期末复习2

Jordan标准形 + 矩阵函数

(请对照作业 + 习题课 + 答疑)

1. 求Jordan标准形 J_A

设 $A\in M_n(\mathbb{C})$, $|\lambda I_n - A| = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$ $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 互不相同. 则关于 λ_i 的 k 阶Jordan块个数 $(k\geq 1)$

$$= r(A-\lambda_i I_n)^{k-1} - 2r(A-\lambda_i I_n)^k + r(A-\lambda_i I_n)^{k+1}$$

关于 λ_i 的阶数 $\geq k$ 阶的Jordan块个数

$$= r(A-\lambda_i I_n)^{k-1} - r(A-\lambda_i I_n)^k$$

注: 若 λ_i 不是特征值. 以上结论也适用(均为0)

例1 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$. 则 $r(A^2)\geq 2r(A)-n$.

证明: A 关于 $\lambda=0$ 的1阶Jordan块个数 $= n-2r(A)+r(A^2)\geq 0$

例2. $A=\begin{pmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ 0 & a & a & \cdots & a \\ 0 & 0 & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$ $a\neq 0$, 求Jordan标准形

$r(A-aI_n)=n-1 \Rightarrow n-r(A-aI_n)=1$

$$A\sim\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}.$$

例3. $A\in M_n(\mathbb{C})$, $r(A)=1$. 则 $A=uv^T$. $u,v\in\mathbb{C}^n$

① $trA=v^Tu\neq 0$

$$J_A=\begin{pmatrix} v^Tu & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}$$

② $trA=0$

$$J_A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix}.$$

2. 求过渡阵P. $P^{-1}AP=J_A$

Step1. 求Jordan链结构 (由Jordan标准形)

Step2. 求 $(A-\lambda_i I_n)\vec{x}=\vec{0}$ 的通解. 由此计算出 Jordan链的第一个向量

Step3. 求出整个Jordan链.

例 $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6\end{pmatrix}$ 求 J_A 和 P.

解: (1) $|\lambda I_3-A|=(\lambda+1)^3$

$\lambda=-1$ 的几何重数 $=3-r(A+I_3)=2$

$$\Rightarrow J_A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

(2) Step1. Jordan链结构

$(A+I_3)\vec{v}_1$	
$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$

Step2. 求 $(A+I_3)\vec{x}=\vec{0}$ 的通解：

$$c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}=c_1\vec{\beta}_1+c_2\vec{\beta}_2$$

Jordan 链首向量 $\vec{\alpha}_1=(A+I_3)\vec{v}_1$，$\vec{\alpha}_2=\vec{v}_2$ 满足

(a) $\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$ 是 $(A+I_3)\vec{x}=\vec{0}$ 的一组基础解系；

(b) $\vec{\alpha}_1\in C(A+I_3)$，$\vec{\alpha}_2\notin C(A+I_3)$

检查

$$\left(A+I_3 \;\vdots\; c_1\vec{\beta}_1+c_2\vec{\beta}_2\right)=\left(\begin{array}{ccc:c}3&6&-15&-2c_1+5c_2\\1&2&-5&c_1\\1&2&-5&c_2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&-5&c_1\\0&0&0&c_2-c_1\\0&0&0&-5c_1+5c_2\end{array}\right)$$

$\Rightarrow c_1\vec{\beta}_1+c_2\vec{\beta}_2\in C(A+I_3)\Leftrightarrow c_1=c_2$

$$\left.\begin{array}{l}\text{令 } c_1=c_2=1\text{，得 } \vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\\ \text{令 } c_1=0,\ c_2=1\ \text{ 得 } \vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\end{array}\right\}\ \vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2 \text{ 满足 (a), (b)}$$

Step3. 求出整个 Jordan 链.

$$(A+I_3)\vec{x}=\vec{\alpha}_1\Rightarrow\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

总结：$P=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=J_A$.

注：若 $A\in M_4(\mathbb{C})$，且 $J_A=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 & & \\ 0 & \lambda_0 & & \\ & & \lambda_0 & 1 \\ & & 0 & \lambda_0\end{pmatrix}$，（2个Jordan块）

由 $(A-\lambda_0 I_4)\vec{x}=\vec{0}$ 求出两个无关向量 $\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$

则 $(A-\lambda_0 I_4)\vec{x}=\vec{\alpha}_1$，$(A-\lambda_0 I_4)\vec{x}=\vec{\alpha}_2$ 必有解

（否则与 Jordan 标准形结构矛盾！）

这样节省了从通解中找 Jordan 链首向量过程.

3. 极小多项式

设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，$|\lambda I_n-A|=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$ $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$

互不相同，则 $m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$ 满足

① $1\le m_i\le n_i$ $\quad i=1,\cdots,s$；

② $m_i=$ 关于 λ_i 的 Jordan 块最大阶数；

③ $m_A(A)=O_{n\times n}$，若 $f(A)=0$，则 $m_A(\lambda)\mid f(\lambda)$.

例 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，$A^2-3A+2I_n=0$，则

$m_A(\lambda)\mid\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2)\Rightarrow$ 可能的情形：

① $m_A(\lambda)=\lambda-1\Rightarrow A=I_n$

② $m_A(\lambda)=\lambda-2\Rightarrow A=2I_n$

③ $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)\Rightarrow A\sim\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2\end{pmatrix}$ （s个1，t个2） $s+t=n$.

性质: A 可对角化 $\Leftrightarrow m_A(\lambda)=0$ 无重根

$|\lambda I_n - A| = m_A(\lambda) \Leftrightarrow n_i = m_i \quad i=1,\cdots,s$

$\Leftrightarrow$ 关于 λ_i 的 Jordan 块只有1个, $i=1,\cdots,s$.

例 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$, A 可逆, 由 $m_A(\lambda)$ 求出 $m_{A^{-1}}(\lambda)=?$

(见作业).

4. 判定矩阵相似

A 与 B 相似 $\Leftrightarrow J_A = J_B$.

例 $A, B\in M_n(\mathbb{C})$, $A^n=B^n=O$, $A^{n-1}\neq O$, $B^{n-1}\neq O$,

则 A 与 B 相似

证明: $m_A(\lambda)=m_B(\lambda)=|\lambda I_n - A| = |\lambda I_n - B| = \lambda^n$

$\Rightarrow$ 关于 $\lambda=0$ 的 Jordan 块只有1个

$$\Rightarrow A, B \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

例 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$, $A^n = O_{n\times n}$. 则 e^A 和 I_n+A 相似.

证明: $J_A = \begin{pmatrix} J_{0,n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{0,n_t} \end{pmatrix} \qquad P^{-1}AP = J_A$

$n_1+\cdots+n_t = n$

$$e^{J_{0,n_1}} = \begin{pmatrix} e^0 & e^0 & \frac{1}{2}e^0 & \cdots & \frac{1}{(n_1-1)!}e^0 \\ & e^0 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2}e^0 \\ & & & \ddots & e^0 \\ 0 & & & & e^0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e^0 & 1 & & \\ & e^0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & e^0 \end{pmatrix}$$

$$= I_{n_1} + J_{0,n_1}$$

$$\Rightarrow e^{J_A} \sim I_n + J_A$$

$$\Rightarrow e^A \sim e^{J_A} \sim I_n + J_A \sim I_n + A.$$

5. 求矩阵函数

5.1 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ $m_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda-\lambda_s)^{m_s}$ $P^{-1}AP = J_A$

$f(z)$ 是一个复函数，且 $f^{(j)}(\lambda_i)$ 可定义，$j = 0, 1, \cdots, m_i - 1$
$i = 1, \cdots, s$

则 $f(A) = f(PJ_AP^{-1}) = Pf(J_A)P^{-1}$

$f(J_A)$ 定义略.

例如：若 $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$，则 $f(A) \sim \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$

例. 设 $J_{\lambda_0,k} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix}_{k\times k}$，设 $f'(\lambda_0) \neq 0$，求 $f(J_{\lambda_0,k})$ 的 Jordan 标准形.

解：令 $B=f(J_{\lambda_0,k})$ 则 $r(B-f(\lambda_0)I_k)=r-1$

$$\Rightarrow J_B=\begin{pmatrix} f(\lambda_0) & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & f(\lambda_0) \end{pmatrix}.$$

例如 $f(z)=e^z$ 满足 $f'(\lambda_0)\neq 0$.

例. 若 $e^A\sim I_n+A$，问：是否存在 B, $I_n+A=e^B$

解：$P^{-1}e^AP=I_n+A$，则 $e^{P^{-1}AP}=P^{-1}e^AP=I_n+A$.

例. 一类型题目：设 $A\in M_n(\mathbb{C})$, $f(z)$ 复函数，是否存在 B,

$$f(B)=A\ ?$$

例如：

设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，A 可逆，则存在 B，$B^2=A$.

(参见附加题4)

5.2. 若 $f(z)$ 在 A 的谱上可定义，则存在次数 $<\deg m_A(\lambda)$ 的多项式 $P(\lambda)$. 使得 $f(A)=P(A)$.

参见第3次习题课或答疑.

5.3. $e^A=I_n+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots$

$\sin A$, $\cos A$ 的幂级数展开.

基本性质: ① 若 $AB=BA$, $e^A \cdot e^B = e^{A+B} = e^B \cdot e^A$

② $|e^A| = e^{tr(A)}$.

5.4. 求解微分方程组 $x'(t) = Ax(t)$

定理 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, $P^{-1}AP = J_A$, 则 $x'(t) = Ax(t)$ 的一般解是 $Pe^{J_A t}$ 的列向量的任意线性组合.

求 e^{At} 的方法 (略)