第四章习题

4. 下列说法是否正确？为什么？

1) 每一个幂级数在它的收敛圆周上处处收敛;

2) 每一个幂级数的和函数在收敛圆内可能有奇点;

3) 每一个在z_0连续的函数一定可以在z_0的邻域内展开成泰勒级数.

5. 幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-2)^n$能否在$z=0$收敛而在$z=3$发散？

7. 设$c_n = a_n + ib_n,\ a_n, b_n \in R, n \geq 0$. 若级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$的收敛半径是$R$, 级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$的收敛半径是$R_1$, 级数$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$的收敛半径是$R_2$, 证明$R = \min\{R_1,\, R_2\}$.

(提示:$|(Rec_n)z^n| \leq |c_n||z^n|$).

9. 设$r > 0$, 若级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n$收敛，而$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| r^n = +\infty$,

证明级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$的收敛半径是$r$.

10. 如果级数$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$在它的收敛圆的圆周上一点$z_0$处绝对收敛，证明它在收敛圆所围的闭区域上绝对收敛.

11. 把下列各函数展开成z的幂级数，并指出它们的收敛半径：

$$1)\quad \frac{1}{1+z^3};\qquad 2)\quad \frac{1}{(1+z^2)^2};\qquad 6)\quad e^{z^2}\sin z^2.$$

12. 求下列各函数在指定点z_0处的泰勒展开式，并指出它们的收敛半径：

$$1)\quad \frac{z-1}{z+1},\quad z_0 = 1;\qquad 2)\quad \frac{z}{(z+1)(z+2)},\quad z_0 = 2;\qquad 3)\quad \frac{1}{z^2},\quad z_0 = -1.$$

16. 把下列个函数在指定的圆环域内展成Laurent级数：

$$2)\quad \frac{1}{z(1-z)^2},\quad 0 < |z| < 1; 0 < |z-1| < 1;$$

3) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $0<|z-1|<1$; $1<|z-2|<+\infty$;

5) $\dfrac{1}{z^2(z-i)}$, 在以i为中心的圆环域内.