一个高阶极点函数的积分

求实积分$J_{r,n}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(r^2+x^2)^n}$, 这里$r>0$, n是正整数.

引理 设z_0是$f(z)$的n阶极点，即

$$f(z)=\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{C_{-(n-1)}}{(z-z_0)^{n-1}}+\cdots+\frac{C_{-1}}{(z-z_0)}+C_0+O(z-z_0),\quad C_{-n}\neq 0.$$

求留数$Res\{f(z),z_0\}=C_{-1}$.

解

$$(z-z_0)^nf(z)=C_{-n}+C_{-(n-1)}(z-z_0)+\cdots+C_{-1}(z-z_0)^{n-1}+C_0(z-z_0)^n+O(z-z_0)^{n+1}.$$

上式两边对z求$(n-1)$次导数，可得

$$\left[(z-z_0)^{n-1}f(z)\right]^{(n-1)}=C_{-1}(n-1)!+C_0n!(z-z_0)+O(z-z_0)^2.$$

令$z=z_0$ 可得

$$\left[(z-z_0)^nf(z)^{(n-1)}\right]\Big|_{z=z_0}=C_{-1}(n-1)!.$$

由此可得

$$C_{-1}=\left.\frac{\left[(z-z_0)^nf(z)^{(n-1)}\right]}{(n-1)!}\right|_{z=z_0}$$

先求积分$J_{1,n}$.

$$J_{1,n}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n},$$

取$R>1$, 作闭曲线$\Gamma_R:[-R,\,R]\cup C_R$, 这里$C_R: z=Re^{i\theta},\theta\in[0,\,\pi]$. 再作闭曲线积分:

$$\oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{(1+z^2)^n}=\int_{-R}^{R}\frac{dx}{(1+x^2)^n}+\int_{C_R}\frac{dz}{(1+z^2)^n}.$$

由复合闭路定理，上式左边等于

$$2\pi i\cdot\left(Res\left\{\frac{1}{(1+z^2)^n},\,i\right\}\right).$$

即下列等式成立：

$$\int_{-R}^{R}\frac{dx}{(1+x^2)^n}+\int_{C_R}\frac{dz}{(1+z^2)^n}=2\pi i\cdot\left(Res\left\{\frac{1}{(1+z^2)^n},\,i\right\}\right).\tag{0.1}$$

令$R\to+\infty$, 由于$\deg 1=0$, $\deg(1+z^2)^n=2n$, 被积函数是有理分式，其分子的次数为0，而其分母的次数为$2n$, 故其分母的次数比其分子的次数至少高2次. 因而

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{dz}{(1+z^2)^n}=0.$$

在(0.1)两边取极限，可得

$$2J_{1,n}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=2\pi i\cdot\left(Res\left\{\frac{1}{(1+z^2)^n},\,i\right\}\right).$$

即

$$J_{1,n}=\pi i\cdot\left(Res\left\{\frac{1}{(1+z^2)^n},\,i\right\}\right).$$

由引理，因$f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^n}=\frac{1}{(z+i)^n(z-i)^n}$，

$$\begin{aligned}
C_{-1}&=Res\left\{\tfrac{1}{(1+z^2)^n},\,i\right\}\\
&=\left[\tfrac{(z-i)^n f(z)}{(n-1)!}\right]^{(n-1)}\Bigg|_{z=i}\\
&=\left[\tfrac{(z-i)^n}{(z+i)^n(z-i)^n(n-1)!}\right]^{(n-1)}\Bigg|_{z=i}\\
&=\left[\tfrac{1}{(z+i)^n(n-1)!}\right]^{(n-1)}\Bigg|_{z=i}\\
&=\tfrac{1}{(n-1)!}\left[\tfrac{1}{(z+i)^n}\right]^{(n-1)}\Bigg|_{z=i}\\
&=\tfrac{(-1)^{n-1}n(n+1)(n+2)\cdots(2n-2)}{(z+i)^{2n-1}(n-1)!}\Big|_{z=i}\\
&=\tfrac{(-1)^{n-1}(2n-2)(2n-3)\cdots n}{(2i)^{2n-1}(n-1)!}\\
&=\tfrac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}i^{2(n-1)}i[(n-1)!]^2}\\
&=\tfrac{(2n-2)!}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2 i}.
\end{aligned}$$

由上式可得

$$J_{1,n}=\pi i\cdot C_{-1}=\frac{\pi i(2n-2)!}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2 i}=\frac{\pi C_{2n-2}^{n-1}}{2^{2n-1}}.$$

再求积分

$$\begin{aligned} J_{r,n} &= \int_0^{+\infty} \tfrac{dx}{(r^2+x^2)^n} \\ &= \tfrac{1}{r^{2n}} \int_0^{+\infty} \tfrac{dx}{[1+(\frac{x}{r})^2]^n} \\ &= \tfrac{1}{r^{2n-1}} \int_0^{+\infty} \tfrac{d\left(\frac{x}{r}\right)}{[1+(\frac{x}{r})^2]^n} \\ &\overset{t=\frac{x}{r}}{=} \tfrac{1}{r^{2n-1}} \int_0^{+\infty} \tfrac{dt}{(1+t^2)^n} \\ &= \tfrac{J_{1,n}}{r^{2n-1}} \\ &= \tfrac{\pi C_{2n-2}^{n-1}}{(2r)^{2n-1}} \\ &= \tfrac{\pi(2n-2)!}{(2r)^{2n-1}[(n-1)!]^2}. \end{aligned}$$