第八周：矩阵函数

参考：线性代数与几何（下）第十一章 11.3-11.4

或高等代数学 第七章 7.8

矩阵函数：多项式函数

设$A \in M_n(\mathbb{C}$. 设$P^{-1}AP = J, J = diag(J_1, \cdots, J_t)$

$$\text{其中} J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{m_i \times m_i}$$

令$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{C}$.

则$f(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$,且$f(A) = P^{-1} f(J) P$.

矩阵函数：多项式函数

定理：$$f(J_i)=\begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \cdots & \cdots & \frac{1}{(m_i-2)!}f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & f(\lambda_i) \end{pmatrix}_{m_i\times m_i}$$

函数在矩阵谱上取值

现在假设A的极小多项式$m_A(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \mu_s)^{m_s}$.

定义 给定函数$f(z)$， 若数值$f^{(j)}(\mu_i)$, $i = 1, \cdots, s$, $j = 0, \cdots, m_i - 1$存在, 则称$f(z)$在A的谱上可定义(defined on the spectrum of A)。

定义 给定函数$f(z)$，假设$f(z)$在A的谱上可定义。定义

$$f(A) = Pf(J)P^{-1} = Pdiag(f(J_{\mu_1,m_{11}}) \cdots, f(J_{\mu_i,m_{ij}}), \cdots)P^{-1},$$ 其中

$$f(J_{\mu_i,m_{ij}}) = \begin{pmatrix} f(\mu_i) & f'(\mu_i) & \cdots & \cdots & \frac{1}{(m_{ij}-1)!} f^{(m_{ij}-1)}(\mu_i) \\ & f(\mu_i) & \cdots & \cdots & \frac{1}{(m_{ij}-2)!} f^{(m_{ij}-2)}(\mu_i) \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & f'(\mu_i) \\ & & & & f(\mu_i) \end{pmatrix}_{m_{ij} \times m_{ij}}$$

函数在矩阵谱上取值

定理 设$f(z)$在A的谱上可定义，则存在唯一次数小于m的多项式$p(z)$满足
$p^{(j)}(\mu_i) = f^{(j)}(\mu_i)$, 其中$i = 1, \cdots, s$, $j = 0, \cdots, m_i - 1$.
($p(z)$称为Hermite-Langrange插值多项式)

由定理，$p(A) = f(A)$.

矩阵指数函数

性质1. 设$A, B \in M_n(\mathbb{C})$,且$AB = BA$, 则$e^A \cdot e^B = e^{A+B}$.

性质2. 给定Jordan块$J_0 = \lambda_0 I_r + N = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{pmatrix}_{r \times r}$, 则

$$e^{tJ_0} = e^{\lambda_0 t}\left(I_r + tN + \frac{t^2}{2}N^2 + \cdots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}N^{r-1}\right).$$

矩阵指数函数

$e^{At}=e^{tA}$的计算方法：

方法1. $e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}$.

方法2. 设v是关于μ_i的一个广义特征向量，

$(A-\mu_i I_n)^r(v)=0, (A-\mu_i I_n)^{r-1}(v)\neq 0$. 则

$e^{At}v=e^{\mu_i t}(I_n+tB+\cdots+\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}B^{r-1})v$,

其中$B=A-\mu_i I_n$.

矩阵函数（II）

设$A \in M_n(\mathbb{C})$. 极小多项式$m_A(x) = (x-\mu_1)^{m_1}\cdots(x-\mu_s)^{m_s}$. 次数是$m$.

设μ_i的几何重数是t_i, $i = 1, \cdots, s$.

设$P^{-1}AP = J$, $J = diag(J_{\mu_1}, \cdots, J_{\mu_s})$, $J_{\mu_i} = diag(J_{\mu_i,m_{i1}}, \cdots, J_{\mu_i,m_{it_i}})$,

其中$J_{\mu_i,m_{ij}} = \begin{pmatrix} \mu_i & 1 & & & \\ & \mu_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \mu_i \end{pmatrix}_{m_{ij}\times m_{ij}}$

(关于特征值μ_i的阶数m_{ij}的Jordan块)

矩阵函数（II）

设$f_k(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$. 假设$f(x) = lim_{k\to\infty} f_k(x)$. 令
$\tilde{f}(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_k A^k + \cdots = lim_{p\to\infty} f_k(A)$.
若极限存在，则$\tilde{f}(A)$收敛.

定理：若f在A的谱上可定义，则$f(A) = \tilde{f}(A)$.

矩阵函数（II）

(1) 方阵幂级数 $f(\boldsymbol{X})$ 收敛的充分必要条件是对任一非异阵 $\boldsymbol{P}$, $f(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{P})$ 都收敛, 这时

$$f(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}^{-1}f(\boldsymbol{X})\boldsymbol{P};$$

(2) 若 $\boldsymbol{X} = \mathrm{diag}\{\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_k\}$, 则 $f(\boldsymbol{X})$ 收敛的充分必要条件是 $f(\boldsymbol{X}_1), \cdots, f(\boldsymbol{X}_k)$ 都收敛, 这时

$$f(\boldsymbol{X}) = \mathrm{diag}\{f(\boldsymbol{X}_1), \cdots, f(\boldsymbol{X}_k)\};$$

(3) 若 $f(z)$ 的收敛半径为 r, $\boldsymbol{J}_0$ 为 r 阶 Jordan 块

$$\boldsymbol{J}_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

则当 $|\lambda_0| < r$ 时 $f(J_0)$ 收敛, 且

$$f(J_0) = \begin{pmatrix} f(\lambda_0) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_0) & \frac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda_0) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda_0) \\ & f(\lambda_0) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_0) & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(\lambda_0) \\ & & f(\lambda_0) & \cdots & \frac{1}{(n-3)!}f^{(n-3)}(\lambda_0) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & f(\lambda_0) \end{pmatrix}.$$

矩阵函数（II）

设 $f(z)$ 是复幂级数，收敛半径为 r. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复方阵，特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 记

$$\lambda = \max\{|\lambda_i|, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

则

(1) 若 $\lambda < r$，则 $f(\boldsymbol{A})$ 收敛；

(2) 若 $\lambda > r$，则 $f(\boldsymbol{A})$ 发散；

(3) 若 $\lambda = r$，则 $f(\boldsymbol{A})$ 收敛的充分必要条件是：对每一绝对值等于 r 的特征值 λ_j，若 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_j 的初等因子中最高幂为 n_j 次，则 n_j 个数值级数

$$f(\lambda_j), f'(\lambda_j), \cdots, f^{(n_j-1)}(\lambda_j) \tag{7.8.6}$$

都收敛；

(4) 若 $f(\boldsymbol{A})$ 收敛，则 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值为

$$f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n).$$

矩阵函数（II）

由复分析知道:

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots,$$

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \cdots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{6!}z^6 + \cdots,$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \cdots.$$

前 3 个级数在整个复平面上收敛, 而 $\ln(1+z)$ 的收敛半径为 1, 于是对一切方阵,

矩阵函数（II）

定义

$$e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{I} + \frac{1}{1!}\boldsymbol{A} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3 + \cdots,$$

$$\sin \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} - \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3 + \frac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5 - \frac{1}{7!}\boldsymbol{A}^7 + \cdots,$$

$$\cos \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} - \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4 - \frac{1}{6!}\boldsymbol{A}^6 + \cdots$$

都有意义. 若 $\boldsymbol{A}$ 所有特征值的模长都小于 1, 则

$$\ln(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} - \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2 + \frac{1}{3}\boldsymbol{A}^3 - \frac{1}{4}\boldsymbol{A}^4 + \cdots$$

矩阵指数函数

性质1. 设$A, B \in M_n(\mathbb{C})$,且$AB = BA$, 则$e^A \cdot e^B = e^{A+B}$.

性质2. 给定Jordan块$J_0 = \lambda_0 I_r + N = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{pmatrix}_{r\times r}$, 则

$$e^{tJ_0} = e^{\lambda_0 t}(I_r + tN + \tfrac{t^2}{2}N^2 + \cdots + \tfrac{t^{r-1}}{(r-1)!}N^{r-1}).$$

单选题 1分

设置

以下**错误**的是

A 若A是可对角化矩阵，则e^A也是可对角化矩阵.

B 若矩阵$A \in M_n(\mathbb{C})$,满足$A^2 = 0$, 则$e^A = I_n + A$.

C 设$A, B \in M_n(\mathbb{C})$. 若A, B有相同的特征多项式和极小多项式，则A与B相似.

提交

单选题 1分

设置

以下**错误**的陈述是

A 设$A\in M_n(\mathbb{C})$, 若$A^2=0$,则$sinA=A.$

B 设$A\in M_n(\mathbb{C})$, 若$A^2=0$,则$cosA=I_n.$

C 设$A\in M_n(\mathbb{C})$, 若$A^2=0$,则$ln(I_n+A)=A.$

D 设$A\in M_n(\mathbb{C})$, 若A是幂零阵,则$sinA,\ cosA,\ I_n+A,\ e^A$均是可逆阵.

提交