Discrete Mathematics
离散数学(1)

第四章 谓词逻辑的基本概念

马昱春

清華大學
Tsinghua University

回顾：第三章主要内容

- 本章介绍**命题逻辑的公理化**，是命题逻辑理论的系统化和抽象化，主要内容概括如下：
- 介绍命题逻辑的公理系统的概念和基本结构，并以具有代表性的罗素公理系统为例，详细介绍一个命题逻辑公理系统的构成。
- **给出公理**，通过定理推演的实例，使用公理系统进行定理证明的过程和方法。
- 此外，对公理系统的完备性、可靠性和演绎定理做简要的叙述。

复习 – 命题演算

命题演算形式系统

语法
- 命题公式
- 等值公理
- 等值公式
- 推理形式

语义
- 真值指派
- 公式的值
- 永真式

可靠性：凡是推出来的都是正确的

完备性：凡是正确的都可以推出来

命题逻辑的局限性 &
引入谓词逻辑的必要性

举例1：

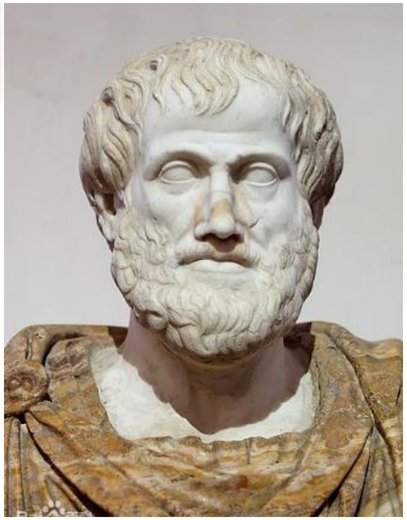
P：张三是学生
Q：李四是学生

P，Q 两个独立的命题，未能反映或突出二者的共性与特点。
因此，有必要深入研究它们的形式结构和逻辑关系。

弗雷格的新语言的核心思想其实非常简单。然而，这已经足够为我们开启一片新的处女地了。
从亚里士多德到布尔，逻辑学家一直使用的是“苏格拉底是人”这种类型的三段论，但如果我们想符合逻辑地研究数学本身，我们就需要更多！
唔……更多什么呢？
我们需要引入变元！我们必须能够表达类似于“x是一个人”这类描述……
……它为真，如果x等同于“罗素”，它为假，如果它是……
这三块曲奇——
啊！老婆！
?

命题逻辑的局限性 & 引入谓词逻辑的必要性

$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$ (三段论)



亚里士多德

举例2：三段论

P: 凡是人都是要死的.
Q: 苏格拉底是人.
R: 所以苏格拉底是要死的.

利用命题逻辑，仅能形式化为（$P \wedge Q$）$\to R$
显然，对于任意的P，Q，R 来说，这个推理形式不是重言式，即，在命题逻辑中无法给出完整准确的描述。

问题的提出

- 需要进一步分析推理结构
  - 上述推理中，各命题之间的关系在于简单命题的成分之间

- 需要进一步分解简单命题
- 简单命题的符号化

主谓宾

凡是人都是要死的.

简单命题的结构

主语	谓语	宾语
↑	↑	↑
讨论对象	对象的性质或关系	讨论对象
↓	↓	↓
个体词(组)	谓词	个体词(组)

- 个体词，谓词

凡是人都是要死的.

第四章 谓词逻辑的基本概念

4.1 谓词和个体词

4.2 函数和量词

4.3 合式公式

4.4 自然语句的形式化

4.5 有限域下公式的表示法

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

命题逻辑与谓词逻辑

- 命题逻辑存在的问题
  - 问题出在“凡”字
  - 没有表达出个体和总体之间的内在联系和数量关系

凡有理数都是实数

- 关系
  - 谓词逻辑是命题逻辑的推广
  - 命题逻辑是谓词逻辑的特殊情形
- 例子

P(x)表示“x是学生” **P(张三)**

例1：分析下列各命题的个体词和谓词

- π是无理数
- 张三与李四同在清华大学
- x和y的和等于z （x，y，z是确定的数）
- π的平方是非负的
- 所有实数的平方都是非负的
- 有一个比2^{1000}大的素数

π是无理数

- 解

个体：π（代表圆周率）

谓词：... 是无理数，表示“π”的性质

张三与李四同在清华大学

- 解

个体：张三、李四

谓词：…与…同在清华大学，表示张三和李四的关系

个体：张三

谓词： …与李四同在清华大学，表示张三的性质

个体：李四

谓词：张三与…同在清华大学，表示李四的性质

x和y的和等于z （x，y，z是确定的数）

个体：x、y、z

谓词：…和…的和等于…

个体：x、z

谓词：…和y的和等于…

个体：y

谓词：x和…的和等于z

谓词可以表示：1）单个个体的性质（一元谓词）；2）两个个体词直接的关系（2元谓词）；3）n个个体之间的关系或性质（n元谓词）

π的平方是非负的

个体：π

谓词： …的平方是非负的

个体：π的平方

谓词： …是非负的

"π的平方"是一个复合个体，需要进一步分解

个体：π

函数：…的平方

谓词：…是非负的

所有实数的平方都是非负的

个体：每一个实数

函数：…的平方

谓词：…是非负的

"所有"是什么

量词：所有

有一个比2^{1000}大的素数

个体：一个素数

谓词：…比2^{1000}大

“有一个”是什么

量词：有一个

例1：分析下列各命题的个体词和谓词

- π是无理数
- 张三与李四同在清华大学
- x和y的和等于z （x，y，z是确定的数）n元谓词
- π的平方是非负的 复合个体，函数
- 所有实数的平方都是非负的 所有？
- 有一个比2^{1000}大的素数 有一个？

4.1 谓词和个体词

- 谓词逻辑：区分主语、谓语，引入变元，
  引入谓词、量词
- 可将谓词逻辑理解为
  命题逻辑 **+ {个体词，谓词，量词，函数}**
- 这里讨论的是**一阶谓词逻辑**，或称**狭谓词逻辑**。
- 谓词逻辑的三要素
  - 个体词，谓词和量词
  - 函数

4.1 谓词和个体词

4-1-1　个体词（主词）

- 个体词是指所研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的个体。
  - 张三，李四
- 在一个命题中，个体词通常是表示思维对象的词，又称作主词。

4.1 谓词和个体词

4-1-2 个体常项与个体变项

- 将表示具体或特定客体的个体词称作个体常项，用小写字母a， b， c，…表示；
- 将表示抽象或泛指的个体词称作个体变项，用小写字母x， y， z， …表示；
- 并称个体变项的取值范围为个体域或论域，以D表示。
- 约定有一个特殊的个体域，它由世间一切事物组成，称之为总论域。

4.1 谓词和个体词

4-1-3 谓词(Predicate)

- 谓词是用来刻划个体词的性质或多个个体词间关系的词。

  $P(x)$, $Q(x, y)$

- 谓词又可看作是由给定的个体域到集合**{T, F}**上的一个映射。

4.1 谓词和个体词

4-1-4 谓词常项与谓词变项

- 表示具体性质或关系的谓词称作谓词常项;
- 表示抽象或泛指的性质或关系的谓词称作谓词变项。
- 谓词常项与谓词变项都用大写英文字母$P, Q, R, \ldots$表示，可根据上下文区分。

4. 1 谓词和个体词

4-1-5 一元与多元谓词

- 在一个命题中，如果个体词只有一个，这时表示该个体词性质或属性的词便是一元谓词，以 $P(x)$, $Q(x)$, …表示。
- 如果一个命题中的个体词多于一个，则表示这几个个体词间关系的词便是多元谓词，以$P(x, y)$，$Q(x, y, z)$, …等表示。
- 一般地，用$P(a)$表示个体常项a具有性质P，用$P(x)$表示个体变项x具有性质P。
- 用$P(a, b)$表示个体常项a, b具有关系P，用$P(x, y)$表示个体变项x, y具有关系P。
- 更一般地，用$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$表示含n ($n \geq 1$)个命题变项x_1, $x_2, \ldots, x_n$的n元谓词。

4. 1 谓词和个体词

4-1-6 谓词逻辑与命题逻辑

- 有时将不带个体变项的谓词称作零元谓词。当此时的零元谓词又为谓词常项时，零元谓词即化为命题。
- 因此，命题逻辑中的命题均可以表示成零元谓词，或认为一个命题是没有个体变项的零元谓词。

4.2 函数和量词

4-2-1 谓词逻辑中的函数

- 在谓词逻辑中可引入函数，它是某一个体域（不必是实数）到另一个体域的映射。
- 谓词逻辑中的函数一般不单独使用，而是嵌入在谓词中。约定函数符号用小写字母表示。
- 如函数*father*(*x*) 表示*x*的父亲，若*P*(*x*) 表示*x* 是教师
- 则*P*(*father*(*x*)) 就表示*x*的父亲是教师。
- 当*x*的取值确定后，*P*(*father* (*x*)) 的值或为真或为假。
- "张三的父亲和母亲是同学"可描述成*CLASSMATE*(*father* (张三) , *mother* (张三))
  - 谓词*CLASSMATE*(*x*, *y*)表示*x*和*y*是同学
  - *father*(*x*)、*mother*(*x*)是函数。

4.2 函数和量词

4-2-2 量词(Quantifier)

- 表示个体常项或变项之间数量关系的词称为**量词**。
- 量词是对个体词所加的限制或约束的词。
- 量词分为**全称量词**和**存在量词**两种。

4-2-2 全称量词

- 日常生活和数学中常用的“所有的”，“一切的”，“任意的”，“每一个”，“凡”等词可统称为全称量词；
- 将它们符号化为“$\forall$”，并用$(\forall x)$, $(\forall y)$等表示个体域中所有的个体。
- 用$(\forall x)P(x)$,$(\forall y)Q(y)$等分别表示个体域中所有个体都有性质P和性质Q。

全称量词

全称量词的定义

- 命题$(\forall x)P(x)$当且仅当对论域中的所有x，$P(x)$均为真时方为真。
- 而$(\forall x)P(x) = F$成立，**当且仅当至少**存在一个$x_0 \in D$，使$P(x_0) = F$。
- 注意$((\forall x)P(x)) = F$与

  $(\forall x)(P(x) = F)$的区别

  $P(x)$表示x是女人？

例2 判断下列全称命题的真假.

- 所有的素数都是奇数； 假
- 对每一个无理数x，x^2也是无理数； 假
- 任何实数都有算术平方根； 假
- 每个指数函数都是单调函数； 真
- $\forall x\in \mathrm{R}$，$x^2>-1$. 真

4-2-3 存在量词(Existential quantifier)

- 思考：下列语句是命题吗？(1)与(3)，(2)与(4)之间有什么关系？
- (1)$2x+1=3$；
- (2)x能被2 和3 整除；
- (3)存在一个$x_0 \in \mathrm{R}$，使$2x_0+1=3$；
- (4)至少有一个$x_0 \in \mathrm{Z}$，x_0能被2 和3 整除.

4-2-3 存在量词

- 日常生活和数学中常用的“存在一个”，“有一个”，“有些”，“有的”等词可统称为存在量词，将它们符号化为“∃”；
- 用$(\exists x)$,$(\exists y)$等表示个体域中有的个体；
- 用$(\exists x)P(x)$,$(\exists y)Q(y)$等分别表示在个体域中存在个体具有性质P，存在个体具有性质Q。

全称量词和存在量词的含义归纳

	何时为真	何时为假
$\forall xP(x)$	对个体域中的每个x，$P(x)$都为真	至少存在一个x，使$P(x)$为假
$\exists xP(x)$	个体域中至少有一个x，使$P(x)$为真	对个体域中的每个x，$P(x)$都为假

练习

1.判断下列语句是全称命题还是特称命题：

(1)没有一个实数α，$\tan\alpha$无意义. 全称

(2)存在一条直线其斜率不存在. 特称

(3)所有圆的圆心到其切线的距离都等于半径吗？不是命题

(4)圆外切四边形，其对角互补. 全称

(5)有的指数函数不是单调函数. 特称

4-2-4 约束变元与自由变元

- 量词所约束的范围称为量词的辖域。
- 在公式$(\forall x)A$ 和$(\exists x)A$ 中，A为相应量词的辖域。
- 在$(\forall x)$和$(\exists x)$的辖域中，x的所有出现都称为约束出现。
- 所有约束出现的变元称为约束变元。
- A中不是约束出现的其它变元均称为自由变元。

辖域例子

- $(\forall x)P(x)\vee Q(y)$
- $(\forall x)P(x)\vee Q(x)$
- $(\forall x)(\ P(x,y) \rightarrow Q(x,z)\ )$
- $(\forall x)(\ P(x) \rightarrow Q(y)\ ) \rightarrow (\exists y)(\ H(x) \wedge L(x,y,z)\ )$
- $\forall x\exists y\forall z(A(x,y)\rightarrow B(x,y,z))\wedge C(t)$

∀z的辖域

∃y的辖域

∀x的辖域

变元易名规则

$(\forall x)P(x)= (\forall y)P(y)$

$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x,y)) \neq (\forall y)(P(y)\rightarrow Q(y,y))$

说明

对约束变元和自由变元有如下几点说明：

(1) 对约束变元用什么符号表示无关紧要。

(2) 一个谓词公式如果无自由变元，它就表示一个命题。

3) 一个n元谓词$P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，若在前边添加k个量词，使其中的k个个体变元变成约束变元，则此n元谓词就变成了n-k元谓词。

4.3 合式公式

4-3-1 一阶谓词逻辑

- 在所讨论的谓词逻辑中，限定量词仅作用于个体变项，不允许量词作用于命题变项和谓词变项，也不讨论谓词的谓词。

非一阶示例：$\forall p(p \to Q(x))$， $\exists Q(Q(x) \to P(x))$

- 在这样的限定范围内的谓词逻辑称为一阶谓词逻辑。一阶谓词逻辑是相对于高阶谓词逻辑而言的。

4.3 合式公式

4-3-2 一阶谓词逻辑的符号集

- 个体常项：*a, b, c, …*（小写字母）。
- 个体变项：*x, y, z, …*（小写字母）。
- 命题变项：*p, q, r, …*（小写字母）。
- 谓词符号：*P, Q, R, …*（大写字母）。
- 函数符号：*f, g, h, …*（小写字母）。
- 联结词符号 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$。
- 量词符号：$\forall, \exists$。
- 括号与逗号：（ ） ,

4-3-3 合式公式定义

(1) 命题常项、命题变项、和原子谓词公式（不含联结词的谓词公式）是合式公式。

(2) 若A是合式公式，则$(\neg A)$也是合式公式。

(3) 若A,B是合式公式，而无变元x在A,B的一个中是约束的而在另一个中是自由的，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式（最外层括号可省略）。

（此处教材限制较严）

(4) 若A是合式公式，则$(\forall x)A$, $(\exists x)A$也是合式公式

(5) 只有有限次地应用(1)-(4)构成的符号串才是合式公式。

谓词逻辑中的合式公式也称为谓词公式，简称公式。

4.4 自然语句的形式化

- 利用计算机进行推理的基础工作。
- 在分析的基础上，将问题分解成一些合适的谓词表示；即先做一些谓词（函数）设定；
- 然后使用量词、联接词将设定的谓词构成合式公式。

所有实数的平方都是非负的

个体：每一个实数，以x表示
函数：…的平方，以f表示
谓词：…是非负的，以R表示
量词：所有，以$\forall$表示
符号化：$(\forall x)R(f(x))$
另解：
个体：每一个数，以z表示
谓词：是一个实数，以R'表示
函数：…的平方，以f表示
谓词：…是非负的，以R表示
量词：所有，以$\forall$表示
符号化：$(\forall z)(R'(z)\rightarrow R(f(z)))$

有一个比2^{1000}大的素数

个体：一个素数，以x表示

谓词：…比2^{1000}大，以P_1表示

量词：有一个，以$\exists$表示

符号化：$(\exists x)\, P_1(x)$

还可以表示为：$(\exists x)\,(\, P_2(x) \wedge P_1(x)\,)$

x：一个数　　　P_2: …是一个素数

4.4.1 “所有的有理数都是实数”的形式化

分析：所有的有理数都是实数

即对任一事物而言，如果它是有理数，则它是实数。

即对任一x 而言，如果x 是有理数，那么x 是实数。

设$P(x)$：x 是有理数，$Q(x)$：x 是实数，

这句话的形式描述应为

$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$??

4.4.1 "所有的有理数都是实数"的形式化

- 因为x的论域是一切事物的集合, 所以x是有理数是一个条件。
- 需注意这句话不能形式化为

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$$

上式的意思是说， 对所有的x， x是有理数而且又是实数.

- "所有的…都是…"，这类语句的形式描述只能使用"→"而不能使用"∧"。

八股原则

4.4.2 “有的实数是有理数”的形式化

- 同前 $P(x)$：x是有理数，$Q(x)$：x是实数

  则这句话的形式描述应为

  $$(\exists x)(Q(x) \land P(x))$$

- 需注意的是不能使用

  $$(\exists x)(Q(x) \rightarrow P(x))$$

4.4.3 “没有无理数是有理数”的形式化

- 该句中有否定词，对任一x而言，如果x是无理数，那么x不是有理数。
- 设$A(x)$:　x是无理数，

  $B(x)$：x是有理数，

这句话的形式描述为

$$\neg(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$$

“没有无理数是有理数”的形式化

其它逻辑上等价的描述包括

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow \neg B(x))$$

$$(\forall x)(B(x) \rightarrow \neg A(x))$$

4. 4. 4 命题符号化（1）

- 在个体域分别限制为(a)和(b)条件时，将下面两个命题符号化

(1)凡是人都呼吸

(2)有的人用左手写字

其中: (a) 个体域D_1为人类集合；

(b) 个体域D_2为全总个体域.

解 (a) 令$F(x)$: x呼吸. $G(x)$: x用左手写字

在D_1中除人外，再无别的东西，因而

(1) 符号化为 $(\forall x)\,F(x)$

(2) 符号化为 $(\exists x)\,G(x)$

4. 4. 4 命题符号化（1）

(b) D_2中除有人外，还有万物， 因而在 (1)，(2)符号化时，必须考虑将人分离出来。令$M(x)$: x是人（**用于表明x的特性**）

在D_2中，

(1)对于宇宙间一切事物而言，如果事物是人，则他要呼吸; (2)在宇宙间存在着用左手写字的人.

(1)，(2)的符号化形式分别为

$(\forall x)\ (M(x)\rightarrow F(x))$ 和 $(\exists x)(M(x)\wedge G(x))$

其中$F(x)$与$G(x)$的含义同(a)中.

在谓词演算中，命题的符号表达式与论域有关系。

1.每个自然数都是整数。

(1).如果论域是自然数集合N，令 $I(x)$：x是整数，则命题的表达式为 $\forall x I(x)$。

(2).如果论域扩大为全总个体域时，上述表达式$\forall x I(x)$表示"所有个体都是整数"，显然这是假的命题，此表达式已经不能表达原命题了。

因此需要添加谓词$N(x)$：x是自然数，用于表明x的特性，于是命题的符号表达式为 $\forall x(N(x)\rightarrow I(x))$

2.有些大学生吸烟。

(1).如果论域是大学生集合S，令$A(x)$：x吸烟，则命题的表达式为 $\exists x A(x)$

(2).如果论域扩大为全总个体域时，上述表达式$\exists x A(x)$表示“有些个体吸烟”，就不是表示此命题了，故需要添加谓词 $S(x)$：x是大学生，用于表明x的特性，于是命题的表达式为 $\exists x(S(x) \wedge A(x))$

- 从上述两个例子可以看出，命题的符号表达式与论域有关。当论域扩大时，需要添加用来表示客体特性的谓词，称此谓词为特性谓词。特性谓词往往就是给定命题中量词后边的那个名词。如上面两个例子中的“所有*自然数*”、“有些*大学生*”。
- 特性谓词的添加方法如下：
  – 如果前边是全称量词，特性谓词后边是蕴含联结词“→”；如果前边是存在量词，特性谓词后边是合取联结词“∧”。

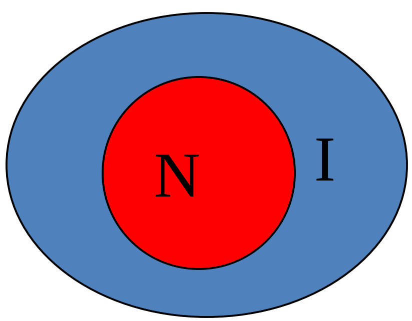
八股原则

- 为什么必须这样添加特性谓词？

1. 每个自然数都是整数。
2. 有些大学生吸烟。

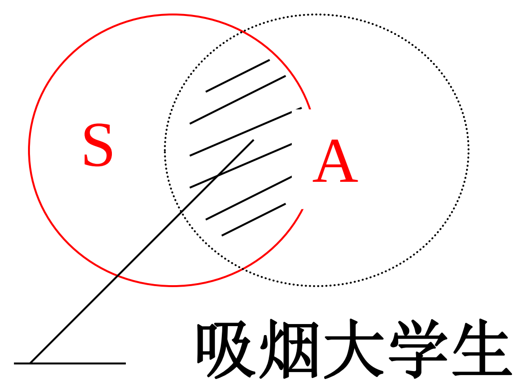
令N:自然数集合，I:整数集合，

S:大学生集合，A:烟民的集合。



I包含N

$\forall x(N(x) \rightarrow I(x))$



吸烟大学生是S与A的交集

$\exists x(S(x) \wedge A(x))$

4.4.4 命题符号化（2）

个体域对真假值的影响：

1）对于任意的x，均有$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

2）存在x，使得$x+5=3$

其中：(a) 个体域$D_1=\mathbf{N}$　　(b) $D_2=\mathbf{R}$

解

(a) 令 $F(x)$: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, $G(x)$: $x+5=3$ 则有

命题1)为 $(\forall x)\ F(x)$，命题2)为 $(\exists x)\ G(x)$

在D_1内，命题1）为真，命题2）为假

(b) 在D_2内，符号化形式相同。命题1）为真，命题2）为真

说明

从4. 4. 4的几个例子可以看出

- 在不同个体域内，同一个命题的符号化形式可能不同，也可能相同.
- 同一个命题，在不同个体域中的真值也可能不同.

其它例题

将下列命题符号化，并讨论真值。

（1）每个人都长着黑头发。

（2）有的人登上过月球。

（3）没有人登上过木星。

（4）在校学习的大学生不都住在学校。

（1）每个人都长着黑头发。

解：由于本题未指明个体域，因而应用总论域，并令 $H(x)$: x是人。

令**$B(x)$: x长着黑头发**。则命题（1）符号化为

$$(\forall x)\ (H(x) \rightarrow B(x))$$

设a为某金发姑娘，则$H(a)$为真，而$B(a)$为假，所以$H(a) \rightarrow B(a)$为假，故上式所表示的命题为假。

(2) 有的人登上过月球。

解： 令$H(x)$: x是人, $M(x)$: x登上过月球。

有的人登上 过月球 符号化为

$$(\exists x)\ (H(x) \wedge M(x))$$

设a是1969年完成阿波罗登月计划的美国人，则 $H(a) \wedge M(a)$为真，所以上式命题为真。

(3)没有人登上过木星

解：令$H(x)$: x是人, $J(x)$: x登上过木星。

没有人登上过木星符号化为

$$\neg(\exists x)\,(H(x)\land J(x))$$

到目前为止，还没有任何人登上过木星，所以对任何人a，$H(a)\land J(a)$均为假，因而$(\exists x)\,(H(x)\land J(x))$为假，故上式命题为真。

(4)在校学习的大学生不都住在学校

解：令$S(x)$: x是大学生，$L(x)$: x住在学校。

在校学习的大学生未必都住在学校

符号化为

$$\neg(\forall x)\ (S(x) \rightarrow L(x))$$

容易讨论，(4)中命题为真。

$$(\exists x)\ (S(x) \land \neg L(x))$$

n（$n\geq 2$）元谓词的符号化

例　将下列命题符号化：

（1）兔子比乌龟跑得快。

（2）有的兔子比所有的乌龟跑得快。

（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。

（4）不存在跑得同样快的两只兔子。

解　本题未指明个体域。故默认为总论域。

出现二元谓词，故引入两个个体变项x与y

令 $R(x)$: x是兔子;　$T(y)$: y是乌龟;

$F(x, y)$: x比y跑得快;

$S(x, y)$: x与y跑得同样快

这4个命题分别符号化为

（1）兔子比乌龟跑得快。

$$(\forall x)(\forall y)(R(x)\wedge T(y)\rightarrow F(x,y))$$

（2）有的兔子比所有的乌龟跑得快。

$$(\exists x)(R(x)\wedge(\forall y)(T(y)\rightarrow F(x,y)))$$

（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑得快

$$\neg(\forall x)(\forall y)(R(x)\wedge T(y)\rightarrow F(x, y))$$

（4）不存在跑得同样快的两只兔子

$$\neg(\exists x)(\exists y)(R(x)\wedge R(y)\wedge S(x, y))$$

$$\neg(\exists x)(\exists y)(R(x)\wedge R(y)\wedge \neg \mathrm{E}(x, y)\wedge S(x, y))$$

$E(x, y)$：x, y是相同的

有些语句的形式化可能有多种形式

"并不是所有的兔子都比乌龟跑的快。"

令$R(x)$：x是兔子，$T(y)$：y是乌龟，$F(x, y)$：x比y跑得快

这句话可形式化为

$$\neg(\forall x)(\forall y)(R(x) \land T(y) \rightarrow F(x, y))$$

也可以形式化为 $(\exists x)(\exists y)(R(x) \land T(y) \land \neg F(x, y))$

若令$E(x, y)$：x与y跑得同样快, 则还可符号化为(注意与原句有差别)

$$(\exists x)(\exists y)(R(x) \land T(y) \land E(x, y))$$

例：不管白猫黑猫，抓到老鼠就是好猫

设$C(x)$：x是猫　　$B(x)$：x是黑的

$W(x)$：x是白的　$G(x)$：x是好的

$M(y)$：y是老鼠

$K(x,y)$：x抓住y

命题的表达式为:

$$\forall x(\ C(x)\wedge(W(x)\ \bar{\vee}\ B(x))\rightarrow$$
$$(\exists y(M(y)\wedge K(x,y))\rightarrow G(x))\quad)$$

4.4.5 自然数集的形式描述

论域是自然数集，将下列语句形式化：

1. 对每个数，有且仅有一个相继后元。
2. 没有这样的数，0是其相继后元。
3. 对除0而外的数，有且仅有一个相继前元。

＊ 可将这三句话作为建立自然数集合的公理。

引入谓词：$E(x, y)$ 表示 $x = y$，

函数 $f(x)$ 表示个体 x 的相继后元，

即 $f(x) = x+1$。

函数 $g(x)$ 表示个体 x 的相继前元，

即 $g(x) = x-1$。

4.4.5 自然数集的形式描述（续）

- 语句1需注意“唯一性”的描述，常用的办法是如果存在两个则它们必相等。
- 即若对每个x都存在y，y是x的相继后元，而且对任一 z，如果 z 也是 x 的相继后元，那么 y和z 必相等。

于是对语句1的描述为

“对每个数，有且仅有一个相继后元。”

$$(\forall x)(\exists y)(\ E(y, f(x)) \wedge (\forall z)(\ E(z, f(x)) \rightarrow E(y, z)\ )\ )$$

关于“唯一性”的一般描述

“唯一性”的一般描述：

常用的办法是：

先表示存在一个，同时如果还能找到另一个的话，则它们一定相等。

一般描述可表述为：

$$(\exists x)(P(x)\wedge(\forall y)(P(y)\rightarrow E(x, y)))$$

其中 $E(x, y)$ 表示 $x = y$。

4.4.5　自然数集的形式描述（续）

语句 2. 没有这样的数，0是其相继后元。

描述比较简单，即，

不存在这样的x，它的相继后元等于0。可写成

$$\neg(\exists x)\mathrm{E}(0, f(x)) \quad \text{或}$$

$$(\forall x)\neg\mathrm{E}(0, f(x))$$

4.4.5 自然数集的形式描述（续）

语句3. 对除 0 而外的数, 有且仅有一个相继前元。

需注意的是对“除 0 而外”的描述，可理解为如果 $x \neq 0$，则…的形式。

于是语句3可描述为

$$(\forall x)\,(\neg E(x, 0) \rightarrow (\exists y)(E(y, g(x)) \wedge (\forall z)(E(z, g(x)) \rightarrow E(y, z))))$$

除$\neg E(x, 0)$外，与语句1的结构完全相同

4.4.6 “至少有一偶数是素数”与“至少有一偶数并且至少有一素数”的形式化

需注意两者的区别

记 $A(x)$ 表示x是偶数，$B(x)$ 表示x是素数，则两句话可分别形式描述为

$(\exists x)(A(x)\wedge B(x))$ 与

$(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$

这两个逻辑公式并不等值。

4.4.6 （续）

同样，“一切事物它或是生物或是非生物”

与“或者一切事物都是生物，或者一切事物都是非生物”

的形式化也是不同的，可分别形式描述为：

$$(\forall x)(A(x)\,\overline{\vee}\,B(x))$$

$$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)$$

这两个逻辑公式也不等值。

4.4.6 （续）

“一切素数都是奇数”与

“若一切事物都是素数，那么一切事物都是奇数”

分别形式化为：

$$(\forall x)(A(x) \to B(x))$$

与 $$(\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)$$

两者显然也不等值。

4.4.9 "函数$f(x)$在$[a, b]$上的点x_0处连续"的形式描述

"函数$f(x)$在$[a, b]$上的点x_0处连续"的形式描述（可考虑加一些函数设定）

$$(\forall \varepsilon)(\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists \delta)(\delta > 0 \wedge (\forall x)$$

$$(|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)))$$

$P(x, \varepsilon)$: x的绝对值小于ε

$$(\forall \varepsilon)(\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists \delta)(\delta > 0 \wedge (\forall x)$$

$$(P(x - x_0, \delta) \rightarrow P(f(x) - f(x_0), \varepsilon))))$$

4.4.10 对谓词变元多次量化的分析

(1) $(\forall x)(\forall y)P(x,y) = (\forall x)((\forall y)P(x,y))$

(2) $(\forall x)(\exists y)P(x,y) = (\forall x)((\exists y)P(x,y))$

(3) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) = (\exists x)((\forall y)P(x,y))$

(4) $(\exists x)(\exists y)P(x,y) = (\exists x)((\exists y)P(x,y))$

量词的优先级高于逻辑联结词

4.5 有限域下公式的表示法

4-5-1 有限域下全称量词和存在量词的表示

将论域限定为有限集，不失一般性，用 $\{1,2,\ldots,k\}$ 来表示，这时全称量词和存在量词可化为如下公式：

$$(\forall x)P(x) = P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k)$$
$$(\exists x)P(x) = P(1) \vee P(2) \vee \ldots \vee P(k)$$

这种情况下可以说，全称量词是合取词的推广；存在量词是析取词的推广。

4.5 有限域下公式的表示法

- 在有限域下，可将$(\forall x)P(x)$化成由合取词来描述的命题公式。
- 在有限域下，可将$(\exists y)P(y)$化成由析取词来描述的命题公式。
- 但是在无限域下，谓词逻辑的公式不能转换为命题逻辑的公式。

4.5 有限域下公式的表示法

- 严格地说，在无穷集$\{1, 2, \ldots, k, \ldots\}$上

  $P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k) \wedge \ldots$

  $P(1) \vee P(2) \vee \ldots \vee P(k) \vee \ldots$

  都是没有定义的, 不是合式公式。
- 一般而言，谓词逻辑的公式不能转换为命题逻辑的公式。

4.5.2 在{1, 2}域上多次量化公式(4-1)

$$(\forall x)(\forall y)\ P(x, y)$$
$$= (\forall y)\ P(1, y) \land (\forall y) P(2, y)$$
$$= (P(1, 1) \land P(1, 2)) \land (P(2, 1) \land P(2, 2))$$

$$(\exists x)(\forall y)\ P(x, y)$$
$$= (\forall y) P(1, y) \lor (\forall y) P(2, y)$$
$$= (P(1, 1) \land P(1, 2)) \lor (P(2, 1) \land P(2, 2))$$

4.5.2 在{1, 2}域上多次量化公式(4-2)

$(\forall y)(\exists x)P(x, y)$

$= (\exists x)P(x, 1) \land (\exists x)P(x, 2)$

$= (P(1, 1) \lor P(2, 1)) \land (P(1, 2) \lor P(2, 2))$

$(\exists x)(\exists y)P(x, y)$

$= (\exists y)P(1, y) \lor (\exists y)P(2, y)$

$= (P(1, 1) \lor P(1, 2)) \lor (P(2, 1) \lor P(2, 2))$

4.5.2 在{1, 2}域上多次量化公式(4-2)

$$\begin{aligned}&(\exists x)(\forall y)P(x,y)\\ &=(\forall y)P(1,y)\lor(\forall y)P(2,y)\\ &=(P(1,1)\land P(1,2))\lor(P(2,1)\land P(2,2))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\forall y)(\exists x)P(x,y)\\ &=(\exists x)P(x,1)\land(\exists x)P(x,2)\\ &=(P(1,1)\lor P(2,1))\land(P(1,2)\lor P(2,2))\end{aligned}$$

- 将 $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$ 写成析取范式可明显看出它与 $(\exists x)(\forall y)P(x, y)$ 的差别：

$$\begin{aligned}&(\forall y)(\exists x)P(x, y)\\ &= (P(1, 1)\land P(1, 2))\lor(P(2, 1)\land P(2, 2))\lor\\ &\quad (P(1, 1)\land P(2, 2))\lor(P(2, 1)\land P(1, 2))\\ &= (\exists x)(\forall y)P(x, y)\lor\\ &\quad (P(1, 1)\land P(2, 2))\lor(P(2, 1)\land P(1, 2))\end{aligned}$$

4.5.2 在域{1, 2}上多次量化公式(4-4)

- 从而有

  $(\exists x)(\forall y)\ P(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\ P(x, y)$

- 当对有的谓词公式难于理解时, 可在有限域{1, 2}上转换成命题逻辑公式做些分析, 常会帮助理解。
- P(x,y)表示x和y是好朋友
- $(\exists x)(\forall y)\ P(x, y)$ 存在万人迷
- $(\forall y)(\exists x)\ P(x, y)$ 所有人都有朋友

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

4-6-1 普遍有效公式

设A为一个谓词公式，若A在任何解释下真值均为真，则称A为普遍有效的公式。

例： $(\forall x)(P(x) \vee \neg P(x))$

$(\forall x)P(x) \rightarrow P(y)$ （y是x个体域中的一个元素）

$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$

$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) =$

$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \vee$

$(P(1) \wedge Q(2)) \vee (Q(1) \wedge P(2))$

{1, 2}域上分析

4. 6 公式的普遍有效性和判定问题

4-6-2 不可满足公式

设A为一个谓词公式，若A在任何解释下真值均为假，则称A为不可满足的公式。

例： $(\exists x)(P(x) \wedge \neg P(x))$

$(\forall x)P(x) \wedge (\exists y)\neg P(y)$

解释一下什么叫“任何解释？”

个体域D 个体常项a 谓词符号P 函数符号*f*

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

4-6-3 可满足公式

设A为一个谓词公式，若至少存在一个解释使A为真，则称A为可满足的公式

- 普遍有效的公式一定是可满足的公式
- $(\exists x)P(x)$ 在任一非空的个体域中可满足

公式的可满足性和普遍有效性依赖于个体域中个体的个数

- $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)\neg P(x)$
  在D1上不可满足，但在D2上可满足

- $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)\neg P(x)$
  在D1上普遍有效，但在D2上则不是。

D1 = {0}; D2= {0,1}
解释
令P(0) =1, P(1)=0

总结：谓词逻辑的基本概念

- 4.1 谓词*和个体词
- 4.2 函数和量词*
- 4.3 合式公式
- 4.4 自然语句的形式化*
- 4.5 有限域下公式的表示法
- 4.6 公式的普遍有效性和判定问题

谢 谢