数的集合。

例：证明: $2+4=6$, $2\times 3=6$, $3^2=9$, $0^0=1$.

证: (1) 取$A=\{0, 1\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$, 则$A\cap B=\Phi$, 且

$card(A)=2$, $card(B)=4$,

$A\cup B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\approx 6$

$\therefore 2+4=card(A\cup B)=6$.

(2) 取$A=\{0, 1\}$, $B=\{0, 1, 2\}$, 则$card(A)=2$,

$card(B)=3$, $A\times B\approx 6$，$\therefore 2\times 3=card(A\times B)=6$.

(3) 取$A=\{1, 2\}$, $B=\{a, b, c\}$, 则$card(A)=2$, $card(B)=3$,

$A_B\approx 9$ $\therefore 3^2=card(A_B)=9$.

(4) 取$A=\Phi$, $B=\Phi$, 则$card(A)=card(B)=0$

$0^0=card(\Phi_\Phi)=card(\{\Phi\})=1$.

- 例 5. 对任意集合A, 有

$$\mathrm{card}(P(A))=2^{\mathrm{card}(A)}$$

证明: 由定义

$$2^{\mathrm{card}(A)}=\mathrm{card}(A_2), \text{其中}$$

$$A_2=\{f \mid f: A\to\{0, 1\}\}$$

$\because P(A)\approx A_2$,

$\therefore \mathrm{card}\,(A_2)=\mathrm{card}(P(A))$

即$\mathrm{card}(P(A))=\mathrm{card}(A_2)=2^{\mathrm{card}A}$

推论: (1) $\mathrm{card}\,(P(N))=2^{\aleph_0}$

(2) $\mathrm{card}\,(P(R))=2^{\aleph_1}$

12.5　基数的算术运算

定理12.5.1　对任意的基数k、l和m，

(1) $k+l=l+k$　　$f: A\cup B\to B\cup A$

$k\cdot l=l\cdot k$

(2) $k+(l+m)=(k+l)+m$

$k\cdot(l\cdot m)=(k\cdot l)\cdot m$

(3) $k\cdot(l+m)=k\cdot l+k\cdot m$

(4) $k^{(l+m)}=k^l\cdot k^m$

(5) $(k\cdot l)^m=k^m\cdot l^m$

(6) $(k^l)^m=k^{(l\cdot m)}$

通过构造函数来证明

12.6 基数的比较

定义12.6.1 对集合K和L，$card(K) = k$，$card(L) = l$，如果存在从K到L的单射函数，则称集合L优势于K，记作$K \leq L$，且称基数k不大于基数l，记作$k \leq l$。

定义12.6.2 对基数k和l，

- 如果$k \leq l$且$k \neq l$，
- 则称k小于l，记作$k < l$。

12.6　基数的比较

定理12.6.1

- 对任意的基数k、l和m

（1） $k \le k$　　　　自反性

（2） 若$k \le l$且$l \le m$，则 $k \le m$，传递性

（3） 若$k \le l$且$l \le k$，则 $k = l$ （施罗德-伯恩斯坦定理），

（4） $k \le l$或 $l \le k$　　　　小于等于的性质

偏序关系

12.6 基数的比较

例5:

- $R \approx N_2$, 即$R \approx P(N)$。

f: N→{0,1}   G: N_2 →[0,1]

G(f) = 0.10011…

- $R \approx N_2$

  证明: 只需证$R \le N_2$, 且$N_2 \le R$

  (1) 先证$R \le N_2$. 为此只需证$(0, 1) \le N_2$.

  构造函数$H: (0, 1) \to N_2$,

  对$\forall z \in (0, 1)$, 有$H(z) \in N_2 = \{f \mid f: N \to \{0, 1\}\}$

  其中z表示二进制无限小数

  $$H(z): N \to \{0, 1\}$$

  $\forall n \in N$, 取$H(z)(n)$为z的小数点后的第n位数

  显然, $z_1 \ne z_2$时, $H(z_1) \ne H(z_2)$

$\therefore$ H为单射, $\therefore (0, 1) \le N_2$.

(2) 证$N_2 \le R$. 只需证$N_2 \le [0, 1]$,

设$G: N_2 \to [0,1]$

$$\forall f \in N_2 = \{f \mid f: N \to \{0, 1\}\}$$

则f的函数值确定一个[0, 1]区间上的实数, 例如 f(0), f(1), f(2), f(3), …依次为1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, … 时, 取十进制数

$y=0.10111000\ldots$, 则$y \in [0, 1]$

即$G(f)=0.101110\ldots$

显然G是单射. $\therefore N_2 \le [0, 1]$

- 推论: $\aleph_1 = card(R) = card(N_2) = 2^{\aleph_0}$.

12.6　基数的比较

定理12.6.2

- 对任意的基数k、l和m，如果$k \le l$，

（1）$k + m \le l + m$

（2）$k \cdot m \le l \cdot m$

（3）$k^m \le l^m$ ，

（4）若$k \neq 0$ 或 $\mathrm{m} \neq 0$则$\mathrm{m}^k \le m^l$

12.6 基数的比较

定理12.6.3 对基数k和l，如果$k \leq l$、 $k \neq 0$，l是无限基数，则

$$k + l = k \cdot l = l = \max(k, l)$$

定理12.6.4

（1）对任意的无限集合K，$N \leq K$。

（2）对任意的无限基数k，$\aleph_0 \leq k$。

$\aleph_0$是最小的无限基数

例 5'.任给无限基数κ，都有κ·κ = κ

- 选择公理.pdf pages 12-13

6.4.1 定理 无限基数的倍等定理 任给无限基数κ，都有$\kappa+\kappa=\kappa$。

6.4.2 定理 无限基数的幂等定理 任给无限基数κ，都有$\kappa\cdot\kappa=\kappa$。

- |N×N|=|N|

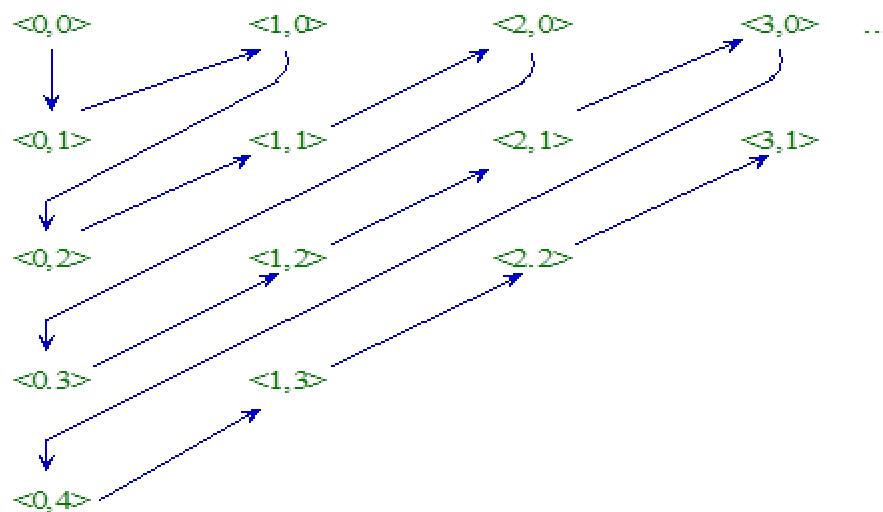
- |R×R|=|R|

$|N \times N|=|N|$

$$
\begin{array}{llllll}
\langle 0, 0\rangle & \langle 0, 1\rangle & \langle 0, 2\rangle & \langle 0, 3\rangle & \cdots & \langle 0, m\rangle \quad \cdots\cdots \\
\langle 1, 0\rangle & \langle 1, 1\rangle & \langle 1, 2\rangle & \cdots\cdots & & \\
\langle 2, 0\rangle & \langle 2, 1\rangle & \cdots\cdots & & & \\
\langle 3, 0\rangle & \cdots\cdots & & & & \\
\vdots & & & & & \\
\langle n, 0\rangle & & & & & \\
\vdots & & & & & \\
\vdots & & & & &
\end{array}
$$

- $f(\langle 0,0\rangle)=0$，$f(\langle 0,1\rangle)=1$，$f(\langle 1,0\rangle)=2$，$f(\langle 0,2\rangle)=3$，….
- 显然，$\langle m,n\rangle$所在的斜线上有$m+n+1$个点．在此斜线上方，各行元素分别有1，2，…，$m+n$个，这些元素排在$\langle m,n\rangle$以前．在此斜线上，m个元素排在$\langle m,n\rangle$以前．排在$\langle m,n\rangle$以前的元素共有$[1+2+\cdots(m+n)]+m$个．于是，双射函数$f:N\times N\rightarrow N$为

$$f(\langle m,n\rangle)=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}+m$$



$(0,1]\approx(0,1)$

- 构造双射函数 $f:(0,1]\to(0,1)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \text{当}x=1\\[2ex] \dfrac{x}{2} & \text{当}x=2^{-n},n=1,2,3,\ldots\\[2ex] x & \text{当}x\text{取其它值}\end{cases}$$

$|\mathbb{R}\times\mathbb{R}|=|\mathbb{R}|$

$|\mathrm{R}\times\mathrm{R}| = |(0, 1]\times(0, 1]| = |(0, 1]| = |\mathrm{R}|$

将 $x\in(0, 1]$表示为十进小数，注意有些x 的表示不唯一，如0.35 也可以表示为$0.34\dot{9}$。我们取后一种表达式，这种表达式的特征是不会在某一位后全是0，所以这种表达式称为x 的十进无限小数表达式，它是唯一的。特别地，1 的十进无限小数表达式是$0.\dot{9}$。这样，任给$x\in(0, 1]$，都有$x = 0.a0a1a2\cdots\cdots$。

$$|(0,1]\times(0,1]| = |(0,1]|$$

任给$\langle x, y\rangle \in (0, 1]\times(0, 1]$，将$x$, y 分别表示为

$x = 0.a0a1a2\cdots\cdots$和 $y = 0.b0b1b2\cdots\cdots$，

取$z = 0.\ a0b0a1b1a2b2\cdots\cdots$，

构造$(0, 1]\times(0, 1]$到$(0, 1]$的映射

g：$(0, 1]\times(0, 1]\rightarrow(0, 1]$　　$g(x, y) = z$

则 g 是单射，所以

$|(0, 1]\times(0, 1]| \leq |(0, 1]|$。

又 f：$(0, 1]\rightarrow(0, 1]\times(0, 1]$　$f(x) = \langle x, 1\rangle$是单射，所以$|(0, 1]| \leq |(0, 1]\times(0, 1]|$。

12.6　基数的比较

例6:

$$2^{\aleph_0} \le \aleph_0 * 2^{\aleph_0} \le 2^{\aleph_0} * 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

所以，　$\aleph_0 * 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

任给无限基数κ，都有$\kappa \cdot \kappa = \kappa$

定理12.6.3　对基数k和l，如果$k \le l$、$k \ne 0$，l是无限基数，则

$$k + l = k \cdot l = l = \max(k, l)$$

12.6 基数的比较

例7：对任意的无限基数k, $k^k = 2^k$。

证明

$$k^k \le (2^k)^k = 2^{k\cdot k} = 2^k \le k^k$$

所以， $k^k = 2^k$

定理12.6.2

- 对任意的基数k、l和m，如果$k \le l$，

  (1) $k + m \le l + m$

  (2) $k \cdot m \le l \cdot m$

  (3) $k^m \le l^m$ ，

多选题 1分

设置

下列集合中与自然数集$\mathbb{N}$等势的有

A $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$

B $\mathbb{N}_{\mathbb{R}}$

C $\{f \mid f: \{0,1\} \to \mathbb{N}\}$

D $\{\langle x, y\rangle, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}\}$

提交

多选题 1分

设置

对任意的基数$k \leq l$，下列说法正确的是

A $k < 2^k$

B $k \times k = k$

C $k^k = 2^k$

D $k \leq l \wedge l \leq k \Rightarrow k = l$

提交

设置

对任意的无限基数$k \leq l$，下列说法正确的是

A $k < 2^k$

B $k \times k = k$

C $k^k = 2^k$

D $k \leq l \wedge l \leq k \Rightarrow k = l$

提交

下列关于集合基数的说法正确的有

A 有理数集 $\mathbb{Q}$ 的每个子集都是可数的

B 任意两个可数集合的并集是可数集合

C 任意两个不可数集合的并集是不可数集合

D 存在无限集合A，使得$A \approx P(A)$

提交

12.7　可数集合与连续统假设

定义12.7.1 （可数集合）

- 对集合K，如果$card(K) \le \aleph_0$ ，
- 则称K是可数集合。

12.7　可数集合与连续统假设

定理12.7.1　（可数集的性质）

（1）可数集的任何子集是可数集。

（2）两个可数集的并集和笛卡儿积是可数集。

（3）若K是无限集合，则$P(K)$是不可数的。

（4）可数个可数集的并集是可数集

（该结论可表述为：若A是可数集，A的元素都是可数集，则$\cup A$是可数集）。

$$|\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}|=|\boldsymbol{N}|$$
$$|\boldsymbol{N}||\boldsymbol{N}|=|\boldsymbol{N}|$$

12.7　可数集合与连续统假设

- 已知的基数按从小到大的次序排列有

$$0,\quad 1,\quad \cdots,\quad n,\quad \cdots,\quad \aleph_0,\quad \aleph_1,\quad 2^{\aleph_1},\quad \cdots$$

$$0,\quad 1,\quad \cdots,\quad n,\quad \cdots,\quad \aleph_0,\quad \aleph_1,\quad \aleph_2,\quad \cdots,\quad \aleph_i,\quad \aleph_{i+1}\quad \cdots$$

其中$\aleph_{i+1} = 2^{\aleph_i}$

12.7 可数集合与连续统假设

12-7-1 （连续统假设 Continuum Hypothesis 1878年，由Cantor提出，简称CH假设）

- “连续统假设”就是断言不存在基数k，使

$$\aleph_0 < k < 2^{\aleph_0} (\aleph_1)$$

- 这个假设至今未经证明。
- 有人已证明：根据现有的（ZF)公理系统，既不能证明它是对的，也不能证明它是错的。

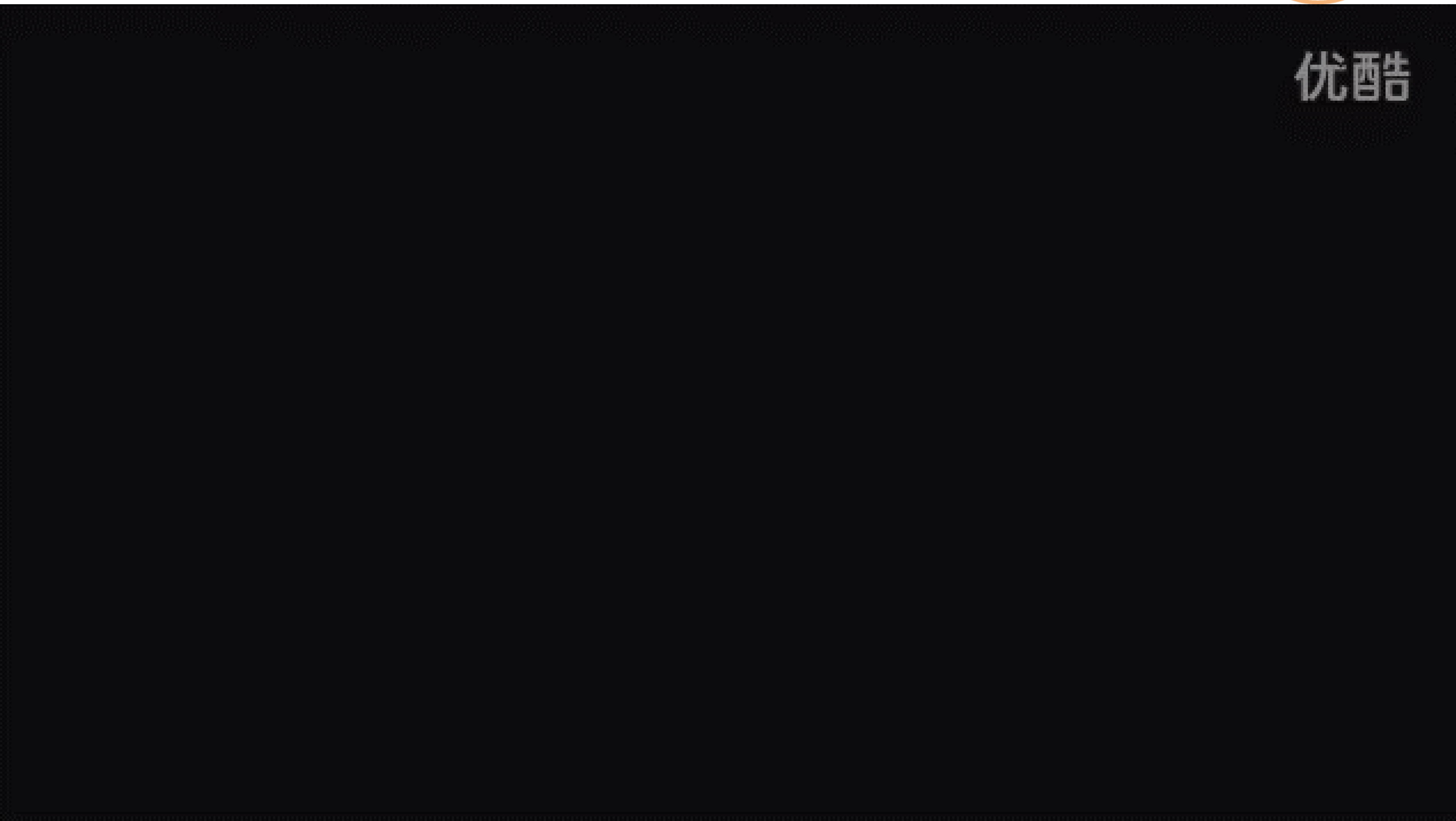
关于连续统假设的讨论

- 哥德尔和科恩已经证明，连续统假设和ZF公理系统既是独立的也是相容的。
- 也就是说，ZF公理加上连续统假设或者加上连续统假设的否命题，都不会导出任何矛盾。
- 这是一个确定无疑的结果，建立在严格的证明之上。

关于连续统假设的讨论

- 但上述结果并没有对连续统假设本身的真伪作出判断。
- 不过从80年代后期开始，有人通过构造连续统假设的等价命题，试图说明连续统假设是不合理的。如果这样的观点得到认可，则有理由认为ZF公理体系应该得到进一步加强。
- 但由于这些等价命题都不是“直观正确”或者“直观不正确”的，所以关于这个问题还存在争论。

康托乐园



本章主要内容小结

- 集合的等势
- 康托定理
- 自然数集与实数集的基数
- 典型的无穷集合的基数运算
- 连续统假设与主要结论


Happy
New Year