第十周.标准正交基、共轭变换

参考：
课本10.1.1，10.3，定义10.12或
高等代数学9.1，9.2，9.3

10.1 标准正交基

定义 设V是一个内积空间， $\mathbf{B}=\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}\subseteq V$ 满足

(1) 任意$v\in V$ **是** $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n$ **的线性组合；**

(2) 有$\langle v_i,v_j\rangle=0,\ \text{if } i\neq j, \langle v_i,v_j\rangle=1,\ \text{if } i=j.$

则 $\mathbf{B}=\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$**是线性无关的， 称为**$V$ **的一组标准正交基.**

定理 设V是n维内积空间，则任意两组标准正交基的过渡矩阵U满足$U^T\overline{U}=I_n.$

定义： 一个n阶复矩阵称为酉阵，如果$\overline{U}^TU=I_n.$

定义：设W是内积空间V的子空间，令

$W^{\perp}=\{v\in V\mid (v,w)=0,\forall w\in W\}$, 称为$W$的正交补.

10.1 标准正交基

例1. 考虑带标准内积的酉空间$\mathbb{C}^n$，$\mathbf{B}=\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ 是标准正交基当且仅当矩阵 $U=(\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v})$ 是酉矩阵，即 $U^T\overline{U}=I_n$.

例2. 设 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_i\in\mathbb{R}\}$. 这是一个向量空间，定义内积：

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

则它成为一个欧式空间. 它有如下标准正交基:

$$\sqrt{\frac{1}{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}x,\ \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

10.1 标准正交基

性质：设 $e_1, \cdots, e_k \in V$ 是标准正交的一组向量，令

$$W = \{c_1 e_1 + \cdots + c_k e_k \mid c_i \in \mathbb{F}\} \subseteq V.$$

给定 $v \in V$，则 $v_p = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_k \rangle e_k$ 满足

$$v_p \in W, v - v_p \perp W$$

向量v_p 称为 v 在 W 上投影.

10.2 Gram-Schimidt正交化

求法：Gram-Schmidt正交化

Suppose $v_1, \ldots, v_m$ is a linearly independent list of vectors in V. Let $e_1 = v_1/\|v_1\|$. For $j = 2, \ldots, m$, define e_j inductively by

$$e_j = \frac{v_j - \langle v_j, e_1\rangle e_1 - \cdots - \langle v_j, e_{j-1}\rangle e_{j-1}}{\|v_j - \langle v_j, e_1\rangle e_1 - \cdots - \langle v_j, e_{j-1}\rangle e_{j-1}\|}.$$

Then $e_1, \ldots, e_m$ is an orthonormal list of vectors in V such that

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j) = \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_j)$$

for $j = 1, \ldots, m$.

10.2 Gram-Schimidt正交化

例. 设 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$. 内积: $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$

则它成为一个欧式空间. 它有如下标准正交基:

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ \sqrt{\tfrac{3}{2}}x,\ \sqrt{\tfrac{45}{8}}(x^2 - \tfrac{1}{3})$$

正交化过程:

1. $\|1\|^2 = \int_{-1}^{1} 1^2\, dx = 2.$ 得到 $e_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$

2. 同理, $x - \langle x, e_1\rangle e_1 = x - \left(\int_{-1}^{1} x\sqrt{\tfrac{1}{2}}\, dx\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}} = x$ $\|x\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3}.$

得到 $e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x$

10.2 Gram-Schimidt正交化

3. $$\begin{aligned} & x^2 - \langle x^2, e_1\rangle e_1 - \langle x^2, e_2\rangle e_2 \\ &= x^2 - \left(\int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, dx\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \left(\int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{\tfrac{3}{2}} x\, dx\right)\sqrt{\tfrac{3}{2}} x \\ &= x^2 - \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\|x^2 - \tfrac{1}{3}\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(x^4 - \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{1}{9}\right) dx = \frac{8}{45}$$

得到 $$e_3 = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

10.3 内积空间上线性变换的伴随

定义：设V,W是两个酉空间，$T:V\to W$ 是一个线性映射. 则 T 的伴随(adjoint)是一个线性映射 $T^*:W\to V$ 满足对于任意 $v\in V, w\in W,\quad \langle T(v),w\rangle=\langle v,T^*(w)\rangle.$

书上称伴随为**共轭变换**。

例如 定义 $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^2$ 如下： $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1-ix_2,x_2+ix_3)$

则 $T^*:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^3$ 定义是：

$$T(y_1,y_2)=(y_1,iy_1+y_2,iy_2)$$

伴随概念是矩阵的共轭转置运算在线性变换上类比

10.3 内积空间上线性变换的伴随

定理 设V, W是两个内积空间，$T: V \to W$ 是一个线性映射，假设 $\mathbf{B}_V = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}, \mathbf{B}_W = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$， 是相应的标准正交基，则 T 的伴随存在，且它和伴随关于上述基的矩阵表示互为共轭转置.

设 V 是n维内积空间，$T: V \to V$ 是一个线性变换，则有如下性质：
(1)若U是$T-$不变子空间，则$U^{\perp}$ 是T^*-不变子空间.
(2) 若$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是T的全部特征值，则 $\overline{\lambda}_1, \cdots, \overline{\lambda}_n$ 是T^*的全部特征值.

单选题 1分

设置

以下**错误**的是

A 若v_1和v_2正交， v_2和v_3正交，则v_1和v_3未必正交.

B 设$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}^3$是标准正交组, U是3阶酉阵，则Uv_1, Uv_2, Uv_3是标准正交组.

C 设V_1, V_2是$\mathbb{R}^n$的子空间满足$V_1^\perp = V_2^\perp$,则$V_1 = V_2$.

D 设Q是n阶正交阵，$P \in M_n(\mathbb{R})$是可逆阵， 则$P^{-1}QP$是正交阵.

提交