离散数学II

—欧拉回路、哈密尔顿回路

周旻
清华大学软件学院
软件工程与系统研究所

2024年4月19日
Friday

第二章 道路与回路

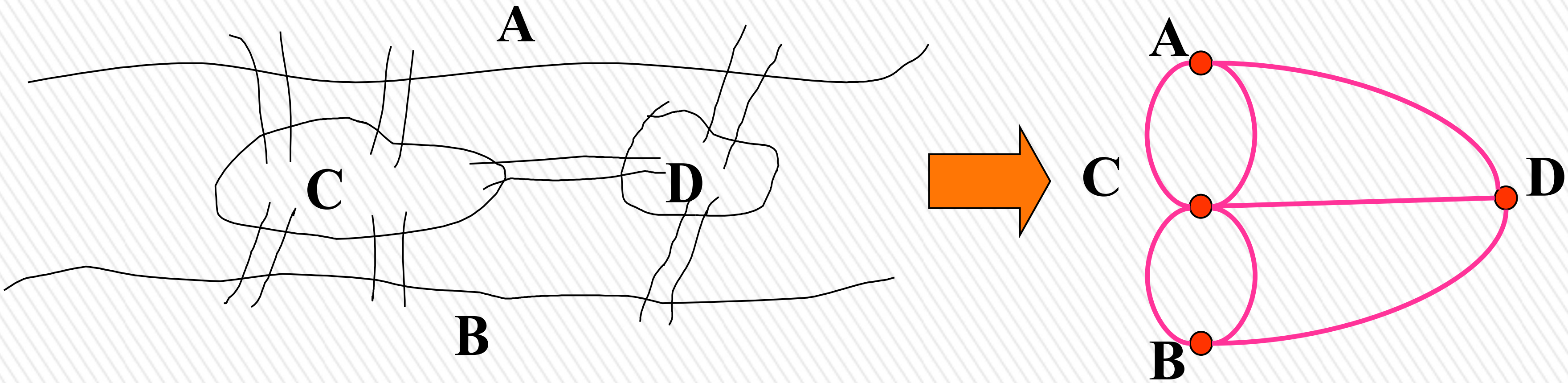
- 道路与回路的定义和相关概念
- 道路与回路的判定方法
- 欧拉道路与回路
- 哈密顿道路与回路
- 旅行商问题与分支定界法
- 最短路径
- 关键路径
- 中国邮路

欧拉道路与回路

欧拉道路与回路

- 哥尼斯堡七桥问题

图论的第一篇论文（1736）



- 问题转化为：从图中任一点出发，通过每条边且仅一次，
  最后返回到出发点。

欧拉图

基本术语

欧拉通路：经过所有顶点，且每条边恰好经过一次的通路

欧拉回路：经过所有顶点，且每条边恰好经过一次的回路

欧拉图：　有欧拉回路的图

半欧拉图：有欧拉通路而无欧拉回路的图

说明：

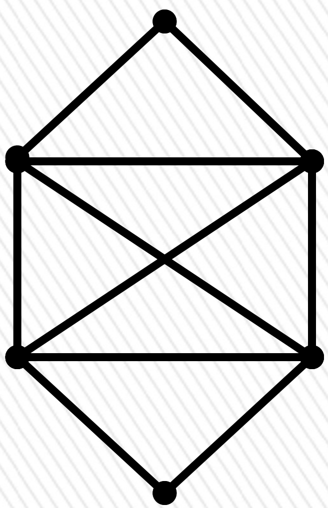
上述定义对无向图和有向图都适用

欧拉通路是简单通路，欧拉回路是简单回路

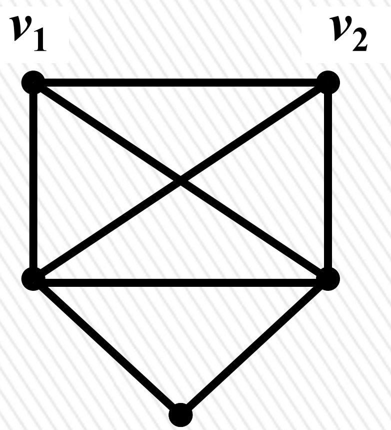
环不影响图的欧拉性

欧拉图

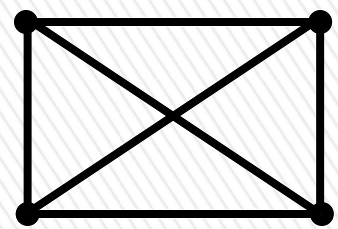
例2. 3. 1



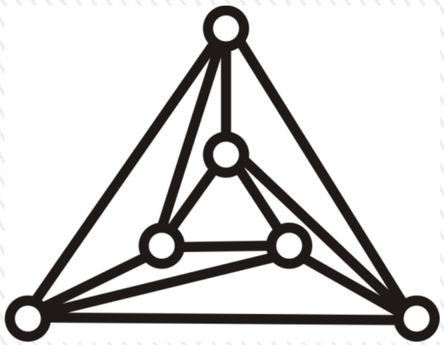
欧拉图



半欧拉图



非欧拉图

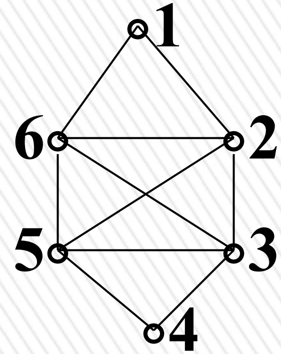


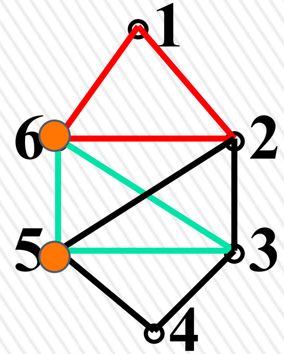
欧拉图

如何快速判定一个图中是否有欧拉道路或欧拉回路?

构造欧拉图的实例

例2.3.2：求右图中欧拉回路。





a) 选以1为起点的连通回路E_1：1261

b) E_1不包含所有边。

c) 在$G - E_1$中找新回路E_2: 6356

(6是E_1与E_2的公共点)

d)以公共点6为起点，对$E_1 \cup E_2$中的边排序：$C = 6356126$

e) $E_1 := C$;

f) E_1不包含所有边。

g) 在$G - E_1$中找新连通回路E_2: 52345 (5是E_1与E_2的公共点)

h)以公共点5为起点，对$E_1 \cup E_2$中的边排序：$C = 52345612635$

i) $E_1 := C$

j) E_1包含所有边。

k)输出$E_1 = 52345612635$。

欧拉图判别定理

定理2.3.1 无向连通图G有欧拉回路的充要条件是各顶点的度都是偶数。

证明

- 必要性

　已知存在欧拉回路，要证明度都是偶数

　＋欧拉回路经过每边一次且仅一次

　＋沿该回路进入某点后，必定经由另一条边出去

　＋因此，各点的度都是偶数

欧拉图判别定理

- 充分性

  已知各顶点的度都是偶数，则必存在欧拉回路

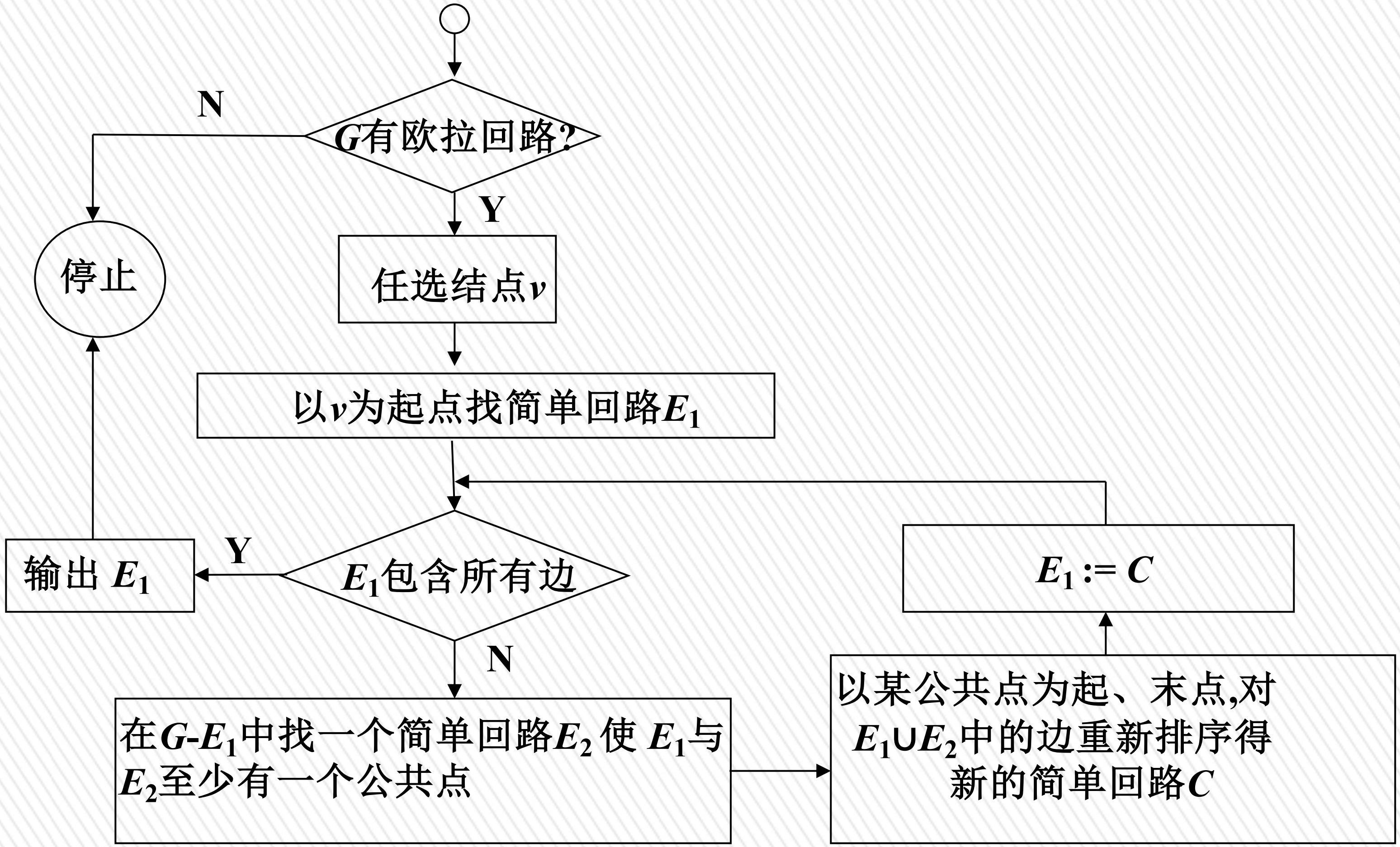
  采用构造法证明

  - 从任意点v_0出发，构造G的一条简单回路C
    - 由于v_i的度为偶，所以不可能停留在某点$v_i \in V - v_0$上，而不能继续向前构造
    - 由于G是有穷图，因此最终一定能够回到v_0，构成简单回路C
  - 若C包含了G中的所有边，它即是G的欧拉回路

欧拉图判别定理

- 充分性（续）
  - 否则，从G中删去C的各边，得到G_1。显然G_1中每点的度仍然是偶数
  - 此时，G_1中一定存在度非0的顶点v_i，它同时还是回路C经过的顶点（否则G是非连通图）
  - 这时，在v_i所在的G_1的连通支中，同理可构造简单回路C'，令$C=C\cup C'$，得到包含边数比原来更多的的简单回路
  - 继续上述构造过程，最终该简单回路必是包含了的所有边，即构造出了的一条欧拉回路

构造欧拉图的算法



G有欧拉回路?
N
Y
停止
任选结点v
以v为起点找简单回路E1
E1包含所有边
Y
输出 E1
N
在G-E1中找一个简单回路E2 使 E1与E2至少有一个公共点
以某公共点为起、末点,对E1∪E2中的边重新排序得新的简单回路C
E1 := C

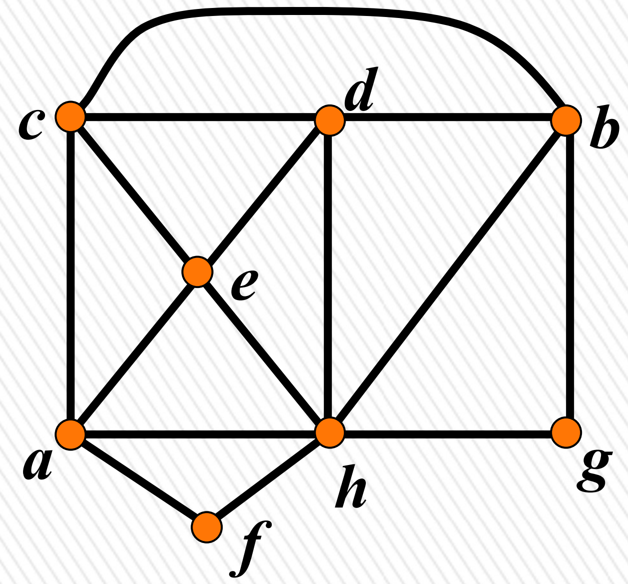
构造欧拉图的实例

例2.3.4：设某城市的街道布置如图所示。每条边代表一个特定街道的一段街区，每个结点代表街区间的交点。扫雪车车库位于结点d。证明存在一条路线使得扫雪车清扫每个街区恰好一次且清扫完最后一个街区正好返回车库。为这个扫雪车找出完成此任务的路线。

解：

连通且每个结点的度数均为偶数，故存在欧拉回路。

$C = dbghbceahfacdhed$



欧拉道路判别定理

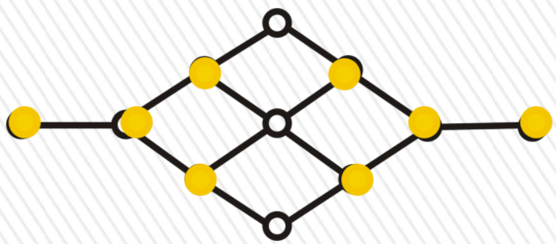
推论2.3.1 若无向连通图G中只有两个奇顶点，则G存在欧拉道路。

证明

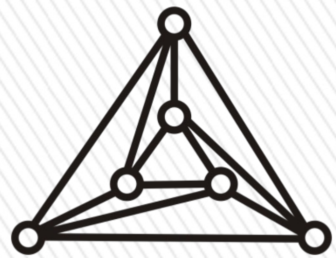
- 设这两个奇顶点是v_i，v_j；
- 在图G中加入一条边(v_i, v_j)，则所有的顶点的度都为偶，此时其中必然存在一条欧拉回路；
- 然后将边(v_i, v_j)去掉，可得从v_i到v_j的欧拉道路。

欧拉图判别实例

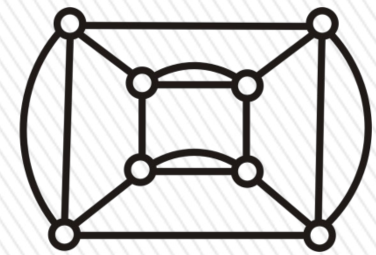
例2.3.3



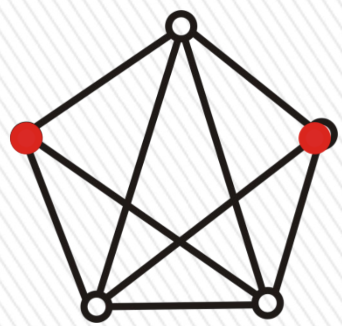
无欧拉通路



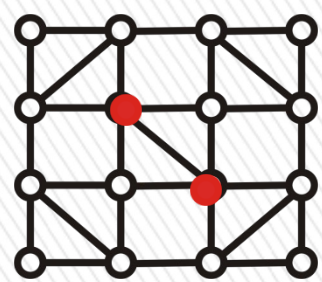
欧拉图



欧拉图



有欧拉通路
非欧拉图



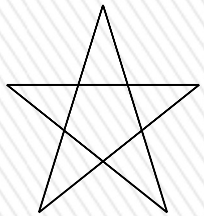
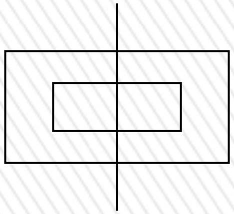
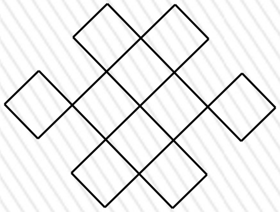
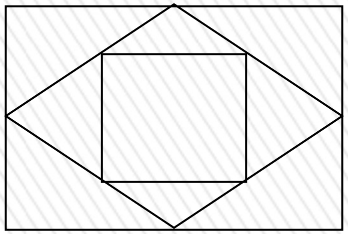
有欧拉通路
非欧拉图

无欧拉通路

如何快速找到一个图中的欧拉通路？

一笔画问题

欧拉道路与欧拉回路问题，也称一笔画问题.

现在我们可以很容易判断出是否可一笔画、如何画

k笔画问题

定理2.3.2：设连通图中有K个度为奇数的顶点。证明$E(G)$可以划分成$K/2$条简单道路

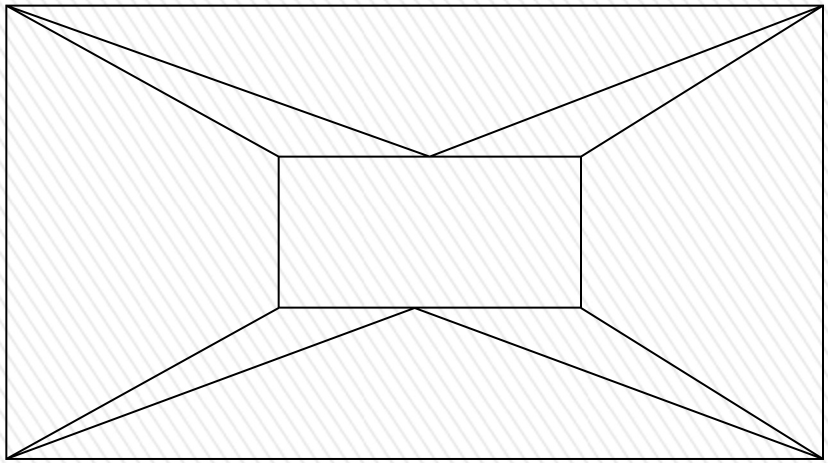
证明（基本思路：构造法）

- 由图的性质可得，K是偶数
- 在这K个顶点中两两配对，增添互不相邻的$K/2$条边，得到G'
- G'中每点的度都是偶数，由定理，G'中有欧拉回路C
- 在C中删去这$K/2$条边,便得到了$K/2$条简单道路，它们包含了原图G中的所有边
- 即这$K/2$条简单道路就是$E(G)$的一个划分

k笔画问题

推论2.3.2：设图G是连通的，并且恰有$2k$个奇点，那么图形G可用k笔不重复画成，并且至少要用k笔画成。

下图至少需要几笔画完成



A 1

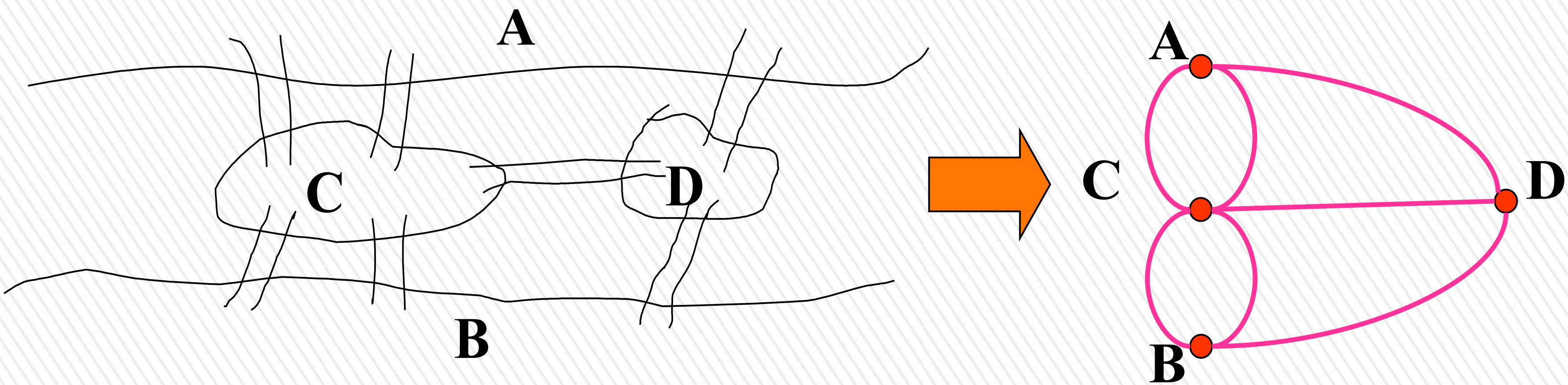
B 2

C 3

提交

欧拉道路与回路

- 哥尼斯堡七桥问题

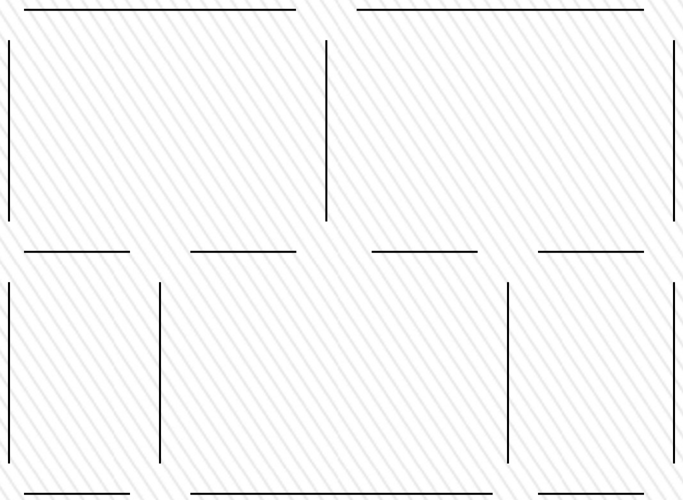


- 不是欧拉路径和回路
- 如何变成欧拉道路？如何变成欧拉回路？

课堂讨论题

如图，给定一个由16条线段构成的图形，证明不能引一条折线与每一线段恰好相交一次。

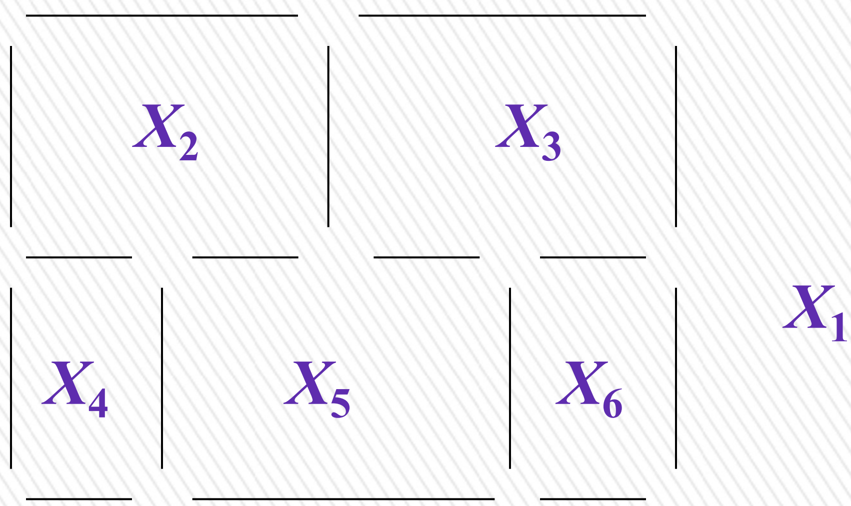
（折线可以是不封闭和自由相交的，但它的顶点不在给定的线段上，而边也不通过线段的公共端点）

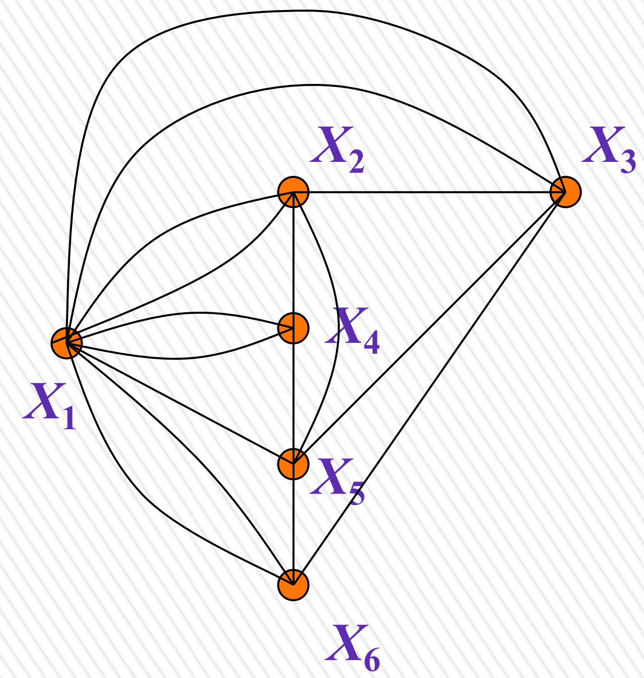


课堂讨论题

如图，给定一个由16条线段构成的图形，证明不能引一条折线与每一线段恰好相交一次。

解：建模





4个奇点，不存在欧拉通路

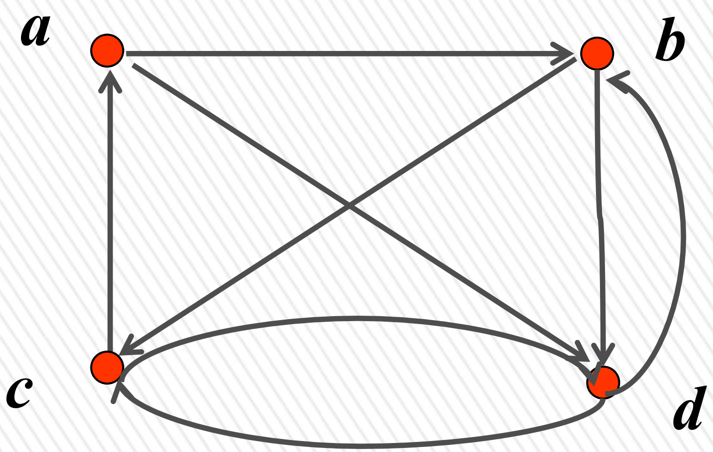
有向图的欧拉道路与回路

推论2.3.3 若有向连通图G中各个结点的正负度相等，则G中存在有向欧拉回路。

推论2.3.4 若有向连通图G中只有两个结点的正负度不相等，而且其中一个入度比出度多1，另一个入度比出度少1，则G中存在有向欧拉通路。

有向图的欧拉道路与回路

例2.3.7



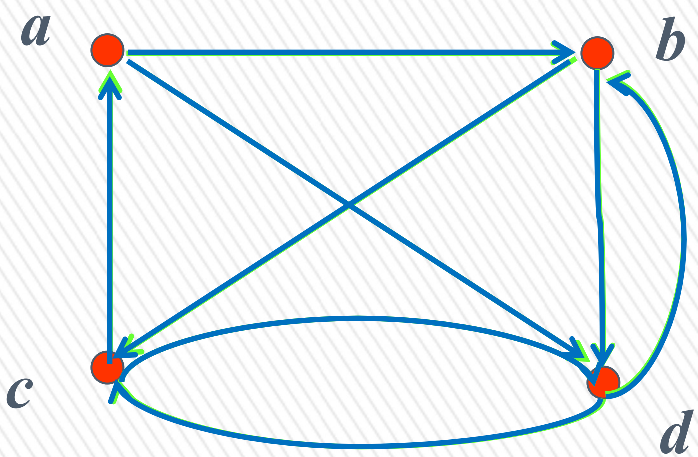
Solution:

	$\deg^-(v)$	$\deg^+(v)$
a	1	2
b	2	2
c	2	2
d	3	2

没有有向欧拉回路，但有欧拉通路。

有向图的欧拉道路与回路

例2.3.7



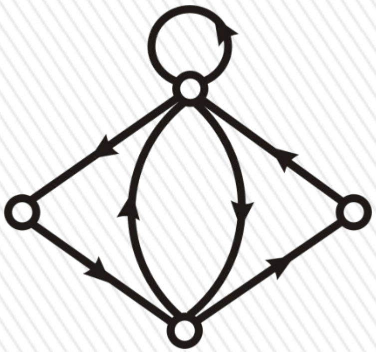
Solution:

	$deg^-(v)$	$deg^+(v)$
a	1	2
b	2	2
c	2	2
d	3	2

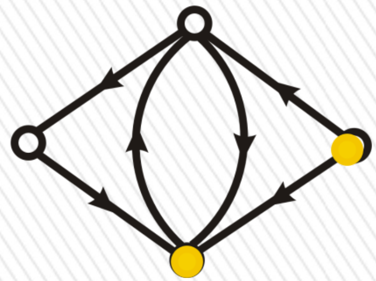
没有有向欧拉回路，但有欧拉通路。

有向图的欧拉道路与回路

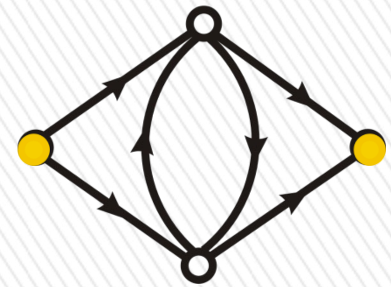
例2.3.8



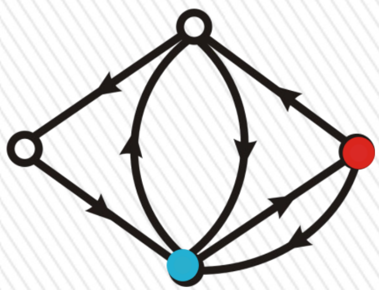
欧拉图



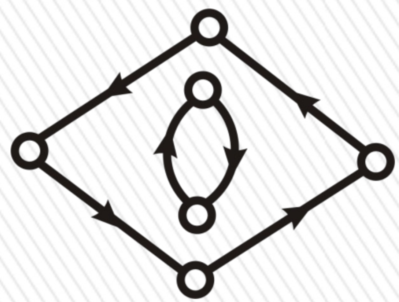
无欧拉通路



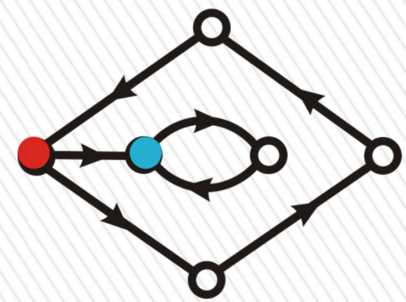
无欧拉通路



有欧拉通路
无欧拉回路



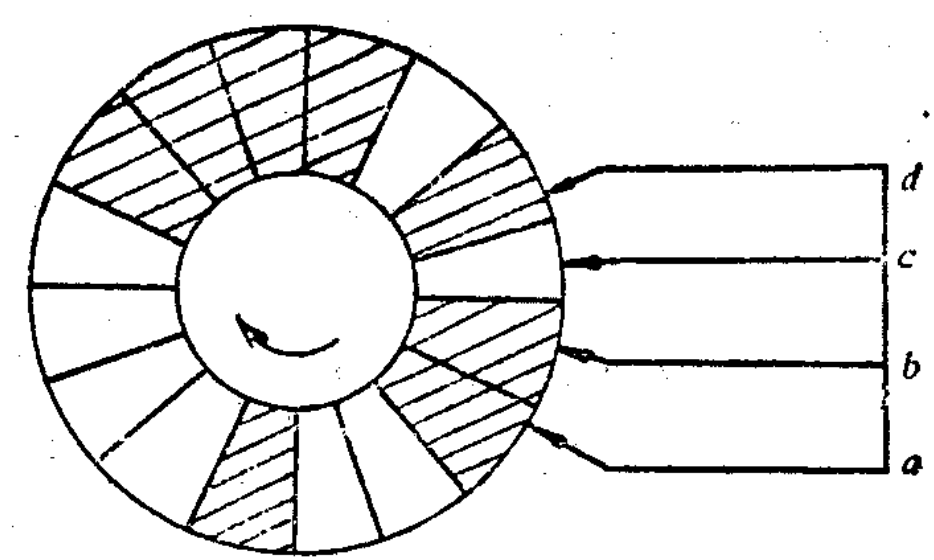
无欧拉通路



有欧拉通路
无欧拉回路

欧拉道路与回路

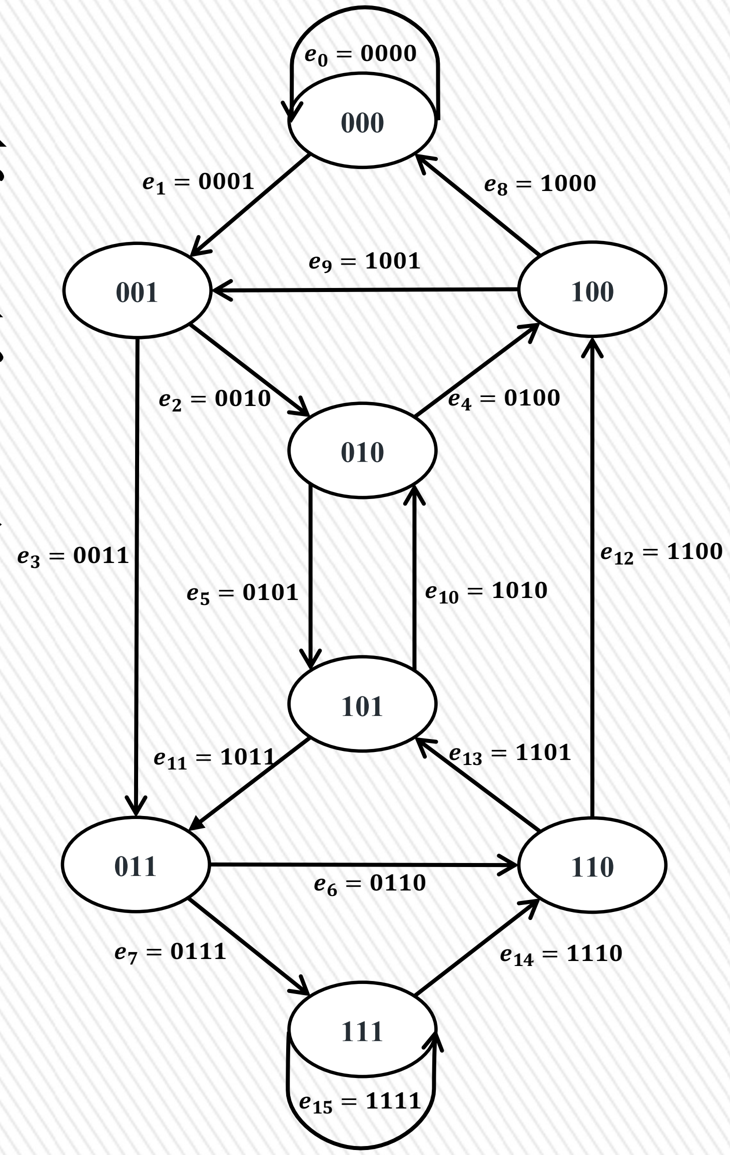
例2.3.9 计算机编码盘的设计。设有编码盘其表面被等分成2^4个部分，其中每一部分分别用绝缘体或导体组成。绝缘体部分给出信号0，导体部分给出信号1，在图中阴影部分表示导体，空白部分表示绝缘体。根据编码盘的位置，触点将得到信息1101，如果编码盘沿顺时针方向旋转一个部分，触点将有信息1010。问编码盘上16个部分怎样安排导体及绝缘体，才能使编码盘每旋转一个部分，四个触点能得到一组不同的四位二进制数信息？



欧拉道路与回路

如何进行建模?

- 每次旋转时，输出中有三位不变，如*xabc*变成*abcy*
- 将四位数字的后三位作为结点
- 八种组合情况作为八个结点
- 每次旋转可以从一个结点到另一个结点
- 有两种可能，即
  - *abc* → *bc*1
  - *abc* → *bc*0
  - 输出为*abc*1或者*abc*0



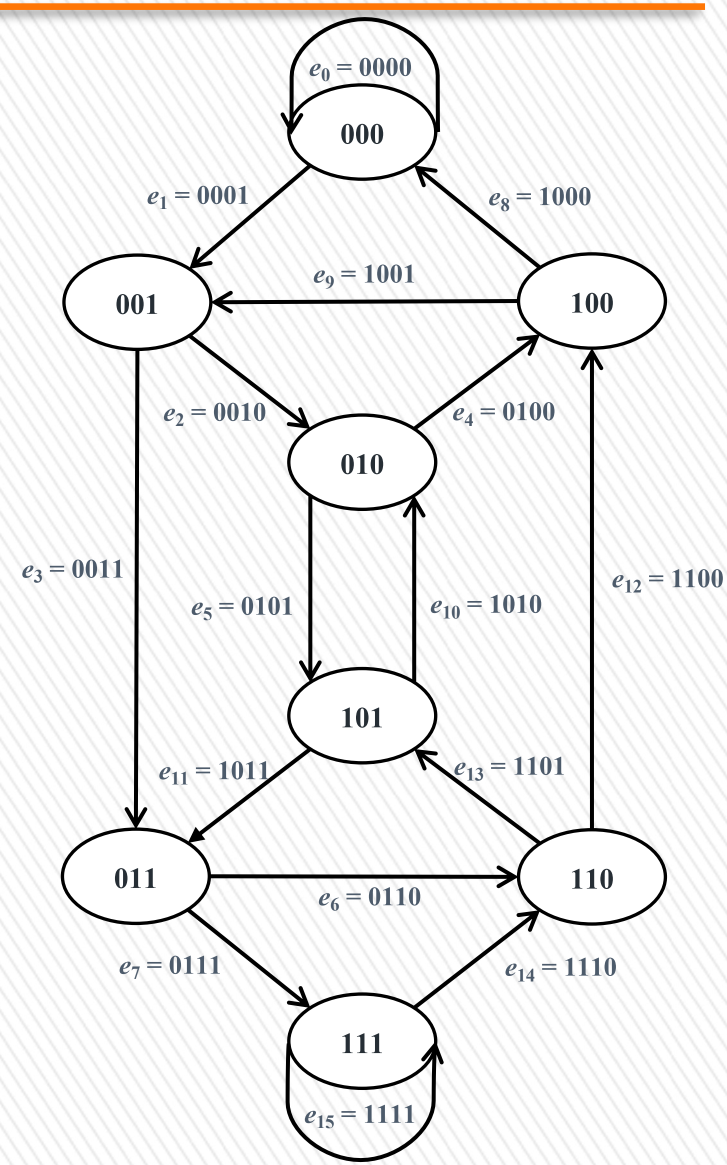
欧拉道路与回路

构造有向连通图

其中有16条边，包括了16种输出，每个结点的度都是偶数

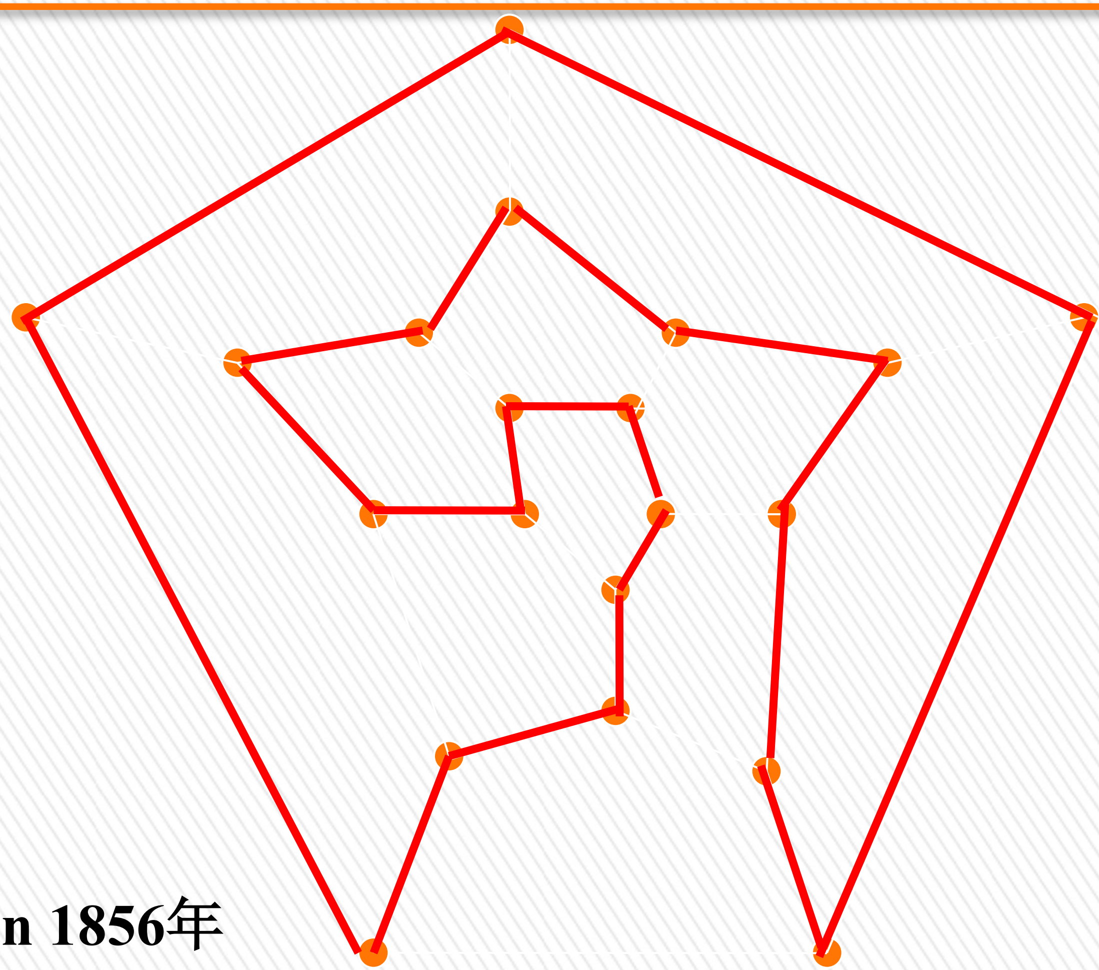
因此存在欧拉回路，且任何一条欧拉回路都是一种可行方案例如

“0000101001101111"



哈密尔顿道路与回路

哈密尔顿周游世界问题



Hamilton 1856年

游览十二面体上的20个顶点（世界20个城市），30条棱边对应20个城市间的交通路线，怎样能够每个城市只经过一次并回到出发点

哈密顿回路与哈密顿通路

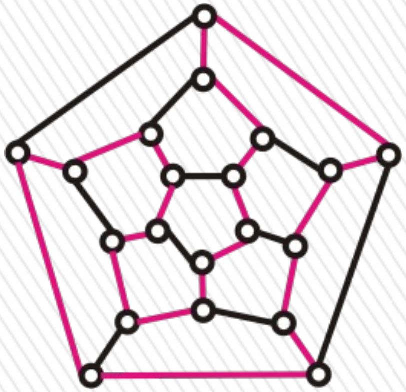
- 基本术语

哈密顿通路：连通图的一条经过所有顶点一次且仅一次的通路，简记H-通路。

哈密顿回路：连通图中经过所有顶点一次且仅一次的回路，简记H-回路。

哈密顿图：　具有哈密顿回路的图.

半哈密顿图：具有哈密顿通路的图.



说明：

- 哈密顿通路是初级通路
- 哈密顿回路是初级回路
- 环与重边不影响图的哈密顿性, 故只考虑简单图

哈密顿回路应用

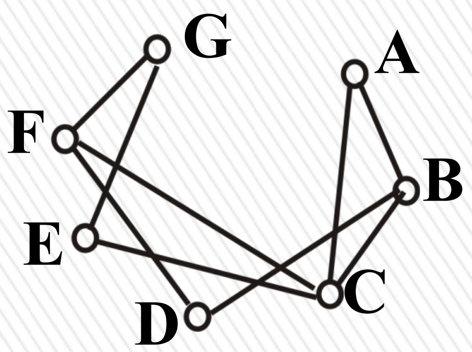
有7个人, A会讲英语, B会讲英语和汉语, C会讲英语、意大利语和俄语，D会讲日语和汉语，E会讲德语和意大利语，F会讲法语、日语和俄语，G会讲法语和德语。问能否将他们沿圆桌安排就坐成一圈，使得每个人都能与两旁的人交谈?

解：作无向图，每人是一个顶点，

2人之间有边⇔他们有共同的语言。

ACEGFDBA是一条哈密顿回路，

按此顺序就坐即可.



哈密顿图的实质是能将图中所有的顶点排在同一个圈中。

哈密顿回路

画出四个结点的连通图，分别具有

(a) 既是哈密顿图也是欧拉图；

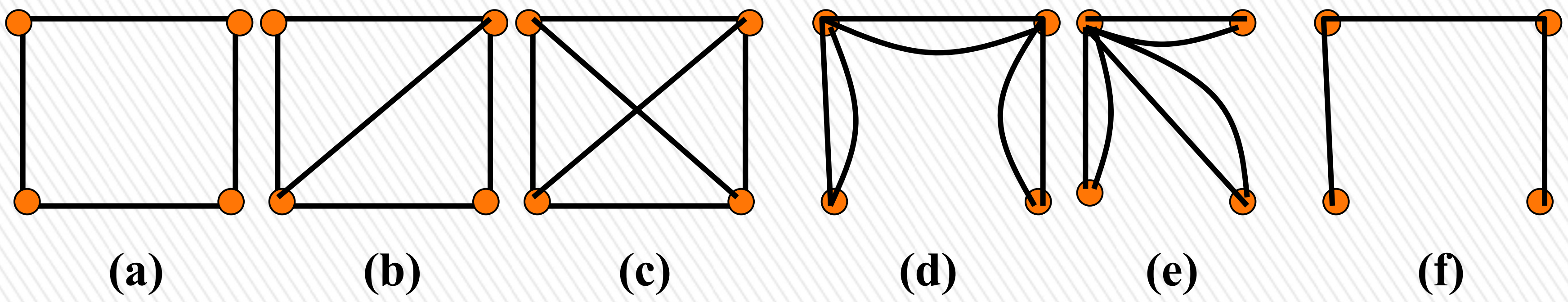
(b) 既是哈密顿图也是半欧拉图；

(c) 是哈密顿图但不是欧拉图也不是半欧拉图；

(d) 既是半哈密顿图也是欧拉图；

(e) 不是半哈密顿图也不是哈密顿图但是欧拉图；

(f) 既是半哈密顿图也是半欧拉图；



哈密顿回路判定

说明：

1) 目前为止，还没有找到简单的充要条件来判断哈密顿回路的存在性。

2) 但已经有许多定理对其存在性给出了充分条件。

3) 某些性质可用来判明一个图没有哈密顿回路，如：

a) 带有1度顶点的图没有哈密顿回路。

b) 若图中有2度顶点，则关联这个顶点两条边属于任何哈密顿回路。

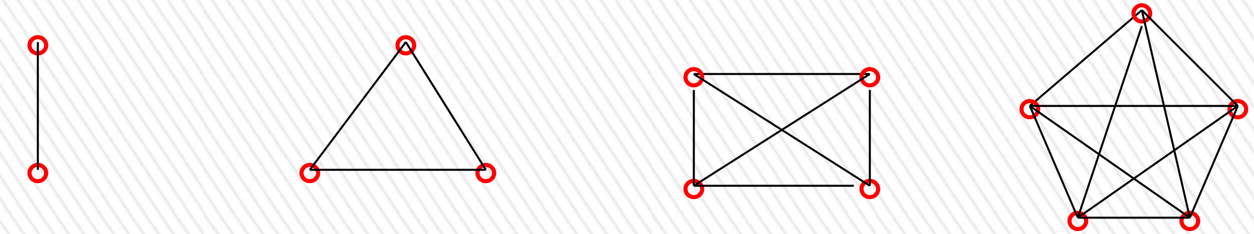
c) 每个顶点只能有两条关联的边在哈密顿回路内。

d) 哈密顿回路不能包含更小的回路。

哈密顿回路判定

至少有3个点的完全图是H图.

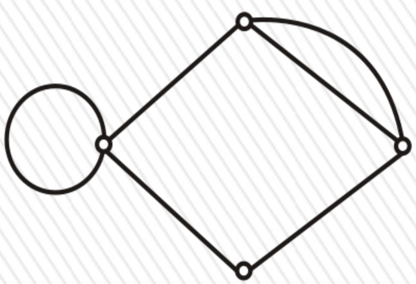
证明:略



K_2　　K_3　　K_4　　K_5

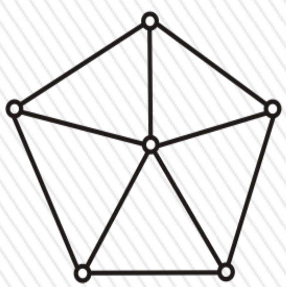
哈密顿回路判定

说明下图是否是哈密顿图、半哈密顿图?



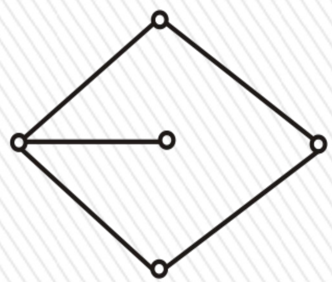
(1)

哈密顿图



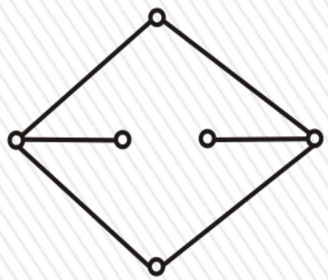
(2)

哈密顿图



(3)

半哈密顿图



(4)

都不是

哈密顿回路判定必要条件

定理: 若图$G=<V,E>$有H回路,则对V的任何非空子集S, 均有$p(G-S)\le|S|$, 其中$p(G-S)$是从G中删去S中所有结点及与这些结点关联的边所得到的子图的连通分支数。

证明：设C是图G的一条H回路，则对于V的任何非空子集S，

在C中删去S中任意一个结点v_1后，则$C-v_1$仍是连通的路，

若再删去S中的另一个结点v_2，则$p(C-v_1-v_2)\le 2$，

若删去S中的k个结点，则$p\le k$,

$p(C-v_1-v_2-\ldots-v_n)\le|S|$

因为C是H回路，所以它包含了G的所有结点，即C是G的生成子图。所以$C-S$也是$G-S$的生成子图，故

$p(G-S)\le p(C-S)\le|S|$.

哈密顿回路判定必要条件

推论1 若图$G=<V,E>$有H-道路,则对V的任何非空子集S，均有$p(G-S)\le|S|+1$。

证明：设P是图G的一条起于u终于v的一条H-路,

令$G_1=G+(u,v)$，显然G_1是哈密顿图

$$p(G_1-S)\le|S|$$

$$p(G-S)=p(G_1-S-(u,v))\le p(G_1-S)+1$$

$$\le|S|+1$$

哈密顿回路判定必要条件

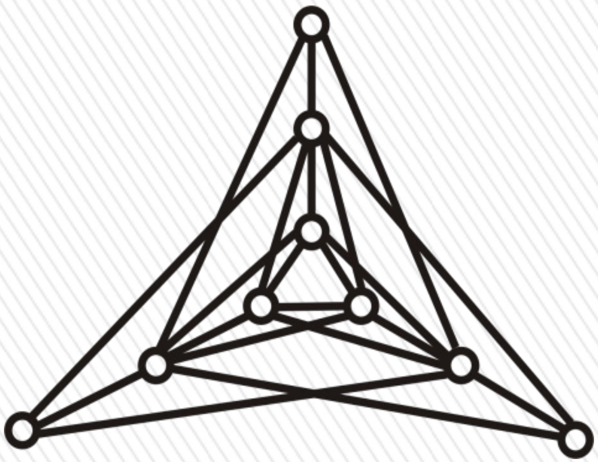
推论2 有割点的图不是哈密顿图

证明：设v为割点, 则$p(G-v) \geq 2 > |\{v\}| = 1$.
根据定理，得证。

单选题 1分

设置

是否为哈密顿图?



A 是哈密顿图

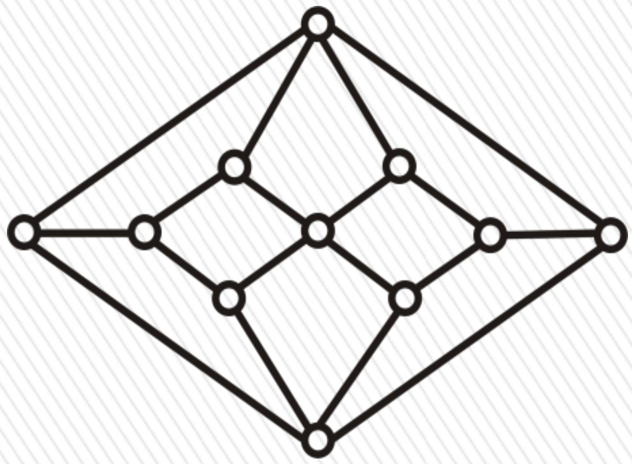
B 不是哈密顿图

提交

单选题 1分

设置

是否为哈密顿图？



A 是哈密顿图

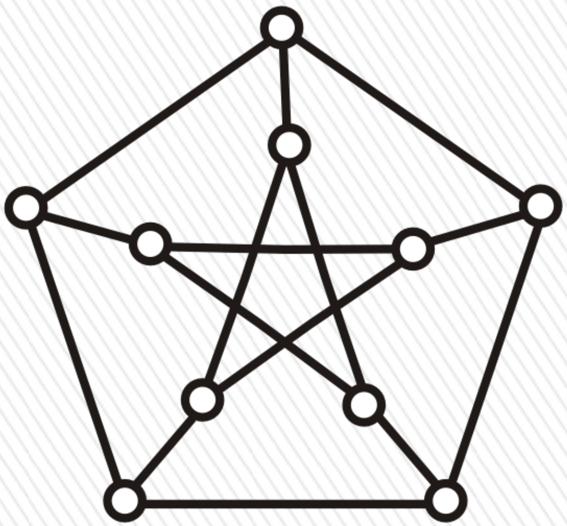
B 不是哈密顿图

提交

哈密顿回路判定必要条件

注意：定理中的条件是哈密顿图的必要条件，

但不是充分条件.

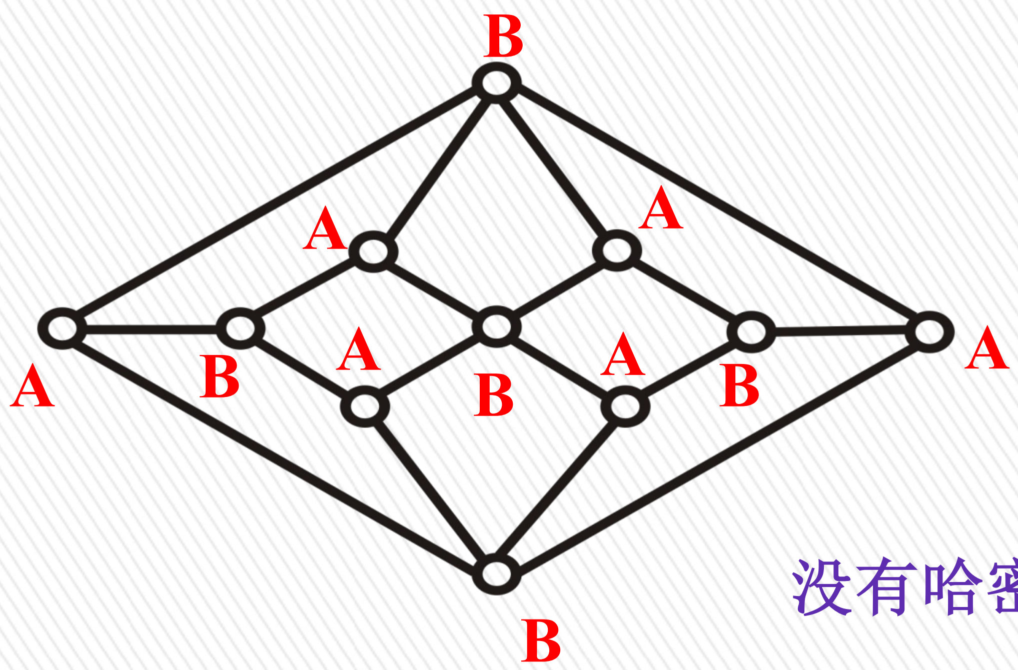


Petersen图

满足必要条件，
但不是哈密顿图

哈密顿回路判定必要条件

推论3 若图$G = <V_1, V_2, E>$为二分图且有哈密顿回路，则$|V_1| = |V_2|$



没有哈密顿回路

单选题 1分

设置

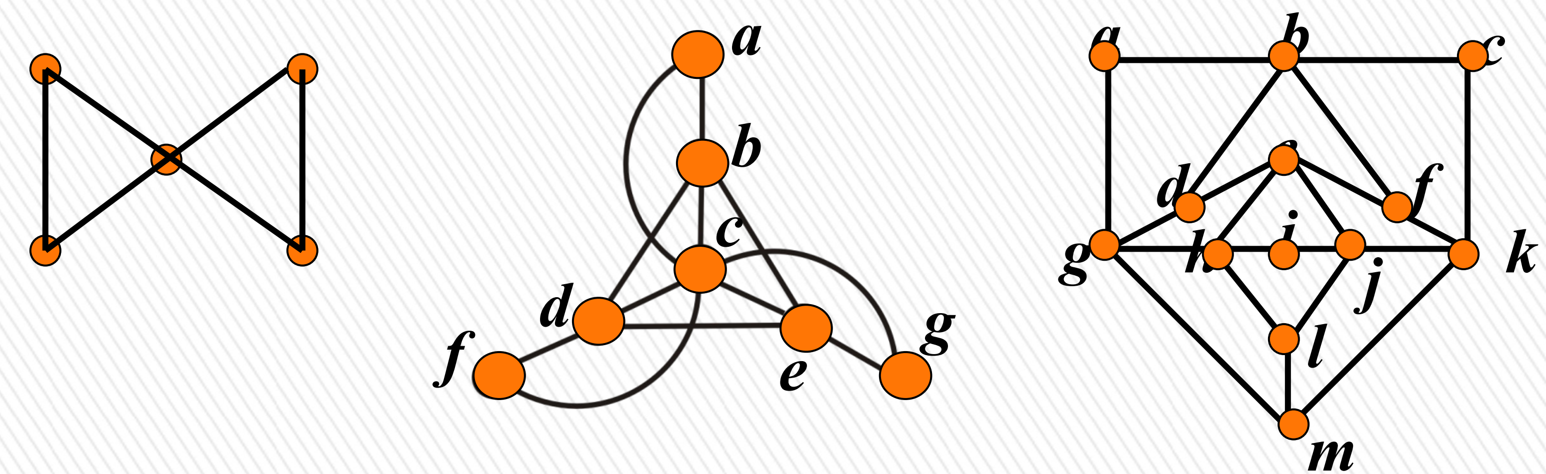
关于下面三张图是否有哈密顿回路，下面哪个描述正确

A 三个都没有

B 有一张图有

C 有两张图有

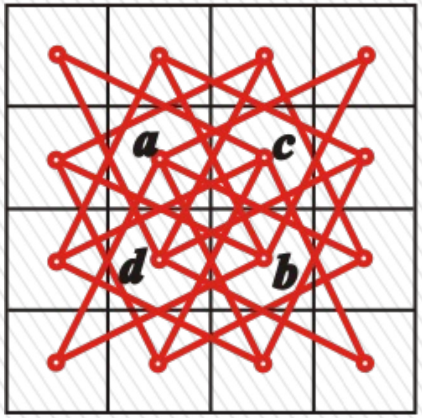
D 三张图都有

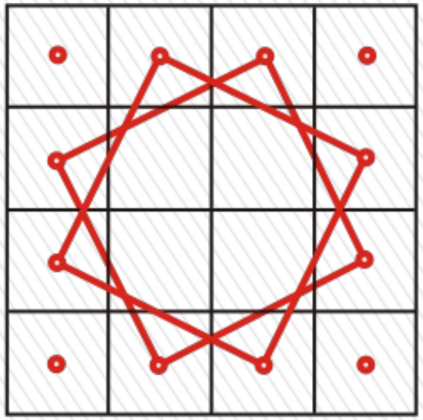


提交

哈密顿回路判定必要条件

1/4国际象棋盘(4×4方格)上的跳马问题：马是否能恰好经过每一个方格一次后回到原处?





解 每个方格看作一个顶点，2个顶点之间有边当且仅当马可以从一个方格跳到另一个方格, 得到16阶图G，如左图红边所示。

取$V_1 = \{a, b, c, d\}$，则$p(G - V_1) = 6 > |V_1|$，见右图。由定理，图中无哈密顿回路， 故问题无解。

哈密顿道路判定充分条件

定理2.4.1 若简单图G中任两点u, v，恒有$d(u) + d(v) \geq n - 1$，则G中存在Hamilton道路。

证明（思路？）

- 基本思路：构造法

（1）先证是连通的 （2）构造连通图G中的H道路

（1）反证法：假设G不连通，则G至少有两个连通分支，

设为H_1, H_2，取$u \in H_1$，$v \in H_2$，

则$d(u) \leq |H_1| - 1$，$d(v) \leq |H_2| - 1$

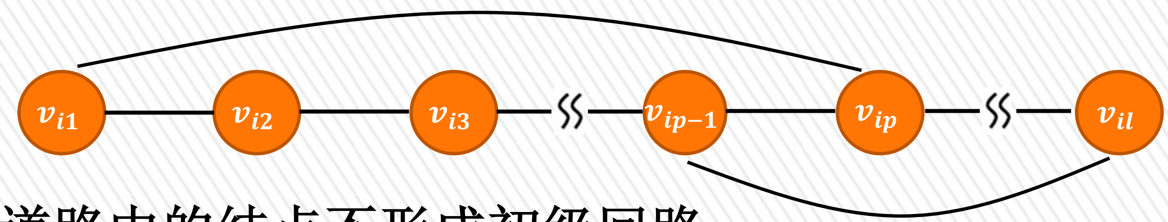
所以$d(u) + d(v) \leq |H_1| - 1 + |H_2| - 1 \leq n - 2$，矛盾。

所以G连通。

哈密顿道路判定充分条件

证明（续） （2）构造连通图G中的H道路

- 设P为G的包含l个结点的极长初级道路，$P = (v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{il})$，则与$v_{i1}$和$v_{il}$相邻的点都在$P$上
- 若$l = n$,则P为H道路
- 若$l < n$, 要证明G中一定存在经过结点$v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{il}$的初级回路$C$



假设道路中的结点不形成初级回路

设$(v_{i1}, v_{ip}) \in E(G)$，则不能有$(v_{ip-1}, v_{il}) \in E(G)$，否则删除$(v_{ip-1}, v_{ip})$，上图形成一个回路。

设$d(v_{i1})=k$，则$d(v_{il}) \leq l-k-1$，则$d(v_{i1}) + d(v_{il}) \leq l - 1 < n - 1$，与已知矛盾

因此存在回路C

哈密顿道路判定充分条件

证明（续）（2）构造连通图G中的H道路

- 设$C = (v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{il}, v_{i1})$，由于$G$连通，故存在$C$之外的结点$v_t$，与$C$中的某点$v_{iq}$相邻
- 可构造长为$l+1$的初级道路$P = (v_t, v_{iq}, v_{iq+1}, \ldots v_{il}, v_{i1}, \ldots, v_{iq-1})$,
- 如此构造直到$l = n$
- 因此存在P为H道路。

扩大路径法

哈密顿道路判定充分条件

推论2.4.1 若简单图G中任两点u, v，恒有$d(u) + d(v) \geq n$，则G中存在Hamilton回路。

证明　　(又叫奥尔Ore定理）

- 由定理可知，G中存在哈密顿道路H，设H为$v_1, v_2, \ldots, v_n$
- 假设不存在H回路
- 设$d(v_1) = k$，则$d(v_n) \leq n - k - 1$ (原因见定理2.4.1)
- 则$d(v_n) + d(v_1) < n$，与已知矛盾
- 因此存在初级回路C，即H回路

都是充分条件

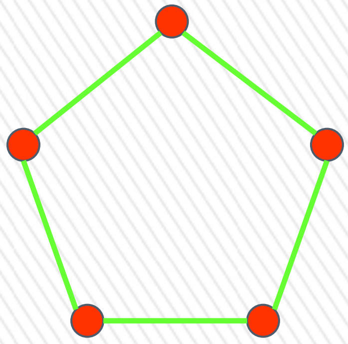
推论2.4.2 若简单图G中每个结点的度都大于等于$n/2$，则G中存在Hamilton回路。（又叫狄拉克Dirac定理）

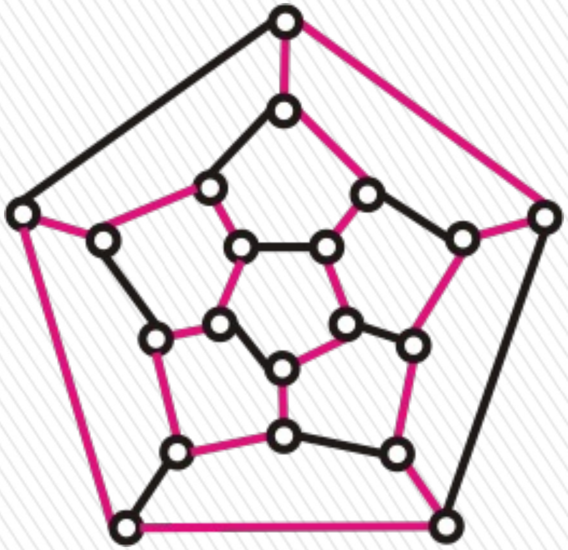
哈密顿道路判定充分条件

注意这是充分条件，不是必要条件

有些图有哈密顿回路，但既不满足Dirac定理，

也不满足Ore定理





哈密顿道路判定充分条件

例 某次国际会议8人参加，已知每人至少与其余7人中的4人有共同语言，问服务员能否将他们安排在同一张圆桌就座，使得每个人都能与两边的人交谈？

解 作无向图$G=\langle V, E\rangle$，其中$V=\{v|v$为与会者$\}$，$E=\{(u,v) \mid u, v\in V, u$与$v$有共同语言, 且$u\neq v\}$.

G为简单图。根据条件, $\forall v\in V, d(v)\geq 4$。于是，$\forall u, v\in V$, 有$d(u)+d(v)\geq 8$. 由定理可知$G$为哈密顿图. 服务员在$G$中找一条哈密顿回路$C$，按$C$中相邻关系安排座位即可。

哈密顿道路判定充分条件

例 $n(n>2)$个人中，设任意两人合在一起能认识其余n-2个人，则他们可以站成一排，使相邻者相识。

证明：根据题意，任意两个结点v_i，v_j合在一起能认识其余n-2个人，即有$d(v_i)+d(v_j)\geq n-2$

- 如果v_i, v_j认识，则有$d(v_i)+d(v_j)\geq n$
- 若v_i，v_j不认识，因每个人至少认识一个人，设任一个v_i认识的人为v_k，则v_k必认识v_j
- 否则v_i, v_k合起来不认识v_j，与已知矛盾
- 因此v_i, v_j同时认识其余的人中的至少一个人，

  即有$d(v_i)+d(v_j)\geq n-1$

哈密顿回路判定

引理2.4.2 简单图G中v_i和v_j是不相邻结点，满足$d(v_i)+\mathrm{d}(v_j)\geq n$，则$G$存在H回路的充要条件是$G+(v_i, v_j)$有H回路

证明

- 必要性显然
- 充分性：假设G不存在H回路

$G+(v_i, v_j)$的H回路定有边经过(v_i, v_j)，删去此边，

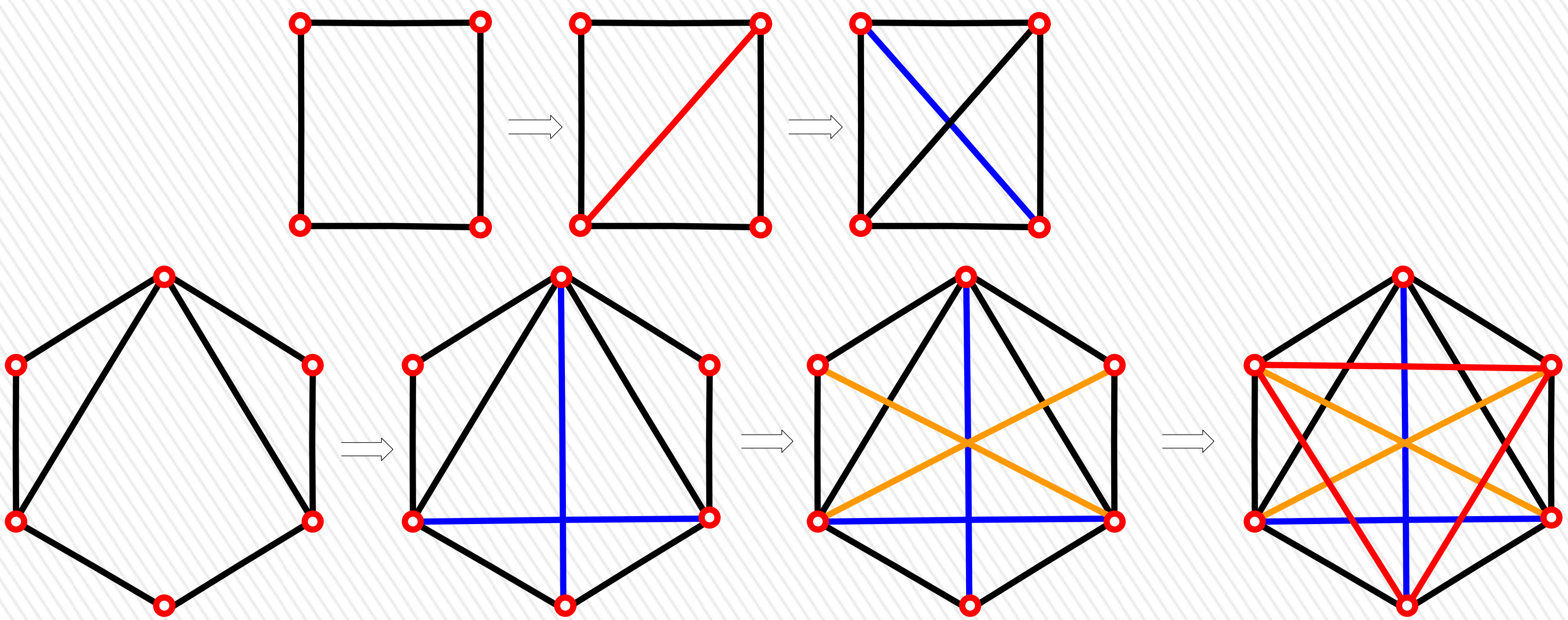
G中存在以v_i, v_j为端点的H道路。

根据假设，有$d(v_i)+d(v_j)<n$，与已知矛盾

因此充分性满足。

哈密顿回路判定

定义2.4.2 闭合图：若v_i和v_j是简单图G的不相邻结点，满足$d(v_i)+d(v_j)\geq n$，则令$G' = G + (v_i, v_j)$，对G'重复上述过程，直到不再有这样的结点对。最终得到的图称为G的闭合图，记为$C(G)$



哈密顿回路判定

引理2.4.2 简单图G的闭合图是唯一的。

证明

设$C_1(G)$和$C_2(G)$是G的两个闭合图

$L_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$，$L_2 = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$是$C_1(G)$和$C_2(G)$中新加入的边集合

需证$L_1 = L_2$

假设$L_1 \neq L_2$，为不失一般性，假设$e_{i+1} = (u, v) \in L_1$是构造时第一条不属于L_2的边，令$H = G \cup \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$

由于构造L_1时加入了e_{i+1}，则有$d(u) + d(v) \geq n$，

而且$C_2(G)$中包含H，因此$C_2(G)$中$d(u) + d(v) \geq n$成立

但是(u, v)不属于$C_2(G)$，与$C_2(G)$是G的闭合图矛盾

哈密顿回路判定

定理2.4.2 简单图G存在哈密顿回路的充要条件是其闭合图存在哈密顿回路。

证明

设$C(G) = G \cup L$，$L = \{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$

由引理2.4.1和2.4.2

G有H回路　　$G + e_1$有H回路　…　$G \cup L$有H回路

由于$C(G)$唯一，定理得证。

推论2.4.3 若简单图$G(n>2)$的闭合图是完全图，则G有哈密顿回路。

小结

- 欧拉回路与哈密顿回路的比较

	欧拉回路	哈密顿回路
回路类型	简单回路	初级回路
回路定义	过所有边一次且仅一次	过所有点一次且仅一次
如何判断	有充要条件 简单	无充要条件 复杂

小结

- 欧拉回(道)路判定的充要条件
  - 无向连通图*G*有欧拉回路的充要条件是各顶点的度都是偶数
  - 若无向连通图*G*中只有两个奇顶点，则*G*存在欧拉道路
  - 若有向连通图*G*中各个结点的正负度相等，则*G*中存在有向欧拉回路
  - 若有向连通图*G*中只有两个结点的正负度不相等，而且其中一个入度比出度多1，另一个入度比出度少1，则*G*中存在有向欧拉通路

小结

- 哈密顿回(道)路判定的必要条件
  - 若图$G = \langle V, E\rangle$有H-圈,则对V的任何非空子集S,均有$p(G - S) \le |S|$，其中$p(G - S)$是从G中删去S中所有结点及与这些结点关联的边所得到的子图的连通分支数
  - 若图$G = \langle V, E\rangle$有H-道路,则对V的任何非空子集S，均有$p(G - S) \le |S| + 1$
  - 有割点的图不是哈密顿图
  - 若图$G = \langle V_1, V_2, E\rangle$为二分图且有哈密顿回路,则$|V_1| = |V_2|$

小结

- 哈密顿回(道)路判定的充分条件
  - 若简单图G中任两点u, v，恒有$d(u) + d(v) \geq n - 1$，则G中存在哈密顿道路
  - 若简单图G中任两点u, v，恒有$d(u) + d(\mathrm{v}) \geq n$，则$G$中存在哈密顿回路
  - 若简单图G中任意一点v，有$d(v) \geq n/2$，则G中存在哈密顿回路
  - 若简单图$G(n > 2)$的闭合图是完全图，则G有哈密顿回路

小结

- 判断一个图是否有哈密顿回(道)路的可行方法
  - 不满足必要条件 → 没有
  - 满足充分条件 → 有
  - 其他 → 具体问题，具体分析
    - 构造闭合图
    - 搜索出一条哈密顿回路