# 第十二周.对称变换、Hermite变换和复正规变换

参考：
课本10.1.3，10.4.3或
高等代数学9.5，9.6.

# 13.1 正交相似和酉相似

**引理：** 欧氏空间中两组标准正交基之间的过渡矩阵是正交矩阵，酉空间中两组标准正交基之间的过渡矩阵是酉矩阵.

定义：设$A, B$是$n$阶实矩阵，若存在正交阵$Q$, 使得$Q^TAQ = B$,则称$A$与$B$正交相似.
设$A, B$是$n$阶复矩阵，若存在酉矩阵$U$, 使得$U^HAU = B$,则称$A$与$B$酉相似.

目标：哪一类矩阵是酉可对角化，即酉相似于一个对角阵？或
哪一类线性变换满足在某一组标准正交基下矩阵是对角阵？

对称变换和Herimite变换是典型的一类满足上述性质的线性变换或
实对称阵和Hermite矩阵.

# 13.1 正交相似和酉相似

**Schur定理**（线性变换新版本）：设$V$是$n$维酉空间，$T: V \to V$是一个线性变换，则存在$V$的一组标准正交基，使得$T$在这组基下的矩阵是一个上三角阵.

**Schur定理**（矩阵新版本）：设$A$是一个$n$阶复矩阵，则$A$酉相似于一个上三角阵，即存在酉阵$U$, $U^H AU$是一个上三角阵.

因为：由上一章的Schur定理，存在可逆阵$P$，使得$P^{-1}AP$是一个上三角阵，应用QR分解，$P = UR$, 则$R^{-1}U^H AUR$是一个上三角阵.

# 13.2 自伴随的线性变换

定义：设$V$是$n$维内积空间，$T: V \to V$是一个线性变换，$T^*$是它的伴随，若$T = T^*$，则称$T$是自伴随的线性变换(或自伴随算子:self-adjoint operator).

定义：若$V$是$n$维欧氏空间, $V$上的自伴随算子称为对称变换互对称算子.
当$V$是$n$维酉空间，$V$上的自伴随算子称为Hermite变换或Hermite算子.

判别法1：$T$是$V$上自伴随算子当且仅当对于$\forall v, w \in V$, $(T(v), w) = (v, T(w))$.

判别法2：$T$是$V$上自伴随算子当且仅当$T$在某组标准正交基下的矩阵$A$满足$A = A^H$.

# 13.2 自伴随的线性变换

定义：设$A \in M_n(\mathbb{C})$, 且$A = A^H$, 则$A$称为Hermite矩阵. 特别地， 一个实Hermite矩阵就是实对称矩阵.

假设：设$V$是一个内积空间， $T : V \to V$是一个自伴随变换，$A$是$T$在一组标准正交基下矩阵（即$A$是Hermite阵）.

性质1：$T$在任意一组标准正交基下矩阵是Hermite阵.

性质1'：设$A$酉相似于$B$，则$B$是Hermite阵.

性质2：自伴随算子$T$的特征值是实数.

性质3：自伴随算子$T$的不同特征值的特征向量互相正交.

性质4：$\forall v \in V$, $(T(v), v)$是一个实数.

# 13.2 自伴随的线性变换

**定理：** 设$A$是$n$阶Hermite阵，则$A$酉相似于一个实对角阵.

**定理（线性变换新版本）：** 设$V$是$n$维酉空间，$T : V \to V$是一个自伴随线性变换， 则存在$V$的一组标准正交基，使得$T$在这组基下的矩阵是一个实对角阵.

# 13.3 复正规变换

定义：设$V$是$n$维内积空间，$T:V\to V$是一个线性变换，若$T\circ T^*=T^*\circ T$, 则$T$称为$V$上的正规算子或正规变换. 酉空间上的正规算子称为复正规算子，欧氏空间上的正规算子称为实正规算子.

例：酉变换和Hermite变换均是复正规算子，对称变换和正交变换是实正规算子.

定义：设$A\in M_n(\mathbb{C})$满足$A^HA=AA^H$，则$A$称为复正规矩阵. 设$A\in M_n(\mathbb{R})$满足$A^TA=AA^T$，则$A$称为实正规矩阵.

例：由定义，实正规矩阵也是复正规矩阵. 酉矩阵、Hermite阵均是复正规矩阵.

# 13.3 复正规变换

下面的定理回答了最开始的目标问题。

**定理：** 设$A \in M_n(\mathbb{C})$. $A$酉相似于对角阵当且仅当$A$是复正规矩阵.

定理的线性变换形式。

**定理：** 设$V$是$n$维酉空间， $T : V \to V$是一个线性变换. $T$是复正规变换当且仅当存在$V$的一组标准正交基，使得$T$在这组基下的表示矩阵是对角阵.

**注：** 定理中的标准正交基是$T$的$n$个互相垂直的单位特征向量.

# 13.4. 复正规变换的性质

设$V$是$n$维酉空间，$T : V \to V$是一个线性变换.

(1) $T$是一个复正规变换当且仅当$||T(\alpha)|| = ||T^*(\alpha)||, \forall \alpha \in V$.

(2) $T$是复正规变换当且仅当$T^*$是复正规变换.

(3) 设$T(\alpha) = \lambda\alpha$,则$T^*(\alpha) = \overline{\lambda}\alpha$, 其中$\lambda \in \mathbb{C}$.

(4) 设$T(\alpha) = \lambda_1\alpha$,$T(\beta) = \lambda_2\beta$, 且$\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则$(\alpha, \beta) = 0$.

# 单选题 1分

设置

设 $T_1, T_2 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 是两个Hermite变换，则以下哪个是Hermite变换：

A $T_1T_2$

B $i(T_1T_2 - T_2T_1)$

C $i(T_1T_2 + T_2T_1)$

D $T_1T_2 - T_2T_1$

提交

单选题 1分

设置

以下**错误**的陈述是

A Hermite阵的行列式是实数.

B 酉阵的行列式是长度等于1的复数.

C $A = I_n - 2uu^H,\ u \in \mathbb{C}^n,\ \|u\| = 1$ 是Hermite和酉阵

D 以上均不对.

提交