代数结构
习题讲解

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

代数结构 第七章

2 证明若$f: A \to B, g: B \to C$,则

- （a）当f,g都是单射时，gf也是单射
- （b）当f,g都是满射时，gf也是满射
- （c）当f,g都是双射时，gf也是双射

- 数理逻辑那本书定理11.2.2
- P198页

代数结构 第七章

10 令N是自然数集，$N^2 = N \times N$, 在N^2上定义$(a,b) \sim (c,d)$，若a+d=b+c，证明~ 是等价关系

- 自反性 $(a,b) \sim (a,b) \Leftrightarrow a+b=b+a$
- 对称性 $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c$

$$\Leftrightarrow c+b=d+a \Leftrightarrow (\mathrm{c},\mathrm{d}) \sim (a,b)$$

- 传递性 $(a,b) \sim (c,d) \wedge (c,d) \sim (e,f)$

$$\Leftrightarrow (a+d=b+c) \wedge (c+f=d+e)$$

$$\Leftrightarrow a+d+c+f=b+c+d+e \Leftrightarrow a+f=b+e$$

$$\Leftrightarrow (a,b) \sim (e,f)$$

代数结构 第七章

12 $\cdots (K,\cdot)$是否可结合的？有无单位元？每一个元是否可逆

- 可结合
- 有单位元e
- 每一个元都有逆元

$$e = a\cdot a = b\cdot b = c\cdot c$$

代数结构 第七章

15 验证两个代数系统$(S,*)$和$(P,\cdot)$是同构的是否可逆

- 构造函数$f: S \to P, f(a) = 3, f(b) = 2, f(c) = 1$,$f$为双射
- $\forall a, b$，可证明$f(a * b) = f(a) \cdot f(b)$

- 构造双射函数
- 保持运算

代数结构 第八章

2 设（S,·）是半群，证明$S\times S$对于下面规定的结合法·作成一个半群

$$(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2)=(a_1\cdot b_1,a_2\cdot b_2)$$

当S有单位元时，$S\times S$也有单位元

- 半群：封闭性、结合律
- $S\times S$的单位元是(e,e)

$$(e,e)\cdot(a,b)=(e\cdot a,e\cdot b)=(a,b)$$
$$(a,b)\cdot(e,e)=(a\cdot e,b\cdot e)=(a,b)$$

代数结构 第八章

4 设Z是整数集，×表示乘法运算，试证明$(Z,\times)$是幺群，且$(\{0\},\times)$是子半群而不是子幺群

- 幺群：封闭性、结合律、幺元（验证1是幺元）
- 子半群而不是子幺群：封闭性、结合律、无幺元
- 封闭性：$\{0\} \subseteq Z, \forall 0 \in \{0\}, 0\times 0 = 0 \in \{0\}$
- 结合律：$0\times 0\times 0 = 0\times(0\times 0)$
- $(Z,\times)$的单位元$\notin \{0\}$, 故$(\{0\},\times)$无幺元

代数结构 第八章

7 设G是群，证明如果G中任意元的逆元都是它自身，则G是交换群

- $ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$

代数结构 第八章

8 令$G = \{km|k \in Z\}$, m是取定的自然数，证明$(G, +)$是群。

- 封闭性：$\forall k_1, k_2 \in Z, k_1m + k_2m = (k_1 + k_2)m \in G$
- 结合律：$(k_1m + k_2m) + k_3m = k_1m + (k_2m + k_3m)$
- 幺元：0. $km + 0 = 0 + km = km$
- 逆元：$-km$. $km + (-km) = (-km) + km = 0$

代数结构 第八章

11 令G是实数对(a,b)的集合，$a \neq 0$，定义

$$(a,b)(c,d) = (ac, cb + d)$$

以及单位元$e = (1,0)$，证明G是群。

- 封闭性
- 结合律： $(a,b)(c,d)(f,g) = (ac, cb+d)(f,g) =$
$$(acf, fcb + fd + g) = (a,b)(cf, df + g)$$
$$= (a,b)((c,d)(f,g))$$
- 幺元
- 逆元： $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$

代数结构 第八章

12 设G是幺群，$a, b \in G$，证明

a有逆元b的充要条件是$aba = a$和$ab^2a = e$

- 必要性：将b代入即可得
- 充分性：要证$ab = ba = e$，利用结合律

  $ab = abe = ab(ab^2a) = (aba)b^2a = ab^2a = e$

  $ba = eba = (ab^2a)ba = ab^2(aba) = ab^2a = e$
- 所以b是a的逆元

代数结构 第八章

13 设H是G的子群，$x \in G$, 令

$$H_1 = x^{-1}Hx = \{x^{-1}hx | h \in H\},$$

证明H_1是G的子群。

解法1：根据定理8.2.6

- 1. $\forall a, b \in H_1, ab \in H_1$
- 2. $e' = e$
- 3. $\forall a \in H_1, a^{-1} \in H_1$

代数结构 第八章

13 设H是G的子群，$x \in G$, 令

$$H_1 = x^{-1}Hx = \{x^{-1}hx | h \in H\},$$

证明H_1是G的子群。

- 1. $\forall a, b \in H_1, ab \in H_1$
- 设$a = x^{-1}h_1x, b = x^{-1}h_2x$ $\quad h_1, h_2 \in H$
- $ab = x^{-1}h_1xx^{-1}h_2x = x^{-1}h_1h_2x = x^{-1}h_3x \in H_1$

  其中$h_3 = h_1h_2$

代数结构 第八章

13 设H是G的子群，$x \in G$, 令

$$H_1 = x^{-1}Hx = \{x^{-1}hx | h \in H\},$$

证明H_1是G的子群。

- 2. $e' = e$
- $x^{-1}hxe = ex^{-1}hx = x^{-1}hx$

代数结构 第八章

13 设H是G的子群，$x \in G$, 令

$$H_1 = x^{-1}Hx = \{x^{-1}hx | h \in H\},$$

证明H_1是G的子群。

- 3. $\forall a \in H_1, a^{-1} \in H_1$
- $\forall h \in H, h^{-1} \in H$
- 则对于任意的$x^{-1}hx \in H_1$，

$$(x^{-1}hx)^{-1} = x^{-1}h^{-1}x \in H_1$$

- $x^{-1}h^{-1}x$是$x^{-1}hx$在H_1中的逆元

代数结构 第八章

13 设H是G的子群，$x \in G$, 令

$$H_1 = x^{-1}Hx = \{x^{-1}hx | h \in H\},$$

证明H_1是G的子群。

解法2：根据定理8. 2. 7

- 1. 取幺元$e \in H, x^{-1}ex = x^{-1}x = e \in H_1$， H_1非空
- 2. $\forall a, b \in H_1$, 设$a = x^{-1}h_a x, b = x^{-1}h_b x$
- $ab^{-1} = x^{-1}h_a x(x^{-1}h_b x)^{-1} = x^{-1}h_a x x^{-1}h_b^{-1}x$
- $=x^{-1}h_a h_b^{-1}x = x^{-1}h_c x \in H_1$
- 其中$h_c = h_a h_b^{-1} \in H$

代数结构 第八章

15 说明Klein四元群是否为循环群

- 不是
- 根据定义
- 不存在元素a，能够通过幂的形式表示任意元素

代数结构 第八章

21 在S_6中设

$\sigma:\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\4 & 3 & 5 & 6 & 1 & 2\end{bmatrix}$, $\tau:\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4\end{bmatrix}$

试计算$\sigma\tau,\tau\sigma,\sigma^{-1},\sigma\tau\sigma^{-1}$同时将它们表成对换之积

- $\sigma\tau:\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6\end{bmatrix}=(13)(24)$
- $\tau\sigma:\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\6 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1\end{bmatrix}=(16)(25)$

代数结构 第八章

21 在S_6中设

$\sigma: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\tau: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

试计算$\sigma\tau, \tau\sigma, \sigma^{-1}, \sigma\tau\sigma^{-1}$同时将它们表成对换之积

- $\sigma^{-1}: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = (153264) = (14)(16)(12)(13)(15)$

- $\sigma\tau\sigma^{-1}: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (15)(26)(34)$

代数结构 第八章

27 设$\alpha = (1324)$, 试确定S_4中$\langle\alpha\rangle$的陪集

$\langle\alpha\rangle = \{(1324), (12)(34), (1423), (1)\}$

- $(1)\langle\alpha\rangle = \{(1324), (12)(34), (1423), (1)\}$
- $(12)\langle\alpha\rangle = \{(13)(24), (34), (14)(23), (12)\}$
- $(13)\langle\alpha\rangle = \{(243), (1234), (142), (13)\}$
- $(24)\langle\alpha\rangle = \{(134), (1432), (123), (24)\}$
- $(14)\langle\alpha\rangle = \{(132), (1243), (234), (14)\}$
- $(23)\langle\alpha\rangle = \{(124), (1342), (143), (23)\}$

代数结构 第八章

27 设$\alpha=(1324)$,试确定S_4中$\langle\alpha\rangle$的陪集

$\langle\alpha\rangle=\{(1324),(12)(34),(1423),(1)\}$

- $\langle\alpha\rangle(1)=\{(1324),(12)(34),(1423),(1)\}$
- $\langle\alpha\rangle(12)=\{(14)(23),(34),(13)(24),(12)\}$
- $\langle\alpha\rangle(13)=\{(124),(1432),(234),(13)\}$
- $\langle\alpha\rangle(24)=\{(132),(1234),(143),(24)\}$
- $\langle\alpha\rangle(14)=\{(243),(1342),(123),(14)\}$
- $\langle\alpha\rangle(23)=\{(134),(1243),(142),(23)\}$

代数结构 第八章

30 令G是有限群，A，B是G的子群，并且$B \subseteq A$。证明

$$[G:B] = [G:A][A:B]$$

- 直接使用Lagrange定理，得
- $[G:A][A:B] = \frac{|G|}{|A|} \cdot \frac{|A|}{|B|} = \frac{|G|}{|B|} = [G:B]$

代数结构 第八章

33 设H_1, H_2, H是G的正规子群，且$H_1 \subset H_2$

证明$H_1 H$是$H_2 H$的正规子群

- 根据$H_1 \subset H_2$得出$H_1 H$是$H_2 H$的非空子集
- 进而得出$H_1 H$是$H_2 H$的子群（定义8. 2. 5 ）
- $H_1 H$和$H_2 H$都是G的正规子群（定理8. 6. 2）
- 所以$\forall g \in G, h \in H_1 H, ghg^{-1} \in H_1 H$
- 由于$\forall g \in H_2 H$有$g \in G$
- 所以$\forall g \in H_2 H, h \in H_1 H, ghg^{-1} \in H_1 H$，结合$H_1 H$是$H_2 H$的子群，得出$H_1 H$是$H_2 H$的正规子群（定理8. 6. 1）

谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn