任意圆盘到单位圆盘的映射

求出圆盘$|w-w_0|<R$到单位圆盘$|z-z_0|<r$的分式线性映射的一般形式, 并得到单位圆盘到单位圆盘映射类似的不变式.

解. 因为单位圆盘$|z|<1$到单位圆盘$|w|<1$的分式线性映射的一般形式为

$$w = e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}, \quad \theta \in [0,\, 2\pi), \quad |z_0|<1. \tag{0.1}$$

设$w(z_1)=w_0$, 这里 $|z_1-z_0|<r$, 令$w'=\frac{w-w_0}{R}, \quad z'=\frac{z-z_0}{r}$, 则$|w'|<1 \to |z'|<1$, 由(0.1), 可得

$$w' = e^{i\theta}\frac{z'-z_1'}{1-\overline{z_1'}z'}. \tag{0.2}$$

即

$$\frac{w-w_0}{R} = e^{i\theta}\frac{\frac{z-z_0}{r}-\frac{z_1-z_0}{r}}{1-\overline{\frac{z_1-z_0}{r}}\,\frac{z-z_0}{r}}. \tag{0.3}$$

化简等式(0.3)，即得

$$w = w_0 + rRe^{i\theta}\frac{z-z_1}{r^2-(\overline{z_1-z_0})(z-z_0)}.$$

由单位圆盘到单位圆盘分式线性映射的不变式

$$\frac{|dw'|}{1-|w'|^2} = \frac{|dz'|}{1-|z'|^2}. \tag{0.4}$$

由$w'=\frac{w-w_0}{R}, \quad z'=\frac{z-z_0}{r}$,可得将

$$dw' = \frac{dw}{R}, \quad dz' = \frac{dz}{r},$$

代入到不变式(0.4)中，可得

$$\frac{|dw|}{R(1-\frac{|w-w_0|^2}{R^2})} = \frac{|dz|}{r(1-\frac{|z-z_0|^2}{r^2})}. \tag{0.5}$$

由等式(0.5)，可得以下准不变式：

$$\frac{R|dw|}{R^2-|w-w_0|^2} = \frac{r|dz|}{r^2-|z-z_0|^2}. \tag{0.6}$$