

第二章习题

6. 判断下列命题的真假. 若真, 请给以证明, 若假, 请举例说明。

(1). 如果 $f'(z_0)$ 存在, 则 $f(z)$ 在 z_0 解析.

(2). 如果 z_0 是 $f(z)$ 的奇点, 则 $f(z)$ 在 z_0 不可导.

(3). 如果 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 可导 (指偏导数存在), 那么 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 亦可导.

(4). 设 $f(z) = u + iv$ 在区域 D 内是解析的. 如果 u 是实常数, 那么 $f(z)$ 在整个 D 内是常数; 如果 v 是实常数, 那么 $f(z)$ 在 D 内也是常数.

7. 如果 $f(z) = u + iv$ 是 z 的解析函数, 证明:

$$\left(\frac{\partial |f(z)|}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial |f(z)|}{\partial y}\right)^2 = |f'(z)|^2.$$

9. 证明 Cauchy-Riemann 方程的极坐标形式是:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

10. 证明: 如果函数 $f(z) = u + iv$ 在区域 D 内解析, 并满足下列条件之一, 那么 $f(z)$ 是常数.

(1). $f(z)$ 恒取实值;

(2). $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析;

(3). $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数;

(4). $\arg f(z)$ 在 D 内是一个常数.

15. 求 $\operatorname{Ln}(-i)$, $\operatorname{Ln}(-3 + 4i)$ 和它们的主值.

18. 求 $e^{1-i\frac{\pi}{2}}$, $\exp[(1+i\pi)/4]$, 3^i , $(1+i)^i$.

补充题: 写出 $\sin(x + iy)$ 的实, 虚部. 并由此证明: 任给复数 $A + iB$, 方程 $\sin(x + iy) = A + iB$ 有无穷多个解, 这里 x, y, A, B 是实数.