离散数学II

—树1

周旻
清华大学软件学院
软件工程与系统研究所

2024年5月17日
Friday

第三章 树

- 树的有关定义
- 基本关联矩阵及其性质
- 支撑树的计数
- 回路矩阵与割集矩阵
- 最短树
- 支撑树的生成
- **Huffman树**

树的定义

树的有关定义和性质

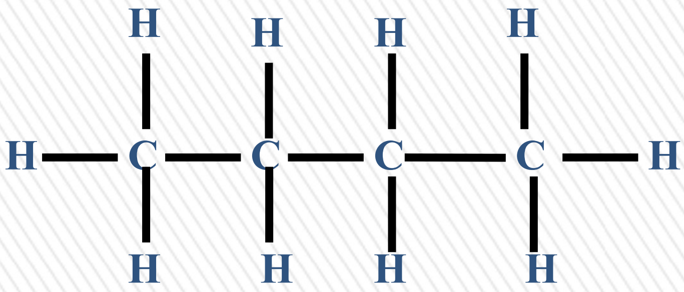
树是一种特殊的图，是图论中重要的概念之一，它有着广泛的应用。

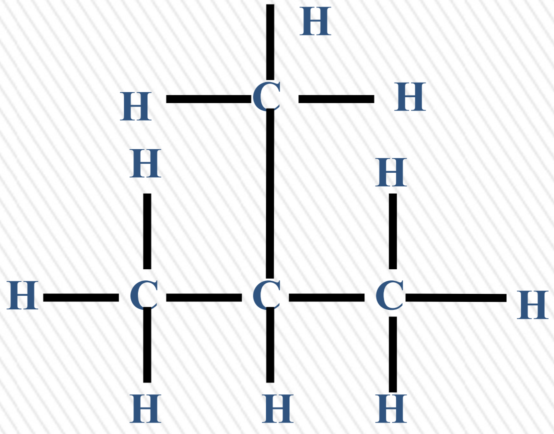
例：饱和碳氢化合物与树

英国数学家**Arthur Cayley (1821-1895)**

最早提出树的概念（**1857**年）

在研究C_nH_{2n+2}的化合物的同分异构体的过程中提出的





N = 4时的同分异构体，分别为丁烷和异丁烷

树的有关定义和性质

树在计算机科学中有着非常重要的作用：

如目录树、

搜索树、

判定树、

分类树、

语法树、

编码树等等.

树的有关定义和性质

一个图$G=(V,E)$，若不含任何回路，则称为林，若此图是连通的，则称为树

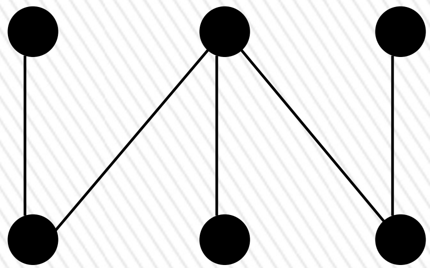
定义3.1.1 一个不含任何回路的连通图称为树，用T表示一棵树

- T中的边称为树枝，
- 度为1的结点称为树叶，
- 度大于1的结点为分支结点（内结点）。

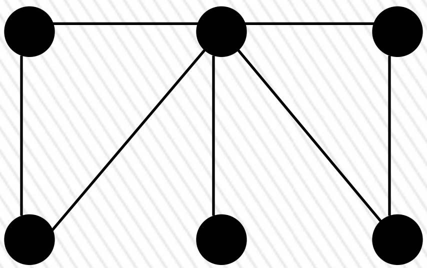
树的有关定义和性质

例： 下面哪个图是树？

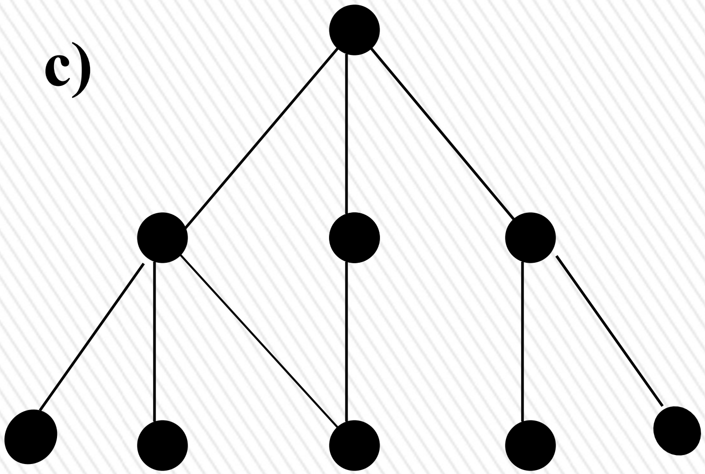
a)



b)



c)



树的有关定义和性质

树有许多性质, 它们是树的充要条件, 因此它们都可看作是树的定义。

定理3.1.2 设$G=<V,E>$是n阶m条边的无向图，则下面各命题是等价的，都是树的定义：

(1) G是树（连通且无回路）

(2) G中任意两个顶点之间存在唯一的路径

(3) G中无回路, 且$m=n-1$

(4) G是连通的, 且$m=n-1$

(5) G是连通的, 且G中任何边均为桥

(6) G中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到唯一一个含新边的回路

树的有关定义和性质

(1) G连通且无回路

(2) G中任意两个顶点之间存在唯一的路径

(1) $\Rightarrow$ (2)

由G的连通性可知: $\forall u, v \in V$，u与v之间存在路径。

若路径不是唯一的，设Γ_1与Γ_2都是u到v的路径。

显然必存在由Γ_1和Γ_2上边构成的回路，这就与G中无回路矛盾。

树的有关定义和性质

(2) G中任意两个顶点之间存在唯一的路径

(3) G中无回路, 且$m = n - 1$

(2) ⇒ (3)

先证明：G中无回路。

若G中存在关联某顶点v的环，则v到v存在长为0和1的两条路经，这与已知矛盾。

若G中存在长度大于或等于2的圈，则圈上任何两个顶点之间都存在两条不同的路径，这与已知条件矛盾。

下面用归纳法证明: $m = n - 1$。

1) $n = 1$时，结论显然成立。

2) 设$n \le k(k \ge 1)$时，结论成立。

3) 当$n = k + 1$时，

设$e = (u, v)$为G中的一条边，由于G中无回路, 所以, $G - e$有两个连通分支G_1和G_2。

设n_i和m_i分别为G_i中的顶点数和边数，则$n_i \le k(i = 1, 2)$。

由归纳假设可知：$m_i = n_i - 1$，于是$m = m_1 + m_2 + 1 = n_1 + n_2 + 1 - 2 = n - 1$。

树的有关定义和性质

(3) G中无回路，且$m = n - 1$

(4) G是连通的，且$m = n - 1$

(3) $\Rightarrow$ (4)

反证法：假设G不是连通的。

设G由$s(s \geq 2)$个连通分支$G_1, G_2, \ldots, G_s$, G_i中均无回路，

因此，G_i全为树$(i = 1\ldots s)$。

由(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3)可知: $m_i = n_i - 1$。

于是，$m = \Sigma_{i=1\ldots s}\, m_i = \Sigma_{i=1\ldots s}\, n_i - s = n - s$。

由于$s \geq 2$，这显然与条件“$m = n - 1$”相矛盾。

所以，G是连通的。

树的有关定义和性质

(4) G是连通的，且$m = n - 1$

(5) G是连通的，且G中任何边均为桥

(4) $\Rightarrow$ (5)

需证明G中每条边均为桥，$\forall e \in E$, 均有：

$$E(G - e) = n - 1 - 1 = n - 2$$

类似的，可用数学归纳法证明“n阶m条边的无向连通图，则$m \geq n - 1$”。

$G - e$不是连通图，故e为桥。

树的有关定义和性质

(5) G是连通的，且G中任何边均为桥

(6) G中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到唯一一个含新边的回路。

(5) $\Rightarrow$ (6)

由于G中每条边均为桥，因此，G中无圈。

又由于G连通，所以，G为树。

由(1) $\Rightarrow$ (2)可知：$\forall u, v \in V$且$u \neq v$，则u与v之间存在唯一的路径Γ，则$\Gamma \cup (u, v)$为G中的回路，显然该回路是唯一的。

树的有关定义和性质

(6) *G*中没有回路, 但在任何两个不同的顶点之间加一条新边, 在所得图中得到唯一一个含新边的回路

(1) *G*连通且无回路

(6) $\Rightarrow$ (1)

证明：需证*G*是连通的。

$\forall u, v \in V$且$u \neq v$, 则$(u, v) \cup G$产生唯一的回路，

显然，有$C - (u, v)$为*G*中*u*到*v*的通路，故*u*可达*v*。

由"*u*和*v*的任意性"可知：G是连通的。

树的有关定义和性质

树有许多性质, 它们是树的充要条件, 因此它们都可看作是树的定义。

定理3.1.2 设$G = <V, E>$是n阶m条边的无向图，则下面各命题是等价的，都是树的定义：

(1) G是树（连通且无回路）

(2) G中任意两个顶点之间存在唯一的路径

(3) G中无回路, 且$m = n - 1$

(4) G是连通的, 且$m = n - 1$

(5) G是连通的, 且G中任何边均为桥

(6) G中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到唯一一个含新边的回路

主观题 1分

设置

7阶无向树有3个叶结点和1个3度顶点，其余3个结点的度数均不是1和3。试画出满足要求的所有非同构的无向树。

作答

树的有关定义和性质

例3.1.2 7阶无向树有3个叶结点和1个3度顶点，其余3个结点的度数均不是1和3。试画出满足要求的所有非同构的无向树。

解：设T_i为满足要求的无向树，则边数$m_i = 6$。

不妨假设：结点v_1, v_2和v_3是叶结点，v_7是3度结点，v_4, v_5和v_6是待定结点。

于是$\Sigma_{j=1\ldots7}\, d(v_j) = 12 = 3 + 3 + d(v_4) + d(v_5) + d(v_6)$。

由于$1 \le d(v_j) \le 6$, 且$d(v_j) \ne 1$和$\mathrm{d}(\mathrm{v}_\mathrm{j}) \ne 3$可知：

$$d(v_j) = 2\ (j = 4, 5, 6)。$$

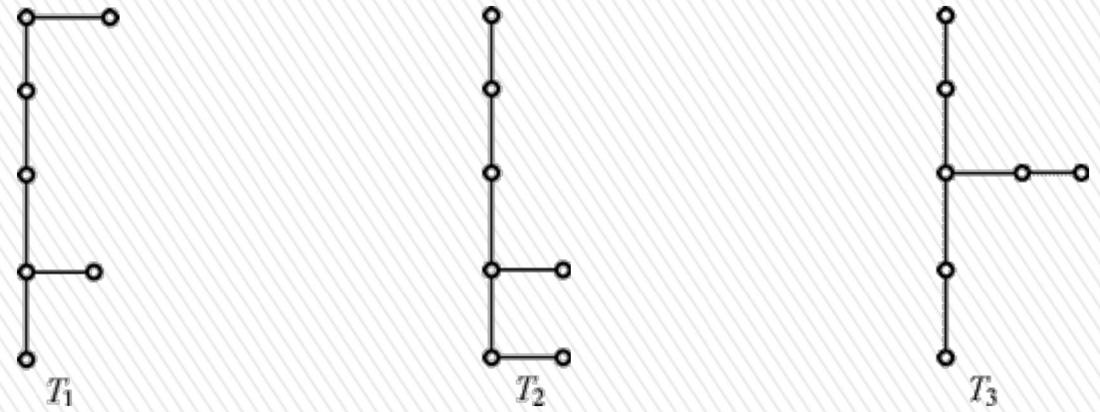
于是T_i的度数列为: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3。

树的有关定义和性质

由度数列可知：T_i中有一个3度顶点v_7，v_7的邻域$N(v_7)$中有3个顶点，这3个顶点的度数列只能是下列三种之一：

$$(1, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 2, 2)$$

此度数列只能产生这三棵非同构的7阶无向树，依次对应下图中的树T_1, T_2和T_3。



树的有关定义和性质

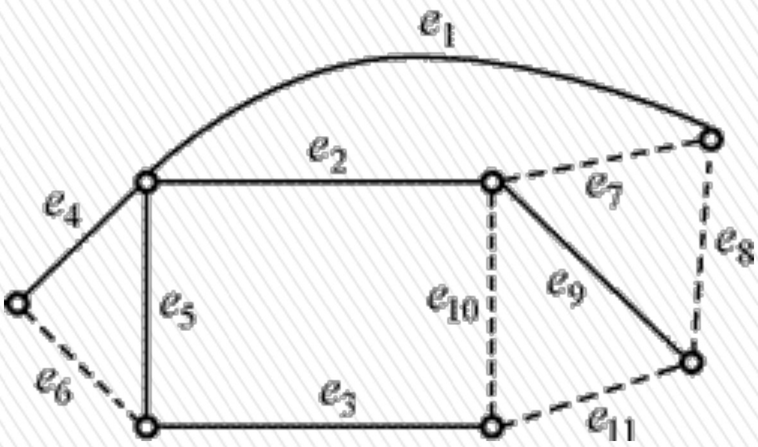
定义3.1.3 设树T是无向图G的子图，则称T为G的树；

若树T是G的支撑子图，则称T是G的支撑树(Spanning Tree);

设T是G的支撑树，$\forall e \in E(G)$，若$e \in E(T)$，则称e为T的树枝，否则，称e为T的弦；

称子图$G[E(G) - E(T)]$为G关于T的余树；

注意: T的余树没有什么特点。在右图中，实边图为该图的一棵生成树T，虚线部分是构成T的余树。它不连通，但含回路。



支撑树的生成

- 破圈法
  - 每次去掉回路中的一条边
  - 去掉边的总数为$m - n + 1$
  - 计算效率低
- 避圈法
  - 每次选取G中一条与已选取的边不构成回路的边
  - 增加的边的总数为$n - 1$
  - 一般用深度优先或广度优先搜索来实现

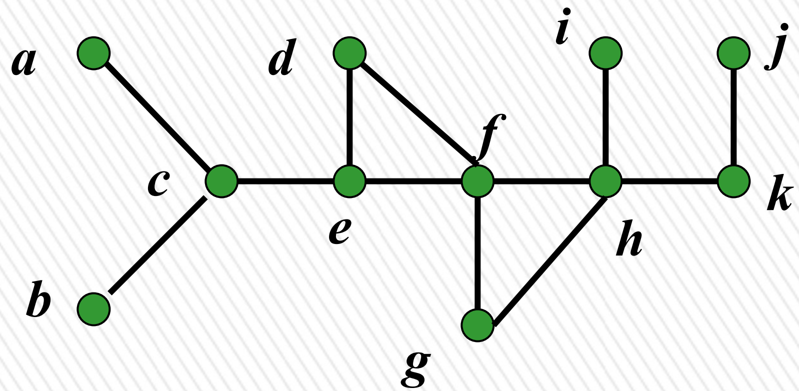
支撑树的生成

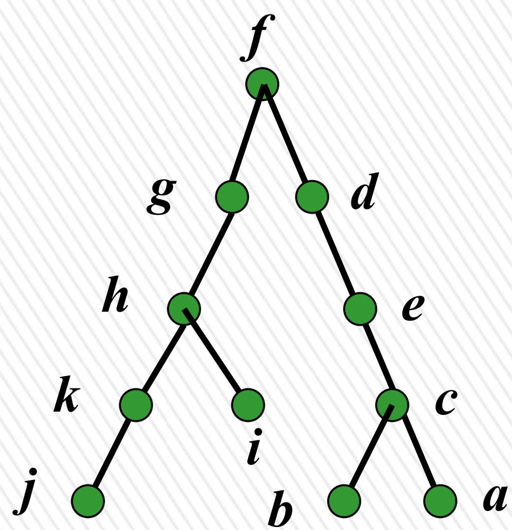
- 避圈法：深度优先搜索
  - 任选图中的一个结点作根
  - 通过相继地增加边来形成从这个顶点开始的通路，其中每条新边都和通路上的最后一个结点以及还不在通路上的结点关联
  - 若这条通路经过图中的所有结点，则为支撑树，否则还必须增加新边：从通路上倒退一个结点，若有可能，形成这个结点开始的尚未访问过的结点的通路；否则再倒退一个结点；
  - 重复这个过程，从访问过的最后一个结点开始，在通路上一次后退一个结点，只要有可能就形成新的通路，直到不能增加新边为止。

支撑树的生成

- 避圈法：深度优先搜索

例:





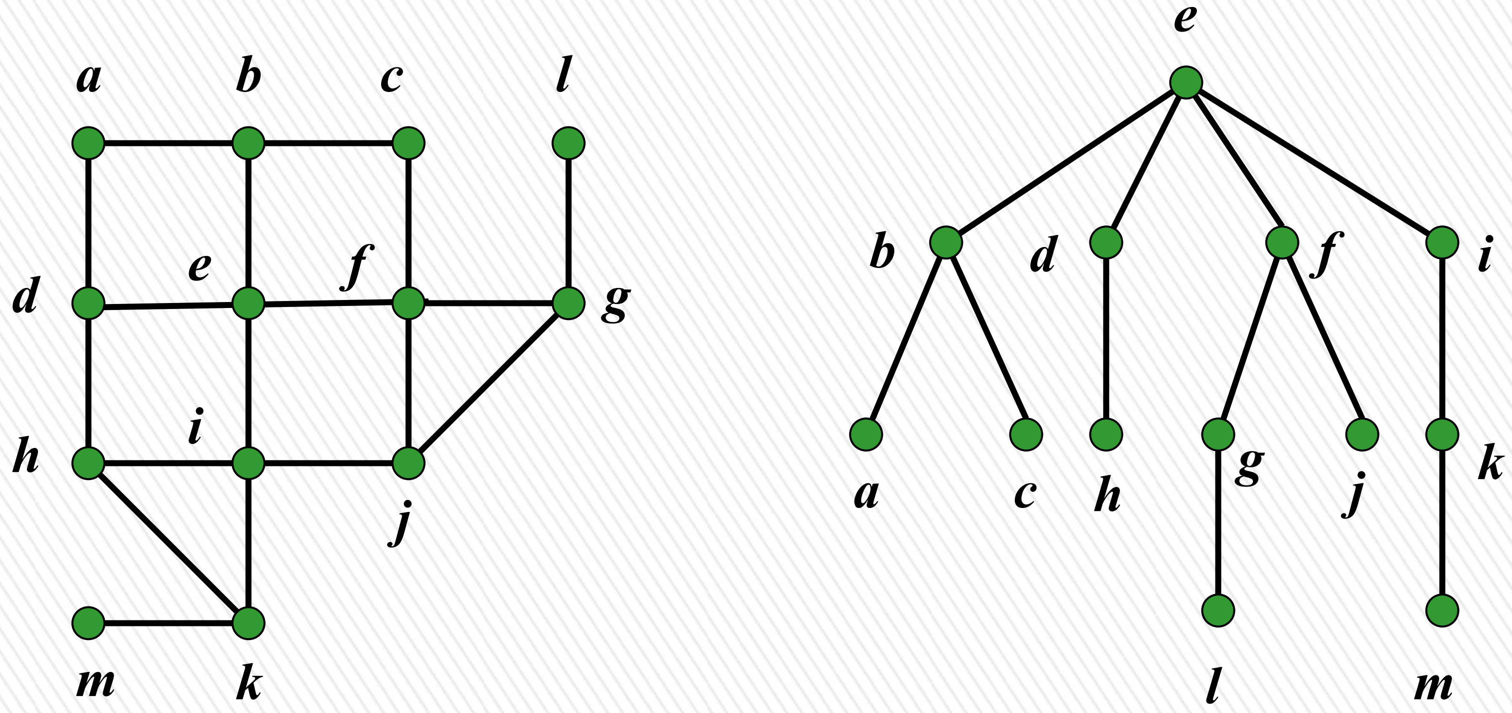
支撑树的生成

- 避圈法：广度优先搜索
  - 任选图中的一个结点作根；
  - 添加与这个结点相关联的所有边，形成支撑树中在一层的所有结点，任意对这些新结点排序；
  - 按顺序访问一层上的每个结点，只要不产生简单回路，就将与这个结点关联的每条边添加到树中，这样就产生了树在二层上的结点；
  - 重复这个过程，直到已经添加了图中所有的结点为止

支撑树的生成

- 避圈法：广度优先搜索

例：



支撑树的生成

- 一个图有多少棵不同的支撑树
  ？
- 生成所有支撑树的快速方法
  ？
- 生成边权和最小的支撑树的方法
  ？

基本关联矩阵及其性质

回顾：线性代数基本概念

线性相关

假设V是数域K上的向量空间，如果对V中的n个向量$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$，在数域$K$中存在不全为零的$n$个数$a_1$，$a_2$，…，$a_n$，使得

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

则称 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$线性相关；

反之，则称$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$线性无关。

回顾：线性代数基本概念

- 线性相关

性质　若一向量组线性无关，即使每一向量都在相同位置处增加一分量，仍然线性无关。

性质　若一向量组线性相关，即使每一向量都在相同位置处减去一分量，仍然线性相关。

回顾：线性代数基本概念

线性相关

定 理　若向量组$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_n$线性无关，而向量组$\vec{u},\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_n$线性相关，则$\vec{u}$必可由$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_n$线性表示，且表示方法唯一。

证明：存在不全为零的$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$，使

$$a_0\vec{u}+a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+\cdots+a_n\vec{v}_n=\vec{0}$$

由$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_n$线性无关可得$a_0 \neq 0$，

则
$$\vec{u}=-\frac{a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+\cdots+a_n\vec{v}_n}{a_0}$$

唯一性：若存在另一种$\vec{u}$的表示方法

$$\vec{u}=b_1\vec{v}_1+b_2\vec{v}_2+\cdots+b_n\vec{v}_n$$

则存在$c_i=\frac{a_i}{a_0}+b_i$，使$\sum_{i=1}^{n} c_i\vec{v}_i=\vec{0}$，矛盾！证毕。

回顾：线性代数基本概念

- 线性相关

定理 若一向量组$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$线性相关，则向该向量组补充若干向量后$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}, \cdots, \vec{v}_n$，依然线性相关。

证明：存在不全为零的$a_1, a_2, \dots, a_m$，使$\sum_{i=1}^{m} a_i \vec{v}_i = \vec{0}$

令$a_{m+1} = a_{m+2} = \dots = a_n = 0$，则$\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i = \vec{0}$

证毕。

定理 若一向量组$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$线性无关，则该向量组的任意子集组成的向量组，依然线性无关。

回顾：线性代数基本概念

- 秩

矩阵A的列秩是A的线性无关列向量组的极大向量数；
矩阵A的行秩是A的线性无关行向量组的极大向量数。

定理 矩阵的行秩等于其列秩。
定理 初等变换不影响矩阵的行秩和列秩。

将矩阵A的秩记作$r(A)$, $ran(A)$, $rank(A)$。

回顾：线性代数基本概念

- 行列式

行列式是数学中的一个函数，将一个$n \times n$的矩阵A映射到一个标量，记作 $det(A)$ 或 $|A|$。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为数域K上的n阶行列式，表示从$K^n \times K^n \times \ldots \times K^n$到$K$的一个映射。

回顾：线性代数基本概念

- 余子式

在行列式$D = |a_{ij}|_{n \times n}$中，去掉第$i$行与第$j$列全部元素后所得的$(n - 1)$阶行列式，称为元素$a_{ij}$的余子式，记做$M_{ij}$。

并把数

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

称为元素a_{ij}的代数余子式。

定理 设行列式$D = |a_{ij}|_{n \times n}$，则

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj} = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{mj} \cdot A_{mj}$$

图的代数表示

无环有向图的关联矩阵

设无环有向图$D = <V, E>$，$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

令

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点} \\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联} \\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则称$(m_{ij})_{n\times m}$为D的关联矩阵, 记为$M(D)$.

性质 (1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m$

(2) 第i行1的个数等于$d^+(v)$，第i行-1的个数等于$d^-(v)$

(3) e_j与e_k是重边 $\Leftrightarrow$ 第j列与第k列相同

有向图关联矩阵的性质

定理3.2.1 有向图$G=(V,E)$关联矩阵B的秩$ran\ B<n$

证

B中每列都只有1和-1两个非0元素

因此B的任意$n-1$行加到第n行后，

第n行全为0

即B的n个行向量线性相关。

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

基本关联矩阵的性质

引理 设B为有向连通图G的关联矩阵，C是G中的一个回路，则C中各边所对应B的各列相关

证明：设C为G的圈，C包含l个点. (不妨设$l < n$)
设这l条边对应关联矩阵B的l列，它们构成B的子阵$B(G_C)$
$\because$ C连通 $\therefore$ 由C构成的关联矩阵是l阶方阵，记为$B(C)$，
所以$B(C)$的l列线性相关，$ran(B(C)) = l - 1$

由于$B(G_C)$对应的各边只经过回路C的结点，而与其他结点无关
因此$B(G_C)$中其余结点所对应的行元素全为零
这样，$B(G_C)$的l列仍是线性相关

有向图关联矩阵的性质

定理3.2.3 有向连通图$G = (V, E)$关联矩阵B的秩

$$ran(B) = n - 1。$$

证明：由定理3.2.1 $ranB \le n - 1$，故只需证$ranB \ge n - 1$

设B中线性相关最少的行数为l，如果假设$l \le n$

设这l行分别与点相对应$v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_l}$, 则有

$$k_1 b(i_1) + k_2 b(i_2) + \ldots + k_l b(i_l) = 0 \quad \forall j = 1, 2, \ldots, l. \ k_j \neq 0 \ (*)$$

$\because$ B的每列只有2个非零元，

$\therefore$ 这l个行向量中, 其第$t(t=1, 2, \ldots, m)$个分量最多只有2个非零元, 且不可能只有1个非零元(可以全为零元)。否则, (*)式不成立

有向图关联矩阵的性质

证明（续）：对B各列做行、列交换，使前l行为$b(i_1), \ldots, b(i_l)$，并且每列都有2个非零元的换到前r列，其余$m-r$列全都为0。即

$$B \to \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} & \begin{array}{c} l \\ n-l \end{array} \end{array} = B'.$$

显然，$ran(B) = ran(B')$，且B'依然是G的一个关联矩阵

若$n-l>0$，则由B'可知，G至少分为2个连通分支。其中r条边只与l个点相关，而其余$m-r$条边只与另外$n-l$个点相关。与G连通矛盾

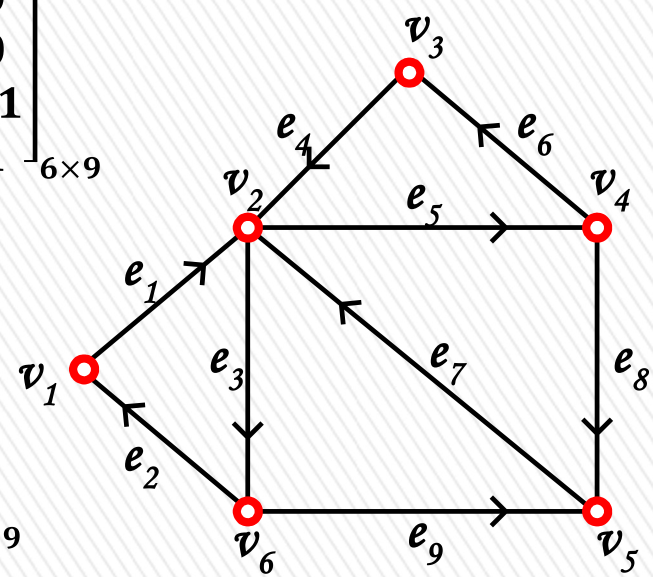
$\therefore n-l=0 \Rightarrow l=n \Rightarrow B$中最少需要$n$行才能线性相关，而任何$n-1$行线性无关

故$ran(B) = n-1$

基本关联矩阵

$$B(G)=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{6\times 9}$$

$$B_3=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{5\times 9}$$



基本关联矩阵： 在$G = <V, E>$的关联矩阵B中划去任意点v_k所对应的行，得到一个$(n - 1) \times m$矩阵B_k

基本关联矩阵的性质

定理3.2.4 有向连通图G的基本关联矩阵B_k的秩为$n-1$

推论3.2.1 n个点的树的基本关联矩阵的秩为$n-1$

思考？

连通图基本关联矩阵B_k的秩是$n-1$，B_k中一定存在$n-1$个线性无关的列(对连通图有$m \geq n-1$)

哪些列线性无关的、哪些列线性相关？

基本关联矩阵的性质

定理3.2.5 设B_k为有向连通图G的基本关联矩阵，C是G中的一个回路，则C中各边所对应B_k的各列相关

证明：设C为G的圈，C包含l个点

由引理可知，$B(G_C)$的l列线性相关

显然$B_k(G_C)$的各列也线性相关

（注：根据线性相关的性质：若一向量组线性相关，即使每一向量都在相同位置处减去一分量，仍然线性相关。）

推论3.2.2 设H是有向连通图G的子图。若H含有回路，则H的诸边对应的G的基本关联矩阵各列线性相关

基本关联矩阵的性质

定理3.2.6 令B_k是有向连通图G的基本关联矩阵，则B_k的任意$n-1$阶子阵行列式$\neq 0 \Leftrightarrow$ 其各列所对应的边构成G的一棵支撑树

证明（必要性）：

如果某个$n-1$阶子阵$B_k(G_T)$的行列式非零

则由推论3.2.2(如果H含有回路，则H的诸边对应的G的基本关联矩阵各列线性相关)，T中不含回路

因为$B_k(G_T)$是基本关联矩阵的$(n-1)$阶子阵，所以其包含n个结点，$n-1$条边

根据定理3.1.2的等价定义4(T有$n-1$条边且无回路)，T是G的一棵支撑树

基本关联矩阵的性质

定理3.2.6 令B_k是有向连通图G的基本关联矩阵，则B_k的任意$n-1$阶子阵行列式$\neq 0 \Leftrightarrow$其各列所对应的边构成G的一棵支撑树

证明续：（充分性）：

设T是G的一棵树，包含n个结点，$n-1$条边

子图T的基本关联矩阵$B_k(T)$是$n-1$阶方阵，

其秩$ran\ B_k(T) = n-1$，所以行列式非零

它恰好对应B_k的某个$n-1$阶子阵

即B_k对应的该$n-1$阶行列式非零

定理3.2.6说明图G关联矩阵中行列式非零的$n-1$阶子阵的数目与G不同的支撑树数目之间存在一种对应关系

支撑树的计数

支撑树的计数

定理3.3.1 (Binet—Cauchy定理)：$A=(a_{ij})_{m\times n}$， $B=(b_{ij})_{n\times m}$， $m\le n$，则

$$\det(AB)=\sum_i A_i B_i\,.$$

其中：A_i是从A中取不同的m列所成的行列式，

B_i是从B中取相应的m行构成的行列式

支撑树的计数

例： $A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ -2 & 4 & 3\end{bmatrix}_{2\times 3}$， $B=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 0 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}_{3\times 2}$

解： 由矩阵乘法：

$$AB=\begin{bmatrix}28 & 17\\ 2 & 16\end{bmatrix}，\ \det(AB)=414$$

由Binet—Cauchy定理

$$\det(AB)=\begin{vmatrix}4 & 3\\ -2 & 4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}$$

$$=414.$$

支撑树的计数

$$\det(AB) = \sum_i A_i B_i .$$

注意

- 显然可见，用比内-柯西定理计算乘积矩阵的行列式比通常方法复杂
- 但该定理揭示了乘积矩阵的行列式与各矩阵子行列式之间的关系
- 连通图G不同支撑树的计数恰好利用了这种关系

基本关联矩阵的性质

定理3.2.2 设B_0为$B(G)$的任意一k阶方阵，则$|B_0| = \pm 1$或0

证

对k归纳。$k = 1$时，成立

假设$k - 1$时成立，则当B_0为$B(G)$的任一k阶方阵时，找一列利用代数余子式展开

（1）有一列全为0

（2）至少有一列只包含了1或-1

（3）所有列都同时包含了1和-1

基本关联矩阵的性质

定理3.2.2 设B_0为$B(G)$的任意一k阶方阵，则$|B_0|$

$$= \pm 1\text{或}0$$

证

对k归纳。$k=1$时，成立

假设$k-1$时成立，则当B_0为$B(G)$的任一k阶方阵时

$\because B_0$为B的子阵

$\therefore B_0$每列最多只有2个非零元。若其中某一列全为0或B_0中每列恰好有2个非零元，则$|B_0|=0$

假设B_0中存在只有一个非零元的列，则按该列展开后用归纳法即可.

支撑树的计数

定理3.3.2 设B_k是有向连通图$G=<V,E>$的某一基本关联矩阵，则G的不同树的数目是$det(B_kB_k^T)$

证明：设$B_k=(b_{ij})_{(n-1)\times m}$

$\because G$连通 $\therefore m\geq n-1$

$$det(B_kB_k^T)=\sum_i |B_i||B_i^T|=\sum_i |B_i|^2$$

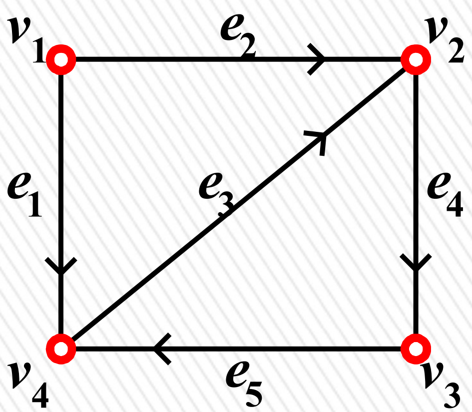
其中$|B_i|$为B_k的某一$n-1$阶子阵的行列式

若$|B_i|^2\neq 0\Rightarrow |B_i|\neq 0\Rightarrow$ 其所对应的边构成G的一棵树

$\because |B_i|=\pm 1$ $\therefore$ 如果B_i的各列所对应的边构成G的一棵树，则对$|B_kB_k^T|$的贡献为$1\Rightarrow$ 恰为G中不同树的数目

支撑树的计数

例：求右图支撑树的数目。



解： $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$

任取一个基本关联矩阵，如B_3

$$B_3=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$|B_3B_3^T|=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{vmatrix}=18-1-1-3-2-3=8$$

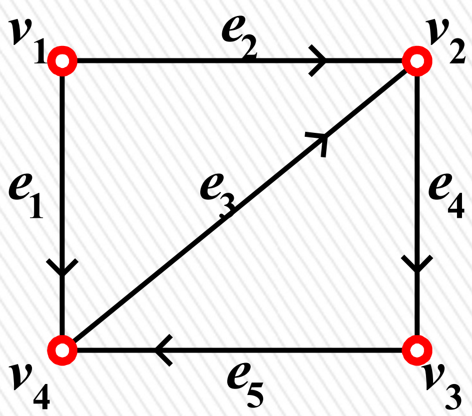
支撑树的计数

- 不含或必含特定边的树计数
  - 有向连通图
  - 若求不含e的支撑树数目
    - 令$G' = G - e$，则只需求G'的支撑树数目
  - 若求必须含e的支撑树数目
    - 计算G的树的数目，减去$G' = G - e$的树的数目
    - 可将e的两个端点收缩成一个点，则得到$n - 1$个结点的新图G'，G'的树与G的必含e的树一一对应

填空题 2分

设置

下图不含e_1的支撑树的数目是 [填空1]

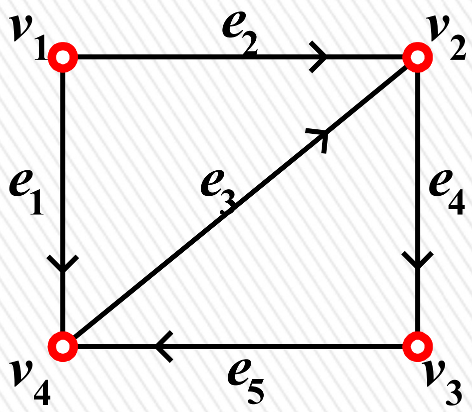


正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

支撑树的计数

例：求右图不含e_1的支撑树的数目。



解：$B(G') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

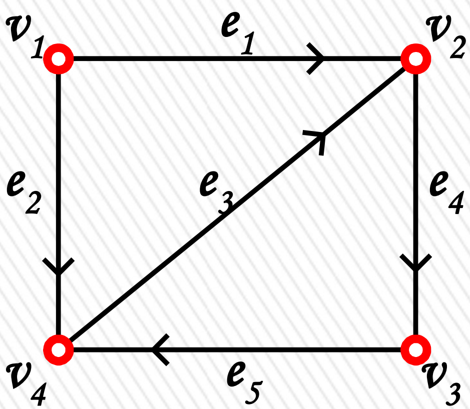
任取一个基本关联矩阵，如B_4

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|B_4 B_4^T| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 - 2 = 3$$

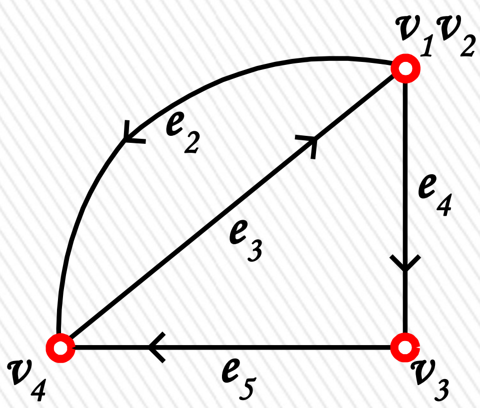
支撑树的计数

例：求右图含e_1的支撑树的数目。



解：$B(G') = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$B_{v_1v_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



$$|B_{v_1v_2}B_{v_1v_2}^T| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$

无向连通图的树计数

方法：将无向图G的各边加一方向，得有向图G'，G'的树与G的树一一对应。

例：求完全图K_n中不同支撑树的数目。

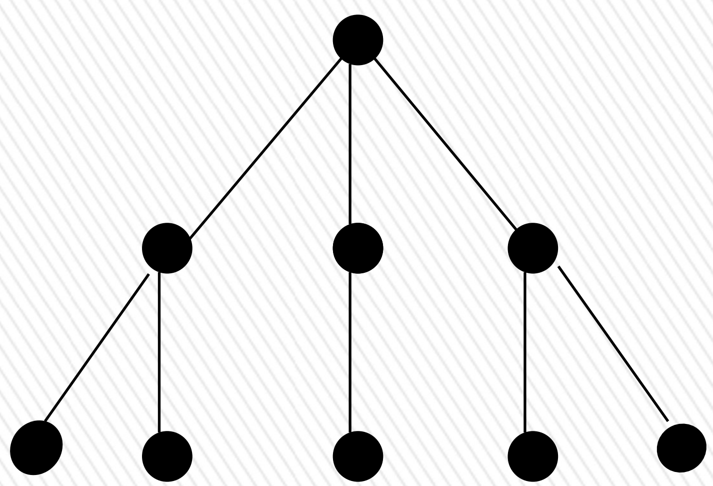
$$|B_k B_k^T| = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ & \cdots & \cdots & \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ & \cdots & \cdots & \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & n & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ & & \cdots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}$$

根树的定义

定义3.3.1 根树

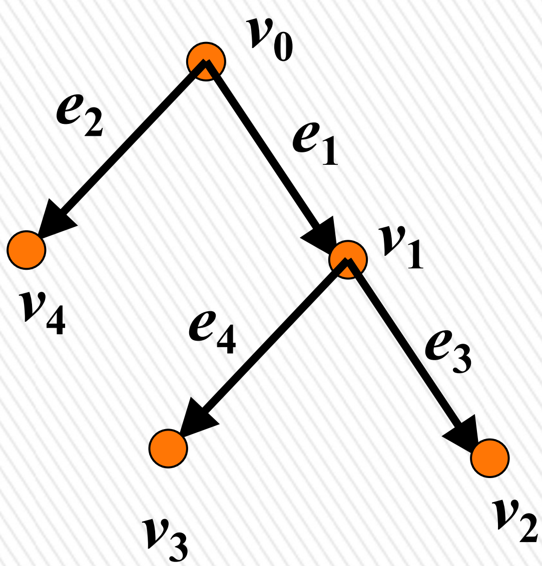
T是有向树，若T中存在某结点v_0的入度为0，其余结点入度为1，则称T是以v_0为根的外向树，或称根树，用$\vec{T}$表示



有向图根树的性质

问题：根树能否从树根沿着正向边走到所有叶子？

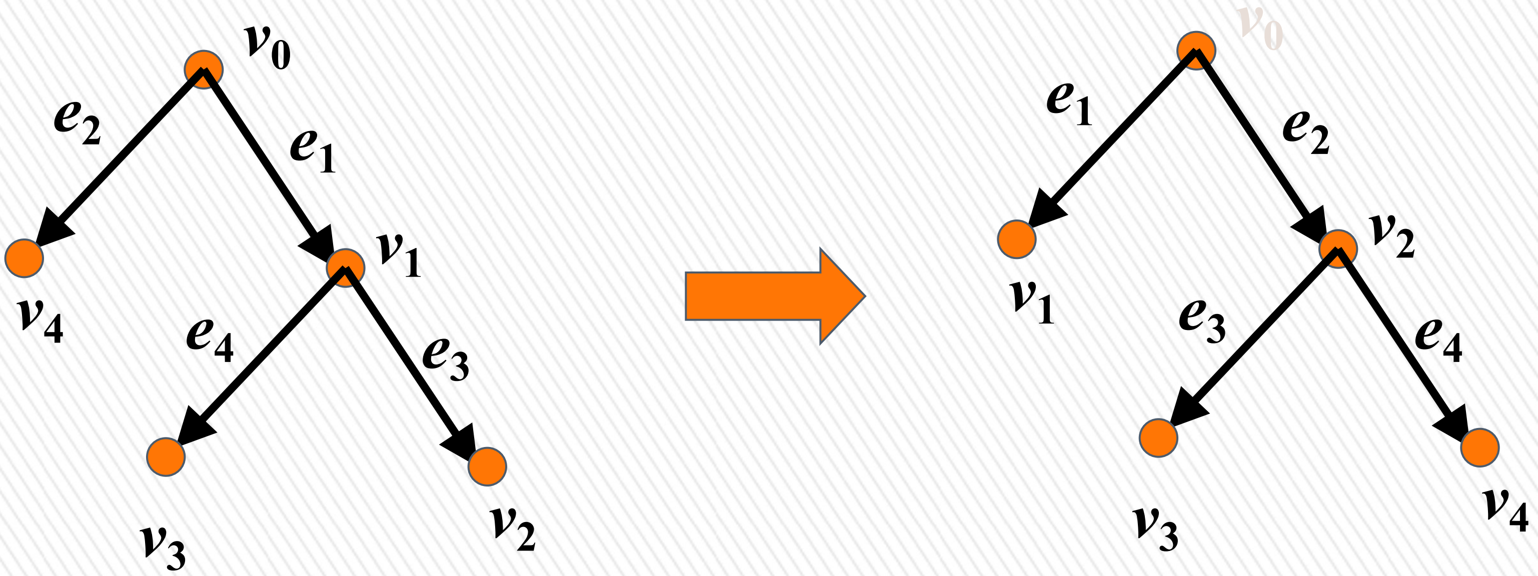
- 考虑拓扑路径
- 每走一步，去掉原有结点，找入度为0的结点



$$B_0=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

- 由于v_0的入度为0，其余结点入度为1
- 因此根结点的基本关联矩阵一定是每行每列只有1个-1元素

有向图根树的性质



$$B_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_0{}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

有向图根树的性质

根树的特征：

- 若对根树的节点和边序号重新编号
- 使得每条边$e_j = (v_i, v_j)$都满足v_i的编号小于v_j的编号
- 得到根节点基本关联矩阵B_0'为上三角矩阵，下三角为0，对角元均为-1
- 若把该矩阵的所有1均变为0，行列式不变

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{matrix} \\
\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

- 其他的树呢？

一定存在节点（如根节点）入度为0，修改后出现全0行，即行列式值变为0

有向图根树的性质

定理3.3.3：设$\overrightarrow{B_k}$表示有向连通图G的基本关联矩阵B_k中将全部1改为0之后的矩阵，则G中以v_k为根的根树数目是$\det(\overrightarrow{B_k}B_k^T)$

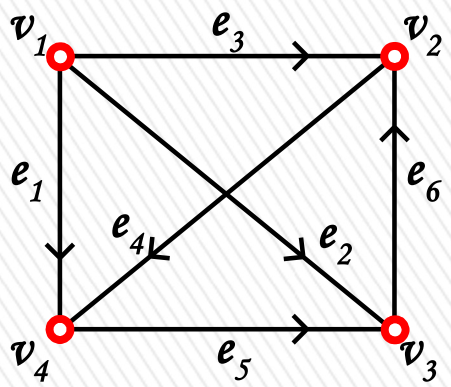
证明：

- 比内-柯西定理，$\det(\overrightarrow{B_k}B_k^T)=\sum_i|\overrightarrow{B_i}|\,|B_i^T|$
- 若$|B_i^T|\neq 0$，说明这$n-1$条边构成一棵树
- 此时如果$|\overrightarrow{B_i}|=|B_i^T|$，因此它们在$\det(\overrightarrow{B_k}B_k^T)$中的贡献度为1
- 由于遍历了所有$n-1$条边的组合，所以为v_k为根的根树数目是$\det(\overrightarrow{B_k}B_k^T)$

填空题 1分

设置

求下图中以v_1为根的根树数目 [填空1]

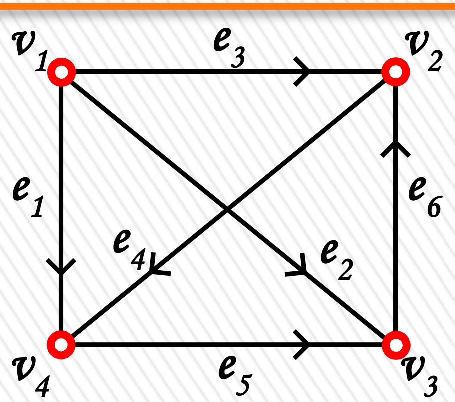


正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

有向图根树的性质

例：求以v_1为根的根树数目



解：$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\vec{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

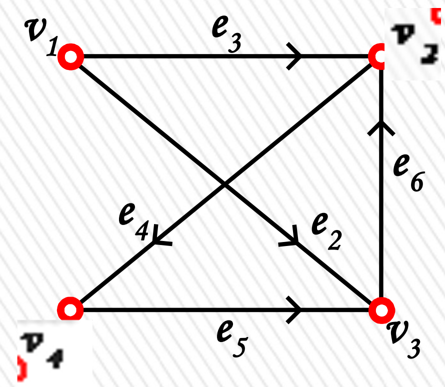
$$\vec{B}_1 B_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$= 8 - 1 = 7$

$\det(\overrightarrow{B_1} {B_1}^T) = 8 - 1 = 7$

有向图根树的计数

例： 求以v_1为根且不过e_1的根树的数目



解： $B=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&-1&1&0&-1\\-1&0&0&-1&1\\0&0&-1&1&0\end{bmatrix}$

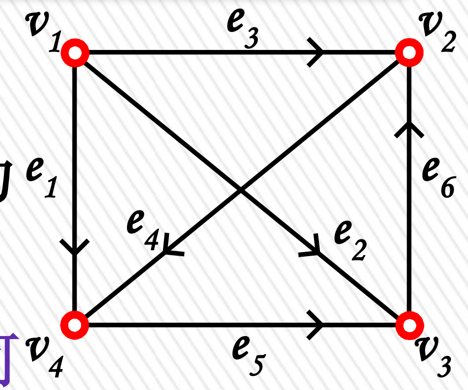
$$B_1=\begin{bmatrix}0&-1&1&0&-1\\-1&0&0&-1&1\\0&0&-1&1&0\end{bmatrix},\qquad \vec{B}_1=\begin{bmatrix}0&-1&0&0&-1\\-1&0&0&-1&0\\0&0&-1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\vec{B}_1B_1^T=\begin{bmatrix}0&-1&0&0&-1\\-1&0&0&-1&0\\0&0&-1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\1&0&-1\\0&-1&1\\-1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$=4-1=3$$

$$\mathbf{det}(\overrightarrow{\boldsymbol{B}_1}\boldsymbol{B}_1{}^{\boldsymbol{T}})=\mathbf{4-1=3}$$

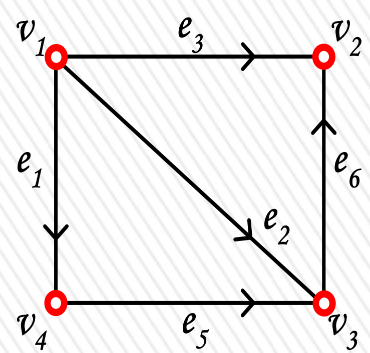
有向图根树的性质



例：求以v_1为根且过e_1的根树数目.

解一：求出以v_1为根的根树数目；求出以v_1为根且不过e_1的根树数目。相减即得，$8-4=4$

解二：必含边$e=(u,v)$边的进入边已定，任何其他(t,v)可直接删去，得到G'



令$G' = G$ - e_4

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \vec{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{B}_1 B_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4$$

$$\det(\overrightarrow{B_1} {B_1}^T) = 4$$

支撑树的生成

- 一个图有多少棵不同的支撑树
- 生成所有支撑树的快速方法

  ？
- 生成边权和最小的支撑树的方法

  ？

本堂课小结

- 树的基本概念和性质
- 基本关联矩阵和性质
- 支撑树的计数
- 根树的性质及计数