# 第十三周作业

1. 判断对错：（说明原因或举反例）

(a) 设 $A$ 是 $n$ 阶实方阵，则 $A+iI_n$ 可逆；

(b) 设 $A$ 是 $n$ 阶 Hermite 阵，则 $A+iI_n$ 可逆；

(c) 设 $A$ 是 $n$ 阶酉阵，则 $A+iI_n$ 可逆.

(d) 设 $A$ 是 $n$ 阶实方阵，$\alpha$ 是 $A$ 的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量，则 $\bar{\alpha}$ 是 $A$ 的属于特征值 $\bar{\lambda}$ 的特征向量.

2. 设 $P=\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$P$ 是可逆的吗？是酉阵吗？是 Hermit 阵吗？求 $P^{100}$？

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1+i \\ 1+i & i \end{pmatrix}$，求酉阵 $U$，使 $U^H A U$ 是一个对角阵.

4. 设 $A, B$ 是 $n$ 阶实方阵，令 $M = A + iB$.
则 $M$ 是 Hermite 阵当且仅当 $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ 是实对称阵.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1+i & i & 0 \\ 0 & 1+i & i \\ i & 0 & x \end{pmatrix}$ 是可酉对角化阵，
求 $x$ 和酉阵 $U$，使 $U^H A U$ 是对角阵.

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求酉阵 $U$，使得
$U^H A U$ 是一个对角阵.

7. 设 $A$ 是 $n$ 阶复矩阵，且 $A^H = -A$，证明：
$A$ 的特征值是 0 或纯虚数.

8. 设 $A, B$ 是复正规阵，且 $AB = BA$，证明：
存在酉阵 $U$，$U^H A U$ 和 $U^H B U$ 均是对角阵.

提示:

2. $P = i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 计算 $P^2, P^3$ 可看出规律.

7. 应用课堂笔记证Hermite阵特征值是实数的方法.

8. 设 $U_1^H A U_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s I_{n_s} \end{pmatrix} = A_1$

$U_1^H B U_1 = B_1$

则 $A_1 B_1 = B_1 A_1 \Rightarrow B_1 = \begin{pmatrix} B_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{ss} \end{pmatrix}$

其中 $B_{ii}$ 是 $n_i$ 阶正规阵.

存在 $Q_i$ 酉阵. $Q_i^H B_{ii} Q_i$ 是对角阵.

令 $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_s \end{pmatrix}$ $Q^H B_1 Q$ 对角阵.