



清華大學

Tsinghua University

离散数学(1) Discrete Mathematics

第九章 集合

刘世霞

shixia@tsinghua.edu.cn

问题：归结法



- 异或可以直接放在子句集里么，感觉把异或分解太麻烦了。
 - 标准的做法是将异或做等值变换转成合取范式后再放到子句集中
$$P \bar{\vee} Q = (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$$
- 归结过程中必须先把子句集中的每一项写出来之后再开始归结吗，可不可以只写一部分用到的或者在归结过程中穿插引入
 - 归结的过程虽然不一定会用到子句集中的每一项，但是建立子句集是归结法的必要步骤，这个过程需要把子句集中的每一项写出
- 在归结过程中异或的特殊性质好像也是无法表现出来（就感觉和用普通的析取一样了）（如果不用异或又真的好麻烦）



问题：推理

- 这次作业的两个题的第二小问，不知道“有的学生是高材生”这个条件怎么用呢。但是在推理过程中又需要“高材生一定都是学生”这个条件，请问给的条件是为了推出这个吗？

(2) 大学里的学生不是本科生就是研究生，有的学生是高材生，John不是研究生但是高材生，从而如果John是大学里的学生必是本科生。

- 令 $P(x):x$ 是学生， $Q(x):x$ 是本科生， $R(x):x$ 是研究生， $S(x):x$ 是高材生，即证 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x)) \wedge (\exists x)(P(x) \wedge S(x)) \wedge (\neg R(\text{John}) \wedge S(\text{John})) \Rightarrow P(\text{John}) \rightarrow Q(\text{John})$

推理规则法：

$$\textcircled{1} (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x))$$

前提

$$\textcircled{2} \neg R(\text{John})$$

前提

$$\textcircled{3} P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x)$$

① 全称量词消去

$$\textcircled{4} P(\text{John})$$

附加前提引入

$$\textcircled{5} Q(\text{John}) \vee R(\text{John})$$

③④ 分离

$$\textcircled{6} Q(\text{John})$$

②⑤ 分离

$$\textcircled{7} P(\text{John}) \rightarrow Q(\text{John})$$

条件证明规则

从推理规则法的过程中看出，不需要“有的学生是高材生”这个条件，也可以得到题目的结论



问题：量词消去

- 全称量词消去规则中的约束出现不太理解，希望可以再讲一讲，谢谢

- $$\frac{(\forall x)P(x)}{\therefore P(y)} \quad \text{或} \quad \frac{(\forall x)P(x)}{\therefore P(c)}$$

- 两式成立的条件是：

- (1) 第一式中，取代 x 的 y 应为任意的不在 $P(x)$ 中约束出现的个体变项。
- (2) 第二式中， c 为任意个体常项。
- (3) 用 y 或 c 去取代 $P(x)$ 中自由出现的 x 时，必须在 x 自由出现的一切地方进行取代。

把 x 换成 y 时，其他变量都不依赖于 x

- 如 $(\forall x)P(x) = (\forall x)(\exists z)(x < z)$ ，在实数域上成立
- 这里 z 就是在 $P(x)$ 中约束出现的个体变项
- 可以用 y 取代 x ，这时消去全称量词可以得到 $P(y) = (\exists z)(y < z)$
- 若将 y 取为 z ，消去全称量词之后便有 $(\exists z)(z < z)$ ，变成矛盾式，因此是不正确的。



问题：普遍有效性

- 作业题中下列小问能严谨证明普遍有效，但是想不明白

$$((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)) \rightarrow (\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

- 解一：分类讨论，考虑 $(\exists x)P(x)$ 的真值：
 - 假如 $(\exists x)P(x) = F$ ：则 $(\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x) = T$ 。另一方面对于所有的 x 来说， $P(x) = F$ ，故 $P(x) \rightarrow Q(x) = T$ ，从而 $(\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x)) = T$ ，因此原式取值也为 T 。
 - 假如 $(\exists x)P(x) = T$ ：如果 $(\exists x)Q(x) = F$ ，则 $(\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x) = F$ ，原式取值为 F ；如果 $(\exists x)Q(x) = T$ ，则可以假设 $Q(x_0) = T$ ，此时 $P(x_0) \rightarrow Q(x_0) = T$ ，从而 $(\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x)) = T$ ，因此原式取值为 T 。
- 因此不论何种情况出现，原式取值均为 T ，是普遍有效的。



问题：普遍有效性

- 作业题中下列小问能严谨证明普遍有效，但是想不明白

$$((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)) \rightarrow (\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

- 解二：

$$\begin{aligned} & [(\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)] \rightarrow (\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ &= \neg[(\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)] \vee (\exists x)(\neg P(x) \vee Q(x)) \\ &= [(\exists x)P(x) \wedge \neg(\exists x)Q(x)] \vee (\exists x)(\neg P(x) \vee Q(x)) \\ &= [(\exists x)P(x) \vee (\exists x)(\neg P(x) \vee Q(x))] \wedge [\neg(\exists x)Q(x) \vee (\exists x)(\neg P(x) \vee Q(x))] \\ &= (\exists x)(P(x) \vee \neg P(x) \vee Q(x)) \wedge [(\forall x)\neg Q(x) \vee (\exists x)(\neg P(x) \vee Q(x))] \end{aligned}$$

$(\exists x)(P(x) \vee \neg P(x) \vee Q(x))$ 显然为 T ，下证第二部分为 T

若不然，则 $(\forall x)\neg Q(x) = F$ 且 $(\exists x)(\neg P(x) \vee Q(x)) = F$

其中， $(\forall x)\neg Q(x) = F$ 意味着存在 a ， $Q(a) = T$ ，此时 $(\exists x)(\neg P(x) \vee Q(x)) = T$ 矛盾，故原式为 T ，普遍有效



问题：变元替换

- 变元替换不懂，（比如作业题的那个结合实际的情况）不知道怎样去替换。

(2) 大学里的学生不是本科生就是研究生，有的学生是高材生，John不是研究生但是高材生，从而如果John是大学里的学生必是本科生。

- 令 $P(x):x$ 是学生, $Q(x):x$ 是本科生, $R(x):x$ 是研究生, $S(x):x$ 是高材生, 即证 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x)) \wedge (\exists x)(P(x) \wedge S(x)) \wedge (\neg R(\text{John}) \wedge S(\text{John})) \Rightarrow P(\text{John}) \rightarrow Q(\text{John})$

推理规则法:

① $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x))$

前提

② $\neg R(\text{John})$

前提

③ $P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x)$

① 全称量词消去

④ $P(\text{John})$

附加前提引入

⑤ $Q(\text{John}) \vee R(\text{John})$

③④ 分离

⑥ $Q(\text{John})$

②⑤ 分离

⑦ $P(\text{John}) \rightarrow Q(\text{John})$

条件证明规则

由于结论中讨论的是个体John, 因此全称量词消去的时候就需要尽量用John做替换。

问题：基本推理公式



- $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$
- 根据重言蕴含的性质：(5) 如果 $A \Rightarrow C, B \Rightarrow C$, 则 $A \vee B \Rightarrow C$.
- 只需证明 $(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ 和 $(\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$
- 以第一个为例，即证 $(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ 永真

推理规则法

- (1) $(\forall x)P(x)$ 前提
- (2) $P(y)$ 全称量词消去
- (3) $P(y) \vee Q(y)$ (2)
- (4) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ 全称量词引入

归结法

- 写出公式 $(\forall x)P(x) \wedge \neg(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$
- 建立子句集 $S = \{P(x), \neg P(a), \neg Q(a)\}$
- (1) $P(x)$
- (2) $\neg P(a)$
- (3) \square

(1) (2) 归结



5-5-6 使用推理规则的推理演算过程

- 首先将以自然语句表示的推理问题引入谓词加以形式化；
- 若不能直接使用基本的推理公式则消去量词；
- 在无量词的条件下使用规则和公式推理；
- 最后再引入量词以求得结论。

其他问题



- 更多例子
 - 增加两次习题课 (10周, 15周)
 - 投票习题课时间
- 两次编程作业:
 - 一次答疑+例子 (10周)
 - 一次编程作业展示+检查 (13周周末)



作业相关

- 证明时需注意:

$$(\forall x) P(x) \vee (\forall x) Q(x) \neq (\forall x) (P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x) (P(x) \wedge Q(x)) \neq (\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x)$$

- 而只满足

$$(\forall x) P(x) \vee (\forall x) Q(x) \Rightarrow (\forall x) (P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x) (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x)$$

证明下列等值式和蕴含式:

$$(5) (\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$(5). (\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

$$= \neg(\exists x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$

$$= (\forall x)\neg P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$

$$= (\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x)) = (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)).$$

这里是不相等的



习题4.5.

(5) 过平面上的两个点，有且仅有一条直线通过。

(5) 若以 $P(x)$ 表示 x 是平面上的点, $Q(x, y, u)$ 表示 u 是过 x 和 y 的直线, $EP(x, y)$ 表示 x 和 y 为同一点, $EQ(u, v)$ 表示 u 和 v 为同一条直线, 那么这句话可以符号化为

$$(\forall x)(\forall y) \left(P(x) \wedge P(y) \wedge \neg EP(x, y) \rightarrow (\exists u) (Q(x, y, u) \wedge (\forall v) (Q(x, y, v) \rightarrow EQ(u, v))) \right).$$

(8) 只有一个北京。

(8) 若以 $P(x)$ 表示 x 是北京, $E(x, y)$ 表示 x 和 y 是同一城市, 那么这句话可以符号化为 $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(P(y) \rightarrow E(x, y)))$.

没有特殊说明时，论域为总论域，需要添加特性谓词



习题4.8.

8. 判断下列公式是普遍有效的,不可满足的还是可满足的?

普遍有效 (1) $(\forall x)P(x) \rightarrow P(y)$

普遍有效 (2) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x))$

可满足 (3) $(\forall x)P(x)$

不可满足 (4) $(\exists x)(P(x) \wedge \neg P(x))$

可满足 (5) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

普遍有效 (6) $(\forall x)(P(x) \vee \neg P(x))$

可满足 (7) $((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)) \rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$

- 等值式和推理式都是普遍有效的谓词公式。



习题4.9.

9. 给出一个公式, 使其在 $\{1, 2\}$ 域上是可满足的, 而在 $\{1\}$ 域上是不可满足的.

(1) $(\exists x)(\exists y)P(x, y)$, 其中 $P(x, y)$ 表示 $x < y$.

(2) $(\exists x)P(x) \wedge (\exists y)\neg P(y)$, 其中 $P(x)$ 表示 $x > 1$.

(3) $(\exists x)P(x)$, 其中 $P(x)$ 表示 $x > 1$.

这些答案对吗?

什么是谓词逻辑公式中的不可满足?

回顾：4.6 公式的普遍有效性和判定问题



不可满足公式

设 A 为一个谓词公式，若 A 在任何解释下真值均为假，则称 A 为不可满足的公式。

例： $(\exists x)(P(x) \wedge \neg P(x))$
 $(\forall x)P(x) \wedge (\exists y)\neg P(y)$

解释一下什么叫“任何解释？”

给定的个体域 D ：自由个体变项 a ，谓词变项 P ，函数 f



解释

- 给定非空个体域 D ，一个解释 I 由下面部分构成
 - 给每个自由个体变项符号指定一个 D 中的元素
 - 给每个谓词变项符号指定一个 D 上的谓词
 - 给每个函数符号指定一个 D 上的函数
- 例如，在个体域 \mathbb{N} 上，有公式 $(\forall x)F(g(x, z), x)$
- 给定解释 I
 - 自由个体变项： $z = 0$
 - 函数 $g(x, a) = x * a$
 - 谓词 $F(x, y)$ 为 $x = y$
- 在解释 I 下，公式被解释为 $(\forall x)(x * 0 = x)$ ，它是一个假命题



习题4.9.

9. 给出一个公式, 使其在 $\{1, 2\}$ 域上是可满足的, 而在 $\{1\}$ 域上是不可满足的.

(1) $(\exists x)(\exists y)P(x, y)$, 其中 $P(x, y)$ 表示 $x < y$.

(2) $(\exists x)P(x) \wedge (\exists y) \neg P(y)$, 其中 $P(x)$ 表示 $x > 1$.

(3) $(\exists x)P(x)$, 其中 $P(x)$ 表示 $x > 1$.

除非你显式地说明了 P 是谓词常项而非变项, 否则不清楚其是定义还是一个解释

当然, 更好的做法自然是构造出一个即使是谓词变项也满足题意的解答, 例如

$$\exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$$

$$\forall x \exists y \left((P(x) \wedge \neg P(y)) \vee (P(y) \wedge \neg P(x)) \right) \quad (\forall x) x=2$$

谓词逻辑的等值和推理演算



1. 证明下列等值式和蕴涵式

$$(7) (\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$\begin{aligned} (\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) &= \neg(\exists x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) = \forall(x)\neg P(x) \vee \forall(x)Q(x) \\ &\Rightarrow \forall(x)(\neg P(x) \vee Q(x)) = (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \end{aligned}$$

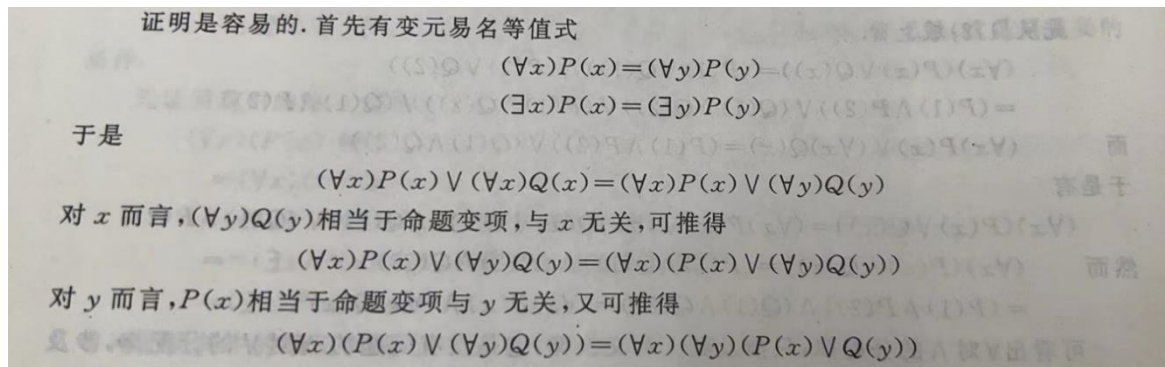
$$(8) (\exists x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$$

$$\begin{aligned} (\exists x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) &= (\exists x)P(x) \wedge (\forall y)Q(y) \\ &= (\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)Q(y)) \Rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \end{aligned}$$



问题：量词的分配律

- 为什么书上推导了之后，用了等号，又说 $(\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y))$ 与 $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ 不等值呢？



– 书上的推导证明了：

$$(\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y)) = (\forall x)P(x) \vee (\forall y)Q(y)$$

– 而在基本推理公式中：

$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

– 因此，两者是永真蕴含的关系，不等值

$$(\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y)) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$



问题：前束范式

- 请问把一个式子转化为前束范式的过程中，我怎样确定量词摆放的位置呢？

— 根据所求的前束范式的要求来定

(1) 不加其他约束的前束范式：要求所有量词都位于该公式的最左边；所有量词前都不含否定词；量词的辖域都延伸到整个公式的末端，一般形式为：

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2) \dots (Q_nx_n)M(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

其中 $Q_i(1 \leq i \leq n)$ 为 \forall 或 \exists ， M 为不含量词的公式

(2) \exists 前束范式：要求所有的存在量词位于全称量词的左侧

(3) \forall 前束范式（仅保留全称量词的Skolem标准形）：要求只有全称量词，没有存在量词



问题： \exists 前束范式

• 例2是为什么呀？

例2 求 $(\exists x)(\forall y)(\exists u)P(x,y,u)$ 的 \exists 前束范式(P 中无量词).

将一公式化成 \exists 前束形, 首先要求出前束形, 再做 \exists 前束. 这个例子已是前束形了, 便可直接求 \exists 前束形.

首先将全称量词 $(\forall y)$ 改写成存在量词 $(\exists y)$, 其次是引入谓词 S 和一个变元 z , 得 $S(x,z)$, 建立公式

$$(\exists x)((\exists y)(\exists u)(P(x,y,u) \wedge \neg S(x,y)) \vee (\forall z)S(x,z))$$

其中 $\neg S(x,y)$ 的变元, 是 $(\forall y)$ 的变元 y 和 $(\forall y)$ 左边存在量词 $(\exists x)$ 的变元 x . 附加的 $(\forall z)S(x,z)$ 中的变元 z 是新引入的未在原公式中出现过的个体, S 也是不曾在 M 中出现过的谓词.

进而将 $(\forall z)$ 左移(等值演算), 便得 \exists 前束范式

$$(\exists x)(\exists y)(\exists u)(\forall z)((P(x,y,u) \wedge \neg S(x,y)) \vee S(x,z)).$$

当原公式中, 有多个全称量词在存在量词的左边, 可按这办法将全称量词逐一地右移.

不做考试要求



例2: 求 $(\exists x)(\forall y)(\exists u)P(x,y,u)$ 的 \exists 前束范式(P 中无量词)。

将一公式化成 \exists 前束形, 首先要求出前束形, 再做 \exists 前束。
这个例子已是前束形, 便可直接求 \exists 前束形。

首先将全称量词 $(\forall y)$ 改写成存在量词 $(\exists y)$, 其次是引入谓词 S 和一个变元 z , 得 $S(x, z)$, 构造公式

$$(\exists x)((\exists y)(\exists u)(P(x,y,u) \wedge \neg S(x, y)) \vee (\forall z)(S(x, z)))$$

其中 $\neg S(x, y)$ 的变元, 是 $(\forall y)$ 的变元 y 和 $(\forall y)$ 左边存在量词 $(\exists x)$ 的变元 x 。附加的 $(\forall z)S(x, z)$ 中的变元 z 是新引入的未在原公式中出现过的个体, S 也是不曾出现在 M 中出现过的谓词。

$$(\forall x)P(x) \Rightarrow ((\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall z)Q(z))$$



$$(\forall x)P(x) \Rightarrow ((\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall z)Q(z))$$

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x))$$

$$= \underline{\neg(\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x)) \vee \neg(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)}$$

$$= \neg(\forall x)P(x) \vee \underline{(\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x))} \vee (\forall x)Q(x)$$

$$= (\forall x)P(x) \rightarrow ((\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall z)Q(z))$$

$$(\forall x)P(x) \Rightarrow ((\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall z)Q(z))$$

置换规则、变元易名

在普遍有效的意义下两者等价

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

思考



$$(\exists x)(\forall y)(\exists u)P(x,y,u) \Rightarrow$$

$$(\exists x)((\exists y)(\exists u)(P(x,y,u) \wedge \neg S(x,y)) \vee (\forall z)S(x,z))$$

- x 是一个常项, u 是 y 的函数, 因此 $P(x,y,u)$ 可以看做是 $P(y)$, $S(x,y)$ 可以看做是 $Q(y)$, 则该公式可以化简为:

$$(\forall y)P(y) \Rightarrow ((\exists y)(P(y) \wedge \neg Q(y)) \vee (\forall z)Q(z))$$

- 也就是

$$(\forall x)P(x) \Rightarrow ((\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall z)Q(z))$$



问题：推理演算

- 下列习题的解答是否有问题？

习题3 (2)

解答

3. 指出下列各推演中的错误,并改正之.

(2) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) = F$ 当且仅当有一个 $x_0 \in D$ 使得
 $P(x) = F, Q(x) = F$

(2) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) = F$

当且仅当对任意的 $x \in D$ 使得
 $P(x) \wedge Q(x) = F$
 $P(x) = F$ 或 $Q(x) = F$

	何时为真	何时为假
$\forall x P(x)$	对个体域中的每个 x , $P(x)$ 都为真	至少存在一个 x , 使 $P(x)$ 为假
$\exists x P(x)$	个体域中至少有一个 x , 使 $P(x)$ 为真	对个体域中的每个 x , $P(x)$ 都为假



问题：归结

- 请问归结法不一定要把子句集中的每个子句都归结一遍吗？还是通过部分的归结出矛盾即可？
 - 归结法不需要将所有子句都进行归结，只要可以导出矛盾，就能证明原命题成立。



清華大學

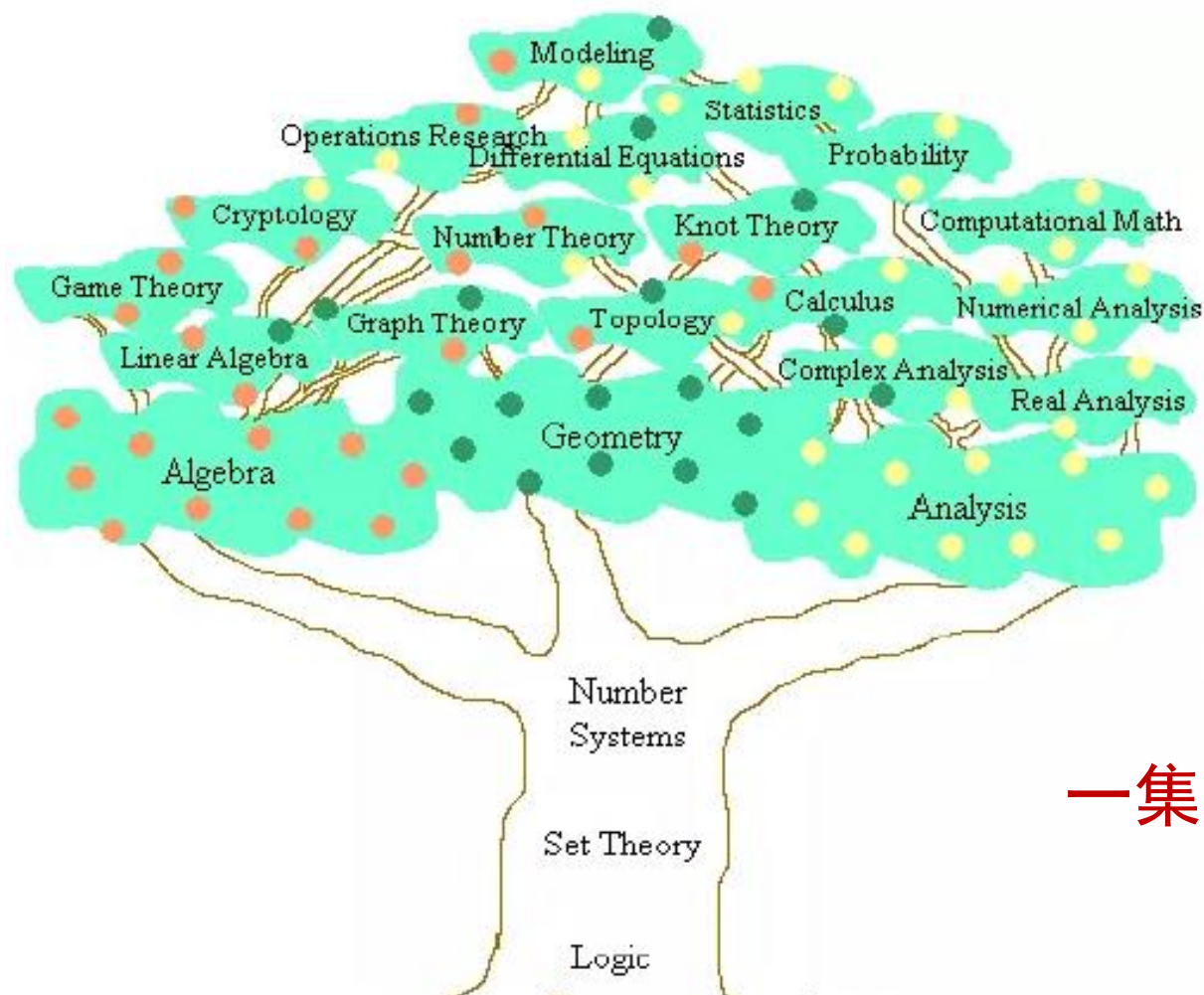
Tsinghua University

第九章 集合

刘世霞

shixia@tsinghua.edu.cn

集合论



一集御天下

集合论提供了一种描述和理解数学对象和概念的通用语言

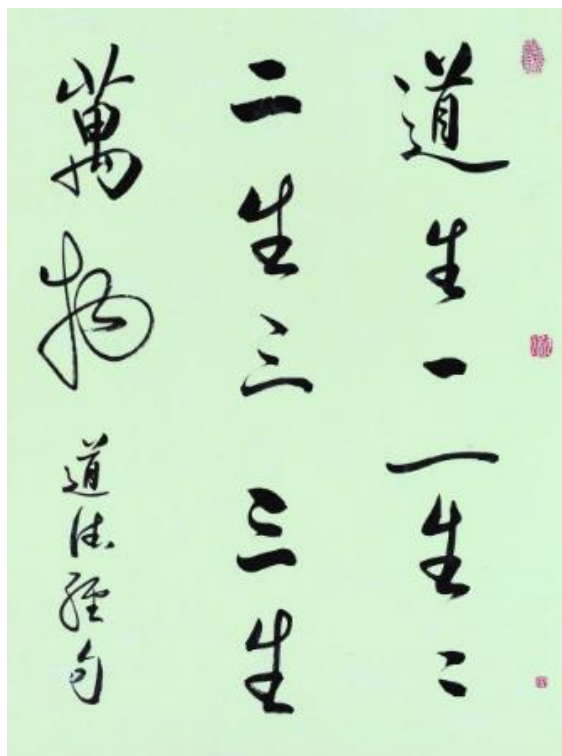


“万物皆数”



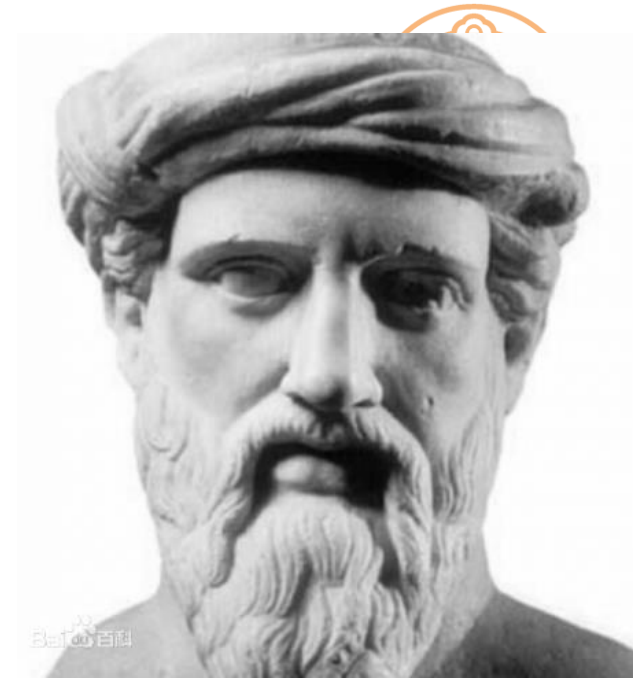
万物皆数

- 一生二，二生三，三生万物。



万物皆数

- 毕达哥拉斯
 - 公元前580年-~公元前500年
 - 数学之父
 - 第一个注重“数”的人
 - 他们相信依靠数学可使灵魂升华，与上帝融为一体，万物都包含数，甚至万物都是数，上帝通过数来统治宇宙。



第一次数学危机



- 希伯斯（Hippasu，公元前5世纪）发现了一个腰为1的等腰直角三角形的斜边（即根号2）永远无法用最简整数比（不可公度比）来表示，从而发现了第一个无理数，推翻了毕达哥拉斯的著名理论。
 - 相传当时毕达哥拉斯派的人正在海上，但就因为这一发现而把希伯斯抛入大海。





第二次数学危机

- 起因：十七世纪末，牛顿和莱布尼兹创立的微积分理论在实践中取得了成功的应用。但是，当时的微积分理论主要是建立在无穷小分析之上的，而无穷小分析后来证明是包含逻辑矛盾的。
- 经过：1734年，英国大主教贝克莱发表《分析学者，或致一个不信教的数学家。其中审查现代分析的对象、原则与推断是否比之宗教的神秘与教条，构思更为清楚，或推理更为明显》一书，对当时的微积分学说进行了猛烈的抨击。他说牛顿先认为无穷小量不是零，然后又让它等于零，这违背了背反律（数学要按照形式逻辑的**不矛盾律**来思维）
- 贝克莱悖论产生的原因在于无穷小量的辩证性与数学方法的形式特性的矛盾。



第二次数学危机

影响：第二次数学危机的产物——分析基础理论的严密化与集合论的创立。

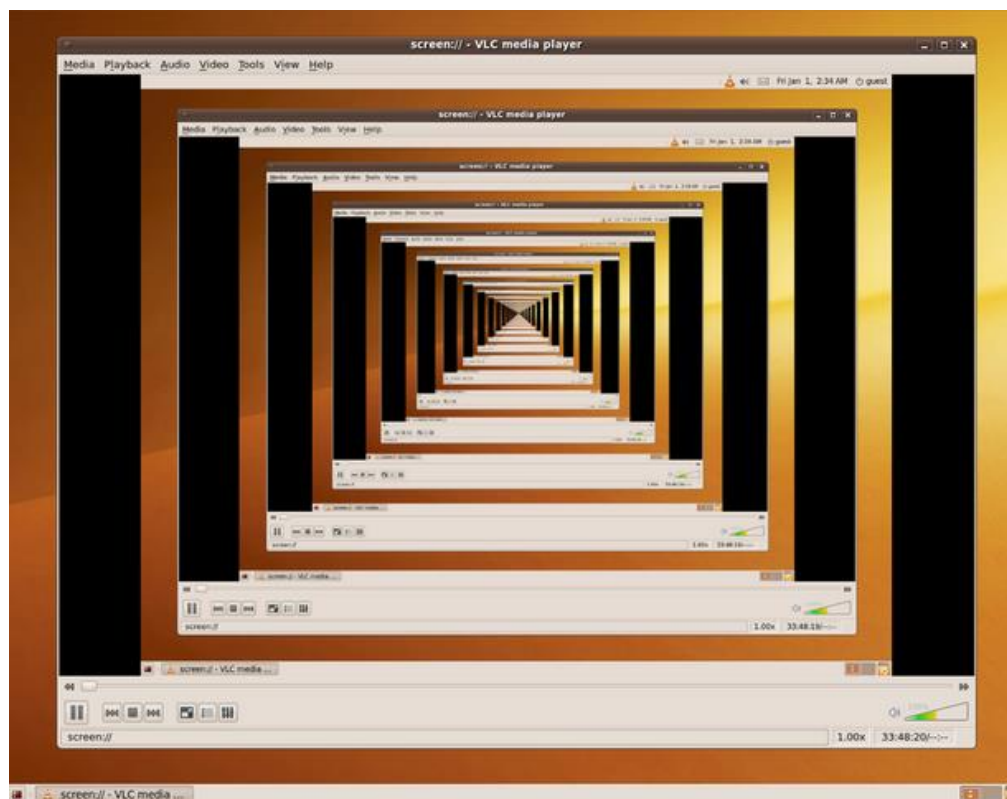
集合论是研究集合（由一堆抽象事物构成的整体）的数学理论

集合论的全部历史都是围绕无穷集合而展开的



无穷

- Infinity (∞)





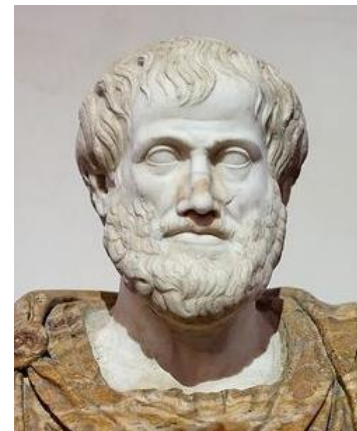
无穷

- 无穷大，无穷小…….
- 潜无穷
- 实无穷

无穷可以比大小吗？

全体自然数存在吗？

拒绝无穷的数学家们



- 两千年前古希腊人已经认识到无穷。
- 潜无穷
 - 把无限看作永远在延伸着的, 一种变化着成长着被不断产生出来的东西来解释. 它永远处在构造中, 永远完成不了, 是潜在的, 而**不是实在的。把无限看作为永远在延伸着的**（即不断在创造着的永远完成不了的）过程。

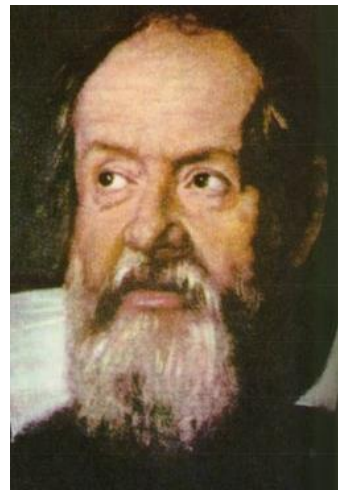
——亚里士多德

亚里士多德(公元前384~前322)



- 至于“无穷”虽然潜能上由此存在，然而这类潜能的命意并不指望其实现，这只在意识上有此潜在而已。潜在的无穷是有的。但这无限不得实现为独立的存在。
- 自然数是数不完的，这表明自然数的产生是个无穷无尽的过程。只有这个过程结束了，才得到自然数的全体。但这个过程永不结束，因而无法得到自然数的全体。但是，自然数可以越来越多，多得超过任何具体的数目，因而是无穷的。这无穷表现为变化发展的过程，因而叫做“潜无穷”。

伽利略 (1564-1642)



- 《两种新科学》

- 是自然数多呢?还是完全平方数多呢?
- 直观上看, 自然数多。
- 但从另一个角度看, 有一个自然数, 便有一个完全平方数:

- 最后伽利略据此得出结论说:

- 比较无穷量是不可能的
- 所有无穷量都一样!

1 2 3 4 ... n ...

1 4 9 16 ... n^2 ...

一一对应

拒绝无穷的数学家们



- 莱布尼茨 (1646—1716)
 - “所有整数的个数”这一提法自相矛盾，应该抛弃。
- 高斯 (1777—1855)
 - 我反对使用无穷量……这在数学中是绝对不允许的。
 - 我极力反对把无穷量当成一种完成的东西来使用，这在数学上是绝对不允许的。无穷个只不过是实际谈论极限时的一个说法。



绕不过去的坎 $\sqrt{2}$



- 无理数

- 无理数不能用有穷个有理数来表示。
- 无理数存在
- 柯西提出极限的概念，

$\sqrt{2}$ 可以看作有理数序列：1.4, 1.41, 1.414……. 的极限

- 逻辑上的循环，需要先知道 $\sqrt{2}$ ，才能确定这个有理序列是否收敛于 $\sqrt{2}$ ；但是在定义无理数之前，我们并不知道 $\sqrt{2}$ 是什么？



绕不过去的坎

- Karl Weierstrass (1815—1897)
 - 利用单调有界的有理数数列来定义无理数，从而在严格的逻辑基础上建立了实数理论.
 - $\sqrt{2}$ 即 $\{1.4, 1.41, 1.414, \dots\}$ 为“完成了的整体”
 - 序列 $1.4, 1.41, 1.414, \dots$ 的极限看作集合。
 - $\sqrt{2}$ 即 $\{1.4, 1.41, 1.414, \dots\}$
- 实无穷：把无限的整体本身作为一个现成的单位，是已经构造完成了的东西，换言之，即是把无限对象看成为可以自我完成的过程或无穷整体.



潜无穷和实无穷

- 希尔伯特认为：“在分析中，我们只是把无限大和无限小当作极限概念，当作某种正在到来、正在发生的東西来研究，即我们研究的是**潜无限**……或者当我们把一个区间的点看作同时存在的许多事物的总体时，这种无限性称为**实无限**性。”
- 美国数学家丹奇克指出：“无穷的概念既不是实验的天然物，也不是逻辑的必然物；而是数学的必然物。我们对头脑的这种肯定也许是一种纯粹的幻想，然而它却是一种**必要的幻想**了。”



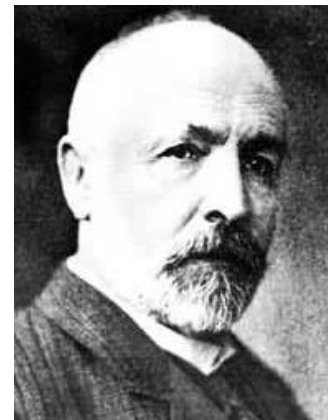
潜无穷和实无穷

- 潜无穷是把无限数量放入**无限时间**中：
 - 一尺之捶，日截其半，万世不竭。
- 实无穷是把无限数量放入**有限时间**中，实无穷可以被数尽。如同有一个点在数轴上从0点向1点移动，这个点一定会在有限时间内经过0与1之间所有的点，数完0与1之间的无穷多的点：
 - 一尺之捶，时进其距，穷其无穷。



康托尔对无穷的探索

- 最早认识到无穷集合的是捷克数学家，哲学家波尔查诺 (Bolzano, 1781–1848)
 - 集合论的先驱
 - 萌发了集合论的思想
- 康托尔创立了朴素集合论
 - 格奥尔格·康托尔 (Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philipp, 1845.3.3-1918.1.6)
 - 德国数学家，集合论的创始人。



康托尔对无穷的探索



- 哈雷大学任教（1869-1913）
- 受到其数学老师魏尔斯特拉斯 (Karl Weierstrass) 的影响，开始研究“当函数 $f(x)$ 具有无穷多个间断点时，其三角级数展开是否唯一？”
 - 认识到无穷集合的重要性
- 1873年11月29日，康托尔在给德国数学家 Dedekind 的一封信中
 - **正整数集与实数集**之间能否建立一一对应呢？

正整数集与实数集之间能否
建立一一对应呢？

一个帝国



- **1873年12月7日**，再次致信给Dedekind说

- 他已经证明了正整数集和实数集之间不能建立一一对应

"I see it, but I don't believe it!"

- **集合论诞生日**



- 1874年，他提出可数集的概念。
 - On a Characteristic Property of All Real Algebraic Numbers
- 1877年，证明了平面与直线之间的点可以建立一一对应
 - 集合拓扑研究的开端

无穷集合比大小

Hilbert's paradox of Grand Hotel





无穷集合比大小

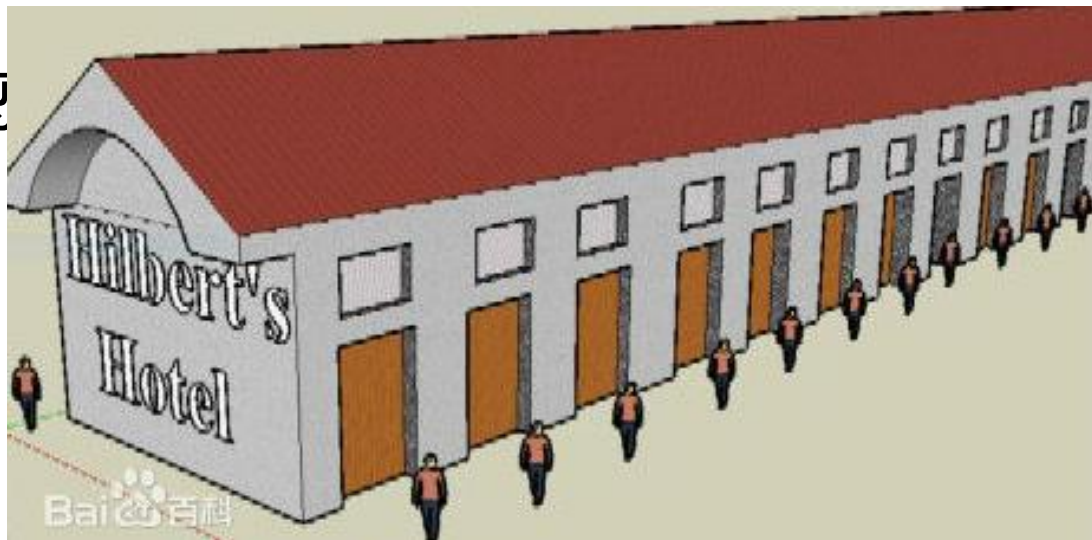
Hilbert's paradox of Grand Hotel

- 内设无限个房间，所有的房间都客满了
- 有一位新客，想订个房间
- 1号房间的旅客移到2号房间，2号房间的旅客移到3号房间，3号房间的旅客移到4号房间等等……
- 新客就被安排住进了已被腾空的1号房间





请您



又来了无穷多个旅行团，
每个旅行团有无穷多个旅客？

Hilbert该怎么办呢？

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂



宇宙哲学争论

- 由于希尔伯特的这一悖论违反了我们的直觉，因而经常被用于反对实无穷的存在，
 - 如美国哲学家威廉·莱恩·柯莱格（William Lane Craig）就曾这样来证明上帝的存在：尽管在数学上这种旅馆（或任何无限的事物）并非是不可能的，但从直觉上这样的事物永远不可能存在，不仅如此，任何实无穷都不可能存在。如果一个时间序列能够无限地回退到过去那就会建立起一个实无穷，既然实无穷不存在，那时间就必然有个“起点”。每个事物都有其发生的原因，而时间起始的原因不可能是其他事物，只能是上帝



实数集合不可数

- 同样是无穷集合，如果集合里的元素能够与全体正整数构成一一对应的关系，我们就说它是**可数的**，否则就说它是不可数的。
- 1874 年，Cantor 发表了一篇重要的论文，论文中证明了全体有理数甚至是全体代数数都是可数的，但全体实数却是不可数的。换句话说，同样是无穷多，实数的数量比有理数、代数数的数量都高出了一个级别。



康托尔的乐园

- 1879年–1884年 线性连续统
 - 《关于无穷的线性点集》
 - 《一般集合论基础》
- 1895年 《对超穷集合论基础的贡献》
 - 以集合作为基础，符号化
 - 基数
 - 运算



连续统假设

- 1874, 可数集基数和实数基数之间没有别的基数。
- Hilbert二十三个数学问题之首 (巴黎第二届国际数学会) 。
- 1938年哥德尔证明了连续统假设和世界公认的ZFC公理系统不矛盾。
- 1963年美国数学家科亨证明连续统假设和ZFC公理系统是彼此独立的。
 - 连续统假设不能在ZFC公理系统内证明其正确性与否。



磨难

- 反对，粗暴攻击

- 由于学术观点上受到的沉重打击，使康托尔曾一度患精神分裂症，虽在1887年恢复了健康，继续工作，但晚年一直病魔缠身。1918年1月6日在德国哈雷（Halle）-维滕贝格大学附属精神病院去世。
- 柏林学派的代表人物之一、构造主义者克罗内克。克罗内克认为，数学的对象必须是可构造出来的，不可用有限步骤构造出来的都是可疑的，不应作为数学的对象，他反对无理数和连续函数的理论，同样严厉批评和恶毒攻击康托尔的无穷集合和超限数理论不是数学而是**神秘主义**。

克罗内克是康托尔的老师



磨难

- 病态，不认可
 - 法国数学家庞加莱（Poincare, Jules Henri, 1854.4.29–1912.7.17）
 - “我个人，而且还不只我一人，认为重要之点在于，切勿引进一些不能用有限个文字去完全定义好的东西”。他把集合论当作一个有趣的“病理学的情形”来谈，并且预测说：“后一代将把（Cantor）集合论当作一种疾病，而人们已经从中恢复过来了”。



磨难

- 病态

- 德国数学家外尔（Weyl, Claude Hugo Hermann, 1885.11.9—1955.12.8）认为，康托尔关于基数的等级观点是“**雾上之雾**”。
- 数学家H. A. 施瓦兹原来是康托尔的好友，但他由于反对集合论而同康托尔断交。
- 集合论的悖论出现之后，他们开始认为集合论根本是一种病态，他们以不同的方式发展为经验主义、半经验主义、直觉主义、构造主义等学派，在基础大战中，构成反康托尔的阵营。



病痛，磨难

- 老师**克罗内克**：“康托尔走进了超穷数的地狱”
 - 上帝创造了正整数，其余的是人的工作
- 1884年，连续统假设长期得不到证明，再加上与克罗内克的尖锐对立，精神上屡遭打击……
- 5月底，他支持不住了，第一次精神崩溃。他的精神沮丧，不能很好地集中研究集合论，从此深深地卷入神学、哲学及文学的争论而不能自拔。
- 不过每当他恢复常态时，他的思想总变得超乎寻常的清晰，继续他的集合论的工作



拨开云雾见月明

- 1897, 瑞士苏黎世召开的第一届国际数学家大会。
- 苏黎世理工大学教授胡尔维茨 (Hurwitz, Adolf, 1859—1919) 在他的综合报告中, 明确地阐述康托尔集合论对函数论的进展所起的巨大推动作用。
 - 这破天荒第一次向国际数学界显示康托尔的集合论不是可有可无的哲学, 而是真正对数学发展起作用的理论工具。
 - 康托尔的集合论得到公开的承认和热情的称赞。



高度赞誉

- 希尔伯特(Hilbert David, 1862.1.23-1943.2.14)高度赞誉康托尔的集合论
 - “是数学天才最优秀的作品”
 - “是人类纯粹智力活动的最高成就之一”
 - “是这个时代所能夸耀的最巨大的工作”。
 - 在1900年第二届国际数学家大会上，希尔伯特高度评价了康托尔工作的重要性，并把康托尔连续统假设列入20世纪初有待解决的23个重要数学问题之首。



现代数学的基石

- 人类认识史上第一次给无穷建立起抽象的形式符号系统和确定的运算，它从本质上揭示了无穷的特性，使无穷的概念发生了一次革命性的变化。
- 从根本上改造了数学的结构，促进了数学的其他许多新的分支的建立和发展，成为实变函数论、代数拓扑、群论和泛函分析等理论的基础，还给逻辑和哲学带来了深远的影响。

[shù xué] 🔊

数学 (学科)



数学 (mathematics或maths)，是研究数量、结构、变化、空间以及信息等概念的一门学科，从某种角度看属于形式科学的一种。

借用《数学简史》的话，数学就是研究集合上各种结构（关系）的科学，可见，数学是一门抽象的学科，而严谨的过程是数学抽象的关键。



集合论的主要内容

- 在朴素集合论中，集合被当做一堆物件构成的整体之类的自证概念
- 在公理化集合论中，集合和集合成员并不直接被定义，而是先规范可以描述其性质的一些公理。
- 由集合构造出的离散结构包括
 - 组合：无序对象汇集，广泛用于计数
 - 关系：序偶的集合用于表示对象之间的关系
 - 图：节点和连接节点的边的集合
 - 有限状态机：为计算机机器建模



集合论的应用

- 构造性数学的重要基础
 - 数理逻辑，抽象代数、图论等
- 计算数学理论的重要基础
 - 计算理论、模型论、形式语言与自动机理论、形式语义学
- 软件理论与技术的重要基础
 - 数据结构、编译原理和数据库原理中得到了重要的应用



第九章 集合

- 9.1 集合的概念与表示方法
- 9.2 集合间的关系和特殊集合
- 9.3 集合的运算
- 9.4 集合的图形表示法
- 9.5 集合运算的性质和证明
- 9.6 有限集合的基数
- 9.7 集合论公理系统

欢迎来到康托乐园！



9.1 集合的概念与表示方法

- 原始概念

- 不加严格定义而直接使用 例：点、线、面

- 集合，元素

- 属于，不属于

- 康托尔的说法

- 把满足一定性质的事物概括成一个整体就做成了一个集合(set)，组成集合的事物成为集合的元素(element)，若某一事物是一个集合的元素，则称这个事物属于这个集合，否则就称这个事物不属于这个集合。



9-1-1 集合(Set)的概念

- 集合是一些确定的、可以区分的事物汇聚在一起组成的一个整体。组成一个集合的每个事物称为该集合的一个元素。

—— 教材 P129

阿列夫0

- 吾人直观或思维之对象，如为相异而确定之物，其总括之全体即谓之集合，其组成此集合之物谓之集合之元素。

—— 肖文灿 《集合论初步》

在中国出版的第一本集合论书籍



集合的概念

能够确定的不同对象看做一个整体 集合 A, B, C, D

→ 元素 a, b, c, d

不确定 \Leftarrow 主观

视力好的同学 ×

帅气的男生 ×

漂亮的女生 ×

接近于1的数 ×

确定 \Leftarrow 客观

不戴眼镜的同学 ✓

一米八以上的男生 ✓

成绩90分以上的女生 ✓

大于10的自然数 ✓

属于 → 用 $a \in A$ 表示

a 不属于 A → 用 $a \notin A$ 表示

集合中一定需要有元素吗？方程 $x^2 = -1$ 在实数域上的根 → 空集 \emptyset



集合的性质及表示

能够确定的不同对象看做一个**整体** 集合

我家里养的宠物是不是一个集合？ ✓ 确定性 无序性 互异性

外延表示法

列举 方程 $(x-2)(x-4)=0$ 的根 $\{2, 4\}$ ✓ $\{4, 2\}$ ✓

方程 $(x-2)(x-2)=0$ 的根 $\{2, 2\}$ ✗ $\{2\}$ ✓

我和它不一样
小于100的自然数的集合

$\{0, 1, 2, \dots, 99\}$

所有正整数的集合

$\{1, 2, 3, \dots\}$

元素较少

我和它不一样

元素较多

内涵表示法

描述 小于10的全体实数

$\{x | x \in \mathbb{R} \wedge x < 10\}$

小于10的全体**整**数

$\{y | y \in \mathbb{Z} \wedge y < 10\}$

{ 元素的形式名称 | 限制条件 (谓词) }



集合的表示法

- 集合的元素可以是任何事物
- 各个元素可以区分，不重复(互异性)
- 各个元素之间无次序(无序性)
- 任何事物是否属于一个集合，结论是确定的(确定性)

$$B=\{9,8,8,7\}$$

$$B=\{9,8,7\}$$

$$B=\{7,8,9\}$$

$$B=\{7,\{8,\{9\}\}\}$$



$$A = \{a, \{b, c\}, d, \{\{d\}\} \}$$

A

b是集合A的元素

B

c是集合A的元素

C

d是集合A的元素

D

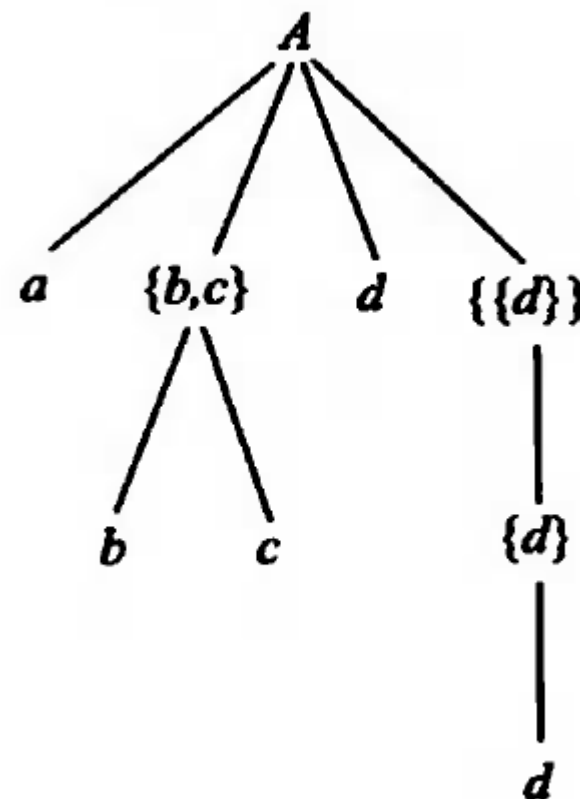
a是集合A的元素

Submit



集合举例

- $A = \{a, \{b, c\}, d, \{\{d\}\}\}$
- b 是集合 A 的元素吗?
- c 是集合 A 的元素吗?
- d 是集合 A 的元素吗?





- \mathbb{N} : 全体自然数集合
 - 0是不是自然数?
- \mathbb{N}^+ : 除0以外的其他自然数的全体构成的集合
- \mathbb{Z} : 全体整数集合
- \mathbb{Z}^+ : 全体正整数集合
- \mathbb{Q} : 全体有理数集合
- \mathbb{R} : 全体实数集合
- 若元素 a 属于集合 A , 记为 $a \in A$, 否则记为 $a \notin A$



- 集合的描述性定义是康托尔根据概括原则 (Principle of Comprehension) 而定义的。
- 发现不加限制使用概括原则会导致悖论。
 - “康托尔定理”：任意集合（包括无穷集）的幂集的基数大于该任意集合的基数。
 - 所有的集合可以构成一个集合M（**大全集**）的话，
 - 所有M的子集构成的集合，哪个大？
 - 1899年康托尔悖论
 - 规定：一个集合自身不能作为它的元素。
 - 对任何集合A 都有 $A \notin A$



9-1-3 集合的表示法

- 外延表示法
 - 穷举法(Method of Enumeration)或列举法
- 内涵表示法
 - 描述法, 概括法, 谓词表示法, 即用谓词来概括集合中元素的性质。一般而言, 如果 $P(x)$ 表示一个谓词, 则可以用 $\{x \mid P(x)\}$ 或 $\{x : P(x)\}$ 表示一个集合。
 - $\{x \mid P(x)\}$ 是使得 $P(x)$ 为真的所有元素 x 组成的集合。
即, 若 $P(a)$ 为真, 则 a 属于该集合。
 - 归纳定义法(Inductive Definition)
 - $G = \{x \mid x=1 \vee (\exists y)(y \in G \wedge x = \{y\})\}$



- N' = { x | 能用少于二十四个汉字表示的自然数 }
 - 比如 25852016738884976640000 可以表达为 “二十三的阶乘”
 - 10000000000000000000000000 可以表达为 “一后面二十三个零”
- 设 n_0 是 “用少于二十四个汉字不能表示的自然数中最小的一个”
- 从形式上看， n_0 仅用 23 个汉字即可表示，可见 n_0 符合 N' 的条件；但在语义上， n_0 又不符合 N' 的条件：



- 结论

用自然语言表达的条件其明确性需加以特别注意

- 有些貌似明确的条件其实并不明确。

悖论

- 悖论 (paradox) 来自希腊语 “para+dokein”，意思是“多想一想”。
- 这个词的意义比较丰富，它包括一切与人的直觉和日常经验相矛盾的数学结论，那些结论会使我们惊异无比。

科学大厦



- 20世纪之初，数学界甚至整个科学界笼罩在一片喜悦祥和的气氛之中，数学基础理论的无矛盾性，归结为集合论的无矛盾性，集合论已成为整个现代数学的逻辑基础。

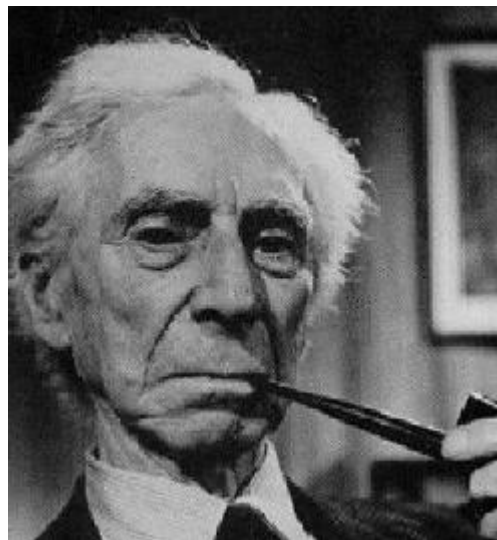
法国著名数学家庞加莱（1854—1912）于1900年在巴黎召开的国际数学家会议上夸耀道：“现在可以说，（数学）绝对的严密性是已经达到了！”





但是。。。。

- 事隔不到两年，英国著名数理逻辑学家和哲学家罗素（1872—1970）即宣布了一条惊人的消息：集合论是自相矛盾的，并不存在什么绝对的严密性！史称“罗素悖论”。
- 第三次数学危机……





理发师悖论

- “本人的理发技艺十分高超，誉满全城。我将为本城所有不给自己刮脸的人刮脸，我也只给这些人刮脸。我对各位表示热诚欢迎！”
- 可是，有一天，这位理发师从镜子里看见自己的胡子长了，他本能地抓起了剃刀，你们看他能不能给他自己刮脸呢？



Russell 悖论 (1903) 教材P131 例5



- 分析如下集合：
$$H = \{ x \mid x \text{ 是一个集合} \wedge x \notin x \}$$
- 任一集合 x , 若 $x \notin x$, 则这个 x 就是集合 H 的元素。
 $\because x$ 是集合, 任一事物都可明确是否属于它, 于是 $x \notin x$ 是有意义的。
- 问题: H 是集合吗?
- 理发师悖论与罗素悖论是等价的: 如果把每个人看成一个集合, 这个集合的元素被定义成这个人刮脸的对象。那么, 理发师宣称, 他的元素, 都是城里不属于自身的那些集合, 并且城里所有不属于自身的集合都属于他。那么他是否属于他自己? 这样就由理发师悖论得到了罗素悖论。反过来的变换也是成立的。



结论与证明

- $H = \{x \mid x \text{ 是一个集合} \wedge x \notin x\}$
- **H不能确定一个集合，或集合H不存在。**

问题：集合H属于它本身吗？

- 设 $y = H$,
若 $y \in H$, $\because y$ 是 H 的元素, y 就具有 H 中元素的性质,
 $y \notin y$ (注意现在 $y = H$)
 $\therefore y \notin H$.
- 若 $y \notin H$, 则 y 不具备 H 中元素的性质,
则由 $y \in y \Rightarrow y \in H$. 均与前提矛盾。



罗素悖论

- 罗素悖论一提出就在当时的数学界与逻辑学界内引起了极大震动。
 - 德国的著名逻辑学家弗里兹在他的关于集合的基础理论完稿付印时，收到了罗素关于这一悖论的信。
 - 他只能在自己著作的末尾写道：“一个科学家所碰到的最倒霉的事，莫过于是在他的工作即将完成时却发现所干的工作的基础崩溃了。”
- 第三次数学危机



危机？

- 当康托尔的朴素集合论出现一系列悖论时，克罗内克的后继者布劳威尔（1881.2.27—1966.12.2）等人借此大做文章，希尔伯特用坚定的语言向他的同代人宣布：

谁都不能把我们从康托尔为我们创造的乐园中赶出去！





问题在于：

错误地假设 H 是集合，
实际上 H 不是集合。

重要结论：

集合论不能研究
“由所有集合组成的集合”。



罗素悖论的解决

- 既然 $\{ x \mid x \text{ 是一个集合} \wedge x \notin x \}$ 不是集合
那么其它的 $\{ x \mid P(x) \}$ 都是集合吗？
- 集合论的公理系统回答了上述问题。
- 包括一些基本集合的存在性，以及如何由已知集合构造新的集合。将在9.7节集合论公理系统中介绍。

9.2 集合间的关系和特殊集合



- 把满足一定性质的事物概括成一个整体就做成了一个**集合(set)**,组成集合的事物成为集合的**元素(element)**,若某一事物是一个集合的元素,则称这个事物**属于**这个集合,否则就称这个事物**不属于**这个集合。
- 类比数字 $=, \leq, <, >, \geq$



定义9.2.1 集合的相等

- 两个集合 A, B 相等, 当且仅当它们**具有相同**的元素。则记作 $A = B$; 否则记作 $A \neq B$ 。
- 该定义的符号化表示为

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x) \neg (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$



集合相等

对应相等

三个元素的集合 $\{a, \frac{b}{a}, 1\} = \{a^2, a+b, 0\}$,

$a, b \in \mathbb{R}$, 则 a, b 分别为?

$$a = -1, b = 0$$

(1) $a \neq 0 \Rightarrow \frac{b}{a}$ 无意义

(2) $\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$

$\{a, 0, 1\} = \{a^2, a, 0\}$ 互异性

$a^2 = 1 \Rightarrow a \neq 1$ 或者 $a = -1$

$a = -1 \Rightarrow \{-1, 0, 1\} = \{1, -1, 0\}$

定义9.2.2 子集(subset)



- 设 A, B 为集合，若 A 中的每个元素都是 B 的元素，则称 **A 为 B 的子集合**，简称子集。
- 这时称 **B 包含 A** ，记作 **$A \subseteq B$** 。该定义的符号化表示为

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

- 空子集？
- **定理9.2.1 两个集合相等的充要条件是它们互为子集。**
- 符号化表示为 $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$



定理9. 2. 2

- 对任意的集合 A , B 和 C , 包含关系 \subseteq 分别具有下列性质:
 - (1) $A \subseteq A$ (自反性)
 - (2) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow A = B$ (反对称性)
 - (3) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$ (传递性)
- 思考：将上面的 ‘ \subseteq ’ 换为属于 ‘ \in ’ 是否仍满足传递性



练习题

设 $A=\{a,\{a\},\{a,b\},\{\{a,b\},c\}\}$ 判断下面命题的真值。

(1) $\{a\} \in A$

(2) $\neg(\{a\} \subseteq A)$

(3) $c \in A$

(4) $\{a\} \subseteq \{\{a,b\},c\}$

(5) $\{\{a\}\} \subseteq A$

(6) $\{a,b\} \in \{\{a,b\},c\}$

(7) $\{\{a,b\}\} \subseteq A$

(8) $\{a,b\} \subseteq \{\{a,b\},c\}$

(9) $\{c\} \subseteq \{\{a,b\},c\}$

(10) $(\{c\} \subseteq A) \rightarrow (a \in \emptyset)$



- 定义9.2.3 真子集 (proper subset)：对任意两个集合 A 和 B ，若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ ，则称 A 是 B 的真子集，或称 B 真包含 A 。记作 $A \subset B$ 。该定义的符号化表示为

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

- 定义9.2.4 两集合不相交：若两个集合 A 和 B 没有公共元素，就称 A 和 B 是不相交的。该定义也可写成

$$A \text{ 和 } B \text{ 不相交} \Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$$

定义9.2.5 空集 (empty set)



- 不含任何元素的集合称为**空集**，记作 \emptyset 。
- 念oe，为拉丁字母，区别于希腊字母 Φ (念f i)) 或者 $\{ \}$ 表示
- 空集可符号化为 $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$
- 为何要引入 \emptyset ：表述问题方便、准确
- **定理9.2.3** 空集是一切集合的子集
 - 即，对任意的集合 A ， $\emptyset \subseteq A$ 。
 - 证明：反证法，假设存在集合 A ，使 $\emptyset \not\subseteq A$ ，则存在 x ，使 $x \in \emptyset$ ，且 $x \notin A$ 。
 - 这与空集 \emptyset 的定义矛盾，所以定理得证。
($\forall x$)($x \notin \emptyset$) 为永真式，恒成立。



推论 空集是唯一的

证 假设存在空集 \emptyset_1 和 \emptyset_2 ，由定理9.2.3有

$$\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2 \text{ 和 } \emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$$

根据集合相等的定义，有 $\emptyset_1 = \emptyset_2$

定理9.2.3 空集是一切集合的子集



下列描述中错误的是

- ☐ A $\emptyset \subseteq \emptyset$
- ☒ B $\emptyset \in \emptyset$
- ☐ C $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
- ☐ D $\emptyset \in \{\emptyset\}$

提交

定义9.2.6 全集 (universal set)



- 在给定的问题中，所考虑的所有事物的集合称为**全集**，记作 E 。该定义亦可叙述为，在一个具体问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为全集。全集的定义可符号化表示为

$$E = \{ x \mid x = x \}$$

- 全集是有相对性的，不同的问题有不同的全集。即使同一个问题也可以取不同的全集。
- 性质：**对于任何集合 A ，都有 $A \subseteq E$ 。



9.3 集合的运算

- 定义9.3.1: 集合的基本运算包括并, 交, 差 (相对补), 余集和对称差。
- 在原来集合的基础上, 通过这些运算产生新的集合。
- 分别定义如下: 对集合 A 和 B

(1) 并集(**union**) $A \cup B$ 定义为

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

(2) 交集(**intersection**) $A \cap B$ 定义为

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$



定义9.3.1 （五种基本运算）

(3) 差集 (difference) $A - B$ 定义为

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

又称 B 对 A 的相对补集。

差运算与并运算之间不是逆运算。

一般而言，
 $(A - B) \cup B \neq A$
 $(A \cup B) - B \neq A$



定义9.3.1 (五种基本运算)

(4) A 的余集(**complement**) $-A$ 定义为

$$-A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$$

其中 E 为全集。 A 的余集又称 A 的绝对补集，也是 A 对 E 的相对补集

(5) 对称差(**symmetric difference**) $A \oplus B$ 定义为 *

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \bar{\vee} x \in B\}$$

只有 A 或者 B 出现的元素



下列命题中正确的是

- ☒ A $x \in \{x\} - \{\{x\}\}$
- ☒ B $\{x\} \subseteq \{x\} - \{\{x\}\}$
- ☒ C $A = \{x\} \cup x$, 则 $x \in A$ 且 $x \subseteq A$
- ☐ D $A - B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

提交



定义9.3.2 广义并和广义交

- 设 A 为集合， A 的元素也都是集合，则将 **A 的所有元素的元素组成的集合**称为 **A 的广义并**，记作 $\cup A$ ；符号化表示为

$$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$$

$$\cup A = \{x \mid x \in \text{某个 } z \in A\} \quad (\text{简化写法})$$

- 此外，对空集 \emptyset 可以进行广义并， $\cup \emptyset = \emptyset$ 。
- 并集的推广，去掉内层括号，重复元仅计一次

若 $A = \{A_1, A_2 \cdots A_n\}$, 则 $\cup A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$



定义9.3.2 广义并和广义交

- 设 A 为非空集合， A 的元素也都是集合，将 A 的所有元素的公共元素组成的集合称为 A 的广义交，记作 $\cap A$ 。符号化表示为

$$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

$$\cap A = \{x \mid x \in \text{每个 } z \in A\} \quad (\text{简化写法})$$

- $\cap \emptyset$ 不是集合，没有意义。空集 \emptyset 不含任何元素， $\cap \emptyset$ 无意义。

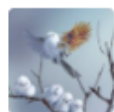
若 $A = \{A_1, A_2 \cdots A_n\}$, 则 $\cap A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$

为什么空集只有广义并没有广义交？

[关注问题](#)[写回答](#)[邀请回答](#)[好问题](#)[添加评论](#)[分享](#)[...](#)

1 个回答

默认排序 



beanandbean

喵

17 人赞同了该回答

集合论中定义一个集合的广义并满足 $x \in \bigcup X \Leftrightarrow \exists y(y \in X \wedge x \in y)$ ，而广义交满足 $x \in \bigcap X \Leftrightarrow \forall y(y \in X \rightarrow x \in y)$ 。

现严格按照定义考虑 $X = \emptyset$ ，则对于所有集合 y ， $y \in X$ 都为假。因此空集的广义并满足任意集合 $x \notin \bigcup \emptyset$ ，即 $\bigcup \emptyset = \emptyset$ 。但是对于广义交，根据数理逻辑上假推出真的原则， $X = \emptyset$ 时任何 y 都满足 $y \in X \rightarrow x \in y$ ，所以对于任意集合 x 都应该有 $x \in \bigcap \emptyset$ 。但是根据罗素悖论，包含所有集合的集合不存在，所以空集的广义交不存在。这应当算是试图将交和并这种直觉定义推广到集合论上所有可能集合所带来的副作用。



广义并和广义交举例

$$\cup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$$

$$\cap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

- $A = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}\}$
- $\cup A = \{a, b, c, d\}$
- $\cap A = \{b\}$



定义9.3.3 幂集 (power set)

- 设 A 为集合，由 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集，记作 $P(A)$ 。符号化表示为

$$P(A) = \{x | x \subseteq A\}$$

对任意的集合 A ，有 $\emptyset \subseteq A$ 和 $A \subseteq A$ ，因此有 $\emptyset \in P(A)$ 和 $A \in P(A)$ 。

$$x \in P(A) \Leftrightarrow x \subseteq A$$

- 思考：集合的广义并与求幂之间的关系

$$\bigcup(P(A)) = A$$



A的幂集有多少个元素？

- $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

- $A = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}\}$

$$\cup A = \{a, b, c, d\}$$

$$P(\{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}\}) = \{ \emptyset, \\ \underline{\{\{a, b, c\}\}}, \underline{\{\{a, b, d\}\}}, \underline{\{\{b, c, d\}\}}, \underline{\{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}}, \\ \underline{\{\{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}}, \underline{\{\{a, b, d\}, \{b, c, d\}\}}, \\ \underline{\{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}\}} \}$$

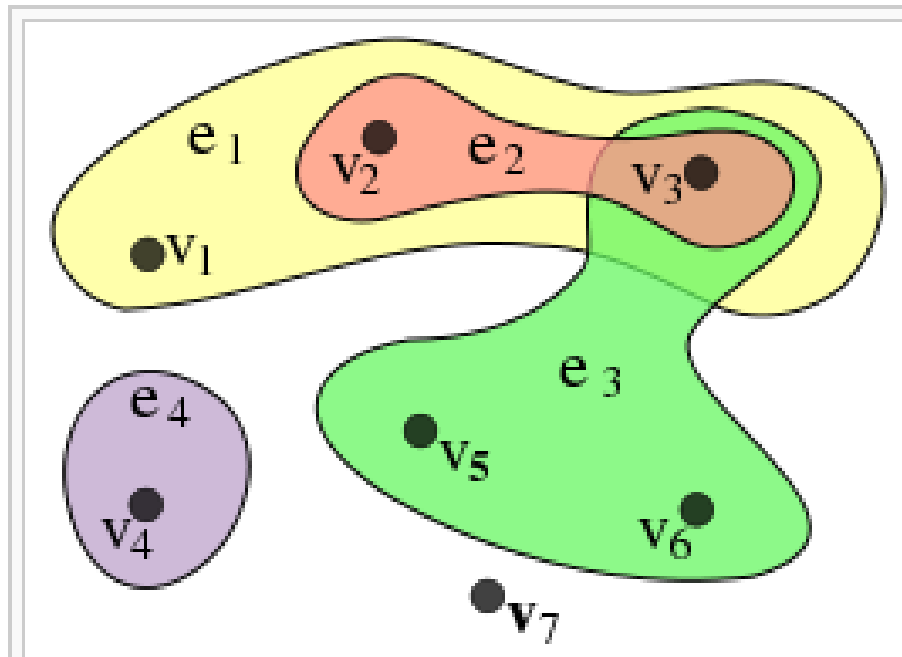
Application Example-Hypergraph



- In mathematics, a **hypergraph** is a generalization of a graph in which an edge can connect any number of vertices.
- Formally, a hypergraph H is a pair $H = \{X, E\}$, where X is a set of elements called nodes or vertices, and E is a set of non-empty subsets called hyperedges or edges.
- Therefore, E is a subset of $P(X) - \emptyset$, where $P(X)$ is the **power set** of X .



An Example



An example of a hypergraph, with
 $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$
and $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} =$
 $\{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\},$
 $\{v_3, v_5, v_6\}, \{v_4\}\}.$



Applications

- Recommender system
 - Communities as hyperedges
- Image retrieval/Image classification
 - Correlations as hyperedges
- Image segmentation
 - Similar neighboring pixels as hyperedges
- ...



设 A 为一个有限集，且 $|A|=n$ ，则 A 的子集个数为

- ☐ A n
- ☐ B $2n$
- ☒ C 2^n
- ☐ D n^2



子集的个数

- **定理：** 设 A 为一个有限集，且 $|A|=n$ ，则 A 的子集个数为 2^n

– **证明：** 集合 A 的子集最多有 n 个元素，最少有0个元素。

0个元素的子集共有 $C(n, 0)$ 个；

1个元素的子集共有 $C(n, 1)$ 个；

.....

n 个元素的子集共有 $C(n, n)$ 个。

因此，集合 A 共有子集 $C(n, 0) + C(n, 1) + \dots$

$C(n, n) = 2^n$ 个。



$A = \{\{a, \{b, c\}\}, \{a, \{b, d\}\}, \{b, \{c, d\}\}\}$, 以下哪些说法是对的?

A

$$\cup A = \{\{a, b, c, d\}\}$$

B

$$\cap A = \{b\}$$

C

$$|\cup A| = 5$$

D

$$|P(A)| = 8$$

思考题



仅用空集 \emptyset 构造：

1. 一个相异集合的无穷序列，序列中每个集合至多仅包含一个元素；
 2. 一个相异集合的无穷序列，序列中第 i 个集合恰包含 i 个元素 ($i = 0, 1, \dots$)。
- $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots$
 - $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$
 $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

9-3-4 有序对



- 由两个元素 x 和 y （允许 $x=y$ ）按给定次序排列组成的二元组称为一个有序对或序偶，记作 $\langle x, y \rangle$ ，其中 x 是它的第一元素， y 是它的第二元素。
- 有序对 $\langle x, y \rangle$ 具有以下性质：
 1. 当 $x \neq y$ 时， $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$ 。
 2. $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ 的充要条件是 $x = u$ 且 $y = v$ 。

用集合的形式，有序对 $\langle x, y \rangle$ 定义为

$$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$



定义9.3.5 n 元组

- 若 $n \in N$ 且 $n > 1$, x_1, x_2, \dots, x_n 是 n 个元素, 则 n 元组 $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ 定义为

当 $n = 2$ 时, 二元组是有序对 $\langle x_1, x_2 \rangle$ 。

当 $n \neq 2$ 时,

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \langle \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$$

定义9.3.6 集合A和B的笛卡儿积 (Descartes product)



- 设 A, B 为集合，用 A 中元素为第一元素， B 中元素为第二元素构成有序对。
- 所有这样的有序对组成的集合称为 A 和 B 的笛卡儿积，记作 $A \times B$ 。
- A 和 B 的笛卡儿积的符号化表示为

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$$



9-3-7 n 阶笛卡儿积

- 若 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n > 1$, A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个集合, 它们的 n 阶笛卡儿积记作 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, 并定义为

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

$$= \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n \}$$

- $A = \{a, b\}$ $B = \{0, 1, 2\}$
- $A \times B = \{ \langle a, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle \}$
- $B \times A = \{ \langle 0, a \rangle, \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 0, b \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle \}$
- $A \times A = A^2 = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle \}$

9-3-8 集合运算的优先顺序



- 称广义并，广义交，幂集，绝对补运算($\cup A$, $\cap A$, $P(A)$, $-A$)为一元运算；
- 并，交，对称差，笛卡儿积，相对补运算($-$, \cup , \cap , \oplus , \times)为二元运算。
- 一元运算($-A$, $P(A)$, $\cap A$, $\cup A$)优先于二元运算($-$, \cap , \cup , \oplus , \times)；
- 二元运算优先于集合关系运算($=$, \subseteq , \subset , \in)；
- 集合运算优先于逻辑运算(\neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow , \Leftrightarrow , \Rightarrow)。
- 括号内优先于括号外的；同一层括号内，相同优先级的，按从左到右的顺序进行。



9.4 集合的图形表示法

9-4-1 文氏图 (Venn Diagram)

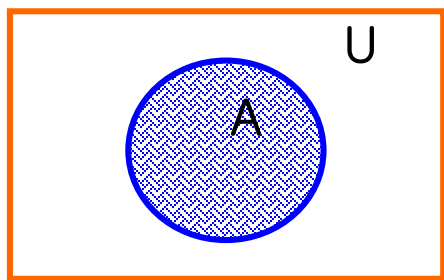
- 英国逻辑学家J.Venn(1834-1923)于1881年在《符号逻辑》一书中，首先使用相交区域的图解来说明类与类之间的关系。
- 后来人们以他的名字来命名这种用图形来表示集合间的关系和集合的基本运算的方法。简称文氏图。

9-4-1 文氏图 (Venn Diagram)

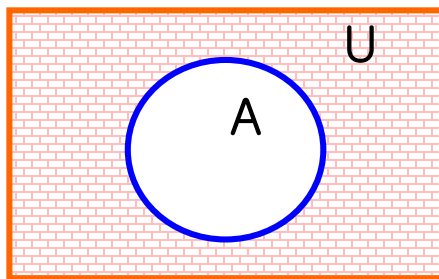


- 其构造如下：用一个大的矩形表示全集的所有元素（有时为简单起见，可将全集省略）。
- 在矩形内画一些圆（或任何其它形状的闭曲线），用圆的内部的点表示相应集合的元素。不同的圆代表不同的集合。用阴影或斜线的区域表示新组成的集合。
- 文氏图的优点是形象直观，易于理解。
缺点是理论基础不够严谨。因此只能用于说明，不能用于证明。

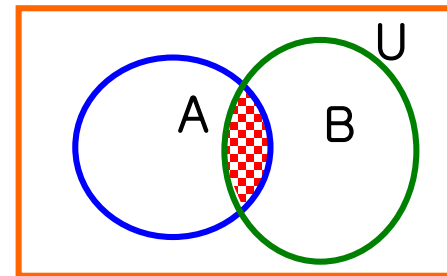
文氏图表示的集合并、交、差、补运算



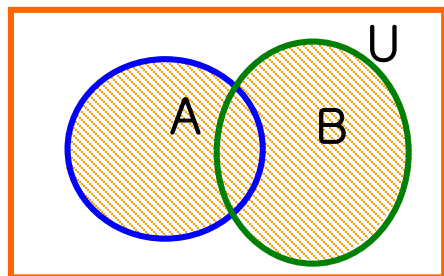
A



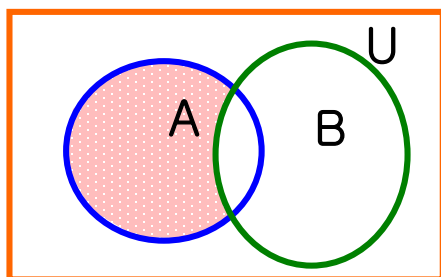
$-A$



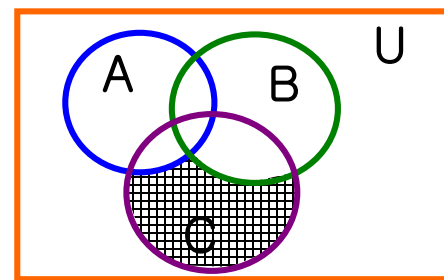
$A \cap B$



$A \cup B$



$A - B$



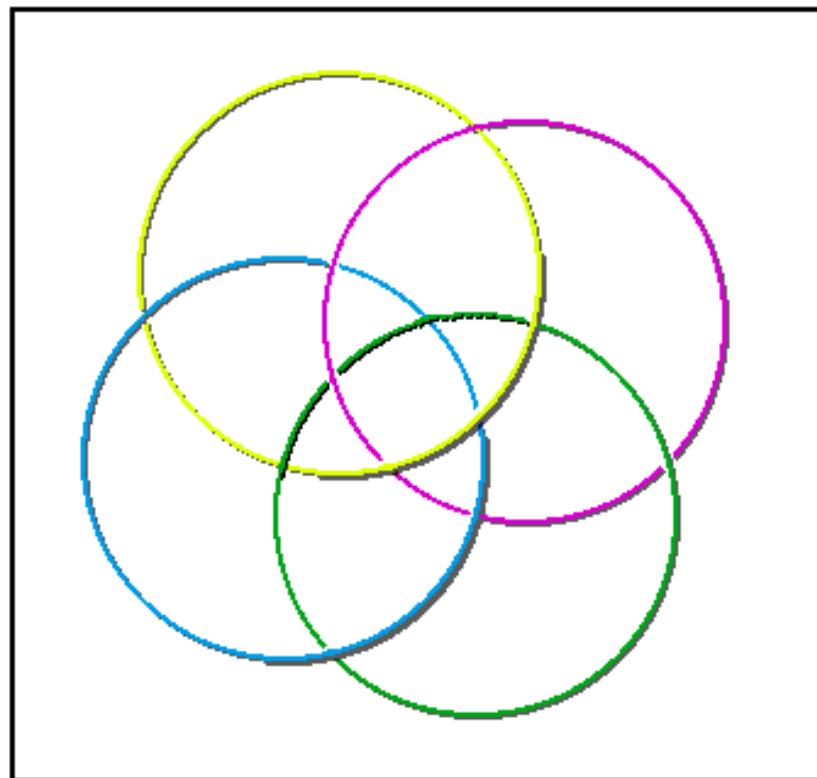
$-(A \cup B) \cap C$



试画出4个集合的文氏图



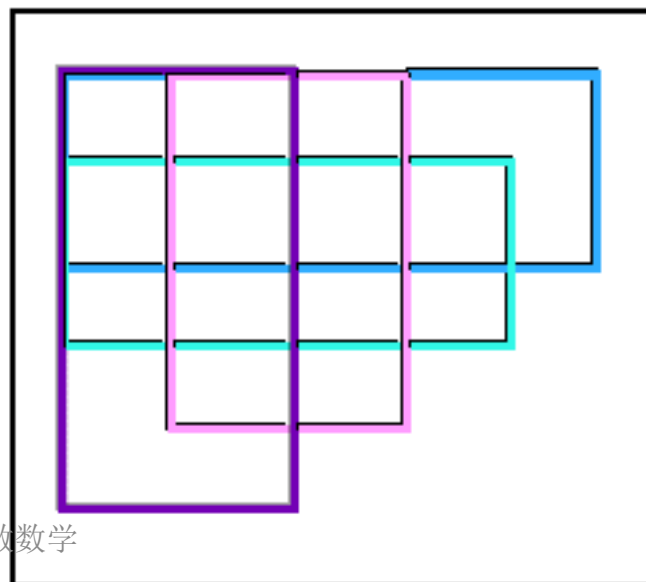
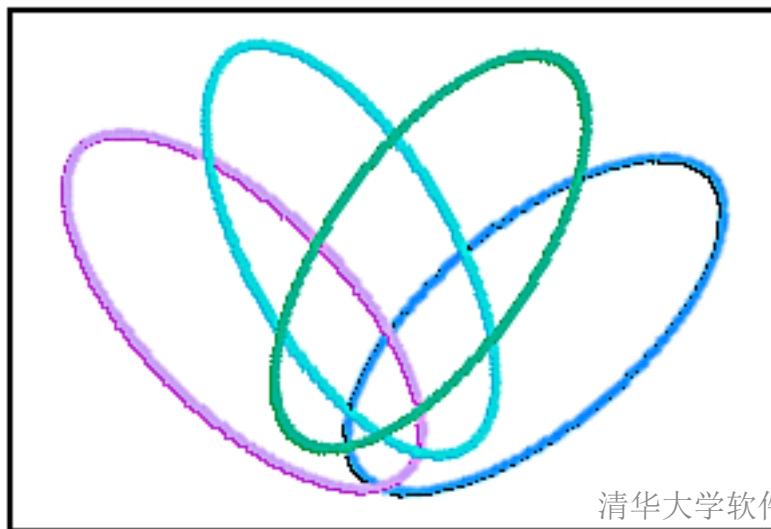
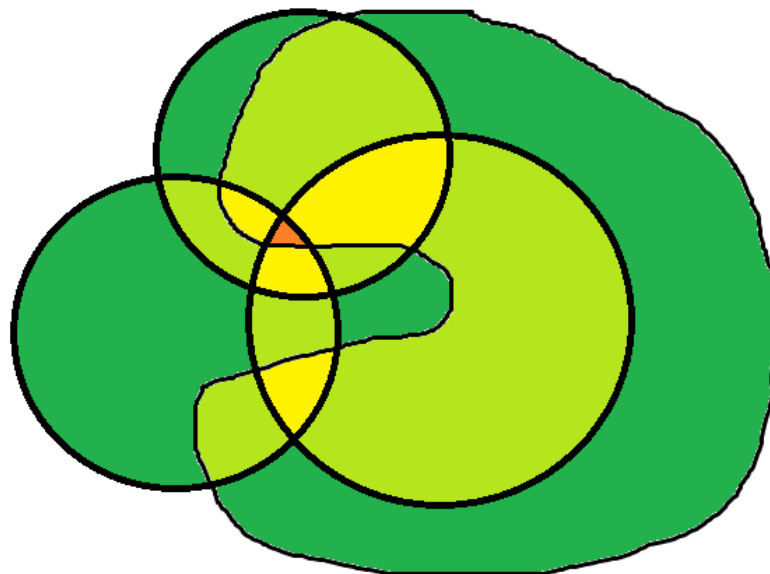
文氏图？



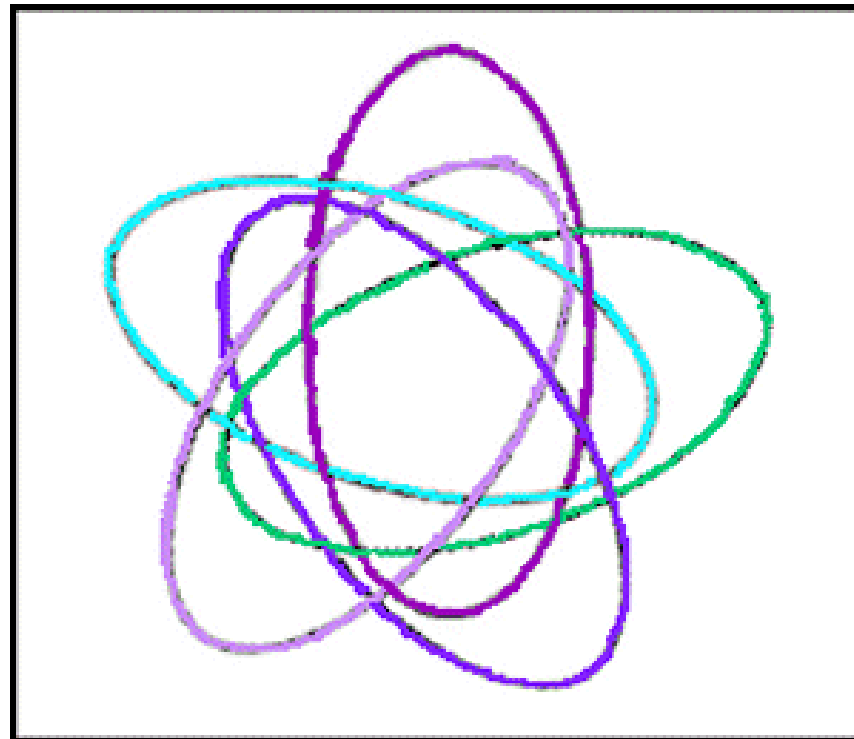
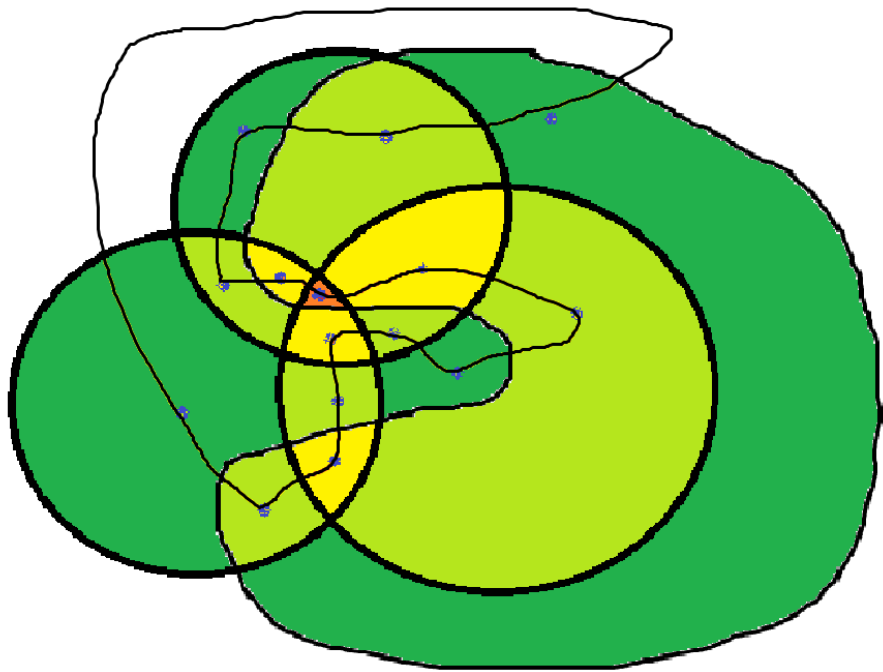
不存在：紫色和蓝色； 绿色和黄色



文氏图 ($n = 4$)

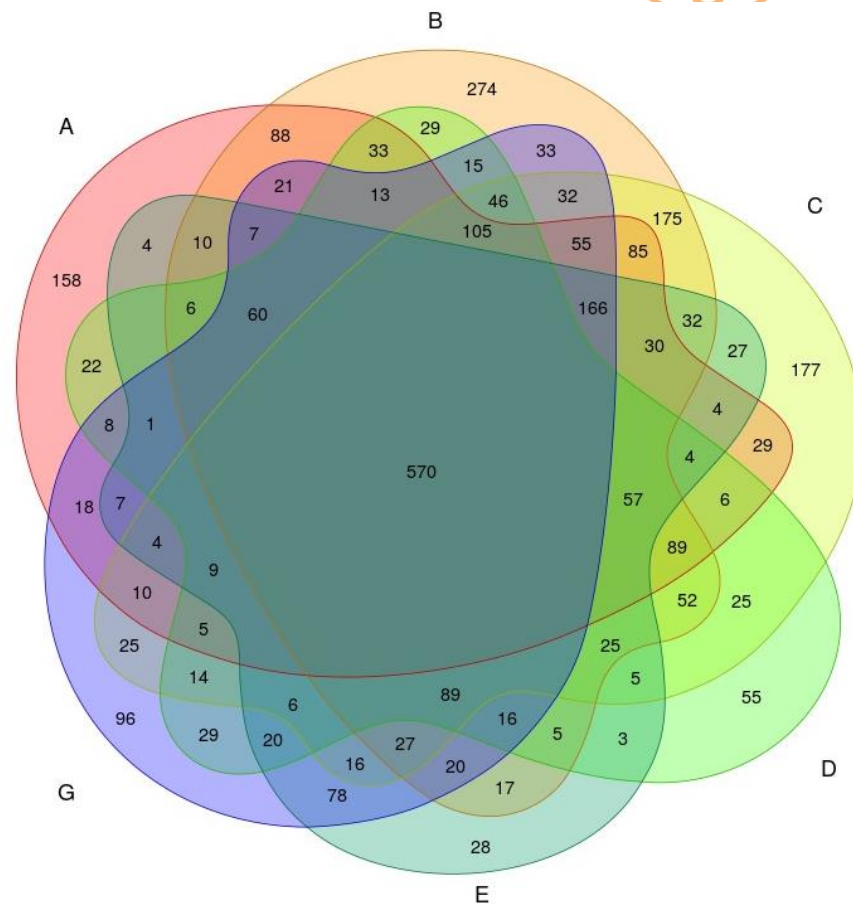
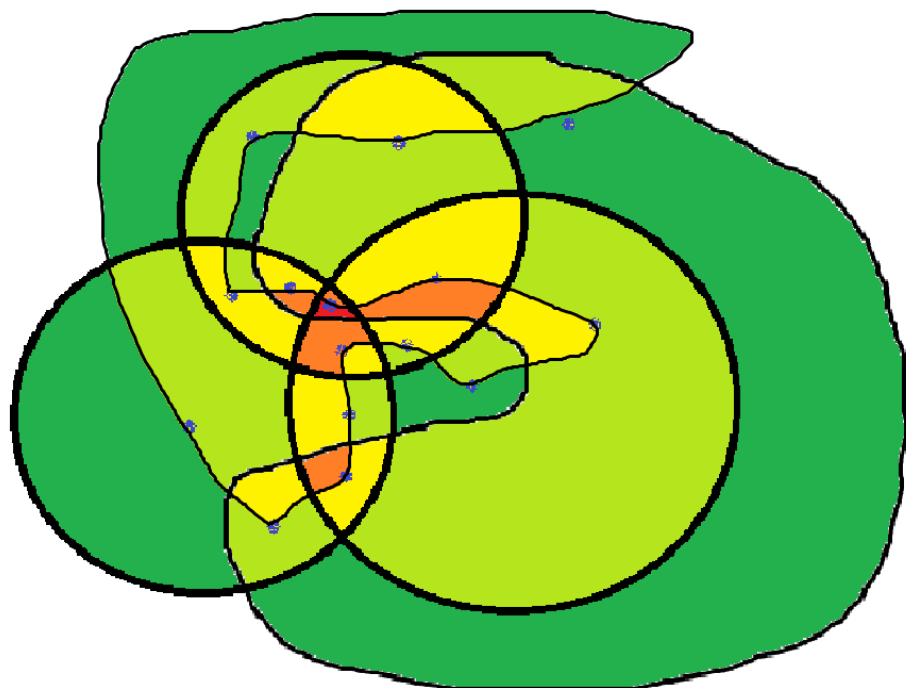


文氏图 ($n = 5$)

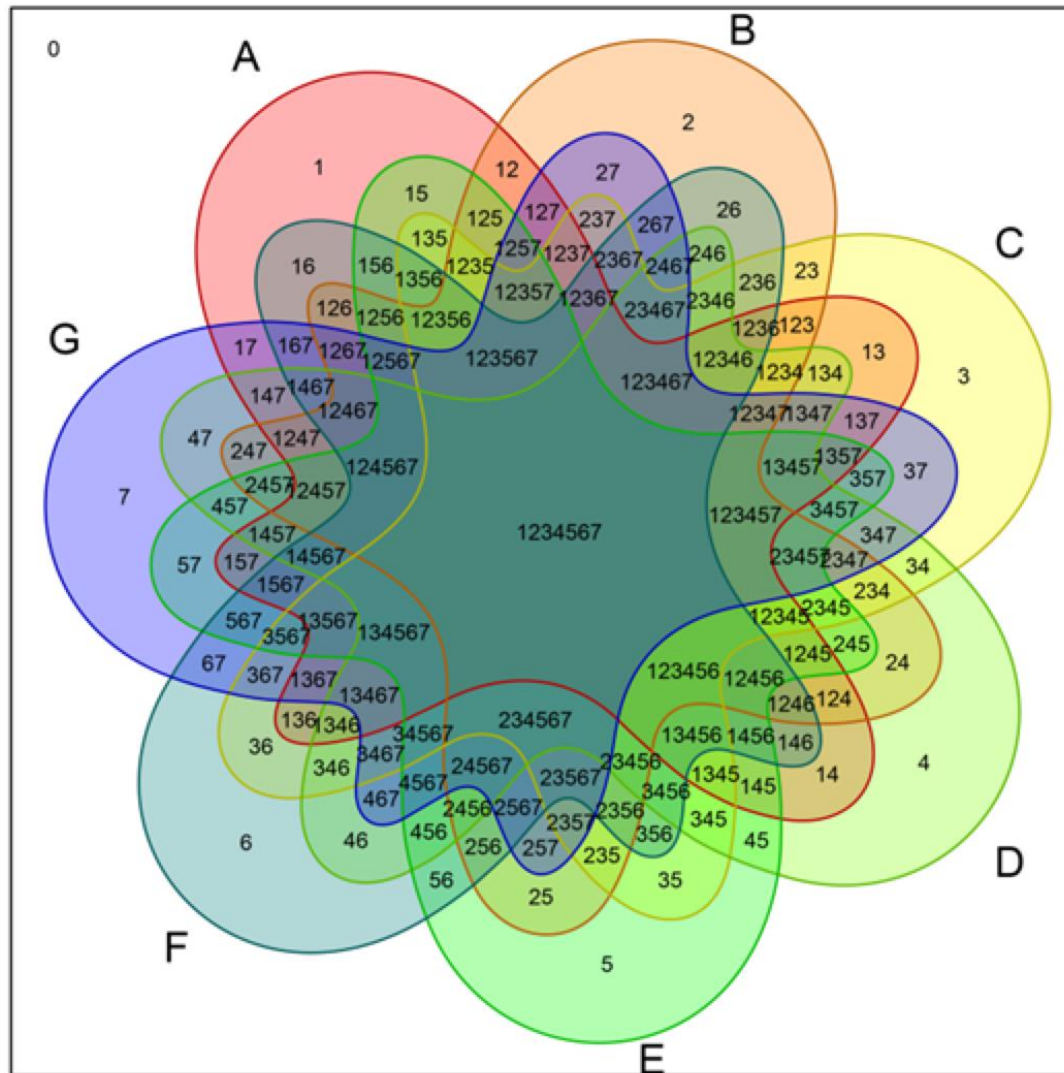


包含5个集合所有相交的可能：32个区域，每个集合包含了16个区域

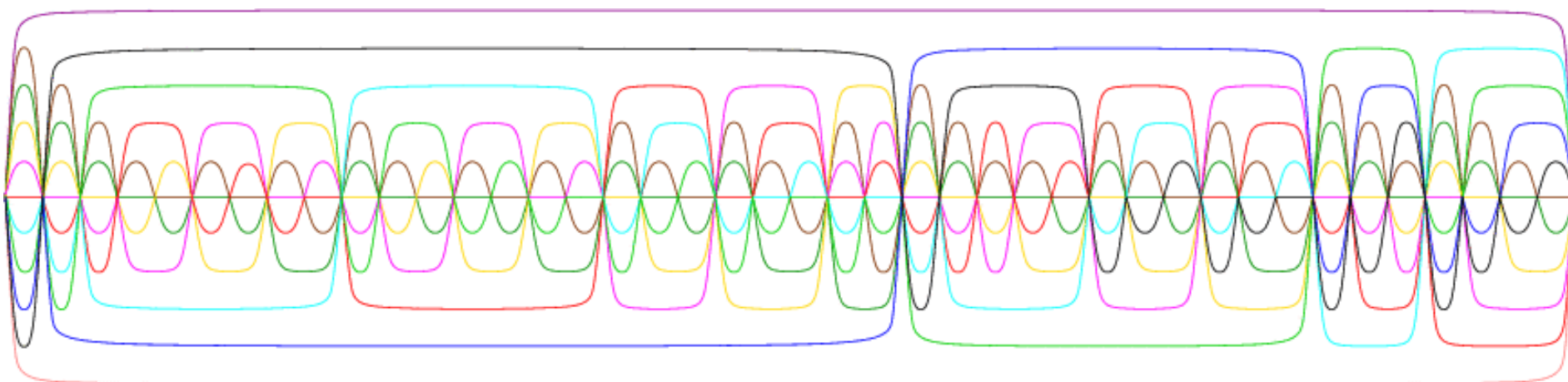
文氏图 ($n = 6$)



7个集合



11个集合





$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$\neg A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \bar{\vee} x \in B\}$$

元素 x \in 集合 A

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x) \neg (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

$$E = \{x \mid x = x\}$$

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

对任意的集合 A , $\emptyset \subseteq A$

$$A \text{ 和 } B \text{ 不相交} \Leftrightarrow \neg (\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$$

$$\bigcup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\}$$

$$\bigcup \emptyset = \emptyset$$

$$\bigcap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

$\bigcap \emptyset$ 无意义

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$



谢谢
shixia@tsinghua.edu.cn