第八章 群

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

第八章 群

8.1 半群

8.2 群、群的基本性质

8.3 循环群 群的同构

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

8.6 正规子群与商群

8.7 群的同态、同态基本定理

8.6 正规子群与商群

- 如果存在群G的一个子群H，根据它的左陪集可以完成群的分解。
- 事实上，子群H的右陪集，也有对称的性质
- 但是，在许多情况下，群G的子群的左右陪集并不相等
- 思考：
  - 任意给定一个群G，它是否存在子群H，使得其左右陪集相等？
  - 子群$\{e\}$，子群G

8.6 正规子群与商群

定义8.6.1

- 设H是G的一个子群，如果对任意的$a \in G$，都有$aH = Ha$，则称H是G的一个正规子群（亦称不变子群），用符号$H \lhd G$表示。
- 因此，对正规子群H就不必区分其左右陪集，而简称为H的陪集

8.6 正规子群与商群

定理8.6.1

- 设H是G的子群，则以下几个条件等价：
  1. $H \lhd G$
  2. $\forall g \in G, gHg^{-1} = H$
  3. $\forall g \in G, gHg^{-1} \subseteq H$
  4. $\forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H$

8.6 正规子群与商群

证明：1. $H \lhd G$ $\Longrightarrow$ 2. $\forall g \in G, gHg^{-1} = H$

- 因为H为正规子群，因此$\forall g \in G, gH = Hg$
- 因此

$$gHg^{-1} = (gH)g^{-1} = (Hg)g^{-1} = H(gg^{-1}) = He = H$$

8.6 正规子群与商群

证明：2. $\forall g \in G, gHg^{-1} = H$ $\Rightarrow$

3. $\forall g \in G, gHg^{-1} \subseteq H$

- $\forall g \in G, \quad gHg^{-1} = H$

$\Downarrow$

- $\forall g \in G, \quad gHg^{-1} \subseteq H$

8.6 正规子群与商群

证明：3. $\forall g \in G, gHg^{-1} \subseteq H$ $\Longrightarrow$

4. $\forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H$

- $gHg^{-1} \subseteq H$

$$\Downarrow$$

- $\forall g \in G, h \in H,\ \ ghg^{-1} \in H$

8.6 正规子群与商群

证明：4. $\forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H$ $\Longrightarrow$ 1. $H \lhd G$

- 求证 $\forall g \in G, \quad gH = Hg$
- 据已知条件，$\forall g \in G, \forall h \in H$，都有$ghg^{-1} = h_1 \in H$
- 即$gh = h_1 g \in Hg$。因此$\forall g \in G, gH \subseteq Hg$
- 反之（取$\forall g^{-1} \in G$），易证 $\forall g \in G, Hg \subseteq gH$
- 因此 $\forall g \in G, \quad gH = Hg$

8.6 正规子群与商群

定理8.6.1

- 设H是G的子群，则以下几个条件等价：

  1. $H \lhd G$
  2. $\forall g \in G, gHg^{-1} = H$
  3. $\forall g \in G, gHg^{-1} \subseteq H$
  4. $\forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H$

8.6 正规子群与商群

定理8.6.2

- 设A, B是G的两个子群

1. 若$A \lhd G, B \lhd G$，则$A \cap B \lhd G, AB \lhd G$
2. 若$A \lhd G, B \leq G$，则$A \cap B \lhd B, AB \leq G$

8.6 正规子群与商群

证明：1. 若$A \lhd G, B \lhd G$，则$A \cap B \lhd G, AB \lhd G$

- $\forall h \in A \cap B \Longrightarrow h \in A, h \in B$
- $\forall g \in G,\ ghg^{-1} \in A,\ ghg^{-1} \in B$
- $\forall g \in G, \forall h \in A \cap B, ghg^{-1} \in A \cap B \Longrightarrow A \cap B \lhd G$
- 首先证明AB是G的子群
- $\forall h \in AB \Longrightarrow h = ab, a \in A, b \in B$
- $\forall g \in G, ghg^{-1} = gabg^{-1} = gag^{-1}gbg^{-1} = a'b' \in AB$
- $AB \lhd G$

$4. \forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H$

8.6 正规子群与商群

证明：2. 若$A \lhd G, B \leq G$，则$A \cap B \lhd B$, $AB \leq G$

- $\forall h \in A \cap B \Longrightarrow h \in A, h \in B$
- $\forall g \in B \Longrightarrow ghg^{-1} \in A$ ($A \lhd G$且$B \leq G$, 性质4), $ghg^{-1} \in B$
- $\forall g \in B, \forall h \in A \cap B, ghg^{-1} \in A \cap B \Longrightarrow A \cap B \lhd B$

4.$\forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H$

8.6 正规子群与商群

证明：2. 若$A \lhd G, B \leq G$，则$A \cap B \lhd B, AB \leq G$

- $e \in A, e \in B \Rightarrow e \in AB$　　单位元！　结合律！
- $\forall ab, a_1 b_1 \in AB$　　$A \lhd G \Rightarrow bA = Ab \Rightarrow ba = a'b$
- $(ab)(a_1 b_1) = a(ba_1)b_1 = a(a_1{}'b)b_1 = (aa_1{}')(bb_1) \in AB$　　封闭性！
- $\forall ab \in AB, (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = (a^{-1})'b^{-1} \in AB$
- $AB \leq G$　　证毕！　　逆元素！

8.6 正规子群与商群

定理8.6.2

- 设A,B是G的两个子群

1. 若$A \lhd G, B \lhd G$，则$A \cap B \lhd G, AB \lhd G$
2. 若$A \lhd G, B \leq G$，则$A \cap B \lhd B, AB \leq G$

正规子群的乘积仍然是正规子群！
正规子群的交集仍然是正规子群！

正规子群与普通子群的乘积是普通子群！
正规子群与普通子群的交集是普通子群的正规子群！

8.6 正规子群与商群

- 定理8.6.3:设H是G的一个正规子群，G/H表示H的所有陪集构成的集合，即

$$G/H = \{gH | g \in G\}$$

- 则G/H关于陪集乘法作成群。称之为G关于H的商群
- 例：$G = (Z, +), H = (\{km\}, +), G/H = (Z_m, +)$

- G是一个群，H是G的一个子群，利用H可以在G的元素之间确定一个二元关系R

$$aRb \quad 当且仅当\ ab^{-1} \in H$$

R是G中的一个二元关系，是等价关系

因此由等价关系就可以确定G的一个划分，其划分块就是子群H的陪集

8.6 正规子群与商群

证明：

陪集乘法对于G/H是一个二元运算

- $\forall aH, bH \in G/H, aHbH = \{ah_1bh_2 | h_1, h_2 \in H\}$
- $bH = Hb \Rightarrow ah_1bh_2 = a(h_1b)h_2 = a(bh_1')h_2 = (ab)(h_1'h_2) \in abH$
- 故$aHbH \subseteq abH$
- 又$\forall h \in H, (ab)h \in abH$, $(ab)h = (ae)(bh) \in aHbH$
- 故$abH \subseteq aHbH$

二元运算！

- 因此$\forall aH, bH \in G/H, aHbH = abH = G/H$

关于乘法是封闭的

8.6 正规子群与商群

证明（续）：

$\boxed{G/H\text{对陪集乘法成群}}$

- $\forall aH, bH, cH \in G/H$ 结合律！

  $(aHbH)cH = (abH)cH = (ab)cH = a(bc)H$

  $= aH(bc)H = aH(bHcH)$
- $eHaH = eaH = aH, aHeH = aeH = aH \Rightarrow eH = H$是单位元 单位元！
- $a^{-1}HaH = aa^{-1}H = eH$，因此$aH$的逆元为$a^{-1}H$

逆元素！

证毕！

8.6 正规子群与商群

定理8.6.3

- 设H是G的一个正规子群，G/H表示H的所有陪集构成的集合，即

$$G/H = \{gH | g \in G\}$$

- 则G/H关于陪集乘法作成群。称之为G关于H的商群。

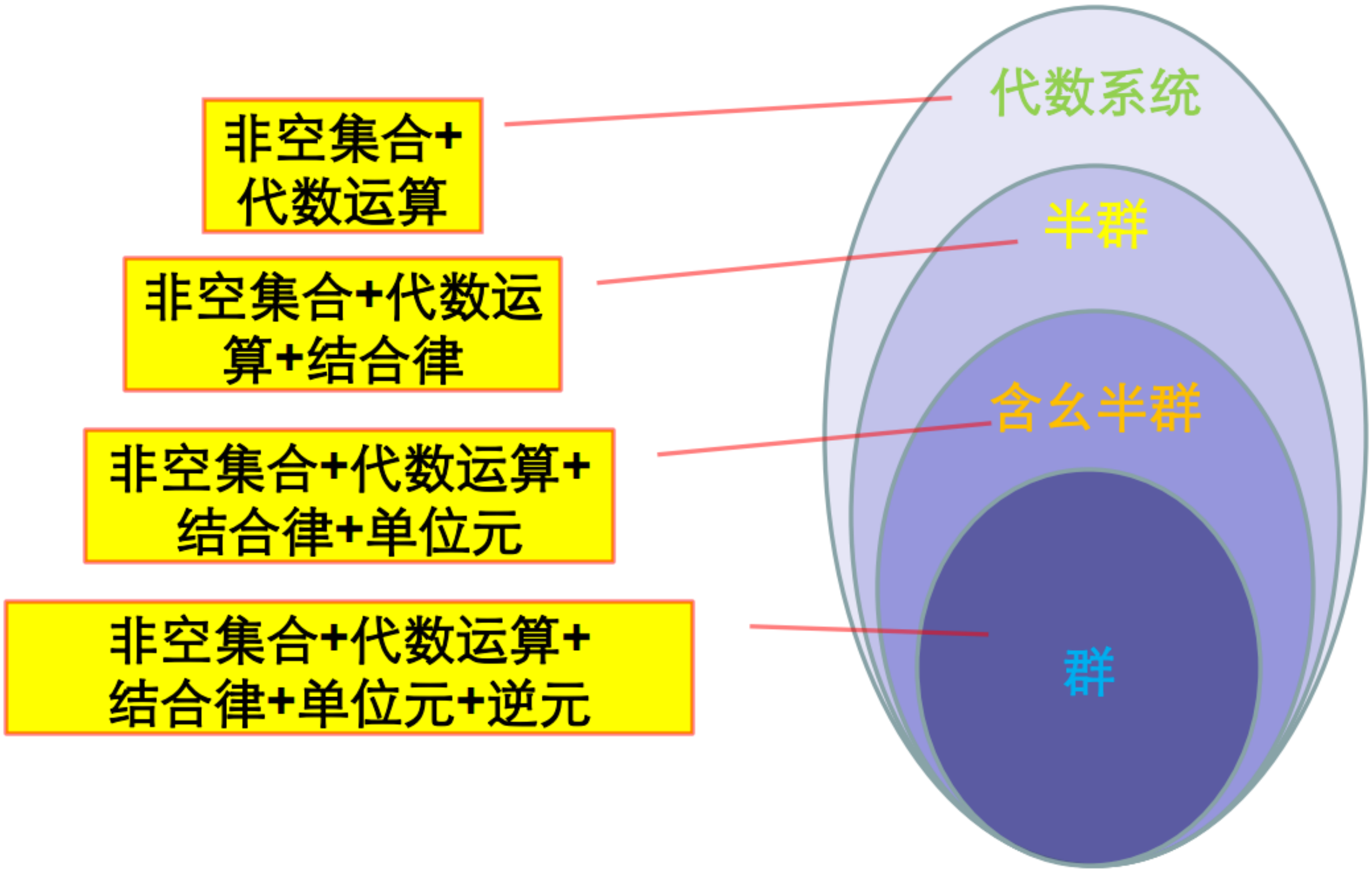
8.6 正规子群与商群

小结

- 正规子群
- 正规子群的等价性质
- 正规子群与子群的交、乘积性质
- 商群

离散数学2：代数结构部分总结

主要概念



非空集合+代数运算
非空集合+代数运算+结合律
非空集合+代数运算+结合律+单位元
非空集合+代数运算+结合律+单位元+逆元
代数系统
半群
含幺半群
群

群的定义

- 设G是非空集合，$\cdot$是G上的二元运算，若代数系统$(G,\cdot)$满足
  1. 适合结合律，即$\forall a,b,c\in G$,有$(ab)c=a(bc)$
  2. 存在单位元e，使得$\forall a\in G, ae=ea=a$
  3. G中的元素都是可逆元。即$\forall a\in G$,都$\exists a^{-1}\in G$，使得$aa^{-1}=a^{-1}a=e$
- 则称代数系统$(G,\cdot)$是一个**群**，或记为$(G,\cdot,e)$。
- 为了方便起见，常用G表示群$(G,\cdot,e)$

封结幺逆 → 凤姐咬你

半群

- 例： $(M_n(R),\times)$

  其中$M_n(R)$是全体$n\times n$实矩阵的集合

  $\forall A,B,C\in M_n(R)\qquad (A\times B)\times C=A\times(B\times C)$

  半群！　　幺群！

- 例：$(Z_m,\cdot)$

  设$Z_m=\{\overline{0},\overline{1},\cdots,\overline{m-1}\}$是模$m$同余的等价类集合，

$\cdot$是Z_m上的模m加法运算

半群！　　幺群！

半群

定义8. 1. 3

- 设$(M,\cdot,e)$ 是一个幺群，若$\cdot$ 适合交换律，则称M是交换幺群。

- 例：　$(R,+)$

$$\forall a,b,c\in R \qquad (a+b)+c=a+(b+c)$$

$$\forall a\in R \qquad a+0=0+a=a$$

半群！　　幺群！　　交换幺群！

半群

- 例： $(M_n(R), \times)$

  其中$M_n(R)$是全体$n \times n$实矩阵的集合

  $\forall A, B, C \in M_n(R) \qquad (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

  半群！ 幺群！

- 例：$(Z_m, \cdot)$

  设$Z_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{m-1}\}$是模$m$同余的等价类集合，

$\cdot$是Z_m上的模m加法运算

半群！ 幺群！ 交换幺群！

半群

定义8.1.4

- 设$(M,\cdot,e)$ 是一个幺群，若存在一个元素$g \in M$，使得任意的$a \in M$，a都可以写成g的方幂形式，即$a = g^m$（m是非负整数），则称$(M,\cdot,e)$ 是一个循环幺群，并且称g 是M的一个生成元。

半群

- 例： $(R,+)$

$$\forall a,b,c \in R \qquad (a+b)+c = a+(b+c)$$

$$\forall a \in R \qquad a+0 = 0+a = a$$

半群！ 幺群！ 交换幺群！ 循环幺群？ ×

- 例： $(N,+)$

循环幺群？ √

群的性质

性质1 设$(G,\cdot)$为群，则$\forall a\in G$，a的左逆元也是a的右逆元.

性质2 **设$(G,\cdot)$为群，则G的左单位元e也是右单位元.**

性质3 **设$(G,\cdot)$为群，则$\forall a,b\in G$，方程$a\cdot x=b$和$y\cdot a=b$在G中的解唯一.**

群的性质

性质4 设$(G,\cdot)$为群，则

(1) $\forall a\in G$，$(a^{-1})^{-1}=a$；

(2) $\forall a,b\in G$，$(a\cdot b)^{-1}=b^{-1}\cdot a^{-1}$.

性质5 群$(G,\cdot)$中的乘法满足消去律，即$\forall a,b,c\in G$ 有

(1) 若 $a\cdot b=a\cdot c$，则 $b=c$(左消去律)

(2) 若 $b\cdot a=c\cdot a$，则 $b=c$(右消去律)

群的性质

性质6 设G 为群，则G中的幂运算满足：

(1) $\forall a \in G$，$a^n a^m = a^{n+m}$，$n, m \in \mathrm{Z}$

(2) $\forall a \in G$，$(a^n)^m = a^{nm}$，$n, m \in \mathrm{Z}$

(3) 若G为交换群，则 $(ab)^n = a^n b^n$.

性质7 G为群，$a \in G$且 $|a| = r$. 设k是整数，则

(1) $a^k = e$当且仅当$r \mid k$.

(2) $O < a^{-1} > = O < a >$.

满足子群的条件

封闭性、单位元、逆元素

非空的

群、群的基本性质

定理8. 2. 6

- H是G的子群的充要条件是：
  1. H对G的乘法运算是封闭的，即$\forall a, b \in H$，都有$ab \in H$
  2. H中有单位元e'，且$e' = e$
  3. $\forall a \in H$，都有$a^{-1} \in H$，且a^{-1}是a在G中的逆元

群、群的基本性质

定理8.2.7

- G的非空子集H是G的子群的充要条件是$\forall a, b \in H$，都有$ab^{-1} \in H$

群、群的基本性质

例

- 设H_1, H_2是G的两个子群，则$H = H_1 \cap H_2$也是G的子群。

- 证明：
  - G单位元$e \in H_1, H_2$，所以$e \in H$，即H非空。
  - 任设$a, b \in H$，则$a, b \in H_1$， $a, b \in H_2$，由定理8.2.7有 $ab^{-1} \in H_1$，$ab^{-1} \in H_2$，因此$ab^{-1} \in H$，
  - 所以H是G的子群。

8.3 循环群 群的同构

定义8.3.1

- 若群G中存在一个元素a，使得G中的任意元素g，都可以表示成a的幂的形式，即

$$G=\{a^k|k\in Z\},$$

- 则称G是循环群，记作$G=\langle a\rangle$，a称为G的生成元。

由一个元素生成的群

8.3 循环群 群的同构

- 思考：
  - 循环群和循环幺群的区别是什么？

  - 例：

    $(N,+)$

    $(Z_m,\cdot)\quad Z_m=\{\overline{0},\overline{1},\cdots,\overline{m-1}\}$

8.3 循环群 群的同构

定义

- 对于循环群$G=\langle a\rangle$，若生成元a的阶数$|a|=n$，也可记为$O(a)$，则$G=\langle a\rangle=\{e,a,a^2,\cdots,a^{n-1}\}$，称为$n$阶循环群；
- 若$|a|$不存在，则$G=\langle a\rangle=\{e,a,a^{-1},a^2,a^{-2},\cdots\}$也是无限的，称为无限阶循环群

关于循环群的一个结论

- 所有的循环群都同构于(Z,+)或$(Z_n, +)$

- 当$o(a)$=∞时， $G \cong$ (Z,+)无限循环群
- 当$o(a)$=n时， $G \cong (Z_n, +)$ n阶循环群

8.3 循环群 群的同构

- 思考：
  - 循环群的生成元有几个？
  - 例：

$(Z, \ +)$ $\qquad 1, \ -1$

$(Z_6, \ \bullet)$ $\qquad Z_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$(\bar{5})^0 = \bar{0} \qquad (\bar{5})^2 = \bar{4} \qquad (\bar{5})^4 = \bar{2} \qquad (\bar{5})^6 = \bar{0}$

$(\bar{5})^1 = \bar{5} \qquad (\bar{5})^3 = \bar{3} \qquad (\bar{5})^5 = \bar{1}$

8.3 循环群 群的同构

定理8.3.1

- 设$G = \langle a \rangle$，则
- 1. 若$o\langle a \rangle = \infty$，则$G$中只有生成元$a$或$a^{-1}$
- 2. 若$o\langle a \rangle = n$，则G中有$\varphi(n)$个生成元
  - 其中$\varphi(n)$是欧拉函数，它表示小于n且与n互素的正整数个数。

8.3 循环群 群的同构

定理8.3.2

- 设$G = \langle a \rangle$是循环群，则
  1. G的子群H都是循环群。
  2. 若G是无限群，则子群$H(H \neq \{e\})$也是无限群，若G是有限群时，设$|G| = n$，且a^k是H中a的最小正幂，则$|H| = n/k$。

8.3 循环群 群的同构

定义8.3.2

- 设$(G,\cdot)$和$(G',*)$是两个群，

  $f: G \to G'$是双射，如果$\forall a, b \in G$都有

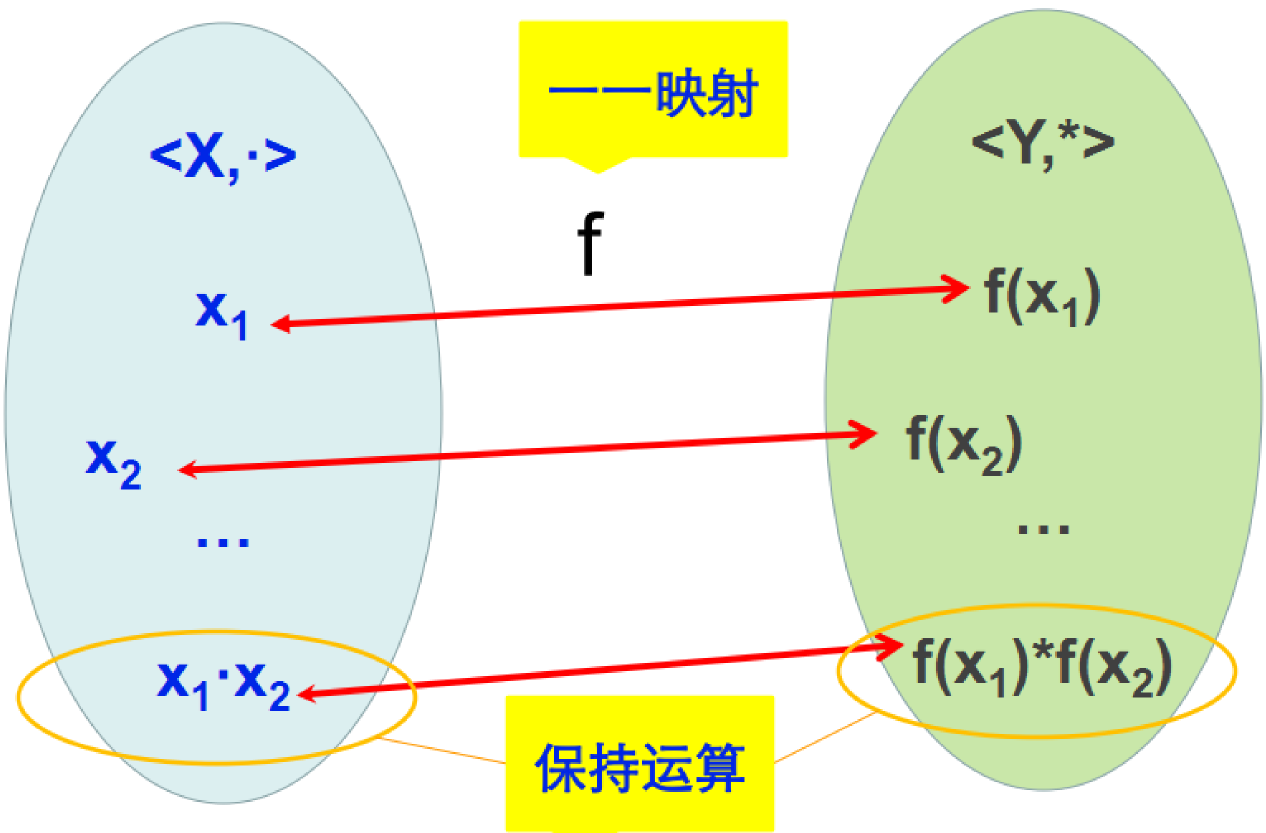
$$f(ab) = f(a) * f(b)$$

- 则称f是G到G'的一个同构，记作$G \cong G'$

群同构的充分条件：1. 双射 2. 保持运算！

8.3 循环群 群的同构

同构示意图



8.3 循环群 群的同构

例：

- 设$G = (R^+,\times), G' = (R,+)$，令$f: x \to lnx$

  则f是从G到G'的一个双射，且$\forall x, y \in G$

  $$f(x \times y) = \ln(xy) = lnx + lny = f(x) + f(y)$$

  因此，$G \cong G'$

8.3 循环群 群的同构

定理8.3.4

- 设G是循环群，a为生成元
- 1. 若$O\langle a\rangle = \infty$，则$G$与$(\mathrm{Z},+)$同构
- 2. 若$O\langle a\rangle = n$，则G与$(Z_n,+)$同构

8.3 循环群 群的同构

定理8.3.5

- 设G是一个群，$(G',*)$是一个代数系统，如存在G到G'的双射f，且保持运算，即$\forall a, b \in G$，有

$$f(ab) = f(a) * f(b)$$

则G'也是一个群。

依据同构映射，可以做群的判定！

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定义8.4.0

- 设$A=\{a_1,a_2,\cdots\}$是一个非空集合，A到A的一个映射f称为A的一个变换，记做

$$f\colon\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ f(a_1) & f(a_2) & \cdots \end{bmatrix}$$

- 其中，恒等变换记为I

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 记集合A上全部变换的集合为$M(A)$
  - 若$|A| = n$，则$|M(A)| = n^n$

- 如果变换是双射的话，我们称之为一一变换。

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 对于A中的两个变换f,g，定义A的另一个变换gf为：

$$gf(a) = g\big(f(a)\big) \qquad \forall a \in A$$

- 称为变换f与g的乘积（或乘法运算）

- 对于代数系统$(M(A),\cdot)$：
  - 变换乘法运算符合结合律
  - $fI = If = f$

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定义8.4.1

- 非空集合A的所有一一变换关于变换的乘法所作成的群叫做A的一一变换群，用$E(A)$表示，$E(A)$的子群叫做变换群

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 当集合A为有限集合时，即$|A| = n$时，A中的一个一一变换称为一个n元置换，由置换构成的群称为置换群。

- 思考：

  置换群与变换群的区别？

  变换群 一个集合A的一一变换所组成的群

  置换群 一个有限集合A的一一变换所组成的群

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 对于n元置换，可表示为：

$$\sigma:\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

- 显然，$\sigma(1), \sigma(2), \cdots \sigma(n)$就是$1\sim n$的一个排列。
- 反之，$1\sim n$ 的一个排列，唯一对应一个 n 元置换，则共有$n!$个n元置换。
- 用S_n表示这$n!$个n元置换的集合

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 例
  - $A=\{1,2,3\}$，则$S_3=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_6\}$，其中

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix},\ \sigma_2=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{bmatrix},\ \sigma_3=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{bmatrix},$$
$$\sigma_4=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix},\sigma_5=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix},\ \sigma_6=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix},$$

  - 计算置换乘法$\sigma_2\sigma_4$： $i\to\sigma_2(\sigma_4(i))$
  - $\sigma_2\big(\sigma_4(1)\big)=\sigma_2(2)=3,\cdots$

$$\sigma_2\sigma_4=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}$$

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定义8.4.2

- S_n对于置换乘法构成群，称为n次对称群。
- S_n的子群称为n元置换群。

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 对于一个置换σ，如果满足
$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \cdots, \sigma(i_l) = i_1$$
- 则称$(i_1, i_2, \cdots, i_l)$是一个长度为l的轮换
- 当$l = 1$时，称为恒等置换
- 当$l = 2$时，称为对换

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 例：
  - 置换 $\sigma=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&1&7&6&5&2&3\end{bmatrix}$

$$\begin{cases}\sigma(1)=4\\ \sigma(4)=6\\ \sigma(6)=2\\ \sigma(2)=1\end{cases} \Rightarrow (4,6,2,1) \qquad \begin{cases}\sigma(3)=7\\ \sigma(7)=3\end{cases} \Rightarrow (7,3)$$

$$\left[\sigma(5)=5\right. \Rightarrow (5)$$

  - 因此，该置换可写为：(4,6,2,1)(7,3)(5)
  - 通常，恒等置换不写入置换的表达式中

$$(4,6,2,1)(7,3)$$

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定义8.4.3

- 设α,β是S_n中的两个轮换，如果α和β中的元素都不相同，则称α和β是不相交的。

定理8.4.1

- 设α,β是两个不相交的轮换，则$\alpha\beta=\beta\alpha$。

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定理8.4.2

- S_n中任意一个n元置换，一定可以表示成不相交轮换的乘积的形式，并且表示法是唯一的。即：
  $\forall \sigma \in S_n, \sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_t$
- 假如 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_t = \tau_1, \tau_2 \cdots \tau_l$
- 则有 $\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_t\} = \{\tau_1, \tau_2 \cdots \tau_l\}$

- 事实上，一个置换如果写为可相交的轮换的乘积，表达式将是无穷多个

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

例

- S_4的全部置换可用轮换及其乘积表示为：
- 1. 都不变：$e = (i)$
- 2. 两个元素变：$(1\ 2), (3, 4), (1\ 3), (2\ 4), (1\ 4), (2\ 3)$
- 3. 三个元素变：$(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3),$
  $(1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)$
- 4. 四个元素变：$(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4),$
  $(1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)$
- 5. 四个元素变：$(12)(34), (13)(24), (14)(23)$

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

引理8.4.1

- 设$\sigma = (i_1, i_2, \cdots, i_k)$是$S_n$上的$k$阶轮换，$k > 1$，则

$$\sigma = (i_1\ \ i_k)(i_1\ \ i_{k-1})\cdots(i_1\ \ i_2)$$

- 比如，任意一个轮换σ，都可以表示为对换的乘积，且可以无穷多个。例如：

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4) = (2\ 3)(3\ 4)(4\ 1) = (1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$$

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

- 对于一个n元置换：
  - 表示成不相交轮换的乘积时，表示法是唯一的
  - 表示为对换乘积时，表示法并不唯一
  - 对换的个数也不是确定的

- 问题：
  - 一个置换表示为对换乘积时，确定的是什么？

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定义8.4.4

- 设$i_1 i_2 \cdots i_n$是$1,2,\cdots,n$的一个排列，若$i_k > i_l$且$k < l$，则称$i_k i_l$是一个逆序
- 排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数

- 例如：25431的逆序数？
  - 21, 54, 53, 51, 43, 41, 31共7个
  - 25431的逆序数为7

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

引理8.4.2

- 设$\sigma \in S_n$且$\sigma(j) = i_j, j = 1,2,\cdots,n$，则在$\sigma$的对换表示中，对换个数的奇偶性与排列$\pi = i_1 i_2 \cdots i_n$的逆序数奇偶性相同，记为$N(\sigma)$
- 如果$N(\sigma)$为奇数，则称σ为奇置换，否则称之为偶置换。

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定理8.4.3

- N次对称群S_n中所有偶置换的集合，对于S_n中的置换乘法构成子群，记为A_n，称为交错群，若$n \geq 2$，则$|A_n| = \frac{1}{2}n!$

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

定理8.4.4（Cayley定理）任意群G与一个变换群同构

- 任何一个群G，都与一个变换群同构

推论：

- 设G是n阶有限群，则G与S_n的一个子群同构。
- 任何一个有限群G，都与一个置换群同构

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

定义8. 5. 1

- 设H是群G的一个子群，对任意的$a \in G$，集合
$$aH = \{ah|h \in H\}$$
- 称为子群H在G中的一个左陪集。同理，H在G中的一个右陪集是
$$Ha = \{ha|h \in H\}$$

思考：左陪集和右陪集是否相等？

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

Lagrange定理

- 设G是有限群，H是G的子群，则

$$[G:1] = [G:H][H:1]$$

有限群中，子群的阶只能是群的阶的因子！

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

- 推论1　　设有限群G的阶为n，则G中任意元素的阶都是n的因子，且适合$x^n = e$。
- 推论2　　阶为素数p的群G是循环群。
- 推论3　　设A, B是群G的两个有限子群，则

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$$

利用Lagrange定理可以确定一个群内的可能存在的子群、元素的阶等，从而搞清一个群的结构

根据$|G|$的因子来确定可能存在子群的阶数或元素的阶数

8.6 正规子群与商群

定义8.6.1

- 设H是G的一个子群，如果对任意的$a \in G$，都有$aH = Ha$，则称H是G的一个正规子群（亦称不变子群），用符号$H \lhd G$表示。
- 因此，对正规子群H就不必区分其左右陪集，而简称为H的陪集

8.6 正规子群与商群

定理8.6.1

- 设H是G的子群，则以下几个条件等价：

  1. $H \lhd G$
  2. $\forall g \in G, gHg^{-1} = H$
  3. $\forall g \in G, gHg^{-1} \subseteq H$
  4. $\forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H$

定理8.6.2

- 设A, B是G的子群，则：

  1. $A \lhd G$，$B \lhd G$，则$A \cap B \lhd G$， $AB \lhd G$
  2. $A \lhd G$， $B \leq G$，则$A \cap B \lhd B$， $AB \leq G$

谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn