第十五周作业

1. $P_2(\mathbb{R})=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_i\in\mathbb{R}\}$

$(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$

定义 $\begin{aligned} P_2(\mathbb{R}) &\xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{R} \\ f(x) &\longmapsto f(0) \end{aligned}$ 则 $\varphi_1\in P_2(\mathbb{R})^*$

定义 φ_2 $\begin{aligned} P_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{F}=\mathbb{R} \\ f &\longmapsto f'(0) \end{aligned}$，则 $\varphi_2\in P_2(\mathbb{R})^*$

求 $\vec{u}_1,\vec{u}_2\in P_2(\mathbb{R})$，使 $(-,\vec{u}_i)=\varphi_i \quad i=1,2.$

2. $P_2(\mathbb{R})=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_i\in\mathbb{R}\}$ 给定3个互异实数 b_1,b_2,b_3. 令 $P_k(x)=\prod_{j\neq k}(x-b_j)\Big/\prod_{j\neq k}(b_k-b_j)\in P_2(\mathbb{R})$, $k=1,2,3$

(Lagrange 插值多项式，$P_k(b_k)=1$, $P_k(b_j)=0 \quad j\neq k$)

(1) 证明：$P_1(x),P_2(x),P_3(x)$ 是 $P_2(\mathbb{R})$ 的一组基.

(2) 求它在 $P_2(\mathbb{R})^*$ 中对偶基.

(3) 给定 $y_1,y_2,y_3\in\mathbb{R}$，证明：次数 ≤ 2 的满足 $f(b_k)=y_k$ $k=1,2,3$ 的实系数多项式是唯一的.（不用多项式理论，应用(1)).

3. 设 g, h 是 V 上两个非退化双线性型，$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n \in V$ 一组基，g, h 在这组基下表示矩阵分别是 A, B.

证明：存在线性变换 φ：$V \longrightarrow V$ 满足

$$g(\varphi(x), y) = h(x, y) \qquad \forall x, y \in V$$

并求 φ 在上述基下矩阵.

4. $\mathbb{R}^4$ 上定义双线性型：$g(x, y) = x^T A y$，其中

$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$. 满足 $g(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) < 0$ 的非零向量称为时间向量，$g(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) = 0$ 非零向量称为光向量，

证明：一个时间向量不可能正交于一个光向量.

(提示：Cauchy-Schwarz 不等式：

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2))$$