第四周作业

$$T:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}x_1\\2x_2\\3x_3\end{pmatrix}$$

1. 设 $T: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ 定义为 $T\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}x_1\\2x_2\\3x_3\\\cancel{nx_n}\end{pmatrix}$

求T的全部不变子空间.(~~只考虑$n=3$情形,若无法解答一般情形~~).

2. 设V是一个复4维空间,$\varphi: V\longrightarrow V$是线性变换,设$\varphi$在V的一组基$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&4&-2\\2&-1&0&1\\2&-1&-1&2\end{pmatrix}$$

求证:由向量e_1+2e_2和$e_2+e_3+2e_4$生成的子空间U是φ的不变子空间.

3. 设V是复n维空间,线性变换σ在V的一组基$\{e_1,\cdots,e_n\}$下矩阵是

$$\begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda\end{pmatrix}$$

证明:(1) V中含e_n的σ的不变子空间只有V;

(2) V中任何非零的σ的不变子空间包含e_1;

(3) V不能写成两个非平凡不变子空间的直和.

(即非零)

4. 设 V 是一个复 n 维空间，$\sigma: V \to V$ 线性变换.

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$，$(f(x), g(x)) = 1$. 且 $f(\sigma)g(\sigma) = 0_V$

（注：若 $h(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$，则 $h(\sigma) = a_k \sigma^k + \cdots + a_1\sigma + a_0 \, id_V$ 是 V 上线性变换）

证明：$V = V_1 \oplus V_2$　其中 $V_1 = \ker f(\sigma) \xlongequal{定义} \{v \in V \mid f(\sigma)(v) = 0\}$，$V_2 = \ker g(\sigma) \xlongequal{定义} \{v \in V \mid g(\sigma)(v) = 0\}$

（提示：$(f(x), g(x)) = 1 \Rightarrow \exists\, u(x), v(x)$，$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1 \Rightarrow \cancel{f(x)}\, f(\sigma)u(\sigma) + g(\sigma)v(\sigma) = id_V$

$\forall v \in V$，$v = id_V(v) = f(\sigma)u(\sigma)(v) + g(\sigma)v(\sigma)(v)$.

$g(\sigma)[f(\sigma)u(\sigma)(v)] = 0 \Rightarrow f(\sigma)u(\sigma)(v) \in \ker g(\sigma)$）.

5. 设 $T: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 定义为 $T(v) = Av$. 求 $\mathbb{C}^n$ 的根子空间分解. 求可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是分块对角阵.（这里 P 是由根子空间的基合并而成）. 其中 A 是

(1) $n=3$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) $n=3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

(3) $n=4$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$