Jordan标准形 (III)

6.1 循环子空间直和分解

定理: 对任意幂零线性变换$\sigma : V \to V$,空间V必定可分解为σ的不变线性子空间的直和$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$, 使得线性变换$\sigma$在每个子空间$W_i$上诱导的线性变换$\sigma|_{W_i}$是循环线性变换.

这个直和称为循环子空间直和分解.

6.1 循环子空间直和分解

证明: 设$\sigma : V \to V$为任一幂零线性变换,其幂零次数为m. 令

$$V_i := \mathrm{Im}\sigma^i, \qquad i = 0, 1, \cdots, m.$$

由于$\sigma^{i+1} = \sigma^i\sigma$, 故

$$\{0\} = V_m \subset V_{m-1} \subset \cdots \subset V_{i+1} \subset V_i \subset \cdots V_1 \subset V_0 = V.$$

这里规定$\sigma^0 = Id$.

由以上构造知$\sigma(V_i) = V_{i+1}$ $(0 \le i < m)$, 特别$V_{m-1} \subset \ker\sigma$.

6.1 循环子空间直和分解

记$p_{m-1}=\dim V_{m-1}$. 对V_{m-1}的任一组基

$$\mathbf{e}_1^{(m-1)},\cdots,\mathbf{e}_{p_{m-1}}^{(m-1)}, \qquad (1)$$

有 $\sigma\mathbf{e}_1^{(m-1)}=\cdots=\sigma\mathbf{e}_{p_{m-1}}^{(m-1)}=0.$

因为$\sigma(V_{m-2})=V_{m-1}$,所以在V_{m-2}中有向量 $\mathbf{e}_1^{(m-2)},\cdots,\mathbf{e}_{p_{m-1}}^{(m-2)}$, 使得

$$\sigma\mathbf{e}_1^{(m-2)}=\mathbf{e}_1^{(m-1)},\cdots,\sigma\mathbf{e}_{p_{m-1}}^{(m-2)}=\mathbf{e}_{p_{m-1}}^{(m-1)}. \qquad (2)$$

6.1 循环子空间直和分解

断言：在V_{m-2}中, $\mathbf{e}_1^{(m-1)}, \cdots, \mathbf{e}_{p_{m-1}}^{(m-1)}, \mathbf{e}_1^{(m-2)}, \cdots, \mathbf{e}_{p_{m-1}}^{(m-2)} \quad (3)$
线性无关.

事实上, 设

$$k_1\mathbf{e}_1^{(m-1)} + \cdots + k_{p_{m-1}}\mathbf{e}_{p_{m-1}}^{(m-1)} + l_1\mathbf{e}_1^{(m-2)} + \cdots + l_{p_{m-1}}\mathbf{e}_{p_{m-1}}^{(m-2)} = 0. \ (4)$$

把σ作用在上式两边, 得 $l_1\mathbf{e}_1^{(m-1)} + \cdots + l_{p_{m-1}}\mathbf{e}_{p_{m-1}}^{(m-1)} = 0$,
由于$\mathbf{e}_1^{(m-1)}, \cdots, \mathbf{e}_{p_{m-1}}^{(m-1)}$为$V_{m-1}$的一组基，得$l_1 = \cdots = l_{p_{m-1}} = 0$.
代回(4),得到$k_1 = \cdots = k_{p_{m-1}} = 0$. 断言得证.

于是可将向量组(3)扩充为V_{m-2}的一组基:

$$\mathbf{e}_1^{(m-1)}, \cdots, \mathbf{e}_{p_{m-1}}^{(m-1)}, \mathbf{e}_1^{(m-2)}, \cdots, \mathbf{e}_{p_{m-1}}^{(m-2)}, \mathbf{e}_{p_{m-1}+1}^{(m-2)}, \cdots, \mathbf{e}_{p_{m-2}}^{(m-2)}. \tag{5}$$

其中$p_{m-2} = \dim V_{m-2} - \dim V_{m-1}$.

断言: 补充的向量$\mathbf{e}_{p_{m-1}+1}^{(m-2)}, \cdots, \mathbf{e}_{p_{m-2}}^{(m-2)}$可取自$\ker\sigma$.

6.1 循环子空间直和分解

这是因为$V_{m-1}=\sigma(V_{m-2})$,可设

$$\sigma(e^{(m-2)}_{p_{m-1}+i})=x_{i1}e^{(m-1)}_1+\cdots x_{ip_{m-1}}e^{(m-1)}_{p_{m-1}}.$$

令 $\tilde{e}^{(m-2)}_{p_{m-1}+i}=e^{(m-2)}_{p_{m-1}+i}-x_{i1}e^{(m-2)}_1-\cdots-x_{ip_{m-1}}e^{(m-2)}_{p_{m-1}}.$

于是$\sigma(\tilde{e}^{(m-2)}_{p_{m-1}+i})=0$.下面仍记之为$e^{(m-2)}_{p_{m-1}+i}$.

因为$V_{m-2}=\sigma(V_{m-3})$,在V_{m-3}中有向量

$$\mathbf{e}^{(m-3)}_1,\cdots,\mathbf{e}^{(m-3)}_{p_{m-2}}, \tag{6}$$

使得 $\sigma(\mathbf{e}^{(m-3)}_i)=\mathbf{e}^{(m-2)}_i\ (i=1,\cdots,p_{m-2})$.

运用同样的方法, 可证向量组(5)和(6)构成的向量组线性无关.

于是可以扩充得到V_{m-3}的基:

$$
\begin{array}{llllllll}
e_1^{(m-1)}, & \cdots, & e_{p_{m-1}}^{(m-1)}, & & & & & \\
e_1^{(m-2)}, & \cdots, & e_{p_{m-1}}^{(m-2)}, & \cdots, & e_{p_{m-2}}^{(m-2)}, & & & \\
e_1^{(m-3)}, & \cdots, & e_{p_{m-1}}^{(m-2)}, & \cdots, & e_{p_{m-2}}^{(m-3)}, & \cdots, & e_{p_{m-3}}^{(m-3)}. &
\end{array}
$$

同理可以证明补充的向量$\mathbf{e}_{p_{m-2}+1}^{(m-3)},\cdots,\mathbf{e}_{p_{m-3}}^{(m-3)}$可以取自$\ker\sigma$,

即 $\sigma\mathbf{e}_{p_{m-2}+1}^{(m-3)}=\cdots=\sigma\mathbf{e}_{p_{m-3}}^{(m-3)}=0.$

一步一步构造, 得到$V_0 = V$的一组基:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
0 = V_m & & & & & & & & & \\
\cap & & & & & & & & & \\
V_{m-1} & e_1^{(m-1)} & \cdots & e_{p_{m-1}}^{(m-1)}, & & & & & & \\
\cap & \uparrow & & \uparrow & & & & & & \\
V_{m-2} & e_1^{(m-2)}, & \cdots, & e_{p_{m-1}}^{(m-2)}, & \cdots, & e_{p_{m-2}}^{(m-2)}, & & & & \\
\cap & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
V_{m-3} & e_1^{(m-3)}, & \cdots, & e_{p_{m-1}}^{(m-3)}, & \cdots, & e_{p_{m-2}}^{(m-3)}, & \cdots, & e_{p_{m-3}}^{(m-3)}, & & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\cap & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
V = V_0 & e_1^{(0)}, & \cdots, & e_{p_{m-1}}^{(0)}, & \cdots, & e_{p_{m-2}}^{(0)}, & \cdots, & e_{p_{m-3}}^{(0)}, & \cdots & e_{p_0}^{(0)}. \\
 & W_1 & & W_{p_{m-1}} & & W_{p_{m-2}} & & W_{p_{m-3}} & & W_{p_0}
\end{array}
$$

6.1 循环子空间直和分解

在σ的作用下, 每一列向量构成σ的一个不变子空间，σ限制在这些 子空间上是循环线性变换. 每一列中最低的一个向量可作为这个循环线性变换的向量$\mathbf{e}$. V是这些不变子空间的直和, 故定理得证.

6.1 循环子空间直和分解

注：由证明得到

$$
\begin{aligned}
&d_m = p_{m-1}\text{个}m\text{阶Jordan块},\\
&d_{m-1} = p_{m-2} - p_{m-1}\text{个}(m-1)\text{阶Jordan块},\\
&d_{m-2} = p_{m-3} - p_{m-2}\text{个}(m-2)\text{阶Jordan块},\\
&\cdots,\\
&d_2 = p_1 - p_2\text{个}2\text{阶Jordan块},\\
&d_1 = p_0 - p_1\text{个}1\text{阶Jordan块},
\end{aligned}
$$

6.1 循环子空间直和分解

其中

$$
\begin{aligned}
d_m &= \dim V_{m-1}, \\
d_{m-1} &= \dim V_{m-2} - 2\dim V_{m-1}, \\
d_{m-2} &= \dim V_{m-3} - 2\dim V_{m-2} + \dim V_{m-1}, \\
&\cdots \\
d_1 &= \dim V_0 - 2\dim V_1 + \dim V_2.
\end{aligned}
$$

6.2 Jordan标准形

对任何线性变换$\sigma : V \to V$, 若它的全部互异特征值是$\mu_1, \cdots, \mu_s \in \mathbb{C}$, 则空间$V$是该线性变换的根子空间的直和:

$$\boxed{V = G_{\mu_1} \oplus \cdots \oplus G_{\mu_s}.}$$

固定$i = 1, 2, \cdots, s$,由于$(\sigma - \mu_i I)|_{G_{\mu_i}}$为幂零变换. 应用关于幂零线性变换的讨论,每个根子空间$G_{\mu_i} = \bigoplus_{j=1}^{t_i} C_{ij}$,其中$C_{v_{ij}}$是$\sigma - \mu_i I$-不变的循环子空间,
则存在一组基使得$(\sigma - \mu_i I)|_{C_{ij}}$的矩阵
表示是特征值为零的Jordan块$(*)$. 于是, $\sigma|_{C_{ij}}$在这组基下的矩阵表示
是一个特征值为μ_i的Jordan块.

6.2 Jordan标准形

综上所述，我们又证明了

定理： 对任意线性变换$\sigma : V \to V$, 若它的特征值都在$\mathbb{F}$中，则存在空间V的一组基，在该基下σ的矩阵为Jordan矩阵，形如

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

6.2 Jordan标准形

换言之,

定理: 设$\mathbf{F}$为代数闭域, V为$\mathbf{F}$上的有限维线性空间,
$\sigma : V \to V$为线性变换.则存在σ的Jordan基$v_1, \cdots, v_n$,
使得σ在旧基下的矩阵A经基底变换,可化为Jordan矩阵J,
即存在非退化矩阵P, 使得$P^{-1}AP = J$.

6.3 Jordan标准形的结构

性质1. 关于特征值μ_i的Jordan块个数等于μ_i的几何重数.

性质2. 关于特征值μ_i的Jordan块的阶数之和等于μ_i的代数重数.

性质3. 关于特征值μ_i的k阶Jordan块的个数等于

$$rank(A-\mu_i I_n)^{k-1}-2rank(A-\mu_i I_n)^k+rank(A-\mu_i I_n)^{k+1}.$$