第一章 命题逻辑的基本概念

(1.6-2.4)

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

主观题 10分

Setting

上节课有什么疑问吗？欢迎投稿。

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

内容回顾：命题

- 命题
  - 是一个能判断真假且非真即假的陈述句
  - 两个特征
- 简单命题与复合命题

Setting

下面哪个是命题

A 北京是中国的首都

B 任意充分大的偶数都可以表示成两个素数之和

C 我正在说假话。

D x大于y。

Submit

内容回顾：基本复合命题（5个常用联结词）的真值表

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

内容回顾:常用的联结词

五种最基本、最常用的联结词 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, 将它们组成一个集合

$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,

称为一个联结词集。

其中$\neg$为一元联结词,

其余的都是二元联结词。

内容回顾：关于联结词的几点说明

- 对简单命题多次使用联结词集中的联结词，可以组成更为复杂的复合命题。
- 求复合命题的真值时，除依据前面的真值表外，还要规定联结词的优先顺序
- 教材中规定的联结词优先顺序为：

（），$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，

同一优先级的联结词，先出现者先运算。

析取联结词“∨” 与 异或“$\bar{\vee}$”的真值表

（注：$\bar{\vee}$为∨上面加一横，见教材P10，不可兼或）

p	q	$p\vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p\bar{\vee}q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

内容回顾：合式公式(命题公式)的定义

定义1.6　合式公式 (wff) (well formed formulas)

（1）单个命题变项是合式公式，并称为原子命题公式。

（2）若A是合式公式，则（$\neg A$）也是合式公式。

（3）若A，B是合式公式，则（$A \wedge B$），（$A \vee B$），（$A \rightarrow B$），（$A \leftrightarrow B$）也是合式公式。

（4）只有有限次地应用（1）～（3）形成的符号串才是合式公式。

合式公式也称为命题公式或命题形式，简称公式。

内容回顾：命题公式的赋值或解释

定义1.7　赋值或解释

设p_1，p_2，…，p_n是出现在公式A中的全部的命题变项，给p_1，p_2，…，p_n各指定一个真值，称为对A的一个赋值或解释。

若一组值使A的真值为1，则称这组值为A的成真赋值；

若使A的真值为0，则称这组值为A的成假赋值。

内容回顾：真值表及其构造方法

- 真值表：将命题公式A在所有赋值下的取值情况列成表，称作A的真值表。

- 步骤
  - 找出全体命题变项p_1，p_2，…，p_n，列出2^n个赋值。规定赋值从00…0开始，然后按二进制加法，直到11…1为止。
  - 按照运算的优先次序写出各子公式。
  - 对应各个赋值计算出各子公式的真值，直到最后计算出公式的真值。

内容回顾：$p\wedge(p\to q)\to q$ 的真值表

p	q	$p\to q$	$p\wedge(p\to q)$	$p\wedge(p\to q)\to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

内容回顾：命题公式的分类

设A为任一命题公式，

1. 若A在它的各种赋值下取值均为真，则称A是重言式或永真式。

2. 若A在它的各种赋值下取值均为假，则称A是矛盾式或永假式。

3. 若A不是矛盾式，则称A是可满足式

单选题 1分

Setting

(1)

(2)

A (1)是对的， (2)是不对的

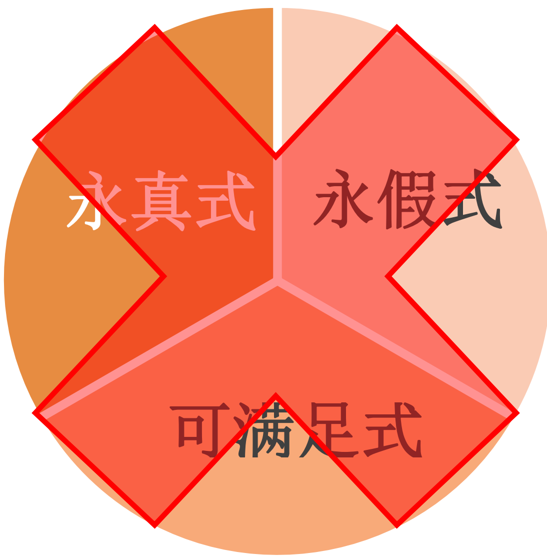
B (1)是不对的， (2)是对的

C 都不对

D 不好说

Submit

三者之间的关系



内容回顾：重言式与代入规则

代入规则

一个重言式，对其中所有相同的命题变项都用一合式公式代换，其结果仍为一重言式。这一规则称为代入规则。

换句话说，A是一个公式，对A使用代入规则得到公式B，若A是重言式，则B也是重言式。

代入规则的具体要求为：

1. 公式中被代换的只能是命题变项（原子命题），而不能是复合命题。

2. 对公式中某命题变项施以代入，必须对该公式中出现的所有同一命题变项施以相同的代换。

实例

例2： 判断 $((R\vee S)\wedge((R\vee S)\rightarrow(P\vee Q)))\rightarrow(P\vee Q)$为重言式.

不难验证$(A\wedge(A\rightarrow B))\rightarrow B$是重言式。作代入：

$$\frac{A}{(R\vee S)},\frac{B}{(P\vee Q)}$$

便知 $((R\vee S)\wedge((R\vee S)\rightarrow(P\vee Q))\rightarrow(P\vee Q)$ 是重言式。

内容回顾：命题形式化

所谓命题形式化（符号化），就是用命题公式的符号串来表示给定的命题。

- 命题符号化的方法

  1. 明确给定命题的含义。

  2. 对复合命题，找联结词，分解出各个原子命题。

  3. 设原子命题符号，并用逻辑联结词联结原子命题符号，构成给定命题的符号表达式。

化繁为简，各个击破

例6：若天不下雨，我就上街；否则在家。

设 P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。

该命题可写成：$(\neg P \to Q) \wedge (P \to R)$.

注意：中间的联结词一定是“∧”，而不是“∨”，也不是“$\overline{\vee}$”。

因为原命题表示：“天不下雨时我做什么，天下雨我又做什么”的两种作法，其中有一种作法是假的，则我说的是假话，所以中间的联结词一定是“∧”。

问题：若天不下雨，我就上街；否则在家

$P\ Q\ R$	$\neg P$	$\neg P \to Q$	$P \to R$	$(\neg P \to Q) \wedge (P \to R)$
0 0 0	1	0	1	0
0 0 1	1	0	1	0
0 1 0	1	1	1	1
~~0 1 1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
1 0 0	0	1	0	0
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	0	1	0	0
~~1 1 1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~

例6：若天不下雨，我就上街；否则在家

P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。

该命题可写成：$(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge \neg(Q \wedge R)$

还可以形式化为：$(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \bar{\vee} (P \wedge \neg Q \wedge R)$

还可以形式化为：$(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$

两项不会同时为1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \bar{\vee} q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

问题：若天不下雨，我就上街；否则在家

P Q R	P	$\neg P \to Q$	$P \to R$	$(\neg P \to Q) \wedge (P \to R) \wedge \neg (Q \wedge R)$
0 0 0	1	0	1	0
0 0 1	1	0	1	0
0 1 0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	0
1 0 0	0	1	0	0
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	0	1	0	0
1 1 1	0	1	1	0

悖论简介

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

自相矛盾

楚人有鬻盾与矛者，誉之曰：“**吾盾之坚，物莫能陷也。**”又誉其矛曰：“**吾矛之利，于物无不陷也。**”或曰：“以子之矛陷子之盾，何如？”其人弗能应也。众皆笑之。夫不可陷之盾与无不陷之矛，不可同世而立。

——《韩非子·难一》

无坚不摧的矛

牢不可破的盾

矛胜出了

⇓

盾不是“牢不可破”

悖论

盾胜出了

⇓

矛不是“无坚不摧”

无坚不摧的矛和牢不可破的盾不可能同时存在

我正在说假话

我正在说假话 真 ⇒ “我正在说假话”是假话

我正在说真话 ⇒ 假

我正在说假话 假 ⇒ “我正在说假话”是真话

我确实正在说假话 ⇒ 真

- 真→假
- 假→真
- 既不能为真，也不能为假

悖论

悖 论（Paradox）

- 悖论是自相矛盾的陈述（statement）。即如果承认这个陈述成立，就可推出它的否定陈述成立；反之，如果承认这个陈述的否定陈述成立，又可推出这个陈述成立

A paradox is a statement or group of statements that leads to a contradiction or a situation which defies intuition

逻辑学名词。一陈述B，如果承认B，可推得 $\neg$B 成立。

反之，如果承认 $\neg$B，又可推得 B 成立，称陈述B为一悖论。

——《辞 海》， P869

悖 论（Paradox）

一个论证能够导出与一般判断相反的结果，而要推翻它又很难给出正当的根据时，这种论证称为<u>悖论</u>。特别是，如果一个命题及其否定均可用逻辑上等效的推理加以证明，而对其推导又无法明确指出错误时，这种矛盾称为<u>谬论</u>（Antinomy）。但在实用中并未将悖论与谬论严加区别，而把它们当作同义语。

——《数 学 百 科 辞 典》, P6

三个著名悖论

- 1900年前后, 在数学的集合论中出现了三个著名悖论：罗素悖论、康托尔悖论、布拉利—福尔蒂悖论。这些悖论特别是罗素悖论，在当时的数学界与逻辑界内引起了极大震动。触发了数学的第三次危机
  - 罗素悖论：所有集合组成的集合
  - 康托尔悖论:没有最大的基数
  - 布拉利—福尔蒂悖论：最大序数悖论

1902年罗素发现了集合论中的一个悖论，在数学界引起了震惊。

（内容见教材P131，留待后面章节介绍）

所有集合组成的集合

理发师悖论

- 例如比较有名的理发师悖论：某乡村有一位理发师，一天他宣布：只给不自己刮胡子的人刮胡子。这里就产生了问题：
- 理发师给不给自己刮胡子？如果他给自己刮胡子，他就是自己刮胡子的人，按照他的原则，他不能给自己刮胡子；如果他不给自己刮胡子，他就是不自己刮胡子的人，按照他的原则，他就应该给自己刮胡子。这就产生了矛盾。

书中习题的解释

考察如下两句话：

1. “这句话是错的。”
2. “本页上这一行的这句话是假话。”

问题：这句话究竟是真话还是假话！

若承认这句话的内容是对的，即承认这句话的断言为真，则可推出这句话是假话；

反之，若承认这句话的内容是不对的，即承认这句话的断言为假，则可推出这句话是真话。

这种语句称为“自指谓”语句。它的结论是对自身而言的。往往会产生自相矛盾的结论。

悖论举例1

Liar Paradox（说谎悖论，谎言悖论）

Consider a man who asserts “*I am lying*.”

Is he lying or is he speaking the truth?

如果承认他在说谎，这表明：“我在说谎”是谎话，
→他在讲真话（即没有说谎）。

如果承认他讲真话，这表明：“我在说谎”是真话，
→他确实在说谎（即没有讲真话）。

可见“*I am lying*” is a paradox。无法判断真假。

悖论举例2

古代有一个小国，百姓犯罪后，若被处以极刑有两种方式：

1. 若说真话，则上天堂（处以绞刑）
2. 若说假话，则下地狱（将被活埋）

一个逻辑学家犯罪后，在被处以极刑前稍加思索后说了一句话，令执行官左右为难，只得将他赦免。

问题：逻辑学家说的这句话的内容是什么？

悖论举例2

1. 若说真话，则上天堂（处以绞刑）
2. 若说假话，则下地狱（将被活埋）

逻辑学家说：“我将下地狱”（或“我将被活埋”）。

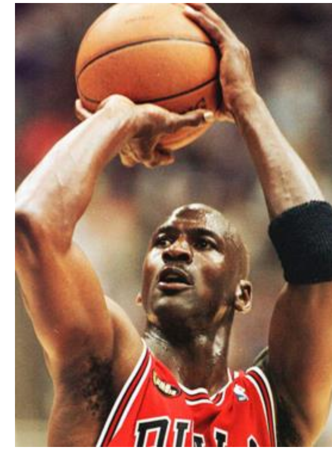
若承认为真话，则应处以绞刑；

但若施以绞刑，则“我将被活埋”应为假话。

若承认为假话，则应将其活埋；

但若将其活埋，“我将被活埋”将变成真话。

更多举例



Michael Jordan

- 先有鸡，还是先有蛋？
- 两小儿辩日
- 纸牌悖论（乔丹真值悖论）
  - 纸牌悖论就是纸牌的一面写着：“纸牌反面的句子是对的。”而另一面却写着：“纸牌反面的句子是错的。”

Philip Jourdain

- 上帝和石头
  - 上帝能创造出一块他搬不动的石头吗？

Michael Jordan

1.6 波兰表达式

括号的使用，联结词的中缀、前缀、后缀形式的选择，都直接影响到同一公式描述和计算的复杂程度。

若用计算机来识别、计算、处理逻辑公式，不同的表示方法会带来不同的效率。

1.6.1 计算机识别括号的过程

合式公式的定义中使用的是联结词的中缀表示，又引入括号以便区分运算次序，这些都是人们常用的方法。

计算机识别处理中缀表示的公式，需反复自左向右，自右向左的扫描。如考察下面公式真值的计算过程

$$(P\vee(Q\wedge R))\vee(S\wedge T)$$

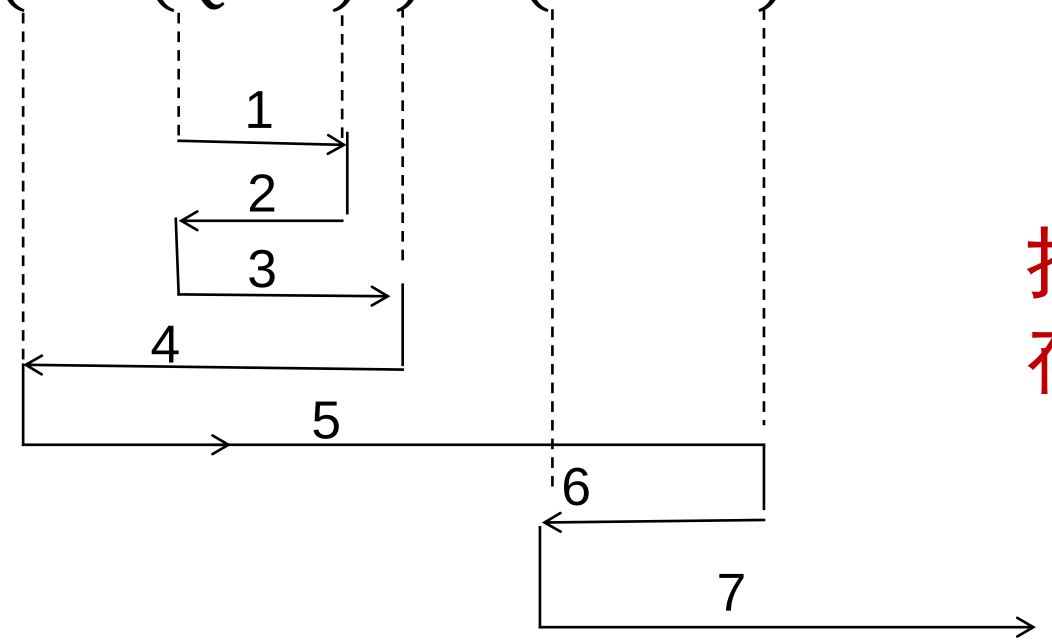
开始**从左向右**扫描，至发现第一个右半括号为止，便返回至最近的左半括号，得部分公式$(Q\wedge R)$方可计算真值。

随后又向右扫描，至发现第二个右半括号，便返回至第二个左半括号，于是得部分公式$(P\vee(Q\wedge R))$并计算真值，重复这个过程直至计算结束。

1.6.1 计算机识别括号的过程

如图所示的扫描过程1→2→3→…→6→7。

$(P \vee (Q \wedge R)) \vee (S \wedge T)$



扫描繁琐
存储状态

一定要括号吗？

1.6.1 计算机识别括号的过程

公式中的运算符是否非要括号才能定义呢？

若一个式子中同时使用**两种或两种以上**运算符放置方式时，无论对运算符的优先级怎样进行规定，括号都不能完全避免。

例如：对数运算符 log 是前缀运算符;

阶乘运算符！是后缀运算符;

解决方案：将中缀、后缀全部换成前缀
或将中缀、前缀全部换成后缀
这样，便可不使用任何括号。

1.6.2 波兰式

一般而言，使用联结词构成公式有三种方式，

中缀式如　　$P \vee Q$

前缀式如　　$\vee PQ$

后缀式如　　$PQ \vee$

前缀式用于逻辑学是由波兰的数理逻辑学家

J. Lukasiewicz提出的，故称之为波兰表达式。

1.6.2 波兰式

- 将公式$P\vee((Q\ \vee R)\wedge S)$ 化成波兰式，可由内层括号逐步向外层脱开(或由外层向内逐层脱开）的办法。

$$P\vee((Q\vee R)\wedge S)$$

1

$\vee QR$

2

$\wedge\vee QRS$

3

$\vee P\wedge\vee QRS$

1.6.2中缀变前缀 $P\vee((Q\vee R)\wedge S)$

由里向外：

$P\vee((Q\vee R)\wedge S)$

$P\vee(\vee QR\wedge S)$

$P\vee\wedge\vee QRS$

$\vee P\wedge\vee QRS$

由外向里：

$P\vee((Q\vee R)\wedge S)$

$\vee P\ ((Q\vee R)\wedge S)$

$\vee P\wedge(Q\vee R)\ S$

$\vee P\wedge\vee QRS$

1.6.2 波兰式

举例：**中缀变后缀**　P∨((Q∨R)∧S)

$$P\vee((Q\vee R)\wedge S)$$

$$P\ ((Q\vee R)\wedge S)\vee$$

$$P\ (Q\vee R)\ S\wedge\vee$$

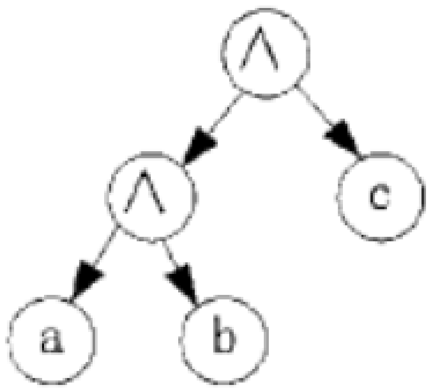
$$P\ QR\vee S\wedge\vee$$

是否还有其他转换方式？

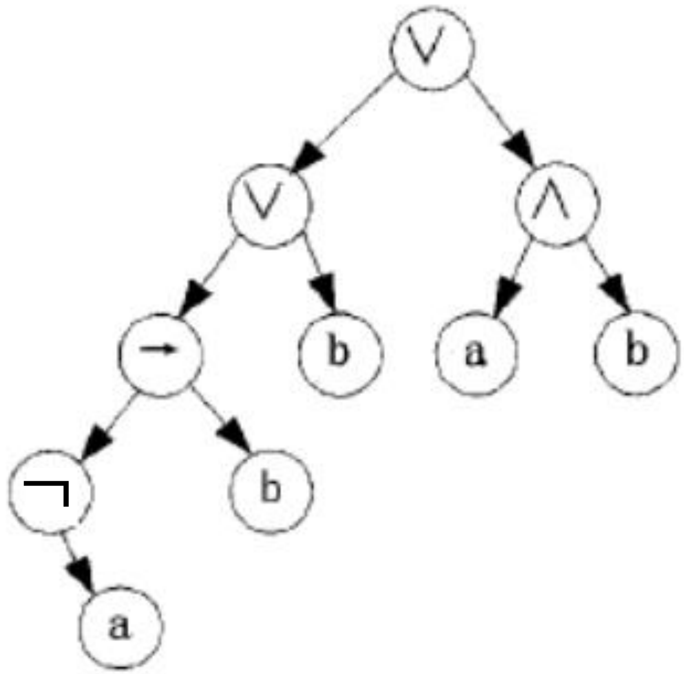
- 可以借助二叉树的前序与后序遍历，简化表达式中缀表示与前缀表示以及后缀表示间的转化。
- 根据表达式首先建立二叉树
- 然后借助二叉树的前序（后序）遍历得到表达式的前缀（后缀）表示

二叉树表示法

$B = a \wedge b \wedge c$



$D = (\neg a \to b) \vee b \vee (a \wedge b)$



1.6.2 波兰式

- $(P \vee (Q \wedge R)) \vee (S \wedge T)$
- 波兰式：$\vee\vee P \wedge QR \wedge ST$
- 计算机如何进行求值？

$\vee \vee P \wedge Q \; R \wedge S \; T$

$(P \vee (Q \wedge R)) \vee (S \wedge T)$

1.6.2 波兰式

- 以波兰式表达的公式，当计算机识别处理时，可自右向左扫描一次完成，避免了重复扫描。
- 同样后缀表示（逆波兰式）也有类似的优点。而且自左向右一次扫描（看起来更合理）可识别处理一个公式，非常方便，常为计算机的程序系统所采用。
- 只不过这种表示的公式，人们阅读起来不大习惯。

第一章小结

命题逻辑(Logic)

- 研究命题的推理演算
- 命题逻辑的应用
  - 数学上定理的推导
  - 在计算机科学上，验证程序的正确性

主要内容

- 命题的基本概念
- 命题联结词
- 命题合式公式、重言式
- 自然语句的形式化

第一章小结（续）

- 本章主要介绍了命题逻辑的基本概念，它是后面两章的基础；
- 介绍了命题、命题变项、简单命题和复合命题；
- 介绍了命题联结词及其真值表
  - 否定联结词$\neg$
  - 合取联结词$\wedge$
  - 析取联结词$\vee$
  - 蕴涵联结词$\rightarrow$
  - 双蕴涵联结词$\leftrightarrow$

第一章小结（续）

- 介绍了合式公式及其递归定义；
- 介绍了重言式、矛盾式和可满足式；在此基础上，介绍了代入规则以及如何利用代入规则证明重言式；
- 介绍了如何形成自然语句的合式公式（命题的形式化）以及较为复杂的自然语句形式化；
- 介绍了计算机识别合式公式（括号）的过程，在此基础上，介绍了波兰表达式及其在计算机识别处理过程的优势。

第二章：命题逻辑的等值和推理演算

2.1 等值定理

2.2 等值公式

2.3 命题公式与真值表的关系

2.4 联接词的完备集

2.5 对偶式

2.6 范式

2.7 推理形式

2.8 基本的推理公式

2.9 推理演算

2.10 归结推理法

前言

- 推理形式和推理演算是数理逻辑研究的基本内容
- 推理形式是由前提和结论经蕴涵词联结而成的
- 推理过程是从前提出发，根据所规定的规则来推导出结论的过程
- 重言式是重要的逻辑规律，正确的推理形式、等值式都是重言式

2.1 等值定理

等值:

给定两个命题公式 A和 B，设$P_1, P_2, \ldots, P_n$为出现于A和B中的所有命题变项，则公式A和B共有2^n个解释。

若在任一解释下，公式A和B的真值都相同，则称A和B是等值的、或称等价记作

$A=B$ 或 $A\Leftrightarrow B$。

•判断公式是否等值

$P\rightarrow(Q\rightarrow R)$与$(P\wedge Q)\rightarrow R$

$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$与$(P\wedge Q)\rightarrow R$

$P\rightarrow(Q\rightarrow R)$与$(P\land Q)\rightarrow R$
$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$与$(P\land Q)\rightarrow R$

$P\ Q\ R$	$Q\rightarrow R$	$P\land Q$	$P\rightarrow Q$	$P\rightarrow(Q\rightarrow R)$	$(P\land Q)\rightarrow R$	$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$
0 0 0	1					
0 0 1	1					
0 1 0	0					
0 1 1	1					
1 0 0	1					
1 0 1	1					
1 1 0	0					
1 1 1	1					

$P\to(Q\to R)$与$(P\wedge Q)\to R$
$(P\to Q)\to R$与$(P\wedge Q)\to R$

$P\ Q\ R$	$Q\to R$	$P\wedge Q$	$P\to Q$	$P\to(Q\to R)$	$(P\wedge Q)\to R$	$(P\to Q)\to R$
0 0 0	1			1		
0 0 1	1			1		
0 1 0	0			1		
0 1 1	1			1		
1 0 0	1			1		
1 0 1	1			1		
1 1 0	0			0		
1 1 1	1			1		

$P\to(Q\to R)$与$(P\land Q)\to R$
$(P\to Q)\to R$与$(P\land Q)\to R$

$P\ Q\ R$	$Q\to R$	$P\land Q$	$P\to Q$	$P\to(Q\to R)$	$(P\land Q)\to R$	$(P\to Q)\to R$
0 0 0	1	0		1		
0 0 1	1	0		1		
0 1 0	0	0		1		
0 1 1	1	0		1		
1 0 0	1	0		1		
1 0 1	1	0		1		
1 1 0	0	1		0		
1 1 1	1	1		1		

$P\to(Q\to R)$与$(P\wedge Q)\to R$
$(P\to Q)\to R$与$(P\wedge Q)\to R$

$P\ Q\ R$	$Q\to R$	$P\wedge Q$	$P\to Q$	$P\to(Q\to R)$	$(P\wedge Q)\to R$	$(P\to Q)\to R$
0 0 0	1	0		1	1	
0 0 1	1	0		1	1	
0 1 0	0	0		1	1	
0 1 1						
1 0 0	1	0		1	1	
1 0 1	1	0		1	1	
1 1 0	0	1		0	0	
1 1 1	1	1		1	1	

$$P\to(Q\to R)=(P\wedge Q)\to R$$

$P\to(Q\to R)$与$(P\land Q)\to R$
$(P\to Q)\to R$与$(P\land Q)\to R$

P Q R	$Q\to R$	$P\land Q$	$P\to Q$	$P\to(Q\to R)$	$(P\land Q)\to R$	$(P\to Q)\to R$
0 0 0	1	0	1	1	1	
0 0 1	1	0	1	1	1	
0 1 0	0	0	1	1	1	
0 1 1	1	0	1	1	1	
1 0 0	1	0	0	1	1	
1 0 1	1	0	0	1	1	
1 1 0	0	1	1	0	0	
1 1 1	1	1	1	1	1	

$P\to(Q\to R)$与$(P\land Q)\to R$
$(P\to Q)\to R$与$(P\land Q)\to R$

$P\ Q\ R$	$Q\to R$	$P\land Q$	$P\to Q$	$P\to(Q\to R)$	$(P\land Q)\to R$	$(P\to Q)\to R$
0 0 0	1	0	1	1	1	0
0 0 1	1	0	1	1	1	1
0 1 0	0	0	1	1	1	0
0 1 1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1
1 0 0	1	0	0	1	1	1
1 0 1	1	0	0	1	1	1
1 1 0	0	1	1	0	0	0
1 1 1	1	1	1	1	1	1

$$(P\to Q)\to R \neq (P\land Q)\to R$$

2.1 等值定理

- 定理2.1.1

  设A，B为两个命题公式，$A=B$的**充分必要条件**是$A \leftrightarrow B$为一个重言式。

1. 必要性：$\Leftarrow$

　　若$\boldsymbol{A \leftrightarrow B}$是重言式，则在任一解释下，$\boldsymbol{A \leftrightarrow B}$的真值均为真。

　　由$\boldsymbol{A \leftrightarrow B}$的定义，仅当$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$真假值相同时，才有$\boldsymbol{A \leftrightarrow B} = \mathrm{T}$。

　　所以在任一解释下，**$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$都有相同的真值**，从而有$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$。

等值定理的证明

2．充分性：→

若有$A = B$，则在任一解释下，A和B都有相同的真值，依 $A \leftrightarrow B$的定义，$A \leftrightarrow B$的取值一定为真，故推出 $A \leftrightarrow B$是重言式。

证毕

等值定理

等值定理的实用性之一：

若证明两个公式等值，只要证明由这两个公式构成的双条件式是重言式。

等值关系满足等价关系的三个性质：

自反性　$A = A$.

对称性　若$A = B$，则$B = A$.

传递性　若$A = B$，$B = C$，则$A = C$

等价关系

命题的四种形式

原命题 **逆命题** **否命题** **逆否命题**

如果$x < -1$ 那么$x + \frac{1}{x} \leq -2$

反过来说

否了原命题 的条件和结论 $\neq$ 命题的否定（只否结论）

$\geq$ $>$

反过来说，再否了

$\geq$ $>$

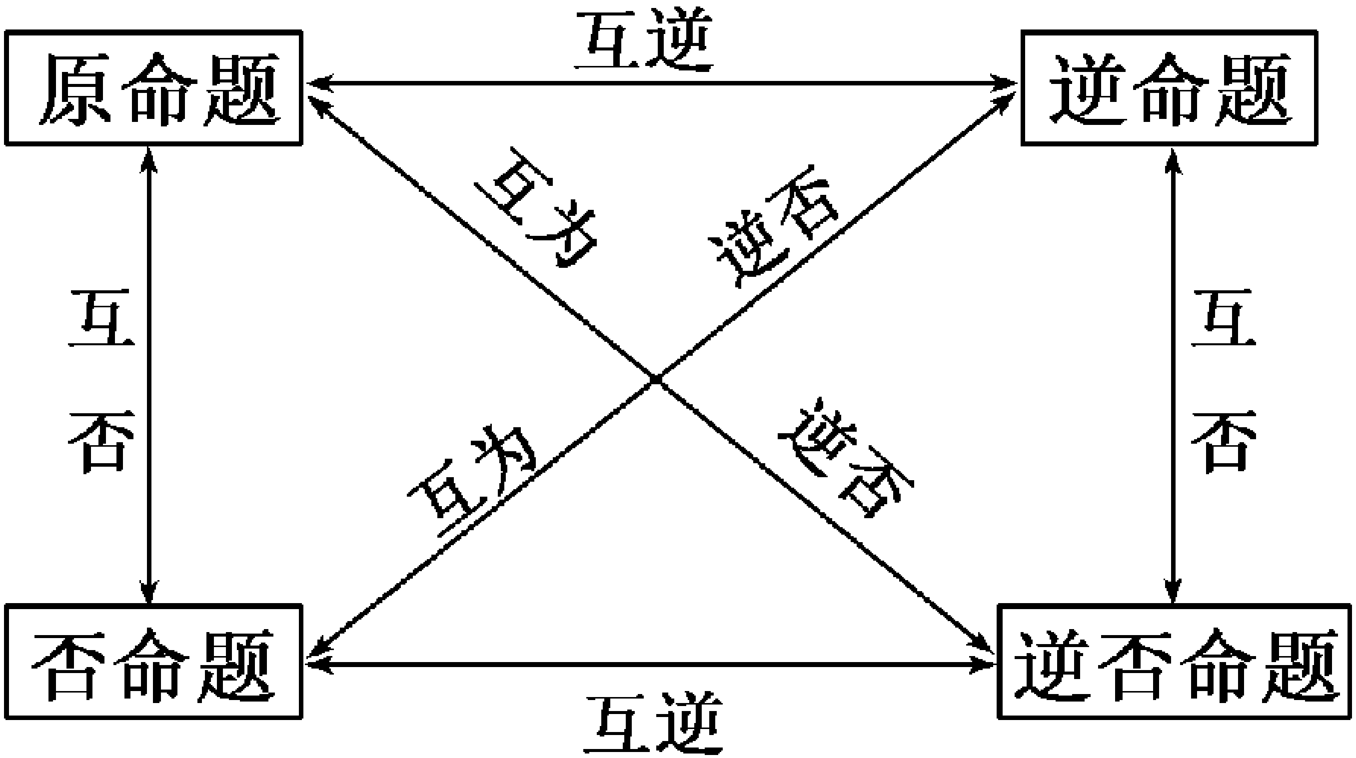
逆命题、否命题与逆否命题

若将$P\to Q$视为原命题，

逆命题：则称$Q\to P$为它的逆命题。

否命题：则称$\neg P\to\neg Q$为它的否命题。

逆否命题: 则称$\neg Q\to\neg P$为它的逆否命题。



逆命题、否命题与逆否命题

两个重要结论

1. 一个命题（**原命题**）与它的逆否命题等值

即 $P \to Q = \neg Q \to \neg P$

2. 一个命题的逆命题与它的否命题等值

即 $Q \to P = \neg P \to \neg Q$

举例 证明 若a^2是偶数，则a是偶数。利用结论1。

2.2 等值公式

2.2.1 子公式

若X是合式公式A的一部分，且X本身也是一个合式公式，则称X为公式A的子公式。

2.2.2 置换规则

设X为公式A的子公式，用与X等值的公式Y将A中的X施以代换，称为置换，该规则称为置换规则。

置换后公式A化为公式B，置换规则的性质保证公式A与公式B等值，即$A=B$。

且当A是重言式时，置换后的公式B也是重言式。

2.2 等值公式

定理2.2.1：

设$\Phi(A)$是含命题公式A的命题公式， $\Phi(B)$是用命题公式B置换了$\Phi(A)$中的A之后得到的命题公式

如果$A = B$，则$\Phi(A) = \Phi(B)$ 。

2.2.1 基本的等值公式(命题定律)

1. 双重否定律

$$\neg\neg P = P$$

2. 结合律

$$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$$

$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$$

$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$$

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

"$\rightarrow$" 不满足结合律

2.2.1 基本的等值公式(命题定律)

3. 交换律

$$P \vee Q = Q \vee P$$

$$P \wedge Q = Q \wedge P$$

$$P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$$

$$P \rightarrow Q \neq Q \rightarrow P$$

“→” 不满足交换律

2.2.1 基本的等值公式(命题定律)

4. 分配律

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \to (Q \to R) = (P \to Q) \to (P \to R)$$

$$P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \neq (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)$$

“$\leftrightarrow$” 不满足分配律

2.2.1 基本的等值公式(命题定律)

5. 等幂律（恒等律）

$$P \vee P = P$$

$$P \wedge P = P$$

$$P \rightarrow P = T$$

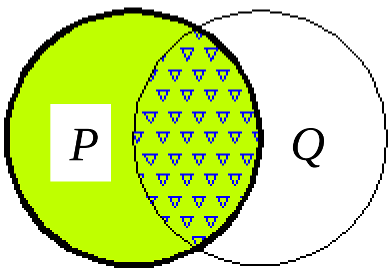
$$P \leftrightarrow P = T$$

2.2.1 基本的等值公式(命题定律)

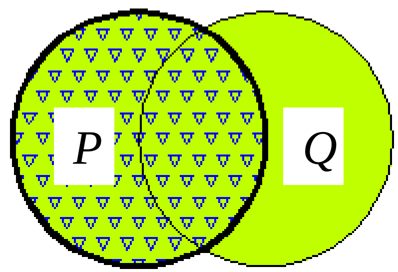
6. 吸收律

$$P \lor (P \land Q) = P$$

$$P \land (P \lor Q) = P$$



$P \lor (P \land Q)$



$P \land (P \lor Q)$

2.2.1 基本的等值公式(命题定律)

7. 摩根（De Morgan）律：

$$\neg (P \lor Q) = \neg P \land \neg Q$$

$$\neg (P \land Q) = \neg P \lor \neg Q$$

对蕴含词、双条件词作否定有

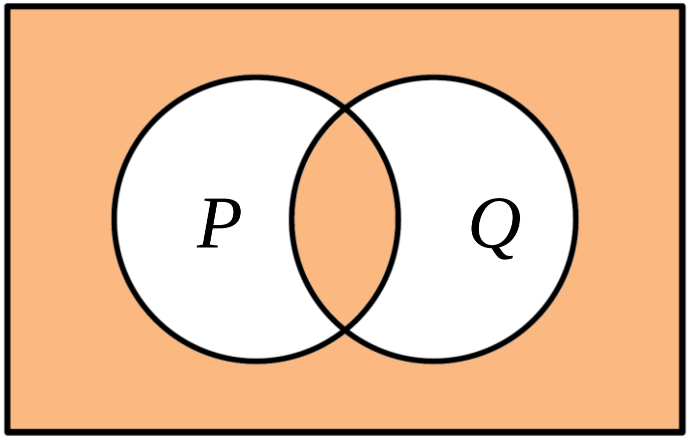
$$\neg(P \rightarrow Q) = P \land \neg Q$$

$$\neg(P \leftrightarrow Q) = \neg P \leftrightarrow Q = P \leftrightarrow \neg Q$$

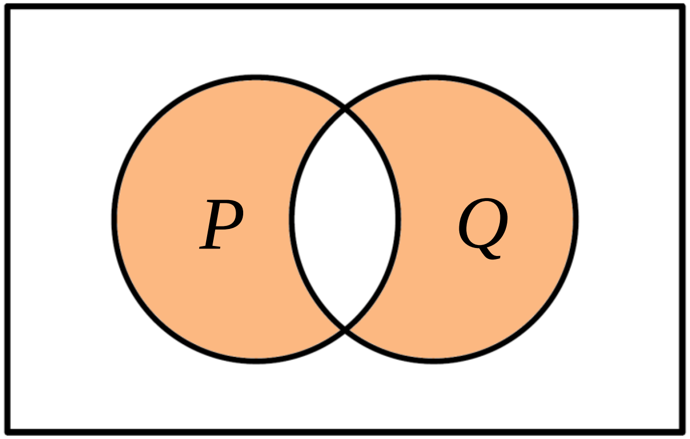
$$= (\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q)$$ （借助图形）

$P \leftrightarrow Q$ 和 $\neg(P \leftrightarrow Q)$ 的文氏图

- $P \leftrightarrow Q = (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$
- $\neg(P \leftrightarrow Q) = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$



$P \leftrightarrow Q$



$\neg(P \leftrightarrow Q)$

2.2.1 基本的等值公式(命题定律)

8. 同一律：

$$P \vee F = P \qquad P \wedge T = P$$

$$T \rightarrow P = P \qquad T \leftrightarrow P = P$$

还有

$$P \rightarrow F = \neg P \qquad F \leftrightarrow P = \neg P$$

2.2.1 基本的等值公式(命题定律)

9. 零律：

$$P \vee T = T$$

$$P \wedge F = F$$

还有

$$P \rightarrow T = T$$

$$F \rightarrow P = T$$

2.2.1 基本的等值公式(命题定律)

10. 补余律：

$P \lor \neg P = T \qquad P \land \neg P = F$

还有

$P \rightarrow \neg P = \neg P$

$\neg P \rightarrow P = P$

$P \leftrightarrow \neg P = F$

常用的等值公式

- 蕴涵等值式 $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$
- 前提合取合并 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$
- **等价等值式：** $P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- **假言易位：** $P \rightarrow Q = \neg Q \rightarrow \neg P$
- **等价否定等值式：** $P \leftrightarrow Q = \neg P \leftrightarrow \neg Q$
- **归谬论：** $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) = \neg P$

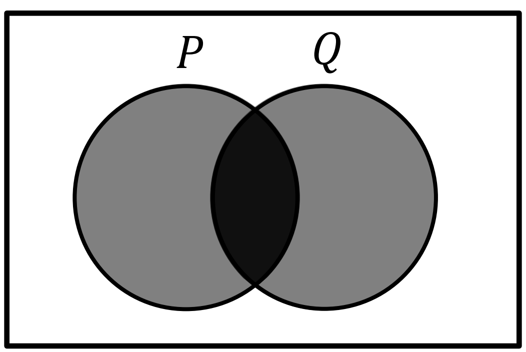
常用的等值公式

- $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 从取真来描述双条件
- $P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ 从取假来描述双条件
- $P \to (Q \to R) = Q \to (P \to R)$ 前提交换
- $(P \to R) \wedge (Q \to R) = (P \vee Q) \to R$ 前提析取合并

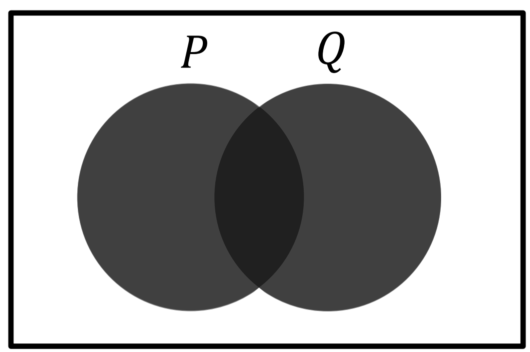
证明其他等值式

文氏图(Venn Diagram)

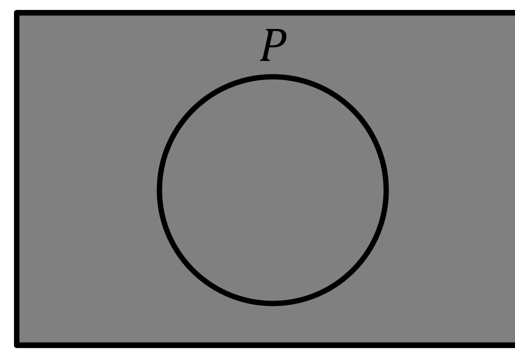
- 将P、Q理解为某总体论域上的子集合，并规定：
  - $P \wedge Q$为两集合的公共部分(交集合)
  - $P \vee Q$为两集合的全部(并集合)
  - $\neg P$为总体论域(如矩形域)中P的余集



$P \wedge Q$



$P \vee Q$

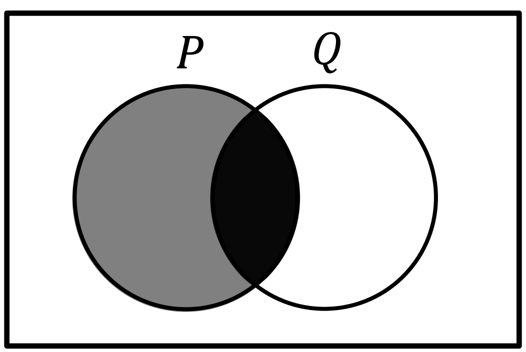


$\neg P$

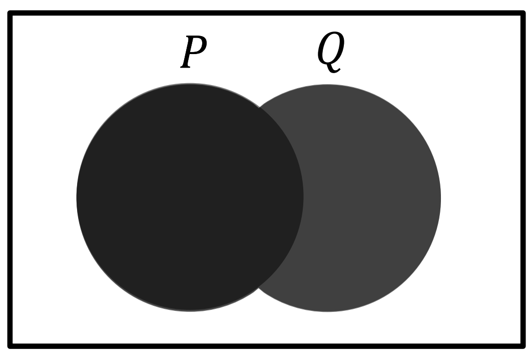
文氏图(Venn Diagram)

从Venn图，因$P \wedge Q$较P来得“小”，$P \vee Q$较P来得“大”，从而有

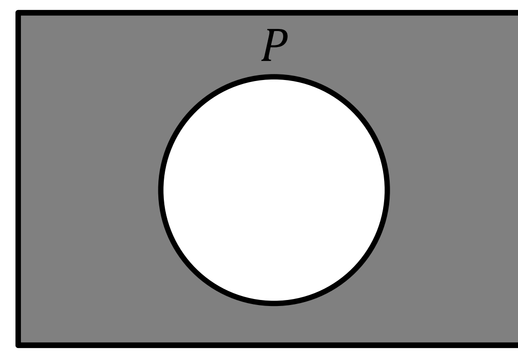
$$P \vee (P \wedge Q) = P \qquad P \wedge (P \vee Q) = P$$



$P \wedge Q$



$P \vee Q$



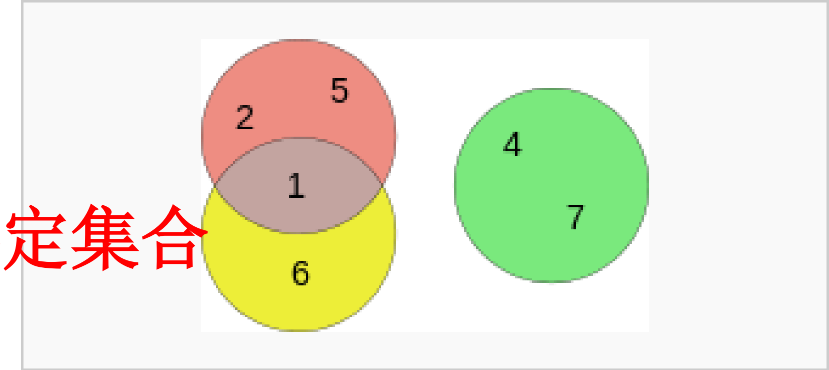
$\neg P$

欧拉图(Euler Diagram)

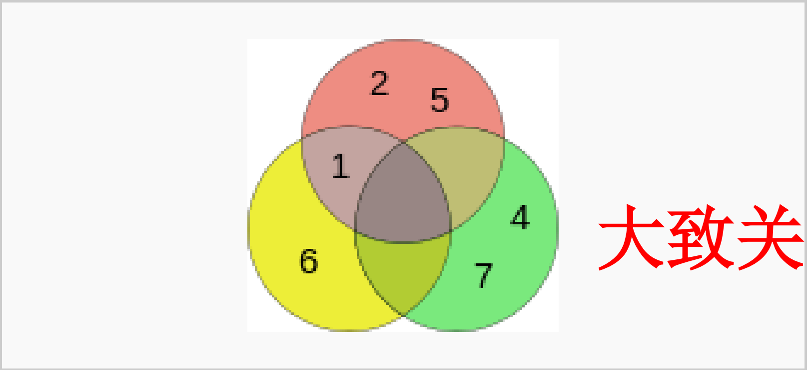
- $A = \{1, 2, 5\}$
- $B = \{1, 6\}$
- $C = \{4, 7\}$

The Venn and the Euler diagram of those sets are:

特定集合



Euler diagram



Venn diagram

大致关系

https://en.wikipedia.org/wiki/Venn_diagram

https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_diagram

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%96%87%E6%B0%8F%E5%9B%BE

2.2.4 等值演算

- 定义
  - 由已知等值式推演出另外一些等值式的过程称为等值演算（布尔代数和逻辑代数）。
- 方法
  - 方法1：列真值表。
  - 方法2：公式的等价变换.

置换定律:A是一个命题公式，X是A中子公式，如果$X=Y$，用Y代替A中的X得到公式B，则$A=B$。

公式等值演算的用途

- 判别命题公式的类型
  - 重言式
  - 矛盾式
  - 可满足式
- 验证两个公式等值
- 解决实际问题

用途1：判别命题公式的类型

- 例1　判别$\neg(P\wedge Q)\rightarrow(\neg P\vee(\neg P\vee Q))$公式类型.

解　原式

$\neg\neg(P\wedge Q)\vee((\neg P\vee\neg P)\vee Q)$ (蕴涵等值式，结合律)

$=(P\wedge Q)\vee(\neg P\vee Q)$　(双重否定律，幂等律)

$=(P\wedge Q)\vee(Q\vee\neg P)$　(交换律)

$=((P\wedge Q)\vee Q)\vee\neg P$　(结合律)

$=Q\vee\neg P$　(吸收律)　可满足式

单选题 1分

Setting

判别$\neg(P \rightarrow (P \lor Q)) \land R$公式类型

A 可满足式

B 矛盾式

C 永真式

D 都不是

Submit

用途1：判别命题公式的类型

- 例2　　判别$\neg(P \rightarrow (P \vee Q)) \wedge R$公式类型.

解　原式

$= \neg(\neg P \vee P \vee Q) \wedge R$ (蕴涵等值式)

$= (P \wedge \neg P \wedge \neg Q) \wedge R$　　(摩根律)

$= F \wedge R$　　(补余律，零律)

$= \mathrm{F}$　　(零律)

矛盾式

用途2：验证两个公式等值

例3：证明$P\rightarrow(Q\rightarrow R)=(P\wedge Q)\rightarrow R$

- 证明：

$P\rightarrow(Q\rightarrow R)=P\rightarrow(\neg Q\vee R)$ （置换）

$=\neg P\vee(\neg Q\vee R)$ （置换）

$=(\neg P\vee\neg Q)\vee R$ （结合律）

$=\neg(P\wedge Q)\vee R$ （摩根律）

$=(P\wedge Q)\rightarrow R$ （置换）

例4：证明$(P\rightarrow R)\land(Q\rightarrow R)=(P\lor Q)\rightarrow R$

$(P\rightarrow R)\land(Q\rightarrow R)$ =

$(\neg P\lor R)\land(\neg Q\lor R)$	蕴含等值式
$(\neg P\land\neg Q)\lor R$	分配律
$\neg(P\lor Q)\lor R$	摩根律
$(P\lor Q)\rightarrow R$	蕴含等值式

例5：$(P\land(Q\lor R))\lor(P\land\neg Q\land\neg R)= P$

证明：

$(P\land(Q\lor R))\lor(P\land\neg Q\land\neg R)$

$= P\land(\,(Q\lor R)\lor(\neg Q\land\neg R)\,)$　　分配律

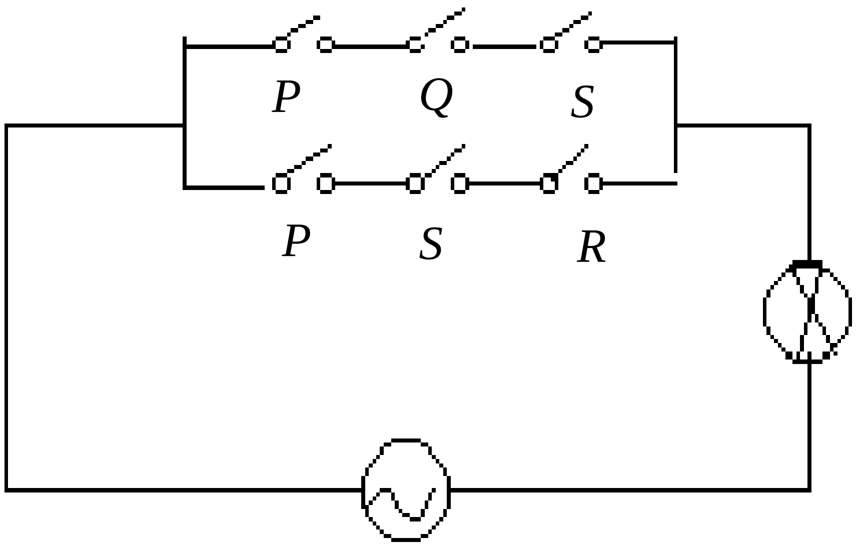
$= P\land((Q\lor R)\lor\neg(Q\lor R))$　　摩根律

$= P\land \mathrm{T}$　　同一律

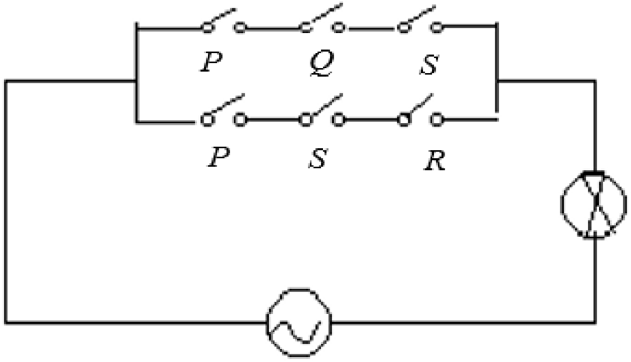
$= P$

用途3：解决实际问题

- 例6：试用较少的开关设计一个与下图有相同功能的电路。



解：**可将该图所示之开关电路用下述命题公式表示：**



$$(P \wedge Q \wedge S) \vee (P \wedge R \wedge S)$$

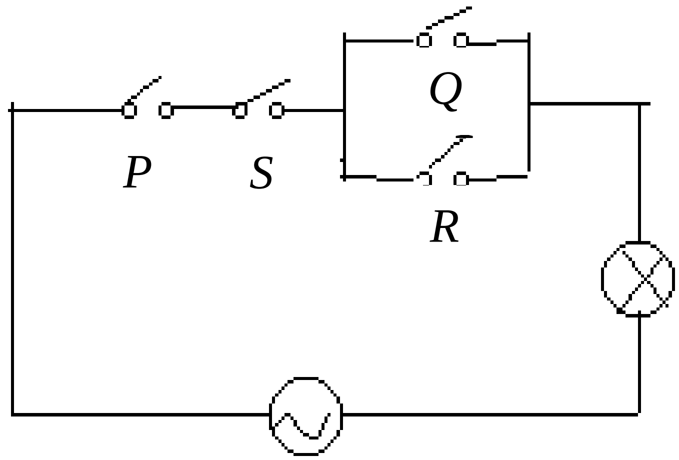
利用基本等值公式，将上述公式转化为：

$$(\underline{P} \wedge Q \wedge \underline{S}) \vee (\underline{P} \wedge R \wedge \underline{S})$$

$$= ((P \wedge S) \wedge Q) \vee ((P \wedge S) \wedge R)$$

$$= (P \wedge S) \wedge (Q \vee R)$$

所以其开关设计图可简化为



用途3：解决实际问题

例7：在某次研讨会的中间休息时间，3名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人判断如下：

甲：王教授不是苏州人，是上海人。

乙：王教授不是上海人，是苏州人。

丙：王教授既不是上海人，也不是杭州人。

听完这3人的判断后，王教授笑着说，你们3人中**有一人说得全对，有一人说对了一半，另一人说得全不对**。

试用逻辑演算分析王教授到底是哪里人。

甲：王教授不是苏州人，是上海人。
乙：王教授不是上海人，是苏州人。
丙：王教授既不是上海人，也不是杭州人

解 设命题

P：王教授是苏州人.

Q：王教授是上海人.

R：王教授是杭州人.

P, Q, R中必有一个真命题，两个假命题.

甲的判断为 $\neg P \wedge Q$

乙的判断为 $P \wedge \neg Q$

丙的判断为 $\neg Q \wedge \neg R$

甲：王教授不是苏州人，是上海人。 甲的判断为 $\neg P \wedge Q$

乙：王教授不是上海人，是苏州人。 乙的判断为 $P \wedge \neg Q$

丙：王教授既不是上海人，也不是杭州人 丙的判断为 $\neg Q \wedge \neg R$

甲的判断全对为	$B_1 = \neg P \wedge Q$
甲的判断对一半为	$B_2 = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$
甲的判断全错为	$B_3 = P \wedge \neg Q$
乙的判断全对为	$C_1 = P \wedge \neg Q$
乙的判断对一半为	$C_2 = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$
乙的判断全错为	$C_3 = \neg P \wedge Q$
丙的判断全对为	$D_1 = \neg Q \wedge \neg R$
丙的判断对一半为	$D_2 = (\neg Q \wedge R) \vee (Q \wedge \neg R)$
丙的判断全错为	$D_3 = Q \wedge R$

一人说得全对，有一人说对了一半，另一人说得全不对

$(B\ C\ D)_1$:**说得全对；** $(B\ C\ D)_2$：**说对一半；**

$(B\ C\ D)_3$:**说得全不对**

由王教授所说：下面的命题为真命题

$$E = (B_1 \wedge C_2 \wedge D_3) \vee (B_1 \wedge C_3 \wedge D_2) \vee$$

$$(B_2 \wedge C_1 \wedge D_3) \vee (B_2 \wedge C_3 \wedge D_1) \vee$$

$$(B_3 \wedge C_1 \wedge D_2) \vee (B_3 \wedge C_2 \wedge D_1)$$

又 $B_1 \wedge C_2 \wedge D_3 = (\neg P\wedge Q) \wedge((\neg P\wedge\neg Q) \vee (P\wedge Q)) \wedge (Q\wedge R)$

$$= (\neg P\wedge Q) \wedge((\neg P\wedge\neg Q\wedge Q\wedge R) \vee (P\wedge Q\wedge Q\wedge R))$$

$$= (\neg P\wedge Q) \wedge (P\wedge Q\wedge Q\wedge R)$$

$$= \mathrm{F}$$

$B_1 \wedge C_3 \wedge D_2 = \neg P \wedge Q \wedge \neg R$

P：王教授是苏州人.
Q：王教授是上海人.
R：王教授是杭州人.

$$B_2 \wedge C_1 \wedge D_3 = \mathrm{F}$$
$$B_2 \wedge C_3 \wedge D_1 = \mathrm{F}$$
$$B_3 \wedge C_1 \wedge D_2 = P \wedge \neg Q \wedge R$$
$$B_3 \wedge C_2 \wedge D_1 = \mathrm{F}$$

故

$$E = (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$$

因为王教授不能既是上海人，又是杭州人，所以P, R必有一个假命题，即 $P \wedge R \Leftrightarrow 0$. 于是

$E = \neg P \wedge Q \wedge \neg R$ 为真命题，即

王教授是上海人，甲说得全对，丙说对了一半，而乙全说错了。

例8：推导比赛名次

- 例8 **A,B,C,D 4人做百米竞赛，观众甲、乙、丙预报比赛的名次为：**

  甲：C第一，B第二；

  乙：C第二，D第三；

  丙：A第二，D第四

比赛结束后发现甲、乙、丙每人报告的情况都是各对一半，试问实际名次如何（无并列者）？

甲：C第一，B第二
乙：C第二，D第三
丙：A第二，D第四

解：A_i,B_i,C_i,D_i表示A,B,C,D第i名，$i=1,2,3,4$

① $(C_1 \wedge \neg B_2) \vee (\neg C_1 \wedge B_2) = \mathrm{T}$

② $(C_2 \wedge \neg D_3) \vee (\neg C_2 \wedge D_3) = \mathrm{T}$

③ $(A_2 \wedge \neg D_4) \vee (\neg A_2 \wedge D_4) = \mathrm{T}$

①∧② = T 由于C不能既第一又第二，B和C不能都第二，所以

④ $(C_1 \wedge \neg B_2 \wedge \neg C_2 \wedge D_3) \vee (\neg C_1 \wedge B_2 \wedge \neg C_2 \wedge D_3) = \mathrm{T}$

③∧④ = T 由于A，B不能同时第二，D不能第三又第四，所以 $A_2 \wedge \neg D_4 \wedge C_1 \wedge \neg B_2 \wedge \neg C_2 \wedge D_3 = \mathrm{T}$

所以C第一，A第二，D第三，B第四.

2.3 命题公式与真值表的关系

- 对任一依赖于命题变元$P_1, P_2, \ldots, P_n$的命题公式 A 来说，可根据$P_1, P_2, \ldots, P_n$的真值，给出A的真值，从而建立起由$P_1, P_2, \ldots, P_n$到 A的真值表。
- 反之，若给定了由$P_1, P_2, \ldots, P_n$到 A的真值表，可以用下述方法写出命题公式A对$P_1, P_2, \ldots, P_n$的逻辑表达式：

2.3 命题公式与真值表的关系

例1：从取1的行来列写

$$A = (\neg P_1 \wedge \neg P_2) \vee (\neg P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_2)$$

$$B =$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

P_1	P_2	$P_1 \wedge P_2$	$P_1 \wedge \neg P_2$	$\neg P_1 \wedge P_2$	$\neg P_1 \wedge \neg P_2$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

P_1	P_2	A	B
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	0

2.3 命题公式与真值表的关系

1. 从取1的行来列写

考查命题公式 A的真值表中取1的行，若取1的行数共有m行，则命题公式 A可以表示成如下形式：

$$A = Q_1 \lor Q_2 \lor \cdots \lor Q_m$$

其中 $Qi = (R_1 \land R_2 \land \ldots \land R_n)$，

$$R_i = P_i \text{ 或 } \neg P_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

若该行的$P_i = 1$，则$R_i = P_i$；否则$R_i = \neg P_i$

P_1	P_2	$P_1 \land P_2$	$P_1 \land \neg P_2$	$\neg P_1 \land P_2$	$\neg P_1 \land \neg P_2$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

$$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \lor \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

例2：从取0的行来列写

$$A = (\neg P_1 \vee P_2)$$

$$B = (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2)$$

1		1		1
1	=	1	$\wedge$	1
0		0		1
0		1		0

P_1	P_2	$P_1 \vee P_2$	$P_1 \vee \neg P_2$	$\neg P_1 \vee P_2$	$\neg P_1 \vee \neg P_2$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0

P_1	P_2	A	B
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	0

2.3 命题公式与真值表的关系

2. 从取0的行来列写

考查真值表中取0的行，若取0的行数共有k行，则命题公式A可以表示成如下形式：

$$A = Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_k$$

其中 $Q_i = (R_1 \vee R_2 \vee \cdots \vee R_n)$，

$R_i = P_i$ 或 $R_i = \neg P_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

若该行的 $P_i = 1$，则 $R_i = \neg P_i$ 若该行的 $P_i = 0$，则 $R_i = P_i$.

P_1	P_2	$P_1 \vee P_2$	$P_1 \vee \neg P_2$	$\neg P_1 \vee P_2$	$\neg P_1 \vee \neg P_2$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

进一步理解

- 从取1的行来列写

$A = (\ \wedge\ )_1 \vee (\ \wedge\ )_2 \vee \ldots \vee (\ \wedge\ )_m$

- 故从取0的行来列写

$\neg A = (\ \wedge\ )_1 \vee (\ \wedge\ )_2 \vee \ldots \vee (\ \wedge\ )_l$ 从而

$A = (\vee)_1 \wedge (\vee)_2 \wedge \ldots \wedge (\vee)_l$

其中$(\vee)_1$中每一项也相应取反，因此

若该行的 $P_i = 1$， 则 $R_i = \neg P_i$

若该行的 $P_i = 0$， 则 $R_i = P_i$.

两个重要的命题联结词

与非联接词

与非联接词是二元命题联结词。两个命题P和Q用与非联接词“↑”联结起来，构成一个新的复合命题，记作$P \uparrow Q$。读作P和Q的“与非”。当且仅当P和Q的真值都是1时，$P \uparrow Q$的真值为0，否则$P \uparrow Q$的真值为1。

$$P \uparrow Q = \neg (P \wedge Q)$$

（真值表）

P	Q	$P \uparrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

两个重要的命题联结词

或非联接词

或非联接词是二元命题联结词。两个命题P和Q用或非联接词“$\downarrow$”联结起来，构成一个新的复合命题，记作$P\downarrow Q$。读作P和Q的“或非”。当且仅当P和Q的真值都是0时，$P\downarrow Q$的真值为1，否则$P\downarrow Q$的真值为0。

$$P\downarrow Q = \neg(P \vee Q)$$

（真值表）

P	Q	$P\downarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

异或联结词

- 不可兼或。$P\bar{\vee}Q = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$
  - 当且仅当P和Q的值不一样的时候，的真值为1；
  - 当P和Q的值相同，异或结果为0。

P	Q	$P\bar{\vee}Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2.4 联接词的完备集

2.4.1 真值函项

对所有的合式公式加以分类，将等值的公式视为同一类，从中选一个作代表称之为真值函项。每一个真值函项就有一个联结词与之对应。

举例：N=2时的所有真值函项

N = 2时的所有真值函项

P	Q	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		F	$\wedge$		P		Q	$\bar{\vee}$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\neg Q$		$\neg P$	$\rightarrow$	$\uparrow$	T

$g_0 = F$ $\quad$ $g_1 = P \wedge Q$ $\quad$ $g_6 = P \bar{\vee} Q$ $\quad$ $g_7 = P \vee Q$

$g_8 = P \downarrow Q$ $\quad$ $g_9 = P \leftrightarrow Q$ $\quad$ $g_{13} = P \rightarrow Q$ $\quad$ $g_{14} = P \uparrow Q$

$g_{15} = T$ $\quad$ $g_3 = P$ $\quad$ $g_5 = Q$ $\quad$ $g_{10} = \neg Q$ $\quad$ $g_{12} = \neg P$

尚余

$g_2 = P \wedge \neg Q$ $\quad$ $g_4 = \neg P \wedge Q$

$g_{11} = P \vee \neg Q = Q \rightarrow P$

对于二值逻辑，

n个命题变元$P_1, P_2, \ldots, P_n$可定义

2^{2^n}个 n元联接词

若推广到多值逻辑结果如何

m^{m^n} ?

2.4 联接词的完备集

2.4.2 联接词的完备集

C是一个联结词的集合，如果任何n元$(n\geq 1)$真值函项都可以由仅含C中的联结词构成的公式表示，则称C是完备的联结词集合，或说C是联结词的完备集。

联结词的完备集

定理2.4.1

{ ¬, ∨, ∧}是完备的联结词集合。

- 从前面介绍的由真值表列写命题公式的过程可知，任一公式都可由¬, ∨, ∧表示，从而{¬, ∨, ∧}是完备的。
- 一般情形下，该定理的证明应用数学归纳法，施归纳于联结词的个数来论证。

定理2.4.1 $\{\neg, \vee, \wedge\}$是完备的联结词集合

另一证法，因为任何n（$n\geq1$）元真值函数都与唯一的一个主析取范式（后面介绍）等值，而在主析取范式中仅含联结词$\neg, \vee, \wedge$，所以$S = \{\neg, \vee, \wedge\}$是联结词的完备集。

Setting

以下哪些联结词集是完备集

A $S_1 = \{\neg, \wedge\}$

B $S_2 = \{\neg, \vee\}$

C $S_3 = \{\uparrow\}$

D $S_4 = \{\wedge, \vee\}$

Submit

联结词的完备集

推论：　以下联结词集都是完备集：

（1）　$S_1 = \{\neg, \wedge\}$

（2）　$S_2 = \{\neg, \vee\}$

（3）　$S_3 = \{\neg, \rightarrow\}$

（4）　$S_4 = \{\uparrow\}$

（5）　$S_5 = \{\downarrow\}$

证明{↑}，{↓}都是联结词完备集

- 已知$\{\neg, \vee, \wedge\}$是完备集，证明其中每个联结词都可以由↑来表示

$$\neg P = \neg(P \wedge P)$$

$$= P \uparrow P$$

$$P \wedge Q = \neg\neg(P \wedge Q) = \neg(P \uparrow Q) = (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$$

$$P \vee Q = \neg(\neg P \wedge \neg Q) = \neg P \uparrow \neg Q = (P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)$$

证毕

一些重要的全功能联结词集合

- {¬, ∧}, {¬, ∨}可以构成功能联结词集合。使用上述全功能联结词集合表达的命题公式类的系统常称为Boole代数系统。
- {¬, →}也可构成全功能联结词集合。该全功能联结词集合在研究逻辑系统的演绎与推理，以及在程序系统的研究中经常遇到。
- {↑}，{↓}是全功能联结词集合。在大规模集成电路中有广泛的应用。

小结

- 等值定理
  - 若在任一解释下，公式A和B的真值都相同，则称A和B是等值的
- 等值公式
  - 置换规则
  - 基本的等值公式
  - 常用等值公式
  - 等值演算及其应用
- 命题公式与真值表的关系
  - 从取1的行来写
  - 从取0的行来写

小结

- 联结词的完备集
  - **可以证明，**$\{\neg, \vee\}$**，**$\{\neg, \wedge\}$**，**$\{\neg, \rightarrow\}$**，**$\{\uparrow\}$**，**$\{\downarrow\}$ **都是联结词功能完全组；**
  - **而** $\{\neg, \leftrightarrow\}$**，**$\{\neg\}$**，**$\{\wedge\}$**，**$\{\vee\}$**，**$\{\wedge, \vee\}$ **都不是联结词功能完全组；**
  - **使用联结词集** $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn