关系

- 相容关系可以是传递的，但不必须传递?
  - 相容关系不必须是传递，只需满足自反和对称

定义 10.7.1 对非空集合 A 上的关系 R，如果 R 是自反的、对称的，则称 R 为 A 上的相容关系.

- n元运算有实例吗？光看定义有点抽象
  - 比如三元运算$f(a,b,c)=a+b+c$

- A: 定义域{1,2,3}.
  值域{<2,3>, <3,2>, <4,1>}.
  //如果值域为{<2,3>, <2,4>, <4,1>}还是f吗?
  - 这道题目是根据函数写出定义域和值域。如果规定值域为$B=\{\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$，那这个函数不是$A\rightarrow B$的函数

单调子序列

- 请问对于任意长度为44的自然数数列，它的最长单调子序列的长度至少是多少？
  - 由于$44 \geq 6 \times 6 + 1$，至少存在长度为6+1=7的反链（单调减序列），或存在一条长度为6+1=7的链（单调增序列）
  - 因此单调子序列的长度至少是7

对偏序集$\langle A, \leq \rangle$, 若A中元素为$mn + 1$个，则A中或者存在一条长度为$m + 1$的反链，或者存在一条长度为$n + 1$的链

函数

- 定理11.3.4想说啥啊，太抽象

定义 11.3.3 设 R 是 A 上的等价关系，且 $f: A \to A$，如果对任意的 $x, y \in A$，有 $\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle f(x), f(y)\rangle \in R$，则称关系 R 与函数 f 是相容的.

定理 11.3.4 设 R 是 A 上的等价关系，且 $f: A \to A$，如果 R 与 f 是相容的，则存在唯一的函数 $F: A/R \to A/R$，使 $F([x]_R) = [f(x)]_R$；如果 R 与 f 不相容，则不存在这样的函数 F.

$$F = \{\langle [x]_R, [f(x)]_R \rangle \mid x \in A\}.$$

  - 当f和R相容的时候，f总是把一个等价类里的元素映射到同一个等价类里，因此可以根据f确定出一个A/R到A/R的函数

- 单射的左逆和满射的右逆唯一吗？
  - 不唯一

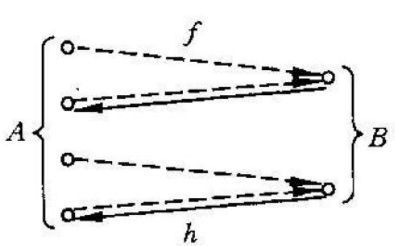


图 11.2.4 f 的右逆 h

等势

- 根据定义判断等势的时候能选择构造两个单射函数么。书上的定义是构造双射函数，但是感觉构造双射对最后一道题有点难。
  - 如果存在$A \to B$的单射和$B \to A$的单射，那么确实可以证明存在$A \to B$的双射（Schröder–Bernstein theorem）
  - 但根据题目要求，仍然需要构造出双射

- 表示双射函数的时候画图可以吗，还是说必须要用描述法，谢谢。
  - 对于较为复杂的双射函数（如$\mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$）可以通过画图的方式辅助说明，关键在于描述清楚每个元素在双射下对应的元素

离散数学（1） 期末考试题型

期末考试基本信息

- 考试时间：2h
- 考试题型
  - 选择题(单选题/多选题)
  - 判断题
  - 填空题
  - 计算题
  - 证明题

选择题

- （单选题）下列选项中，错误的是
  - A） $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \rightarrow Q) \rightarrow R$
  - B） $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$
  - C） $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow S) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow S \vee R$
  - D） $(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S) \Rightarrow P \rightarrow S$

- 解答：A

选择题

- (单选题) 下列关于集合的势的说法，错误的是
  - A) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\approx P(\mathbb{Z})$
  - B) $\aleph_1^{\aleph_2}=\aleph_3$
  - C) $|\mathbb{N}_{\mathbb{R}}|=\aleph_1$
  - D) $\{f|f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}\}\approx\mathbb{Q}$

- 解答： D
  - $|\mathbb{R}\times\mathbb{R}|=\aleph_1, |P(\mathbb{Z})|=\aleph_1$
  - $\aleph_1^{\aleph_2}\geq 2^{\aleph_2}=\aleph_3; \aleph_1^{\aleph_2}\leq\aleph_2^{\aleph_2}=2^{\aleph_2}=\aleph_3$
  - $|\mathbb{N}_{\mathbb{R}}|=\aleph_1^{\aleph_0}=\aleph_1$
  - $|\{f|f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}\}|=\aleph_0^{\aleph_0\times\aleph_0}=\aleph_0^{\aleph_0}$

选择题

- （多选题）下列关于集合的说法，正确的是
  - A） $P(\bigcup A) = A$
  - B） $\bigcup(P(A)) = A$
  - C） $A \subset B \Rightarrow P(A) \subset P(B)$
  - D） $P(A) \subset P(B) \Rightarrow A \subset B$

- 解答：BCD
  - $A \subset P(\bigcup A)$
  - 集合A所有的子集并起来就是集合A
  - $x \in P(A) \Leftrightarrow x \subset A \Rightarrow x \subset B \Leftrightarrow x \in P(B)$
  - $x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subset A \Rightarrow \{x\} \subset B \Leftrightarrow x \in B$

判断题

- () $A \in B \Leftrightarrow P(A) \in P(B)$
- () 若R为反对称关系，则$t(R)$也为反对称关系
- () $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$
- () $\{\emptyset\} \subset \{\{\emptyset\}\}$
- 解答
  - F. $A = \{a\}, B = \{\{a\}\}, P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}, P(B) = \left\{\emptyset, \{\{a\}\}\right\}$
  - F. $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}$
  - T. 前者要求有一致的x，后者的x可依赖于y
  - F. $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$

填空题

- $\neg P \vee (Q \wedge R) \rightarrow \neg\neg S$的逆波兰表达式是__________
  - 同级别的运算**从左向右**
  - 不需要化简
    - 先加括号 $\left(\left((\neg P) \vee (Q \wedge R)\right) \rightarrow \left(\neg(\neg S)\right)\right)$
    - 移运算符$\left(\left((P)\neg(QR)\wedge\right) \vee \left((S)\neg\right)\neg\right) \rightarrow$
    - 去除括号$P\neg QR \wedge\vee S\neg\neg\rightarrow$
  - 检查结果
    - 从左到右解析，字母则压栈；运算符则弹出字母进行运算后入栈
    - $, P\neg QR \wedge\vee S\neg\neg\rightarrow$
    - $(\neg P), QR \wedge\vee S\neg\neg\rightarrow$
    - $(\neg P)(Q \wedge R),\vee S\neg\neg\rightarrow$
    - $((\neg P) \vee (Q \wedge R)), S\neg\neg\rightarrow$
    - $\left((\neg P) \vee (Q \wedge R)\right)(\neg\neg S), \rightarrow$
    - $((\neg P) \vee (Q \wedge R) \rightarrow (\neg\neg S))$

填空题

- $|A|=8$，则A上的对称关系有___个，反对称关系有___个
- $2^{36}, 2^8\times 3^{28}$
- $\bigcap 1234 =$ ___，$\bigcup 1234 =$ _____
- 0, 1233
- $n+1=n^+=\{0,1,\ldots,n\}$; $n\in n+1; n\subset n+1$

计算题

- 形式化下列语句:没有两片长得一样的叶子

- 设$P(x)$表示x是叶子，$Q(x,y)$表示二者长得一样，$EQ(x,y)$表示二者相同
- $(\forall x)(\forall y)\big(P(x) \wedge P(y) \wedge Q(x,y) \rightarrow EQ(x,y)\big)$
- $\neg(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge P(y) \wedge Q(x,y) \wedge \neg EQ(x,y))$

计算题

求所有能被6或8整除而不被15整除的三位数

记$A_{n,k}$是$1 \le x \le n$中被k整除的数字的个数。则有$|A_{n,k}| = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$。先同时考虑一、二、三位数，所求集合为

$$A_{999,6} \cup A_{999,8} - A_{999,15}$$

个数为$|A_{999,6} \cup A_{999,8} - A_{999,15}| = |A_{999,6} \cup A_{999,8}| - |(A_{999,6} \cup A_{999,8}) \cap A_{999,15}|$

$$|A_{999,6} \cup A_{999,8}| = |A_{999,6}| + |A_{999,8}| - |A_{999,6} \cap A_{999,8}| = \left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{24} \right\rfloor = 249$$

$$|(A_{999,6} \cup A_{999,8}) \cap A_{999,15}| = |A_{999,30} \cup A_{999,120}| = |A_{999,30}| = \left\lfloor \frac{999}{30} \right\rfloor = 33$$

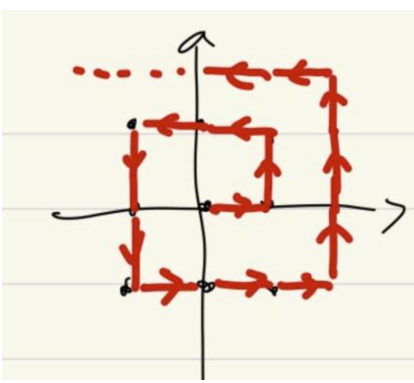
$$|A_{999,6} \cup A_{999,8} - A_{999,15}| = 249 - 33 = 216$$

同理，计算得$|A_{99,6} \cup A_{99,8} - A_{99,15}| = \left\lfloor \frac{99}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{99}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{24} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{30} \right\rfloor = 21$

因此最终结果为$2166 - 21 = 195$

证明题

- 通过构造双射函数来证明$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}$
  - 有时候难以直接构造一个双射函数时，可以考虑通过双射函数的复合来进行
  - 如$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$
  - 前者从中心$(0,0)$出发，逐圈遍历整数点即得双射
  - 后者的双射可直接写出



$$f:\mathbf{N} \to \mathbf{Z}, f(n) = \begin{cases} -\dfrac{1+n}{2}, & \text{当 } n \text{ 是奇数} \\ \dfrac{n}{2}, & \text{当 } n \text{ 是偶数} \end{cases}$$

证明题

- 用罗素公理系统证明：$\vdash (\neg Q \rightarrow P) \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$。
- 注意定理只能使用这里提供的，其他的定理需要先证明才能用。
- 附罗素公理系统相关公式：

定义：

定义 1：$(A \rightarrow B)$ 定义为 $(\neg A \vee B)$

定义 2：$(A \wedge B)$ 定义为 $\neg(\neg A \vee \neg B)$

定义 3：$(A \leftrightarrow B)$ 定义为 $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

公理：

公理 1：$\vdash ((P \vee P) \rightarrow P)$

公理 2：$\vdash (P \rightarrow (P \vee Q))$

公理 3：$\vdash ((P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P))$

公理 4：$\vdash \left((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R))\right)$

定理：

定理1：$\rightarrow \vdash P \rightarrow P$

定理2：$\rightarrow \vdash \neg P \vee P$

定理3：$\rightarrow \vdash P \vee \neg P$

定理4：$\rightarrow \vdash P \rightarrow \neg\neg P$

定理5：$\rightarrow \vdash \neg\neg P \rightarrow P$

定理6：$\rightarrow \vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

定理7：$\rightarrow \vdash ((P \vee Q) \vee R) \rightarrow (P \vee (Q \vee R))$

定理8：$\rightarrow \vdash \left((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))\right)$

证明题

定理5： $\to \vdash \neg\neg P \to P$

定理6： $\to \vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$

定理7： $\to \vdash \big((P \vee Q) \vee R\big) \to \big(P \vee (Q \vee R)\big)$

定理8： $\to \vdash \Big((Q \to R) \to \big((P \to Q) \to (P \to R)\big)\Big)$

- $\vdash (\neg Q \to P) \to (\neg P \to Q)$
- 先分析思路，结论和定理6相似，定理6通过代入可以得到$(\neg Q \to P) \to (\neg P \to \neg\neg Q)$，因此还需要证明$(\neg P \to \neg\neg Q) \to (\neg P \to Q)$
- 后者和定理8相似，定理8通过代入可以得到$(\neg\neg Q \to Q) \to ((\neg P \to \neg\neg Q) \to (\neg P \to Q))$，分离即能得到结果
- 而$(\neg\neg Q \to Q)$通过定理5代入即可得到

①$\vdash\neg\neg P\to P$，定理 5

②$\vdash\neg\neg Q\to Q$，①代入 P/Q

③$\vdash((Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R)))$，定理 8

④$\vdash((\neg\neg Q\to Q)\to((\neg P\to\neg\neg Q)\to(\neg P\to Q)))$，③代入 P/¬P，Q/¬¬Q，R/Q

⑤$\vdash(\neg P\to\neg\neg Q)\to(\neg P\to Q)$，②④分离

⑥$\vdash(P\to Q)\to(\neg Q\to\neg P)$，定理 6

⑦$\vdash(\neg Q\to P)\to(\neg P\to\neg\neg Q)$，⑥代入 P/¬Q，Q/P

⑧$\vdash((\neg P\to\neg\neg Q)\to(\neg P\to Q))\to(((\neg Q\to P)\to(\neg P\to\neg\neg Q))\to((\neg Q\to P)\to(\neg P\to Q)))$，③代入 P/(¬Q→P)，Q/(¬P→¬¬Q)，R/(¬P→Q)

⑨$\vdash((\neg Q\to P)\to(\neg P\to\neg\neg Q))\to((\neg Q\to P)\to(\neg P\to Q))$，⑤⑧分离

⑩$\vdash(\neg Q\to P)\to(\neg P\to Q)$，⑦⑨分离

考试准备注意事项

- 大部分为基础题或者稍作提升
  - 记住常见的结论和反例
  - 题目说明为“写出”的，只用写答案，不用写过程
  - 尽量保持卷面整洁，证明题按点给分
  - 构造反例的时候指出有问题的地方
  - 灵活把握做题节奏，遇到状况不要卡死
- 知识点比较多和杂，注意不要遗漏
  - 刚刚介绍的只是考试题型，不是“重点”
  - 正反面都有题目

期末考试相关

- 请问离散有样卷吗 谢谢老师

- 想知道期末考试的题量大概是多少，和题型分布


最后一节课
划重点说
考试内容是
say the focus of the exam is

发了一张纸

*表示非基本要求的内容

考试内容

概述，第 1 章 1.1~1.4	绪论，离散数学与数理逻辑学科概述，研究内容与发展概况 命题概念，命题联结词与真值表，合式公式，重言式，命题形式化
第 1 章 1.5-1.6 第 2 章 2.1 ~2.4	波兰表达式，悖论简介，其它联结词，等值定理，基本等值公式 命题公式与真值表的关系，联结词的完备集
第 2 章 2.5~ 2.10	对偶式*，范式概念，析取范式，合取范式，主范式 基本推理公式，推理演算与推理规则
第 3 章 3.1 ~ 3.6	归结推理法，应用举例，命题逻辑的公理化，公理系统的结构 命题逻辑的公理系统，公理系统的完备性，王浩算法，非标准逻辑简介*
第 4 章 4.1 ~ 4.6	谓词逻辑的基本概念，谓词和个体词，函数和量词，合式公式 自然语句的形式化，有限域下公式的表示法，公式的普遍有效性和判定问题
第 5 章 5.1 ~ 5.3	谓词逻辑等值和推理演算，否定型等值式，量词分配等值式 范式，前束范式，SKOLEM 标准型，存在量词前束范式*
第 5 章 5.4 ~ 5.6	基本的推理公式及其证明方法，推理演算与推理规则 谓词逻辑的归结推理法，谓词逻辑应用举例

考试内容

第 9 章 9.1~9.4	集合的概念和基本表示法，集合间的关系和特殊集合 集合的运算，集合的图形表示法，集合运算性质和证明
第 9 章 9.5~ 9.7	幂集性质，传递集合，包含排斥原理，有限集合的基数 集合论公理系统简介，无穷公理与自然数集合
第 10 章 10.1 ~10.4	关系的基本概念，二元关系与特殊关系，关系矩阵和关系图 关系的逆、合成，限制和象，关系的基本性质
第 10 章 10.4 ~ 10.6	关系基本性质的几个结论，关系的闭包，关系的合成 闭包的性质及其构造方法，等价关系的概念
第 10 章 10.6 ~ 10.8	划分与等价关系，相容关系和覆盖，偏序关系与哈斯图 上确界和下确界，全序关系和链
第 11 章 11.1, 11.2，11.5	函数，任意集合上的函数定义，特殊函数，满射单射与双射 选择公理*，函数的合成，函数的逆
第 12 章 12.1~12.7	实数集合与集合的基数，集合的等势，有限集合与无限集合的基数 可数集合与连续统假设

离散数学1的主要内容

- 两个演算加四论
- 两个演算（命题演算与谓词演算）1-3,4-5（章）
- 集合论（集合、关系、函数、基数）9-12
- 模型论（形式语言语法与语义间的关系） 7
- 递归论（可计算性与可判定性）6
- 证明论（数学本身的无矛盾性）8

补交作业

- 1月11号23:59，网络学堂提交

考试安排

- 时间：1月11日14:30-16:30
- 考场：**六教 6C300**
- 答疑时间：
  - 1月10日上午10:00-12:00，**东主楼10区302**

- 考试题型
  - 单选题
  - 多选题(选错不得分，少选给一半分)
  - 填空题
  - 判断题
  - 主观题

获奖情况

- 作业优秀
- 课堂表现优秀
- 出题创新
- 编程作业优秀

投票 最多可选1项

设置

最后一科什么时候考完

A 15号

B 16号

C 17号

D 18号

E 19号

提交

祝同学们期末考出好成绩！

祝同学们春节快乐！