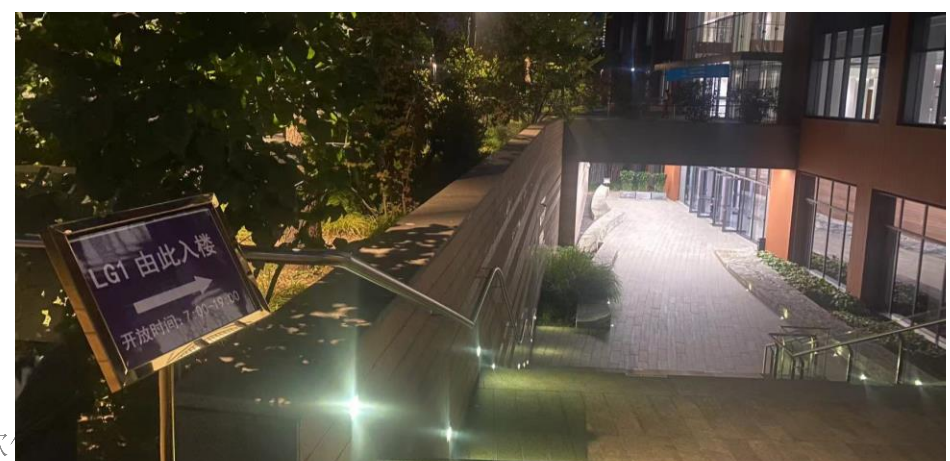
第二章：命题逻辑的等值和推理演算

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

上课地点变更

由于下周去澳大利亚参加国际会议，下周五（10月27日）的课程将由马昱春老师代上，上课地点为建华楼（经管新楼） LG1-21

推荐路线：沿学堂路往南，穿过清华路后在道路东侧（左前方）就能看到红色的经管新楼。走楼梯到地下即到达LG1。进门后沿指示牌即可找到LG1-21教室（走过电梯后左拐）



加分项

- 出题→网络学堂创新作业→采纳→总成绩+(<=3分)

- 出题→网络学堂创新作业→采纳→总成绩
- 程序设计小题目(Deadline:)
- Deadline: 12.26

+(<=3分)

- 建议：加分项根据自己的特长做一个就可以

程序设计小题目

- 命题公式和真值表
- 自动证明小课题
  - 归结推理的实现
  - 王浩算法的实现
- 单独拉群，感兴趣的同学扫码入群
- 12月27之前提交报告和代码

Group: 2023秋-离散数学 (1)-编程作业答疑群

Valid until 10/26 and will update upon joining group

详细题目说明请见网络学堂布置的编程作业

作业问题：代入规则

- 一个重言式，对其中所有相同的命题变项都用一合式公式代换，其结果仍为一重言式。
  - 公式中被代换的只能是命题变项（原子命题），不能是复合命题
  - 对公式中某命题变项施以代入，必须对该公式中出现的所有同一命题变项施以相同的代换

(2) 左端 $= (P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow(\neg\neg((P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg P)))$ (双重否定律)

$= (P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow(\neg((\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P)))$ (摩根律)

$= (P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow(\neg(P\leftrightarrow Q))$ (双条件等值式)

又 右端 $= P\leftrightarrow\neg P$ 按代入规则 $\dfrac{P}{P\leftrightarrow Q}$

右端 $= (P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$ = 左端

代入规则需要对重言式来做，显然这不是一个重言式 -2

$(P\leftrightarrow Q) = (P\to Q)\wedge(Q\to P)$ 等价等值式

$((P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)) = \neg((Q\vee\neg P)\wedge(P\vee\neg Q))$ (摩根律)

$= \neg((Q\to P)\wedge(P\to Q))$ (蕴含等值式)

$= \neg((P\to Q)\wedge(Q\to P))$ (交换律)

故左式 $= A\leftrightarrow\neg A$ (代入定理 $\dfrac{(P\to Q)\wedge(Q\to P)}{A}$)

$= F$ (矛盾律)

代入定理只对重言式使用，这里应该是置换规则 -1

这里给出的两个例子都不是代入规则的正确用法

课后疑问：范式相关

- 1. $\neg P_1 \vee P_2$是否是合取范式？
  - 这个可以看做是只有一个A_i项的合取范式

2.6.5 合取范式

合取范式是形如

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$$

的公式，其中$A_i (i=1,\ldots,n)$为析取式。

2.3 命题公式与真值表的关系

例1：从取1的行来列写

$$A = (\neg P_1 \wedge \neg P_2) \vee (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_2)$$

$$B = (\neg P_1 \wedge \neg P_2) \vee (\neg P_1 \wedge P_2)$$

$$\begin{matrix}1\\1\\0\\1\end{matrix} = \begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix} \vee \begin{matrix}0\\1\\0\\0\end{matrix} \vee \begin{matrix}0\\0\\0\\1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1\\1\\0\\0\end{matrix} = \begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix} \vee \begin{matrix}0\\1\\0\\0\end{matrix}$$

P_1	P_2	$P_1 \wedge P_2$	$P_1 \wedge \neg P_2$	$\neg P_1 \wedge P_2$	$\neg P_1 \wedge \neg P_2$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

P_1	P_2	A	B
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	0

例2：从取0的行来列写

$$A = (\neg P_1 \vee P_2)$$

$$B = (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2)$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \wedge \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

P_1	P_2	$P_1 \vee P_2$	$P_1 \vee \neg P_2$	$\neg P_1 \vee P_2$	$\neg P_1 \vee \neg P_2$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0

P_1	P_2	A	B
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	0

课后疑问：范式相关

- 合取范式：用合取连接若干个析取式
  - 若干个：可以是零个、一个、多个
  - 主合取范式：用合取连接若干个极大项析取式
- 析取范式：用析取连接若干个合取式
  - 主析取范式：用析取连接若干个极小项合取式

（1） $P \vee \neg P$

合取范式： $P \vee \neg P$? √ 空公式? √

析取范式： $P \vee \neg P$? √ 空公式?

主合取范式： $P \vee \neg P$? 空公式? √

主析取范式： $P \vee \neg P$ √ ? 空公式?

2.6.4 析取范式

析取范式是形如

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$$

的公式，其中 $A_i\ (i = 1,\ldots,n)$ 为合取式。

2.6.5 合取范式

合取范式是形如

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$$

的公式，其中 $A_i\ (i = 1,\ldots,n)$ 为析取式。

课后疑问：范式相关

- 补充问题1：怎么能把所有的析取范式和合取范式列全啊
  - 析取范式和合取范式是可以无穷多个的，只需要满足定义即可
  - 合取范式：用合取连接若干个析取式
  - 因此$P \vee Q$可以看做是只有一个析取式的合取范式
  - 析取范式：用析取连接若干个合取式
  - 因此$P \wedge Q$可以看做是只有一个合取式的析取范式

课后疑问：范式相关

- 补充问题2：空公式有真假吗
  - 空的主合取范式是永真的，这个说明原公式没有取0的解释
  - 空的主析取范式是永假的，这个说明原公式没有取1的解释

2.6 空公式 （补充）

求$P\lor\neg P$的主析取和主合取范式

主析取范式： $P\lor\neg P$

主合取范式： 空公式

结论： 永真式的主合取范式为空公式

矛盾式的主析取范式为空公式

p	q	$p\land(p\to q)\to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

其他问题

- 作业和考试时都要在证明步骤后写所依据的规则吗？
  - 尽量写上，方便自己理解巩固和助教批阅
- 作业标准答案何时发放？
  - 作业DDL截止之后在雨课堂能查看
- 还有很多同学问到课上定理怎么记住以及在具体的题目中如何运用
  - 之前的经验是多分析理解课件和书上例题的解题思路，可以通过做一些习题进行练习
- 对偶式那一块讲的好快：不做考试要求。
- 可以在上课前早一点的时间发预习版ppt吗？之前都是周三发的
- 请问能否在课外拓展一些编程实例（不占用课堂时间）
- 上节课讲的知识点太多没跟上，希望下节课复习，尤其是推理规则部分

主要内容

2.1 等值定理

2.2 等值公式

2.3 命题公式与真值表的关系

2.4 联接词的完备集

2.5 对偶式

2.6 范式

2.7 推理形式

2.8 基本的推理公式

2.9 推理演算

2.10 归结推理法

两个重要的定理引出两种推论方法

定理2.8.1

$A \Rightarrow B$成立的充分必要条件是**$A \to B$为重言式（直接推导）**。

定理2.8.2

$A \Rightarrow B$成立的充分必要条件是**$A \land \neg B$为矛盾式（反证法）**。

2.8 基本的推理公式

证明 $A \Rightarrow B$ 的几种方法:

1. 证 $A \rightarrow B$ 是重言式
2. 证 $A \wedge \neg B$ 为矛盾式
3. 真值表法
4. 证 $\neg B \Rightarrow \neg A$ 即反证法
5. 解释法
6. ……

16个公式？

- $P \wedge Q \Rightarrow P$　　合取化简式
- $P \Rightarrow P \vee Q$　　析取附加式（引入式）
- $P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$　　*假言推理，分离规则
- $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$　　*三段论

无处不在的推理


推理真是全方位地出现在
我们的工作和生活中。
侦查案件时
鸡兔同笼
数学证明中
下棋时
沙瓤大西瓜！
先尝后买！
不甜不要钱！
买东西时

2.9 推理演算

- 推理：由一些前提出发，推出某个结论的思维过程
- 推理演算的出发点：
  直观地看出由前提A到结论B 的推演过程，且便于在谓词逻辑中使用。
- 方法

  （1）引入几条推理规则

  （2）利用基本推理公式

  从前提A_1，A_2，…，A_n 出发，配合使用推理规则和基本推理公式，逐步推演出结论B。

主要的推理规则

（1）前提引入规则；推理过程中可随时引入前提

（2）结论引入规则；中间结论可作为后续推理的前提

（3）代入规则；仅限于重言式中的命题变项

（4）置换规则；利用等值公式对部分公式进行置换

（5）分离规则；由A及$A \to B$成立，可将B分离出来

（6）条件证明规则。$A_1 \land A_2 \Rightarrow B$与$A_1 \Rightarrow A_2 \to B$等价（附加前提引入）

$$P \to (Q \to R) = (P \land Q) \to R$$

条件证明规则。$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$与$A_1 \Rightarrow A_2 \to B$等价

例1 证明P→R是P→Q，Q→R的逻辑推论。

证明:

1.	P→Q	前提引入
2.	P	附加前提引入（条件证明规则）
3.	Q	1、2分离
4.	Q→R	前提引入
5.	R	3、4分离

注：此题可直接使用推
以简化证明步骤。

(1) 前提引入规则；推理过程中可随时引入前提

(2) 结论引入规则；中间结论可作为后续推理的前提

(3) 代入规则；仅限于重言式中的命题变项

(4) 置换规则；利用等值公式对部分公式进行置换

(5) 分离规则；由A及$A \to B$成立，可将B分离出来

(6) 条件证明规则。$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$与$A_1 \Rightarrow A_2 \to B$等价

（附加前提引入）

教材 例3: 证明 $(P\lor Q)\land(P\to R)\land(Q\to S) \Rightarrow S\lor R$

证明：

1. $P\lor Q$ 前提引入
2. $\neg P\to Q$ 1 置换
3. $Q\to S$ 前提引入
4. $\neg P\to S$ 2、3 三段论
5. $\neg S\to P$ 4置换
6. $P\to R$ 前提引入
7. $\neg S\to R$ 5、6三段论
8. $S\lor R$ 7置换

由该例可见，将$P\lor Q$置换成$\neg P\to Q$更便于推理

推理演算举例：

$$(\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow\neg(R\vee S))\wedge((Q\rightarrow P)\vee\neg R)\wedge R \Rightarrow (P\leftrightarrow Q)$$

1.	$(Q\rightarrow P)\vee\neg R$	**前提引入**
2.	$R\rightarrow(Q\rightarrow P)$	1**置换**
3.	R	**前提引入**
4.	$Q\rightarrow P$	2、3**分离**
5.	$\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow \neg(R\vee S)$	**前提引入**
6.	$(R\vee S)\rightarrow(P\rightarrow Q)$	5**置换**
7.	$R\vee S$	3 + **基本公式4**　　$P \Rightarrow P\vee Q$
8.	$P\rightarrow Q$	6、7**分离**
9.	$P \leftrightarrow Q$	4、8

(注：教材中的证明用了15个步骤，这里用一种更为简洁的方法)

推理演算举例：条件证明规则

例题6: $P \rightarrow (Q \rightarrow S), \neg R \vee P, Q \Rightarrow R \rightarrow S$

证明	(1) R	附加前提引入
	(2) $\neg R \vee P = R \rightarrow P$	前提引入
	(3) P	(1)(2)分离规则
	(4) $P \rightarrow (Q \rightarrow S)$	前提引入
	(5) $Q \rightarrow S$	(3)(4)分离规则
	(6) Q	前提引入
	(7) S	(5)(6)分离规则
	(8) $R \rightarrow S$	条件证明规则

例3：请根据下面事实，找出凶手：

1. 清洁工或者秘书谋害了经理。
2. 如果清洁工谋害了经理，则谋害不会发生在午夜前。
3. 如果秘书的证词是正确的，则谋害发生在午夜前。
4. 如果秘书的证词不正确，则午夜时屋里灯光未灭。
5. 如果清洁工富裕，则他不会谋害经理。
6. 经理有钱且清洁工不富裕。
7. 午夜时屋里灯灭了。

令 A:清洁工谋害了经理。 B:秘书谋害了经理。

C:谋害发生在午夜前。 D:秘书的证词是正确的。

E:午夜时屋里灯光灭了。 H:清洁工富裕。

G:经理有钱.

1. 清洁工或者秘书谋害了经理。
2. 如果清洁工谋害了经理，则谋害不会发生在午夜前。
3. 如果秘书的证词是正确的，则谋害发生在午夜前。
4. 如果秘书的证词不正确，则午夜时屋里灯光未灭。
5. 如果清洁工富裕，则他不会谋害经理。
6. 经理有钱且清洁工不富裕。
7. 午夜时屋里灯灭了。

命题符号为：

$A \vee B,\ A \to \neg C,\ D \to C,\ \neg D \to \neg E,\ H \to \neg A,\ G \wedge \neg H,\ E$

$\Rightarrow ?$

$A \vee B, A \to \neg C, B \to C, D \to C\ \neg D \to \neg E, H \to \neg A, G \wedge \neg H, E \Rightarrow ?$

解:	(1) E	前提引入
	(2) $\neg D \to \neg E$	前提引入
	(3) D	(2) 逆否之后和(1) 分离
	(4) $D \to C$	前提引入
	(5) C	(3)(4)分离
	(6) $A \to \neg C$	前提引入
	(7) $\neg A$	(6) 逆否之后和(5) 分离
	(8) $A \vee B$ $(\neg A \to B)$	前提引入
	(9) B	(7)(8)分离

A:清洁工谋害了经理。 B:秘书谋害了经理。

C:谋害发生在午夜前。 D:秘书的证词是正确的。

E:午夜时屋里灯光灭了。H:清洁工富裕。

G:经理有钱.

结果是秘书谋害了经理

2.10 归结法

- 出发点：
  基于推理规则的方法，规则与公式较多，技巧较高。
  能否仅建立一条推理规则，便于机器证明与程序实现。

- 理论依据：定理2.8.2

  $A \Rightarrow B$ 成立当且仅当 $A \wedge \neg B$ 是矛盾式。

2.10 归结法

- 归结法步骤：

1. 从A∧¬B 出发（欲证A ⇒B，等价于证 A∧¬B 是矛盾式）

2. 建立子句集S，将A∧¬B 化成合取范式：

   $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$

   其中C_i 为析取式。由诸C_i 构成子句集

   $S = \{ C_1, C_2, \ldots, C_n \}$

3. 对S 中的子句作归结（消互补对），归结结果（归结式）仍放入S 中。重复此步。

4. 直至归结出矛盾式（□）。

2.10 归结法

- 归结法推理规则

设　　子句1　　$C1 = L \vee C1'$

子句2　　$C2 = \neg L \vee C2'$

(其中L和¬L为互补对)

$C1 = \neg L \rightarrow C1'$

$C2 = \neg C2' \rightarrow \neg L$　　因而

新子句　$R（C1，C2）= C1' \vee C2'$

2.10 归结法

- 归结法推理规则 (续)

$C1 \wedge C2 \Rightarrow R(C1, C2)$需证明。

$C1 = L \vee C1'$

$C2 = \neg L \vee C2'$

证明:

$C1 \wedge C2 \rightarrow C1' \vee C2'$为永真式 （定理2.8.1）

设在任一解释下，C1和C2均为真

若$L = T$，则$\neg L = F$，从而必有$C2' = T$ （$\because$C2为真）

若$L = F$，则$\neg L = T$，从而必有$C1' = T$ （因为C1为真）

综合上述均有$C1' \vee C2'$为真

因此，$C1 \wedge C2 \Rightarrow R(C1, C2)$

2.10 归结法 证明举例

例1：证明 $(P\rightarrow Q)\wedge P \Rightarrow Q$

证明：1. 先将$(P\rightarrow Q)\wedge P\wedge\neg Q$ 化成合取范式

$$(\neg P\vee Q)\wedge P\wedge\neg Q$$

2. 建立子句集 $S = \{\neg P\vee Q,\ P,\ \neg Q\}$

$$S = \{\neg P \vee Q,\ P,\ \neg Q\}$$

归结过程:

$R(C1, C2) = C1' \vee C2'$

(1) $\neg P \vee Q$

(2) P

(3) $\neg Q$

(4) Q (1) (2)归结

(5) $\square$ (3) (4)归结

归结出空子句□(矛盾式) 证明结束。

例2: 用归结法证明 $((P\to Q)\wedge(Q\to R)) \Rightarrow (P\to R)$

证明：

先将 $(P\to Q) \wedge (Q\to R) \wedge \neg(P\to R)$ 化成合取范式

$$(\neg P\vee Q) \wedge (\neg Q\vee R) \wedge P \wedge \neg R$$

建立子句集 $S = \{ \neg P\vee Q,\ \neg Q\vee R,\ P,\ \neg R \}$

$S = \{ \neg P \vee Q,\ \neg Q \vee R,\ P,\ \neg R \}$

归结过程:

$R(C1, C2) = C1' \vee C2'$

(1) $\neg P \vee Q$

(2) $\neg Q \vee R$

(3) P

(4) $\neg R$

(5) $\neg P \vee R$ (1) (2)归结

(6) R (3) (5)归结

(7) □ (4) (6)归结

归结出空子句□(矛盾式) 证明结束。

例3 $(P\rightarrow(Q\rightarrow R))\wedge(Q\rightarrow(R\rightarrow A))\Rightarrow P\rightarrow(Q\rightarrow A)$

证明：先将

$(P\rightarrow(Q\rightarrow R))\wedge(Q\rightarrow(R\rightarrow A))\wedge\neg(P\rightarrow(Q\rightarrow A))$化为合取范式。

$(P\rightarrow(Q\rightarrow R))\wedge(Q\rightarrow(R\rightarrow A))\wedge\neg(P\rightarrow(Q\rightarrow A))$

$=(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg Q\vee\neg R\vee A)\wedge P\wedge Q\wedge\neg A$。

建立子句集

$S=\{\neg P\vee\neg Q\vee R,\ \neg Q\vee\neg R\vee A,\ P,\ Q,\ \neg A\}$

S={¬P∨¬Q∨R, ¬Q∨¬R∨A，P，Q，¬A}

- 归结过程

（1） ¬P∨¬Q∨R

（2） ¬Q∨¬R∨A

（3）P

（4）Q

（5） ¬A

（6） ¬Q∨R　　　（1）（3）归结

（7）¬R∨A　　　（2）（4）归结

（8）R　　　（4）（6）归结

（9） ¬R　　　（5）（7）归结

（10） □　　　（8）（9）归结

2.10 归结法 证明举例

补充：推理规则应用题，构造下面推理的证明：

例1：如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A队将获胜。

或者A队未取胜，或者A队成为联赛第一名。

A队没有成为联赛第一名。小张守第一垒。

因此，小李没向B队投球。

如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A队将获胜。
或者A队未取胜，或者A队成为联赛第一名。
A队没有成为联赛第一名。小张守第一垒。
因此，小李没向B队投球。

解：先将简单命题符号化。

P：小张守第一垒；

Q：小李向B队投球；

R：A队取胜；

S：A队成为联赛第一名。

前提：$(P \wedge Q) \rightarrow R$，$\neg R \vee S$，$\neg S$，$P$

结论：$\neg Q$

前提：$(P \wedge Q) \to R$ ($\neg(P \wedge Q) \vee R$)，$\neg R \vee S$，$\neg S$，P

结论：$\neg Q$

证明：

(1) Q	前提引入
(2) $\neg R \vee S$	前提引入
(3) $\neg S$	前提引入
(4) $\neg R$	(2) (3)归结
(5) $\neg(P \wedge Q) \vee R$	前提引入
(6) $\neg (P \wedge Q)$	(4) (5)归结
(7) $\neg P \vee \neg Q$	(6)置换
(8) P	前提引入
(9) $\neg Q$	(7)(8)归结
(10) $Q \wedge \neg Q$	(1)(9)归结

第二章小结:主要内容

2.1 等值定理
2.2 等值公式
2.3 命题公式与真值表的关系
2.4 联接词的完备集
2.5 对偶式
2.6 范式
2.7 推理形式
2.8 基本的推理公式
2.9 推理演算
2.10 归结推理法

第二章小结与教学要求

1. 掌握和理解命题公式等值的概念，掌握命题公式等值的判别方法
   - 列真值表
   - 公式的等价变换
   - 主范式
2. 熟悉基本的等值公式，能在理解的基础上熟记并能在等值演算中灵活使用；
3. 理解命题公式与真值表的关系，能够由给定的真值表写出相应的命题公式；

第二章小结与教学要求

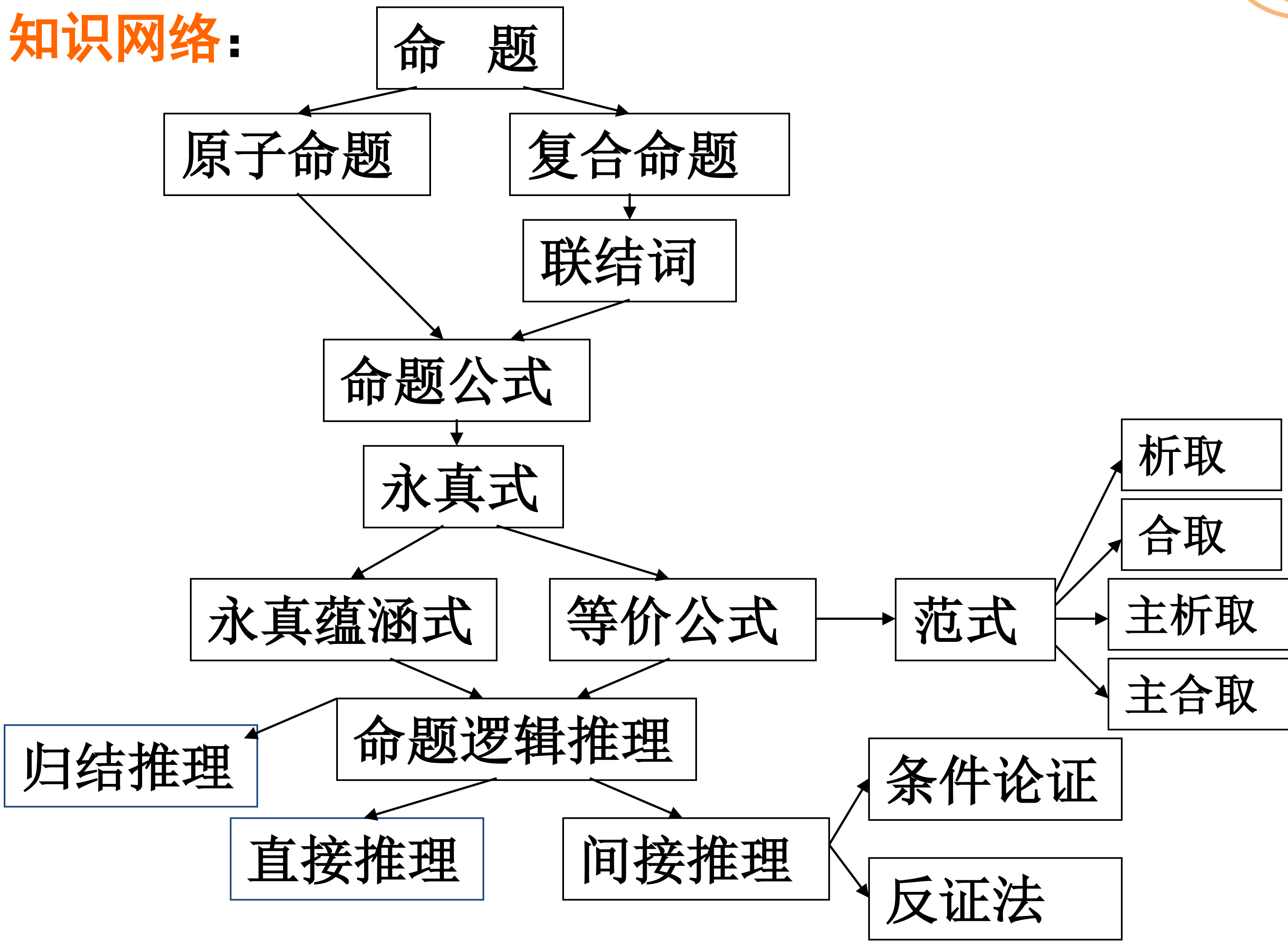
4. 了解联结词完备集的概念，掌握判别联结词完备集的方法；
5. 理解范式的概念和范式定理，能够将命题公式熟练地化成相应的主析取范式和主合取范式；
6. 理解推理形式的基本结构，掌握重言蕴涵的概念和主要结果；

第二章小结与教学要求

7. 熟悉基本的推理公式，掌握推理公式的不同证明方法；
   - $A \rightarrow B$ 是重言式、$A \wedge \neg B$ 为矛盾式、真值表法、$\neg B \Rightarrow \neg A$ 即反证法、解释法
8. 理解基本的推理规则，掌握使用推理规则进行推理演算的方法；
9. 理解归结推理规则，掌握用归结推理法证明的方法。

第一章和第二章　小结

知识网络：



第三章 命题逻辑的公理化

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

教材说……

- 前两章是对命题逻辑从语义出发做了较直观的、不严谨地、非形式化的解释性地讨论。
- 而建立了公理系统的命题逻辑，面貌就改观了，从理论上提高了一步，使对命题逻辑讨论有了坚实的基础。

公理系统提供了更好的方法收纳我们找到的宝贝

第三章主要内容

- 本章介绍**命题逻辑的公理化**，是命题逻辑理论的系统化和抽象化，主要内容概括如下：
- 介绍命题逻辑的公理系统的概念和基本结构，并以具有代表性的罗素公理系统为例，详细介绍一个命题逻辑公理系统的构成。
- 通过定理推演的实例，给出使用公理系统进行定理证明的过程和方法。
- 此外，对公理系统的完备性、可靠性和演绎定理做简要的叙述（自学）。

一切能证明的都要证明

德国 G. Frege (1848-1925)

"数学的本质就在于

一切能证明的都要证明。"

1879年建立了第一个谓词演算系统

发表《计算概念》一书

问题1：为什么要建立命题逻辑的公理系统

- 重言式——命题逻辑研究的重点。
- 重要的重言式是逻辑规律。
- 如何掌握这些逻辑规律，从整体上理解和掌握命题逻辑，而非停留在对部分公式所作直观解释性的讨论上。
- 需要掌握重言式所揭示的逻辑规律的全体，将它们作为一个整体来考虑。
- 需要系统、全面、严谨地研究等值式和推理式

3.1 公理系统(axiom system)的结构

问题2：
什么叫做公理系统？

公理系统的概念

- 从一些公理出发，根据演绎规则推导出一系列定理，这样形成的演绎体系叫做公理系统（**axiom system**）。
- 公理系统自成体系，是一个抽象符号系统。又称之为形式系统。
- 似曾相识？

公理系统的例子——Euclid几何学

- Euclid几何学就是一个典型的公理系统。
  - 公元前300年欧几里得的《几何原本》
  - 希尔伯特1899年发表的著作《几何基础》

- Euclid平面几何学的公理体系由结合、顺序、合同、平行、连续五条公设和五组公理构成。

公理和公设

- 公理是在任何数学学科里都适用的不需要证明的基本原理
- 公设则是几何学里的不需要证明的基本原理，就是现代几何学里的公理。

命题逻辑的公理系统

- 命题演算的重言式可组成一个严谨的公理系统，它是从一些作为初始命题的重言式（公理）出发，应用明确规定的推理规则，进而推导出一系列重言式（定理）的演绎体系。
- 命题逻辑的公理系统是一个抽象符号系统，不再涉及到真值。

问题3：

公理系统是怎样构成的？

主要包括哪几部分？

公理系统的结构

1. 初始符号

公理系统内允许出现的全体符号的集合。

2. 形成规则

公理系统内允许出现的合法符号序列的形成方法与规则

3. 公理

精选的最基本的重言式，作为推演其它所有重言式的依据。

4. 变形规则

公理系统所规定的推理规则。

5. 建立定理

所有的重言式和对它们的证明。

3.2 命题逻辑的公理系统

具有代表性的命题逻辑的公理系统

系统名称	年代	公理总条数	彼此独立的条数
Russell公理系统	1910	5	4
Frege公理系统	1879	6	3
Hilbert—Bernays	1934	15	
王浩算法	**1959**	1 (10条变形规则)	
自然演绎系统		0 (5条变形规则)	

罗素(Russell)公理系统

1. 初始符号

$A, B, C, \ldots$（大写英文字母, 表示命题）

$\neg, \vee$（表示联结词）

( )（圆括号）

$\vdash$（断言符），写在公式前，如 $\vdash A$表示A是所要肯定的，或说A是永真式。

由Frege最先引入。

罗素(Russell)公理系统

2. 形成规则

(1) 符号π是合式公式（π为命题，如$A, B, C\ldots$）

(2) 若A, B是合式公式，则$(A\vee B)$是合式公式

(3) 若A是合式公式，则$\neg A$是合式公式。

(4) 只有符合(1) (2) (3)的符号序列才是合式公式。

3. 定义

(1) $(A\rightarrow B)$ 定义为 $(\neg A\vee B)$。

(2) $(A\wedge B)$ 定义为$\neg(\neg A\vee\neg B)$。

(3) $(A\leftrightarrow B)$定义为$((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$ 。

罗素(Russell)公理系统

4. 公理

公理1 $\vdash((P\vee P)\rightarrow P)$（重言律） **等幂律**

公理2 $\vdash(P\rightarrow(P\vee Q))$

（v引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3 $\vdash((P\vee Q)\rightarrow(Q\vee P))$ (类似析取交换律)

公理4 $\vdash(\,(Q\rightarrow R)\rightarrow((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R))\,)$

基本推理公式15

如果y<z,那么x+y<x+z

$$\boxed{15.\ (Q\rightarrow R) \Rightarrow ((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R))}$$

罗素(Russell)公理系统

5. 变形(推理)规则

- **代入规则** 如果 $\vdash \boldsymbol{A}$，那么 $\vdash A\frac{\pi}{B}$ （将合式公式$\boldsymbol{A}$中出现的符号π处处都代以合式公式$\boldsymbol{B}$）。
- **分离规则** 如果 $\vdash \boldsymbol{A}$， $\vdash \boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{B}$，那么 $\vdash \boldsymbol{B}$。
- **置换规则** 定义的左右两边可互相替换。设公式$\boldsymbol{A}$，替换后为$\boldsymbol{B}$，则如果 $\vdash \boldsymbol{A}$，那么 $\vdash \boldsymbol{B}$。

6. 定理的推演

定理的证明必须依据公理或已证明的定理，同时证明的过程（符号的变换过程）必须依据变形规则。

公理1　$\vdash((P \vee P) \to P)$（重言律）　等幂律

公理2　$\vdash(P \to (P \vee Q))$

（∨引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3　$\vdash((P \vee Q) \to (Q \vee P))$（类似析取交换律）

公理4　$\vdash((Q \to R) \to ((P \vee Q) \to (P \vee R)))$

定理推演举例
定理3.2.1

定理3.2.1　$\vdash(Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

证明：

(1) $\vdash(Q \to R) \to (P \vee Q \to P \vee R)$　　公理4

(2) $\vdash(Q \to R) \to (\neg P \vee Q \to \neg P \vee R)$　　(1)代入$\frac{P}{\neg P}$

(3) $\vdash(Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$　　定义(1)

证毕

(1) $(A \to B)$ 定义为 $(\neg A \vee B)$。

(2) $(A \wedge B)$ 定义为$\neg(\neg A \vee \neg B)$。

(3) $(A \leftrightarrow B)$定义为$((A \to B) \wedge (B \to A))$。

三段论原则

一个简便的用三段论的方法

(1) $\vdash (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ 定理3.2.1

(2) $\vdash (Q \to R)$ 前提成立的话

(3) $\vdash (P \to Q) \to (P \to R)$ (1) (2)分离

(4) $\vdash (P \to Q)$ 前提成立的话

(5) $\vdash P \to R$

- **代入规则**

  如果 $\vdash A$，那么 $\vdash A\frac{\pi}{B}$（将合式公式A中出现的符号π处处都代以合式公式B）。

- **分离规则**

  如果 $\vdash A$，$\vdash A \to B$，那么 $\vdash B$。

- **置换规则**

  定义的左右两边可互相替换。设公式A，替换后为B，则如果 $\vdash A$，那么 $\vdash B$。

公理1 $\vdash((P \vee P) \to P)$（重言律） 等幂律

公理2 $\vdash(P \to (P \vee Q))$

（∨引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3 $\vdash((P \vee Q) \to (Q \vee P))$ (类似析取交换律)

公理4 $\vdash((Q \to R) \to ((P \vee Q) \to (P \vee R)))$

定理3. 2. 2

$\vdash(Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ 定理3.2.1

定理3.2.2 $\vdash P \to P$

证明：

(1) $\vdash P \to P \vee Q$ 公理2

(2) $\vdash P \to P \vee P$ (1)代入$\frac{Q}{P}$

(3) $\vdash P \vee P \to P$ 公理1

(4) $\vdash (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ 定理3.2.1

(5) $\vdash (P \vee P \to P) \to ((P \to P \vee P) \to (P \to P))$ (4)代入$\frac{Q}{P \vee P}$，$\frac{R}{P}$

(6) $\vdash (P \to P \vee P) \to (P \to P)$ (3), (5)分离

(7) $\vdash P \to P$ (2), (6)分离

证毕

定理3.2.3

定理3.2.3 $\vdash \neg P \vee P$

$\boxed{\text{定理3.2.2} \quad \vdash P \rightarrow P}$

证明：

(1) $\vdash P \rightarrow P$ 定理3.2.2

(2) $\vdash \neg P \vee P$ (1) 定义1

证毕

(1) $(A \rightarrow B)$ 定义为 $(\neg A \vee B)$。

(2) $(A \wedge B)$ 定义为 $\neg(\neg A \vee \neg B)$。

(3) $(A \leftrightarrow B)$ 定义为 $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ 。

公理1 $\vdash((P \vee P)\to P)$（重言律） 等幂律

公理2 $\vdash(P\to(P \vee Q))$

（v引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3 $\vdash((P \vee Q)\to(Q \vee P))$（类似析取交换律）

公理4 $\vdash(\,(Q\to R)\to((P \vee Q)\to(P \vee R))\,)$

定理3.2.4

定理3.2.3 $\vdash \neg P \vee P$

定理3.2.4 $\vdash P \vee \neg P$

证明：

(1) $\vdash(P \vee Q)\to(Q \vee P)$ 公理3

(2) $\vdash(\neg P \vee P)\to(P \vee \neg P)$ (1) 代入$\frac{P}{\neg P},\frac{Q}{P}$

(3) $\vdash \neg P \vee P$ 定理3.2.3

(4) $\vdash P \vee \neg P$ (2) (3) 分离

证毕

定理3. 2. 5

定理3.2.4 $\vdash P \vee \neg P$

定理3.2.5 $\vdash P \rightarrow \neg\neg P$

证明：

(1) $\vdash P \vee \neg P$	定理3.2.4
(2) $\vdash \neg P \vee \neg\neg P$	(1) 代入$\frac{P}{\neg P}$
(3) $\vdash P \rightarrow \neg\neg P$	(2) 定义1

证毕

(1) $(A \rightarrow B)$ 定义为 $(\neg A \vee B)$。

(2) $(A \wedge B)$ 定义为$\neg(\neg A \vee \neg B)$。

(3) $(A \leftrightarrow B)$定义为$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ 。

定理证明的思路

1. 找出合适的公理或已证的定理；
2. 选择适当的代入做符号变换；
3. 设法将$A \to B$ 的结论部分变成欲证的内容。

- **代入规则**

  如果 $\vdash A$，那么 $\vdash A\frac{\pi}{B}$（将合式公式A中出现的符号π处处都代以合式公式B）。

- **分离规则**

  如果 $\vdash A$，$\vdash A \to B$，那么 $\vdash B$。

- **置换规则**

  定义的左右两边可互相替换。设公式A，替换后为B，则如果 $\vdash A$，那么 $\vdash B$。

定理3.2.4 $\vdash P \vee \neg P$

证明：

(1) $\vdash (P \vee Q) \to (Q \vee P)$	公理3
(2) $\vdash (\neg P \vee P) \to (P \vee \neg P)$	(1) 代入$\frac{P}{\neg P}$, $\frac{Q}{P}$
(3) $\vdash \neg P \vee P$	定理3.2.3
(4) $\vdash P \vee \neg P$	(2) (3) 分离

主观题 10分

设置

证明 $\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$

列出证明思路，打算用哪几个公理

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

公理1 $\vdash((P\vee P)\to P)$（重言律） 等幂律

公理2 $\vdash(P\to(P\vee Q))$

（∨引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3 $\vdash((P\vee Q)\to(Q\vee P))$（类似析取交换律）

公理4 $\vdash((Q\to R)\to((P\vee Q)\to(P\vee R)))$

定理3.2.7

定理3. 2. 7 $\vdash(P\to Q)\to(\neg Q\to\neg P)$

证明： $\vdash(\neg P\vee Q)\to(\neg\neg Q\vee\neg P)$

(1) $\vdash P\to\neg\neg P$ 定理3. 2. 5

(2) $\vdash Q\to\neg\neg Q$ (1)代入$\frac{P}{Q}$

(3) $\vdash(Q\to R)\to(P\vee Q\to P\vee R)$ 公理4

(4) $\vdash(Q\to\neg\neg Q)\to(\neg P\vee Q\to\neg P\vee\neg\neg Q)$ (3)代入$\frac{R}{\neg\neg Q},\frac{P}{\neg P}$

(5) $\vdash\neg P\vee Q\to\neg P\vee\neg\neg Q$ (2)(4)分离

(5) $\vdash \neg P \vee Q \rightarrow \neg P \vee \neg\neg Q$

公理1 $\vdash ((P \vee P) \rightarrow P)$（重言律） 等幂律

公理2 $\vdash (P \rightarrow (P \vee Q))$

（∨引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3 $\vdash ((P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P))$ (类似析取交换律）

公理4 $\vdash ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R)))$

定理3.2.7

(6) $\vdash P \vee Q \rightarrow Q \vee P$ 公理3

(7) $\vdash \neg P \vee \neg\neg Q \rightarrow \neg\neg Q \vee \neg P$ (6)代入$\dfrac{P}{\neg P}, \dfrac{Q}{\neg\neg Q}$

(8) $\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$ 定理3.2.1

(9) $\vdash (\neg P \vee \neg\neg Q \rightarrow \neg\neg Q \vee \neg P) \rightarrow$

$((\neg P \vee Q \rightarrow \neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow (\neg P \vee Q \rightarrow \neg\neg Q \vee \neg P))$

(8)代入$\dfrac{P}{\neg P \vee Q}, \dfrac{Q}{\neg P \vee \neg\neg Q}, \dfrac{R}{\neg\neg Q \vee \neg P}$

(10) $\vdash (\neg P \vee Q \rightarrow \neg P \vee \neg\neg Q) \rightarrow (\neg P \vee Q \rightarrow \neg\neg Q \vee \neg P)$

(7)(9)分离

(11) $\vdash \neg P \vee Q \rightarrow \neg\neg Q \vee \neg P$ (5)(10)分离

(12) $\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ (11)定义1

$\vdash (\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg\neg Q \vee \neg P)$

补充定理3.2.8： $\vdash P\to(Q\to P\land Q)$

证：

（1） $\vdash P\lor\neg P$ 　　定理3.2.4

（2） $\vdash(\neg P\lor\neg Q)\lor\neg(\neg P\lor\neg Q)$ 　　(1)代入$\dfrac{P}{\neg P\lor\neg Q}$

（3） $\vdash(\neg P\lor\neg Q)\lor(P\land Q)$ 　　(2) 定义2

（4） $\vdash\neg P\lor\neg Q\lor(P\land Q)$ 　　括号省略规则

（5） $\vdash P\to(Q\to P\land Q)$ 　　(4) 定义1和结合律

证毕

(1) $(A\to B)$ 定义为 $(\neg A\lor B)$。

(2) $(A\land B)$ 定义为$\neg(\neg A\lor\neg B)$。

(3) $(A\leftrightarrow B)$定义为$((A\to B)\land(B\to A))$ 。

括号省略规则

- 最外面的一对括号可以省略
- 教材中规定的**联结词优先顺序**为：

  $( )$，$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，

- $(P \vee Q) \vee R$ 可以写作 $P \vee Q \vee R$

补充定理3.2.9：$\vdash P \vee \neg P \vee \neg Q$

- **证明：**

(1) $\vdash P \to P \vee Q$	公理2
(2) $\vdash P \vee \neg P \to P \vee \neg P \vee Q$	(1)代入 $\dfrac{P}{P \vee \neg P}$
(3) $\vdash P \vee \neg P$	定理3.2.4
(4) $\vdash P \vee \neg P \vee Q$	(2) (3)分离

公理1　$\vdash((P \vee P) \to P)$（重言律）　等幂律

公理2　$\vdash(P \to (P \vee Q))$

（∨引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3　$\vdash((P \vee Q) \to (Q \vee P))$（类似析取交换律）

公理4　$\vdash(\,(Q \to R) \to ((P \vee Q) \to (P \vee R))\,)$

公理系统

- 罗素公理系统
- $Q \vee Q \rightarrow Q$
- $Q \rightarrow Q \vee R$
- $Q \vee R \rightarrow R \vee Q$
- $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \vee R \rightarrow Q \vee R)$

- 弗雷格公理系统
- $Q \rightarrow (R \rightarrow Q)$
- $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
- $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$
- $(Q \rightarrow R) \rightarrow (\neg R \rightarrow \neg Q)$
- $\neg\neg Q \rightarrow Q$
- $Q \rightarrow \neg\neg Q$

- 卢卡西维茨公理系统
- $Q \rightarrow (R \rightarrow Q)$
- $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
- $(\neg Q \rightarrow \neg R) \rightarrow (R \rightarrow Q)$

3.3 公理系统的完备性和演绎定理（自学）

- 问题：

  是否所有的定理都可由公理系统推导出来？（完备性）

  非重言式或不成立的公式是否也可推导出来？（可靠性）

3.3.1 公理系统的完备性

- 公理系统的完备性是指，是否所有的重言式或所有成立的定理都可由所建立的公理系统推导出来。
- 形象地说，完备性是指所建立的系统所能推演出的定理**少不少**。

3.3.2 公理系统的可靠性

- 公理系统的可靠性是指，非重言式或者不成立的公式是否也可由所建立的公理系统推导出来。
- 形象地说，可靠性是指所建立的系统所能推演出的定理**多不多**。
- 不具备可靠性的系统是不能使用的。

命题逻辑的公理系统具有以下性质

- **语义完全性（公理系统的完备性）**
  任一重言式在命题逻辑的公理系统中都是可证的。即重言式是定理。
- **语义无矛盾性（相容性）**
  公理系统必须不含有矛盾。
- **命题演算的可判定性**
  任给一个公式，存在一种机械的方法在有穷步内判定该公式是否为定理。

证明：所建立的公理系统是完备的

设A是任一重言式，需说明它在公理系统中是可以证明的（定理），即$\vdash A$成立

可将A写成与之**等值**的合取范式

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$$

其中每个A_i都是析取式，

∵A是重言式，故每个Ai亦为重言式

每个A_i必可表为$\pi \vee \neg\pi \vee B$的形式，

π是命题变项。

若Ai为重言式，则它必含一个互补对

反证法：令$A_i = B_1 \vee B_2 \vee \ldots\ldots \vee B_m$

$P_1, \ldots, P_n$是出现在A_i中的所有的命题变项，则$B_i = P_j$或$\neg P_j$

假设 A_i 中不存在互补对，则一定存在一个解释I_k，使得 $B_1 = B_2 = \ldots\ldots = B_m = F$，矛盾。

因此A_i一定存在一个互补对，可以表示为$\pi \vee \neg\pi \vee B$

证明：所建立的公理系统是完备的

由公理系统

（1） $\vdash P \vee \neg P \vee Q$ （定理3.2.9）

从而有 $\vdash A_i$（$i=1,\ldots,n$） (1) 与$\pi \vee \neg \pi \vee B$的形式相同

又依 $\vdash P \rightarrow (Q \rightarrow P \wedge Q)$（补充定理3.2.8）

由分离规则有 $\vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$

$\vdash \mathbf{P} \rightarrow (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$

$\vdash \mathbf{A_1} \rightarrow (\mathbf{A_2} \rightarrow \mathbf{A_1} \wedge \mathbf{A_2})$ (代入$\frac{P}{\mathbf{A_1}}, \frac{Q}{\mathbf{A_2}}$)

$\vdash \mathbf{A_1} \wedge \mathbf{A_2}$

接下来P用A1∧A2替代， Q用A3替代

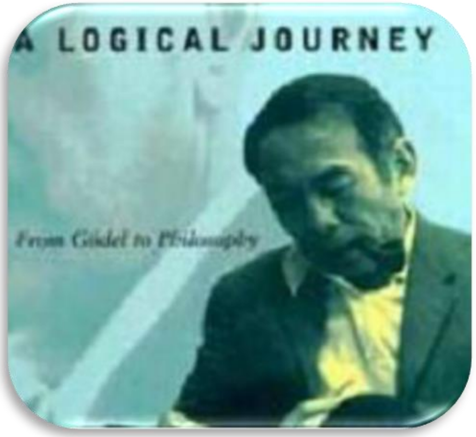

第一，一旦你们熟练了，证明其实没那么困难！
第二，已经证过的东西后面就可以直接用，所以，证明会越来越简单。
第三，由于使用人工语言，而且公理和规则都明确列出来了，所以，这些证明其实可以交由计算机代劳。
哇哦，我喜欢这种收纳方式！
可以用计算机，听起来很不错啊。

第三章主要内容（续2）

- 介绍命题逻辑的另一公理系统——王浩算法；
- 给出该算法的具体结构；
- 举例说明使用该算法进行定理推演的过程；

王浩算法：定理证明自动化系统

王浩算法是利用计算机来实现定理证明的机械化方法，由美籍华裔科学家王浩于1959年提出。



王浩算法及其影响（一）

- 1958年，王浩编写了三个处理一阶逻辑的程序，其中包括一些当时未解决的问题。
- 程序用**SAP**语言（一种汇编语言）编写，
- 在**IBM 704**机器上实现。
- 王浩使用该程序，将数学原理（**Principia Mathematica)**一书中一阶逻辑部分的全部定理（共约**350**条），在不到9分钟内证明完毕。

Seven (Flies) in **One Blow**

H. Wang, "Toward Mechanical Mathematics," in *IBM Journal of Research and Development*, vol. 4, no. 1, pp. 2-22, Jan. 1960.

The gallant tailor: seven (flies) in one blow.

IBM 704: 220 theorems (in the propositional calculus) in three minutes.

Hao Wang

Toward Mechanical Mathematics

Abstract: Results are reported here of a rather successful attempt at proving all theorems, totalling near 400, of *Principia Mathematica* which are strictly in the realm of logic, viz., the restricted predicate calculus with equality. A number of other problems of the same type are discussed. It is suggested that the

王浩算法及其影响（二）

我真希望，在Whitehead和我浪费了十年时间用手算来证明这些定理之前，就知道有这种可能性。我愿相信，演绎逻辑中的一切都能由机器来完成。

—— **B.Russell(1872-1970，英国)**

1950年Nobel文学奖获得者

《西方哲学史》《人类的知识—它的极限和范围》

《我的心路历程》《Principia Mathematica》作者

王浩算法及其影响（三）

Turing机器首次用类似计算机的模型进行阐述，始见于王（浩）的论文中。该文所包含的结果，如用过去的方式来表示将会困难得多。

—— M. Minsky

美国MIT计算机系教授，人工智能创始人之一

1969年Turing奖获得者

代表作《The Society of Mind》

王浩算法及其影响（四）

1972年美国洛克菲勒大学授予Godel名誉学位，王浩在授予仪式上为Godel致贺词。

1977年10月，王浩应邀在中科院做了6次关于数理逻辑的学术讲演，讲演内容的中译本《数理逻辑通俗讲话》于1983年由科学出版社出版(校图书馆有此书)。

王浩算法：定理证明自动化系统

作为命题逻辑的一个公理系统，王浩算法的结构组成与罗素系统类似，下面重点给出与罗素系统的主要差别：

王浩算法与罗素系统的主要差别

(1) 初始符号中的联结词扩充为5个常用联结词，分别是

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$；

为方便描述推理规则和公理，引入公式串$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$。

(2) 定义了相继式。即，如果α和β都是公式串，则称

$\alpha \xrightarrow{s} \beta$ 是相继式。其中α为前件，β为后件；

前件："," – $\wedge$ 后件："," – $\vee$

$\alpha \xrightarrow{s} \beta$ 为真，记为$\alpha \overset{s}{\Rightarrow} \beta$

王浩算法与罗素系统的主要差别

(3) 公理只有一条：如果公式串α和β的公式都只是命题变项A，B，…，$\alpha \ {}_{s}\!\Rightarrow \beta$是公理（为真）的充分必要条件是$\alpha$和$\beta$中至少含有一个相同的命题变项；

(4) 变形（推理）规则共有10条，分别包括5条前件规则和5条后件规则；

(5) 定理推演的过程将所要证明的定理写成相继式形式；

然后反复使用变形规则，消去全部联结词以得到一个或多个无联结词的相继式

若所有无联结词的相继式都是公理，则定理得证，否则定理不成立。

$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$ 与 $A_1 \Rightarrow A_2 \to B$

变形规则（前件规则1–3）

前件规则：

$\neg\Rightarrow$　　如果α, β $s\Rightarrow$ X, γ
　　　　那么α, ¬ X, β $s\Rightarrow$ γ

$\wedge\Rightarrow$　　如果X, Y, α, β $s\Rightarrow$ γ
　　　　那么α, X ∧ Y, β $s\Rightarrow$ γ

$\vee\Rightarrow$　　如果X, α, β $s\Rightarrow$ γ 而且Y, α, β $s\Rightarrow$ γ
　　　　那么α, X ∨ Y, β $s\Rightarrow$ γ

若$A\Rightarrow C$且$B\Rightarrow C$同时成立，则$A\vee B\Rightarrow C$

变形规则（前件规则4–5）

(4) 若 $A\Rightarrow B$且$A\Rightarrow C$同时成立，则$A\Rightarrow B\wedge C$

$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$与$A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$

前件规则：

$\rightarrow\Rightarrow$ 如果Y, α, β $s\Rightarrow$ γ

而且α, β $s\Rightarrow$ X, γ

那么α, X→Y, β $s\Rightarrow$ γ

$\leftrightarrow\Rightarrow$ 如果X， Y， α, β $s\Rightarrow$ γ

而且α, β $s\Rightarrow$X, Y, γ

那么α, X↔Y, β $s\Rightarrow$ γ

若$A\Rightarrow C$且$B\Rightarrow C$同时成立，则$A\vee B\Rightarrow C$

变形规则（后件规则1-3）

$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$与$A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$

若 $A \Rightarrow B$且$A \Rightarrow C$同时成立，则$A \Rightarrow B \wedge C$

后件规则：

$\Rightarrow\neg$　　如果X, α s⇒ β, γ
那么α s⇒ β, ¬ X, γ

$\Rightarrow\wedge$　　如果 α s⇒ X, β, γ, 而且 α s⇒ Y, β, γ
那么 α s⇒ β, X ∧ Y, γ

$\Rightarrow\vee$　　如果 α s⇒ X, Y, β, γ
那么 α s⇒ β , X ∨ Y, γ

变形规则（后件规则4–5）

$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$ 与 $A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$

若 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$ 同时成立，则 $A \Rightarrow B \wedge C$

后件规则：

$\Rightarrow\rightarrow$ 如果 $X, \alpha \ {}_s\!\Rightarrow Y, \beta, \gamma$

那么 $\alpha \ {}_s\!\Rightarrow \beta, X \rightarrow Y, \gamma$

$\Rightarrow\leftrightarrow$ 如果 $X, \alpha \ {}_s\!\Rightarrow Y, \beta, \gamma$

而且 $Y, \alpha \ {}_s\!\Rightarrow X, \beta, \gamma$

那么 $\alpha \ {}_s\!\Rightarrow \beta, X \leftrightarrow Y, \gamma$

定理推演

定理证明所使用的算法：

(1) 将所要证明的定理$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$

写成相继式形式：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \overset{s}{\Rightarrow} B$$

并从这个相继式出发。

(2) 反复（反向）使用变形规则，消去全部联结词以得到一个或多个无联结词的相继式。

(3) 若所有无联结词的相继式都是公理，则命题得证，否则命题不成立。

$\rightarrow\Rightarrow$ 如果Y, α, β s⇒ γ
而且α, β s⇒ X, γ
那么α, X→Y, β s⇒ γ

定理推演举例和说明

例1 证明 $(\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow \neg P$ 成立

证明: (1) $\neg Q \wedge (P\rightarrow Q)$ s⇒ $\neg P$ (写成相继式)

(2) $\neg Q$, $(P\rightarrow Q)$ s⇒ $\neg P$ (∧ ⇒) 前件规则2

(3) $P\rightarrow Q$ s⇒ Q , $\neg P$ (¬ ⇒) 前件规则1

(4) Q s⇒ $Q, \neg P$ 而且 s⇒ Q , $\neg P$, P (→ ⇒)前件规则4

(5) P , Q s⇒ Q 而且P s⇒ Q , P (⇒ ¬) 后件规则1

(5)中两个相继式都已无联接词，而且s⇒ 两端都有共同的命题变项，从而都是公理，定理得证。

¬⇒ 如果α, β s⇒ X, γ
那么α, ¬ X, β s⇒ γ

⇒¬ 如果X, α s⇒ β, γ
那么α s⇒ β, ¬ X, γ

定理推演举例和说明

(1)$\neg Q \wedge (P \to Q)$ s⇒ $\neg P$

(2) $\neg Q$, $(P \to Q)$ s⇒ $\neg P$

(3) $P \to Q$ s⇒ Q , $\neg P$

(4) Q s⇒ $Q, \neg P$ 而且 s⇒ Q , $\neg P$, P

(5)P , Q s⇒ Q 而且P s⇒ Q , P

对算法的一些说明:

(1) 如例1中因(5)是公理,自然成立;

对(5)使用规则⇒ ¬(正向)便得(4);

对(4)使用规则→ ⇒ (正向)便得(3);

对(3)使用规则¬ ⇒ (正向)便得(2)。

→⇒ 如果Y, α, β s⇒ γ
而且α, β s⇒ X, γ
那么$\alpha, X \to Y, \beta$ s⇒ γ

对例2同样可做类似的解释。

读懂该例，便可大致理解王浩算法的证明思路。

¬⇒ 如果α, β s⇒ X, γ
那么$\alpha, \neg X, \beta$ s⇒ γ

⇒¬ 如果X, α s⇒ β, γ
那么α s⇒ $\beta, \neg X, \gamma$

定理推演举例和说明

(2) 证明方法是从所要证明的定理出发，反向使用推理规则（消联结词），直到公理的过程。

(3) 对证明的解释，是反过来从公理出发，经正向使用推理规则（加联结词），直到所要证明的定理。

(4) 限于命题逻辑的定理证明，仅使用五个常用的联结词以及重言蕴涵符号就已足够，引入符号串和相继式完全是为描述推理规则以及公理的方便。

(5) 由所建立的王浩算法可证明命题逻辑的所有定理，从而是完备的公理系统。算法是可实现的机械方法，可用此算法用计算机来证明命题逻辑中描述的定理。

(6) 算法的另一优点是当所证公式不是定理时，也可以得到相应结果。当消去所有联结词后，得到的相继式中有的不是公理时，便知所要证明的并不是定理。

定理推演举例和说明（例2，选读）

例2 证明$((P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to S)) \to (S \vee R)$成立

证明:

(1) $(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to S) \ {}_{s}\!\Rightarrow (S \vee R)$ （写成相继式）

(2) $P \vee Q$， $P \to R, Q \to S \ {}_{s}\!\Rightarrow (S \vee R)$ $(\wedge =>)$

(3) $P \vee Q, P \to R, Q \to S \ {}_{s}\!\Rightarrow S, R$ $(=> \vee)$

(4a) $P, P \to R, Q \to S \ {}_{s}\!\Rightarrow S, R$ 而且

(4b) $Q, P \to R, Q \to S \ {}_{s}\!\Rightarrow S, R$ $(\vee =>)$

$\boxed{\vee \Rightarrow}$ 如果$X, \alpha, \beta \ {}_{s}\!\Rightarrow \gamma$ 而且$Y, \alpha, \beta \ {}_{s}\!\Rightarrow \gamma$
那么$\alpha, X \vee Y$， $\beta \ {}_{s}\!\Rightarrow \gamma$

定理推演举例和说明（例2，选读）

(5a) $P, R, Q \to S \ _s\!\Rightarrow S, R$ 而且

(5b) $P, Q \to S \ _s\!\Rightarrow P, S, R$ ((4a)→=>)

(6a) $P, R, S \ _s\!\Rightarrow S, R$ 而且

(6b) $P, R \ _s\!\Rightarrow Q, S, R$ ((5a)→=>)

(7a) $P, S \ _s\!\Rightarrow P, S, R$

(7b) $P \ _s\!\Rightarrow Q, P, S, R$ ((5b)→=>)

(4a) $P, P \to R, Q \to S \ _s\!\Rightarrow S, R$

→⇒	如果 $Y, \alpha, \beta \ _s\!\Rightarrow \gamma$
	而且 $\alpha, \beta \ _s\!\Rightarrow X, \gamma$
	那么 $\alpha, X \to Y, \beta \ _s\!\Rightarrow \gamma$

定理推演举例和说明（例2，选读）

(8a) $Q, R, Q \to S \ {}_{s}{\Rightarrow} S, R$

(8b) $Q, Q \to S \ {}_{s}{\Rightarrow} P, S, R$ ((4b)→=>)

(9a) $Q, R, S \ {}_{s}{\Rightarrow} S, R$而且

(9b) $Q, R \ {}_{s}{\Rightarrow} Q, S, R$ ((8a)→=>)

(10a) $Q, S \ {}_{s}{\Rightarrow} P, S, R$而且

(10b) $Q \ {}_{s}{\Rightarrow} Q, P, S, R$ ((8b)→=>)

(4b) $Q, P \to R, Q \to S \ {}_{s}{\Rightarrow} S, R$

→⇒ 如果$Y, \alpha, \beta \ {}_{s}{\Rightarrow} \gamma$

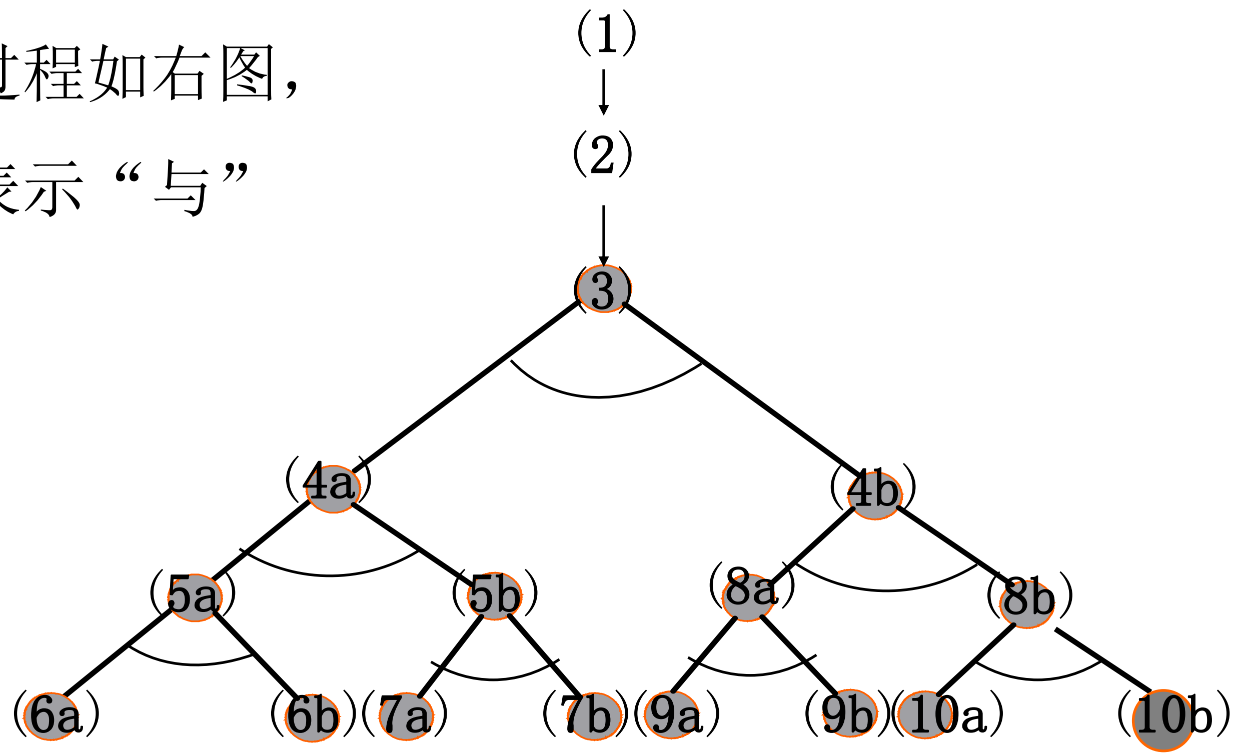
而且$\alpha, \beta \ {}_{s}{\Rightarrow} X, \gamma$

那么$\alpha, X \to Y, \beta \ {}_{s}{\Rightarrow} \gamma$

定理推演举例和说明

证明过程如右图，

圆弧表示“与”



问题：公理系统相关

- 为什么归结法和罗素系统无法证明某一公式不是定理？
  - 归结法：

    归结法步骤：

    1. 从$A\wedge\neg B$出发（欲证$A\Rightarrow B$，等价于证$A\wedge\neg B$是矛盾式）
    2. 建立子句集S，将$A\wedge\neg B$化成合取范式：

       $C_1\wedge C_2\wedge\ldots\wedge C_n$

       其中C_i为析取式。由诸C_i构成子句集

       $S=\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$
    3. 对S中的子句作归结（消互补对），归结结果（归结式）仍放入S中。重复此步。
    4. 直至归结出矛盾式（□）。

  - 额外加一个终止条件：当遍历完所有可能的子句后，无法归结出新子句➔退出
  - 罗素公理系统：搜索路径可能无法穷举

罗素的公理系统，特指其在《数学原理》中为命题逻辑提出的系统，包括了一组基本公理和推理规则。但是，这个系统中的“定理”数量是无限的。原因如下：

1. **基于公理和推理规则**：只要公理存在并有推理规则，我们就可以使用这些规则从公理推导出新的定理。这意味着从一个有限的公理集可以推导出无限多个定理。
2. **命题逻辑的表达能力**：命题逻辑可以表达无限多种不同的命题组合。每一种组合都可以是一个潜在的定理（如果它可以从公理推导出来的话）。
3. **递归性质**：使用推理规则，我们可以递归地构建更复杂的定理。例如，如果"A → B"是一个定理，而"B → C"也是一个定理，那么使用推理规则，我们可以推导出"A → C"也是一个定理。这样的递归过程可以无限进行。

3.5 自然演绎系统（自学）

- 自然演绎系统也是一种逻辑演算体系，与公理系统的明显区别在于它的出发点只是一些变形规则而没有公理，是附有前提的推理系统。
- 自然演绎系统可导出公理系统的所有定理，同时自然演绎系统的所有定理也可由重言式来描述，从而可由公理系统导出。

3.5.1 初始符号

除罗素公理系统的符号外，引入

$\Gamma=\{A_1, \ldots, A_n\}=A_1, \ldots, A_n$

表示有限个命题公式的集合；

$\Gamma \vdash A$

表示Γ，A之间有形式推理关系，Γ为形式前提，A为形式结论，或说使用推理规则可由Γ得A。

3.5.2 形成规则(同罗素公理系统)

- 根据形成规则得到的符号序列称合式公式。

(1) 符号π是合式公式（π为命题，如A, B, C...）

(2) 若A, B是合式公式，则$(A \vee B)$是合式公式

(3) 若A是合式公式，则$\neg A$是合式公式。

(4) 只有符合(1) (2) (3)的符号序列才是合式公式。

3.5.3 变形规则

（1） $A_1, \ldots, A_n \vdash A_i (i=1,\ldots,n)$。肯定前提律

（2）如果$\Gamma \vdash A$，$A \vdash B$，则$\Gamma \vdash B$。传递律

（3）如果$\Gamma, \neg A \vdash B$且$\Gamma, \neg A \vdash \neg B$，则$\Gamma \vdash A$。反证律

（4）$A \rightarrow B$，$A \vdash B$。蕴涵词消去律（分离规则）

（5）如果Γ，$A \vdash B$，则$\Gamma \vdash A \rightarrow B$。蕴涵词引入律。

3.5.4　公理

- 自然演绎系统的公理集为空集.

(1) 包含规则：若 $A\in\Gamma$ 则 $\Gamma\vdash A$ 。特别地 $A\vdash A$。

– 包含规则也称为前提引入规则。

(2) 前提附加：若 $\Gamma\vdash A$ 则 $\Gamma, B\vdash A$ 。

– 前提附加规则也称为弱化规则。

– $\Gamma, B\vdash A$ 是 $\Gamma\cup\{B\}\vdash A$ 的简写。

(3) 否定引入：若 $\Gamma\vdash A$ 则 $\Gamma\vdash\neg\neg A$。

(4) 否定消去：若 $\Gamma,\neg A\vdash B$ 且 $\Gamma,\neg A\vdash\neg B$ 则 $\Gamma\vdash A$。

– 否定消去也称为反证法

(5) 合取引入：若 $\Gamma\vdash A$ 且 $\Gamma\vdash B$ 则 $\Gamma\vdash A\wedge B$。

(6) 合取消去：若 $\Gamma\vdash A\wedge B$ 则 $\Gamma\vdash A$ 且 $\Gamma\vdash B$。

(7) 析取引入：若 $\Gamma\vdash A$ 或 $\Gamma\vdash B$ 则 $\Gamma\vdash A\vee B$。

(8) 析取消去：若 $\Gamma, A\vdash C$ 且 $\Gamma, B\vdash C$ 则 $\Gamma, A\vee B\vdash C$

– 析取消去的另外描述形式：若 $\Gamma\vdash A\vee B$，$\Gamma, A\vdash C$ 且 $\Gamma, B\vdash C$ 则 $\Gamma\vdash C$。

(9) 蕴涵引入：若 $\Gamma, A\vdash B$ 则 $\Gamma\vdash A\rightarrow B$ 。（CP 规则）

(10) 蕴涵消去：若 $\Gamma\vdash A\rightarrow B$ 且 $\Gamma\vdash A$ 则 $\Gamma\vdash B$ 。

(11) 等价引入：若 $\Gamma, A\vdash B$ 且 $\Gamma, B\vdash A$ 则 $\Gamma\vdash A\leftrightarrow B$。

– 或：若 $\Gamma\vdash A\rightarrow B$ 且 $\Gamma\vdash B\rightarrow A$ 则 $\Gamma\vdash A\leftrightarrow B$。

(12) 等价消去：若 $\Gamma\vdash A\leftrightarrow B$ 且 $\Gamma\vdash A$ 则 $\Gamma\vdash B$ 。

– 或：若 $\Gamma\vdash A\leftrightarrow B$ 则 $\Gamma\vdash A\rightarrow B$ 且 $\Gamma\vdash B\rightarrow A$。

(13) 等值替换：若 $A\vdash B, B\vdash A$ 且 $\Gamma\vdash\Phi(A)$，则 $\Gamma\vdash\Phi(B)$；$\Phi(A)$ 描述 N 的一个含子式 A 的公式。

3.5.5 定理

定理3.5.1 $A\to B,\ B\to C \vdash A\to C$

证明:

(1) $A\to B,\ B\to C,\ A\vdash A\to B$ 规则1+前提附加

(2) $A\to B,\ B\to C,\ A\vdash A$ 规则1 +前提附加

(3) $A\to B,\ A\vdash B$ 规则4

(4) $A\to B,\ B\to C,\ A\vdash B$ (1)+(2)合取引入,(3)，规则2

(5) $A\to B,\ B\to C,\ A\vdash B\to C$ 规则1+前提附加

(6) $B, B\to C\vdash C$ 规则4

(7) $A\to B,\ B\to C,\ A\vdash C$ (4)+(5)合取引入,(6)，规则2

(8) $A\to B,\ B\to C\vdash A\to C$ 规则5

(2) 前提附加：若 $\Gamma\vdash A$ 则 $\Gamma, B\vdash A$。

– 前提附加规则也称为弱化规则。

- 上述定理在罗素公理系统中被描述成

$$\vdash((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow C)$$

- 在定理的证明中，不涉及公理，而将$A\rightarrow B$，$B\rightarrow C$作为条件，使用推理规则来作推理，推理过程比用公理的情形容易。

- 可以证明罗素公理系统与自然演绎系统是等价的，因此，自然演绎系统也是完备的.

3.6 非标准逻辑（自学）

- 前面的命题逻辑通常称作标准（古典）的命题逻辑，而除此之外的命题逻辑可统称作**非标准逻辑**。
- 其中一类是与古典逻辑有相违背之处的非标准逻辑，如多值逻辑，模糊逻辑等。$P \vee \neg P$
- 另一类是古典逻辑的扩充，如模态逻辑，时态逻辑等。

3.6.1 多值逻辑

- 在古典命题逻辑中，命题定义的取值范围仅限于真和假两种，故又称作二值逻辑。
- 多值逻辑将命题定义的取值范围推广到可取多个值。
- 因此，多值逻辑是普通二值逻辑的推广，并在此基础上研究如何给出各种取值含义的解释以及命题运算规律是否保持等问题。

多值逻辑

- 已有的多值逻辑研究以三值逻辑为主，具有代表性的包括
- Kleene 逻辑（**1952**）T，F，U；$P \vee \neg P \neq T$
- Lukasiewicz 逻辑（**1920**）；
- Bochvar 逻辑（**1939**）等。

3.6.2 模态逻辑

- 考虑必然性和可能性的逻辑是模态逻辑
- 引入“可能的世界”作为参量（条件），必然真表示所有可能的世界下为真，而可能真表示在现实世界下为真，不要求所有可能的世界下为真。存在的问题是可能的世界如何描述还有待研究。
- 有一种观点认为，命题逻辑是用来描述永恒或绝对真理的，模态逻辑和谓词逻辑则是描述非永恒或相对真理的。

3.6.3 不确定性推理与非单调逻辑

- 不确定性推理与非单调逻辑是人工智能系统中经常使用的知识表示和推理方法
- 首先，标准逻辑是单调的。一个正确的公理加到理论T中得到理论T'，$T \subset T'$。如果$T \vdash P$必有$T' \vdash P$。即随着条件的增加，所得结论也必然增加。
- 而对于非单调逻辑，一个正确的公理加到理论T中，有时反而会使预先所得到的一些结论失效。

第三章小结

- 本章介绍了命题逻辑的公理化，是命题逻辑理论的系统化和抽象化，主要内容总结如下：
- 介绍了命题逻辑的公理系统的概念和基本结构，并以具有代表性的罗素公理系统为例，详细介绍了一个命题逻辑公理系统的构成；
- **给出公理**，通过定理推演的实例，使用公理系统进行定理证明的过程和方法。
  - 罗素公理系统
  - 王浩算法

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn