# 第一次习题课（一元多项式）答案

一、判断下列结论是否正确，并说明理由。

设$0 \neq f(x),\ g(x),\ h(x) \in F[x]$ ，$K$为$F$的扩域.

(1) $f(x) \mid g(x)$在$F[x]$中成立当且仅当$f(x) \mid g(x)$在$K[x]$中成立.

答：正确。在$F$中做带余除法和在$K$中做带余除法得到的商式和余式一样。

(2) 在$F[x]$和$K[x]$中最大公因式$(f(x), g(x))$相同。

答：正确。通过辗转相除可以得到一个最大公因式，在$F$上和$K$上对$f(x)$和$g(x)$作辗转相除，过程完全一样，故$f(x),\ g(x)$在$F$上的最大公因式也是它们在$K$上的最大公因式，故在$F[x]$和$K[x]$上首1的最大公因式$(f(x), g(x))$相同。

(3) 在$F[x]$和$K[x]$中$f(x)$、$g(x)$的最大公因式相同。

答：不对。取属于$K$但不属于$F$中的一个非零元去乘$(f(x), g(x))$为在$K[x]$中的最大公因式，但不为$F[x]$上的。

(4) 若$f(x)$、$g(x)$在$C$上有公共根，则在$F[x]$上$(f(x), g(x)) \neq 1$.

答：正确。

(5) $f(x)$在$C$上有重根当且仅当在$F[x]$上$(f(x), f'(x)) \neq 1$。

答：正确。

(6) 设$f(x)$为$F$上的不可约多项式，且$f(x), g(x)$有公共的复根，则$f(x) \mid g(x)$.

答：正确。

(7) $f(x), g(x)$的公共根恰好为$(f(x), g(x))$的根。

答：正确。

(8) $\alpha \in C$为$f(x)$的2重根当且仅当$f'(\alpha) = 0, f''(\alpha) = 0$，但$f'''(\alpha) \neq 0$.

答：不对。应该为当且仅当$f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0$，但$f''(\alpha) \neq 0$

(9) $(f(x), g(x)h(x)) = 1$ 当且仅当$(f(x), g(x)) = 1, (f(x), h(x)) = 1$.

答：正确。

(10) $(f(x), g(x)h(x)) = (f(x), g(x))(f(x), h(x))$.

答：不对。

(11) 若$x - 1 \mid f(x^n)$, 则$x^n - 1 \mid f(x^n)$.

答：正确。

(12) 若$x + 1 \mid f(x^n)$, 则$x^n + 1 \mid f(x^n)$.

答；不正确。

二、设$a, b, c$ 是三个不同的数，用$x - a$，$x - b$，$x - c$ 除一元多项式$f(x)$ 的余式依次为$r; s; t$，试求用$g(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ 除$f(x)$ 的余式.

解：设$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，可设$r(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$.则$r(a)=f(a)=r$，$r(b)=f(b)=s$，$r(c)=f(c)=t$. 故有如下方程：

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix}.$$

可求得$a_0, a_1, a_2$.

三、求$f(x)=x^4+3x^3+2x^2+3x+1$，$g(x)=x^3+2x^2-2x-1$的公共根。

解：即为$(f(x),g(x))=x^2+3x+1$的根。

四、求$f(x)=x^5-3x^4+2x^3-x^2-3x+4$在$Q$上的标准分解式。

解：先求得有理根为$1,-1$，故$f(x)=(x^2-1)(x^3-3x^2+3x-4)$，用艾森斯坦判别法知$x^3-3x^2+3x-4$在$Q$上不可约（不能直接用艾氏判别法，但做替换$x=y+1$后可用）。

五、设$0\neq f(x)$, $q(x)\in F[x]$，其中$q(x)$为$F$上首1的不可约多项式，证明：$q(x)$为$f(x)$的$n$重不可约因式的充要条件是$q(x)\mid f(x), q(x)\mid f'(x), ..., q(x)\mid f^{(n-1)}(x)$，但$q(x)\dagger f^{(n)}(x)$.

证明：用求导的性质。

六、证明：(1) $f(x)\mid g(x)$ 当且仅当$f(x)^n\mid g(x)^n$ ($n$为正整数).

(2) $(f(x),g(x))=1$ 当且仅当$(f(x)^m,g(x)^n)=1$.

证明：(1) $\Longrightarrow$. 显然。

$\Longleftarrow$. 假设$f(x)=rq_1(x)^{n_1}\cdots q_l(x)^{n_l}$，$g(x)=sq_1(x)^{m_1}\cdots q_l(x)^{m_l}$，其中$q_i(x)$为两两不同的首1的不可约多项式，$n_i\geq 0$，$m_i\geq 0$。由$f(x)^n\mid g(x)^n$可得到$n_i\leq m_i$。故$f(x)\mid g(x)$。

(2) $\Longrightarrow$. 反证。设$(f(x)^m,g(x)^n)\neq 1$，取不可约多项式$q(x)$整除$f(x)^m$和$g(x)^n$，则$q(x)$整除$f(x)$ 和$g(x)$，与$(f(x),g(x))=1$矛盾。

$\Longleftarrow$. 同理。

7. $F_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$

$F_n$是一个对称阵
(非实对称)
$F_n = F_n^T$

$= (\vec{\alpha}_0, \vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_{n-1})$

任取两列 $\alpha_s = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^s \\ \omega^{2s} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)s} \end{pmatrix}$ $\alpha_t = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^t \\ \omega^{2t} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)t} \end{pmatrix}$

$\bar{\omega}\omega = 1$
$\Downarrow$
$\bar{\omega} = \omega^{-1}$

验证: $\overline{\alpha_s^T}\alpha_t = \begin{cases} n & s=t \\ 0 & s \neq t \end{cases}$

$$\overline{\alpha_s^T}\alpha_t = 1 + \bar{\omega}^s\omega^t + \cdots + \bar{\omega}^{(n-1)s}\omega^{(n-1)t}$$
$$= 1 + (\bar{\omega}^s\omega^t) + (\bar{\omega}^s\omega^t)^2 + \cdots + (\bar{\omega}^s\omega^t)^{n-1}$$

因为
$$\bar{\omega}^s\omega^t = \omega^{t-s}$$
$$\overline{\alpha_s^T}\alpha_t = 1 + \omega^{t-s} + (\omega^{t-s})^2 + \cdots + (\omega^{t-s})^{n-1}$$
$$= \begin{cases} n & t=s \\ 0 & t \neq s \end{cases}$$

因此 $\overline{F_n^T} F_n = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_0^T} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_{n-1}^T} \end{pmatrix} (\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) = nI_n$

设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ 过 $(\omega^k, y_{k+1})$ $k=0,1,\cdots,n-1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}=y_1 \\ a_0+a_1\omega+\cdots+a_{n-1}\omega^{n-1}=y_2 \\ \vdots \\ a_0+a_1\omega^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\omega^{(n-1)^2}=y_n \end{cases}$$

矩阵形式

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}}_{=F_n} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = F_n^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{n}\overline{F_n} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$