求

$$I=\max_{|z|\le r}|\alpha z^n+\beta|,$$

这里n是正整数, $r>0,\ \alpha,\beta\in C,\ \alpha\neq 0$. 并给出取得最大值时，$z$及$z'=z^n+\alpha$ 的表达式来.

解答：(A). 当$\beta=0$时，显然有$I=\max_{|z|\le r}|\alpha z^n|=|\alpha|r^n$, 等号成立当且仅当$|z|=r$, 即$z=re^{i\theta},\ \theta\in[0,\,2\pi)$, 这时$z'=\alpha z^n=\alpha r^n e^{in\theta}$.

(B). 当$\beta\neq 0$时, 则由

$$|\alpha z^n+\beta|\le|\alpha z^n|+|\beta|\le|\alpha|r^n+|\beta|, \tag{0.1}$$

知$I\le|\alpha|r^n+|\beta|$.

且当(0.1)的两个不等式同时取等号时等号成立。而(0.1)的第一个等号成立当且仅当αz^n与β同向，即存在正数$\lambda>0$, 使

$$\alpha z^n=\lambda\beta, \tag{0.2}$$

而(0.1)的第二个等号成立当且仅当

$$|z|=r, \tag{0.3}$$

将(0.3)代入(0.2)，得$|\alpha|r^n=\lambda|\beta|$, 即$\lambda=\frac{|\alpha|r^n}{|\beta|}$. 将此式代入(0.2)，得

$$z^n=r^n\frac{\frac{\beta}{\alpha}}{|\frac{\beta}{\alpha}|}=r^n e^{iarg(\frac{\beta}{\alpha})},$$

由此可得

$$z=z_k=re^{i\frac{\arg(\frac{\beta}{\alpha})+2k\pi}{n}},\qquad k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

这时，

$$z'=\alpha z^n+\beta=\alpha z_k^n+\beta=(|\alpha|r^n+|\beta|)e^{i\arg\beta}.$$

由上面的讨论可知，当$\beta=0$时，$\max_{|z|\le r}|\alpha z^n+\beta|=|\alpha|r^n$, 这时$z=re^{i\theta},\quad \theta\in[0,\,2\pi),\ z'=\alpha r^n e^{in\theta}$. 而当$\beta\neq 0$时，$\max_{|z|\le r}|\alpha z^n+\beta|=|\alpha|r^n+|\beta|$, 这时$z=z_k=re^{i\frac{\arg(\frac{\beta}{\alpha})+2k\pi}{n}},\ k=0,1,2,\cdots,n-1$. 且$z'=\alpha z^n+\beta=\alpha z_k^n+\beta=[|\alpha|r^n+|\beta|]e^{i\arg\beta}$，且有$|z'|=|\alpha|r^n+|\beta|$.