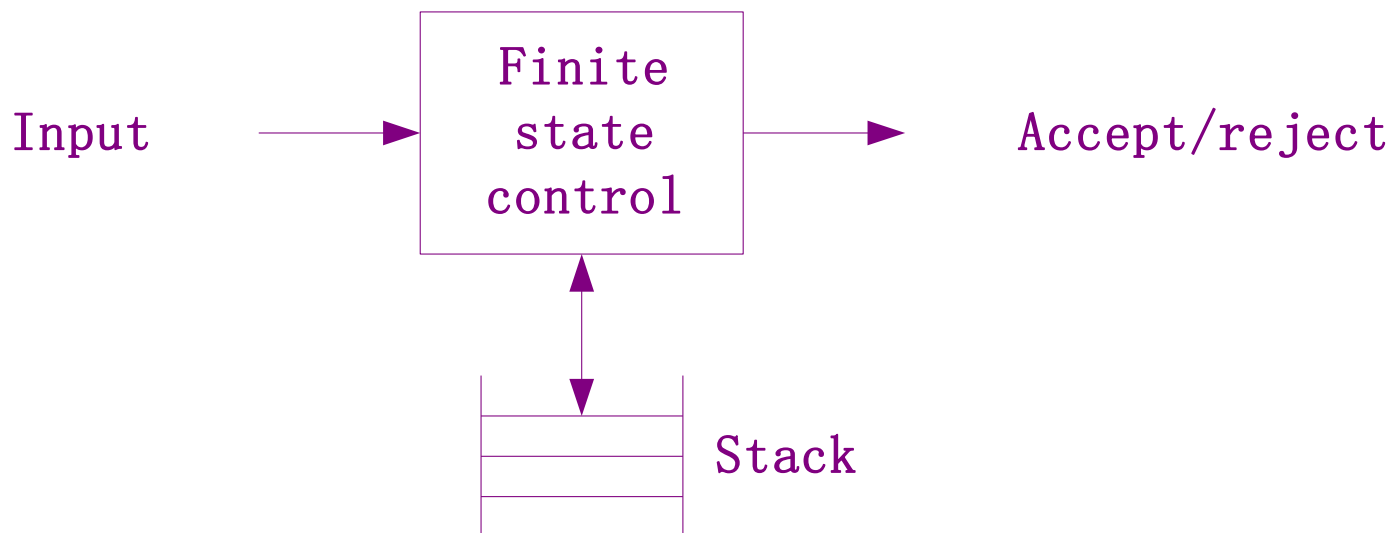


## ✧ 下推自动机

- ◇ 下推自动机的基本概念
- ◇ 下推自动机的语言：两种定义
- ◇ 两种定义的等价性

◇ 下推自动机 (*pushdown automaton*)  
是带有一个堆栈的有限状态自动机.



# 下推自动机的基本概念

◇ 形式定义 一个下推自动机 **PDA** 是一个七元组

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F).$$

◇ 有限状态集

◇ 有限输入符号集

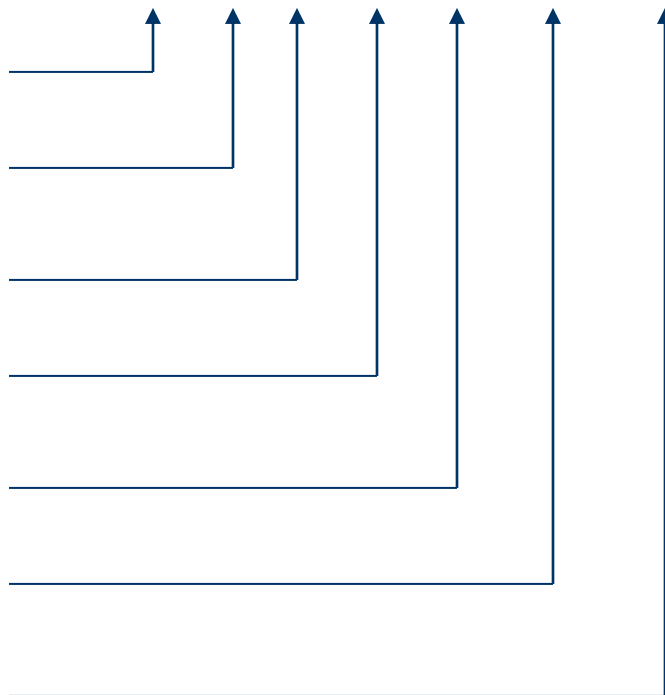
◇ 有限堆栈符号集

◇ 转移函数

◇ 一个开始状态

◇ 一个开始堆栈符号

◇ 终态集合



$$q_0 \in Q$$

$$Z_0 \in \Gamma$$

$$F \subseteq Q$$

$$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{ \varepsilon \}) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$$

# 下推自动机的基本概念

◇ 举例 所接受语言为  $L = \{ 0^n 1^n \mid n \geq 1 \}$  的一个 PDA

$$P = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{X, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$$

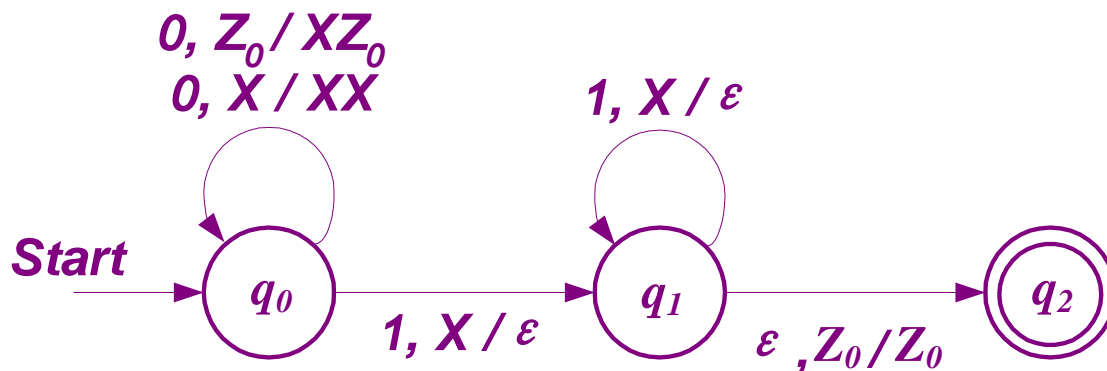
其中，转移函数定义如下

$$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}, \quad \delta(q_0, 0, X) = \{(q_0, XX)\},$$

$$\delta(q_0, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}, \quad \delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

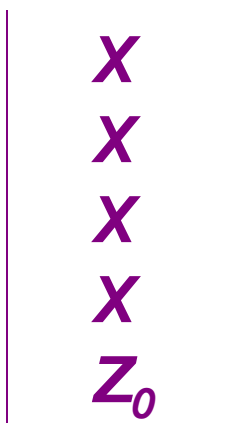
$$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$$

对其余的参数值， $\delta(q, a, Y) = \emptyset$

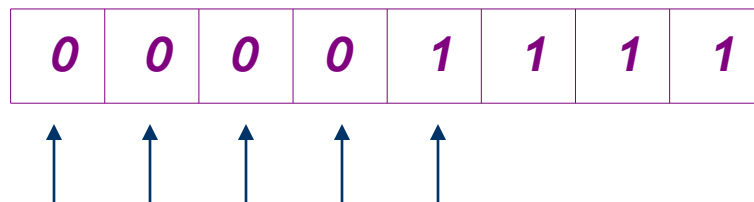


# 下推自动机的基本概念

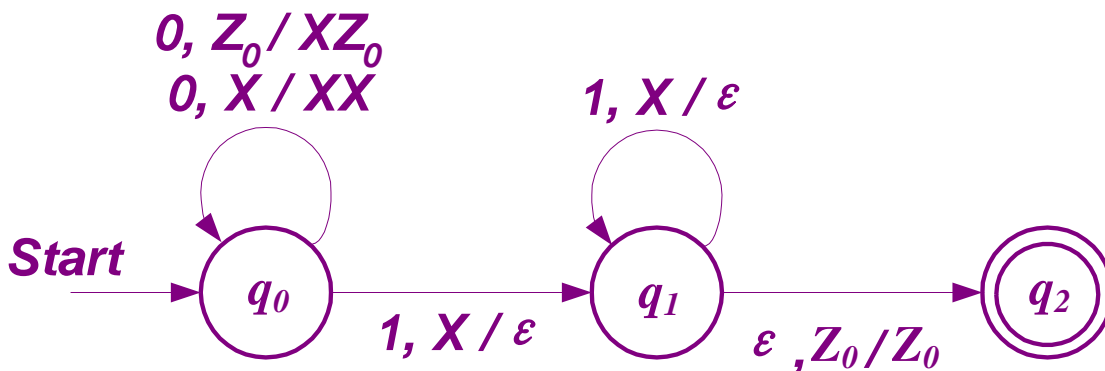
◇ 举例 上述 *PDA* 如何接受输入字符串？例如，00001111.



stack

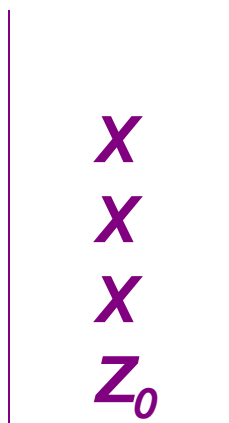


当前状态:  $q_0$   $q_0$   $q_0$   $q_0$   $q_0$



# 下推自动机的基本概念

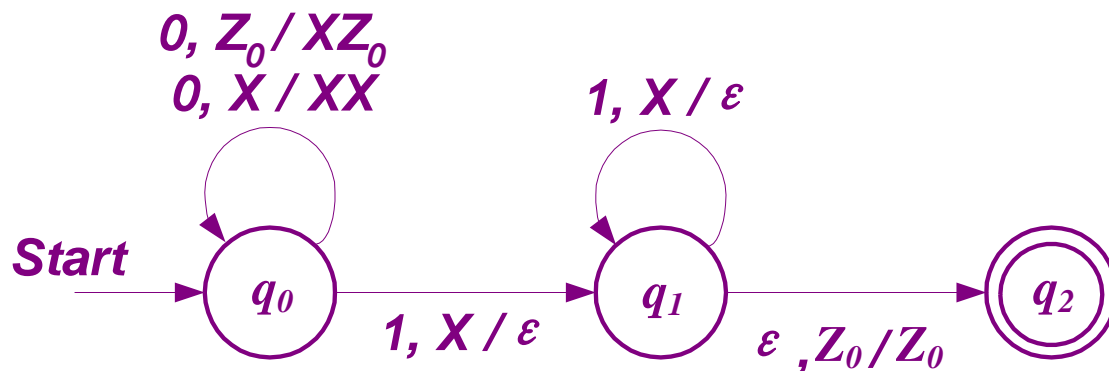
◇ 举例 上述 *PDA* 如何接受输入字符串？例如，00001111.



stack

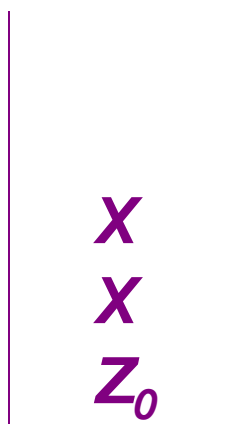


$q_1$



# 下推自动机的基本概念

◇ 举例 上述 *PDA* 如何接受输入字符串？例如，00001111.

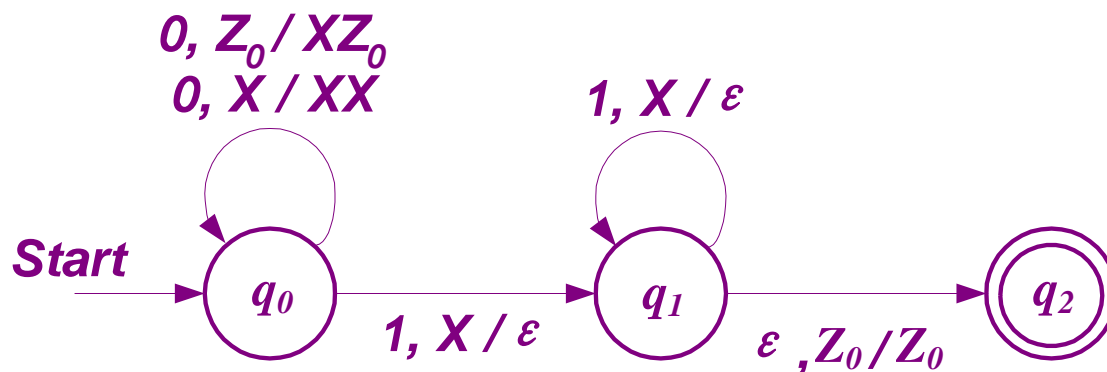


stack



↑  
 $q_1$

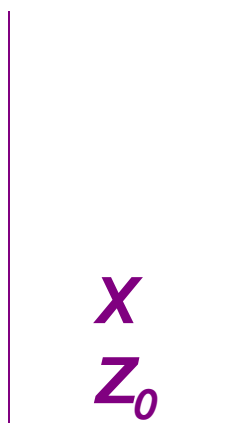
当前状态:





# 下推自动机的基本概念

◇ 举例 上述 *PDA* 如何接受输入字符串？例如，00001111.

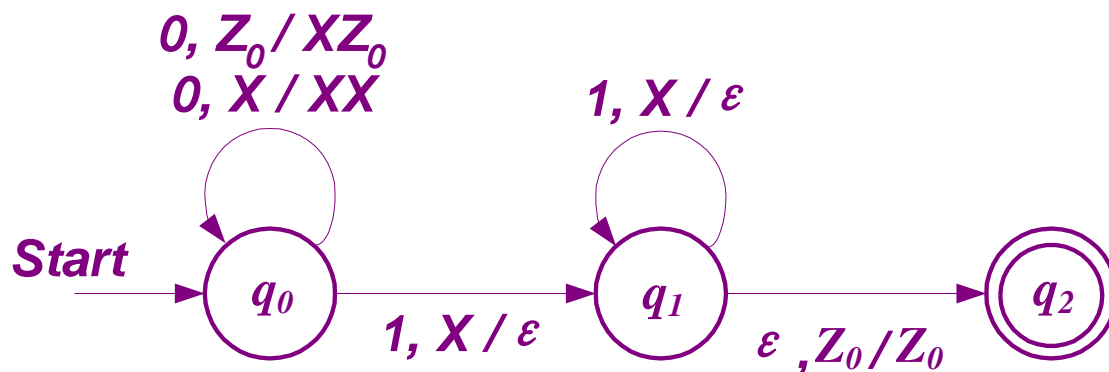


stack

当前状态:

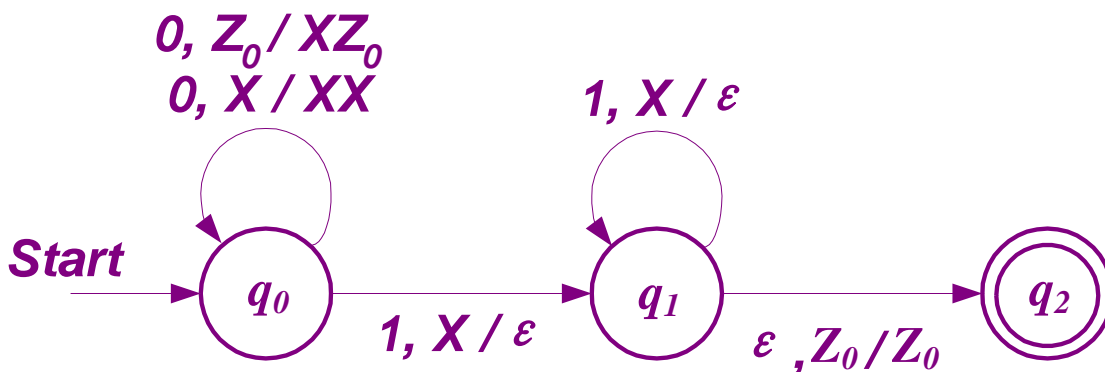


↑  
 $q_1$



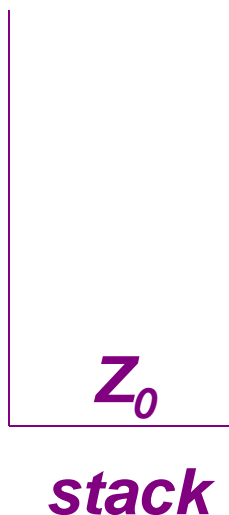
# 下推自动机的基本概念

◇ 举例 上述 *PDA* 如何接受输入字符串？例如，00001111.



# 下推自动机的基本概念

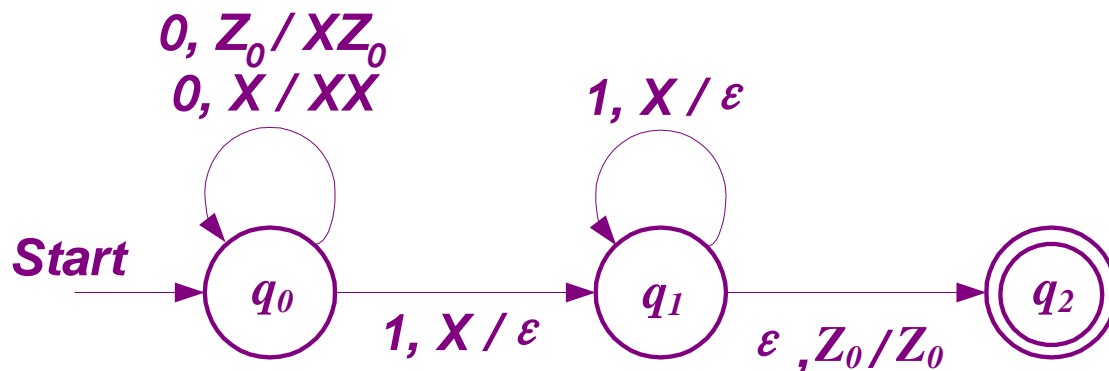
◇ 举例 上述 *PDA* 如何接受输入字符串？例如，*00001111*.



当前状态:



$q_2$



# 下推自动机的语言：两种定义

✧ 用  $ID$  (*instantaneous descriptions*) 表达当前格局

$PDA$  的当前格局用三元组  $(q, w, \gamma)$  表示, 称为  $ID$ , 其中  $q$  为当前状态,  $w$  为剩余的输入串,  $\gamma$  为当前栈中的内容.

✧ 设  $PDA\ P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ , 定义  $ID$  推导关系  $\vdash_P$  (在不至于混淆时用  $\vdash$  表示) 为

$$(q, aw, X\beta) \vdash (p, w, \alpha\beta) \text{ iff } (p, \alpha) \in \delta(q, a, X),$$

其中  $p, q \in Q$ ,  $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ ,  $w \in \Sigma^*$ ,  $X \in \Gamma$ ,  $\alpha, \beta \in \Gamma^*$ .

✧ 上述  $ID$  推导关系的自反传递闭包  $\vdash_P^*$  (或  $\vdash^*$ ) 定义为

基础 对任意  $ID\ I, I \vdash^* I$ .

归纳 对任意  $ID\ I, J, K$ , 如果  $I \vdash K, K \vdash^* J$ , 则  $I \vdash^* J$ .

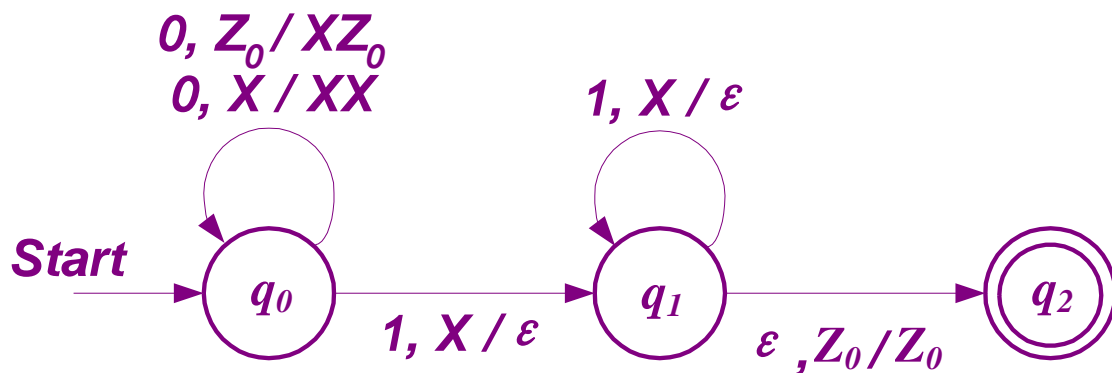
# 下推自动机的语言：两种定义

◇ 结论 设  $PDA\ P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ , 如果  
 $(q, x, \alpha) \vdash^* (p, y, \beta)$ , 则对任何  $w \in \Sigma^*$  和  $\gamma \in \Gamma^*$ ,  
 $(q, xw, \alpha\gamma) \vdash^* (p, yw, \beta\gamma)$ .

证明思路：归纳于  $(q, x, \alpha) \vdash^* (p, y, \beta)$  的步数.

◇ 举例 下图  $PDA$  接受输入串 **000111** 的  $ID$  推导过程.

$$(q_0, 000111, Z_0) \vdash^* (q_0, 111, XXXZ_0) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash^* (q_2, \varepsilon, Z_0)$$



# 下推自动机的语言：两种定义

◇ 终态接受的定义方法 设  $PDA\ P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ ,  
定义  $L(P) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \alpha)\}$ , 其中  $q \in F, \alpha \in \Gamma^*$ .

◇ 空栈接受的定义方法 设  $PDA\ P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$ ,  
定义  $N(P) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)\}$ , 其中  $q \in Q$ .

◇ 举例 所接受语言为  $N(P) = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$  的一个  $PDA$

$$P = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \{X, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0)$$

其中，转移函数定义如下

$$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}, \quad \delta(q_0, 0, X) = \{(q_0, XX)\},$$

$$\delta(q_0, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}, \quad \delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

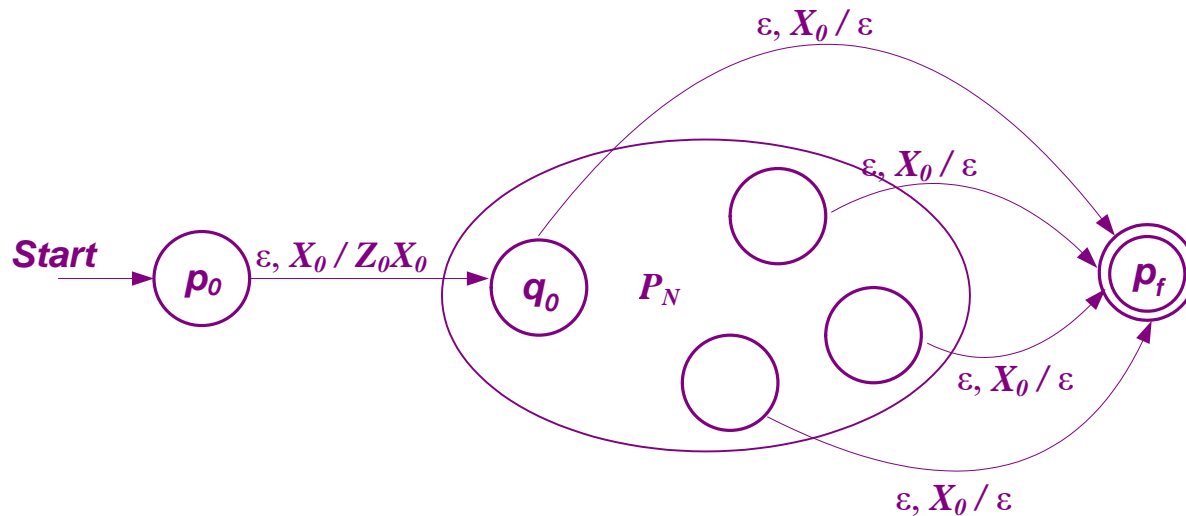
$$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}, \quad \text{对其余的参数值, } \delta(q, a, Y) = \emptyset$$

# 两种定义的等价性

## ◇ 从空栈接受到终态接受

设  $PDA\ P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_N, q_0, Z_0)$ ,  $L = L(P_N)$ , 则存在  $PDA\ P_F$ , 满足  $L = L(P_F)$ .

证明思路:



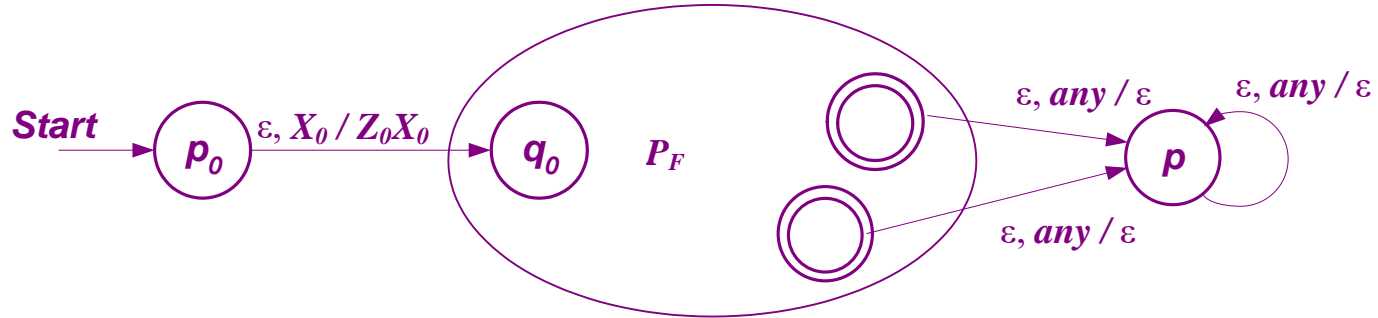
$$P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\})$$

# 两种定义的等价性

## ☆ 从终态接受到空栈接受

设  $PDA\ P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_F, q_0, Z_0, F)$ ,  $L = L(P_F)$ , 则存在  $PDA\ P_N$ , 满足  $L = N(P_N)$ .

证明思路:



$$P_N = (Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_N, p_0, X_0)$$



✧ 必做题:

- ***Ex.6.2.1 (b), (c)***
- ***Ex.6.2.6***

✧ 思考题:

- ***!Ex.6.2.2(b)***

## ☆ 自测题:

— 试构造接受下列语言的一个 PDA (空栈接受或终态接受均可):

1)  $L = \{ w \mid w \in \{a, b\}^*, \text{且 } w \text{ 的任何前缀中 } a \text{ 的数目至少 } 2 \text{ 倍于 } b \text{ 的数目} \}$

2)  $L = \{ w \mid w \in \{a, b\}^*, \text{且 } w \text{ 中 } a \text{ 的数目不等于 } b \text{ 的数目} \}$

3)  $L = \{ w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ 中 } a \text{ 和 } b \text{ 的个数相同且不含连续的 } c \}$

4)  $L = \{ a^n b^m c^k \mid n \geq 0, m \geq 0, k \geq 0, \text{以及 } n + 2m = k \}$

*That's all for today.*

*Thank You*