离散数学(1) 习题课

集合论

2023.12.31

集合的概念

用集合的形式，有序对$<x, y>$定义为

$$< x, y > = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

- 已知集合$\{\{\{a\}\}, < b^2, 1 >\} = \{\{\{a^2\}\}, < a, b >\}, a, b \in \mathbb{R}$,则$a, b$分别为？
- 若$\{\{a\}\} =< b^2, 1 >= \{\{a^2\}\} =< a, b >$则解得$a = 1, b = 1$
- 若$\{\{a\}\} = \{\{a^2\}\}, < b^2, 1 >=< a, b >, \{\{a^2\}\} \neq < a, b >$则无解
- 若$\{\{a\}\} =< a, b >, < b^2, 1 >= \{\{a^2\}\}, \{\{a^2\}\} \neq < a, b >$则解得$a =- 1, b = - 1$
- 综上，$a = 1, b = 1$或者$a =- 1, b =- 1$

集合运算的性质和证明

- 设A, B, C为任意三个集合，证明$(A-B)-C \subseteq A-(B-C)$。在什么条件下$(A-B)-C = A-(B-C)$?
- 注意到

$$(A-B)-C = (A \cap -B) \cap -C$$
$$A-(B-C) = A \cap -(B \cap -C) = A \cap (-B \cup C) = (A \cap -B) \cup (A \cap C)$$

- 因此可以给出证明

$$(A-B)-C = (A \cap -B) \cap -C \subseteq A \cap -B \subseteq (A \cap -B) \cup (A \cap C) = A-(B-C)$$

- 如果两集合相等则有$(A \cap -B) \cap -C = A \cap -B$，$A \cap -B = (A \cap -B) \cup (A \cap C)$。由这两个条件可得

$$A \cap C \subseteq A \cap -B \subseteq -C$$

- 因此两集合相等的一个必要条件是$A \cap C = \emptyset$，不难验证这也是两集合相等的充分条件。因此$A \cap C = \emptyset$时$(A-B)-C = A-(B-C)$。

容斥原理

- 确定以下方程的自然数解个数

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 0 \le x_1 \le 3, 0 \le x_2 \le 4, 0 \le x_3 \le 5 \end{cases}$$

- 提示：方程$x_1 + x_2 + x_3 = n$的自然数解个数为$\binom{n+2}{2}$
- 令A_i为不满足第i个限制的自然数解集，所求即为$|-A_1 \cap - A_2 \cap - A_3| = N - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$
- 以$|A_1|$为例，这等价于求$x_1' + x_2 + x_3 = 6$的自然数解个数，其中$x_1' = x_1 + 4$
- 因此原方程的自然数解个数为$\binom{12}{2} - \binom{8}{2} - \binom{7}{2} - \binom{6}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} + 0 - 0 = 6$

集合论公理系统

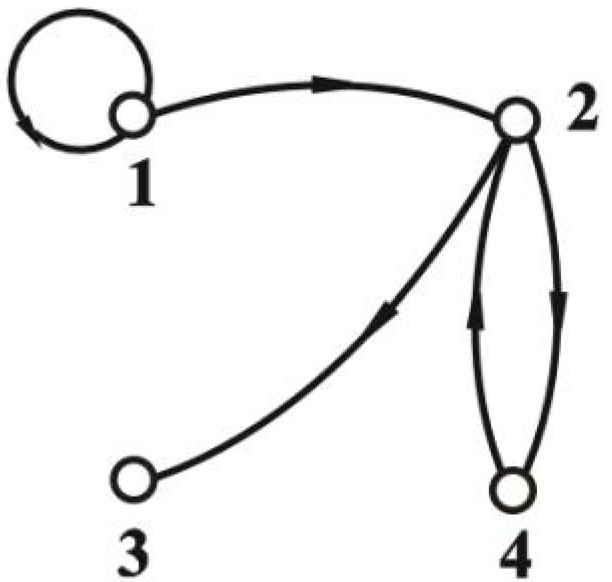
- 主要目的：判定集合的存在性，由已知集合构造出所有合法的集合
  - 子集公理模式⇒不存在集合A，使任一集合都是A的元素
  - 正则公理⇒不存在集合x使$x \in x$；不存在无限递降的集合序列

- 用后继定义自然数
  - 集合$0 = \emptyset$是一个自然数。若集合n是一个自然数，则集合$n + 1 = n^+ = n \cup \{n\}$也是一个自然数
  - $\cup\, 2021 = ?$，$\cap\, 2021 = ?$，$\cap \{1921,2021\} = ?$
  - $\cup\, 2021 = 2020$，$\cap\, 2021 = 0$，$\cap\ \{1921,2021\} = 1921$

二元关系

- 二元关系有三种表示法：集合表示法，关系矩阵和关系图
- 对$A = \{1,2,3,4\}$上的二元关系$R = \{<1,1>, <1,2>, <2,3>, <2,4>, <4,2>\}$，给出其关系矩阵与关系图

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



关系的运算

- 设R_1, R_2, R_3是二元关系，证明$(R_1 \circ (R_2 \cap R_3))^{-1} \subseteq (R_1 \circ R_2)^{-1} \cap (R_1 \circ R_3)^{-1}$

$$
\begin{aligned}
&(R_1 \circ (R_2 \cap R_3))^{-1} \\
&= (R_2 \cap R_3)^{-1} \circ R_1^{-1} \\
&= (R_2^{-1} \cap R_3^{-1}) \circ R_1^{-1} \\
&\subseteq R_2^{-1} \circ R_1^{-1} \cap R_3^{-1} \circ R_1^{-1} \\
&= (R_1 \circ R_2)^{-1} \cap (R_1 \circ R_3)^{-1}
\end{aligned}
$$

- **定理：设R，S，Q是任意的关系**

①$(RoS)oQ = Ro(SoQ)$

②$(RoS)^{-1} = S^{-1}oR^{-1}$

- 定理:
  - $Ro(S\cup T)=RoS\cup RoT$
  - $Ro(S\cap T)\subseteq RoS\cap RoT$
  - $(S\cup T)oX=SoX\cup ToX$
  - $(S\cap T)oX\subseteq SoX\cap ToX$

关系的性质与闭包

- 自反关系，反自反关系，对称关系，反对称关系，传递关系
- 若集合A满足$|A| = n$，则A上共有几种反对称的且不是自反的关系？
- 考虑关系矩阵的特点，其n个对角元r_{ii}不全为1，$\frac{n(n-1)}{2}$组对应的非对角元r_{ij}和r_{ji}不同时为1，因此共有$(2^n-1)3^{\frac{n(n-1)}{2}}$种这样的关系。

- 自反闭包$r(R)$，对称闭包$s(R)$，传递闭包$t(R)$
- 下列集合同时满足自反性、对称性与传递性的有？$tsr(R), trs(R), str(R), srt(R), rst(R), rts(R)$
- $tsr(R), trs(R), rts(R)$

定理：设X是一集合，R是X上的二元关系，则有：

- 若R是自反的，则$s(R), t(R)$也自反
- 若R是对称的，则$r(R), t(R)$也对称
- 若R是可传递的，则$r(R)$也可传递

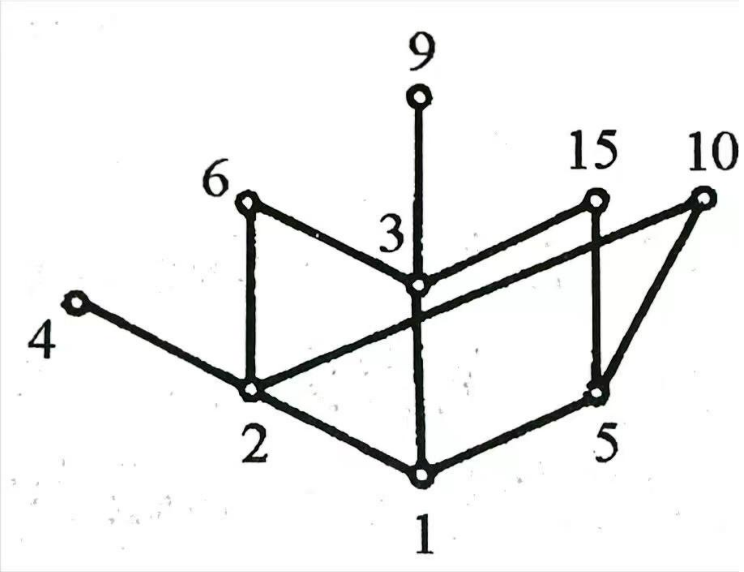
等价关系和相容关系

- 等价关系：自反性，对称性，传递性；
- 非空集合A上的二元关系R满足：(1)R是自反的(2)$\forall x,y,z\in A$，若$xRy \wedge xRz$则yRz，证明R是等价关系
- $\forall x,y\in A$，若xRy，则由(1)有xRx，因此$xRy \wedge xRx$。由(2)可知yRx，R有对称性。
- $\forall x,y,z\in A$，若$xRy \wedge yRz$则由对称性有$yRx \wedge yRz$。由(2)可知xRz，R有传递性。

- 相容关系：自反性，对称性；

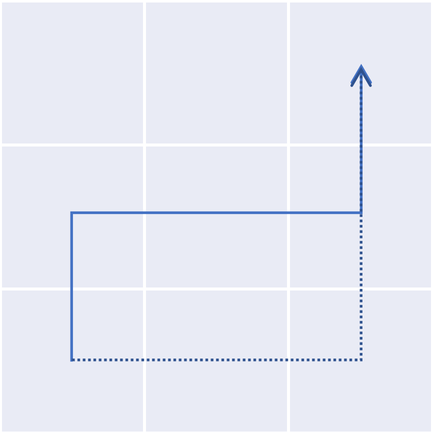
偏序关系

- 偏序关系：自反性，反对称性，传递性
- 画出$A = \{1,2,3,4,5,6,9,10,15\}$上整除关系对应的哈斯图
- 对于$B = \{3,5,15\}$分别求其最小元，最大元，极小元，极大元，上界，上确界，下界，下确界
  - 最小元：不存在
  - 最大元：15
  - 极小元：3,5
  - 极大元：15
  - 上界：15
  - 上确界：15
  - 下界：1
  - 下确界：1



Dilworth定理

- 在一个$n \times n$的网格上从左下方走到右上方，只能向上走或者向右走，重复走k次后每个网格都走到过至少一次。此时k最小为？
- 考虑网格以及可达关系构成的偏序集，要求最小链划分
- 由Dilworth定理，这等价于求最长反链长度
- 反链中的元素不在网格的同一行，因此反链最长为n
- 网格左上至右下的对角线构成长度为n的反链
- 因此最长反链长度为n，k最小为n



定理：令（A,≤）是一个有限偏序集，并令m是反链的最大的大小。则A可以被划分成m个但不能再少的链。

函数的合成和逆

- 设$f: A \to A$，若存在正整数n使$f^n = I_A$，证明f是双射的
- I_A是双射的，若$n = 1$则$f = I_A$是双射
- 否则$f^n = f \circ f^{n-1} = I_A$因此$f$是满射的
- 且$f^n = f^{n-1} \circ f = I_A$因此$f$是单射的
- 综上，f是双射的

定理11.2.3（函数的合成的性质2）

- 设 $g: A \to B$，$f: B \to C$，

  (1) 若$f \circ g$是满射的，则 f是满射的，

  (2) 若$f \circ g$是单射的，则 g是单射的，

  (3) 若$f \circ g$是双射的，则 f是满射的，g是单射的。

- $f: N \to N$满足$f(n) = n + 1, n$为偶数；$f(n) = n - 1, n$为奇数，求f^{-1}
- $f^{-1}(n) = n + 1, n$为偶数；$f^{-1}(n) = n - 1, n$为奇数。

集合的等势

- 在$(A \to A)$上定义等价关系$R = \{< f, g > | f, g \in (A \to A) \land ran(f) = ran(g)\}$，证明商集$(A \to A)/R \approx P(A) - \{\emptyset\}$
- 构造函数$f: ((A \to A)/R) \to (P(A) - \{\emptyset\})$满足$f(x) = ran(x)$
- 由商集的定义可知f是函数且为单射
- 对任意$S \in P(A) - \{\emptyset\}$，存在$a \in S$，定义$g: A \to A$满足$g(x) = x, x \in S; g(x) = a, x \notin S$，则$f([g]_R) = S$，因而$f$是满射
- 综上，f是双射，两集合等势

集合的基数

- $|N| = |N \times N| = |Z| = |Q| = \aleph_0$
- $|R| = |R^+| = |(0,1)| = |[0,1]| = \aleph_1$

- ${\aleph_0}^{\aleph_1} = ?$
- $\aleph_2 = 2^{\aleph_1} \leq {\aleph_0}^{\aleph_1} \leq {\aleph_1}^{\aleph_1} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_1} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2$