

## 第 5 次计算题作业 - 答案

- 1、视差测量给出变星 RR Lyrae 的距离为 230 pc。一个球状星团中的一颗相似的变星看起来比 RR Lyrae 要暗 160,000 倍。(a) 这个球状星团距离我们多远？(b) 这个距离对于比较银晕和银盘的大小有何启示？ (20-36)

$$(a) B = \frac{1}{160000} B_{RR}, L = L_{RR}$$

$$d = \left( \frac{L/B}{L_{RR}/B_{RR}} \right)^{1/2} d_{RR} = 230 \text{ pc} \times \sqrt{160,000} = 92,000 \text{ pc} \approx 3.00 \times 10^5 \text{ ly}$$

(b) 可以应用球状星团中变星的亮度来估计球状星团与我们之间的距离，同时比较我们与银心的距离。银盘直径大约为 30 kpc，而发现球状星团与我们的距离比银心与我们的距离大 1 个数量级，可认定为银晕的直径。

- 2、一颗恒星以圆轨道绕银心黑洞 ( $M_{BH} = 8 \times 10^{36} \text{ kg}$ ) 运转，轨道半径为 0.0131 光年 ( $1.24 \times 10^{14} \text{ m}$ )。这颗恒星的平均轨道速率是多少？ (20-42)

(距离银心 0.1 光年内适用开普勒定律) 已知轨道半径、中心天体质量，则：

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{G \times 8 \times 10^{36} \text{ kg}}{1.24 \times 10^{14} \text{ m}}} = 2.075 \times 10^6 \text{ ms}^{-1}$$

- 3、银河系中心的超大质量黑洞的史瓦西半径是多少？密度是多少？与恒星质量黑洞密度比较如何？ (20-43)

$$R_S = \frac{2GM_{BH}}{c^2} = \frac{2 \times G \times 8 \times 10^{36} \text{ kg}}{c^2} = 1.186 \times 10^{10} \text{ m}$$

$$\rho = \frac{M_{BH}}{\frac{4}{3}\pi R_S^3} = \frac{8 \times 10^{36} \text{ kg}}{\frac{4}{3}\pi (1.186 \times 10^{10} \text{ m})^3} = 1.145 \times 10^6 \text{ kg m}^{-3}$$

恒星质量黑洞：质量约为  $3M_{\odot} \approx 6 \times 10^{30} \text{ kg}$

$$R_{S,2} = 8.898 \times 10^3 \text{ m}$$

$$\rho_2 = 2.033 \times 10^{18} \text{ kg m}^{-3} \gg \rho$$

银河系中心黑洞密度远小于恒星质量黑洞密度。

- 4、如果一颗新发现天体的光变时标为 83 分钟，那么它的最大尺寸是多少？ (19-38)

光变时标对应辐射源尺度上限，即该天体最大半径

8.3 光分对应 1 AU

$$\therefore \text{最大尺寸为 } 83 \text{ 光分} = 10 \text{ AU}$$

$$83 \text{ 光分} = (83 \times 60) \text{ s} \times c = 1.494 \times 10^{12} \text{ m}$$

- 5、一类星体的光度为  $10^{41} \text{ W}$  (J/s)，有  $10^8 M_{\odot}$  的物质可供它吸积。假设类星体光度恒定，吸积能量转换效率为 20%，请估计这个类星体的寿命。 (19-40)

$$\text{总吸积能量 } E = 0.20mc^2 = 0.20 \times 10^8 M_{\odot} \times c^2 = 3.6 \times 10^{54} \text{ J}$$

$$\text{类星体寿命 } t = \frac{E}{L} = \frac{3.6 \times 10^{54} \text{ J}}{10^{41} \text{ W}} = 3.6 \times 10^{13} \text{ s} \approx 1.1 \times 10^6 \text{ 年}$$

- 6、星系 M87 从其中心超大质量黑洞抛出的物质延展到距离星系约 30,000 pc 的地方。M87 到我们的距离约为 17 Mpc。这些物质在天球上的角大小是多少度？与月球的角大小相比如何？ (19-44)

延展距离  $d = 30,000 \text{ pc}$ ；物体距离  $D = 17 \text{ Mpc}$ ，则角大小为：

$$\delta = 2.06 \times 10^5 \left( \frac{d}{D} \right) \text{ arcsec} = 2.06 \times 10^5 \left( \frac{3 \times 10^4}{17 \text{ M}} \right) \text{ arcsec} = 363.53 \text{ arcsec} = 0.10 \text{ deg}$$

月球角大小  $\approx 30 \text{ arcmin} = 0.50 \text{ deg}$ ，大于以上物质在天球上的角大小。

- 7、20 世纪后半叶，哈勃常数  $H_0$  的估计值处于 50-100 km/s/Mpc 之间。基于这些估计值，计算宇宙的年龄（以年为单位）。你的答案与由恒星演化理论给出的恒星年龄或者与地球的地质年龄矛盾吗？ (21-35)

$$\text{宇宙年龄 } t[\text{s}] = \frac{1}{H_0 [\text{km/s/Mpc}]} \times \frac{1 \text{ Mpc}}{1 \text{ km}} = \frac{3.086 \times 10^{19}}{H_0}$$

若取  $H_0 = 50 \text{ km/s/Mpc}$ ：

$$t_{\min} = \frac{3.086 \times 10^{19}}{50} \text{ s} = 6.172 \times 10^{17} \text{ s} = 1.959 \times 10^{10} \text{ 年} \approx 2 \text{ 百亿年}$$

若取  $H_0 = 100 \text{ km/s/Mpc}$ ：

$$t_{\max} = \frac{3.086 \times 10^{19}}{100} \text{ s} = 3.086 \times 10^{17} \text{ s} = 9.779 \times 10^9 \text{ 年} \approx 1 \text{ 百亿年}$$

银河系最老的恒星年龄约 107 亿年

地球地质年龄  $\geq 46$  亿年

可见估算值与恒星年龄和地球地质年龄都不矛盾

- 8、一个遥远星系的红移  $z = 5.82$ ，退行速度  $v_r = 287,000 \text{ km/s}$ 。(a) 如果  $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$ ，而且哈勃定律在如此大的距离上依然适用，那么这个星系的距离是多少？  
(b) 假设哈勃时间为 138 亿年，这个星系的回溯时间对应的宇宙年龄是多少？(c) 那时宇宙的尺度因子是多少？ (21-39)

$$(a) d = \frac{v_r}{H_0} = \frac{287,000 \text{ km/s}}{70 \text{ km/s/Mpc}} = 4100 \text{ Mpc}$$

(b)  $t_{\text{Hubble}} = 138 \times 10^8 \text{ 年}$ ，回溯时间  $\tau$  = 遥远天体发出的光到达地球所经历的时间，

假定宇宙膨胀匀速，则

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\text{今天的宇宙尺度因子} - \text{星系发出时尺度因子}}{H_0} = \frac{1 - 1/(1+z)}{H_0} = \frac{1}{H_0} - \frac{1}{H_0(1+z)} \\ &= t - \frac{1}{H_0(1+z)} = t \left( 1 - \frac{1}{1+z} \right) \end{aligned}$$

则该星系的回溯时间对应的宇宙年龄为：

$$t - \tau = \frac{t}{1+z} = \frac{t}{(1+5.82)} = \frac{138 \text{ 亿年}}{6.82} = 20.23 \text{ 亿年}$$

(c) 当时的宇宙尺度因子为： $\frac{1}{1+5.82} = 0.1466$

- 9、COBE 观测表明太阳系相对于宇宙微波背景参考系以  $368 \text{ km/s}$  的速率向着巨爵座运动。与这个运动相关的蓝移（红移  $z$  的负值）是多少？ (21-41)

相互靠近，所以退行速度应取负号： $v_r = -368 \text{ km/s}$

$$\text{红移 } z = \frac{v_r}{c} = \frac{-368 \text{ km/s}}{(3 \times 10^8) \text{ ms}^{-1}} = -0.00123$$

蓝移是 0.00123

- 10、当前宇宙正常物质的密度为  $4 \times 10^{-28} \text{ kg/m}^3$ 。如果最遥远星系的红移  $z = 10$ ，那么当光离开这些遥远星系时的宇宙的正常物质的平均密度是多少？（21-44）

假设宇宙匀速膨胀，该星系的光发出时，宇宙尺度因子为  $\frac{1}{1+z} = \frac{1}{11}$

即此刻抵达地球时，宇宙尺度为当时的  $\frac{1}{\frac{1}{1+z}} = (1+z) = 11$  倍

由于膨胀是各向同性的  $\therefore$  今天宇宙体积为当时的  $(11)^3$  倍，即密度为当时的  $\left(\frac{1}{11}\right)^3$  倍

$$\begin{aligned}\therefore \rho_{\text{before}} \times \left(\frac{1}{11}\right)^3 &= \rho_{\text{now}} = 4 \times 10^{-28} \text{ kg/m}^3 \\ \rho_{\text{before}} &= 4 \times 10^{-28} \text{ kg/m}^3 \times 11^3 = 5.324 \times 10^{-25} \text{ kg/m}^3\end{aligned}$$