第四周作业

$$T: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}$$

1. 设 $T: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ 定义为 $T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ 3x_3 \\ \cancel{n x_n} \end{pmatrix}$

求T的全部不变子空间.（~~只考虑n=3情形，若无法解答一般情形~~）.

2. 设V是一个复4维空间，$\varphi: V \longrightarrow V$ 是线性变换，设 φ 在V的一组基 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

求证：由向量 $e_1 + 2e_2$ 和 $e_2 + e_3 + 2e_4$ 生成的子空间U是 φ 的不变子空间.

3. 设V是复n维空间，线性变换 σ 在V的一组基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 下矩阵是

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

证明：(1) V中含 e_n 的 σ 的不变子空间只有V;

(2) V中任何非零的 σ 的不变子空间包含 e_1;

(3) V不能写成两个非平凡不变子空间的直和.

（即非零）

4. 设 V 是一个复 n 维空间，$\sigma: V \longrightarrow V$ 线性变换。设 $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$，$(f(x), g(x))=1$，且 $f(\sigma)g(\sigma)=0_V$

（注：若 $h(x)=a_k x^k+\cdots+a_1x+a_0$，则 $h(\sigma)=a_k\sigma^k+\cdots+a_1\sigma+a_0 id_V$ 是 V 上线性变换）

证明：$V=V_1 \oplus V_2$ 其中 $V_1=\ker f(\sigma) \overset{\text{定义}}{=} \{v\in V \mid f(\sigma)(v)=0\}$，$V_2=\ker g(\sigma) \xlongequal{\text{定义}} \{v\in V \mid g(\sigma)(v)=0\}$

（提示：$(f(x), g(x))=1 \Rightarrow \exists\, u(x), v(x)$，$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1 \Rightarrow$ ~~$f(x)$~~ $f(\sigma)u(\sigma)+g(\sigma)v(\sigma)=id_V$

$\forall v\in V$，$v=id_V(v)=f(\sigma)u(\sigma)(v)+g(\sigma)v(\sigma)(v)$。

$g(\sigma)[f(\sigma)u(\sigma)(v)]=0 \Rightarrow f(\sigma)u(\sigma)(v)\in \ker g(\sigma)$）。

5. 设 $T: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 定义为 $T(v)=Av$。求 $\mathbb{C}^n$ 的根子空间分解。求可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是分块对角阵。（这里 P 是由根子空间的基合并而成）。其中 A 是

(1) $n=3$
$$A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) $n=3$
$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

(3) $n=4$
$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. 设 V 是一个 T-不变子空间，且 $V \neq \{\vec{0}\}$，则

$\exists\, v \neq \vec{0} \in V$，设 $v = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ $\quad e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，

$e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. $\quad T(v) = a_1\vec{e}_1 + 2a_2\vec{e}_2 + 3a_3\vec{e}_3$，$T^2(v) = a_1\vec{e}_1 + 4a_2\vec{e}_2 + 9a_3\vec{e}_3$

$v, T(v), T^2(v) \in V$

假设 $a_1, a_2, a_3 \neq 0$，则

$$(v, T(v), T^2(v)) = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & 2a_2 & 4a_2 \\ a_3 & 3a_3 & 9a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

即 $v, T(v), T^2(v) \in V$ 线性无关 $\Rightarrow V = \mathbb{C}^3$

假设 $a_1 = 0$，$a_2, a_3 \neq 0$，则 $(v, T(v)) = (e_2\ e_3)\begin{pmatrix} a_2 & 2a_2 \\ a_3 & 3a_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (e_2\ e_3) = (v, T(v))\begin{pmatrix} a_2 & 2a_2 \\ a_3 & 3a_3 \end{pmatrix}^{-1}$ 即 e_2, e_3 是 $v, T(v)$

的线性组合 $\Rightarrow e_2, e_3 \in V \Rightarrow V \supseteq \left\{\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{C}\right\}$

同理 若 $a_1 = a_2 = 0$，$a_3 \neq 0$，$\Rightarrow e_3 \in V$

一般地，若 $v = a_{i_1}e_{i_1} + \cdots + a_{i_k}e_{i_k} \in V$，$a_{i_1}, \cdots, a_{i_k} \neq 0$.

则 $(v, T(v), \cdots, T^k(v)) = (e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})A$

A 可逆 $\Rightarrow e_{i_1}, \cdots, e_{i_k} \in V$

因此，V 可能的情形：$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{C}\right\}$，$\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\y\end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{C}\right\}$，$\mathbb{C}^3$，

$\{\vec{0}\}$，$\{ae_1 \mid a \in \mathbb{C}\}$，$\{ae_2 \mid a \in \mathbb{C}\}$，$\{ae_3 \mid a \in \mathbb{C}\}$，$\left\{\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{C}\right\}$

2. $U=\{c_1(e_1+2e_2)+c_2(e_2+e_3+2e_4)\mid c_1,c_2\in\mathbb{C}\}$

$\varphi(e_1+2e_2)=\varphi(e_1)+2\varphi(e_2)=(e_1\ e_2\ e_3\ e_4)A\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$

$=(e_1\ e_2\ e_3\ e_4)\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}=e_1+2e_2\in U$

$\varphi(e_2+e_3+2e_4)=(e_1\ e_2\ e_3\ e_4)A\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}=e_2+e_3+2e_4\in U$

$\Rightarrow \forall \vec{u}\in U\quad \vec{u}=c_1(e_1+2e_2)+c_2(e_2+e_3+2e_4)$

$\varphi(\vec{u})=c_1\varphi(e_1+2e_2)+c_2\varphi(e_2+e_3+2e_4)\in U$

3. (1) 设 $W\subseteq V$ 是 σ-不变子空间, 且 $e_n\in W$, 则

$\sigma(e_n)=(e_1\cdots e_n)\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}=(e_1\cdots e_n)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\\ \lambda\end{pmatrix}=e_{n-1}+\lambda e_n$

$\Rightarrow e_{n-1}+\lambda e_n\in W\ \Rightarrow e_{n-1}\in W$

$\sigma(e_{n-1})=(e_1\cdots e_n)\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1\\ & & & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\\0\end{pmatrix}=e_{n-2}+\lambda e_{n-1}$

$\Rightarrow e_{n-2}+\lambda e_{n-1}\in W\Rightarrow e_{n-2}\in W$

......

类似讨论, 得 $e_1,\cdots,e_n\in W\ \Rightarrow\ W=V$

(2) 设 $W\subseteq V$ 是 σ-不变子空间, 且 $W\neq\{\vec{0}\}$, 设 $v\neq\vec{0}$

$\in W$, v ~~$=a_{i_1}e_{i_1}+\cdots+a_{i_k}e_{i_k}$, $a_{i_k}\neq 0$~~.

设 $v=a_1e_1+\cdots+a_ke_k\quad a_k\neq 0$.

$\sigma(v)\in W \qquad \sigma(v)-\lambda\, id_V(v)=\sigma(v)-\lambda v\in W$

(即 W 也是 $\sigma-\lambda id_V$ − 不变子空间).

$\Rightarrow (\sigma-\lambda\cdot id_V)^{k-1}(v)\in W$.

但 $(\sigma-\lambda\cdot id_V)^{k-1}$ 关于基 $e_1,\cdots,e_n$ 的表示矩阵 $=\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}^{k-1}$

$$\Rightarrow (\sigma-\lambda\cdot id_V)^{k-1}(v)=(e_1\cdots e_n)\begin{pmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}^{k-1}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=(e_1,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}a_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=a_k e_1\in W\Rightarrow e_1\in W$$

(3) 由(2)任两个非零不变子空间均含 e_1, 它们的交非零.

4. 首先证 $V=V_1+V_2$

因为 $(f(x),g(x))=1$, 则存在 $u(x), v(x)$,

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

代入 $x=\sigma$, 得 $f(\sigma)u(\sigma)+g(\sigma)v(\sigma)=id_V$

$\forall v\in V,\quad v=id_V(v)=f(\sigma)u(\sigma)(v)+g(\sigma)v(\sigma)(v)\quad (*)$

因为 $f(\sigma)g(\sigma)=g(\sigma)f(\sigma)=0_V$,

$f(\sigma)[g(\sigma)v(\sigma)(v)]=\vec{0}\in V\Rightarrow g(\sigma)v(\sigma)(v)\in \operatorname{Ker} f(\sigma)$

$g(\sigma)[f(\sigma)u(\sigma)(v)]=\vec{0}\in V\Rightarrow f(\sigma)u(\sigma)(v)\in \operatorname{Ker} g(\sigma)$

其次证明：$V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$

设 $\vec{w} \in V_1 \cap V_2$ 则由 (*)

$$\vec{w} = f(\sigma)u(\sigma)(\vec{w}) + g(\sigma)v(\sigma)(\vec{w})$$
$$= u(\sigma)[f(\sigma)(\vec{w})] + v(\sigma)[g(\sigma)(\vec{w})] = \vec{0} \in V$$

因此 $V = V_1 \oplus V_2$

5. (1) $|\lambda I_3 - A| = \lambda^2(\lambda-1)$ $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$

$$G_{\lambda_1} = \{X \mid A^2X = 0\} = \left\{c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \mathbb{C}\right\}$$

$$G_{\lambda_2} = \{X \mid (A-I)X = 0\} = \left\{c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{C}\right\}$$

则 $\mathbb{C}^3 = G_{\lambda_1} \oplus G_{\lambda_2}$

$$T\left[\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$T\left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$T\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

令 $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\-3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 则 $AP = P\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\-4 & -2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \left(\begin{array}{cc|c}2 & 1 & 0\\-4 & 2 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

(2) $|\lambda I_3 - A| = (\lambda+1)^2(\lambda-3)$ $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3$

$$G_{\lambda_1}=\{X \mid (A+I)^2X=0\}=\left\{c_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, c_1,c_2\in\mathbb{C}\right\}$$

$$G_{\lambda_2}=\{X \mid (A-3I)X=0\}=\left\{c\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \,\middle|\, c\in\mathbb{C}\right\}$$

则 $\mathbb{C}^3=G_{\lambda_1}\oplus G_{\lambda_2}$

令 $P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-1&2\\1&0&2\end{pmatrix}$ $\qquad P^{-1}AP=\left(\begin{array}{cc|c}-1&1&0\\0&-1&0\\\hline 0&0&3\end{array}\right)$

(3) $|\lambda I_4-A|=\lambda^2(\lambda-2)^2$ $\quad\lambda_1=0,\ \lambda_2=2$

$$G_{\lambda_1}=\{X \mid A^2X=0\}=\left\{c_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, c_1,c_2\in\mathbb{C}\right\}$$

$$G_{\lambda_2}=\{X \mid (A-2I)^2X=0\}=\left\{c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, c_1,c_2\in\mathbb{C}\right\}$$

$G_{\lambda_1}\oplus G_{\lambda_2}=\mathbb{C}^4$

令 $P=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$ $\qquad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&&\\&&2&1\\&&&2\end{pmatrix}$