第三章习题

3. 设$f(z)$在单连通域B内处处解析，C为B内任何一条正向简单闭曲线，问

$$\oint_C Re[f(z)]dz = 0, \quad \oint_C Im[f(z)]dz = 0$$

是否成立？如果成立，给出证明；如果不成立，举例说明.

9. 计算下列积分：

(1).

$$\oint_C \left(\frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i}\right) dz,$$

其中$C: |z| = 4$为正向;

(3).

$$\oint_{C=C_1+C_2} \frac{\cos z}{z^2} dz,$$

其中$C_1: |z| = 2$ 为正向， $C_2: |z| = 3$为负向;

(5).

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^3} dz,$$

其中a为$|a| \neq 1$的任何复数， $C: |z| = 1$为正向.

10. 证明：当C为任何不通过原点的简单闭曲线时，

$$\oint_C \frac{1}{z^2} dz = 0.$$

16. 设函数$f(z)$在$0 < |z| < 1$内解析，且沿任何圆周$C: |z| = r, 0 < r < 1$的积分等于零，问$f(z)$是否必需在$z = 0$处解析？试举例说明之.

17. 设$f(z)$与$g(z)$在区域D内处处解析，C为D内的任何一条简单闭曲线，它的内部全含于D. 如果$f(z) = g(z)$在C上所有的点处成立，试证在C内所有的点处$f(z) = g(z)$也成立.

21. 设$f(z)$在区域D内解析，C为D内的任意一条正向简单闭曲线，证明：对在D内但不在C上的任意一点z_0, 等式：

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0} dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$$

成立. 提示：证明两边均等于$2\pi i f'(z_0)$.

27. 如果$f(z)=u+iv$是一解析函数，试证：

1) $\overline{\overline{if(z)}}$ 也是解析函数；

3)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2=4\left[(u_x)^2+(v_x)^2\right]=4|f'(z)|^2.$$

31. 设$v=e^{px}\sin y$, 求p的值使v为调和函数，并求出解析函数$f(z)=u+iv$.

补充题：设$f(z)$在复平面处处解析.

1/. 令$r>0$,

$$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|.$$

利用Cauchy积分公式证明：对任意非负整数n有以下不等式：

$$|f^{(n)}(0)|\leq\frac{n!M(r)}{r^n}.$$

2/. 若$f(z)$有界，证明Liouville定理：有界的整函数是常数. (处处解析的函数称为整函数)

3/. (Liouville定理的推广) 若存在正常数M，非负整数n，使得对任意$z\in C$均有

$$|f(z)|\leq M\sum_{k=0}^{n}|z|^k.$$

证明：$f(z)$是一次数不超过n的多项式.