离散数学(1) 习题课

数理逻辑

2023.11.26

命题概念与自然语言形式化

- 命令句、疑问句、感叹句都不是命题。悖论也不是命题
  - 他好高啊！
  - 这句话是错的。
- 形式化的过程注意区分**或和异或**，根据语境判断是否可能同时发生
  - 如果水是清的，那么或者张三能见到池底或者他是个近视眼

波兰/逆波兰表达式

- 同级别的运算**从左向右**!
- 不要化简!
- 求$\neg P \vee (Q \wedge R) \rightarrow \neg\neg S$的逆波兰表达式
  - 先加括号$\Big(\big((\neg P) \vee (Q \wedge R)\big) \rightarrow \big(\neg(\neg S)\big)\Big)$
  - 移运算符$\Big(\big((P)\neg(QR)\wedge\big)\vee\big((S)\neg\big)\neg\Big)\rightarrow$
  - 去除括号$P\neg QR \wedge\vee S\neg\neg\rightarrow$

命题逻辑的等值和推理演算

- 等值：在2^n个解释下真值都相等，记为 $A = B$或$A \Leftrightarrow B$
- 判断是否等值
  - 真值表法
  - 使用等值公式进行化简/变形
- 真值表和命题公式的转换
  - 从T来列写
  - 从F来列写
  - **范式!**

范式

求$(P \to \neg Q) \vee \big((Q \wedge P) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow \neg P)\big)$的主析取范式**和**主合取范式

$$(P \to \neg Q) \vee \big((Q \wedge P) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow \neg P)\big)$$
$$= (\neg P \vee \neg Q) \vee \big((Q \wedge P) \leftrightarrow (\neg Q \vee \neg P) \wedge (P \vee Q)\big)$$
$$= (\neg P \vee \neg Q) \vee \Big((Q \wedge P) \vee \neg\big((\neg Q \vee \neg P) \wedge (P \vee Q)\big)\Big) \wedge \Big(\neg(Q \wedge P) \vee \big((\neg Q \vee \neg P) \wedge (P \vee Q)\big)\Big)$$
$$= \neg P \vee \neg Q \vee \big((Q \wedge P) \vee \neg(\neg Q \vee \neg P) \vee \neg(P \vee Q)\big) \wedge \Big(\neg(Q \wedge P) \vee \big((\neg Q \vee \neg P) \wedge (P \vee Q)\big)\Big)$$
$$= \neg P \vee \neg Q \vee \big((Q \wedge P) \vee (Q \wedge P) \vee (\neg P \wedge \neg Q)\big) \wedge \Big((\neg Q \vee \neg P) \vee \big((\neg Q \vee \neg P) \wedge (P \vee Q)\big)\Big)$$
$$= \neg P \vee \neg Q \vee \big((Q \wedge P) \vee (\neg P \wedge \neg Q)\big) \wedge \big((\neg Q \vee \neg P) \wedge (P \vee Q)\big)$$
$$= \neg P \vee \neg Q \vee \big((\neg Q \vee \neg P) \wedge (P \vee Q)\big)$$
$$= \neg P \vee \neg Q$$

主合取范式 $\wedge_0$，主析取范式$\vee_{0,1,2}$

用真值表等方式更简单

推理公式证明

- $A \rightarrow B$永真法
- $A \wedge \neg B$永假法
- 解释法：能够快速确定某些命题变项的值时使用
- 真值表法

(1) $(P \wedge Q) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$

① $A \rightarrow B$ 永真法

$$(P \wedge Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

$$= \neg (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee Q) = (\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee Q)$$

$$= \neg P \vee \neg Q \vee \neg P \vee Q = \mathrm{T}$$

② $A \wedge \neg B$ 永假法

$$(P \wedge Q) \wedge \neg (P \rightarrow Q) = (P \wedge Q) \wedge (P \wedge \neg Q) = P \wedge Q \wedge P \wedge \neg Q = \mathrm{F}$$

③ 解释法

设 $P \wedge Q = \mathrm{T}$，从而有 $P = \mathrm{T}, Q = \mathrm{T}$

因此，$P \rightarrow Q = \mathrm{T}$，故该蕴涵式成立.

推理公式证明

- $(P \wedge Q) \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

$A \rightarrow B$永真法

$\big((P \wedge Q) \rightarrow R\big) \rightarrow \big(P \rightarrow (Q \rightarrow R)\big)$

$= (\neg P \vee \neg Q \vee R) \rightarrow \big(\neg P \vee (\neg Q \vee R)\big)$

$= (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

$= \neg R \vee \neg P \vee \neg Q \vee R$

$= T$

$A \wedge \neg B$永假法

$\big((P \wedge Q) \rightarrow R\big) \wedge \neg\big(P \rightarrow (Q \rightarrow R)\big)$

$= (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge \neg\big(\neg P \vee (\neg Q \vee R)\big)$

$= (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \wedge Q \wedge \neg R)$

$= F$

自然语言推理

- 派ABCDE五位同学参加某活动，需满足以下条件
  - 若A去，则B也去
  - D、E至少有一人去
  - B、C去且仅去一人
  - C、D两人同去或同不去
  - 若E去，则A、B也同去
- 试问是否有可能的参加方案？如有的话请求出所有方案，没有则说明理由。

自然语言推理

- 若A去，则B也去
- D、E至少有一人去
- B、C去且仅去一人
- C、D两人同去或同不去
- 若E去，则A、B也同去

- 翻译为$(A \rightarrow B) \wedge (D \vee E) \wedge (B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg D) \wedge (\neg C \vee D) \wedge (E \rightarrow A \wedge B)$
- 若$E = T$，则$A = T, B = T$，带入式子简化为$(\neg C) \wedge (C \vee \neg D) \wedge (\neg C \vee D) = \neg C \wedge \neg D$，故$C = F, D = F$，存在一派出方案$(A, B, C, D, E) = (T, T, F, F, T)$
- 若$E = F$，则依次推导得必要条件$D = T, C = T, B = F, A = F$，存在方案$(A, B, C, D, E) = (F, F, T, T, F)$
- 故一共存在两个方案

推理规则/归结推理

- 推理规则
  - 前提引入规则
  - 结论引用规则
  - 代入规则
  - 置换规则
  - 分离规则
  - 条件证明规则----附加前提引入
- 归结推理
  - 建立子句集：$A\wedge\neg B$的合取范式
  - 不断归结，归结式仍放回子句集
  - 直至矛盾式

(6) $\neg Q\vee S,(E\to\neg U)\to\neg S\Rightarrow Q\to E$

① $\neg Q\vee S$	前提引入
② $Q\to S$	①置换
③ $(E\to\neg U)\to\neg S$	前提引入
④ $S\to(E\wedge U)$	③置换
⑤ $Q\to(E\wedge U)$	②④三段论
⑥ Q	附加前提引入
⑦ $E\wedge U$	⑤⑥分离
⑧ E	⑦
⑨ $Q\to E$	条件证明规则

(3) 先将$\neg(P\wedge\neg Q)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge\neg R\wedge\neg\neg P$ 化成合取范式得

$$(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge\neg R\wedge P$$

建立子句集 $S=\{\neg P\vee Q,\neg Q\vee R,\neg R,P\}$

归结过程：

① $\neg P\vee Q$	
② $\neg Q\vee R$	
③ $\neg R$	
④ P	
⑤ Q	①④归结
⑥ R	②⑤归结
⑦ □	③⑥归结

罗素公理系统证明

- 只能用定义、4公理、7定理和代入、分离、置换规则
- 绝大多数的等值变换不能用（交换律、结合律、双重否定）
- 但前面的训练通常会给我们一个证明的思路:同时从左右出发找等价变形，凑到相似的形式，并和公理、定理靠上

(3) $\vdash P \to (Q \vee P)$

先想想之前是怎么证的？$P \to P \vee Q; P \vee Q \to Q \vee P$

照着将三段论的证明框架先写出来

① $\vdash (Q \to R) \to (P \to Q) \to (P \to R)$ 定理 3.2.1

② $\vdash ((P \vee Q) \to (Q \vee P)) \to (P \to (P \vee Q)) \to (P \to (Q \vee P))$ ① 代入$\frac{Q}{P \vee Q}$,$\frac{R}{Q \vee P}$

补上其他过程

③ $\vdash (P \vee Q) \to (Q \vee P)$ 公理 3

④ $\vdash (P \to (P \vee Q)) \to (P \to (Q \vee P))$ ②③分离

⑤ $\vdash P \to (P \vee Q)$ 公理 2

⑥ $\vdash P \to (Q \vee P)$ ④⑤分离

罗素公理系统证明

- 定理5： $P \to \neg\neg P$
- 先从结论出发 $\neg P \vee \neg\neg P$
- 由代入规则， 只需证 $P \vee \neg P$
- 由公理3， 只需证$\neg P \vee P$， 即 $P \to P$
- 观察公理1， 2， 有$P \to P \vee P$; $P \vee P \to P$

- 照着将三段论的证明框架先写出来
- $(Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
- 做代入$\frac{P}{P}, \frac{Q}{P \vee P}, \frac{R}{P}$,即$(P \vee P \to P) \to ((P \to P \vee P) \to (P \to P))$
- 依次使用 $P \vee P \to P$; $P \to P \vee P$分离即得$(P \to P)$
- 根据定义为$\neg P \vee P$， 公理3+分离后为$P \vee \neg P$
- 代入为$\neg P \vee \neg\neg P$， 根据定义为$P \to \neg\neg P$

谓词逻辑中形式化语句

- 没有特殊说明时，论域为全论域，需要添加特性谓词
- 所有A都B $(\forall x)(A(x) \to B(x))$
- 有的A是B $(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$
- 任何金属都可溶在某种液体中。$P(x)$表示x是金属，$Q(y)$表示y是液体，$R(x,y)$表示x可溶在y

$(\forall x)(\exists y)((P(x) \wedge Q(y)) \to R(x,y))$ y不是液体时该式就成立

$(\forall x)(\exists y)(P(x) \to \big(Q(y) \to R(x,y)\big))$ y不是液体时该式就成立

$(\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y) \wedge R(x,y))$ 需要所有的x都是金属

$(\forall x)\ (P(x) \to (\exists y)\big(Q(y) \wedge R(x,y)\big))$

- 有且只有一个$(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(P(y) \to \mathrm{EQ}(x,y))$

谓词逻辑中形式化语句

- 没有两片长得一样的叶子（要求写出两种形式，一种仅用∀，另一种仅用∃）
- 设$P(x)$表示x是叶子，$Q(x,y)$表示二者长得一样，$EQ(x,y)$表示二者相同
- $(\forall x)\Big(P(x) \rightarrow (\forall y)\big(P(y) \rightarrow \big(Q(x,y) \rightarrow EQ(x,y)\big)\big)\Big)$
- $(\forall x)(\forall y)\big(P(x) \land P(y) \land Q(x,y) \rightarrow EQ(x,y)\big)$
- $\neg(\exists x)(\exists y)(P(x) \land P(y) \land Q(x,y) \land \neg EQ(x,y))$

谓词逻辑在有限域上量化

设个体域为$\{a, b, c\}$，试将下列公式写成命题逻辑公式。

$(\forall x)P(x) \to (\exists y)Q(y)$

$P(a) \land P(b) \land P(c) \to Q(a) \lor Q(b) \lor Q(c)$

$(\forall y)\big((\exists x)P(x, y) \to (\forall x)Q(y, x)\big)$

$\big((\exists x)P(x, a) \to (\forall x)Q(a, x)\big) \land \big((\exists x)P(x, b) \to (\forall x)Q(\mathrm{b}, x)\big) \land \big((\exists x)P(x, c) \to (\forall x)Q(\mathrm{c}, x)\big)$

$(P(a, a) \lor P(b, a) \lor P(c, a) \to Q(a, a) \land Q(a, b) \land Q(a, c)) \land$
$(P(a, b) \lor P(b, b) \lor P(c, b) \to Q(b, a) \land Q(b, b) \land Q(b, c)) \land$
$(P(a, c) \lor P(b, c) \lor P(c, c) \to Q(c, a) \land Q(c, b) \land Q(c, c))$

谓词逻辑的等值和推理演算

$$(\forall x)\ P(x) \vee (\forall x) Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x)$$

1. 证明下列等值式和蕴涵式

(5) $(\forall x) P(x) \to q = (\exists x)(P(x) \to q)$

$$(\forall x)\ P(x) \to q = \neg(\forall x) P(x) \vee q = (\exists x)(\neg P(x) \vee q) = (\exists x)(P(x) \to q)$$

(7) $(\exists x) P(x) \to (\forall x) Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \to Q(x))$

$$(\exists x) P(x) \to (\forall x) Q(x) = \neg(\exists x) P(x) \vee (\forall x) Q(x) = \forall(x) \neg P(x) \vee \forall(x) Q(x)$$

$$\Rightarrow \forall(x)\big(\neg P(x) \wedge Q(x)\big) = (\forall x)(P(x) \to Q(x))$$

(8) $(\exists x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) \Rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$

谓词逻辑中的推理

- 无理数都不能表示为分数，有理数都能表示为分数，所以有理数都不是无理数
- 设$F(x)$: x是无理数，$G(x)$: x是有理数，$H(x)$: x可表示为分数，则
- 前提：$(\forall x)\big(F(x) \rightarrow \neg H(x)\big); (\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$
- 结论：$(\forall x)(G(x) \rightarrow \neg F(x))$

- $(\forall x)\big(F(x) \rightarrow \neg H(x)\big)$　　前提
- $F(x) \rightarrow \neg H(x)$　　全称量词消去
- $H(x) \rightarrow \neg F(x)$　　(2)置换
- $(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$　　前提
- $G(x) \rightarrow H(x)$　　全称量词消去
- $G(x) \rightarrow \neg F(x)$　　(3)(5)三段论
- $(\forall x)\big(G(x) \rightarrow \neg F(x)\big)$　　全称量词引入

$(\forall x)\big(F(x) \rightarrow \neg H(x)\big) = (\forall x)\big(\neg F(x) \vee \neg H(x)\big)$

$(\forall x)\big(G(x) \rightarrow H(x)\big) = (\forall x)\big(\neg G(x) \vee H(x)\big)$

$\neg(\forall x)\big(G(x) \rightarrow \neg F(x)\big) = (\exists x)\big(G(x) \wedge F(x)\big)$

建立子句集$\{\neg F(x) \vee \neg H(x), \neg G(x) \vee H(x), G(a), F(a)\}$

- $\neg F(x) \vee \neg H(x)$
- $\neg G(x) \vee H(x)$
- $G(a)$
- $F(a)$

- $\neg H(a)$　　(1)(4)归结
- $H(a)$　　(2)(3)归结
- $\square$　　(5)(6)归结