

## Slide04 必做题

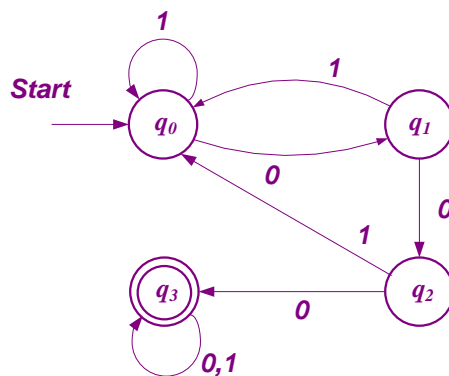
### \*!Exercise 2.2.2

参考解答：从"课程文件"中下载网页文件，从中找到参考解答

### Exercise 2.2.4 (b)

参考解答：取初态为  $q_0$ ,  $q_1$  代表前一个输入字符为 0,  $q_2$  代表前两个输入字符为子串 00,  $q_3$  代表输入字符串中至少包含一个 000 字串, 即  $q_3$  为终态。用转移表或转移图给出结果均可。

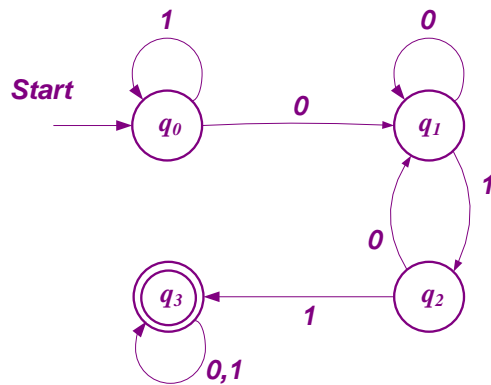
	0	1
→ $q_0$	$q_1$	$q_0$
$q_1$	$q_2$	$q_0$
$q_2$	$q_3$	$q_0$
* $q_3$	$q_3$	$q_3$



### Exercise 2.2.4 (c)

参考解答：取初态为  $q_0$ ,  $q_1$  代表前一个输入字符为 0,  $q_2$  代表前两个输入字符为子串 01,  $q_3$  代表输入字符串中至少包含一个 011 字串, 即  $q_3$  为终态。用转移表或转移图给出结果均可。

	0	1
→ $q_0$	$q_1$	$q_0$
$q_1$	$q_1$	$q_2$
$q_2$	$q_1$	$q_3$
* $q_3$	$q_3$	$q_3$



### ! Exercise 2.2.5(d)

参考解答：取每个状态为  $q_{i,j}$  的形式，这里  $i,j$  满足：  $0 \leq i \leq 4, 0 \leq j \leq 2$ 。  $q_{i,j}$  的含义：已扫描的输入串中 0 的个数被 5 除余  $i$ ，1 的个数被 3 除余  $j$ 。初态为  $q_{0,0}$ ，终态集只包含状态  $q_{0,0}$ 。

由于状态数目为 15，较多，所以只给出转移表：

		0	1
→ *	$q_{0,0}$	$q_{1,0}$	$q_{0,1}$
	$q_{0,1}$	$q_{1,1}$	$q_{0,2}$
	$q_{0,2}$	$q_{1,2}$	$q_{0,0}$
	$q_{1,0}$	$q_{2,0}$	$q_{1,1}$
	$q_{1,1}$	$q_{2,1}$	$q_{1,2}$
	$q_{1,2}$	$q_{2,2}$	$q_{1,0}$
	$q_{2,0}$	$q_{3,0}$	$q_{2,1}$
	$q_{2,1}$	$q_{3,1}$	$q_{2,2}$
	$q_{2,2}$	$q_{3,2}$	$q_{2,0}$
	$q_{3,0}$	$q_{4,0}$	$q_{3,1}$
	$q_{3,1}$	$q_{4,1}$	$q_{3,2}$
	$q_{3,2}$	$q_{4,2}$	$q_{3,0}$
	$q_{4,0}$	$q_{0,0}$	$q_{4,1}$
	$q_{4,1}$	$q_{0,1}$	$q_{4,2}$
	$q_{4,2}$	$q_{0,2}$	$q_{4,0}$

**Exercise 2.2.7** Let  $A$  be a DFA and  $q$  a particular state of  $A$ , such that

**$\delta(q,a) = q$  for all input symbols  $a$ . Show by induction on the length of the input that for all input strings  $w$ ,  $\delta'(q,w) = q$ .**

参考解答 归纳于  $w$  的长度.

1 设  $|w| = 0$ , 即  $w = \varepsilon$ .

由定义,  $\delta'(q,\varepsilon) = q$

2 设  $|w| = n+1$ , 且  $w = xa$ , 其中  $a$  为一个输入符号. 显然,  $|x| = n$ .

由归纳假设,  $\delta'(q,x) = q$ .

所以,  $\delta'(q,w) = \delta'(q,xa) = \delta(\delta'(q,x), a) = \delta(q,a) = q$ .

### \*!Exercise 2.2.9

参考解答: 从"课程文件"中下载网页文件, 从中找到参考解答

### Exercise 2.3.2

参考解答: 注意: 对于该题目, 不要遗漏了状态  $\phi$ .

	0	1
$\rightarrow \{p\}$	$\{q,s\}$	$\{q\}$
* $\{q\}$	$\{r\}$	$\{q,r\}$
* $\{q,s\}$	$\{r\}$	$\{p,q,r\}$
* $\{q,r\}$	$\{r,s\}$	$\{p,q,r\}$
$\{r\}$	$\{s\}$	$\{p\}$
* $\{p,q,r\}$	$\{q,r,s\}$	$\{p,q,r\}$
* $\{r,s\}$	$\{s\}$	$\{p\}$
* $\{s\}$	$\phi$	$\{p\}$
* $\{q,r,s\}$	$\{r,s\}$	$\{p,q,r\}$
$\phi$	$\phi$	$\phi$

### Exercise 2.3.4 (b)

参考解答: 大部分同学没有困难, 注意不要遗漏单个字符的情形. 如下是一种解法:

$Q = \{q_s, q_0, q_1, \dots, q_9, q_f\}, \quad \Sigma = \{0, 1, \dots, 9\},$

初态  $q_s$ ,

终态集  $\{q_f\}$ ,

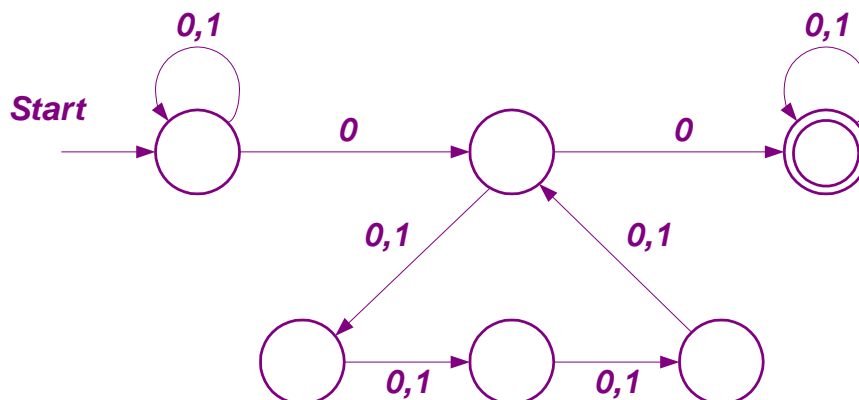
$\delta(q_s, a) = \{q_k | k \neq a\} \cup \{q_f\};$

$\delta(q_k, a) = \{q_k\}, \quad \text{if } k \neq a;$

$\delta(q_k, a) = \{q_i\}, \quad \text{if } k=a.$   
 其中,  $k = 0, 1, \dots, 9.$

### Exercise 2.3.4 (c)

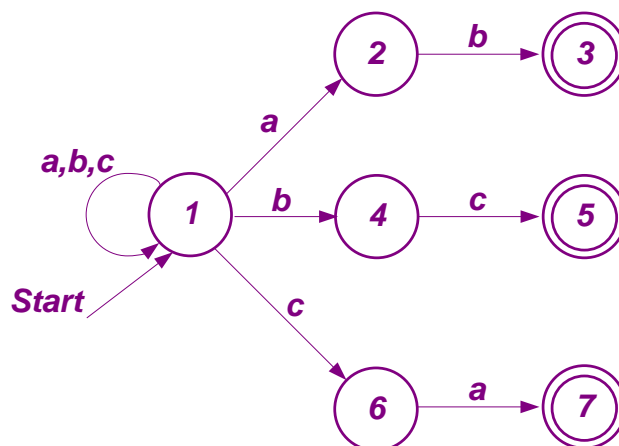
参考解答: 题目要求被接受的字符串中存在两个 0, 它们之间的字符数目为 0, 4, 8, 12, ..., 即 4 的倍数。., 如下状态图代表一种解法



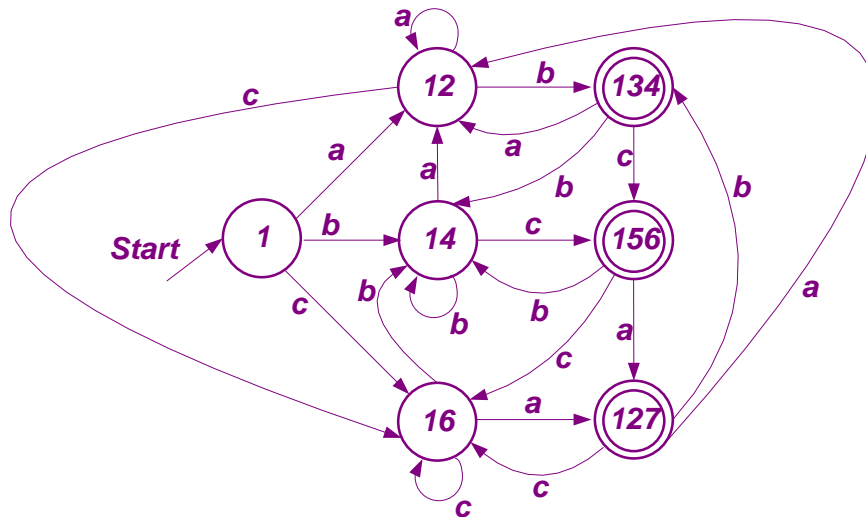
### Exercise 2.4.2 (c)

参考解答:

假设 Exercise 2.4.1 (c) 的结果为



依 2.4 节的方法, Exercise 2.4.2 (c) 的结果为



### Exercise 2.5.2

参考解答:

a) Compute the  $\varepsilon$  - closure of each state.

$$\text{ECLOSE}(p) = \{p, q, r\}$$

$$\text{ECLOSE}(q) = \{q\}$$

$$\text{ECLOSE}(r) = \{r\}$$

b) Give all the strings of length three or less accepted by the automaton.

$\varepsilon$  , a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, aac, aba, abb, abc, aca, acb, acc, baa, bab, bac, bca, bcb, bcc, caa, cab, cac, cba, cbb, cbc, cca, ccb, ccc.

c) Convert the automata to a DFA.

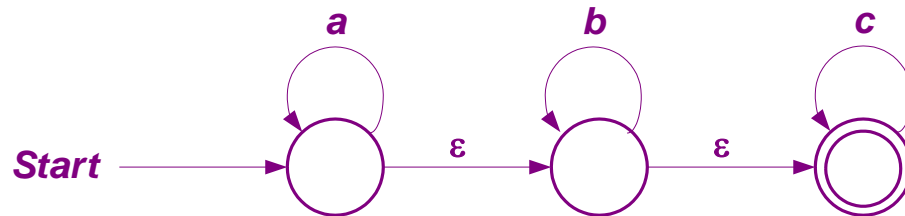
		a	b	c
→ *	$\{p, q, r\}$	$\{p, q, r\}$	$\{q, r\}$	$\{p, q, r\}$
*	$\{q, r\}$	$\{p, q, r\}$	$\{r\}$	$\{p, q, r\}$
*	$\{r\}$	$\phi$	$\phi$	$\phi$
	$\phi$	$\phi$	$\phi$	$\phi$

**Exercise 2.5.3** 设计下列语言的  $\varepsilon$  - NFA. 注意应用  $\varepsilon$ -转移简化你的设计.

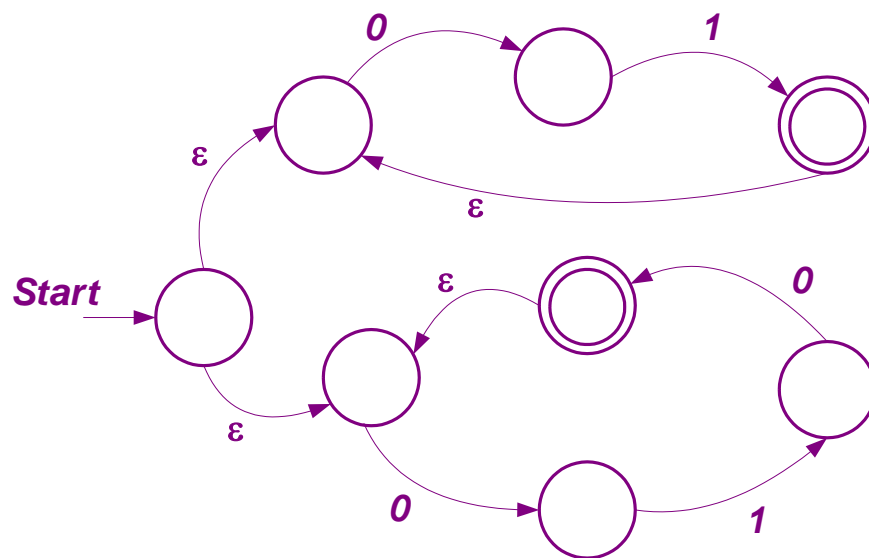
a) The set of strings consisting of zero or more **a**'s followed by zero or more **b**'s, followed by zero or more **c**'s.

! b) The set of strings consisting of either **01** repeated one or more times or **010** repeated one or more times.

参考解答: a)



!b)



#### Exercise 4.4.2

对图 4.15 的 DFA 重复 Exercise 4.4.1 的工作.

a) 画出填表算法所用的填充表, 并标记可区别状态偏对.

b) 构造等价的最小状态自动机.

参考解答:

a)  $(A,D), (A,G), (B,E), (B,H), (C,F), (C,I), (D,G), (E,H), (F,I)$ .

b) 等价类:  $\{A,D,G\}, \{B,E,H\}, \{C,I,F\}$ . 等价的最小状态 DFA 为

**解答一.** 借鉴 (a) 的思想, 状态中应包含当前已读过的输入串反向后的数字除以 5 的余数, 然后考虑读入当前符号后余数的可能变化; 所不同之处是数字

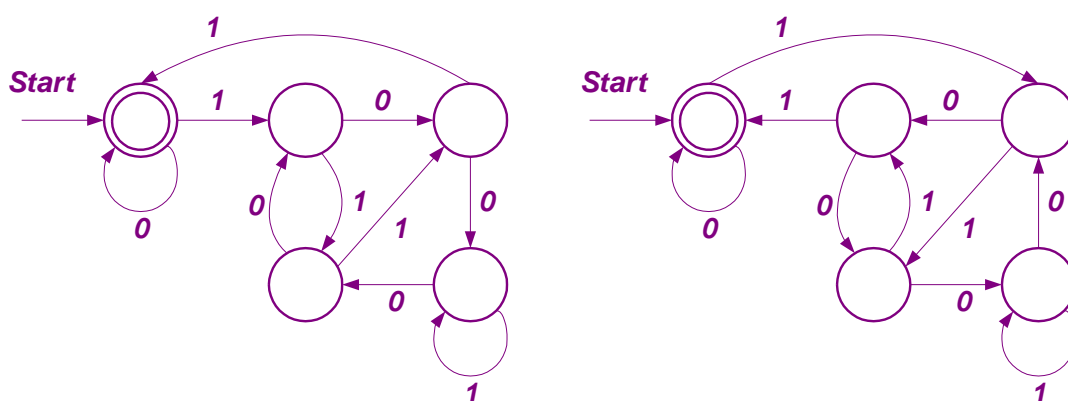
是倒过来读的，因此大小与已有字符串的长度有关，但通过分析，长度对余数的影响也是有规律的，变化周期是  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ 。这样，DFA 的状态应该由上述两方面信息构成。：以下是其中一个代表解法：

$$Q = \{q_{ij} | 0 \leq i \leq 4, 0 \leq j \leq 3\}, \quad \Sigma = \{0, 1\}, \quad q_0 = q_{00}, \quad F = \{q_{0j} | 0 \leq j \leq 3\}$$

$$\delta(q_{ij}, 0) = q_{ik}; \text{ 其中 } k = (j+1) \bmod 4$$

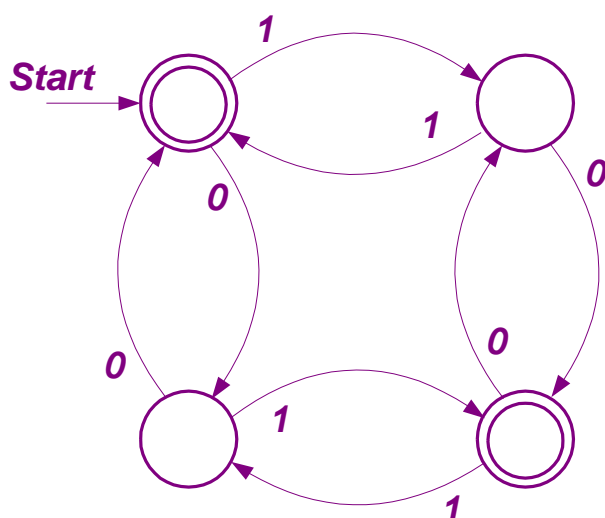
$$\delta(q_{ij}, 1) = q_{sk}; \text{ 其中 } s = (i+2) \bmod 5, \quad k = (j+1) \bmod 4$$

**解答二.** 利用 (a) 的结果，若允许以 0 打头的串，则如下左图的 DFA 可接受的二进制串能被 5 整除；将该转移图的所有转移边反向，则可得到一个满足条件的 DFA。这里注意：允许出现以 0 打头的情况。



(附加的思考题)

**思考题** 定义  $\{0, 1\}$  上的语言  $L = \{w | w \text{ 中 } 0、1 \text{ 数目的奇偶性相同}\}$ 。试证明  $L$  是如下 DFA 的语言：



**参考解答：** 设左上的状态为 P，右上的状态为 Q，右下的状态为 R，左下的状态为 S.  $\delta$  为



此 DFA A 的转移函数。

首先证明, 对任何  $w \in L$ ,  $\delta'(P, w)=P$  或  $\delta'(P, w)=R$ , 即证  $w \in L(A)$ 。

归纳于  $w$  的长度 (因  $w$  中 0、1 数目的奇偶性相同, 所以  $w$  具有偶数长度):

- (1) 基础:  $|w|=0$ 。必有,  $\delta'(P, w)=P$ , 命题成立。
- (2) 归纳: 设  $|w|=2k$  ( $k \geq 0$ ) 时, 命题成立。则当  $|w|=2(k+1)$  时, 可令  $w=w_1w_2$ , 其中  $|w_1|=2k$ 、 $|w_2|=2$ 。根据归纳假设,  $\delta'(P, w_1)=P$  或  $\delta'(P, w_1)=R$ 。  
若  $\delta'(P, w_1)=P$ , 则有: 当  $w_2=01$  或  $w_2=10$  时,  $\delta'(P, w)=R$ ; 当  $w_2=00$  或  $w_2=11$  时,  $\delta'(P, w)=P$ 。  
若  $\delta'(P, w_1)=R$ , 则有: 当  $w_2=01$  或  $w_2=10$  时,  $\delta'(P, w)=P$ ; 当  $w_2=00$  或  $w_2=11$  时,  $\delta'(P, w)=R$ 。  
所以  $|w|=2(k+1)$  时, 上述命题成立。

再证明另一方面, 对任何  $w \in L(A)$ , 有  $w \in L$ 。为方便, 先利用互归纳法证明以下 4 个相关命题:

- a. 若  $\delta'(P, w)=P$ , 则  $w$  中包含偶数个 0 偶数个 1;
- b. 若  $\delta'(P, w)=Q$ , 则  $w$  中包含偶数个 0 奇数个 1;
- c. 若  $\delta'(P, w)=R$ , 则  $w$  中包含奇数个 0 奇数个 1;
- d. 若  $\delta'(P, w)=S$ , 则  $w$  中包含奇数个 0 偶数个 1;

归纳于  $w$  的长度:

- (1) 基础:  $|w|=0$ 。必有,  $w$  中包含偶数个 0 偶数个 1。而此时只有  $\delta'(P, w)=P$  成立, 所以上述 4 个命题在  $|w|=0$  时均成立。
- (2) 归纳: 设  $|w|=k$  ( $k \geq 0$ ) 时, 上述 4 个命题均成立。下面证明当  $|w|=k+1$  时, 上述 4 个命题仍然成立。令  $w=w'a$ , 其中  $a=0$  或  $a=1$ 。分以下 4 种情形讨论:

case1:  $\delta'(P, w')=P$ , 根据归纳假设,  $w'$  中包含偶数个 0 偶数个 1。

若  $a=0$ , 则  $\delta'(P, w)=S$ , 上述 4 个命题中只有命题 d 的前提部分成立, 而该命题的结论部分也成立, 所以上述 4 个命题均成立; 若  $a=1$ , 则  $\delta'(P, w)=Q$ , 上述 4 个命题中只有命题 b 的前提部分成立, 而该命题的结论部分也成立, 所以上述 4 个命题均成立。

Case2:  $\delta'(P, w')=Q$ , 根据归纳假设,  $w'$  中包含偶数个 0 奇数个 1。

若  $a=0$ , 则  $\delta'(P, w)=R$ , 上述 4 个命题中只有命题 c 的前提部分成立, 而该命题的结论部分也成立, 所以上述 4 个命题均成立; 若  $a=1$ , 则  $\delta'(P, w)=P$ , 上述 4 个命题中只有命题 a 的前提部分成立, 而该命题的结论部分也成立, 所以上述 4 个命题均成立。

Case3:  $\delta'(P, w')=R$ , 根据归纳假设,  $w'$  中包含奇数个 0 奇数个 1。

若  $a=0$ , 则  $\delta'(P, w)=Q$ , 上述 4 个命题中只有命题 b 的前提部分成立, 而该命题的结论部分也成立, 所以上述 4 个命题均成立; 若  $a=1$ , 则  $\delta'(P, w)=S$ , 上述 4 个命题中只有命题 d 的前提部分成立, 而该命题的结论部分也成立, 所以上述 4 个命题均成立。

Case4:  $\delta'(P, w')=S$ , 根据归纳假设,  $w'$  中包含奇数个 0 偶数个 1。

若  $a=0$ , 则  $\delta'(P, w)=P$ , 上述 4 个命题中只有命题 a 的前提部分成立, 而该命题的结论部分也成立, 所以上述 4 个命题均成立; 若  $a=1$ , 则  $\delta'(P, w)=R$ , 上述 4 个命题中只有命题 c 的前提部分成立, 而该命题的结论部分也成立, 所以上述 4 个命题均成立。

这样, 当  $|w|=k+1$  时, 上述 4 个命题仍然成立。

所以, 对任何  $w \in L(A)$ , 有  $w \in L$ 。

证毕。