



清華大學

Tsinghua University

离散数学(1) Discrete Mathematics

第十章 关系

刘世霞

shixia@tsinghua.edu.cn



第十章 关系

- 10.1 二元关系
- 10.2 关系矩阵和关系图
- 10.3 关系的逆、合成、(限制和象)
- 10.4 关系的性质
- 10.5 关系的闭包
- 10.6 等价关系和划分
- 10.7 相容关系和覆盖
- 10.8 偏序关系



复习：闭包的定义

- 设 R 是非空集合 A 上的关系，如果 A 上有另一个关系 R' 满足：

(1) R' 是自反的（对称的或传递的）；

满足性质

(2) $R \subseteq R'$ ；

包含关系

(3) 对 A 上任何自反的（对称的或传递的）

关系 R'' ， $R \subseteq R'' \rightarrow R' \subseteq R''$ 。

最小的那个

- 则称关系 R' 为 R 的自反（对称或传递）闭包 **闭包**

- 一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$ ，

对称闭包记作 $s(R)$ ，传递闭包记作 $t(R)$ 。



复习：进一步思考

- 自反闭包 $r(R)$,
是具有自反性的 R 的“最小”超集合
- 对称闭包 $s(R)$,
是具有对称性的 R 的“最小”超集合
- 传递闭包 $t(R)$,
是具有传递性的 R 的“最小”超集合

若 R 已经是自反(对称、传递)的, 那么 R 的自反(对称、传递)闭包就是它自身。



复习：闭包的性质1

- 对非空集合 A 上的关系 R ,
 - (1) R 是自反的 $\Leftrightarrow r(R) = R$;
 - (2) R 是对称的 $\Leftrightarrow s(R) = R$;
 - (3) R 是传递的 $\Leftrightarrow t(R) = R$ 。



复习：闭包的性质2

- 对非空集合 A 上的关系 R_1, R_2 , 若 $R_1 \subseteq R_2$ 则
 - (1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$
 - (2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$
 - (3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$



复习：闭包的性质3

对非空集合 A 上的关系 R_1, R_2 ,

$$(1) \quad r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$$

$$(2) \quad s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$$

$$(3) \quad t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$$

复习： R 是非空集合 A 上的关系，则

$$t(R) = R^1 \cup R^2 \cup \dots$$



证明：首先证明 $R^1 \cup R^2 \cup \dots \subseteq t(R)$ ，使用归纳法。

$n = 1$ ，显然 $R^1 = R \subseteq t(R)$

假设 $R^k \subseteq t(R)$ ，对任意 $\langle x, y \rangle$ 有

$$\langle x, y \rangle \in R^{k+1} = R^k \circ R^1$$

$$\Leftrightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in R \wedge \langle t, y \rangle \in R^k)$$

$$\Rightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in t(R) \wedge \langle t, y \rangle \in t(R)) \Rightarrow \langle x, y \rangle \in t(R)$$

其次， $t(R) \subseteq R^1 \cup R^2 \cup \dots$ 即证 $R^1 \cup R^2 \cup \dots$ 传递

推论：设 A 是非空有限集， R 是集合 A 上的二元关系，

则存在正整数 n ，使得 $t(R) = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$



复习：闭包的关系矩阵

给定关系 R , $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系矩阵分别为 M , M_r , M_s , M_t , 那么:

- $M_r = M + I$
- $M_s = M + M^T$
- $M_t = M + M^2 + M^3 + \dots$



复习：闭包的关系图

关系图分别为 G , G_r , G_s , G_t , 那么:

- 考察 G 的每个顶点, 如果没有环就加上一个环, 最终得到的是 G_r
- 考察 G 的每一条边, 如果有一条从 x_i 到 x_j 的单向边, 则在 G 中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边, 最终得到 G_s
- 考察 G 的每个顶点 x_i , 找出从 x_i 出发的所有2步, 3步, ..., n 步长的路径。设路径的终点为 x_{j1} , x_{j2} , ..., x_{jk} 。如果没有从 x_i 到 x_{jl} 的边, 就加上这条边, 最终得到 G_t



复习：传递闭包的有限构造方法

- A 为非空有限集合, $|A| = n$, R 为 A 上的关系, 则存在正整数 $k \leq n$, 使得

$$t(R) = R^+ = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^k$$

复习：求传递闭包的方法



- 直接利用关系矩阵相乘来求传递闭包
- 在计算矩阵相乘的时候用分治方法降低时间复杂度
- 利用基于动态规划的Warshall算法来求传递闭包

复习：Warshall算法



列 a 行 b 有1， 行 a 加到行 b

复习：关系的闭包(closure)



定理： 设 X 是一集合， R 是 X 上的二元关系，则有：

- 若 R 是自反的，则 $s(R), t(R)$ 也自反
- 若 R 是对称的，则 $r(R), t(R)$ 也对称
- 若 R 是可传递的，则 $r(R)$ 也可传递

复习：闭包同时具有的多种性质2



对非空集合 A 上的关系 R ,

$$(1) \quad rs(R) = sr(R)$$

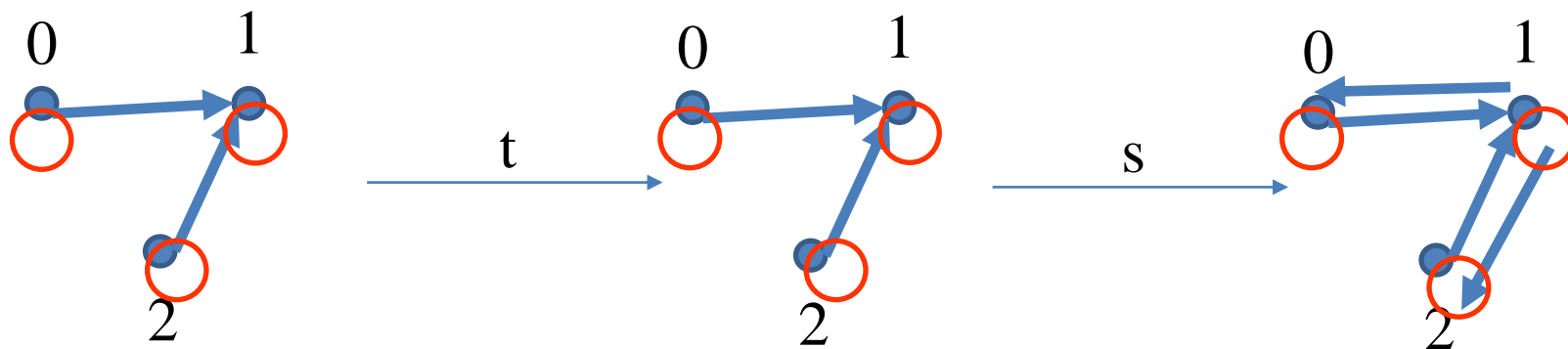
$$(2) \quad rt(R) = tr(R)$$

$$(3) \quad st(R) \subseteq ts(R)$$

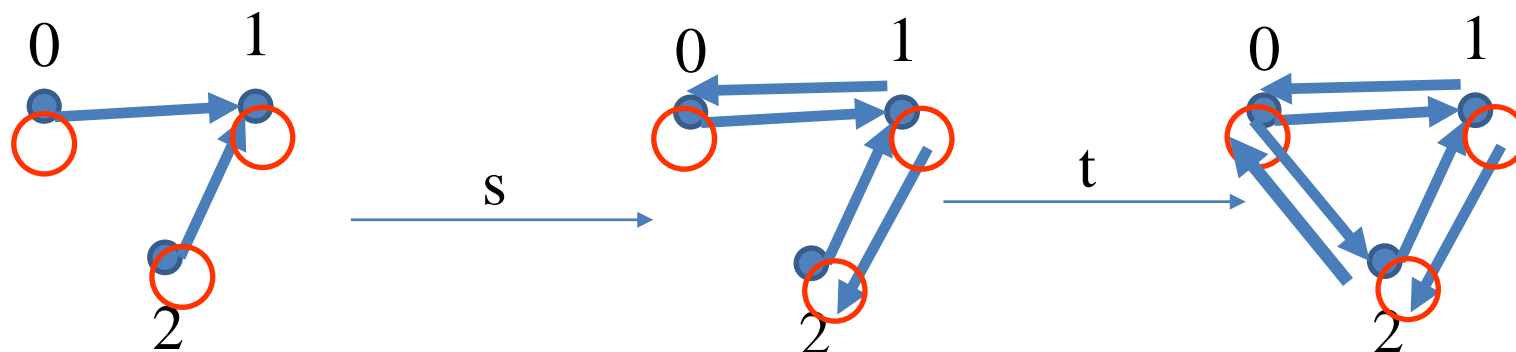
其中 $rs(R) = r(s(R))$, 其它类似。

$$\begin{aligned} r(R) &\rightarrow sr(R) \rightarrow tsr(R) \\ r(R) &\rightarrow tr(R) \rightarrow str(R) ? \end{aligned}$$

复习：反例



对称的，但不是传递的，少了(0,2)和(2,0)





复习：等价关系和划分

定义10.6.1 等价关系

- 设 R 为非空集合 A 上的关系，如果 R 是自反的、
对称的、
传递的，
• 则称 R 为 A 上的等价关系。



复习：等价类

- 定义：设 R 是 X 上等价关系，对任意 x 可以构造 X 的子集 $[x]_R = \{y | y \in X \text{ 且 } xRy\}$, 称之为 x 对于 R 的等价类。
- $[x]_R$ 是 X 内所有与 x 有等价关系 R 的元素构成的集合。有如下性质：
 - (1) $\forall x \in X, x \in [x]_R, [x]_R \neq \emptyset$
 - (2) 若 $y \in [x]_R$, 则 $[x]_R = [y]_R$
 - (3) $y \in [y]_R$, 若 $y \notin [x]_R$, 则 $[x]_R \neq [y]_R$

定理 设 A 是一个集合， R 是 A 上的等价关系， xRy 当且仅当 $[x]_R = [y]_R$



证明：

- 充分性，因为 $x \in [x]_R = [y]_R$ ，即 $x \in [y]_R$ ，所以 xRy 。
- 必要性，已知 xRy ，考虑 $[x]_R$ 的任意元素 z ，有 zRx 。根据 R 的传递性，有 zRy ，因此 $z \in [y]_R$ 。证明 $[x]_R \subseteq [y]_R$ 。类似可证明 $[y]_R \subseteq [x]_R$ ，所以 $[x]_R = [y]_R$ 。



10.6 等价关系与划分

定理 设 A 是一个集合, R 是 A 上的等价关系, 对于所有 $x, y \in A$, 或者 $[x]_R = [y]_R$, 或者 $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

证明: 只需证明如果 $x \not R y$, 则 $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

反证法: 假设 $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$, 则 $\exists z \in [x]_R \cap [y]_R$

$$\Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \wedge \langle z, y \rangle \in R$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \text{ (矛盾!)}$$



10.6 等价关系与划分

定理 设 R 是集合 A 上的等价关系, 则

$$A = \bigcup \{[x]_R \mid x \in A\}$$

证明: 首先易证 $\bigcup \{[x]_R \mid x \in A\} \subseteq A$

其次, 对任意 $y \in A$

$$y \in A \Rightarrow y \in [y]_R \wedge y \in A$$

$$\Rightarrow y \in \bigcup \{[x]_R \mid x \in A\}$$

$$\text{所以: } A \subseteq \bigcup \{[x]_R \mid x \in A\}$$

10.6 等价关系与划分-等价类

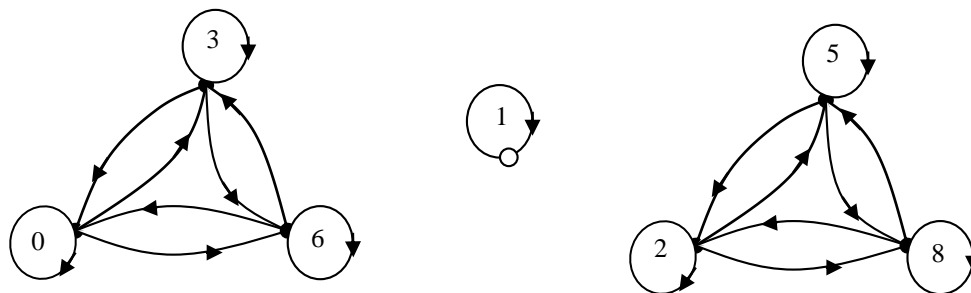


- 由等价类的定义性质知： X 内的任两元素对于 R 的等价类或相等或分离，故 X 内所有元素对 R 的等价类的并集就是 X 。
- 也可以说， X 的元素对于 R 的等价类定义了 X 的一个划分，且这样的划分就是唯一的。原因：由等价类的性质知等价关系 R 构成的类两两不相交，且覆盖 X ，且 X 的所有元素对于 R 的等价类是唯一的。

10.6 等价关系与划分-讨论



- 等价类 $[x]_R$ 是一个集合, $[x]_R \subseteq A$ ($[x]_R$ 是 A 的子集)
- $[x]_R$ 中的元素是在 A 中所有与 x 具有等价关系 R 的元素所组成的集合
- 在等价关系中的关系图中,
 - 每个连通子图中的所有点就构成一个等价类



10.6 等价关系与划分-实例



- $A = \{a, b, c, d\}$
- $R = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, c \rangle \}$
- $[a]_R = \{a, b\} = [b]_R$
- $[c]_R = \{c, d\} = [d]_R$

10.6 等价关系与划分-实例



- 设 $A = \mathbb{N}$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge (x - y) \text{ 可被 } 3 \text{ 整除} \}$$

- 等价类

$$[0]_R = \{0, 3, 6, 9 \dots\}$$

$$[1]_R = \{1, 4, 7, 10 \dots\}$$

$$[2]_R = \{2, 5, 8, 11 \dots\}$$



10.6 等价关系与划分

商集： R 是 A 上的等价关系， R 的所有等价类构成的集合

记为 A/R ： $\{[x]_R \mid x \in A\}$

- 例： A 为全班同学的集合， $|A| = n$ ， $(n \in \mathbb{N})$
按指纹的相同关系 R_1 是一个等价关系

$$A/R_1 = \{[x_1]_{R_1}, \dots, [x_n]_{R_1}\}$$

同姓关系 R_2 是一等价关系

$$A/R_2 = \{[\text{张}]_{R_2}, [\text{李}]_{R_2}, \dots\}$$



10.6 等价关系与划分

划分：给定一非空集合 A ， A 的一个划分为非空子集族 $S = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ ，满足：

$$(1) \quad \emptyset \notin S$$

$$(2) \quad \forall x \forall y (x, y \in S \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)$$

$$(3) \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m = A$$

非空子集，不相交，并为 A

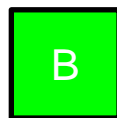


■ 例: $A = \{a, b, c\}$, 下列哪些 A_i 为 A 的一个划分?

- $A_1 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$
- $A_2 = \{\{a\}, \{c\}, \{b\}\}$
- $A_3 = \{\{a\}, \{a, b, c\}\}$
- $A_4 = \{\{a, b\}, \{c\}, \emptyset\}$
- $A_5 = \{\{a, \{a\}\}, \{b, c\}\}$



A_1



A_2



A_3



A_4



A_5

提交

等价关系与划分有一一对应关系



- 划分到等价关系转化： A 是一非空集合， S 是 A 的一个划分， 下述关系必定是一个等价关系

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x, y \text{ 在 } S \text{ 的同一划分} \}$$

- 等价关系到划分的转化： 设 A 是非空集合， R 是 A 上的等价关系。 R 的商集是 A 的划分

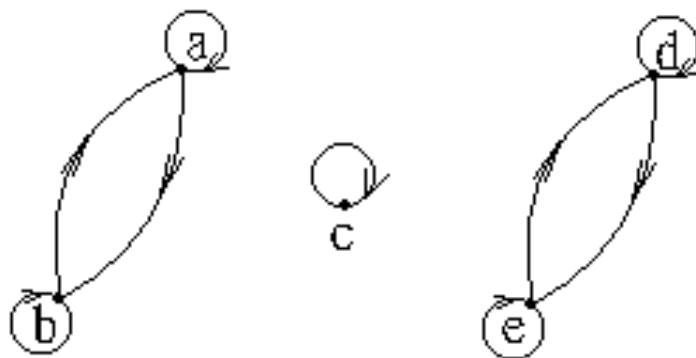


10.6 等价关系与划分

例 $A = \{a, b, c, d, e\}$, $S = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}\}$

对应划分 S 的等价关系为

$$\begin{aligned} R &= \{a, b\} \times \{a, b\} \cup \{c\} \times \{c\} \cup \{d, e\} \times \{d, e\} \\ &= \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, c \rangle, \\ &\quad \langle d, d \rangle, \langle e, e \rangle, \langle d, e \rangle, \langle e, d \rangle \} \end{aligned}$$





10.6 等价关系与划分

例1 整数集 Z 上, $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x - y \text{ 能被 } 4 \text{ 整除} \}$

$$= \{ \langle x, y \rangle \mid x \equiv y \pmod{4} \}$$

R 是等价关系, 由 Z 上元素所构成的类分别以余数为0、1、2、3分类:

$$[0]_R = \{ \cdots -8, -4, 0, 4, 8, 12 \cdots \} = \{4k\}$$

$$[1]_R = \{ \cdots -7, -3, 1, 5, 9, 13 \cdots \} = \{4k+1\}$$

$$[2]_R = \{ \cdots -6, -2, 2, 6, 10, 14 \cdots \} = \{4k+2\}$$

$$[3]_R = \{ \cdots -5, -1, 3, 7, 11, 15 \cdots \} = \{4k+3\}$$



分析等价类的性质

- 令 $W = [i]_R$
 - 1、任 $w \in W$, wRw
 - 2、任 $w_1, w_2 \in W$, $[w_1]_R = [w_2]_R$
 - 3、 $[0]_R \cap [1]_R = \emptyset, \dots, [2]_R \cap [3]_R = \emptyset$,
 $[0]_R \cup [1]_R \cup [2]_R \cup [3]_R = Z$
- 得 $X/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R, [3]_R\}$, 这个商集是 X 上的一个划分。这些类称为模4的剩余类。

定理：任一集合上的一个划分可产生一个等价关系。



证明：

- 设 $C = \{C_1, C_2 \dots C_m\}$, C_i 为 C 的划分块，由 C 可建立一个关系

$$R = (C_1 \times C_1) \cup (C_2 \times C_2) \cup \dots \cup (C_m \times C_m)$$

- 易知 R 是等价关系。
- 集合上的等价关系和其上的划分是一一对应的。



10.6 等价关系与划分

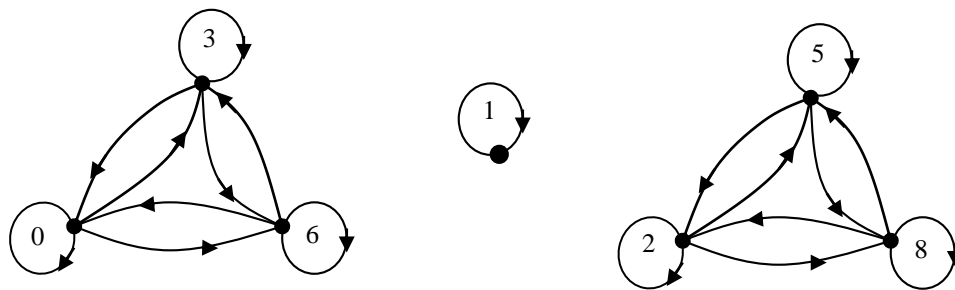
例 设 $A = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 8\}$, R 为 Z 上模3等价关系 $R = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 8, 8 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \langle 3, 0 \rangle, \langle 0, 6 \rangle, \langle 6, 0 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 5, 2 \rangle, \langle 2, 8 \rangle, \langle 8, 2 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 6, 3 \rangle, \langle 5, 8 \rangle, \langle 8, 5 \rangle \}$, R 的关系图见图

• 模3的等价类:

$$[0] = \{0, 3, 6\} = [3] = [6],$$

$$[1] = \{1\},$$

$$[2] = \{2, 5, 8\} = [5] = [8].$$





10.6 等价关系与划分

例 设 $X = \{a, b, c, d, e\}$, 求由划分 $S = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}\}$ 确定的等价关系。

$$R1 = \{a, b\} \times \{a, b\}$$

$$= \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle \}$$

$$R2 = \{c\} \times \{c\} = \{ \langle c, c \rangle \}$$

$$R3 = \{d, e\} \times \{d, e\}$$

$$= \{ \langle d, d \rangle, \langle d, e \rangle, \langle e, d \rangle, \langle e, e \rangle \}$$

$$R = R1 \cup R2 \cup R3$$



由划分的定义可知：

集合 A 的划分和 A 上的等价关系可以建立一一对应。即：

A 的一个划分确定了 A 上的一个等价关系；反之亦然。



定理10.6.2 等价关系诱导出的划分

- 对非空集合 A 上的等价关系 R , A 的商集 A/R 就是 A 的划分, 称为由等价关系 R 诱导出的 A 的划分, 记作 π_R 。

定理10.6.3 划分 π 诱导出的 A 上的等价关系

- 对非空集合 A 上的一个划分 π , 令 A 上的关系 R_π 为

$$R_\pi = \{ \langle x, y \rangle \mid (\exists z)(z \in \pi \wedge x \in z \wedge y \in z) \}$$

R_π 则为 A 上的等价关系, 它称为划分 π 诱导出的 A 上的等价关系。

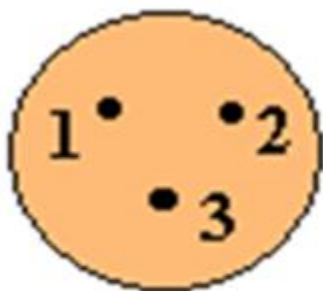
定理10.6.4 划分 π 和 A 上的等价关系 R

- 对非空集合 A 上的一个划分 π , 和 A 上的等价关系 R , π 诱导 R 当且仅当 R 诱导 π 。

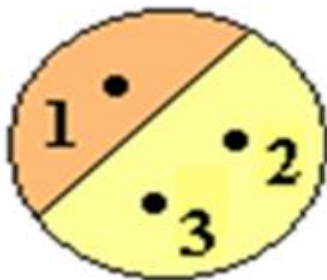


例8：给出 $A=\{1,2,3\}$ 上所有的等价关系。

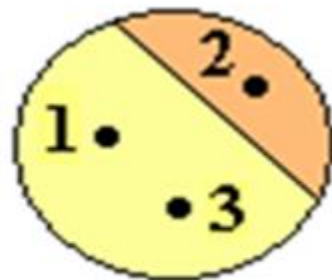
求解思路：先做出 A 的所有划分，然后根据划分写出对应的等价关系。



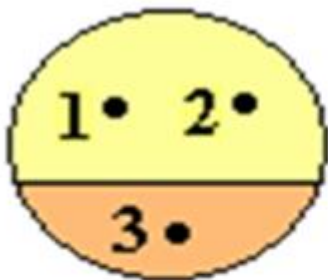
π_1



π_2



π_3



π_4



π_5

10.6 等价关系与划分-思考题



计算集合 A 上不同的等价关系的个数。

如P182上例6, $A = \{1, 2, 3\}$ 时, A 上可得到5个不同的等价关系, 即 $f(A_3) = 5$ 。

- 当 $|A| = 4$ 时, $f(A_4) = ?$
- 当 $|A| = 5$ 时, $f(A_5) = ?$
- 当 $|A| = n$ 时, $f(A_n) = ?$

STIRLING数



定义： n 个有区别的球放到 m 个相同的盒子中, 要求无一空盒, 其不同的方案数称为第二类Stirling数.

定理： 第二类Stirling数 $S(n, m)$ 有下列性质:

$$(a) S(n, 0) = 0,$$

$$(b) S(n, 1) = 1,$$

$$(c) S(n, 2) = 2^{n-1} - 1,$$

$$(d) S(n, n-1) = C(n, 2),$$

$$(e) S(n, n) = 1.$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

STIRLING数



定理： 第二类Stirling数满足下面的递推关系：

$$S(n, m) = mS(n-1, m) + S(n-1, m-1), \quad (n > 1, m \geq 1).$$

证明：设有 n 个有区别的球 b_1, b_2, \dots, b_n ，从中取一个球设为 b_1 。把 n 个球放到 m 个盒子无一空盒的方案全体可分为两类。

(a) b_1 独占一盒，其方案数显然为 $S(n-1, m-1)$

(b) b_1 不独占一盒，这相当于先将剩下的 $n-1$ 个球放到 m 个盒子，不允许空盒，共有 $S(n-1, m)$ 种不同方案，然后将 b_1 球放进其中一盒，方案数为 $mS(n-1, m)$ 。

根据加法法则有 $S(n, m) = S(n-1, m-1) + mS(n-1, m)$ 。



STIRLING数

- 红、黄、蓝、白、绿五个球放到无区别的
两个盒子里。

$$S(5,2) = 2S(4,2) + S(4,1) = 2 \times 7 + 1 = 15$$

- 故共有15种不同的方案。



STIRLING数

先把绿球取走，余下的四个球放到两个盒子。

用 r , y , b , w 分别表示红，黄，蓝，白球，绿球用 g 表示

g 不独占一盒				g 独占一盒	
第 1 盒子	第 2 盒子	第 1 盒子	第 2 盒子	第 1 盒子	第 2 盒子
rg	ybw	r	ybwg	g	rybw
yg	rbw	y	rbwg		
bg	ryw	b	rywg		
wg	ryb	w	rybg		
ryg	bw	ry	bwg		
rbg	yw	rb	ywg		
rwg	yb	rw	ybg		



STIRLING数

例 第二类Stirling数的展开式义：

$$S(n, m) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^k C(m, k) (m - k)^n$$

- $S(n, m)$ 的组合意义：将 n 个有标志的球放入 m 个无区别的盒子，而且无一空盒的方案数.
- 思路：先考虑 n 个有标志的球，放入 m 个有区别的盒子，无一空盒的方案数.



STIRLING数

思路：容斥原理

解： n 个有标志的球放入 m 个有区别的盒子的
事件全体为 S ,

$$|S| = m^n$$

- A_i 表示第 i 个盒子为空, $i=1,2,\dots,m$;

$$|A_i| = (m-1)^n$$

共有 $C(m,1)$ 个

$$|A_i \cap A_j| = (m-2)^n$$

共有 $C(m,2)$ 个

.....

- 求无空盒的方案数



m 个有区别盒子,无空盒的方案数:

$$\begin{aligned} N &= |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \dots \cap \overline{A_n}| \\ &= m^n - C(m,1)(m-1)^n + C(m,2)(m-2)^n + \dots + (-1)^m C(m,m)(m-m)^n \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^k C(m,k)(m-k)^n \end{aligned}$$

而第二类Stirling数要求盒子无区别, 则:

$$S(n,m) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^k C(m,k)(m-k)^n$$

推论: 因为 $S(m,m) = 1$,

$$m! = \sum_{k=0}^m (-1)^k C(m,k)(m-k)^m$$



相容关系

学习相容关系的原因



- 集合的分划与等价关系是紧密相关的
- 但等价关系的传递性是个较麻烦的问题, 在实际问题中往往有些关系不具有传递性
 - 朋友关系、父子关系
 - 关系数据库中考虑元组运算时还要排除传递性
- 本节介绍一种应用广泛的新的关系—相容关系。



定义10.7.1 相容关系

- 对非空集合 A 上的关系 R ，如果 R 是自反的、对称的，则称 R 为 A 上的相容关系。
- 与等价关系的区别：不一定满足传递性
- 例：朋友关系等

名字中有同字的关系？



相容关系举例

- 例1 A是英文单词的集合

$A = \{\text{cat, teacher, cold, desk, knife, by}\}$

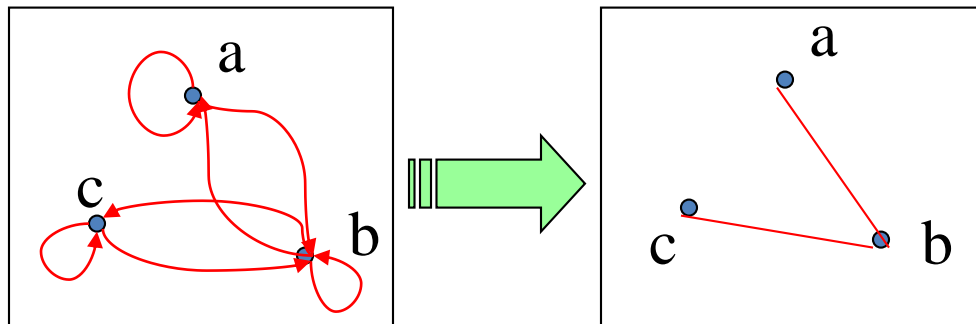
A 上的关系R为

$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x \text{ 和 } y \text{ 至少有一相同字母} \}$

- 容易证明，R是自反的，对称的，但不是传递的，因此，R是相容关系。



2. 相容关系的图形表示与矩阵表示



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 1 \end{matrix}$$

关系图

- 每个节点都有自回路
- 有向弧成对出现

所以，可以省去自回路，
用单线代替来回弧线。

关系矩阵

- 主对角线全为1
- 矩阵关于主对角线对称

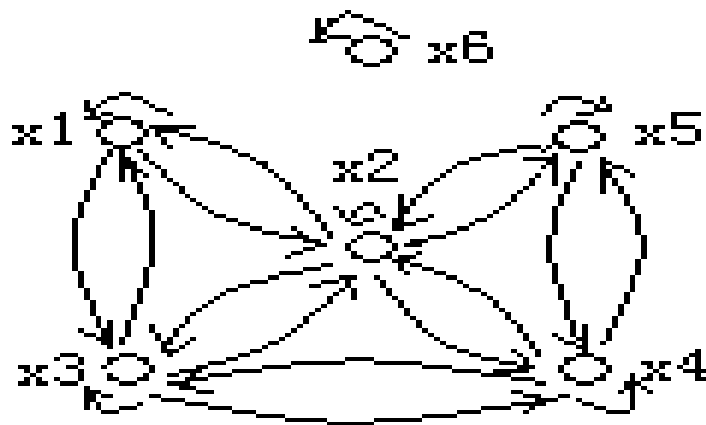
所以，只需主对角线以下部分即可表示全部信息。



令 $x_1=\text{cat}$, $x_2=\text{teacher}$, $x_3=\text{cold}$, $x_4=\text{desk}$, $x_5=\text{knife}$, $x_6=\text{by}$

则 $R\{\langle x_1, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \langle x_1, x_3 \rangle,$
 $\langle x_2, x_1 \rangle, \langle x_2, x_2 \rangle, \langle x_2, x_3 \rangle, \langle x_2, x_4 \rangle, \langle x_2, x_5 \rangle,$
 $\langle x_3, x_1 \rangle, \langle x_3, x_2 \rangle, \langle x_3, x_3 \rangle, \langle x_3, x_4 \rangle,$
 $\langle x_4, x_2 \rangle, \langle x_4, x_3 \rangle, \langle x_4, x_4 \rangle, \langle x_4, x_5 \rangle,$
 $\langle x_5, x_2 \rangle, \langle x_5, x_4 \rangle, \langle x_5, x_5 \rangle,$
 $\langle x_6, x_6 \rangle\}$

R的关系图为:



R的关系矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



定义10.7.2 相容类

- 对非空集合 A 上的相容关系 R ，若 $C \subseteq A$ ，且 C 中任意两个元素 x 和 y 有 xRy ，则称 C 是由相容关系产生的相容类，简称相容类。这个定义也可以写成：

$$C = \{ x \mid x \in A \wedge (\forall y)(y \in C \rightarrow xRy) \}$$

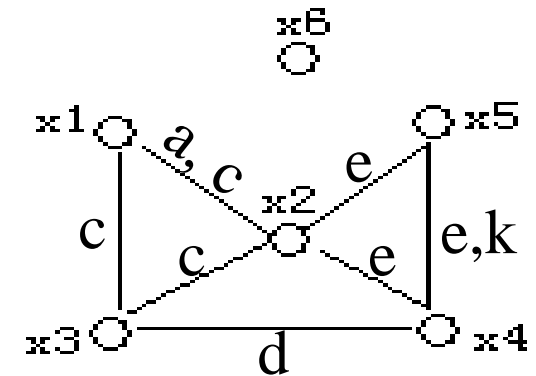
- 相容类的判定：在关系图中
 - 完全多边形的顶点的集合；
 - 任一条连线上的两个结点构成的集合；
 - 任一个结点构成的单元素的集合。

$x_1=\text{cat}$, $x_2=\text{teacher}$, $x_3=\text{cold}$, $x_4=\text{desk}$, $x_5=\text{knife}$, $x_6=\text{by}$



- 例如上例的相容关系

$R = \{ \langle x_1, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \langle x_1, x_3 \rangle,$
 $\langle x_2, x_1 \rangle, \langle x_2, x_2 \rangle, \langle x_2, x_3 \rangle, \langle x_2, x_4 \rangle, \langle x_2, x_5 \rangle$
 $\langle x_3, x_1 \rangle, \langle x_3, x_2 \rangle, \langle x_3, x_3 \rangle, \langle x_3, x_4 \rangle,$
 $\langle x_4, x_2 \rangle, \langle x_4, x_3 \rangle, \langle x_4, x_4 \rangle, \langle x_4, x_5 \rangle,$
 $\langle x_5, x_2 \rangle, \langle x_5, x_4 \rangle, \langle x_5, x_5 \rangle,$
 $\langle x_6, x_6 \rangle \}$



可产生相容类 $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_6\}$, $\{x_2, x_4, x_5\}$ 等等。

相容类 $\{x_1, x_2\}$ 中加进 x_3 组成新的相容类 $\{x_1, x_2, x_3\}$,

相容类 $\{x_1, x_3\}$ 中加进 x_2 组成新的相容类 $\{x_1, x_2, x_3\}$,

相容类 $\{x_2, x_3\}$ 中加进 x_1 组成新的相容类 $\{x_1, x_2, x_3\}$

相容类 $\{x_6\}$ 和 $\{x_2, x_4, x_5\}$ 加入任一新元素, 就不再组成相容类, 称它们是**最大相容类**。

定义10.7.3 最大相容类

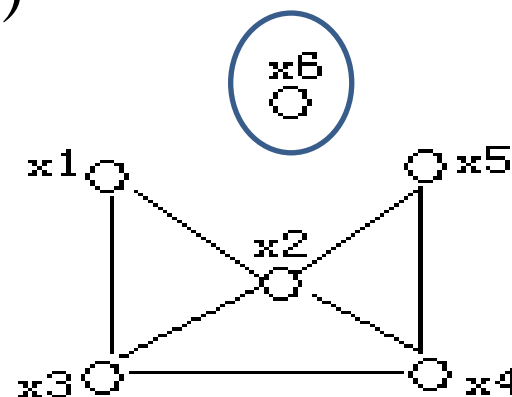


- 非空集合 A 上的相容关系 R ，一个相容类若不是任何相容类的真子集，就称为最大相容类，记作 C_R 。
- 最大相容类 C_R 有下列性质：

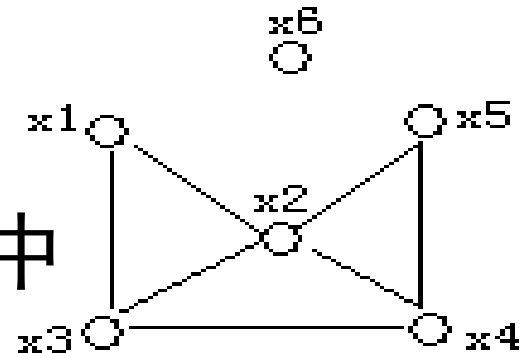
$$(\forall x)(x \in A - C_R \rightarrow (\exists y)(y \in C_R \wedge xRy))$$

$$(\forall x)(\forall y)((x \in C_R \wedge y \in C_R) \rightarrow xRy)$$

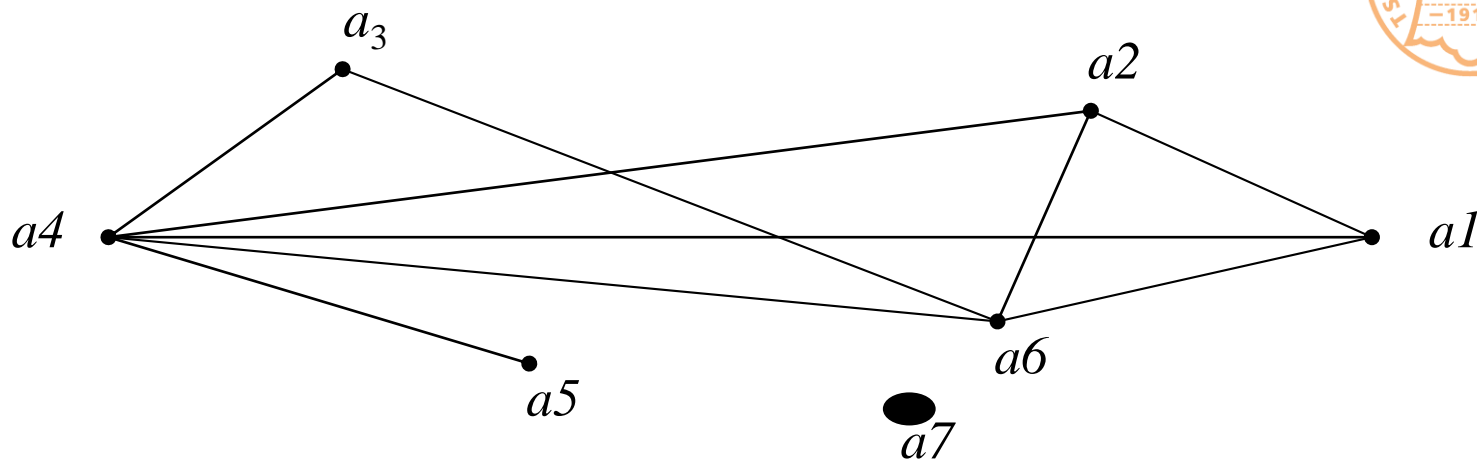
和



最大相容类



- 最大相容类的判定：在关系图中
 - (1) 最大完全多边形的顶点的集合；
 - (2) 任一条不是完全多边形的边的连线上的两个结点构成的集合；
 - (3) 任一个孤立结点构成的单元素的集合。
- （所谓完全多边形就是其每个顶点都与其它顶点连接的多边形。）
- 如上面例题中， $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_6\}$, $\{x_2, x_4, x_5\}$, $\{x_2, x_3, x_4\}$ 都是最大相容类。



- 例 设给定的相容关系如上图所示，求它的最大相容类。
- 解：最大相容类为：
 $\{a1, a2, a4, a6\}$, $\{a3, a4, a6\}$, $\{a4, a5\}$, $\{a7\}$



所有最大相容类的求解算法？



- 利用相容关系图可找出所有最大相容类。
 - (1) 最大完全多边形的顶点集合构成最大相容类；
 - (2) 孤立结点构成最大相容类 ；
 - (3) 不是完全多边形边的两个端点集合构成最大相容类。
- 定理10.7.1 最大相容类的存在性

对非空有限集合 A 上的相容关系 R ，若 C 是一个相容类，则存在一个最大相容类 C_R ，使 $C \subseteq C_R$ 。



设 R 为有限集 A 上的相容关系， C 是一个相容类，

那么必存在一个最大相容类 C_R ，使得 $C \subseteq C_R$ 。

证明：设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ，构造相容类序列

$$C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \dots, \text{其中 } C_0 = C$$

且 $C_{i+1} = C_i \cup \{a_j\}$ ，其中 j 是满足 $a_j \notin C_i$ 而 a_j 与 C_i 中各元素都有相容关系的最小足标。

由于 A 的元素个数 $|A| = n$ ，所以至多经过 $n - |C|$ 步，就使这个过程终止，而此序列的最后一个相容类，就是所要求的最大相容类。

此定理的证明告诉我们找最大相容类的方法。



10.7 相容关系和覆盖

定义10.7.4 覆盖

- 对非空集合 A , 若存在集合 Ω 满足下列条件:
 - (1) $(\forall x)(x \in \Omega \rightarrow x \subseteq A)$
 - (2) $\emptyset \notin \Omega$
 - (3) $\bigcup \Omega = A$
- 则称 Ω 为 A 的一个覆盖, 称 Ω 中的元素为 Ω 的覆盖块。

□ **划分:** 给定一非空集合 A , A 的一个划分为非空子集族 $S = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, 满足:

- ① $\emptyset \notin S$
- ② $\forall x \forall y (x, y \in S \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)$
- ③ $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m = A$



10.7 相容关系和覆盖

定理10.7.2 完全覆盖

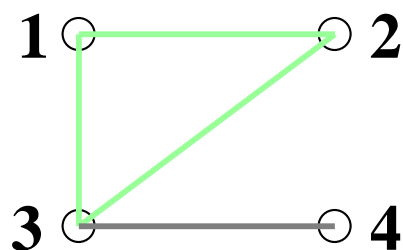
- 对非空集合 A 上的相容关系 R ，最大相容类的集合是 A 的一个覆盖，称为 A 的完全覆盖，记作 $C_R(A)$ 。而且 $C_R(A)$ 是唯一的。

定理10.7.3 覆盖与相容关系

- 对非空集合 A 的一个覆盖 $\Omega=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ，由 Ω 确定的关系 $R=A_1 \times A_1 \cup A_2 \times A_2 \cup \dots \cup A_n \times A_n$ 是 A 上的相容关系。

不同的覆盖可能构造出相同的相容关系。

例 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, 集合 $\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}\}$ 和 $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}\}$ 都是 A 的覆盖, 但它们可以产生相同的相容关系如图所示:



定理3 集合 A 上相容关系 R 与完全覆盖 $C_R(A)$ 存在一一对应。

注意: 给定集合 A 的一个相容关系,
覆盖不是唯一的, 但完全覆盖是唯一的。



如前面的例子，设A是由下列英文单词组成的集合。

$A = \{\text{cat}, \text{teacher}, \text{cold}, \text{desk}, \text{knife}, \text{by}\}$

定义关系：

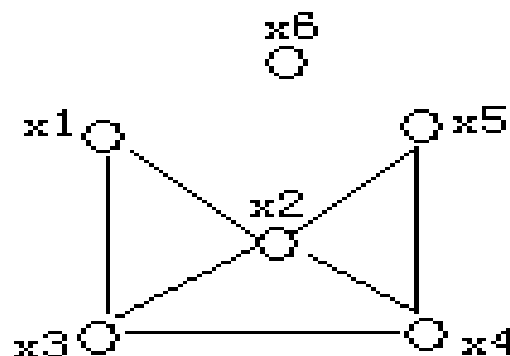
$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A, x \text{ 和 } y \text{ 至少有一个相同的字母} \}$ 。

R是一个相容关系。



- R的关系矩阵和关系图分别为：

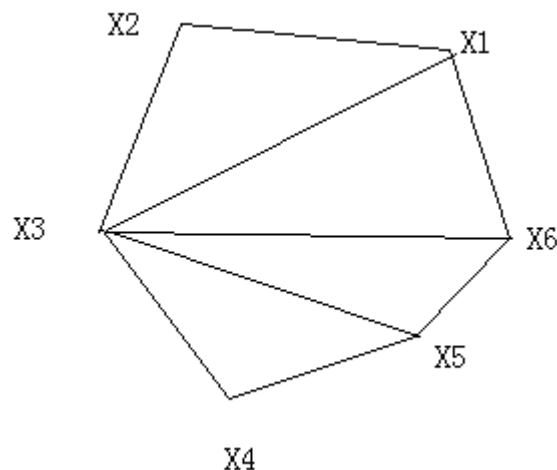
x_2	1					
x_3	1	1				
x_4	0	1	1			
x_5	0	1	0	1		
x_6	0	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6



- 最大相容类为 $\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_6\}, \{x_2, x_4, x_5\}, \{x_2, x_4, x_3\}$
- 集合A的完全覆盖
$$C_R(A) = \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_6\}, \{x_2, x_4, x_5\}, \{x_2, x_4, x_3\}$$



- 相容关系图为:



- 解: 最大相容类为:

$\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_3, x_6\}, \{x_3, x_5, x_6\}, \{x_3, x_4, x_5\}$ 。

- 集合A的完全覆盖:

$$C_R(A)$$

$$= \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_3, x_6\}, \{x_3, x_5, x_6\}, \{x_3, x_4, x_5\}\}$$



相容类:

- 设 R 为集合 A 上的相容关系, 若 $C \subseteq A$, 如果对于 C 中任意两个元素 a_1 、 a_2 有 $a_1 R a_2$, 称 C 是由相容关系 R 产生的相容类。

相容类的判定

- 在关系图中

- (1) 完全多边形的顶点的集合;
- (2) 任一条连线上的两个结点构成的集合;
- (3) 任一个结点构成的单元素的集合。



最大相容类

- 设 R 为集合 A 上的相容关系，不能真包含在任何其他相容类中的相容类，称作最大相容类，记作 C_R 。

最大相容类的判定

- 在关系图中
 - (1)最大完全多边形的顶点的集合；
 - (2)任一条不是完全多边形的边的连线上的两个结点构成的集合；
 - (3)任一个孤立结点构成的单元素的集合。
- 设 R 为有限集 A 上的相容关系， C 是一个相容类，那么必存在一个最大相容类 C_R ，使得 $C \subseteq C_R$ 。



完全覆盖

- 在集合 A 上的给定相容关系 R ，其最大相容类的集合称作集合 A 的完全覆盖，记作 $C_R(A)$ 。
- 设 $C=\{C_1, C_2, \dots, C_R\}$ 是集合 A 的覆盖，由 C 决定的关系 $R=(C_1 \times C_1) \cup (C_2 \times C_2) \cup \dots \cup (C_R \times C_R)$ 是 A 上的一个相容关系。
- 集合 A 上的相容关系 R 与完全覆盖 $C_R(A)$ 存在一一对应。



偏序关系



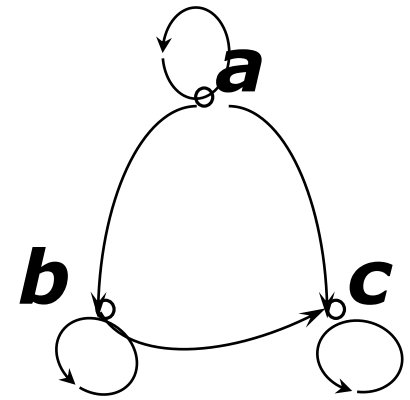
- 在普通生活中常见的许多粗劣（愚昧）的思维方式，可以通过学习数学来改善。有一种近乎是常见的且容易引起误解的假设，认为事物必须按线性次序来排列，这种假设可以通过学习偏序来消除。 — Cambridge Report
- 次序在现实生活中常见：
 - 小于，包含等
- 研究序理论的动机：
 - 研究一般次序关系
 - 推导出一般序关系的性质
 - 这些关系可以应用于所有特定的序关系



定义10.8.1（偏序关系 半序关系）

- 对非空集合 A 上的关系 R ，如果 R 是**自反的**、**反对称的**和**传递的**，则称 R 为 A 上的偏序关系。
- 在不会产生误解时，偏序关系 R 通常记作 \leq 。当 xRy 时，可记作 $x \leq y$ ，读作 x “**小于等于**” y 。偏序关系又称弱偏序关系，或半序关系。

偏序关系



- 偏序关系R (记作 \leq)
 - 自反性: $\forall a \in A$, 有 $\langle a, a \rangle \in R$
 - 反对称性: $\forall a, b \in R$, 如果 $\langle a, b \rangle \in R$ 且 $\langle b, a \rangle \in R$, 则必有 $a = b$
 - 传递性: $\forall a, b, c \in A$, 如果 $\langle a, b \rangle \in R$, $\langle b, c \rangle \in R$, 必有 $\langle a, c \rangle \in R$
- 例: 偏序关系
 - $A = \{a, b, c\}$
 - $R = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, c \rangle\}$



偏序关系举例

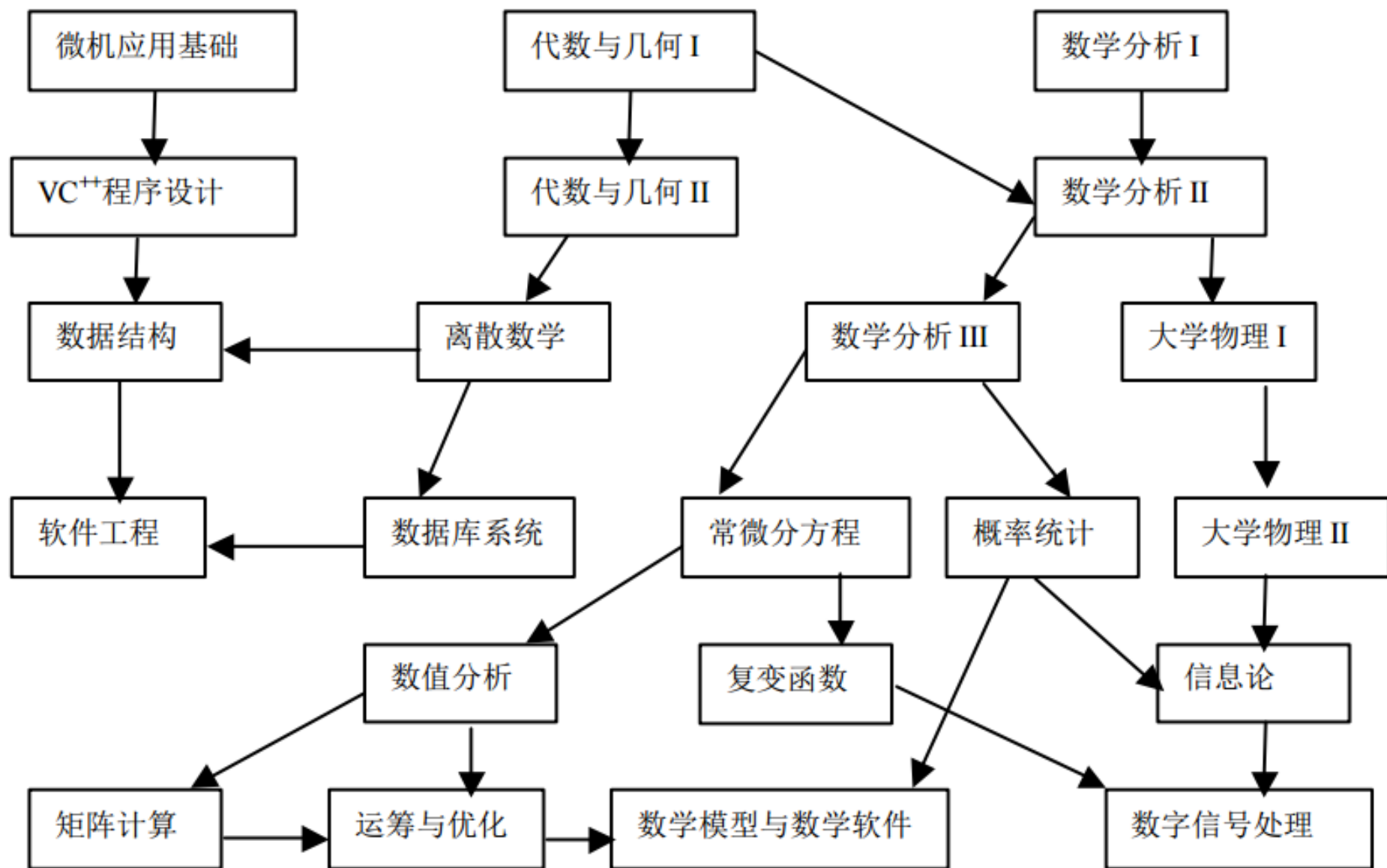
- 设 A 是实数集合的非空子集，则 A 上的小于等于关系和大于等于关系都是 A 上的偏序关系。
- 设 A 为正整数集合 \mathbb{Z}^+ 的非空子集，则 A 上的整除关系 D_A
$$D_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \mid y \}$$
是 A 上的偏序关系。



偏序关系举例

- 设 A 为一集合， $P(A)$ 为 A 的幂集，则 $P(A)$ 上的包含关系 $R_{\subseteq} = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in P(A) \wedge x \subseteq y \}$ 是 $P(A)$ 上的偏序关系。
- 例 $A = \{a, b\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$
试写出 $P(A)$ 上的包含关系 R_{\subseteq} 。

应用：课程设置



应用：排序



- 在评分标准不能准确标定而又需要排序的场合里，把要排序的成员两两比较，确定两者之间谁好谁差，是较容易且较准确。
- 因此在这种场合使用“0 - 1”法评判。用偏序关系的传递性可以减少比较次数，
- 用反对称性又可使评判在比赛过程中动态进行。

定义10.8.2 （拟序关系 强偏序关系）



- 对非空集合 A 上的关系 R ，如果 R 是反自反的和传递的，则称 R 为 A 上的拟序关系 (Quasi-ordering relation) （反对称的）。
- 在不会产生误解时，拟序关系 R 通常记作 $<$ 。当 xRy 时，可记作 $x < y$ ，读作 x “小于” y 。拟序关系又称强偏序关系。



10.8 偏序关系

- 定理10.8.1 R 为 A 上的拟序关系, 则 R 是反对称的。

(可见, 偏序与拟序差别只在自反性上)

- 定理10.8.2 对 A 上的拟序关系 R , $R \cup R^0$ 是 A 上的偏序关系。
- 定理10.8.3 对 A 上的偏序关系 R , $R - R^0$ 是 A 上的拟序关系。



定义10.8.3 （偏序集）

- 集合 A 与 A 上的关系 R 一起称为一个结构。集合 A 与 A 上的偏序关系 R 一起称为一个偏序结构，或称偏序集，并记作 $\langle A, R \rangle$ 。

如 $\langle P(A), \subseteq \rangle$ 是偏序集。

哈斯图



- 得名于德国数学家Helmut Hasse
- 用来表示有限偏序集的一种数学图表
 - 偏序集: $\langle A, \leq \rangle$
 - 依据Birkhoff (1948), 这么叫是因为Hasse有效的利用了它们。
 - Hasse不是第一个使用它们的人, 它们早就出现在如Vogt (1895)中.
 - 抽象有向无环图的传递简约.



定义10.8.4 （盖住关系）

- 对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ ，如果 $x, y \in A$, $x \leq y$, $x \neq y$, 且不存在元素 $z \in A$ 使得 $x \leq z$ 且 $z \leq y$, 则称 y 盖住 x 。 A 上的盖住关系定义为 $cov A$

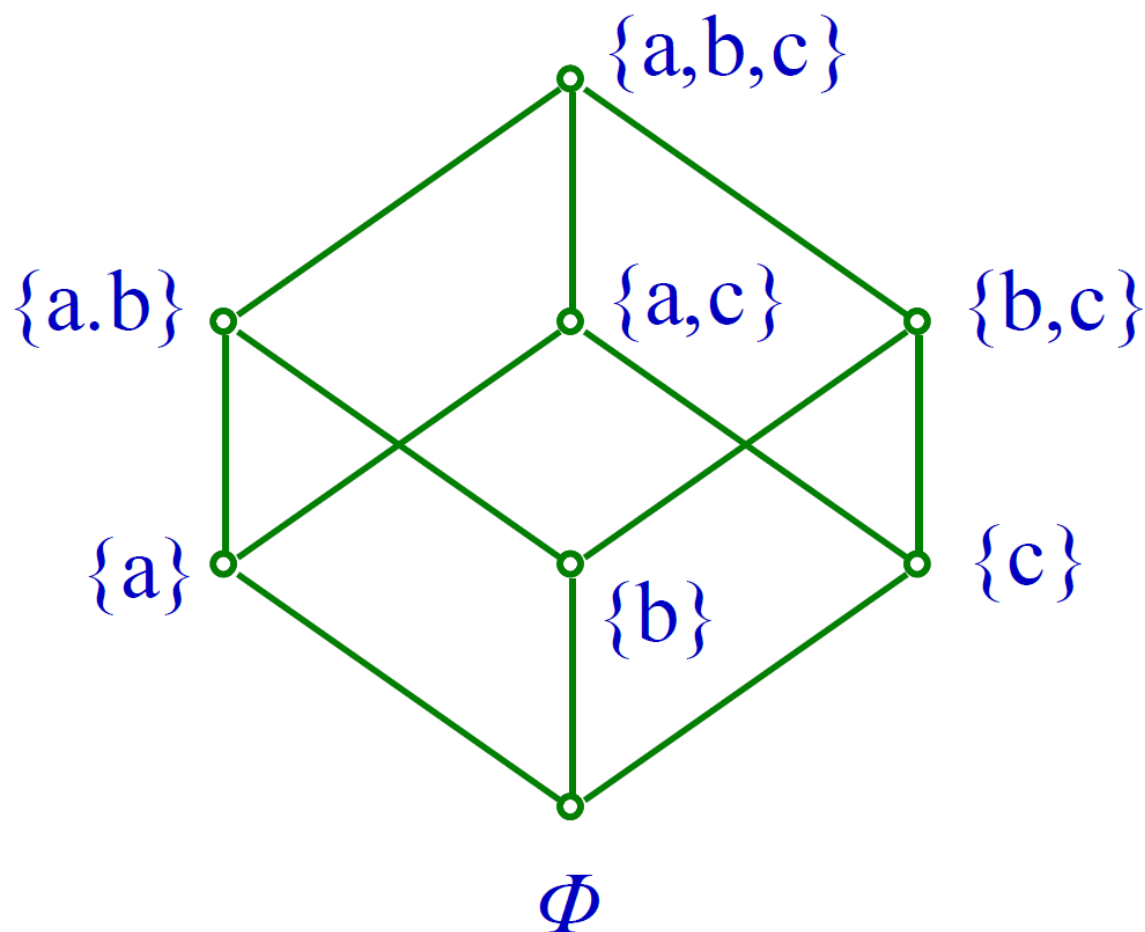
$$cov A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge y \text{ 盖住 } x \}$$



10.8 偏序关系

- 哈斯图思路：
 - ① 所有结点的自回路均省略
 - ② 省略所有弧上的箭头,适当排列A中元素的位置,如 $a \leq b$,则 a 画在 b 的下方
 - ③ 如 $a \leq b, b \leq c$,则必有 $a \leq c$, a 到 b 有边, b 到 c 有边,则 a 到 c 的无向弧省略
- 条件2, 3等于说如果 b 盖住 a ,则画一条从 a 到 b 的弧线, 否则不画

- 例： $A = \{a, b, c\}$, $\langle P(A), \subseteq \rangle$ 是偏序集，它的哈斯图如下图（图10.8.2）



偏序集中的8个特殊元素

(最大元、最小元)



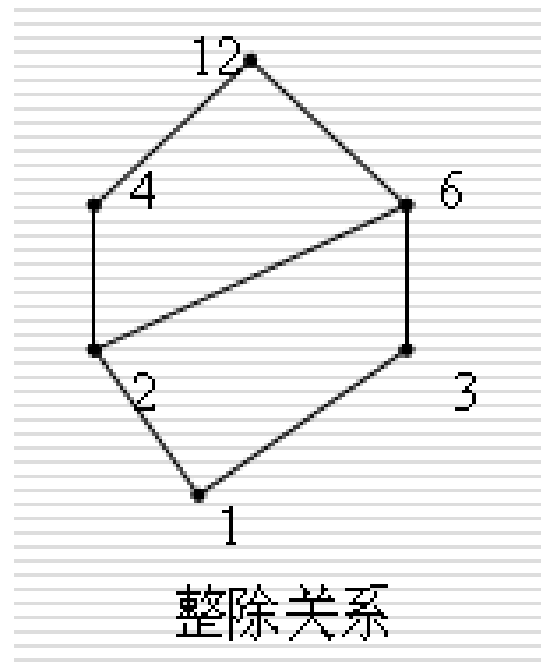
- 对于偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 和集合 A 的任意子集 B ,
- 如果存在元素 $b \in B$, 使得任意 $x \in B$ 都有 $x \leq b$, 则称 b 为 B 的**最大元素**, 简称为**最大元**;
- 如果存在元素 $b \in B$, 使得任意 $x \in B$ 都有 $b \leq x$, 则称 b 为 B 的**最小元素**, 简称为**最小元**。



- 对于例中偏序关系①

(即集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 上的整除关系),

- 令 $B_1 = \{1, 6\}$ 、
 $B_2 = \{1, 2, 3\}$ 、
 $B_3 = \{4, 6, 12\}$ 、
 $B_4 = \{2, 4, 6\}$ 、
 $B_5 = \{1, 2, 6, 12\}$ 、
 $B_6 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 。



- 分别求出 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 、 B_5 和 B_6 的最大元和最小元。



对于集合 $B_1 = \{1, 6\}$, 最大元为6, 最小元为1;

对于集合 $B_2 = \{1, 2, 3\}$,

元素2和3不可比, 所以, 不存在最大元, 最小元为1;

对于集合 $B_3 = \{4, 6, 12\}$,

元素4和6不可比, 所以, 不存在最小元, 最大元为12;

对于集合 $B_4 = \{2, 4, 6\}$,

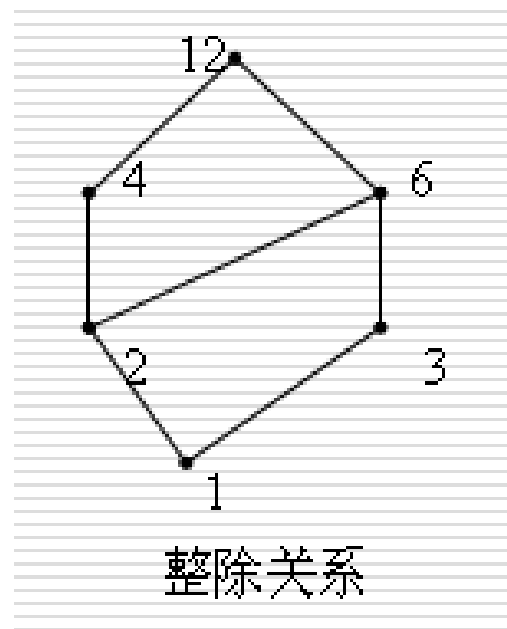
元素4和6不可比, 所以, 不存在最大元, 最小元为2;

对于集合 $B_5 = \{1, 2, 6, 12\}$,

最大元为12, 最小元为1;

对于集合 $B_6 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,

最大元为12, 最小元为1。



偏序集中的8个特殊元素

(极大元、极小元)



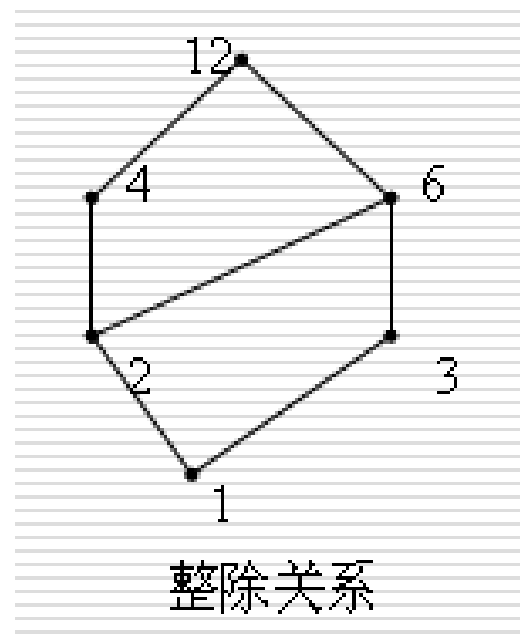
- 对于偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 和集合 A 的任意子集 B ,
- 如果存在元素 $b \in B$, 使得 B 中不存在其它元素 x 满足 $b \leq x$, 则称 b 为 B 的极大元素, 简称为极大元;
- 如果存在元素 $b \in B$, 使得 B 中不存在其它元素 x 满足 $x \leq b$, 则称 b 为 B 的极小元素, 简称为极小元。
- 注意: 最大(小)元 vs. 极大(小)元
最大(小)元必须与 B 中每个元素都可比,
极大(小)元无此要求(只要求没有比它更大或更小的元素)。



- 对于例中偏序关系①

(即集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 上的整除关系),

- 令 $B_1 = \{1, 6\}$ 、
 $B_2 = \{1, 2, 3\}$ 、
 $B_3 = \{4, 6, 12\}$ 、
 $B_4 = \{2, 4, 6\}$ 、
 $B_5 = \{1, 2, 6, 12\}$ 、
 $B_6 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 。



- 分别求出 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 、 B_5 和 B_6 的极大元和极小元。

对于集合 $B_1 = \{1, 6\}$, 极大元为6, 极小元为1;

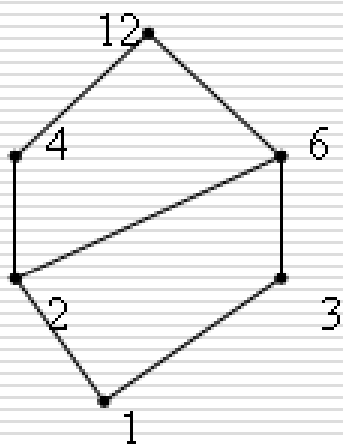
对于集合 $B_2 = \{1, 2, 3\}$, 极大元为2和3, 极小元为1;

对于集合 $B_3 = \{4, 6, 12\}$, 极大元为12, 极小元为4和6;

对于集合 $B_4 = \{2, 4, 6\}$, 极大元为4和6, 极小元为2;

对于集合 $B_5 = \{1, 2, 6, 12\}$, 极大元为12, 极小元为1;

对于集合 $B_6 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, 极大元为12, 极小元为1。



整除关系

最小元 最大元 极小元 极大元



(y 在 B 中) 对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, $B \subseteq A$

(1) 若 $(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow y \leq x))$, 则称 y 为 B 的最小元;

(2) 若 $(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow x \leq y))$, 则称 y 为 B 的最大元;

(3) 若 $(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)((x \in B \wedge x \leq y) \rightarrow x = y))$, 则称 y 为 B 的极小元,

(4) 若 $(\exists y)(y \in B \wedge (\forall x)((x \in B \wedge y \leq x) \rightarrow x = y))$ 则称 y 为 B 的极大元。



注意几个区别

- 对于偏序集 A 上的子集 B ,
 - (1) B 中的最小元应小于等于 B 中其它各元;
 - (2) B 中的极小元应不大于 B 中其它各元 (它小于等于 B 中一些元, 可与 B 中另一些元无关系);
 - (3) 最小元 (最大元) 不一定存在, 若存在必唯一;
 - (4) 在非空有限集合 B 中, 极小元 (极大元) 必存在, 但不一定唯一;
 - (5) 极大元不一定是最大元, 但最大元显然是极大元;

偏序集中的8个特殊元素

(上界、下界)



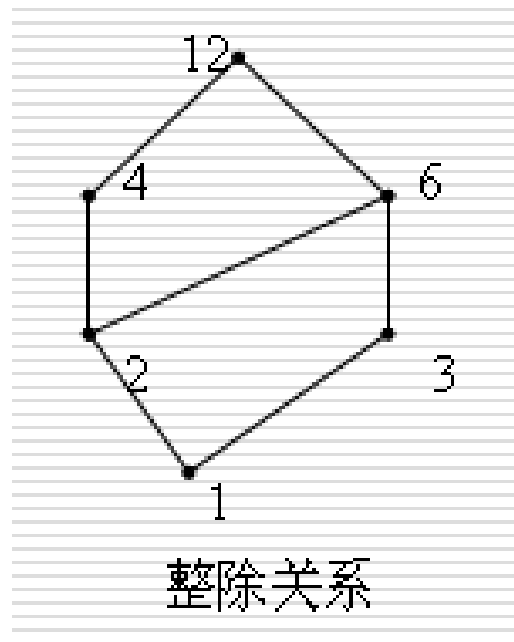
- 对于偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 和集合 A 的任意子集 B ,
- 如果存在元素 $a \in A$, 使得任意 $x \in B$ 都有 $x \leq a$, 则称 a 为子集 B 的上界;
- 如果存在元素 $a \in A$, 使得任意 $x \in B$ 都有 $a \leq x$, 则称 a 为子集 B 的下界。
- 注意: B 的上(下)界不一定是 B 中的元素!



- 对于例中偏序关系①

(即集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 上的整除关系),

- 令 $B_1 = \{1, 6\}$ 、
 $B_2 = \{1, 2, 3\}$ 、
 $B_3 = \{4, 6, 12\}$ 、
 $B_4 = \{2, 4, 6\}$ 、
 $B_5 = \{1, 2, 6, 12\}$ 、
 $B_6 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 。

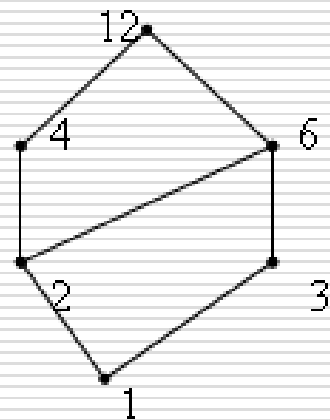


- 分别求出 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 、 B_5 和 B_6 的上界和下界。



对于集合 $B_1 = \{1, 6\}$ ，上界为6和12，下界为1；
对于集合 $B_2 = \{1, 2, 3\}$ ，上界为6和12，下界为1；
对于集合 $B_3 = \{4, 6, 12\}$ ，上界为12，下界为1和2；
对于集合 $B_4 = \{2, 4, 6\}$ ，上界为12，下界为1和2；
对于集合 $B_5 = \{1, 2, 6, 12\}$ ，上界为12，下界为1；
对于集合 $B_6 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ，上界为12，下界为1。

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$



整除关系

偏序集中的8个特殊元素

(上确界、下确界)

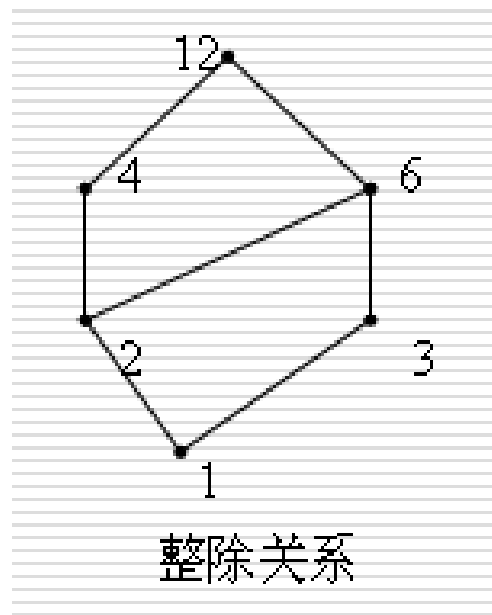


对于偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 和集合 A 的任意子集 B ,

- 如果存在 B 的某个上界 a , 使得对于 B 的任意上界 x 都有 $a \leq x$, 则称 a 为子集 B 的最小上界或上确界, 记为 $\sup(B) = a$;
- 如果存在子集 B 的某个下界 a , 使得 B 的任意下界 x 都有 $x \leq a$, 则称 a 为子集 B 的最大下界或下确界, 记为 $\inf(B) = a$ 。
- 说明:
令 C 是由 B 的所有上界组成的集合, 则 C 的最小元 c 称为 B 的上确界; 令 C 是 B 的所有下界的集合, 则 C 的最大元 c 称为 B 的下确界。



- 对于例中偏序关系①
(即集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 上的整除关系),
- 令 $B_1 = \{1, 6\}$ 、
 $B_2 = \{1, 2, 3\}$ 、
 $B_3 = \{4, 6, 12\}$ 、
 $B_4 = \{2, 4, 6\}$ 、
 $B_5 = \{1, 2, 6, 12\}$ 、
 $B_6 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 。
- 分别求出 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 、 B_5 和 B_6 的上确界和下确界。





对于集合 $B_1 = \{1, 6\}$, 上确界为6, 下确界为1;

对于集合 $B_2 = \{1, 2, 3\}$, 上确界为6, 下确界为1;

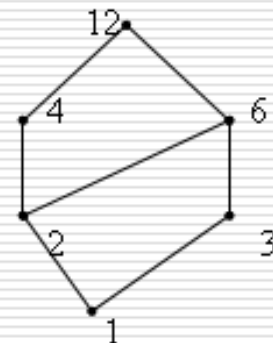
对于集合 $B_3 = \{4, 6, 12\}$, 上确界为12, 下确界为2;

对于集合 $B_4 = \{2, 4, 6\}$, 上确界为12, 下确界为2;

对于集合 $B_5 = \{1, 2, 6, 12\}$, 上确界为12, 下确界为1;

对于集合 $B_6 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, 上确界为12, 下确界为1。

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$



整除关系

上界 下界 上确界 下确界



(y 在 A 中) 对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, $B \subseteq A$

(1) 若 $(\exists y)(y \in A \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow x \leq y))$, 则称 y 为 B 的上界;

(2) 若 $(\exists y)(y \in A \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow y \leq x))$, 则称 y 为 B 的下界;

(3) 若集合 $C = \{y | y \text{ 是 } B \text{ 的上界}\}$, 则 C 的最小元称为 B 的上确界或最小上界;

(4) 若集合 $C = \{y | y \text{ 是 } B \text{ 的下界}\}$, 则 C 的最大元称为 B 的下确界或最大下界;



8大元的性质

定理

- 对于偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 和集合 A 的任意子集 B :
 - ① 若 b 为 B 的**最大元**，则 b 为 B 的**极大元**、**上界**和**上确界**；
 - ② 若 b 为 B 的**最小元**，则 b 为 B 的**极小元**、**下界**和**下确界**；
 - ③ 若 a 为 B 的**上界**且 $a \in B$ ，则 a 为 B 的**最大元**；
 - ④ 若 a 为 B 的**下界**且 $a \in B$ ，则 a 为 B 的**最小元**。

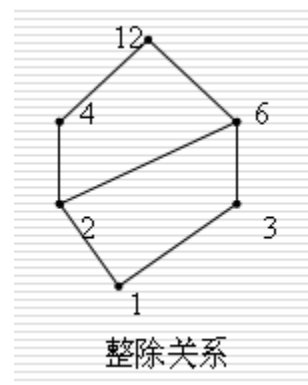


8大元的性质

定理

• 对于偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 和集合 A 的任意子集 B :

- ① 若 B 有最大元, 则 B 的最大元唯一;
- ② 若 B 有最小元, 则 B 的最小元唯一;
- ③ 若 B 有上确界, 则 B 的上确界唯一;
- ④ 若 B 有下确界, 则 B 的下确界唯一;
- ⑤ 若 B 为有限集, 则 B 的极大元、极小元恒存在。





对偏序集的非空子集，下面哪句陈述是成立的？

- ☒ A 最小元一定是下界，且是下确界A
- ☒ B 下界、下确界不一定是最小元



偏序关系

- 可比: a 与 b 可比 $\Leftrightarrow a \leq b \vee b \leq a$
 - 可比不同于等于
- 例: $A = \{1, 2, 3\}$, \leq 是 A 上的整除关系
 - 1, 3可比
- 全序关系 R : R 是 A 上的偏序关系, 满足:
 - $\forall a, b \in A$, a 与 b 可比
- 例: 实数上的 \leq, \geq 关系是全序关系



定义10.8.8 (全序关系与全序集)

- 对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ ，如果对任意的 $x, y \in A$ ， x 和 y 都可比，则称 \leq 为 A 上的全序关系 (Total ordering relation)，或称线序关系。
- 称 $\langle A, \leq \rangle$ 为全序集。

上确界、下确界的讨论



- 全序关系：如果有上（下）界，就有上（下）确界



偏序与全序

- 偏序只对部分元素成立关系 R ，全序对集合中任意两个元素都有关系 R （线性序）。
- 例如：
 - 集合的包含关系就是偏序，因为两个集合可以互不包含；
 - 而实数中的大小关系是全序，两个实数必有一个大于等于另一个；
 - 又如：复数中的大小就是偏序，虚数不能比较大小。



• 判断下列关系是否为全序关系？并给出其哈斯图。

① 集合 $\{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ 上的整除关系 R_1 ;

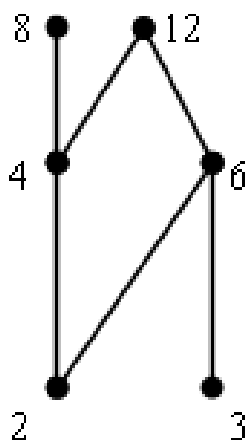
② 集合 $\{2, 3, 5, 7, 9\}$ 上的大于等于关系 R_2 ;

③ 实数集合上的小于等于关系 R_3 ;

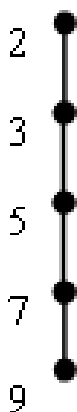
④ 集合 $\{a, b, c\}$ 上的关系 $R_4 = \{<a, a>, <b, b>, <c, c>, <a, b>, <b, c>, <a, c>\}$;

解: 关系①、②、③和④都是偏序关系。

②、③和④都是全序关系；①不是全序关系。



R_1



R_2



R_3



R_4



10.8 偏序关系

定义10.8.9 (链、反链)

- 对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, $B \subseteq A$

(1)如果对任意的 $x, y \in B$, x 和 y 都是可比的, 则称 B 为 A 上的链, B 中元素个数称为链的长度。

(2)如果对任意的 $x, y \in B$, x 和 y 都不是可比的, 则称 B 为 A 上的反链, B 中元素个数称为反链的长度。



定理10.8.4（偏序集的分解定理）

- 对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ ，设 A 中最长链的长度是 n ，则将 A 中元素分成不相交的反链，反链个数至少是 n 。
- 其对偶定理称为 Dilworth 定理：

定理

令 (A, \leq) 是一个有限偏序集，并令 m 是反链的最大的大小。则 A 可以被划分成 m 个但不能再少的链。

链的最少划分数 = 反链的最长长度

- 等价证明：设 A 中最长链的长度是 n , A 中存在 n 个划分块的划分，每个划分块都是反链。



对 n 作归纳。

当 $n = 1$ 时， A 本身为一反链，取 $P_A = \{A\}$, 则 P_A 为 A 的只含一个划分块且为反链的划分。

设 $n = k$ 时结论成立。

当 $n = k + 1$ 时，取 M 为 A 中全体极大元的集合，可知 M 不为空, 且 A 中每条最长链对应 A 的极大元均在 M 中。

且 M 中各元素均不可比，于是 M 为一反链。

$A - M$ 中最长链的长度为 k ，由归纳假设可知， $A - M$ 中存在每个划分块都是反链，且有 k 个划分块的划分 P' ，则 $P_A = P' \cup \{M\}$ 为 A 的满足要求的划分。



定理10.8.5

- 对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 若 A 中元素为 $mn+1$ 个, 则 A 中或者存在一条长度为 $m+1$ 的反链, 或者存在一条长度为 $n+1$ 的链。
- 用反证法。
- 若不然, A 中既无长度为 $m+1$ 的反链, 也无长度为 $n+1$ 的链, 于是 A 中最长链的长度至多为 n , 设最长链的长度为 r ($r \leq n$), 由定理10.8.4可知, A 中存在 r 个划分块的划分, 且每个划分块至多有 m 个元素, 于是 A 中至多有 mn 个元素, 这与已知矛盾。

定义10.8.10 （良序关系与良序集）



- 对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ ，如果 A 的任何非空子集都有最小元，则称 \leq 为良序关系，称 $\langle A, \leq \rangle$ 为良序集。

多选题 1分



判断下列关系是否为良序关系？

- ① 集合 $\{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ 上的整除关系 R_1 ;
- ② 集合 $\{2, 3, 5, 7, 9\}$ 上的大于等于关系 R_2 ;
- ③ 实数集合上的小于等于关系 R_3 ;
- ④ 集合 $\{a, b, c\}$ 上的关系 $R_4 = \{<a, a>, <b, b>, <c, c>, <a, b>, <b, c>, <a, c>\}$ 。

A

(1)是良序关系

B

(2)是良序关系

C

(3)是良序关系

D

(4)是良序关系



- 判断下列关系是否为良序关系？

- ① 集合 $\{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ 上的整除关系 R_1 ；

- ② 集合 $\{2, 3, 5, 7, 9\}$ 上的大于等于关系 R_2 ；

- ③ 实数集合上的小于等于关系 R_3 ；

- ④ 集合 $\{a, b, c\}$ 上的关系 $R_4 = \{< a, a >, < b, b >, < c, c >, < a, b >, < b, c >, < a, c >\}$ 。

- 解: (首先判断是否为偏序关系, 然后再判断其任何一个非空子集是否都有最小元)。②和④是良序关系。

良序集一定是全序集；

有限的全序集一定是良序集。



10.8 偏序关系

定理10.8.6 一个良序集一定是全序集

定理10.8.7 一个有限的全序集一定是良序集

定理10.8.8 （良序定理）任意的集合都可以良序化

对每一个集合来说，都存在一种排序方法，使得它的所有子集都有最小元素。

$\langle N, \leq \rangle$ 是全序集，也是良序集。 $\langle Z, \leq \rangle$ 是全序集，但不是良序集（ Z 表示整数集）， Z 无最小元。



整数集合的良序化

- 整数的下列关系 R 是良序的： xRy ，当且仅当下列条件之一成立：
- $x=0$ ，任意 y ， xRy ；
- x 是正数，而 y 是负数， xRy ；
- x 和 y 都是正数，而 $x \leq y$ ， xRy ；
- x 和 y 都是负数，而 $y \leq x$ ， xRy 。
- 这个序关系可以表示为：
- $0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ \cdots \ -1 \ -2 \ -3 \ -4 \ -5 \ \cdots$



Zermelo's Well-Ordering Theorem

- **Theorem** *Every set can be well-ordered.*
- *Proof.* Let A be a set. To well-order A , it suffices to construct a transfinite one-to-one sequence $\langle a_\alpha : \alpha < \theta \rangle$ that enumerates A . That we can do by induction, using a choice function f for the family S of all nonempty subsets of A . We let for every α

$$a_\alpha = f(A - \{a_\xi : \xi < \alpha\})$$

if $A - \{a_\xi : \xi < \alpha\}$ is nonempty. Let θ be the least ordinal such that $A = \{a_\xi : \xi < \theta\}$. Clearly, $\langle a_\alpha : \alpha < \theta \rangle$ enumerates A .

选择公理，良序定理，Zorn引理的分裂状态



- 选择公理显然为真
- 良序定理显然为假
- Zorn引理只有天知道
- Zorn引理：如果偏序集 X 的每个链都有上界，则 X 有极大元



10.8 偏序关系

定义10.8.11 (闭区间 开区间)

- 在全序集 $\langle R, \leq \rangle$ 上, 对于 $a, b \in R, a \neq b, a \leq b$
 - (1) $[a, b] = \{x | x \in R \wedge a \leq x \leq b\}$ 称为从 a 到 b 的闭区间;
 - (2) $(a, b) = \{x | x \in R \wedge a \leq x \leq b \wedge x \neq a \wedge x \neq b\}$ 称为从 a 到 b 的开区间.
- 上述中的 R 为实数集。



10.8 偏序关系

$$(3) \quad [a, b) = \{x | x \in R \wedge a \leq x \leq b \wedge x \neq b\}$$

$$(a, b] = \{x | x \in R \wedge a \leq x \leq b \wedge x \neq a\}$$

都称为从a到b的半开区间。

(4) 还可以定义下列区间

$$(-\infty, a] = \{x | x \in R \wedge x \leq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x | x \in R \wedge x \leq a \wedge x \neq a\}$$

$$[a, \infty) = \{x | x \in R \wedge a \leq x\}$$

$$(a, \infty) = \{x | x \in R \wedge a \leq x \wedge x \neq a\}$$



几个主要序关系的性质

关系\性质	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
等价关系	✓	✗	✓	✗	✓
相容关系*	✓	✗	✓	✗	✗
偏序关系	✓	✗	✗	✓	✓
拟序关系	✗	✓	✗	✓ (隐含)	✓
全序关系	✓	✗	✗	✓	✓
良序关系*	✓	✗	✗	✓	✓



第10章重点内容

- 二元关系概念与表示
- 关系的主要性质
 - 自反、反自反、对称、反对称、传递
- 等价关系（与划分）
 - 自反、对称、传递，掌握证明方法
- 偏序关系
 - 自反、反对称、传递，掌握证明方法

13	十二	2	3	4	5	6	7	8
14		9	10	11	12	13	14	15
15		16	17	18	19	20	21	22
16		23	24	25	26	27	28	29
17		30	31					



- 13周-15周 学生评教
- 13周： 第11章 14周： 第12章
- 15周： 总复习
- 考试时间： 1月7日下午2:30—4:30
- 考场： 建馆报告厅0



谢谢！