第七周作业

1. 设 $T: V \longrightarrow V$ 是一个有限维复空间上幂零变换.
设 $\vec{v} \neq \vec{0} \in V$，$C_{\vec{v}}$ 是由 $\vec{v}, T(\vec{v}), \cdots, T^k(\vec{v}), \cdots$ 生成的循环子空间，证明：

$C_{\vec{v}}$ 是极大循环子空间 $\Leftrightarrow \vec{v} \notin ImT$.

（提示：若 $C_{\vec{v}} \subsetneq C_{\vec{w}}$，设 $\vec{v} = c_0\vec{w} + c_1T(\vec{w}) + \cdots + c_{l-1}T^{l-1}(\vec{w})$ (*)
$T^l(\vec{w}) = 0$. 应用 T^{l-1} 作用在 (*)，得 $c_0 = 0 \Rightarrow \vec{v} \in ImT$.）

2. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$，

(1) 证明 A 与 A^T 相似.

(2) 设 $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{n\times n}$，求可逆阵 P，使得 $P^{-1}JP = J^T$.

（提示：A 与 A^T 有相同的 Jordan 标准形 $\Rightarrow A$ 与 A^T 相似）

3. 设 $a \neq 0$，$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. 求 A 的 Jordan 标准形.

4. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$，$r(A) = 1$. 证明：$A^2 = (trA)\cdot A$.

（提示：由第六周作业，$A \sim \begin{pmatrix} trA & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$）.

5. 设 J 是 5 阶 Jordan 块且主对角线上元素等于 0，求 J^2 的 Jordan 标准形.

6. 求下列 A 的 Jordan 标准形 J，并求可逆阵 P，使 $P^{-1}AP=J$：

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ (2) $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

7. 设 $A\in M_6(\mathbb{C})$，$|\lambda I_n-A|=(\lambda+2)^4(\lambda-2)^2$，则 A 的 Jordan 标准形有几种可能？（不计子块次序）.

8. 设 $A\in M_3(\mathbb{C})$，且 A 的任意特征值 λ 满足 $|\lambda|<1$.

证明：$\lim\limits_{m\to+\infty} A^m = O_{3\times 3}$.

（提示：只需证明一个 Jordan 块情形，$J=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}=\lambda_0 I_3+N$

$N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$，$N^3=O$，$J^m=(\lambda_0 I_3+N)^m$，按二项式定理展开）