§2 多项式I:整除性

1.1 多项式定义

定义：一个数域$\mathbb{F}$是指复数集$\mathbb{C}$的一个子集，满足: $\mathbb{F}$至少包含两个不同的数，且F中任意两个数的 加、减、乘和除(除数不为0)还属于$\mathbb{F}$.

例如：$\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$是数域， $\mathbb{Z}$不是数域

更多细节参看《高等代数学》3.1节

1.1 多项式定义

定义：设$\mathbb{F}$是一个数域,x是一个形式符号(称为未定元)，设$a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$，其中$n$是非负整数. 形式表达式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

称为数域$\mathbb{F}$上的关于x的一元多项式，数域$\mathbb{F}$上的全体一元多项式集合记作$\mathbb{F}[x]$.

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$的次数(记作$\deg f(x)$)：

若$a_n \neq 0$, $\deg f(x)$=n. $a_n x^n$称为首项.

若$f(x) = 0$（称为零多项式）, 不定义次数.

注：零多项式与零次多项式的区别

1.1 多项式定义

两多项式相等：　设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_1 x + b_0$$

是$\mathbb{F}[x]$中两个多项式，则$f(x) = g(x)$当且仅当

$$m = n, a_i = b_i, i = 0, 1, \cdots, n.$$

1.2 多项式的运算

设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_1 x + b_0$$

是$\mathbb{F}[x]$中两个多项式，且$n \geq m$, 则

$$f(x) \pm g(x) = a_n x^n + \cdots + a_{m+1}x^{m+1} + (a_m \pm b_m)x^m \cdots + (a_1 \pm b_1)x + (a_0 \pm b_0).$$

$$f(x)g(x) = h(x) = c_{n+m}x^{n+m} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

其中，$c_{n+m} = a_n b_m$, $c_{n+m-1} = a_{n-1}b_m + a_n b_{m-1}$, $\cdots$,$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$, $c_0 = a_0 b_0$.

1.2多项式的运算

基本性质：1. 设$f(x)\neq 0, g(x)\neq 0\in \mathbb{F}[x]$, 则$f(x)g(x)\neq 0$且
$\deg(f(x)g(x))=\deg(f(x))+\deg(g(x))$.

2. $\deg(f(x)\pm g(x))\leq \max\{\deg f(x), \deg(g(x)\}$.

3. 设$f(x)\neq 0, g(x), h(x)\in \mathbb{F}[x]$,且$f(x)g(x)=f(x)h(x)$, 则$g(x)=h(x)$.

运算规律：加法和乘法交换律，加法和乘法结合律， 乘法关于加法的分配律

1.3 带余除法和整除

定理 设$f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x], g(x) \neq 0$, 则存在唯一的$q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$, 使得

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

其中$r(x) = 0$或$\deg r(x) < \deg g(x)$.

$q(x)$称为商式， $r(x)$称为余式。若$r(x) = 0$, $f(x) = q(x)g(x)$. 我们说$g(x)$整除$f(x)$, $g(x)$是$f(x)$的因式， 记作$g(x) \mid f(x)$. 任意多项式是零多项式的因式.

证明方法：关于次数归纳，长除法。见8.1.2节

性质：若$f(x), g(x) \neq 0 \in \mathbb{F}[x]$, 且$f(x) \mid g(x), g(x) \mid f(x)$, 则存在$c \in \mathbb{F}$, $f(x) = cg(x)$.

1.3 带余除法和整除

特殊情形：$g(x)=x-a, a\in\mathbb{F}$. 则

1. $r(x)=f(a)$,（余数定理）

2. $q(x)$可以通过公式计算 （综合除法）.

定义：设$f(x)\in\mathbb{F}[x], a\in\mathbb{F}$, 若$f(a)=0$, 则$a$是$f(x)=0$的一个零点或根.

性质：1. a是$f(x)=0$的一个零点当且仅当$(x-a)\mid f(x)$. （零点定理）

2. 若$\deg f(x)=n$, 则$f(x)$在包含$\mathbb{F}$的数域中最多有n个不同的零点.

3. 若$f(x), g(x)$次数$\geq n$, 且它们在$\mathbb{F}$中$n+1$个不同的数取值相同，则$f(x)=g(x)$.

1.4 Lagrange插值多项式

插值问题： 给定$n+1$个不同的点$(a_1,b_1),\cdots,(a_{n+1},b_{n+1})$, 求次数小于等于$n$的多项式$f(x)\in\mathbb{F}[x]$满足$y=f(x)$经过这$n+1$个点.

唯一性：

定理 若$f(x),g(x)$次数$\leq n$, 且它们在$\mathbb{F}$中$n+1$个不同的数取值相同，则$f(x)=g(x)$.

存在性：

定理 设$a_1,\cdots,a_{n+1}\in\mathbb{F}$互不相同，$b_1,\cdots,b_{n+1}\in\mathbb{F}$,则存在唯一的一个多项式$L(x)$，满足$\deg L(x)\leq n$, $L(a_i)=b_i$, $i=1,2,\cdots,n+1$.

1.5 最大公因式I

定义 设$f(x), g(x)$, 若存在$d(x) \in \mathbb{F}[x]$满足：$d(x) \mid f(x)$, $d(x) \mid g(x)$,则 $d(x)$称为$f(x)$与$g(x)$的公因式. 次数最大的公因式称为最大公因式. 首项系数为1的最大公因式记作$(f(x), g(x))$.

定理（辗转相除法）设$f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$不全为0, 则存在$u(x), v(x) \in \mathbb{F}[x]$使得

$$(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

性质： 1. 若$d(x)$是$f(x), g(x)$的公因式，则任意$c \in \mathbb{F}$，$cd(x)$也是公因式.

2.设$d(x)$是$f(x), g(x)$的最大公因式，$d_1(x)$是$f(x), g(x)$的公因式，则$d_1(x) \mid d(x)$.