双射的构造与证明

- $H(z)(n)$为z的小数点后的第n位没有搞懂什么意思

> - $R \approx N_2$
>
> 证明: 只需证$R \le N_2$, 且$N_2 \le R$
>
> (1) 先证$R \le N_2$. 为此只需证$(0, 1) \le N_2$.
>
> 构造函数$H: (0, 1) \to N_2$,
>
> 对$\forall z \in (0, 1)$, 有$H(z) \in N_2 = \{f \mid f: N \to \{0, 1\}\}$
>
> 其中z表示二进制无限小数
>
> $H(z): N \to \{0, 1\}$
>
> $\forall n \in N$, 取$H(z)(n)$为z的小数点后的第n位数
>
> 显然, $z_1 \ne z_2$时, $H(z_1) \ne H(z_2)$
>
> $\therefore$ H为单射, $\therefore (0, 1) \le N_2$.

- $H(z)$是一个从$\mathbb{N}$映射到$\{0,1\}$的函数，例如，假设$z = 0.8125 = 13/16$，那么z的二进制表示为$0.110100\cdots$
- 定义$H(z)(n)$为z的二进制表示的小数点后第n位，$H(z)(0) = 0, H(z)(1) = 1, H(z)(2) = 1, H(z)(3) = 0, \cdots$

双射的构造与证明

- 在蓝框处的转化是有问题的吗？例如0.35写作0.349999循环，但是0.349和0.3499都会变成0.349999循环，会破坏双射的条件

$$|R\times R|=|R|$$

$|R\times R| = |\,(0, 1]\times(0, 1]\,| = |\,(0, 1]\,| = |R|$

将 $x\in(0, 1]$表示为十进制小数，注意有些x 的表示不唯一，$\boxed{\text{如}0.35\text{ 也可以表示为}0.34\dot{9}\text{。}}$我们取后一种表达式，这种表达式的特征是不会在某一位后全是0，所以这种表达式称为x 的十进无限小数表达式，它是唯一的。特别地，1 的十进无限小数表达式是$0.\dot{9}$。这样，任给$x\in(0, 1]$，都有$x = 0.a0a1a2\cdots\cdots$。

- $0.349 = 0.348\dot{9}$，$0.3499 = 0.3498\dot{9}$，他们依然是与$0.34\dot{9}$不同的表达，因此不破坏双射的性质

基数大小关系

- 请问红框中两个基数的大小关系是从哪个定理推导出来的呢？

例6：

$$2^{\aleph_0} \le \boxed{\aleph_0 * 2^{\aleph_0} \le 2^{\aleph_0} * 2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0}$$

所以， $\aleph_0 * 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

在定理12.6.2（2）中，
取$k = \aleph_0$， $l = m = 2^{\aleph_0}$，
由于$\aleph_0 \le 2^{\aleph_0}$
即有$\aleph_0 * 2^{\aleph_0} \le 2^{\aleph_0} * 2^{\aleph_0}$

定理12.6.2

- 对任意的基数k、l和m，如果$k \le l$，

（1） $k + m \le l + m$

（2） $k \cdot m \le l \cdot m$

（3） $k^m \le l^m$ ，

（4） 若$k \ne 0$ 或 $m \ne 0$则$m^k \le m^l$

等势

- 如何说明从整数集到整数集的映射的集合与整数集的幂集等势？还是说这个根本就是错的？

- 从整数集到整数集的映射的集合即$\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$，整数集的幂集即$P(\mathbb{Z})$。
- $\mathrm{card}(\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1$；$\mathrm{card}[P(\mathbb{Z})] = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$，因此有：$\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} \approx P(\mathbb{Z})$

离散数学（1） 习题课

刘世霞 老师
杨维铠 袁隽 郭玉楷 王昊泽 助教
2022/12/23

第二章：命题/悖论和命题形式化

习题1.1. 判断下列语句是否是命题。

（7） 这句话是错的。

悖论不认为是命题

习题1.5. 形式化下列自然语句：

（7）如果水是清的，那么或者张三能见到池底或者他是个近视眼。

注意**或和异或**是有区别的。

第二章：波兰&逆波兰

- 习题1.6(3) $\neg\neg P \vee (W \wedge R) \vee \neg Q$
- 加括号$(((\neg(\neg P)) \vee (W \wedge R)) \vee (\neg Q))$
- 波兰式：运算符均放到对应(同颜色)的括号前面
- $\vee\ (\vee\ (\neg(\neg(P)) \wedge (WR))\ \neg(Q))$
- 消去括号，得波兰式$\vee\vee \neg\neg P \wedge WR\neg Q$
- 波兰式：运算符均放到对应(同颜色)的括号前面
- $((((P)\neg)\neg(WR) \wedge) \vee (Q)\neg) \vee$
- 消去括号，得波兰式$P\neg\neg WR \wedge\vee Q\neg \vee$
- 注意事项
  - 同级别的运算**从左向右**！
  - 不要化简！
  - 注意一元运算符$\neg$的处理
  - 加括号不要加错，如$((\neg(\neg(P \vee (W \wedge R)))) \vee (\neg Q))$

- 检查**逆波兰**
  - 从左到右解析，字母依次压栈。运算符则弹出字母运算后入栈
  - $P\neg\neg WR \wedge\vee Q\neg \vee$
  - $P, \neg\neg WR \wedge\vee Q\neg \vee$
  - $(\neg P), \neg WR \wedge\vee Q\neg \vee$
  - $(\neg\neg P), WR \wedge\vee Q\neg \vee$
  - $(\neg\neg P)W, R \wedge\vee Q\neg \vee$
  - $(\neg\neg P)WR, \wedge\vee Q\neg \vee$
  - $(\neg\neg P)(W \wedge R), \vee Q\neg \vee$
  - $(\neg\neg P) \vee (W \wedge R), Q\neg \vee$
  - $(\neg\neg P) \vee (W \wedge R)\ Q, \neg \vee$
  - $(\neg\neg P) \vee (W \wedge R)(\neg Q), \vee$
  - $(\neg\neg P) \vee (W \wedge R) \vee (\neg Q)$
- 检查波兰
  - 从右到左解析，字母依次压栈。运算符则弹出字母运算后入栈
  - $\vee\vee\neg\neg P \wedge WR\ \neg Q$
  - $\vee\vee\neg\neg P \wedge WR, (\neg Q)$
  - $\vee\vee\neg\neg P, (W \wedge R)\ (\neg Q)$
  - $\vee\vee, (\neg\neg P)\ (W \wedge R)\ (\neg Q)$
  - $\vee, ((\neg\neg P) \vee (W \wedge R))(\neg Q)$
  - $((\neg\neg P) \vee (W \wedge R)) \vee (\neg Q)$

第二章：等值证明

- 等值：在2^n个解释下真值都相等，记为 $A = B$或$A \Leftrightarrow B$
- 判断是否等值
  - 真值表法
  - 使用等值公式进行化简/变形
- 真值表和命题公式的转换
  - 从T来列写
  - 从F来列写
  - 范式！

第二章：范式

- 合取范式：用合取连接若干个析取式
  - 若干个：可以是零个、一个、多个
- 主合取范式：用合取连接若干个极大项析取式

(1) $P \vee \neg P$

合取范式：$P \vee \neg P$? 空?
析取范式：$P \vee \neg P$? 空?
主合取范式：$P \vee \neg P$? 空?
主析取范式：$P \vee \neg P$? 空?

(3) $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$

合取范式：

$$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) = \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg\neg Q)$$
$$= (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$$
$$= P \vee Q$$

析取范式：

$$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) = \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$
$$= (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

主合取范式： $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) = P \vee Q = \wedge_3$

主析取范式：

$$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) = \vee_{1,2,3}$$

前件为假：$P = 1, Q = 1$
后件为真：$P = 1, Q = 0$; $P = 0, Q = 1$
主析取：$\vee_{1,2,3}$ 主合取 $\wedge_3$

第二章：极小项和极大项的关系

- $\neg m_i = M_{(2^n-1-i)} = M_{(i)补}$ $\neg M_i = m_{(2^n-1-i)} = m_{(i)补}$

公式	名称
$\neg P_1 \wedge \neg P_2$	m_0
$\neg P_1 \wedge P_2$	m_1
$P_1 \wedge \neg P_2$	m_2
$P_1 \wedge P_2$	m_3

公式	名称
$\neg P_1 \vee \neg P_2$	M_0
$\neg P_1 \vee P_2$	M_1
$P_1 \vee \neg P_2$	M_2
$P_1 \vee P_2$	M_3

P_1	P_2	极小项	名称	极大项	名称
0	0	$\neg P_1 \wedge \neg P_2$	m_0	$P_1 \vee P_2$	M_3
0	1	$\neg P_1 \wedge P_2$	m_1	$P_1 \vee \neg P_2$	M_2
1	0	$P_1 \wedge \neg P_2$	m_2	$\neg P_1 \vee P_2$	M_1
1	1	$P_1 \wedge P_2$	m_3	$\neg P_1 \vee \neg P_2$	M_0

$\neg m_0 = M_{(2^2-1)-0} = M_3$

严格按照顺序！

主析取和主合取里的项数
加起来一定是2^n项
但不是简单地从$0, \ldots, 2^n - 1$挖掉

$m_3 = \neg(m_0 \vee m_1 \vee m_2) = M_3 \wedge M_2 \wedge M_1 \neq M_0 \wedge M_1 \wedge M_2$

第二章：对偶定理

- $\wedge, \vee, T, F$ 分别和$\vee, \wedge, F, T$ 互换，则互为对偶
- 对偶式和原式的真值没什么关系
- 对偶后，每个变项再取反，就变成原公式的反

$\neg m_0 = M_{(2^2-1)-0} = M_3$

$\neg P_1 \wedge \neg P_2$	m_0	$P_1 \vee P_2$	M_3

4. 证明

(1) $A \to B$ 与 $B^* \to A^*$ 同永真、同可满足

(2) $A \leftrightarrow B$ 与 $A^* \leftrightarrow B^*$ 同永真、同可满足

证明：

(1) 若 $A \to B$ 永真，则$\neg B \to \neg A$ 永真.

由$\neg A = A^{*-}$，$\neg B = B^{*-}$，得 $B^{*-} \to A^{*-}$ 永真.

即 $B^* \to A^*$ 永真.

反之，若 $B^* \to A^*$ 永真，则$(A^*)^* \to (B^*)^*$ 永真.

由 $A = (A^*)^*$，$B = (B^*)^*$，得 $A \to B$ 永真.

因此，$A \to B$ 与 $B^* \to A^*$ 同永真.

显然，$A \to B$ 与 $B^* \to A^*$ 同可满足.

(2) 若 $A \leftrightarrow B$ 永真，则$\neg A \leftrightarrow \neg B$ 永真.

由$\neg A = A^{*-}$，$\neg B = B^{*-}$，得 $A^{*-} \leftrightarrow B^{*-}$ 永真.

即 $A^* \leftrightarrow B^*$ 永真.

反之，若 $B^* \leftrightarrow A^*$ 永真，则$(A^*)^* \leftrightarrow (B^*)^*$ 永真.

由 $A = (A^*)^*$，$B = (B^*)^*$，得 $A \leftrightarrow B$ 永真.

因此，$A \leftrightarrow B$ 与 $A^* \leftrightarrow B^*$ 同永真.

显然，$A \leftrightarrow B$ 与 $A^* \leftrightarrow B^*$ 同可满足.

第二章：推理公式证明

- $A \to B$永真法
- $A \wedge \neg B$永假法
- 解释法：能够快速确定某些命题变项的值时使用
- 真值表法

(1) $(P \wedge Q) \Rightarrow (P \to Q)$

① $A \to B$ 永真法

$$(P \wedge Q) \to (P \to Q)$$
$$= \neg(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee Q) = (\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee Q)$$
$$= \neg P \vee \neg Q \vee \neg P \vee Q = \mathrm{T}$$

② $A \wedge \neg B$ 永假法

$$(P \wedge Q) \wedge \neg(P \to Q) = (P \wedge Q) \wedge (P \wedge \neg Q) = P \wedge Q \wedge P \wedge \neg Q = \mathrm{F}$$

③ 解释法

设 $P \wedge Q = \mathrm{T}$，从而有 $P = \mathrm{T}, Q = \mathrm{T}$

因此，$P \to Q = \mathrm{T}$，故该蕴涵式成立.

第二章：推理规则/归结推理

- 推理规则
  - 前提引入规则
  - 结论引用规则
  - 代入规则
  - 置换规则
  - 分离规则
  - 条件证明规则----附加前提引入

(6) $\neg Q \vee S, (E \to \neg U) \to \neg S \Rightarrow Q \to E$

①	$\neg Q \vee S$	前提引入
②	$Q \to S$	①置换
③	$(E \to \neg U) \to \neg S$	前提引入
④	$S \to (E \wedge U)$	③置换
⑤	$Q \to (E \wedge U)$	②④三段论
⑥	Q	附加前提引入
⑦	$E \wedge U$	⑤⑥分离
⑧	E	⑦
⑨	$Q \to E$	条件证明规则

- 归结推理
  - 建立子句集：$A \wedge \neg B$的合取范式
  - 不断归结，归结式仍放回子句集
  - 直至矛盾式

(3) 先将$\neg(P \wedge \neg Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge \neg R \wedge \neg\neg P$ 化成合取范式得

$$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge \neg R \wedge P$$

建立子句集 $S=\{\neg P \vee Q, \neg Q \vee R, \neg R, P\}$

归结过程：

①	$\neg P \vee Q$	
②	$\neg Q \vee R$	
③	$\neg R$	
④	P	
⑤	Q	①④归结
⑥	R	②⑤归结
⑦	$\square$	③⑥归结

第三章：罗素公理系统证明

- 只能用定义、4公理、7定理和代入、分离、置换规则
- 绝大多数的等值变换不能用（交换律、结合律、双重否定）
- 但前面的训练通常会给我们一个证明的思路:同时从左右出发找等价变形，凑到相似的形式，并和公理、定理靠上

习题3.1. 依公理系统证明

(3) $\vdash P \rightarrow (Q \vee P)$

先想想“之前”是怎么证的？$P \rightarrow P \vee Q; P \vee Q \rightarrow Q \vee P$

照着将三段论的证明框架先写出来

① $\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$　　定理 3.2.1

② $\vdash ((P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)) \rightarrow (P \rightarrow (P \vee Q)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \vee P))$　　① 代入 $\frac{Q}{P \vee Q}, \frac{R}{Q \vee P}$

补上其他过程

③ $\vdash (P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$　　公理 3

④ $\vdash (P \rightarrow (P \vee Q)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \vee P))$　　②③分离

⑤ $\vdash P \rightarrow (P \vee Q)$　　公理 2

⑥ $\vdash P \rightarrow (Q \vee P)$　　④⑤分离

第三章：罗素公理系统证明

- 定理5：$P \to \neg\neg P$
- 先从结论出发 $\neg P \vee \neg\neg P$
- 由代入规则，只需证 $P \vee \neg P$
- 由公理3，只需证$\neg P \vee P$，即 $P \to P$
- 观察公理1，2，有$P \to P \vee P$； $P \vee P \to P$

- 照着将三段论的证明框架先写出来
- $(Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
- 做代入$\frac{P}{P},\frac{Q}{P \vee P},\frac{R}{P}$，即$(P \vee P \to P) \to ((P \to P \vee P) \to (P \to P))$
- 依次使用 $P \vee P \to P$；$P \to P \vee P$分离即得$(P \to P)$
- 根据定义为$\neg P \vee P$，公理3+分离后为$P \vee \neg P$
- 代入为$\neg P \vee \neg\neg P$，根据定义为$P \to \neg\neg P$

第四章：谓词逻辑中形式化语句

没有特殊说明时，论域为全论域，需要添加**特性谓词**

所有A都B $(\forall x)(A(x) \to B(x))$

有的A是B $(\exists x)(A(x) \land B(x))$

有且只有一个$(\exists x)(P(x) \land \forall y(P(y) \to \mathrm{EQ}(x,y))$

习题4.5.

(5) 过平面上的两个点，有且仅有一条直线通过。

(5) 若以 $P(x)$表示 x 是平面上的点，$Q(x,y,u)$表示 u 是过 x 和 y 的直线，$EP(x,y)$表示 x 和 y 为同一点，$EQ(u,v)$表示 u 和 v 为同一条直线，那么这句话可以符号化为

$$(\forall x)(\forall y)\begin{pmatrix} P(x) \land P(y) \land \neg EP(x,y) \\ \to (\exists u)(Q(x,y,u) \land (\forall v)(Q(x,y,v) \to EQ(u,v))) \end{pmatrix}.$$

(8) 只有一个北京。

(8) 若以 $P(x)$表示 x 是北京，$E(x,y)$表示 x 和 y 是同一城市，那么这句话可以符号化为$(\exists x)(P(x) \land (\forall y)(P(y) \to E(x,y)))$.

习题4.9.

9. 给出一个公式，使其在$\{1, 2\}$域上是可满足的，而在$\{1\}$域上是不可满足的.

(1) $(\exists x)(\exists y)P(x,y)$，其中 $P(x,y)$表示 $x<y$.

(2) $(\exists x)P(x) \land (\exists y)\neg P(y)$，其中 $P(x)$表示 $x>1$.

(3) $(\exists x)P(x)$，其中 $P(x)$表示 $x>1$.

什么是**谓词逻辑公式**中的**不可满足？**

设A为一个谓词公式，若A在**任何解释**下真值均为假，则称A为不可满足的公式。

解释？给定的个体域**D**：**自由个体变项a**，谓词变项**P**，函数f

解释

- 给定非空个体域D，一个解释I由下面部分构成
  - 给每个自由个体变项符号指定一个D中的元素
  - 给每个谓词变项符号指定一个D上的谓词
  - 给每个函数符号指定一个D上的函数
- 例如，在个体域$\mathbb{N}$上，有公式$(\forall x)F(g(x,z),x)$
- 给定解释I
  - 自由个体变项：$z=0$
  - 函数$g(x,a)=x*a$
  - 谓词$F(x,y)$为$x=y$
- 在解释I下，公式被解释为$(\forall x)(x*0=x)$，它是一个假命题

习题4.9.

9. 给出一个公式, 使其在{1, 2}域上是可满足的, 而在{1}域上是不可满足的.

~~(1) $(\exists x)(\exists y)P(x,y)$，其中 $P(x,y)$表示 $x<y$.~~

~~(2) $(\exists x)P(x)\wedge(\exists y)\neg P(y)$，其中 $P(x)$表示 $x>1$.~~

~~(3) $(\exists x)P(x)$，其中 $P(x)$表示 $x>1$.~~

除非你显式地说明了P是**谓词常项**而非变项，否则不清楚其是**定义**还是**一个解释**

当然，更好的做法自然是构造出一个即使是谓词变项也满足题意的解答，例如

$$(\exists x)\,P(x)\wedge(\exists x)\,\neg P(x)$$

$$(\forall x)(\exists y)\,\Big(\big(P(x)\wedge\neg P(y)\big)\vee\big(P(y)\wedge\neg P(x)\big)\Big)$$

第五章：谓词逻辑的等值和推理演算

$$(\forall x)\, P(x) \vee (\forall x) Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x)$$

1. 证明下列等值式和蕴涵式

(5) $(\forall x) P(x) \rightarrow q = (\exists x)(P(x) \rightarrow q)$

$$(\forall x)\, P(x) \rightarrow q = \neg(\forall x) P(x) \vee q = (\exists x)(\neg P(x) \vee q) = (\exists x)(P(x) \rightarrow q)$$

(7) $(\exists x) P(x) \rightarrow (\forall x) Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

$$(\exists x) P(x) \rightarrow (\forall x) Q(x) = \neg(\exists x) P(x) \vee (\forall x) Q(x) = \forall(x)\neg P(x) \vee \forall(x) Q(x)$$

$$\Rightarrow \forall(x)\big(\neg P(x) \wedge Q(x)\big) = (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

(8) $(\exists x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) \Rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$

$$(\exists x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) = (\exists x) P(x) \wedge (\forall y) Q(y)$$

$$= (\exists x)\big(P(x) \wedge (\forall y) Q(y)\big) \Rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$$

求前束范式和Skolem标准型

定理5.1 一阶逻辑中的任何公式都存在与之**等值**的前束范式。

证明：通过如下算法，可将公式化成等价的前束范式。

1. 消去连接词$\rightarrow, \leftrightarrow$

2. 利用量词转化公式，把否定符号深入到指导变元的后面。

$$\neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x)$$

$$\neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$$

3. 如果必要的话，将约束变量改名。

4. 利用量词辖域收缩、扩张等值式把量词移到全式的最前面，这样便得到与公式等价的前束范式。

定理5.3.3 一阶逻辑中的任何公式都可化为(只保留$\forall$的) Skolem标准型，但不一定等值。仅当不可满足时二者等值

1. 先化为前束范式

2. 将所有的存在量词消去，变元换为左侧全称量词中变元的函数

求前束范式和Skolem标准型

(3) $(\exists x)P(x,y) \leftrightarrow (\forall z)Q(z)$

$=((\forall x)\neg P(x,y) \vee (\forall z)Q(z)) \wedge ((\exists x)P(x,y) \vee (\exists z)\neg Q(z))$

$=((\forall x)\neg P(x,y) \vee (\forall z)Q(z)) \wedge ((\exists u)P(u,y) \vee (\exists v)\neg Q(v))$

$=(\forall x)(\forall z)(\exists u)(\exists v)(\neg P(x,y) \vee Q(z)) \wedge (P(u,y) \vee \neg Q(v))$

(9)

$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)Q(x,y)) \vee (\forall z)R(z)$

$=(\forall x)(\neg P(x) \vee (\exists y)Q(x,y)) \vee (\forall z)R(z)$

$=(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\neg P(x) \vee Q(x,y) \vee R(z))$

Skolem 范式

$(\forall x)(\forall z)(\neg P(x) \vee Q(x,f(x)) \vee R(z))$

(10)

$(\exists y)(\forall x)(\forall z)(\exists u)(\forall v)P(x,y,z,u,v)$

Skolem 范式

$(\forall x)(\forall z)(\forall v)P(x,a,z,f(x,z),v)$

推理演算

(2) $(\forall x)(\neg P(x) \to Q(x)) \land (\forall x)\neg Q(x) \Rightarrow P(a)$

(2) 推理规则法：

① $(\forall x)(\neg P(x) \to Q(x))$	前提
② $(\forall x)\neg Q(x)$	前提
③ $\neg P(x) \to Q(x)$	① 全称量词消去
④ $\neg Q(x)$	② 全称量词消去
⑤ $\neg Q(x) \to P(x)$	③ 置换
⑥ $P(x)$	④⑤ 分离
⑦ $(\forall x)P(x)$	⑥ 全称量词引入
⑧ $P(a)$	⑦ 全称量词消去

归结法：

建立子句集 $\{P(x) \lor Q(x), \neg Q(x), \neg P(a)\}$

① $P(x) \lor Q(x)$	
② $\neg Q(x)$	
③ $\neg P(a)$	
④ $Q(a)$	①③ 归结
⑤ $\square$	②④ 归结

第九章：自然数的集合表示

- $0=\emptyset, 1=0^{+}=\{0\}, 2=1^{+}=1\cup\{1\}=\{0,1\}, n+1=n^{+}=\{0,1,\ldots,n\}$
- $n\in n+1?\, n\subset n+1?$
- $\bigcap 1234=0\cap 1\cap\cdots\cap 1233=0$
- $\bigcap\{12,34\}=12\cap 34=\{0,\ldots,11\}\cap\{0,\ldots,33\}=\{0,\ldots,11\}=12$
- $\bigcup 1234=1233$

第九章：空集相关

(1) $\varnothing \subseteq \varnothing$. ✓

(2) $\varnothing \in \varnothing$.

(3) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$. ✓

(4) $\varnothing \in \{\varnothing\}$. ✓

(5) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$. ✓

(6) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$.

(7) $\{\varnothing\} \subseteq \{\{\varnothing\}\}$.

(8) $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$. ✓

第九章：幂集相关

- 对于有限集合，$|P(A)| = 2^{|A|}$
- 对于无限集合，$|P(A)| > |A|$
- 一定有$\emptyset \in P(A), A \in P(A)$
- $P(\emptyset) = \{\emptyset\}, P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) =$
  $\{\ \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\ \}$
- $A \subset B \Leftrightarrow P(A) \subset P(B)$? ✓
- $P(\bigcup A) = \bigcup P(A)$?　　$\bigcup P(A) = A \subset P(\bigcup A)$
- 对A中任意x, 若x为空集显然有$x \in P(\bigcup A)$。若非空集则 $x \subset \bigcup A \Rightarrow x \in P(\bigcup A)$

第九章：集合证明

- 证明$A = B$
  - $A = \{x|x \in A\} = \cdots = \{x|x \in B\} = B$ 直接证明集合相等
  - $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow T$
  - 对任意 x，$x \in A \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x \in B$

- 避免
  - $\forall x \in A$ 改为 对任意 x，$x \in A \Leftrightarrow \cdots$
  - 命题和集合混着

    对任意 x，$x \in (A - B) - C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow (A - B) - (B - C)$
  - 随意使用$\Leftrightarrow$
  - 随意使用 “,” “.” “;”

第九章：集合证明

- $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

证明：对任意的$\langle x,y\rangle$

$\langle x,y\rangle \in (A \cap B) \times (C \cap D)$

$\Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in C \cap D$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (y \in C \wedge y \in D)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in D)$

$\Leftrightarrow (\langle x,y\rangle \in A \times C) \wedge (\langle x,y\rangle \in B \times D)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in (A \times C) \cap (B \times D)$

- $(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$

$(A \oplus B) \times C$

$= ((A - B) \cup (B - A)) \times C$

$= ((A - B) \times C) \cup ((B - A) \times C)$

$= ((A \times C) - (B \times C)) \cup ((B \times C) - (A \times C))$

$= (A \times C) \oplus (B \times C)$

第九章：容斥定理

求所有能被6或8整除而不被15整除的三位数

记$A_{n,k}$是$1 \le x \le n$中被k整除的数字的个数。则有$|A_{n,k}| = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$。先同时考虑一、二、三位数，所求集合为

$$A_{999,6} \cup A_{999,8} - A_{999,15}$$

个数为$|A_{999,6} \cup A_{999,8} - A_{999,15}| = |A_{999,6} \cup A_{999,8}| - |(A_{999,6} \cup A_{999,8}) \cap A_{999,15}|$

$$|A_{999,6} \cup A_{999,8}| = |A_{999,6}| + |A_{999,8}| - |A_{999,6} \cap A_{999,8}| = \left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{24} \right\rfloor = 249$$

$$|(A_{999,6} \cup A_{999,8}) \cap A_{999,15}| = |A_{999,30} \cup A_{999,120}| = |A_{999,30}| = \left\lfloor \frac{999}{30} \right\rfloor = 33$$

同理，计算得$|A_{99,6} \cup A_{99,8} - A_{99,15}| = \left\lfloor \frac{99}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{99}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{24} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{30} \right\rfloor = 21$

因此最终结果为$249 - 33 - 21 = 195$

```
In [1]: len([i for i in range(100,1000) if (i % 6 == 0 or i % 8 == 0) and i % 15 != 0])
Out[1]: 195
```

第十章：关系

- 空关系
  - 自反、反自反(非自反)、对称、反对称、传递
- 关系图：同一个集合上的关系一般不画成二分图
- 关系的符合：从右往左
- 求传递闭包
  - 需要多个闭包组合时，传递闭包最后算
  - 计算传递闭包：依次检查
  - $R = \{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$
    - 先加入前两个，立刻传递得到$\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$
    - 加入$\langle b,c\rangle$。检查之前所有b结尾和c开头的元素。$\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\}$
    - 加入$\langle c,d\rangle$。检查之前所有c结尾和d开头的元素。$\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle b,d\rangle,\langle a,d\rangle\}$

第十章：等价关系与相容关系

- 等价关系：自反对称传递
  - 等价关系和划分一一对应，可相互诱导
  - 划分的个数？第二类斯特林数(如何计算？)
  - $\mathrm{S}(\mathrm{n},\mathrm{k})=\mathrm{S}(\mathrm{n}-1,\mathrm{k}-1)+\mathrm{k}\,\mathrm{S}(\mathrm{n}-1,\mathrm{k})$
  - $S(n,1)=S(n,n)=1$
  - $S(n,2)=2^{n-1}-1,\ S(n,n-1)=n(n-1)/2$
- 相容关系：自反对称（未必传递）
  - 相容类:任何两个元素都有关系。最大相容类
  - 全体最大相容类构成一个覆盖，且唯一
  - 覆盖可以诱导一个相容关系

第十章：偏序关系

- 偏序关系：自反、反对称、传递
  - 正整数的小于等于关系、整除关系。集合的子集关系
  - 写出关系时一定并上I_A
- 拟序关系：反自反、传递
  - 通过并上或减去I_A可以完成偏序、拟序的变换
- 哈斯图：省略自圈、省略方向、省略可传递得到的边
  - 约定：从下到上是从小到大
- 盖住关系(cov)：$x \in A, y \in A, x \leq y, x \neq y$，不存在$z$使得$x \leq z \leq y$。

第十章：偏序关系与全序关系

- 对偏序集合$\langle A, R\rangle$和子集B，有八个容易混淆的概念：极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、上确界、下确界
  - XX元：需要在集合B中。xx界：需要在集合A中
  - 极大元：B中没有更大的（**不需要与所有元素可比**）
  - 最大元：B中都小于等于它（**需要与所有元素可比**）
  - 上界：B中都小于等于它（**需要与所有元素可比**）
  - 上确界：上界的最小元，它小于等于所有上界
  - 最大/小元，上/下确界未必存在，若存在必定唯一
  - **极大/小元一定存在**

第十章：偏序关系与全序关系

- 全序关系：偏序+任何两个元素均可比
  - 对于偏序关系，若有一个子集满足子集内元素**均可比**，称之链
  - 对于偏序关系，若有一个子集满足子集内元素**均不可比**，称之反链
  - 最长链长度=最少反链划分个数（如何构造？）

第十章：偏序关系与全序关系

- 构造下列集合的例子
  - 非空全序集，存在子集无最小元
  - 非空偏序集，存在子集无最小元但有下确界
  - 非空偏序集，存在子集有下界但无下确界
- $\{0,1,2\}$上所有的偏序关系的个数
  - 恒等关系(1个)
  - 仅有一个$xRy, x \neq y$（6个）
  - 全序关系(6个)
  - V型结构(3+3个)
- $\{0,1,2,3\}$上的全序关系的个数，包含$\langle 0,3\rangle\langle 2,1\rangle$的关系的个数
  - 24， 6

第十一章：函数

- 注意定义域、值域。明确什么集合下的函数
- 习题11.9： 有限集合A, B, $|A| \geq |B| > 0$ 或 $|A| = |B| = 0$ 时存在$A \to B$的满射
  - 空函数是单射（为什么？），当B空时为双射
- 习题11.10(2) 构造$A = (0,1), B = (1,3)$ 上的双射
  - $f: A \to B, f(x) = 2x + 1$
  - $f: A \to B, f: x \mapsto 2x + 1$

第十二章：实数集合和集合的基数

- 证明等势
  - 如果不要求用定义方式，可用基数运算（夹逼定理）
    - $\aleph_1^{\aleph_1} = \aleph_2$， $\aleph_2^{\aleph_1} = \aleph_2$， $\aleph_3^{\aleph_1} = \aleph_3$， $\aleph_1^{\aleph_2} = \aleph_3$
    - 只有指数才会让势上升。加乘都是取最大的
    - $\aleph_1^{\aleph_2^2} = \aleph_1^{\aleph_2} = \aleph_1\aleph_3 = \aleph_3$ 但证明的时候需用基数里的放缩
    - $|\mathbb{N}_{\mathbb{N}}| = ?$ $|\mathbb{R}_{\mathbb{R}}| = ?$
  - 如果要求用定义方式，仅能使用构造双射的方式
    - 熟练掌握挖点法（挖一个点、两个点、$\aleph_0$个点）
    - 熟知几个经典的构造方法
      - $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}$
      - $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$ 去重
    - $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$的构造，可以不写出显式的表达式，再说明清楚构造思路后可用$q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$替代
    - 其他构造均需验证双射
    - 实数上的问题，可以想一些常见的函数$e^x, \ln x, \tan x, 1/x$
    - 可以考虑构造多个双射，然后复合

例子

- 构造$\mathbb{R} \to \mathbb{R} - \mathbb{Q}$的双射
  - 挖去$\aleph_0$个点
- 构造$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$的双射
  - 等价于构造$(0,1]^2 \to (0,1]$的双射
  - 几个技术细节
    - 无穷小数的表示：1/2是0.49999⋯ or 0.5000⋯?
    - 简单地交替数位$\langle 0.a_1a_2a_3\cdots, 0.b_1b_2b_3\cdots\rangle \mapsto 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots$是否正确？
- 不是所有的双射都是能构造出来的，如$\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$

考试准备注意事项

- 大部分为基础题，但题量较大，时间较紧
  - 记住常见的结论和反例
  - 题目说明为“写出”的，只用写答案，不用写过程
  - 尽量保持卷面整洁，证明题按点给分
  - 构造反例的时候指出有问题的地方
  - 灵活把握做题节奏，遇到状况不要卡死
- 大多数题目比较基础，但知识点比较多和杂，注意不要遗漏
  - 以上只是作业中“易错”的部分，不是“重点”
  - 所有非打星号的作业都是“重点”

祝大家取得好成绩！

离　散　数　学

离散数学：期末总结

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn


最后一节课
划重点说
考试内容是
say the focus of the exam is

发了一张纸

*表示非基本要求的内容

考试内容

概述，第 1 章 1.1~1.4	绪论，离散数学与数理逻辑学科概述，研究内容与发展概况 命题概念，命题联结词与真值表，合式公式，重言式，命题形式化
第 1 章 1.5-1.6 第 2 章 2.1 ~2.4	波兰表达式，悖论简介，其它联结词，等值定理，基本等值公式 命题公式与真值表的关系，联结词的完备集
第 2 章 2.5~ 2.10	对偶式*，范式概念，析取范式，合取范式，主范式 基本推理公式，推理演算与推理规则
第 3 章 3.1 ~ 3.6	归结推理法，应用举例，命题逻辑的公理化，公理系统的结构 命题逻辑的公理系统，公理系统的完备性，王浩算法，非标准逻辑简介*
第 4 章 4.1 ~ 4.6	谓词逻辑的基本概念，谓词和个体词，函数和量词，合式公式 自然语句的形式化，有限域下公式的表示法，公式的普遍有效性和判定问题
第 5 章 5.1 ~ 5.3	谓词逻辑等值和推理演算，否定型等值式，量词分配等值式 范式，前束范式，SKOLEM 标准型，存在量词前束范式*
第 5 章 5.4 ~ 5.6	基本的推理公式及其证明方法，推理演算与推理规则 谓词逻辑的归结推理法，谓词逻辑应用举例

考试内容

第 9 章 9.1~9.4	集合的概念和基本表示法，集合间的关系和特殊集合 集合的运算，集合的图形表示法，集合运算性质和证明
第 9 章 9.5~ 9.7	幂集性质，传递集合，包含排斥原理，有限集合的基数 集合论公理系统简介，无穷公理与自然数集合
第 10 章 10.1 ~10.4	关系的基本概念，二元关系与特殊关系，关系矩阵和关系图 关系的逆、合成，限制和象，关系的基本性质
第 10 章 10.4 ~ 10.6	关系基本性质的几个结论，关系的闭包，关系的合成 闭包的性质及其构造方法，等价关系的概念
第 10 章 10.6 ~ 10.8	划分与等价关系，相容关系和覆盖，偏序关系与哈斯图 上确界和下确界，全序关系和链
第 11 章 11.1, 11.2，11.5	函数，任意集合上的函数定义，特殊函数，满射单射与双射 选择公理*，函数的合成，函数的逆
第 12 章 12.1~12.7	实数集合与集合的基数，集合的等势，有限集合与无限集合的基数 可数集合与连续统假设

离散数学1的主要内容

- 两个演算加四论
- 两个演算（命题演算与谓词演算）1-3,4-5（章）
- 集合论（集合、关系、函数、基数）9-12
- 模型论（形式语言语法与语义间的关系） 7
- 递归论（可计算性与可判定性）6
- 证明论（数学本身的无矛盾性）8

补交作业

- 1月11号23:59，网络学堂提交

考试安排

- 时间：1月6日19:00-21:00
- 考场：
- 腾讯会议（每个腾讯会议38人左右）
- 答疑时间：
  - 1月5日下午2:00-4:00，**腾讯会议课堂号**

- 考试题型
  - 单选题
  - 多选题（选错不得分，少选给一半分）
  - 填空题
  - 判断题
  - 主观题

期末测试整体安排

- 平台
  - 雨课堂：pro.yuketang.cn签到，作答平台，统计分数，前机位监考
  - 腾讯会议：侧后机位监考，考试过程中的沟通
  - 网络学堂：提交答题纸pdf版本，提交MD5，提交录屏视频
- 闭卷考试
- 学生准备材料
  - 身份证件：学生卡或身份证
  - 草稿纸
  - 答题纸（网络学堂提供模板，学生自行打印，如无打印机则准备空白A4纸，按要求每页写明页码，共几页）
  - 所有纸张除模板内容外均为空白，不能有课程相关内容，考前进行核查。
  - 笔

Honor Code

建议老师在考试开始之前提示考试要求，如开卷考试不允许电子资料的Honor Code建议版本如下：

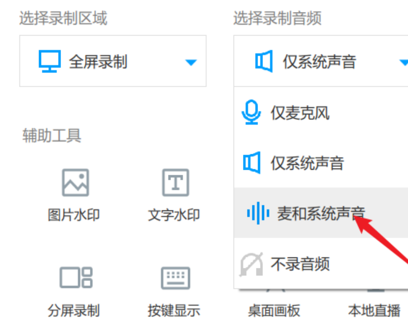
- 考试期间不可以通过任何方式与他人讨论或交流，如发现则参与讨论的所有同学记0分；
- 不可以参考他人答案，如发现则双方记0分；
- 教师有权随时通过网络或者其他方式进行抽查，不予配合者记0分。
- 如发现不合理的雷同情况，经授课团队调查属实则雷同卷记0分。
- 保护清华大学知识产权，绝不保存、散播本次考试题目。

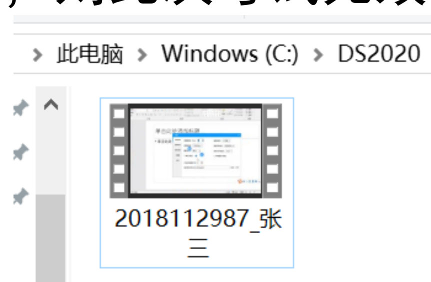
学生状态

- 学生情况的不确定性
  - 考前一周进行调研，调研信息包括：
    - 是否在校
    - 是否有独立空间
    - 是否有同屋的人同时参加考试
    - 联系方式

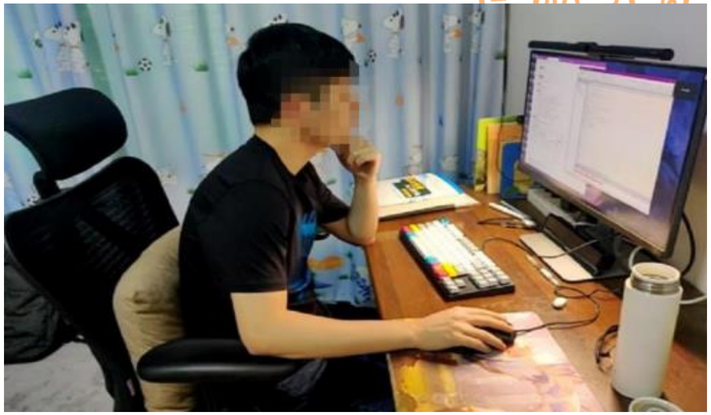
设备准备

- 电脑(设备1)
  - 网页答题
  - 单屏
  - 确保联网且正常使用
  - 不允许浏览或查找其他网页
  - 作答期间不允许使用雨课堂之外任何软件
  - 全程录屏，且要求录制现场环境音
- 手机(设备2)
  - 腾讯会议
  - 开启摄像头和语音
  - 不允许接听电话或主动拨打给考试监考之外的任何人
  - 不允许使用任何通讯联络方式
  - 保证联网以及电源供应
  - 如果断线超过5分钟经监考确定其情况，则此次考试无效
- 拍摄设备
  - 拍摄答题





提前30分钟签到调整好设备



- 雨课堂签到之后，考生落座
  - 提前准备好证件照片
  - 打开摄像头拍摄
- 调整好设备②的角度，保证摄像头从侧面（或略微偏后）照过来，能全程看到考生的【侧脸、键盘、鼠标、屏幕、桌面、所有纸质参考资料】（参考下图），至少能看到这5点。准备考试中需要答题纸、草稿纸等，放置于设备②拍摄镜头范围内。

准备

- 考试过程中不得佩戴耳机，不得播放任何与考试无关的影音资料
- 保持考试环境安静，无其他人员
- 考试过程中需要打开腾讯会议程序外放的声音，监考员会在考试过程中发语音通知
- 全程静音与否由监考人员控制，如果考试过程中，摄像头中断，监考员会语音提醒，如果学生主动静音，而未能及时打开，此次考试成绩无效。
- 全程不使用电话或微信等通讯工具
- 考试过程中微信群不发任何指令
- 考试平台信息在网络学堂发布
- 如发生网络中断等意外需要联系，请使用手机联系13521593099（紧急联系人）

考试流程

- 提前上厕所，准备好需要的材料
- 雨课堂开始考试
- 请务必开启录屏，确保环境音也被录制
- 确保录屏开启后登陆雨课堂开始答题
- 考试全程原则上不得离场（不得离开设备②的监控范围），如遇极特殊情况需要沟通，可以转身举手示意，经同意后在设备2中打开语音交流。
- 如有离场需求，必须经过语音沟通获得监考人员同意后方可临时离场，并在监考人员指定的时间限制内回到监控范围中。
- 除非已经确定完成答题，请不要点击“提交”，否则将无法再次进入考场。
- 中间退出请再次登入，可以断点续考。

考试结束后提交

- 考试时间到则停止答题，保持录屏和监考设备都在运行中
- 在21:10分之前使用拍摄设备上传主观题答案，每道题分别提交答案。
- 建议采用第三个设备如pad等来拍摄，如确实没有其他设备可以用监考设备拍摄
- 提交完主观题后，用扫描软件扫描整个答题纸和草稿纸，生成pdf，并在21:20之前在网络学堂上提交。
- 停止录屏，保存录屏文件，文件命名规则为：学号-姓名.mp4。

考完后

- 然后通过清华云盘上传完整的录屏视频(命名：学号-姓名)，作业中提供上传链接，在考试结束后24小时内上传并提交作业。
- 生成MD5码后，不要对视频做任何改动。如果出现上传视频的MD5和提交的MD5不匹配、未上传MD5、未上传整个视频等情况按照违规处理。
  - In Windows, run in the command prompt: CertUtil -hashfile *path_to_your_file* MD5
  - In MacOS, run in the terminal: md5 *path_to_your_file*
  - In Linux, run in the terminal: md5sum *path_to_your_file*
- 请务必提前演练MD5码的计算流程，避免届时出问题无法及时提交MD5。

腾讯会议号（演练+考试）

- 学号<2021011000
  - 会议号：716-5464-1326(刘世霞)
  - 会议密码：218469
- 2021011000<学号<2022011000
  - 会议号：144-429-934(郭玉楷)
  - 会议密码：579431
- 学号>2022011000
  - 会议号：180-746-416(杨维铠)
  - 会议密码：030303

祝同学们期末考出好成绩！

祝同学们新年快乐，百毒不侵！