第 四 讲

✧ 有限状态自动机

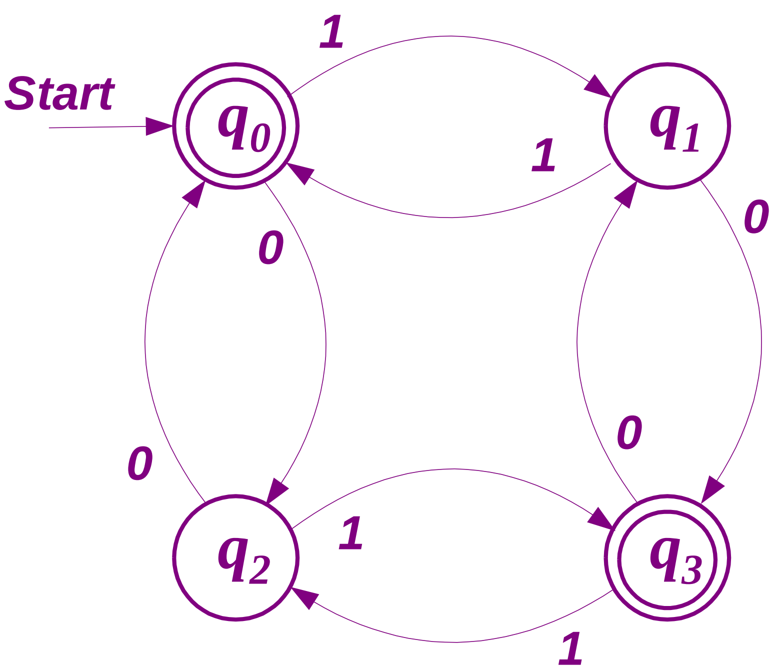
有限状态自动机

- ✧ 确定有限自动机
- ✧ 非确定有限自动机
- ✧ 确定与非确定有限自动机的等价性
- ✧ 有限自动机的一个应用 — 文本搜索
- ✧ 带 ε-转移的非确定有限自动机
- ✧ （确定）有限自动机的最小化

确定有限自动机

✧ 有限自动机的五要素

- 有限状态集
- 有限输入符号集
- 转移函数
- 一个开始状态
- 一个终态集合



确定有限自动机

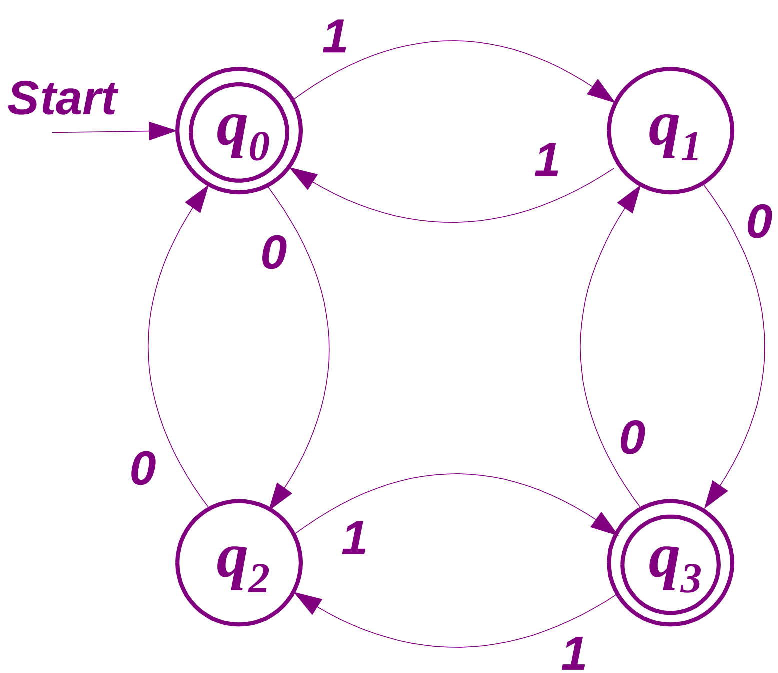
✧ 确定有限自动机的形式定义

一个确定有限状态自动机 DFA (deterministic finite automata) 是一个五元组 $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

- 有限状态集 → Q
- 有限输入符号集 → Σ
- 转移函数 → δ　　$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$
- 一个开始状态 → q_0　　$q_0 \in Q$
- 一个终态集合 → F　　$F \subseteq Q$

确定有限自动机

✧ 转移图表示的 DFA



- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $\delta(q_0, 0) = q_2,\ \delta(q_0, 1) = q_1$
  $\delta(q_1, 0) = q_3,\ \delta(q_1, 1) = q_0$
  $\delta(q_2, 0) = q_0,\ \delta(q_2, 1) = q_3$
  $\delta(q_3, 0) = q_1,\ \delta(q_3, 1) = q_2$
- q_0
- $F = \{q_0, q_3\}$

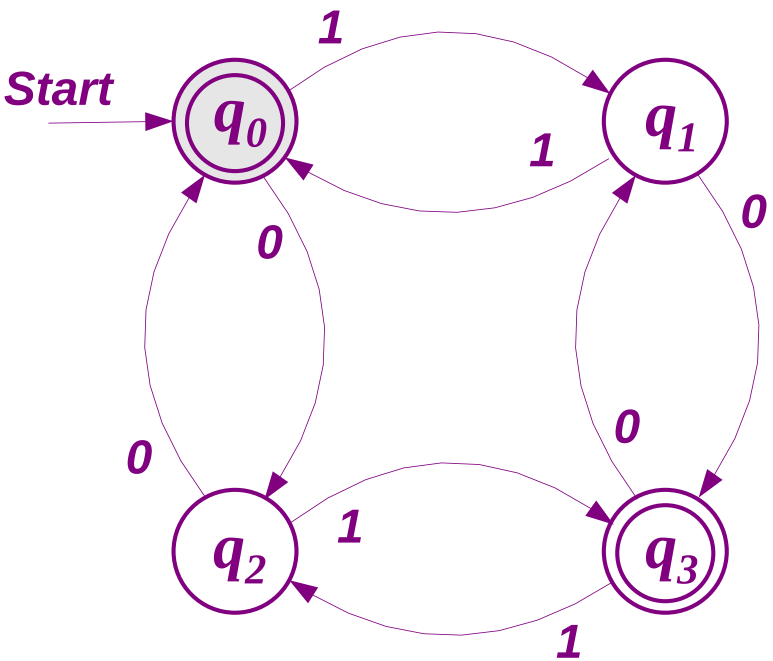
确定有限自动机

✧ 转移表表示的 DFA

	0	1
$\rightarrow *q_0$	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
$*q_3$	q_1	q_2

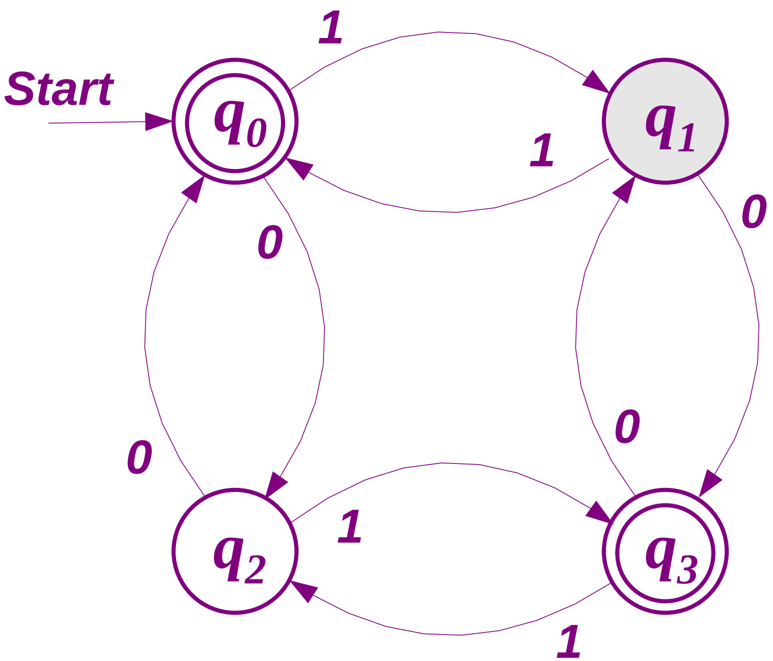
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $\delta(q_0,0) = q_2,\ \delta(q_0,1) = q_1$
  $\delta(q_1,0) = q_3,\ \delta(q_1,1) = q_0$
  $\delta(q_2,0) = q_0,\ \delta(q_2,1) = q_3$
  $\delta(q_3,0) = q_1,\ \delta(q_3,1) = q_2$
- q_0
- $F = \{q_0, q_3\}$

✧ DFA如何接受输入符号串



1	0	0	1	0	1

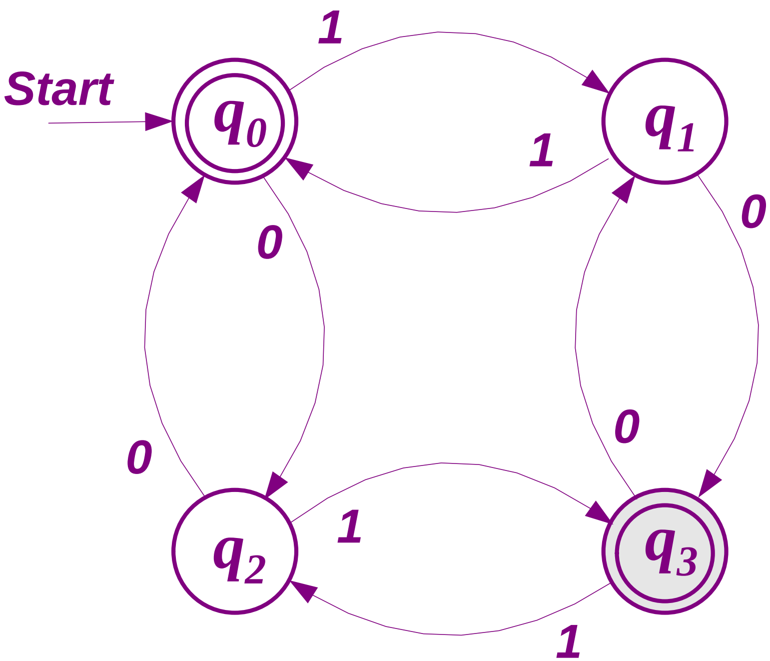
✧ DFA如何接受输入符号串



1	0	0	1	0	1

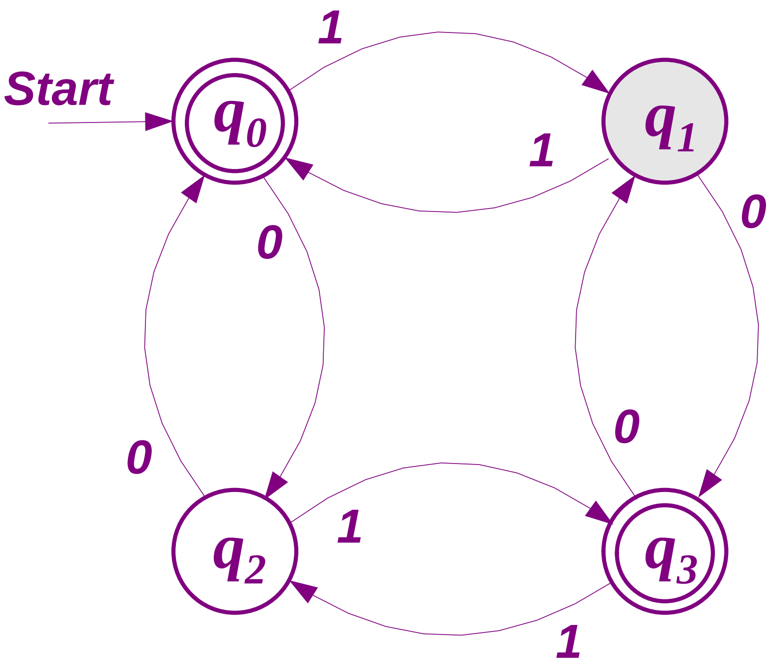
↑

✧ DFA如何接受输入符号串



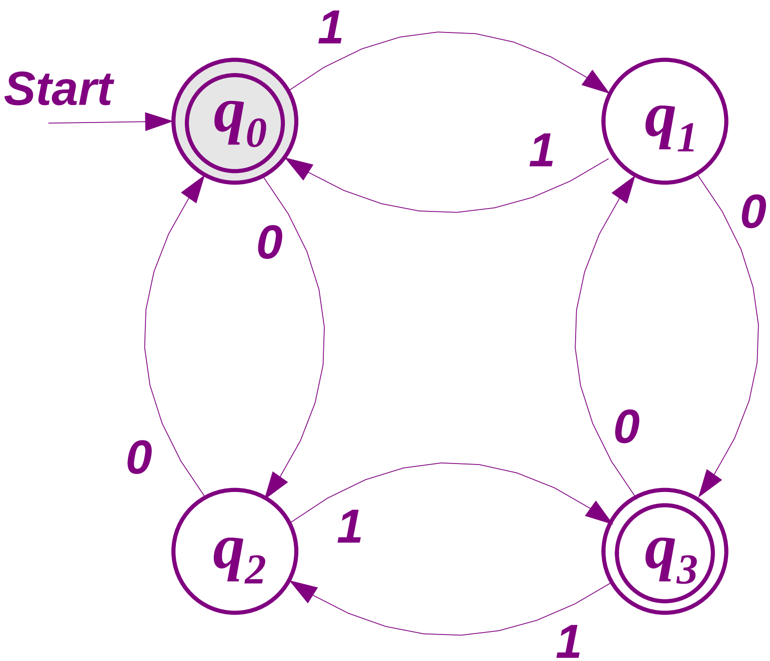
1	0	0	1	0	1

✧ DFA如何接受输入符号串



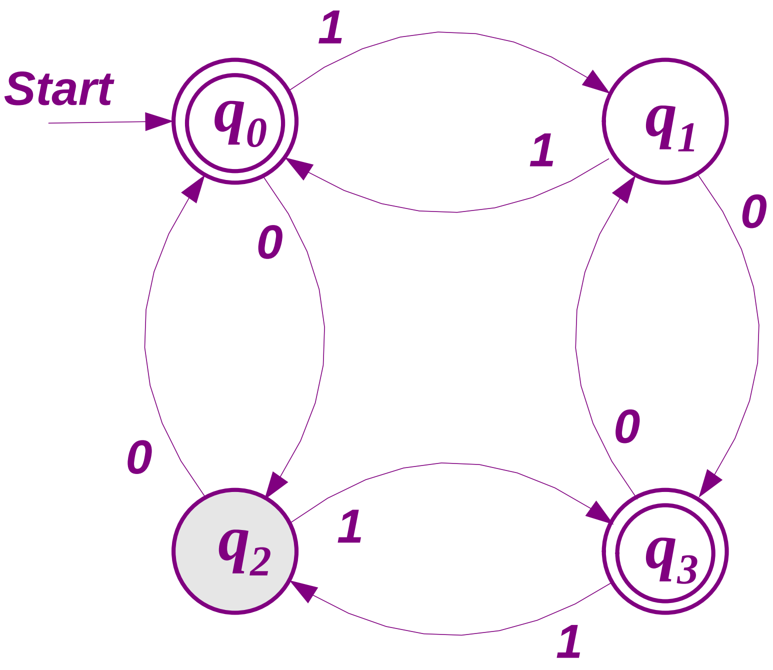
1	0	0	1	0	1

✧ DFA如何接受输入符号串



1	0	0	1	0	1

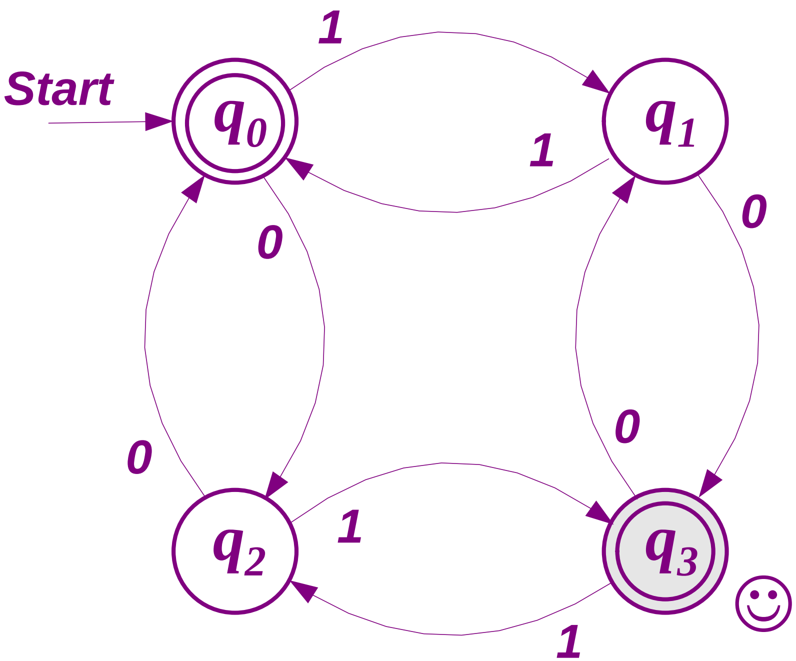
✧ DFA如何接受输入符号串



1	0	0	1	0	1

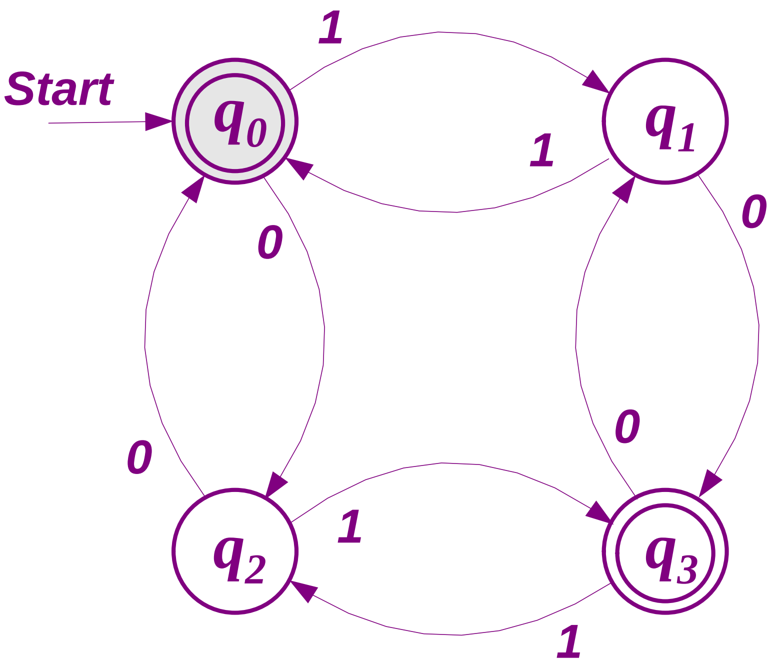
↑

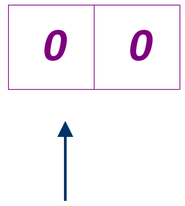
✧ DFA如何接受输入符号串



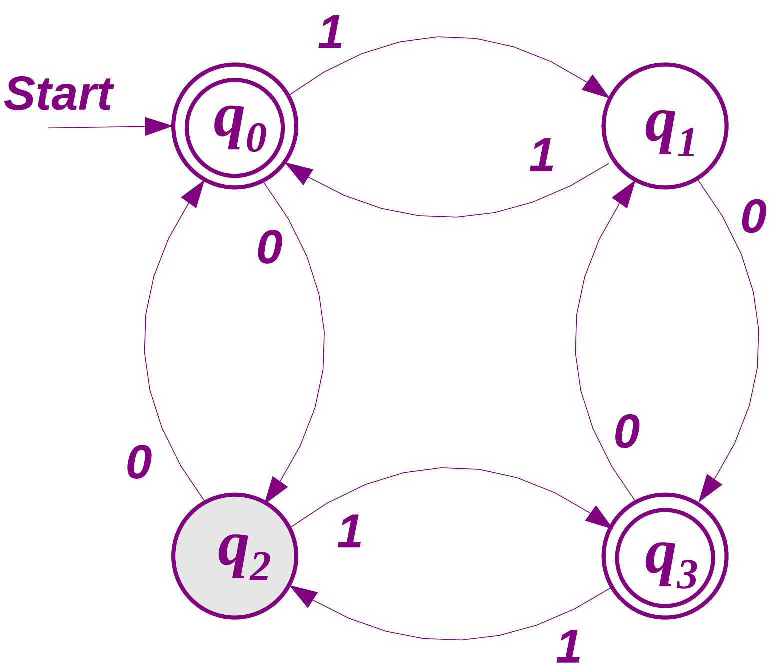
1	0	0	1	0	1

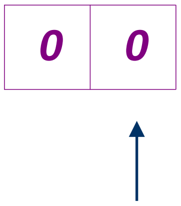
✧ DFA如何接受输入符号串





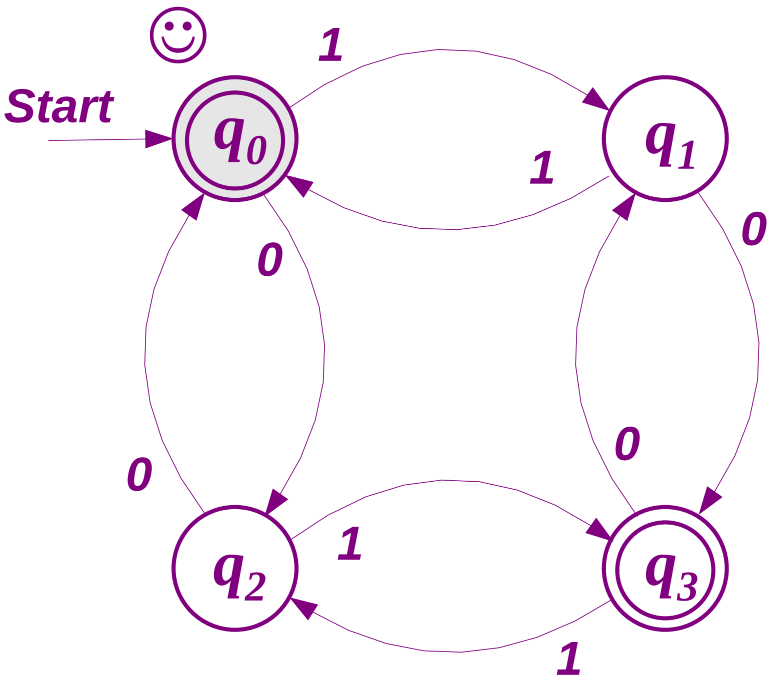
✧ DFA如何接受输入符号串

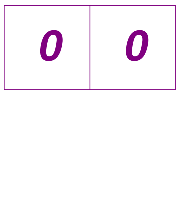




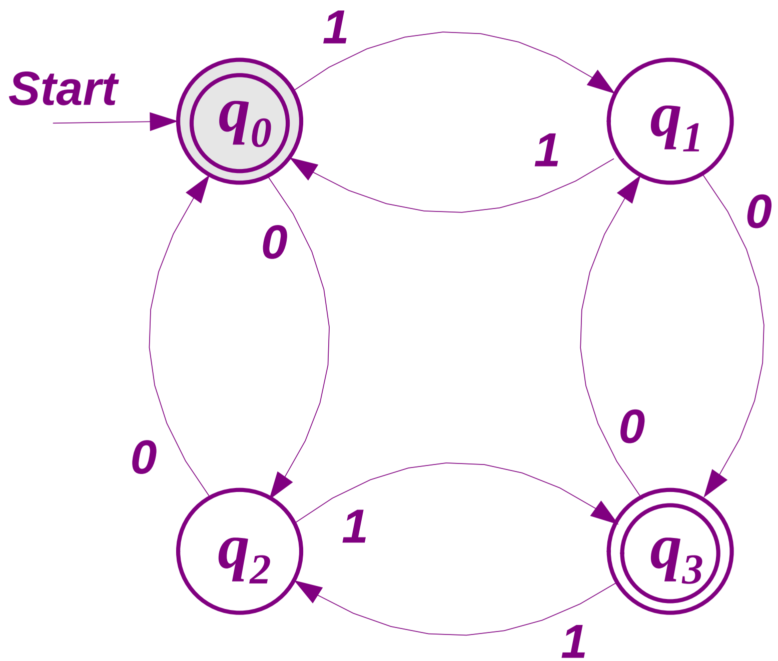
确定有限自动机

✧ DFA如何接受输入符号串





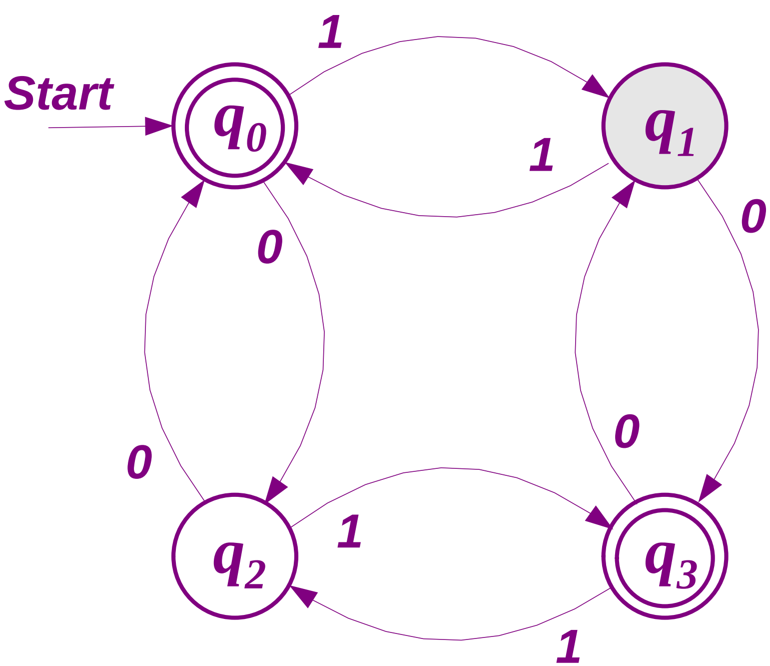
✧ DFA如何接受输入符号串



1	0	1	0	1

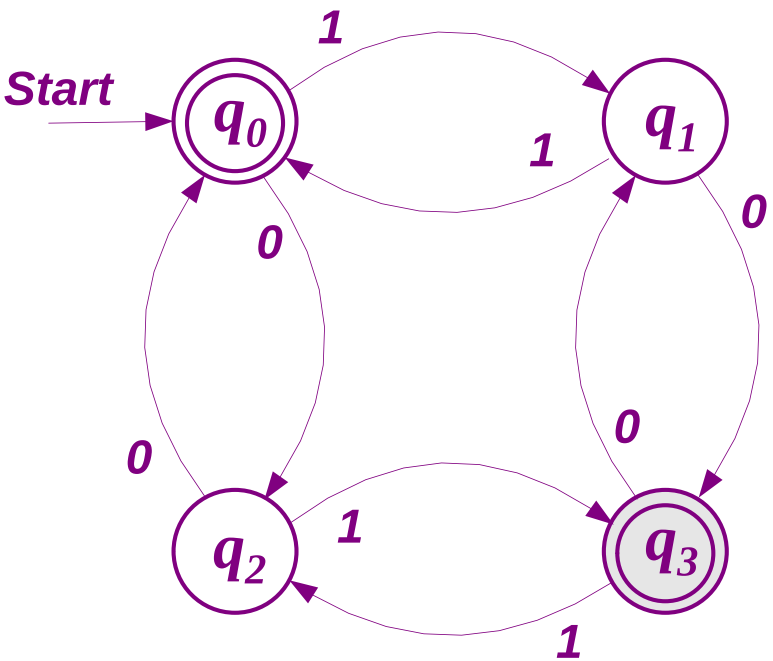
↑

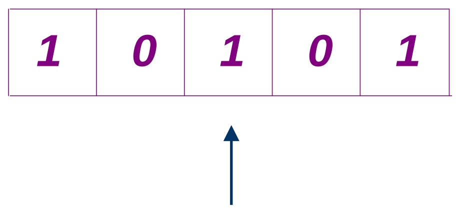
✧ DFA如何接受输入符号串



1	0	1	0	1

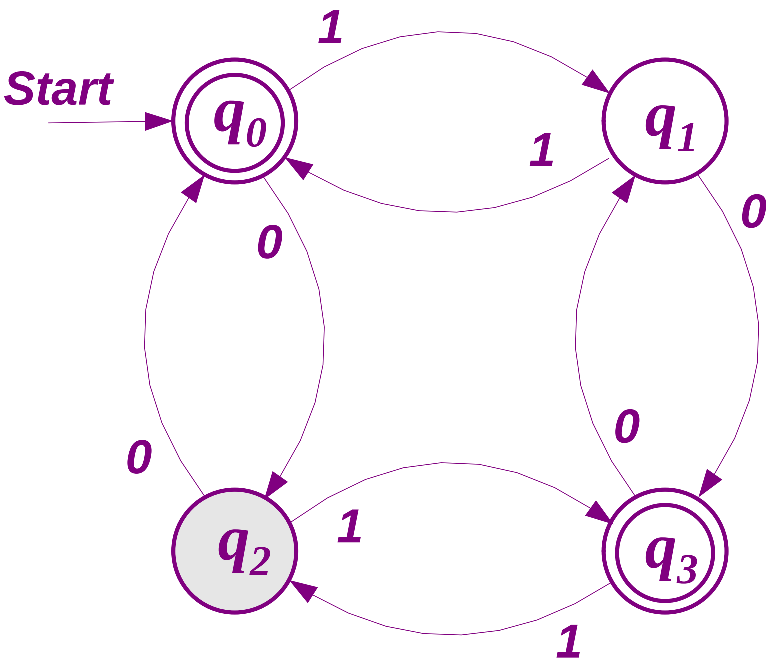
✧ DFA如何接受输入符号串





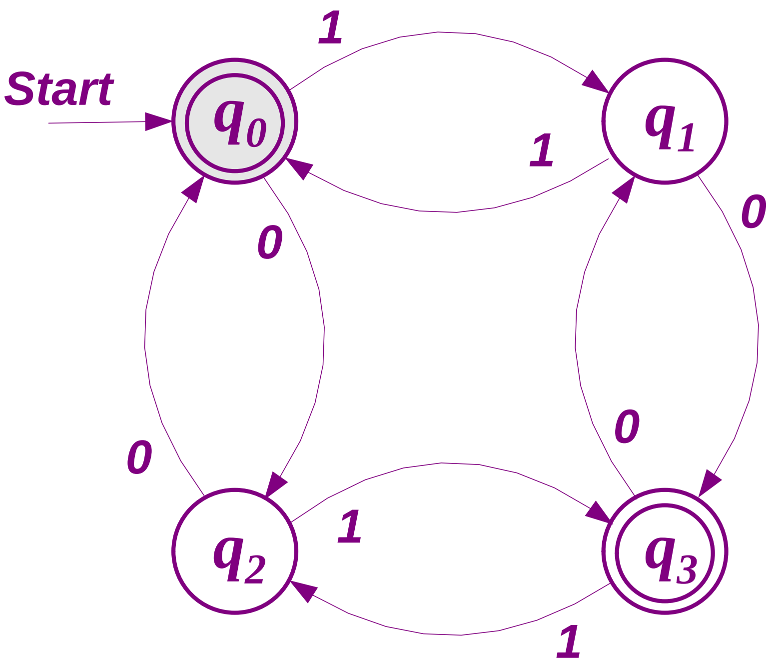
确定有限自动机

✧ DFA如何接受输入符号串



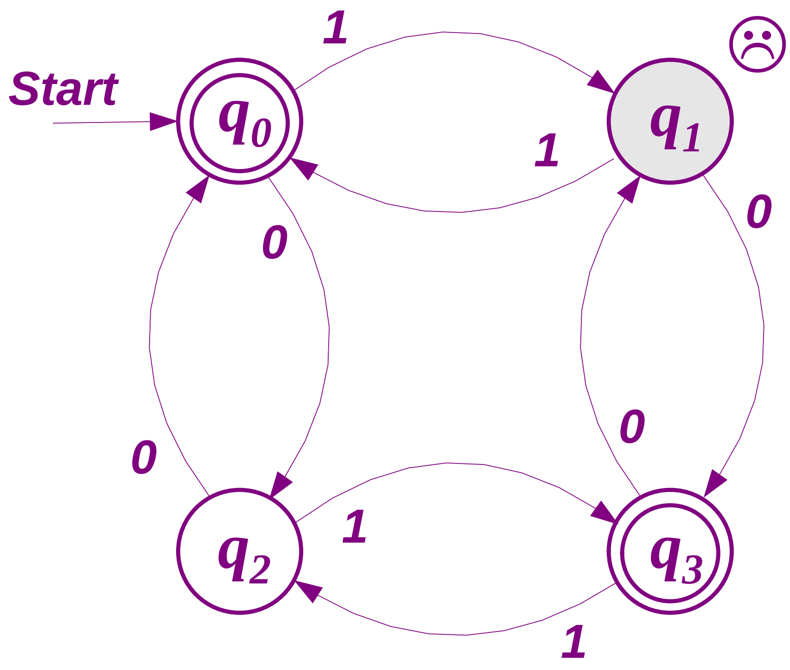
1	0	1	0	1

✧ DFA如何接受输入符号串



1	0	1	0	1

✧ DFA如何接受输入符号串



1	0	1	0	1

确定有限自动机

✧ 扩展转移函数适合于输入字符串

– 设一个 DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$

– 扩充定义 $\delta': Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$

对任何$q \in Q$，定义:

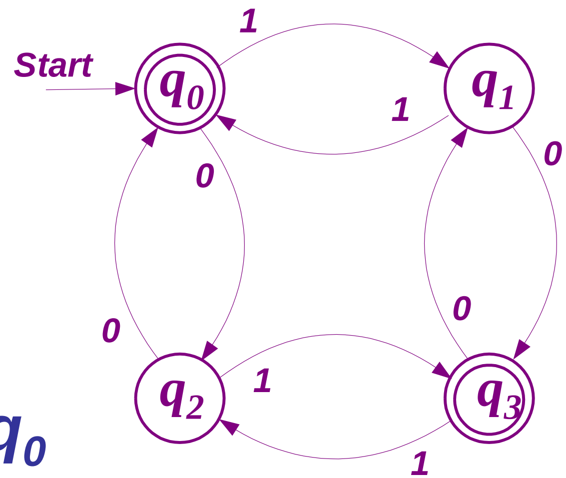
1 $\delta'(q, \varepsilon) = q$

2 若$w = xa$, 其中 $x \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$, 则

$$\delta'(q, w) = \delta(\delta'(q, x), a)$$

✧ 扩展转移函数适合于输入字符串

	0	1
$\rightarrow *q_0$	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
$*q_3$	q_1	q_2



– 举例

$$\delta'(q_0, \varepsilon) = q_0$$

$$\delta'(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) = q_2$$

$$\delta'(q_0, 00) = \delta(q_2, 0) = q_0$$

$$\delta'(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) = q_1$$

$$\delta'(q_0, 0010) = \delta(q_1, 0) = q_3$$

确定有限自动机

✧ DFA 的语言

– 设一个 DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

– 定义 A 的语言:

$$L(A) = \{ w \mid w \in \Sigma^* \wedge \delta'(q_0, w) \in F \}$$

– 设 L 是 Σ 上的语言，如果存在一个 DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$，满足$L = L(A)$ ，则可以证明 L 是一个正规语言.

✧ DFA 的语言

– 举例　$\Sigma = \{ 0, 1 \}$ 上的语言 $L = \{ w \mid w$ 中 0、1 数目的奇偶性相同 $\}$，则 L 是一个正规语言. 可证 L 是如下DFA 的语言.

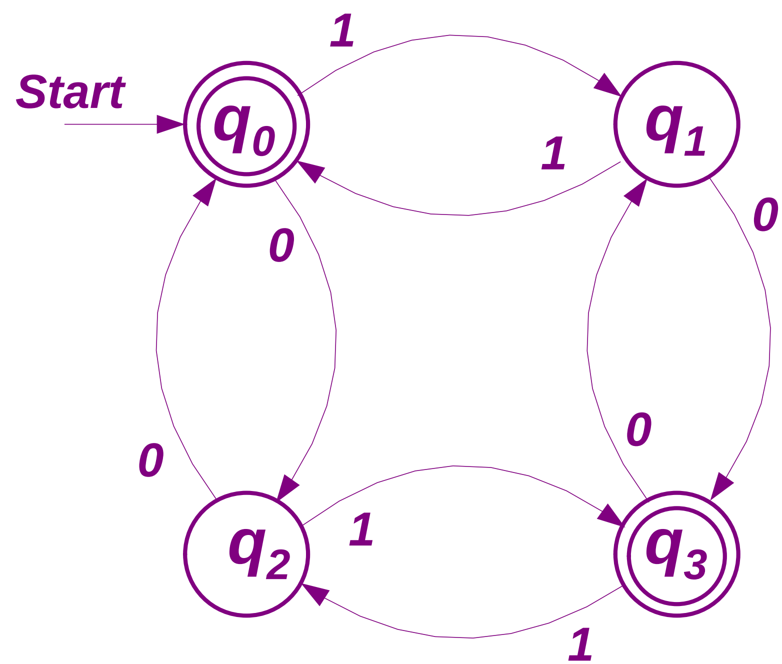
– 证明

留作思考题

(采用互归纳法,

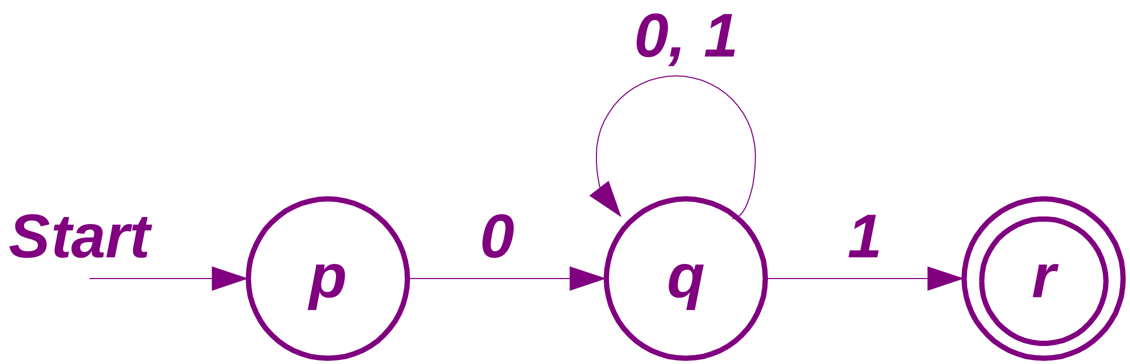
参考 Example 2.4

和 Example 1.23)

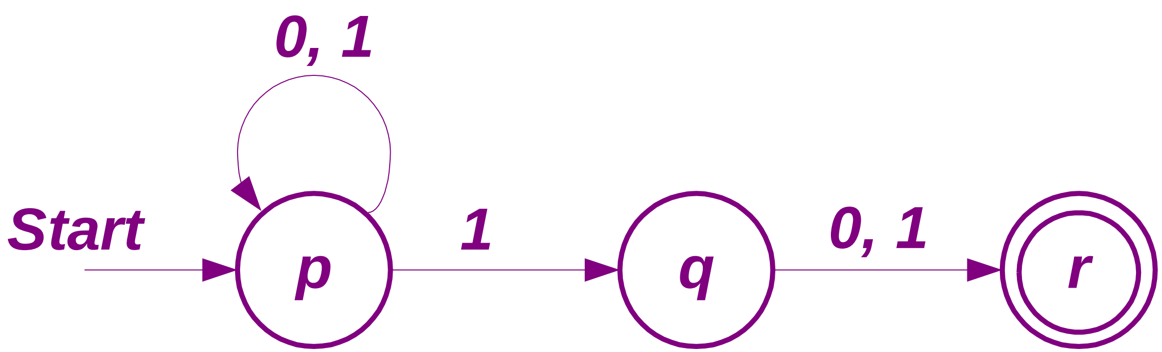


✧ 非确定有限自动机举例

(1)



(2)



✧ 非确定有限自动机的形式定义

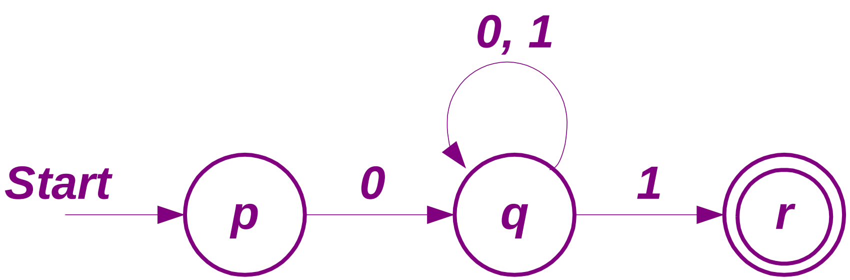
一个非确定有限状态自动机 ***NFA nondeterministic finite automata)*** 是一个五元组 $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

- 有限状态集 —— Q
- 有限输入符号集 —— Σ
- 转移函数 —— δ
- 一个开始状态 —— q_0　　$q_0 \in Q$
- 一个终态集合 —— F　　$F \subseteq Q$
- 与 DFA 唯一不同之处　　$\delta: Q \times \Sigma \to 2^Q$

非确定有限自动机

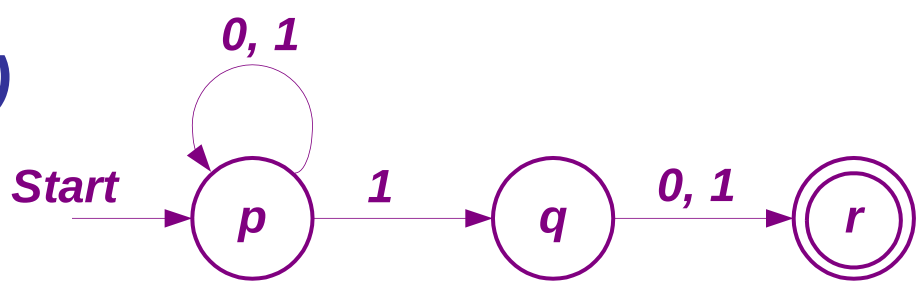
✧ 转移图和转移表表示的NFA

(1)



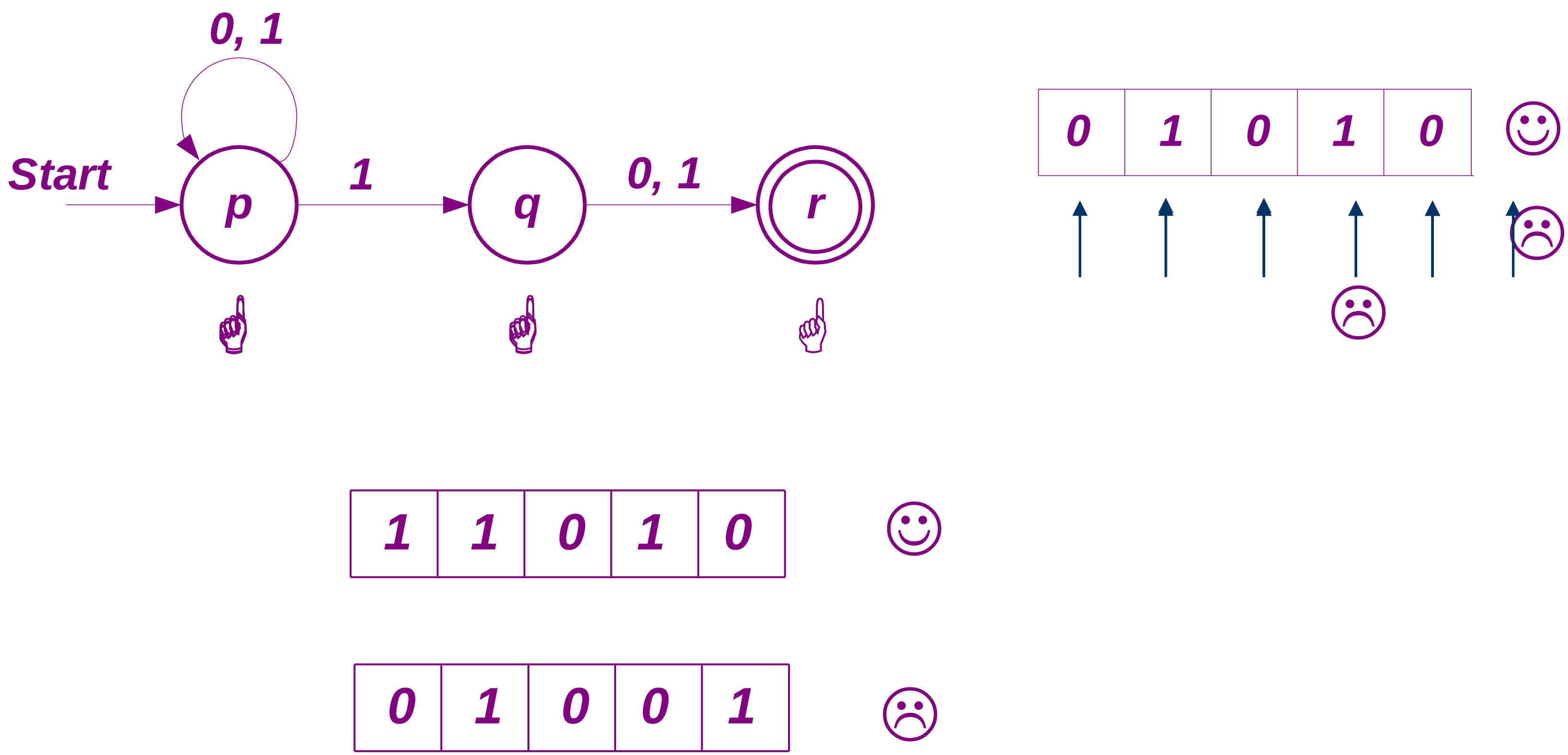
	0	1
$\rightarrow p$	$\{q\}$	ϕ
q	$\{q\}$	$\{q, r\}$
$*r$	ϕ	ϕ

(2)



	0	1
$\rightarrow p$	$\{p\}$	$\{p, q\}$
q	$\{r\}$	$\{r\}$
$*r$	ϕ	ϕ

✧ NFA 如何接受输入符号串



非确定有限自动机

✧ 扩展转移函数适合于输入字符串

– 设一个 NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

– $\delta: Q \times \Sigma \to 2^Q$

– 扩充定义 $\delta': Q \times \Sigma^* \to 2^Q$

– 对任何$q \in Q$，定义:

1 $\delta'(q, \varepsilon) = \{ q \}$

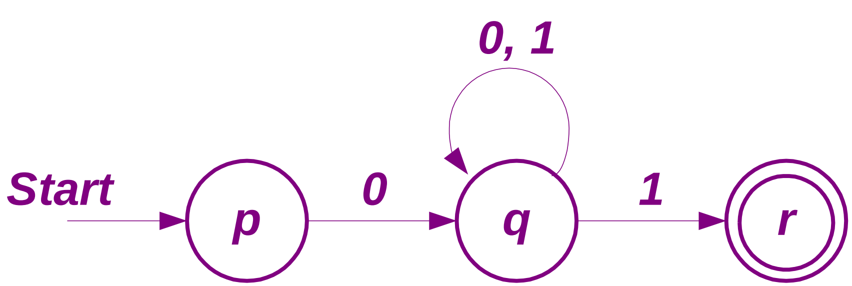
2 若$w = xa$, 其中 $x \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$, 并且假设

$\delta'(q, x) = \{ p_1, p_2, \ldots, p_k \}$, 则

$$\delta'(q, w) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a)$$

✧ 扩展转移函数适合于输入字符串

	0	1
$\rightarrow p$	$\{q\}$	ϕ
q	$\{q\}$	$\{q, r\}$
$* r$	ϕ	ϕ



– 举例

$\delta'(p, \varepsilon) = \{p\}$

$\delta'(p, 0) = \{q\}$

$\delta'(p, 01) = \{q, r\}$

$\delta'(p, 010) = \{q\}$

$\delta'(p, 0100) = \{q\}$

$\delta'(p, 01001) = \{q, r\}$

非确定有限自动机

✧ NFA 的语言

- 设一个 NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- 定义 A 的语言：

$$L(A) = \{ w \mid w \in \Sigma^* \wedge \delta'(q_0, w) \cap F \neq \phi \}$$

- 设 L 是 Σ 上的语言，如果存在一个 NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$，满足 $L = L(A)$，则可以证明 L 也是一个正规语言.

DFA 和 NFA 的等价性

定理: *L* 是某个 *DFA* 的语言, 当且仅当 *L* 也是某个 *NFA* 的语言.

证明: 分两步证明.

(1) 设 *L* 是某个 *DFA D* 的语言, 则存在一个 *NFA N* , 满足 $L(N) = L(D) = L$;

(2) 设 *L* 是某个 *NFA N* 的语言, 则存在一个 *DFA D* , 满足 $L(D) = L(N) = L$

DFA 和 NFA 的等价性

✧ 从 DFA 构造等价的 NFA

– 设 L 是某个 DFA $D = (Q, \Sigma, \delta_D, q_0, F)$ 的语言, 则存在一个 NFA N, 满足 $L(N) = L(D) = L$.

– **证明:** 定义 $N = (Q, \Sigma, \delta_N, q_0, F)$, 其中 δ_N 定义为

- 对 $q \in Q$ 和 $a \in \Sigma$,
  若 $\delta_D(q,a) = p$, 则 $\delta_N(q,a) = \{p\}$.

需要证明: 对任何 $w \in \Sigma^*$,

$$\delta'_D(q_0, w) = p \text{ iff } \delta'_N(q_0, w) = \{p\}.$$

归纳于 $|w|$ 易证上述命题.

DFA 和 NFA 的等价性

✧ 从 *NFA* 构造等价的 *DFA*（子集构造法）

- 设 L 是某个 NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ 的语言，则存在一个 DFA D，满足 $L(D) = L(N) = L$.
- 证明：定义 $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$，其中
  - $Q_D = \{ S \mid S \subseteq Q_N \}$
  - 对 $S \in Q_D$ 和 $a \in \Sigma$，$\delta_D(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta_N(q,a)$
  - $F_D = \{ S \mid S \subseteq Q_N \wedge S \cap F_N \neq \phi \}$

需要证明：对任何 $w \in \Sigma^*$，

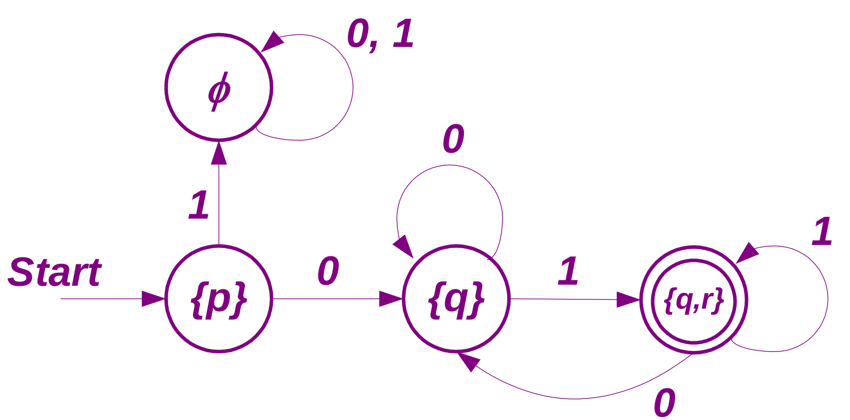
$$\delta'_D(\{q_0\}, w) = \delta'_N(q_0, w).$$

归纳于 $|w|$ 可证上述命题.

DFA 和 NFA 的等价性

✧ 子集构造法举例

	0	1
$\rightarrow p$	$\{q\}$	ϕ
q	$\{q\}$	$\{q, r\}$
$*\ r$	ϕ	ϕ



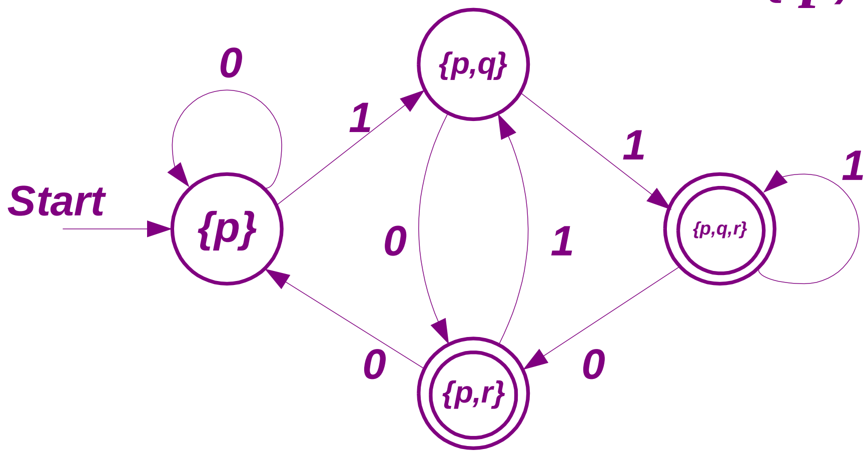
	0	1
ϕ	ϕ	ϕ
$\rightarrow \{p\}$	$\{q\}$	ϕ
$\{q\}$	$\{q\}$	$\{q, r\}$
$*\ \{r\}$	ϕ	ϕ
$\{p, q\}$	$\{q\}$	$\{q, r\}$
$*\{p, r\}$	$\{q\}$	ϕ
$*\{q, r\}$	$\{q\}$	$\{q, r\}$
$*\{p, q, r\}$	$\{q\}$	$\{q, r\}$

DFA 和 NFA 的等价性

✧ 子集构造法举例

	0	1
→ p	{ p }	{ p, q }
q	{ r }	{ r }
* r	ϕ	ϕ

	0	1
→ { p }	{ p }	{ p, q }
{ p, q }	{ p, r }	{ p, q, r }
*{ p, r }	{ p }	{ p, q }
*{ p, q, r }	{ p, r }	{ p, q, r }



DFA 和 NFA 的等价性

✧ 从 NFA 构造等价的 DFA（子集构造法）

定理: 设 $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ 是一个 NFA，通过子集构造法得到相应的DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$, 则对任何 $w \in \Sigma^*$，$\delta'_D(\{q_0\}, w) = \delta'_N(q_0, w)$.

证明: 归纳于 $|w|$

1 设 $|w| = 0$, 即 $w = \varepsilon$.

由定义知 $\delta'_D(\{q_0\}, \varepsilon) = \delta'_N(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$.

2 设 $|w| = n+1$, 并 $w = xa$, $a \in \Sigma$.　注意到 $|x| = n$.

假设 $\delta'_D(\{q_0\}, x) = \delta'_N(q_0, x) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$.

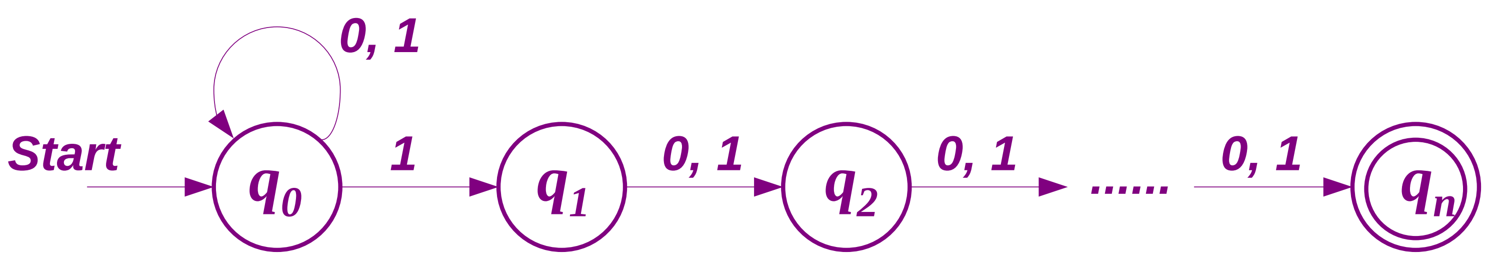
则 $\delta'_D(\{q_0\}, w) = \delta_D(\delta'_D(\{q_0\}, x), a)$

$$= \delta_D(\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a).$$

$$= \delta'_N(q_0, w)$$

DFA 和 NFA 的等价性

- 子集构造法得到的状态数
  - 实践中，通过子集构造法得到的 **DFA** 的状态数目与原 **NFA** 的状态数目大体相当
  - 在较坏的情况下，上述 **DFA** 的状态数目接近于所有子集的数目
  - 举例 由如下 **NFA** 构造的 **DFA** 的状态数目至少为 2^n



DFA 和 NFA 的等价性

✧ 子集构造法得到的状态数

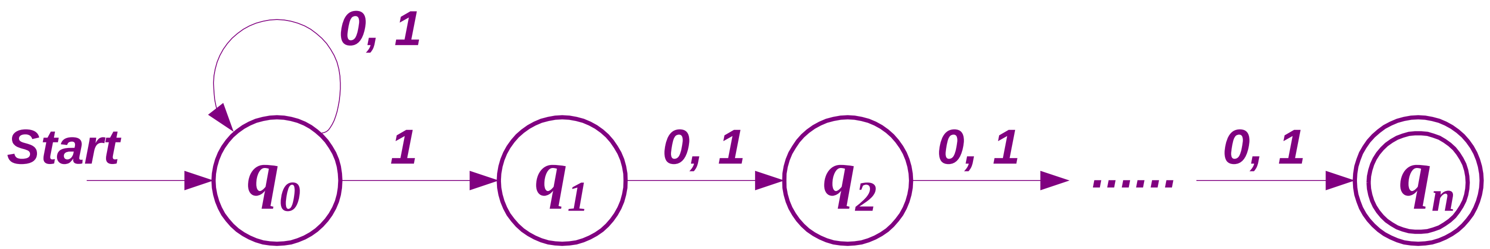
– 上页例子的证明要点，采用反证法

假设由此 *NFA* 构造的 *DFA* 的状态数目少于 2^n

考虑长度为 *n* 的 *0,1* 串共有 2^n 个，所以存在两个不同的串 $a_1a_2\ldots a_n$ 和 $b_1b_2\ldots b_n$ 作为该 *DFA* 的输入，可以到达同一状态 *q*.（by *Pigeonhole Principle*）

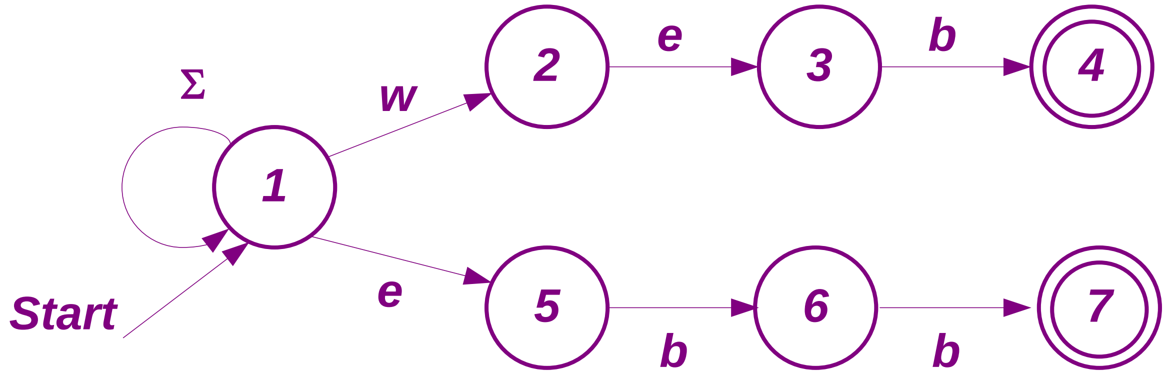
若 $a_1 \neq b_1$，则 *q* 既是终态又是非终态，矛盾；

一般情况，若 $a_k \neq b_k$，设 $a_1a_2\ldots a_n00\ldots0$（*k-1* 个 *0*）或 $b_1b_2\ldots b_n00\ldots0$（*k-1* 个 *0*）作为输入串时该 *DFA* 到达状态 *p*，则 *p* 既是终态又是非终态，矛盾。

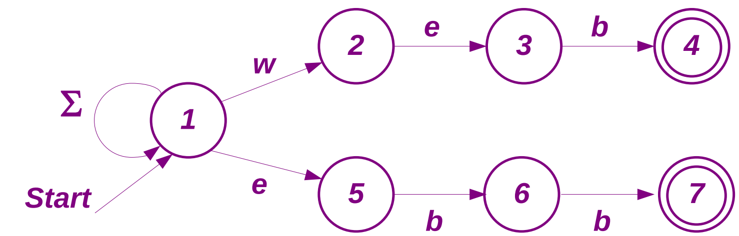


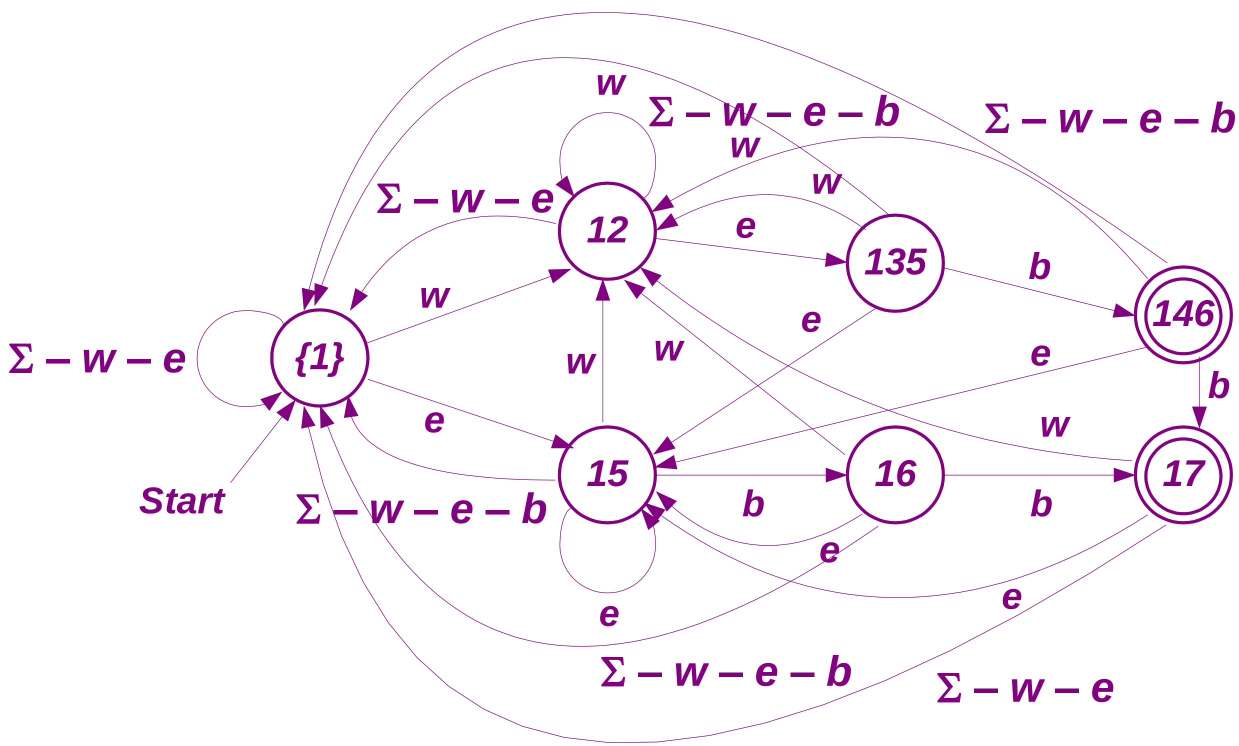
文本搜索

- 举例　设计一个 *NFA* 用来在文本中搜索字符串*web* 和*ebb*.
- 解　下图为一个满足条件的 *NFA*，其中 Σ 代表所有 *ASCII* 字符的集合.



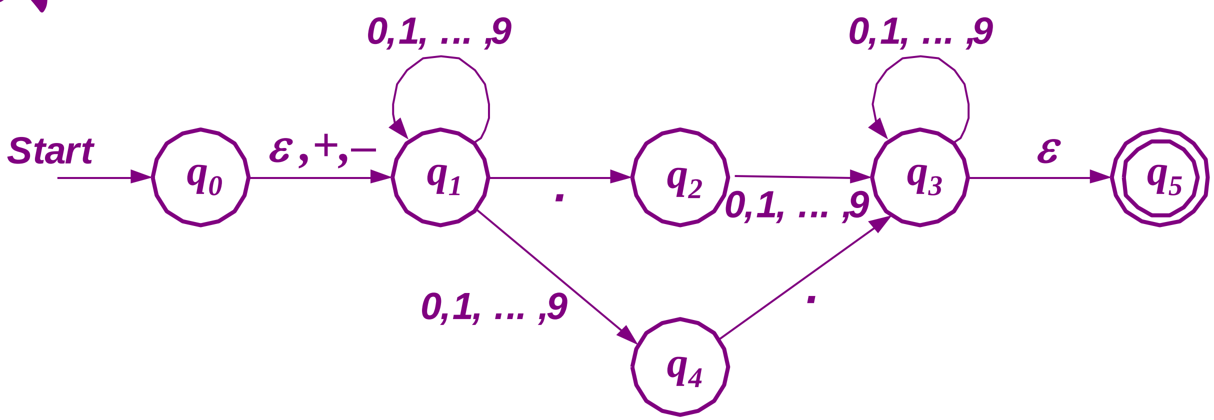
◇ 举例　构造与前面 *NFA* 等价的 *DFA*.



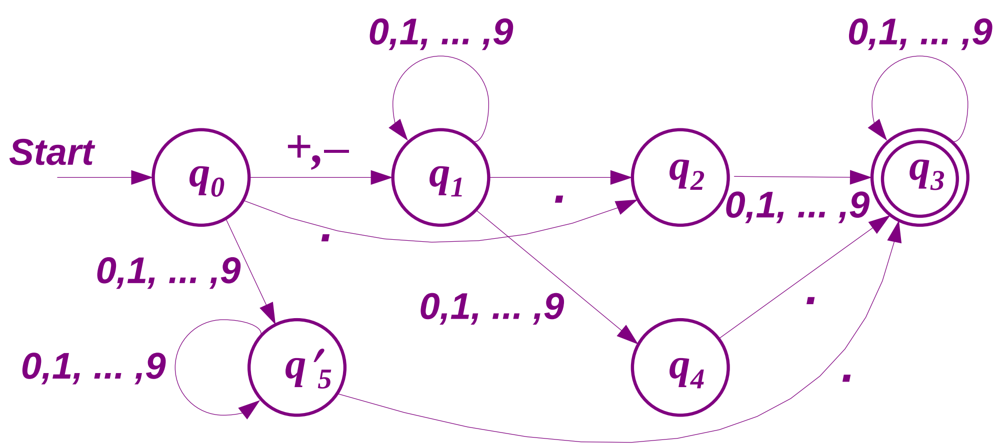


带ε-转移的非确定有限自动机

✧ 举例



比较：*NFA without ε*



带ε-转移的非确定有限自动机

✧ 带ε-转移的非确定有限自动机（ε-NFA）的形式定义

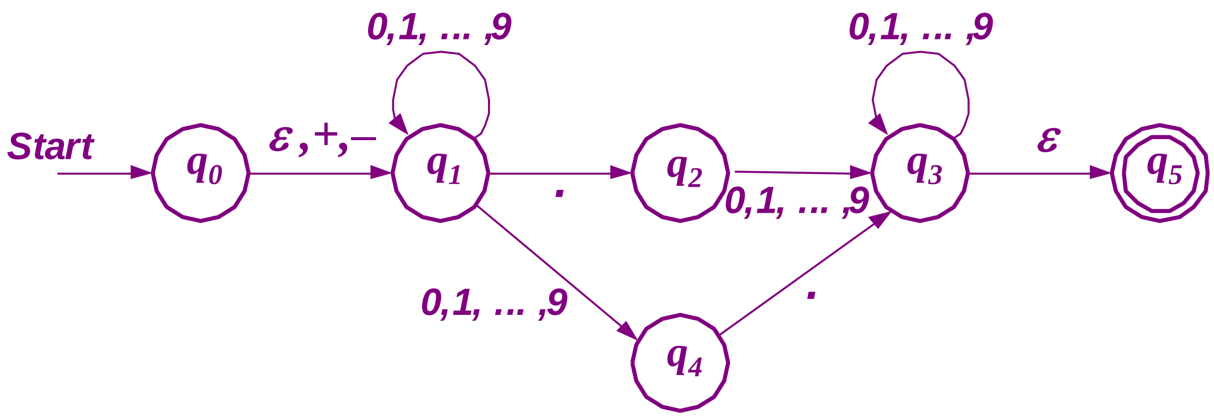
一个 ε-NFA 是一个五元组 $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

- 有限状态集 — Q
- 有限输入符号集 — Σ
- 转移函数 — δ
- 一个开始状态 — q_0　　$q_0 \in Q$
- 一个终态集合 — F　　$F \subseteq Q$
- 与 NFA 的不同之处

$$\delta:\ Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$$

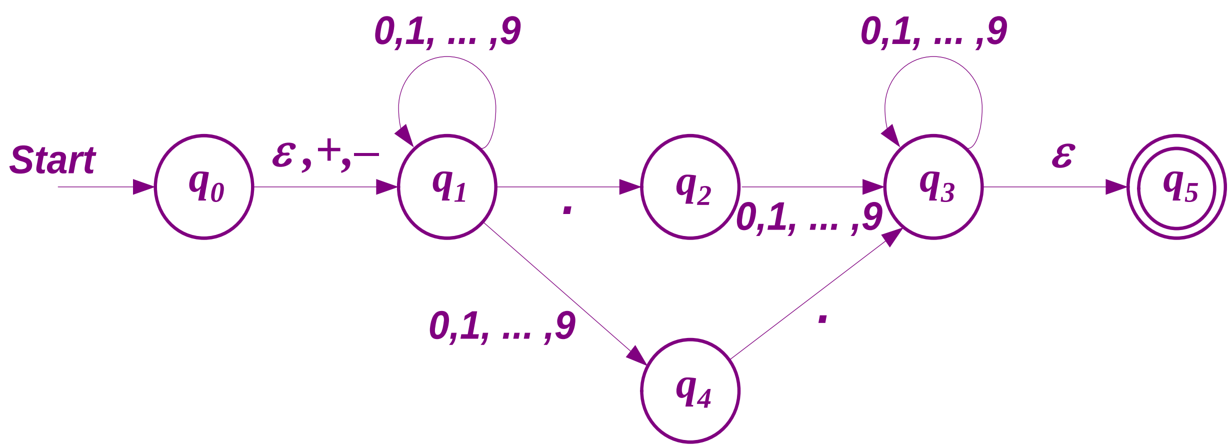
带ε-转移的非确定有限自动机

✧ 转移图和转移表表示的ε - NFA



	ε	+,–	.	0,1, … ,9
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	ϕ	ϕ
q_1	ϕ	ϕ	$\{q_2\}$	$\{q_1,q_4\}$
q_2	ϕ	ϕ	ϕ	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_5\}$	ϕ	ϕ	$\{q_3\}$
q_4	ϕ	ϕ	$\{q_3\}$	ϕ
$* q_5$	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ

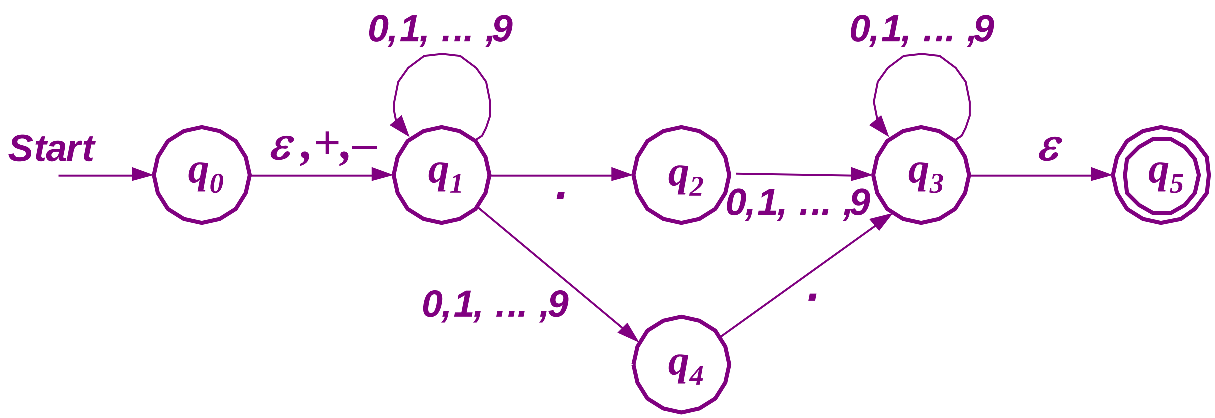
✧ ε - NFA 如何接受输入符号串



– 该 ε - **NFA** 可以接受的字符串如:

- **3.14**
- **+.314**
- **– 314.**

✧ ε-闭包（closure）



– 状态 *q* 的ε-闭包，记为*ECLOSE(q)*，定义为从 *q* 经所有的ε路径可以到达的状态（包括*q*自身），如：

- $ECLOSE(q_0) = \{q_0, q_1\}$
- $ECLOSE(q_2) = \{q_2\}$
- $ECLOSE(q_3) = \{q_3, q_5\}$

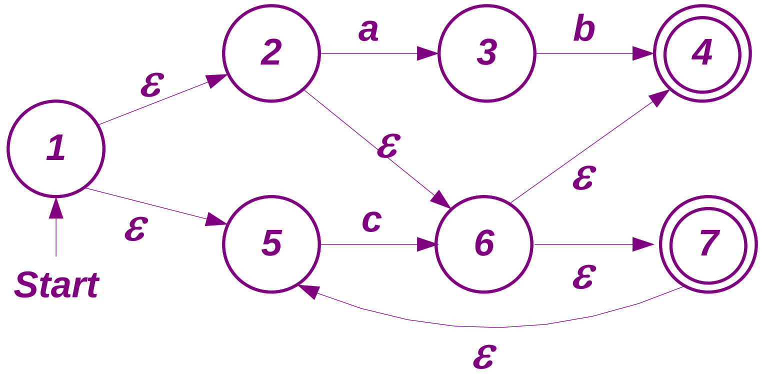
✧ ε-闭包

- 设 ε-NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$，$q \in Q$，$ECLOSE(q)$ 为满足如下条件的最小集:

  （1） $q \in ECLOSE(q)$

  （2） if $p \in ECLOSE(q)$ and $r \in \delta(p, \varepsilon)$, then $r \in ECLOSE(q)$

- 对于右图，有:
  - $ECLOSE(1) = \{1,2,4,5,6,7\}$
  - $ECLOSE(2) = \{2,4,5,6,7\}$
  - $ECLOSE(7) = \{5,7\}$



带 ε-转移的非确定有限自动机

✧ 扩展转移函数适合于输入字符串

– 设一个 ε - NFA $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

– $\delta: Q \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \to 2^Q$

– 扩充定义 $\delta': Q \times \Sigma^* \to 2^Q$

– 对任何 $q \in Q$，定义：

1 $\delta'(q, \varepsilon) = ECLOSE(q)$

2 若 $w = xa$，其中 $x \in \Sigma^*$，$a \in \Sigma$，假设

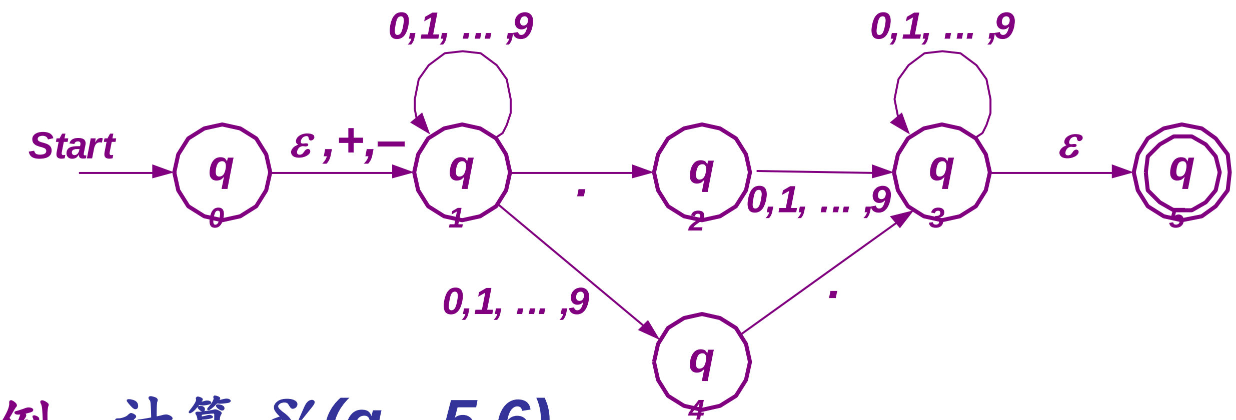
$\delta'(q, x) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$，并且

令 $\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a) = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$，则

$$\delta'(q, w) = \bigcup_{j=1}^{m} ECLOSE(r_j)$$

带ε-转移的非确定有限自动机

✧ 扩展转移函数适合于输入字符串



– 举例　计算 $\delta'(q_0, 5.6)$

- $\delta'(q_0, \varepsilon) = ECLOSE(q_0) = \{q_0, q_1\}$
- $\delta(q_0, 5) \cup \delta(q_1, 5) = \{q_1, q_4\}$
  $\delta'(q_0, 5) = ECLOSE(q_1) \cup ECLOSE(q_4) = \{q_1, q_4\}$
- $\delta(q_1, .) \cup \delta(q_4, .) = \{q_2, q_3\}$
  $\delta'(q_0, 5.) = ECLOSE(q_2) \cup ECLOSE(q_3) = \{q_2, q_3, q_5\}$
- $\delta(q_2, 6) \cup \delta(q_3, 6) \cup \delta(q_5, 6) = \{q_3\}$
  $\delta'(q_0, 5.6) = ECLOSE(q_3) = \{q_3, q_5\}$

✧ ε-NFA 的 语 言

– 设一个ε-NFA $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

– 定义 *E* 的语言:

$$L(E) = \{ w \mid w \in \Sigma^* \wedge \delta'(q_0, w) \cap F \neq \phi \}$$

– 设 *L* 是 Σ 上的语言，如果存在一个 ε-NFA $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$，满足 $L = L(E)$，则可以证明 *L* 也是一个正规语言.

✧ ε-NFA 与 DFA 的等价性

定理: L 是某个 ε-NFA 的语言, 当且仅当 L 也是某个 DFA的语言.

证明: 分两步证明.

(1) 设 L 是某个 DFA D 的语言, 则存在一个 ε-NFA E, 满足 $L(E) = L(D) = L$;

(2) 设 L 是某个 ε-NFA E 的语言, 则存在一个 DFA D, 满足 $L(D) = L(E) = L$;

✧ 从 DFA 构造等价的ε - NFA

– 设 L 是某个 DFA $D = (Q, \Sigma, \delta_D, q_0, F)$ 的语言，则存在一个 ε - NFA E，满足 $L(E) = L(D) = L$.

– **证明:** 定义 $E = (Q, \Sigma, \delta_E, q_0, F)$，其中 δ_E 定义为

- 对任何$q \in Q$, $\delta_E(q, \varepsilon) = \phi$
- 对任何$q \in Q$ 和$a \in \Sigma$,
  若 $\delta_D(q,a) = p$, 则 $\delta_E(q,a) = \{p\}$.

需要证明: 对任何$w \in \Sigma^*$,

$$\delta'_D(q_0,w) = p \text{ iff } \delta'_E(q_0,w) = \{p\}.$$

归纳于 $|w|$ 易证上述命题.

带 ε-转移的非确定有限自动机

✧ 从 ε - NFA 构造等价的 DFA（修改的子集构造法）

– 设 L 是某个 ε - NFA $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$ 的语言，则存在一个 DFA D，满足 $L(D) = L(E) = L$.

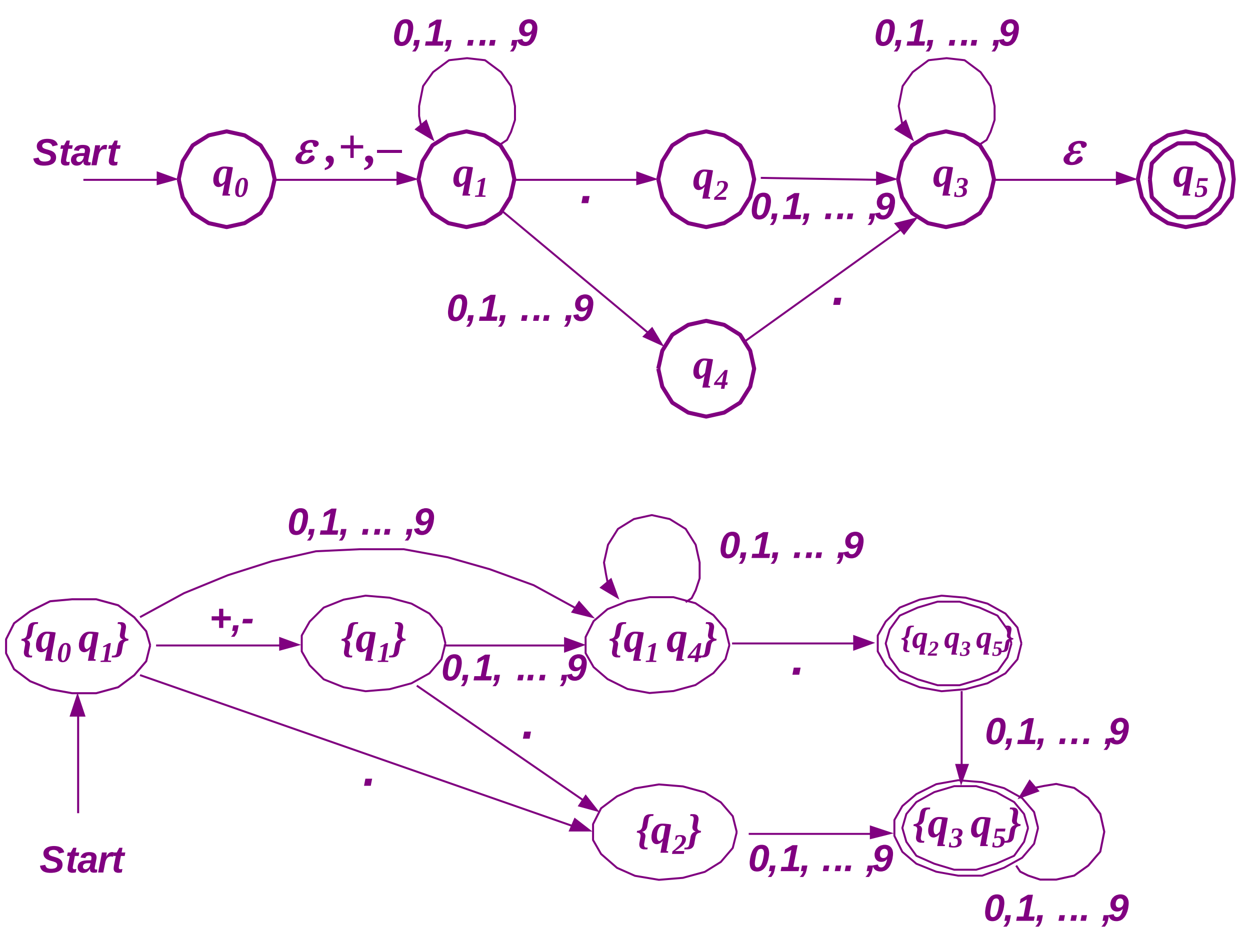
– **证明:** 定义 $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$，其中

- $Q_D = \{ S \mid S \subseteq Q_E \wedge S = ECLOSE(S) \}$
- $q_D = ECLOSE(q_0)$
- $F_D = \{S \mid S \in Q_D \wedge S \cap F_E \neq \phi \}$
- 对 $S \in Q_D$ 和 $a \in \Sigma$，令 $S = \{ p_1, p_2, \dots, p_k \}$，并设 $\bigcup_{i=1}^{k} \delta_E(p_i, a) = \{ r_1, r_2, \dots, r_m \}$，则

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{j=1}^{m} ECLOSE(r_j).$$

需要证明: 对任何 $w \in \Sigma^*$，$\delta'_D(q_D, w) = \delta'_E(q_0, w)$.
归纳于 $|w|$ 可证上述命题.

✧ 修改的子集构造法举例


Start
q0
ε,+,–
q1
0,1, … ,9
.
q2
0,1, … ,9
q3
0,1, … ,9
ε
q5
0,1, … ,9
q4
.
0,1, … ,9
{q0 q1}
+,-
{q1}
0,1, … ,9
{q1 q4}
0,1, … ,9
.
{q2 q3 q5}
0,1, … ,9
.
.
{q2}
0,1, … ,9
{q3 q5}
0,1, … ,9
Start

带 ε-转移的非确定有限自动机

✧ 从 ε- NFA 构造等价的 DFA（修改的子集构造法）

– 设 $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$ 是一个 ε- NFA，通过修改的子集构造法得到相应的DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$，则对任何$w \in \Sigma^*$，$\delta'_D(q_D, w) = \delta'_E(q_0, w)$.

– 证明:归纳于 $|w|$

1 设$|w| = 0$, 即 $w = \varepsilon$.

由定义知 $\delta'_D(q_D, \varepsilon) = q_D = ECLOSE(q_0) = \delta'_E(q_0, \varepsilon)$.

2 设$|w| = n+1$, 并 $w = xa$, $a \in \Sigma$.　注意到$|x| = n$.

假设 $\delta'_D(q_D, x) = \delta'_E(q_0, x) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$.

并设 $\bigcup_{i=1}^{k} \delta_E(p_i, a) = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$.

则 $\delta'_D(q_D, w) = \delta_D(\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}, a)$

$= \bigcup_{j=1}^{m} ECLOSE(r_j) = \delta'_E(q_0, w)$

（确定）有限自动机的最小化

✧ 知识回顾：集合上的等价关系与集合的划分

✧ *DFA* 状态集合上的一个等价关系

✧ 计算状态集划分的算法— 填表法

✧ 最小化的 *DFA*

✧ 知识回顾：集合上的等价关系与集合的划分

– 等价关系

设 Q 为一个集合，二元关系 R 是 Q 上的一个等价关系，当且仅当满足以下条件：

1. 自反性　对任何$a \in Q$, aRa 成立；
2. 对称性　对任何$a,b \in Q$, 如果 aRb 成立，则有 bRa 成立；
3. 传递性　对任何$a,b,c \in Q$, 如果 aRb 和 bRc 成立，则有 aRc 成立.

（确定）有限自动机的最小化

✧ 知识回顾：集合上的等价关系与集合的划分

– 等价关系与划分

设 Q 为一个集合，R 是 Q 上的一个等价关系，由 R 产生的所有等价类（或块）的集合构成 Q 的一个划分.

– 解释

1. 等价类 对任何 $a \in Q$, a 所在的块用 $[a]$ 表示，定义为

$$[a] = \{x \mid xRa\} ;$$

2. 每一元素都属于唯一的块 即满足

（1）$\cup_{a \in Q} [a] = Q$ ； 和

（2）对任何 $a,b \in Q$, 或者 $[a]=[b]$, 或者 $[a]\cap[b]=\Phi$

✧ DFA 状态集合上的一个等价关系

– 设一个 DFA $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, 定义Q上的一个二元关系 R 为： 对任何 $p,q \in Q$,

$$pRq \text{ iff } \forall w \in \Sigma^*. (\delta'(p,w) \in F \leftrightarrow \delta'(q,w) \in F)$$

– 结论 上述关系 R 是等价关系.

证明： 1. 自反性 对任何$q \in Q$, qRq 成立;

2. 对称性 对任何$p,q \in Q$, $pRq \to qRp$ 成立;

3. 传递性 对任何$p,q,r \in Q$, 设pRq 和 qRr 成立, 即对任何$w \in \Sigma^*$, $\delta'(p,w) \in F \leftrightarrow \delta'(q,w) \in F$ 和 $\delta'(q,w) \in F \leftrightarrow \delta'(r,w) \in F$ 成立; 由此, 也有 $\delta'(p,w) \in F \leftrightarrow \delta'(r,w) \in F$ 成立. 所以, qRr 成立

□

（确定）有限自动机的最小化

✧ DFA 状态集合上的一个等价关系

– 若pRq, 称 p 和 q 等价（*equivalent*）. 若p 和q 不等价，则称 p 和q 是可区别的（*distinguishable*）.

– 关系 R 对应有限状态集 Q 的一个划分;
 该划分的每个块是 Q 的一个子集;
 同一划分块中的所有状态之间都是相互等价的;
 分属不同划分块的任何两个状态之间都是可区别的.

✧ DFA 的优化

通过合并等价的（或不可区别的）状态
关键：如何计算上述划分?

✧ 有关可区别性的几个有用的结果

– 设状态 r 和 s 通过某个输入符号 a 可分别转移到 p 和 q（即 $\delta(r,a)=p$, $\delta(s,a)=q$），则有

p 和 q 可区别 $\Rightarrow$ r 和 s 可区别

这是因为：若 p 和 q 可为字符串 w 区别, 则 r 和 s 可为字符串 aw 区别.

（$\because \hat{\delta}(r,aw)=\hat{\delta}(p,w)$, $\hat{\delta}(s,aw)=\hat{\delta}(q,w)$ ）

（确定）有限自动机的最小化

✧ 有关可区别性的几个有用的结果

– 设状态 *r* 和 *s* 通过某个输入符号 *a* 可分别转移到 *p* 和 *q*（即 $\delta(r,a)=p$, $\delta(s,a)=q$），则有

r 和 *s* 不可区别 $\Rightarrow$ *p* 和 *q* 不可区别

（前页结果的逆否）

✧ 有关可区别性的几个有用的结果

– 设状态 r 和 s 通过某个输入符号 a 可分别转移到 p 和 q（即 $\delta(r,a)=p$, $\delta(s,a)=q$），则有

r 和 s 可由 ax 区别 $\Rightarrow$ p 和 q 可由 x 区别

（$\because \delta'(r,ax) =\delta'(p,x)$, $\delta'(s,ax) =\delta'(q,x)$ ）

✧ 计算状态集划分的算法— 填表法

– 填表算法(*table-filling algorithm*)基于如下递归地标记可区别的状态偶对的过程:

基础 如果 p 为终态,而 q 为非终态,则 p 和 q 标记为可区别的;

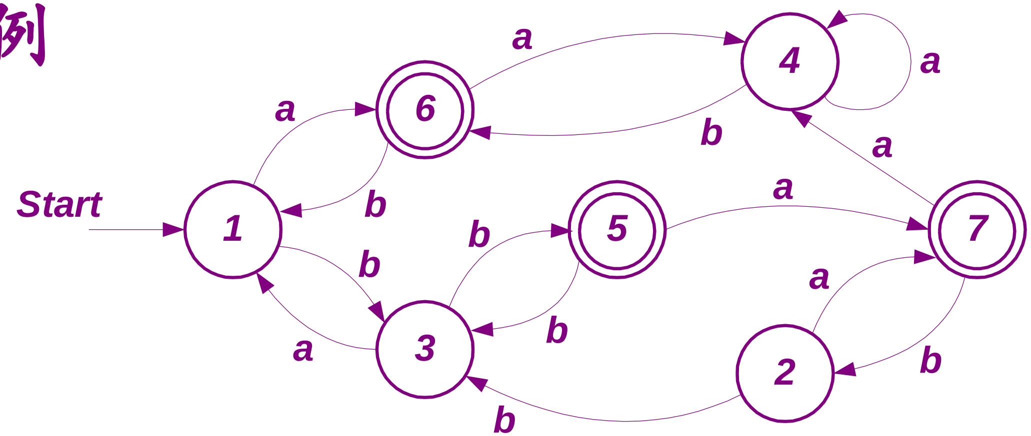
归纳 设 p 和 q 已标记为可区别的,如果状态 r 和 s 通过某个输入符号 a 可分别转移到 p 和 q ,$\delta(r,a)=p$, $\delta(s,a)=q$,则 r 和 s 也标记为可区别的;

(确定)有限自动机的最小化

✧ 计算状态集划分的算法—填表法

– 填表算法举例

2						
3	x	x				
4	x	x	x			
5	x	x	x	x		
6	x	x	x	x	x	
7	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6



(1) 区别所有终态和非终态

(2) 区别(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (5,6), (5,7)

(3) 区别 (3,4)

(4) 结束. 划分结果: {1,2}, {3}, {4}, {5}, {6,7}

✧ 计算状态集划分的算法—填表法

- 填表算法的正确性 还需证明：如果两个状态没有被填表算法标记，则这两个状态一定是等价的
- 证明 反证法. 假定状态 r 和 s 没有被填表算法标记，但这两个状态不是等价的，即是可区别的.

  设字符串 w 可用于区别状态 r 和 s，即 $\delta(r,w)$ 和 $\delta(s,w)$ 两个状态中，一个是终态，一个是非终态. 不妨设前者为终态，后者为非终态.

  首先不可能有 $w=\varepsilon$，否则，状态 r 为终态，而 s 为非终态，依填表算法，r 和 s 第一步就被标记.

  设 $w=ax$，并且 $\delta(r,a)=p$，$\delta(s,a)=q$，则 p 和 q 可被 x 区别. 但同样 p 和 q 不可能被填表算法标记(否则，r 和 s 将被标记). 同样也有，$x\neq\varepsilon$.

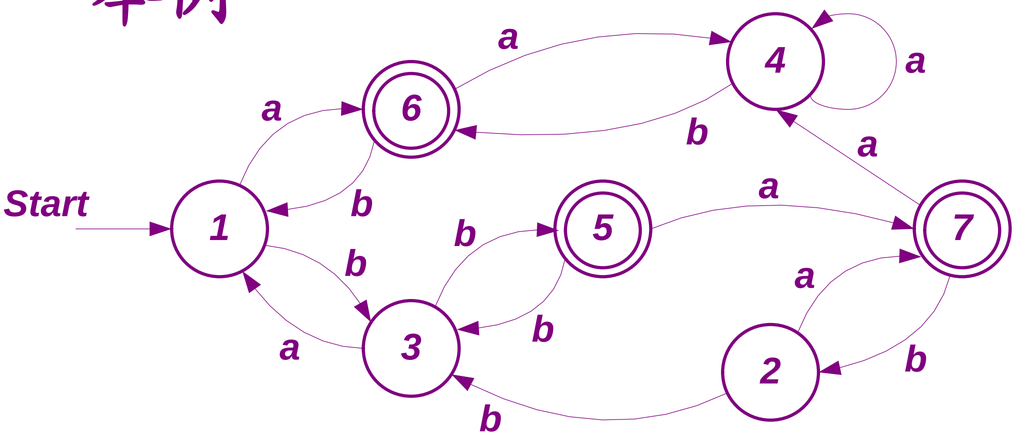
  该过程不可能一直下去，终将产生矛盾.

（确定）有限自动机的最小化

- 通过合并等价的状态进行 DFA 的优化
  - 步骤
    1. 删除所有从开始状态不可到达的状态及与其相关的边，设所得到的 DFA 为 $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$；
    2. 使用填表算法找出所有等价的状态偶对;
    3. 根据 2 的结果计算当前状态集合的划分块，每一划分块中的状态相互之间等价，而不同划分块中的状态之间都是可区别的. 包含状态 q 的划分块用 $[q]$ 表示.
    4. 构造与 A 等价的 DFA $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, [q_0], F_B)$，其中 $Q_B=\{ [q] \mid q\in Q\}$, $F_B = \{ [q] \mid q\in F\}$, $\delta_B([q], a)=[\delta(q,a)]$
  - 结论 对任何 $w\in\Sigma^*$, $\delta'_B([q_0], w)\in F_B$, iff $\delta'(q_0, w)\in F$

✧ 通过合并等价的状态进行 *DFA* 的优化

– 举例

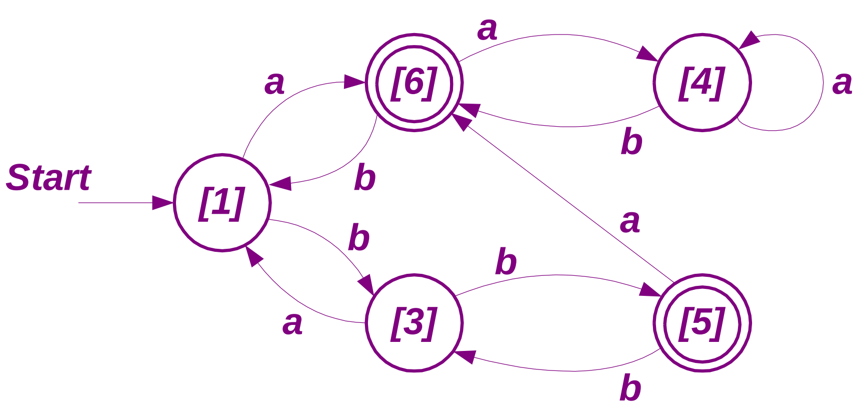


– 等价的状态偶对为：

（1, 2），（6, 7）

– 划分结果：

{ 1, 2 }, {3}, {4}, {5}, { 6, 7 }



– 新的状态集合：

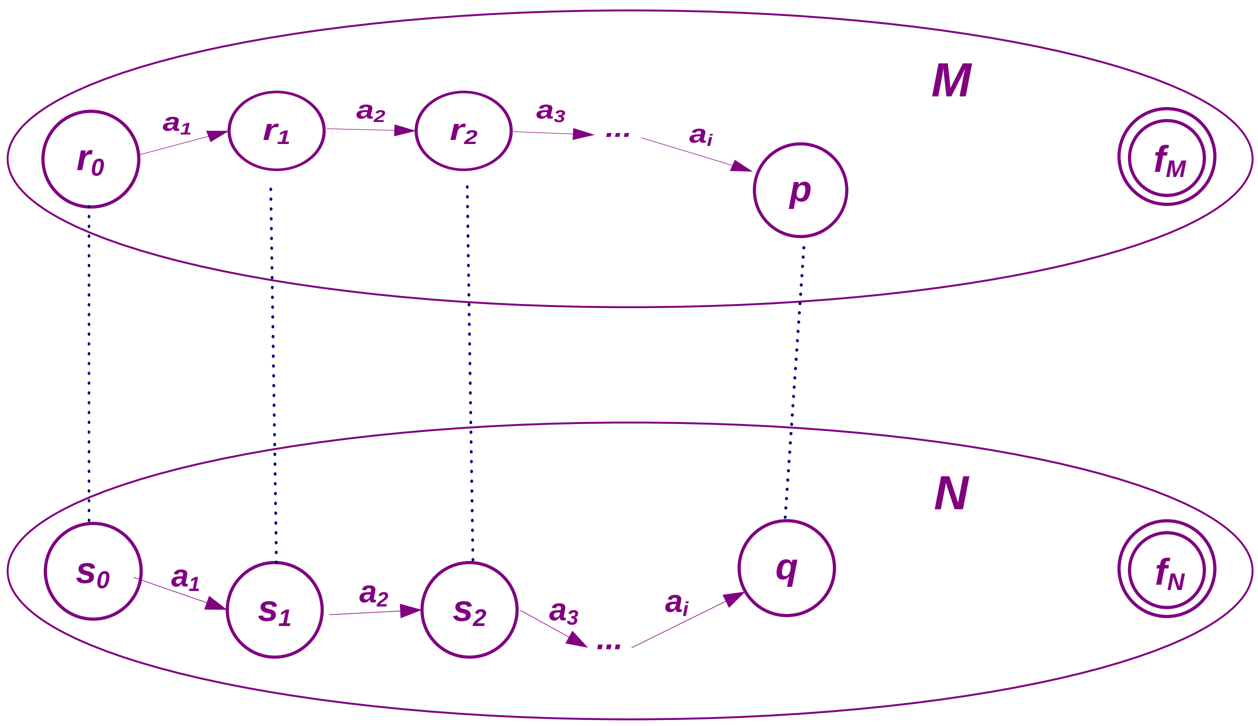
[1], [3], [4], [5], [6]

✧ 最小化的 DFA

– 问题 假定一个 DFA 为 A, 用上述优化步骤构造出与 A 等价的DFA M; 那么是否存在一个状态数目比 M 还少的DFA N, 它接受的语言同 A 和 M 完全一样?

假设存在一个这样 DFA N. 现将 M 和 N 相并, 即状态、转移规则都相并, 这里假定 M 和 N 之间没有重名的状态, 因而也没有相交的转移边, 原来的终态还是终态, 原来的两个初态中任选一个作为新的初态. 同时还假定 M 和 N 的每一状态都是从其相应的初态可以到达的, 否则我们将去掉不可达状态, 得到状态数目更小的 DFA.

✧ 最小化的 DFA

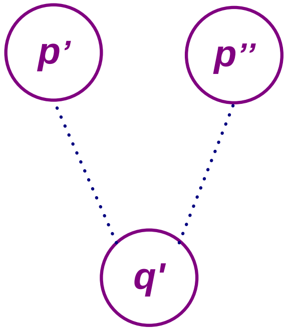


✧ 最小化的 DFA

对 M 和 N 相并后的 DFA 运用填表算法可以得出:

1. M 和 N 的初态是不可区别的, 因为 L(M)=L(N);
2. 若 r 和 s 是不可区别的, 则对于任何输入符号, r 和 s 的后继状态之间也是不可区别的;
3. M 的任一状态至少与 N 的一个状态是不可区别的.

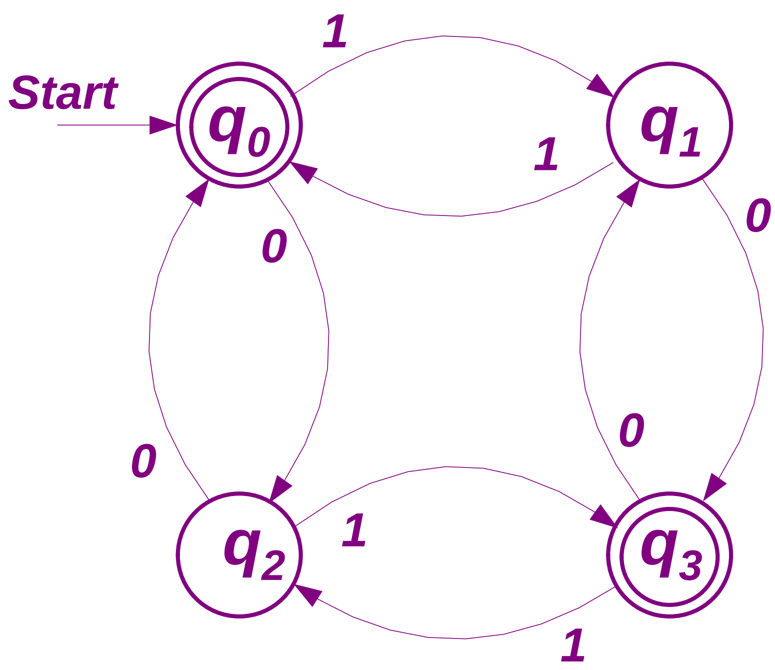
根据假设, N 的状态数目比 M 少, 所以 M 中必然存在两个状态, 它们分别与 N 中的同一个状态不可区别. 根据不可区别关系的传递性, M 的这两个状态是不可区别的, 这与 M 的构造过程矛盾.



– 结论 对任何 DFA A, 用前述优化步骤构造出与 A 等价的 DFA M; 那么 M 的状态数目不多于任何语言为 L(A) 的 DFA

✧ 课堂练习

– 最小化下图表示的 DFA



课后练习

✧ 必做题:

- *Ex.2.2.2
- Ex.2.2.4 (b),(c)
- Ex.2.2.5 (d)
- Ex.2.2.7
- Ex.2.2.9
- Ex.2.3.2
- Ex.2.3.4 (b),(c)
- Ex.2.4.2 (c) (请依所介绍的算法做)
- Ex.2.5.2
- Ex.2.5.3 (a), ! (b)
- Ex.4.4.2
- !Ex.2.5.3 (c)

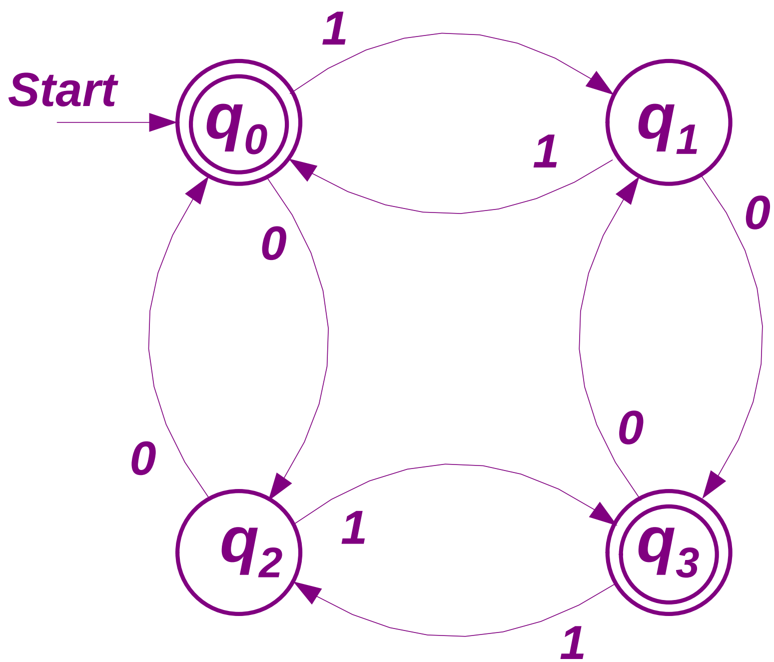
✧ 思考题:

- Ex.2.2.5 (b)
- Ex.2.2.6 *(a),(b)

课后练习

- 思考题:
  - 附加

Let L={ w | In w, the number of 0's and the number of 1's are the same in parity } be a language over Σ={0,1} . Prove that L is the language of following DFA.



课后练习

✧ 自测题:

– 设计一个 DFA，其语言为长度至少为2且头两个字符不相同的0，1串构成的集合。

– 试构造接受下列语言的一个 DFA:

1）$\{w \in \{a, b\}^* \mid w$ 中不包含子串 $aa\}$
2）$\{w \mid w \in \{a, b\}^*$，$w$ 中包含且仅包含奇数个子串 $ab\}$
3）$\{w \mid w \in \{a, b\}^*$，且 w 中 a 的个数和 b 的个数之和是奇数$\}$
4）$\{w \mid w \in \{a,b\}^*$，w 中 a 的个数是偶数，且 w 的长度也为偶数$\}$
5）$\{w \mid w \in \{a,b\}^*$，w含相同个数的a和b，且w的每个前缀中a和b个数之差不超过1$\}$
6）$\{w \mid w \in \{a, b\}^*$，w 包含子串 ab，但不包含子串 bb$\}$

– 设计一个NFA，其语言为长度至少为2且末尾两个字符不相同的0，1串构成的集合。

– 试给出下列正规语言 *L* 的一个 *NFA*（不是 *ε-NFA*）：
$\{w \mid w \in \{a, b\}^*,\ |w| \geq 3$，且 w 中第2位和第3位不同$\}$

课后练习

✧ 自测题:

– 设计一个ε–NFA，其语言由满足下述条件的0，1串构成：长度至少为1，且前三个符号中至少有一个“0”。（以状态转移图的形式给出，要能够体现ε–NFA的设计特点）。

– 试构造接受下列正规语言 L 的一个ε-NFA:

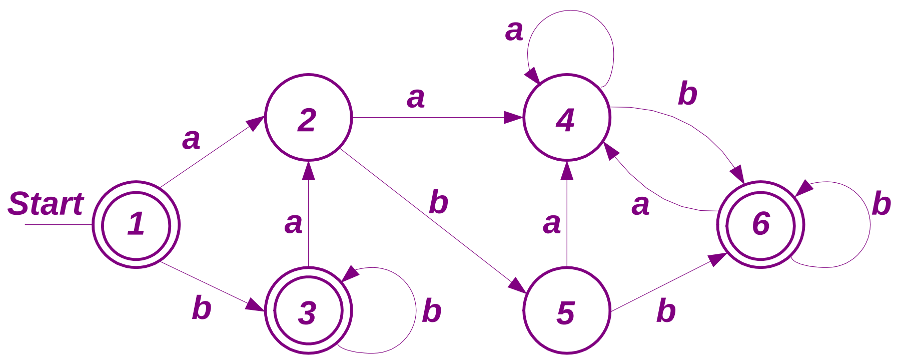
1) $\{\, w \mid w \in \{a, b, c\}^*,\ |w| \geq 1,$
且 w 后 3 位中至少有一位不是 $c \,\}$

2) $\{\, w \mid w \in \{a, b, c\}^*,\ |w| \geq 2,$
且 w 中从第 2 位到第4位至少有一位不是 c $\}$

3) $\{\, w \mid w \in \{a, b, c\}^*,\ |w| \geq 4,$ 且 w 的前5位至少有一个子串
bac，且 w 的后5位至少有一个子串 acb $\}$

课后练习

- 自测题:
  - 左下图表示一个 DFA，构造出与该DFA等价的最小化的DFA（即拥有的状态数目最少）。(分主要步骤或直接写出结果均可)



That's all for today.

Thank You