离散数学(1)
Discrete Mathematics

绪论与课程简介

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

离散数学(1) （面向计算机大类专业）

教学组成员：

教 师：刘世霞 shixia@tsinghua.edu.cn 13521593099

助 教：袁隽 thss15_yuanj@163.com 18612600388

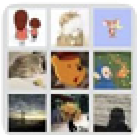
杨维铠 vicayang496@gmail.com 13051670559

郭玉楷 davidguo2000@126.com 13928894931

所在单位：清华大学软件学院

让我们一起来感受离散数学的魅力！

微信群和腾讯会议



2022秋-离散数学1 课程群

该二维码7天内(9月21日前)有效，重新进入将更新

- 腾讯会议
  - ID: 564 6840 1322
  - Password: 407112

网络学堂里面填写email地址和手机号

教材和参考书

- 教材
  - [T1] 数理逻辑与集合论(第2版),石纯一等编著, 清华大学出版社.
- 参考书
  - [R1] Discrete Mathematics and Its Applications, 第5版,K. Rosen,机械工业出版社,2003.
  - [R2]屈婉玲，耿素云，张立昂. 离散数学，高等教育出版社.

作业要求

- 请使用作业纸，写清名字与学号
- 作业需手写后拍照并转成pdf文件上传至网络学堂提交。
  - 每次作业只能提交一个pdf文件
- 每周五9:00之前交上周的作业

- 推荐软件：扫描王

不要抄袭

答疑

- 时间：每周四下午3:00-5:00
- 地点：助教和老师的东主楼办公地点
- 助教和老师
  - 袁隽 thss15_yuanj@163.com 东主楼10-406
  - 杨维铠 vicayang496@gmail.com东主楼10-406
  - 郭玉楷 davidguo2000@126.com东主楼10-406
  - 刘世霞 shixia@tsinghua.edu.cn 东主楼10-407
- 微信答疑小程序

习题课及考核

- 1次习题课
  - 15周
- 1次复习课
- 考核
  - 大类课组共同出题
  - 平时成绩：30%: 作业
  - 期末考试：70%
  - 加分：在微信小程序帮助答疑→总成绩+(<=3分)

离散数学一（课程号 24100023-0）教学日历

（2022-2023 学年度秋季学期适用）上课时间：每周五上午 9:50—12:15 地点：六教 6A116

周次	上课日期	章节	主要教学内容（注：#表示非基本要求的内容）
1	9 月 16 日	概述，第 1 章 1.1~1.5	绪论，离散数学与数理逻辑学科概述，研究内容与发展概况 命题概念，命题联结词与真值表，合式公式重言式，命题形式化
2	9 月 23 日	第 1 章 1.6 第 2 章 2.1 ~2.4	波兰表达式，悖论简介，其它联结词，等值定理，基本等值公式 命题公式与真值表的关系，联结词的完备集，对偶式
3	9 月 30 日	第 2 章 2.5~ 2.10	范式概念，析取范式，合取范式，主范式 基本推理公式，推理演算与推理规则，归结推理法，应用举例
4	10 月 7 日	第 3 章 3.1 ~ 3.6	命题逻辑的公理化，公理系统的结构，命题逻辑的公理系统 公理系统的完备性，王浩算法#，非标准逻辑简介#
5	10 月 14 日	第 4 章 4.1 ~ 4.6	谓词逻辑的基本概念，谓词和个体词，函数和量词，合式公式 自然语句的形式化，有限域下公式的表示法 公式的普遍有效性和判定问题
6	10 月 21 日	第 5 章 5.1 ~ 5.3	谓词逻辑等值和推理演算，否定型等值式，量词分配等值式 范式，前束范式，SKOLEM 标准型，存在量词前束范式#
7	10 月 28 日	第 5 章 5.4 ~ 5.6	基本的推理公式及其证明方法，推理演算与推理规则 谓词逻辑的归结推理法，谓词逻辑应用举例
8	11 月 4 日	第 9 章 9.1~9.4	集合的概念和基本表示法，集合间的关系和特殊集合 集合的运算，集合的图形表示法，集合运算性质和证明
9	11 月 11 日	第 9 章 9.5~ 9.7	幂集性质，传递集合，包含排斥原理，有限集合的基数 集合论公理系统简介，无穷公理与自然数集合
10	11 月 18 日	第 10 章 10.1 ~10.4	关系的基本概念，二元关系与特殊关系，关系矩阵和关系图 关系的逆、合成，限制和象，关系的基本性质
11	11 月 25 日	第 10 章 10.4 ~ 10.6	关系基本性质的几个结论，关系的闭包，关系的合成 闭包的性质及其构造方法，等价关系的概念
12	12 月 2 日	第 10 章 10.6 ~ 10.8	划分与等价关系，相容关系和覆盖，偏序关系与哈斯图 上确界和下确界，全序关系和链
13	12 月 9 日	第 11 章 11.1， 11.2，11.5	函数，任意集合上的函数定义，特殊函数，满射单射与双射 选择公理#，函数的合成，函数的逆#
14	12 月 16 日	第 12 章 12.1~12.7	实数集合与集合的基数，集合的等势，有限集合与无限集合 的基数，可数集合与连续统假设
15	12 月 23 日	复习课	课程总结
16-17	12.26-1.8		考试（具体时间待定）

提纲

- 什么是离散数学
- 为什么要学习离散数学
- 课程学习要求

什么是离散数学

- 离散数学(discrete mathematics)是
  - “研究离散结构的数学分科。” —《辞海》79年版, P355
  - 现代数学的重要分支
  - 计算机大类专业基础理论的核心课程
- 研究离散对象的结构及其相互间关系的数学分支
  - 离散:只能用自然数或整数单位计算的变量.如自然数集
  - 连续:在一定区间内可以任意取值的变量. 如实数集
    - 微积分就是研究连续函数的数学分支

维基百科（Wikipedia）

离散数学是数学的几个分支的总称，研究基于离散空间而不是连续的数学结构。

与光滑变化的实数不同，离散数学的研究对象——例如整数、图和数学逻辑中的命题——不是光滑变化的，而是拥有不等、分立的值。

因此离散数学不包含微积分和分析等"连续数学"的内容。

维基百科（Wikipedia）

- 离散对象经常可用整数来枚举。更一般地，离散数学被视为处理可数集合的数学分支。
- 但应该说，离散数学尚不存在学术界普遍认可的定义。
- 实际上，离散数学经常被定义为不包含连续变化量及相关概念的数学，甚少被定义为包含什么内容的数学。

离散数学课程说明

- 研究对象-----离散个体及其结构
- 研究思想-----以集合和映射为工具、体现公理化和结构的思想
- 研究内容-----包含不同的数学分支，模块化结构
  - 数理逻辑：推理、形式化方法
  - 集合论：离散结构的表示、描述工具
  - 代数结构：离散结构的代数模型
  - 图论：离散结构的关系模型
  - 组合数学：离散结构的存在性、计数、枚举、优化、设计

离散数学与其他相关学科的关系

- 数理逻辑：人工智能、程序正确性证明、
  程序验证等
- 集合论：关系数据库模型等
- 代数结构：软件规范、形式语义、编译系统、
  编码理论、密码学、数据仓库等
- 图论：数据结构、数据库模型、
  网络模型等
- 组合数学：算法分析与设计、编码理论、容错等

提纲

- 什么是离散数学
- 为什么要学习离散数学
- 课程学习要求

离　散　语　文

离散数学
形散神不散
数学与语文
万变不离逻辑

为什么要学习离散数学

- 提高数学论证和求解能力
- 培养抽象思维能力和逻辑推理能力（数理逻辑）
- 信息在计算机中是以离散形式存储的：为形式化描述方法奠定数学基础
  – 指专门用于描述、建立和验证计算机系统的数表示法
- 是大类的数学基础
  – 数据结构, 算法, 数据库理论, 自动机理论, 形式语言, 编译理论, 计算机安全, 操作系统, 人工智能, 数字电路

离散数学的重要性：应用

后续课程的基础，十分有助于深入学习和研究。

- 程序设计语言
- 数据结构与算法
- 计算方法（数值分析）
- 编译原理
- 操作系统
- 信息检索与数据库系统
- 形式语言与自动机
- 可计算性与计算复杂性理论
- 人工智能与机器人
- 计算机网络与通信等

自然语言处理和日常交流

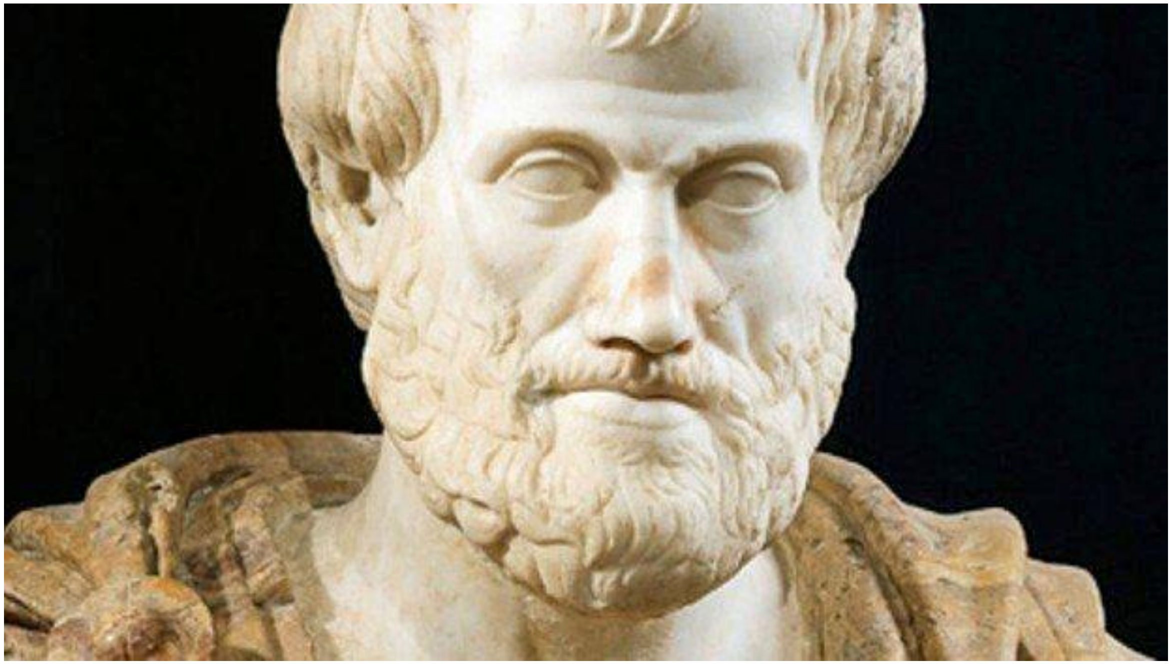
- 丈夫看妻子在厨房里忙着，问道：“我能帮你吗”？

- 妻子说：

  “好啊，那你拿那袋马铃薯，一半削皮，放在锅里煮”。


嘻嘻哈哈

人工智能的梦想

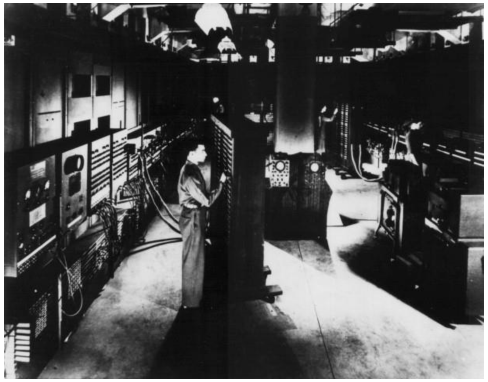


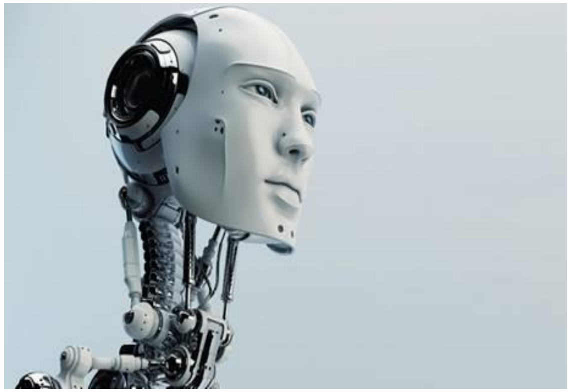
公元前322 年

“If every tool, when ordered, or even of its own accord, could do the work that befits it... then there would be no need either of apprentices for the master workers or of slaves for the lords.” ——亚里士多德

人工智能的曙光

- 数理逻辑的突破，计算机的发明，控制论、信息论等的建立，不同领域的科学家开始探讨制造人工大脑的可能性





- 最初的人工智能研究是30年代到50年代初的一系列科学进展交汇的产物

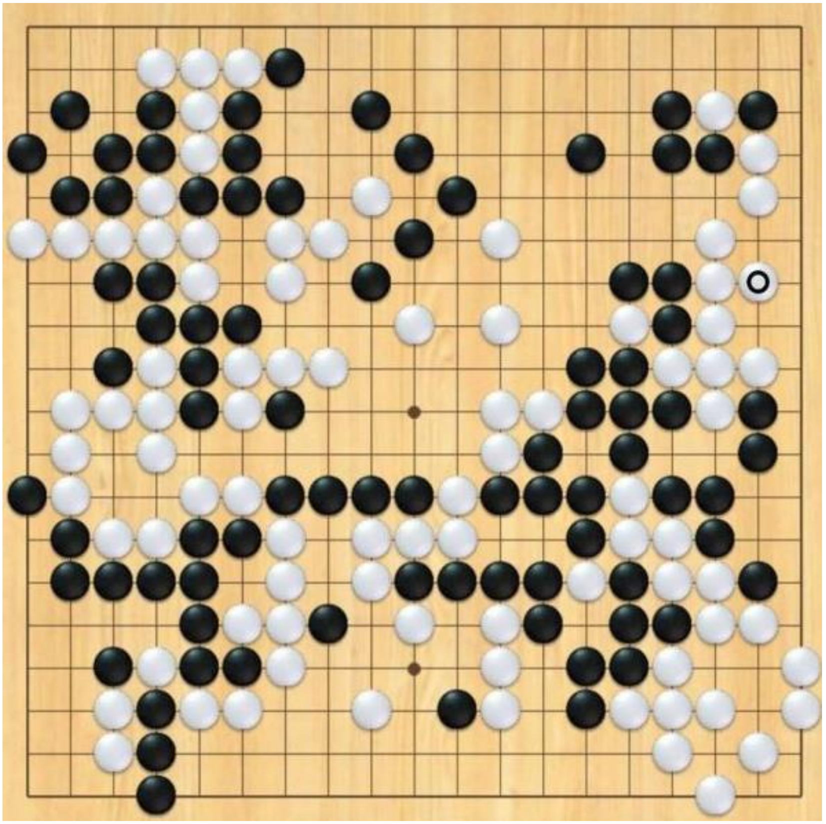
Courtesy of Eric Xing

人工智能-AlphaGo

人类还有希望吗？？？

Master – AlphaGo的升级版

- 2016年12月29号，Master 出现，以横扫千军的姿态战胜几乎所有中国的围棋大师，包括「棋圣」聂卫平和柯洁



AlphaGo的四大奇招

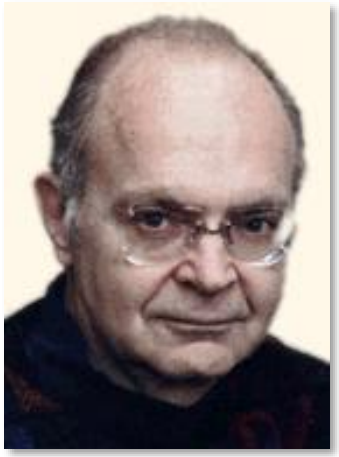
离散数学的重要性：大师的体会

1930-2002

“我现在年纪大了，搞了这么多年的错误不知犯了多少，现在觉悟了。我想，假如我早年在数理逻辑上好好下点工夫的话，我就不会犯这么多的错误。不少东西逻辑学家早就说过了，可是我并不知道。如果我能年轻二十岁的话，我就回去学逻辑。”

— E. W. Dijkstra（狄克斯特拉）
1972年Turing奖获得者

离散数学的重要性：大师的体会



1938-

用一组基本的指令来编制一个计算机程序，非常类似于从一组公理来构造一个数学证明。

— D. E. Knuth

1974年Turing奖获得者

代表作：The Art of Computer Programming

Homepage - http://www-cs-faculty.stanford.edu/~uno/

Donald E. Knuth (高德纳), Professor Emeritus of The Art of Computer Programming at Stanford Univers

- Frequently Asked Questions
- Infrequently Asked Questions
- Recent News NEW NEW NEW
- Computer Musings NEW NEW NEW
- Known Errors in My Books
- Help Wanted
- Diamond Signs
- Preprints of Recent Papers
- Curriculum Vitæ
- Pipe Organ
- *Fantasia Apocalyptica* NEW NEW NEW
- Downloadable Graphics
- Downloadable Programs and Data
- Expecting a check from me?
- Did you borrow a video from me?

Shixia Liu (刘世霞)

I am a professor in the School of Software, Tsinghua University. I received a B.S. and M.S. from Harbin Institute of Technology, a Ph.D. from Tsinghua University. Before I joined Tsinghua, I worked as a lead researcher at Microsoft Research Asia and a research staff member and research manager at IBM China Research Lab. I was named an IEEE Fellow in 2021.

Email: shixia@tsinghua.edu.cn; liushixia@gmail.com

Research

My research tightly integrates interactive visualization with machine learning or data mining techniques to help users consume huge amounts of information.

- *Explainable artificial intelligence*
  Visual analytics techniques for machine learnig, Including 1) understand, diagnose, and refine a machine learning model; 2) improve data quality and feature quality.
- *Visual text analytics*
  Combine the advantages of text mining and interactive visualization to facilitate visual analytics of large-scale textual data.
- *Text mining*
  Develop statistical text mining methods to understand complex text data, including evolutionary text clustering, topic modeling, and sentiment analysis.

Students

Current PhD

- Changjian Chen, 2017~
- Jun Yuan, 2019~
- Weikai Yang, 2019~
- Zhaowei Wang, 2020~
- Zhen Li (co-advised w/Hui Zhang), 2021~

Completed PhD

- Mengchen Liu , 2013~2018, Senior Researcher at Microsoft Remond
- Xiting Wang, 2011~2016, Senior Researcher at Microsoft Research Asia

Honors and Awards

- 2021, IEEE Fellow
- 2020, IEEE Visualization Academy
- 2020, Best Mentor Award of Tsinghua University
- 2019, Excellent Class Teacher of Tsinghua university
- 2016, Best Associate Editor Award of IEEE TVCG
- 2012, Microsoft Ship-It Award
- 2011, Microsoft Ship-It Award
- 2010, IBM Research accomplishment
- 2006, IBM Master Inventor

提纲

- 什么是离散数学
- 为什么要学习离散数学
- 课程学习要求

学习目标

本课程是计算机大类基础理论的重要课程，通过课时内的学习及课外练习，应能达到以下目标：

1. 对数理逻辑与集合论的基本概念有较深入的了解；
2. 系统地掌握命题演算、谓词演算及朴素集合论的经典内容。

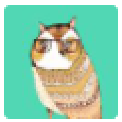
学习本课程需具备的相关知识

- 一般而言，本课程并无先修课程要求。
- 只要具备高中所学的集合知识和简单的逻辑概念便可学习本课程。
- 若具有高等数学及普通线性代数的基础将十分有助于对本课程的理解和掌握。

知乎 首页 发现 话题 搜索你感兴

数学 离散数学

如何学好离散数学？

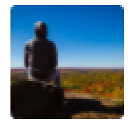


雪糕蛋卷

计算机萌妹子

101 人赞同了该回答

也许有很多方式，但是
最快的方式……大概是明天考试吧



柳光晏

26 人赞同了该回答

概念很重要！！概念很重要！！概念很重要！！
证明很坑爹！！证明很坑爹！！证明很坑爹！！

知乎用户

57 人赞同了该回答

离散数学中的概念和定理偏多，思维较抽象，证明强调技巧性但变化不多。我觉得这是一门很需要找“感觉”的数学科目。首先要强记所学内容的相关定义和定理，随后学习证明过程时必须结合定义和定理，即每推一步就弄清其根据的是什么定义或定理。用这种方法学习一段时间后对证明就有一定感觉了，再做证明题就会感觉顺手很多。

上面提到这是一门很强调“感觉”的数学学科，与英语短文背多了语感就好的原理类似，在遇到瓶颈时用学习文科的方式（即在理解的基础上强记证明过程）来学习也是一个不错的办法。


离散数学
你

学习本课程应注意的几个问题

- 注意基本概念的理解与基本演算方法的掌握；
- 在课内学习的基础上，通过作业和复习巩固；
- 在学习基本理论的同时，了解并熟悉应用方法。

投票 最多可选1项

设置

在高中是否学过数理逻辑、集合论

A 数理逻辑

B 集合论

C 数理逻辑和集合论

D 都没有学过

提交

第一章 命题逻辑的基本概念

（1.1–1.5）

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

1.1 命题

- 计算机是进行推理的重要工具
- 而推理必须包含前提和结论
- 前提和结论均由陈述句组成，因而陈述句就成为推理的基本要素
- 逻辑中所要求的是能判断真假的陈述句
- 从介绍逻辑的基本成分—命题开始讨论

命题(proposition)

命题是能够判断真假的语句 → **陈述句**

对 **错**

命题是能够判断**对错**的**陈述句**

对→真命题 **错→假命题**

- 会打妖怪的都是猴子。
- 太阳比地球大。
- 如果一直线和平面垂直，那么它垂直于这个平面内的所有直线。

- 打篮球的个子都很高吗?
- 明星都很漂亮吗？
- 这只小狗好可爱啊！

命题(proposition)

命题是一个能判断真假且非真即假的陈述句。

1. 命题必须是一个陈述句，而祈使句、疑问句和感叹句都不是命题。
2. 作为命题的陈述句所表达的判断结果有真假之别

命题的真值：命题所表达的判断结果，

真值只取两个值：真或假(1或0)。

真命题：与事实相符或表达的判断正确；真值为真

假命题：与事实不符或表达的判断错误；真值为假

规定：任何命题的真值都是唯一的;
不能非真非假，也不能既真又假。

命题判断并讨论真值

（1）北京是中国的首都

（2）6是整数

（3）6是素数

（4）2 + 2 = 3

（5）2023年元旦北京下大雪　　（真值？）

（6）任意充分大的偶数都可以表示成两个素数之和（真值？）

- （5）和（6）的真值尽管目前尚不清楚，但它们的真值是客观存在且唯一的。
- 目前暂时无法确定，将来总会真相大白
- 真值待定

命题判断并讨论真值

（1）打开窗户。 （祈使句）

（2）今天天气真好啊！ （感叹句）

（3）明天有雨吗？ （疑问句）

（4） x大于y。 （陈述句，命题？）

（5）我正在说假话。 （陈述句，命题？）

（4） x大于y，当x，y为变量时，无确定的真值。或理解为根据x，y的不同取值，它可真可假，无唯一的真值，因而多数教材不将其作为命题。

（5）我正在说假话 的情形比较特殊，暂先作为课后思考题，试分析其真值。

More Examples

- A horse is white No
- All the horses are white Yes
- There exists a horse that is white Yes
- My horses are white Yes
- A horse is white if and only if a bird is blue No
- All the horses are white if and only if all the birds are blue

Yes

What's Wrong Here?

- Domain
- Quantifier
- Example

$$x^2=2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \quad or \quad x = -\sqrt{2}$$

Why?

ill-defined problem

1) x is an integer, no solution

2) x is a positive real number, $x = \sqrt{2}$

3) x is a real number, $x = \sqrt{2} \quad or \quad x = -\sqrt{2}$

命题的符号化

- 用小写英文字母$p, q, r,\ldots$表示命题，
- 注: 教材中用大写英文字母表示命题, 在前面部分课件中用小写英文字母, 这里大小写暂不区分.
- 用“1”表示真，用“0”表示假，
- p：6是整数。 (真命题)
- q：6是素数。 (假命题)
- r：2023年元旦北京下大雪。 (命题，真值待定)

简单命题与复合命题

- 简单命题：又称原子命题，不能再被继续分割的命题（不含任何联结词）
- 复合命题：由一个或几个简单命题通过联结词所构成的新的命题
- 复合命题也有确定的真值。
  - 依赖于构成该复合命题的各简单命题的真值以及联结词。

1.2　常用的5个命题联结词

- 常用的5个命题联结词：
- 否定联结词　　（非，¬ ）
- 合取联结词　　（与，∧ ）
- 析取联结词　　（或，∨ ）
- 蕴涵联结词　　（如果…，则… ，→ ）
- 双蕴涵联结词　　（当且仅当，↔ ）

否定(negation)联结词

否定：　并非　¬　　把原命题否定

我很帅	¬我很帅（我不帅）
真	假
假	真

否定(negation)联结词

定义1.1　否定联结词

- 设p为命题，复合命题“非p”（或“p的否定”），称为p的否定式，记作 $\neg p$。
- 符号 $\neg$ 称作否定联结词。
- 规定 $\neg p$ 为真当且仅当p为假。
- 否定联结词的真值表

p	$\neg p$
0	1
1	0

合取(conjunction)联结词

合取： 并且 ∧

我很高	且	我很帅		我很高∧我很帅
真		真	⇒	真
真		假		
假		真	⇒	假
假		假		

合取(conjunction)联结词

定义1.2　合取联结词 设p, q为二命题，复合命题"p并且q"（或"p与q"),称为p与q的合取式，记作$p \wedge q$，$\wedge$称作**合取联结词**。

并规定$p \wedge q$为真**当且仅当p与q同时为真**。

- 由定义可知，$p \wedge q$的逻辑关系为p与q同时成立。
- 只有p与q同时为真，$p \wedge q$才为真。
- 其它情况$p \wedge q$均为假。

合取联结词的真值表

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

合取联结词使用提示

联结词∧的使用需要注意以下几点：

1　联结词∧使用的灵活性。

自然语言中的“既…，又…”，“不但…，而且…”，“虽然…，但是…”，等联结词往往都可以符号化为∧。

2　命题逻辑中仅考虑命题与命题之间的形式关系或逻辑内容，对于毫无联系的二命题p，q，在逻辑中$p\wedge q$仍是可以讨论的。

3　逻辑联结词是自然用语中联结词的抽象，两者并不等同。并非自然语言中所有的“与”或“和”都能简单套用联结词∧。

例1.4 将下列命题符号化

（1）张明既聪明又勤奋。

（2）李强虽然聪明但不勤奋。

（3）张明与李强都是三好学生。

（4）张明与李强是同学。

解 首先将原子命题符号化：

p: 张明聪明

q: 张明勤奋

r: 李强聪明

s: 李强勤奋

t: 张明是三好学生。

u: 李强是三好学生。

v: 张明与李强是同学。

于是命题符号化结果表示为：

（1）张明既聪明又勤奋。 $p \wedge q$

（2）李强虽然聪明但不勤奋。 $r \wedge \neg s$

（3）张明与李强都是三好学生。 $t \wedge u$

（4）张明与李强是同学。 v

析取(disjunction)联结词

析取：或者 ∨

我很高或我很帅　　　我很高∨我很帅

真	假		
假	真	⇒	真
真	真		
假	假	⇒	假

析取(disjunction)联结词

定义1.3　析取联结词

- 设p，q为二个命题，复合命题"p或q"称p与q的析取式。记作$p \vee q$，$\vee$称作析取联结词
- 规定$p \vee q$为假当且仅当p与q同时为假
- 由定义可知，若$p \vee q$为真，则p与q中至少一个为真。因而只有p与q同时为假时，$p \vee q$才为假，其他情况下$p \vee q$均为真。

析取及异或联结词举例

例1.5 将下列命题符号化

（1）张明喜欢学数学或软件工程。

（2）张明报考的第一志愿（唯一）只选择数学专业或软件工程。

解 先将原子命题符号化

（1） p：张明喜欢学数学。

q：张明喜欢学软件工程。

显然（1）中的“或”为相容或，即p与q可以同时为真，符号化为$p \vee q$。

(2) 张明报考的第一志愿只选择数学专业或软件工程

设 r：张明选择数学专业

s：张明选择软件工程

若将命题符号化为 $r \vee s$，由于 r，s的联合取值情况有四种：同真，同假，一真一假（两种情况）。张明就可能同时选择数学专业和软件工程，这不符合报考的实际情形。

如何达到只能选择唯一的第一志愿要求呢？

设 r：张明选择数学专业

s：张明选择软件工程专业

可以使用多个联结词，将该命题符号化为

$$(r \wedge \neg s) \vee (\neg r \wedge s)$$

此复合命题为真当且仅当r，s中一个为真，且另一个为假。

由题意可知，（2）中的“或”应为排斥或（不可兼或）。

异或联接词与命题形式化

教材P10例3： 给出三个命题

p： 今晚我在家里看电视。

q： 今晚我去体育场现场看球赛。

r： 今晚我在家里看电视或去体育场看球赛。

问题是：命题 r和$p \vee q$表达的是否是同一命题？

（注：上述看电视与看球赛均指同一时间段）

异或联接词与命题形式化

同p 、 q 和r 之间的真值关系可由下表给出

p	q	r
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

异或联接词与命题形式化

p	q	r
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

该表的前三行很容易理解。而第四行是说今晚我在家看电视，又去体育场看球赛。显然据题意假设，对同一个人、同一时间段这是不可能发生的事情。从而这时r 的真值为F。

这也说明:

r与p ∨q在逻辑上是并不相等的，即r中出现的“或”不能以普通的“∨”来表示。

异或联接词与命题形式化

这里p，q和r 之间的逻辑关系，即为异或(也称不可兼或)。

以 $\overline{\vee}$ 表示，有 $r = p \,\overline{\vee}\, q$，不难验证：

$$r = (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

若以p, q分别表示一位二进制数字，则r就表示了p与q 的和(不考虑进位)。

异或联接词与命题形式化

- 异或（不可兼或）联结词

  是二元命题联结词。
- 两个命题p和q的异或构成一个新的命题，记作$p\bar{\vee}q$。
- 当且仅当p与q的真值相异时，$p\bar{\vee}q$为T，否则$p\bar{\vee}q$的真值为F。

析取联结词“∨” 与 异或“$\bar{\vee}$”的真值表

（注：$\bar{\vee}$为∨上面加一横，见教材P10，不可兼或）

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \bar{\vee} q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

蕴涵(implication)联结词

定义1.4 蕴涵联结词 设p，q为二命题，复合命题“如果p，则q”称为p与q的蕴涵式，记作$p \to q$。并称p是蕴涵式的前件，q为蕴涵式的后件，→称作蕴涵联结词。

- $p \to q$的逻辑关系为
  - p是q成立的充分条件，但不必是q成立的必要条件；
  - 规定，$p \to q$为假当且仅当p为真且q为假。

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

因果关系

- 引入→的目的是希望用来描述命题间的推理，表示因果关系
- 使用$p\rightarrow q$能描述推理
  - $p\rightarrow q$为真时，只要p为真必有q真，而不能出现p真而q假就够了
  - p为假时，q取真取假，并不违背p为真时q必真。从而仍可规定p为假时，$p\rightarrow q$取真

充分条件和必要条件

在整数集上，如果存在x，$x=1$，那么存在x，$x+1=2$

如果$x=1$　　那么$x+1=2$

推出符号

头是必要
尾是充分

p　$x=1 \Rightarrow x+1=2$　q

充分条件　　　　必要条件

$q \quad \Rightarrow \quad p$

充分条件　　　　必要条件

互为充分必要条件　$p \Leftrightarrow q$

等价符号

关于充分条件和必要条件的说明

- 充分条件：就是只要条件成立，结论就成立，则该条件就是充分条件。

  “如果缺少水分，植物会死亡”，“缺少水分”就是“植物会死亡”的充分条件。在自然语言中表示充分条件的词有：如果…那么…，只要…就…，若…则…

- 必要条件：就是如果该条件不成立，那么结论就不成立，则该条件就是必要条件。

  在自然语言中 表示必要条件的词有：只有…才…；仅当…，…；…，仅当…。

例题 仅当(r)我有时间(q）我去镇上。 $q \to r$

举例

- 令：p：天气好。q：我去公园。
- 1.如果天气好，我就去公园。
- 2.只要天气好，我就去公园。
- 3.若天气好，我就去公园。
- 4.仅当天气好，我才去公园。
- 5.只有天气好，我才去公园。
- 6.我去公园，仅当天气好。

$p \rightarrow q$为真的情况下，如果p为真，q也为真，那么“$\rightarrow$”既表示充分条件（即前件是后件的充分条件）；也表示必要条件（即后件是前件的必要条件）。这一点要特别注意！！！它决定了哪个作为蕴含连接词的前件，哪个作为后件。

命题1.、2.、3.写成： $p \rightarrow q$

命题4.、5.、6.写成： $q \rightarrow p$

单选题 1分

设置

在实数集上， p: 存在$x, |x+1| \le 4$
q: 存在$x, x^2 < 5x - 6$

A p 是q的必要条件

B p 是q的充分条件

C p 是q的充要条件

D q是p的必要条件

提交

例1.6 将下列命题符号化，并指出各命题的真值

（1）只要是星期五，我就来上课。

（2）我没来上课，则今天不是星期五。

（3）只有星期五，我才来上课。

（4）除非是星期五，否则我不来上课。（思考各句的逻辑关系）

解　令　r：今天是星期五，r 的真值为1。

s：我来上课，s的真值也为1。

（1）与“如果是星期五，我就来上课”的逻辑含义相同，均可符号化为$r\rightarrow s$。

（2）按照蕴涵式的逻辑关系，可直接符号化为$\neg s\rightarrow\neg r$。

（3）注意该句与命题（1）不同，将这句话换为逻辑上等价的另一个命题，“我来上课，那么今天一定是星期五”。由后一个命题可方便地符号化为$s\rightarrow r$。

（4）后半句提供的信息十分明确，即，如果不是星期五则我不来上课，据此写出该命题的符号化为$\neg r\rightarrow\neg s$。

例1.6 将下列命题符号化，并指出各命题的真值

（5）如果1＋2＝3，则太阳从东方升起。

（6）如果1＋2$\neq$3，则太阳从东方升起。

（7）如果1＋2＝3，则太阳不从东方升起。

（8）如果1＋2$\neq$3，则太阳不从东方升起。

解 令 p：1＋2 = 3，p的真值为1。

q：太阳从东方升起，q的真值也为1。

符号化形式分别为

（5） $p \to q$ （6）$\neg p \to q$

（7） $p \to \neg q$ （8）$\neg p \to \neg q$

四个复合命题的真值分别为1，1，0，1。

以上四个蕴涵式的前件p与后件q之间没有什么内在联系

在使用联结词→时，要特别注意以下几点：

1. 在自然语言里，p与q的这种关系有许多不同的叙述方式，例如，“只要p，就q”，“因为p，所以q”，等等。都应符号化为$p \to q$。

2. 通常，“如果p，则q”希望用来描述命题间的推理，表示一种因果关系。但在数理逻辑中，作为一种规定，当p为假时，无论q是真是假，$p \to q$均为真。

3. 在自然语言中，“如果p，则q”中的前件p与后件q往往具有某种内在联系，而在数理逻辑中，p与q可以无任何内在联系。

Setting

$p \rightarrow q = ?$

A $p \vee q$

B $\neg p \vee q$

C $\neg p \,\bar{\vee}\, q$

D $\neg p \wedge q$

Submit

$p \to q = \neg p \vee q$

p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

在p、q的所有取值下，$p \to q$同$\neg p \vee q$都有相同的真值：$p \to q = \neg p \vee q$（真值相同的等值命题以等号联结）

这也说明$\to$可由$\neg$、$\vee$来表示，从逻辑上看“如果P则Q”同“非p或q”是等同的两个命题

实际上，{$\neg$，$\vee$}构成一个联结词的完备集，可表达任何联结词

双蕴涵(equivalence)联结词

定义1.5　双蕴涵联结词

设p，q为二命题，复合命题“p当且仅当q”称作p与q的双蕴涵式，记作$p\leftrightarrow q$，其中$\leftrightarrow$称作双蕴涵联结词。并规定$p\leftrightarrow q$为真 当且仅当 p与q 同时为真或同时为假。

双蕴涵联结词的真值表

$p \leftrightarrow q$的逻辑关系为：

p与q互为充分必要条件

$p \leftrightarrow q$ 为真**当且仅当**

p与q同时为真或同时为假

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例1.7　将下列命题符号化，并讨论它们的真值

（1）若三角形ABC中有两个角相等，

则三角形ABC为等腰三角形。反之亦然。

（2）太阳从西方升起当且仅当大象会飞。

解　令 p：三角形ABC中有两个角相等；

q：三角形ABC为等腰三角形。

p值为1时，q值为1；p值为0时，q值为0

则将（1）符号化为$p\leftrightarrow q$，其真值为1。

令 r：太阳从西方升起，真值为0；

s：大象会飞，真值为0。

则将（2）符号化为$r\leftrightarrow s$，其真值为1。

$x+y=2$当且仅当$2*(x+y)=4$

- 问题
  - 这是不是一个命题？
  - 可否形式化成 $x+y=2 \leftrightarrow 2*(x+y)=4$
- 解
  - 不能形式化成$x+y=2 \leftrightarrow 2*(x+y)=4$
  - $x+y=2$ No
  - There exists x and y such that x+y = 2 Yes
  - For all x and all y, x+y = 2 Yes
  - 可形式化为$(\forall x \forall y)(x+y=2 \leftrightarrow 2*(x+y)=4)$
  - 可形式化为$(\exists x \exists y)(x+y=2 \leftrightarrow 2*(x+y)=4)$

常用的联结词

五种最基本、最常用的联结词 ¬，∧，∨，→，↔，将它们组成一个集合

{¬，∧，∨，→，↔}，

称为一个联结词集。

其中¬为一元联结词，

其余的都是二元联结词。

基本复合命题（5个常用联结词）的真值表

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

关于联结词的几点说明

- 对简单命题多次使用联结词集中的联结词，可以组成更为复杂的复合命题。
- 求复合命题的真值时，除依据前面的真值表外，还要规定联结词的优先顺序
- 教材中规定的联结词优先顺序为：

  $( )$ ，$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，

  同一优先级的联结词，先出现者先运算。
- 在逻辑中所关心的是复合命题中命题之间的真值关系，而并不关心命题的内容。

1.3　合式公式及其赋值

- 上节介绍了将命题表示为符号串。
- 是否每个符号串都是命题呢？

$$p\ q \rightarrow$$

- 什么样的符号串才能表示命题呢？
- 如下命题形式定义的符号串表示的才是命题(公式)。

1.3　合式公式及其赋值

- 命题变项或命题变元

　　真值可以变化的陈述句为命题变项或命题变元。也用p，q，r，…表示命题变项。

- 当p，q，r，…表示命题变项时，它们变成了取值为0或1的变项，因而命题变项已不再是一个固定的命题。

合式公式或命题公式

合式公式或命题公式的表示

将命题变项用联结词和圆括号按一定的逻辑关系联结起来的符号串。

当使用联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 中的联结词时，合式公式定义如下

合式公式(命题公式)的定义

定义1.6 合式公式 (wff) (well formed formulas)

（1）单个命题变项是合式公式，并称为原子命题公式。

（2）若A是合式公式，则（$\neg A$）也是合式公式。

（3）若A，B是合式公式，则（$A \wedge B$），（$A \vee B$），（$A \rightarrow B$），（$A \leftrightarrow B$）也是合式公式。

（4）只有**有限次**地应用（1）～（3）形成的符号串才是合式公式。

合式公式也称为命题公式或命题形式，简称公式。

- 设A为合式公式，B为A中的一部分，若B也是合式公式，则称B为A的子公式。

命题公式的赋值或解释

定义1.7　赋值或解释

设p_1，p_2，…，p_n是出现在公式A中的全部的命题变项，给p_1，p_2，…，p_n各指定一个真值，称为对A的一个赋值或解释。

若指定的一组值使A的真值为1，则称这组值为A的成真赋值；

若使A的真值为0，则称这组值为A的成假赋值。

真值表及其构造方法

定义1.8　真值表

将命题公式A在所有赋值下的取值情况列成表，称作A的真值表。

构造真值表的具体步骤：

（1）找出公式中所含的全体命题变项p_1，p_2，…，p_n（若无下角标就按字典顺序排列），列出2^n个赋值。规定赋值从00…0开始，然后按二进制加法，直到11…1为止。

（2）按照运算的优先次序写出各子公式。

（3）对应各个赋值计算出各子公式的真值，直到最后计算出公式的真值。

真值表举例

例1.8　求下列公式的真值表，并求成真赋值和成假赋值。

（1）　$\neg p \vee q$

（2）　$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

$\neg p \vee q$的真值表如右表

其中10为成假赋值

其余3个赋值(00, 01, 11)均为成真赋值

$p \wedge (p \to q) \to q$ 的真值表

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$p \wedge (p \to q) \to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

命题公式的分类

定义1.9　重言式 矛盾式 可满足式

设A为任一命题公式，

1. 若A在它的各种赋值下取值均为真，则称A是重言式或永真式。

2. 若A在它的各种赋值下取值均为假，则称A是矛盾式或永假式。

3. 若A不是矛盾式，则称A是可满足式

命题公式的分类（续）

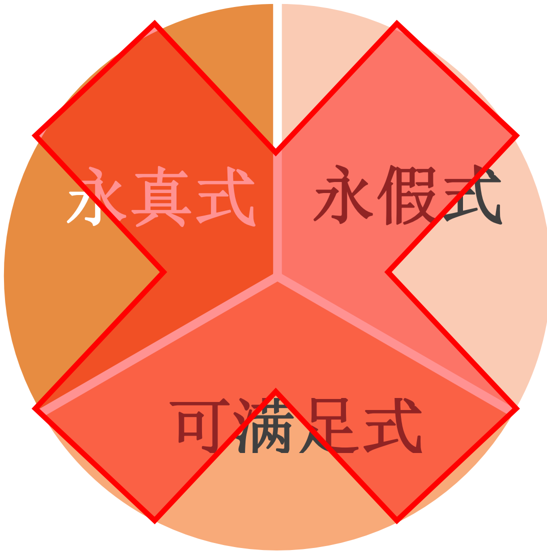
真值表可用来判断公式的类型：

（1）若真值表最后一列(公式结果)全为1，则公式为重言式；

（2）若真值表最后一列全为0，则公式为矛盾式；

（3）若真值表最后一列中至少有一个1，则公式为可满足式。

三者之间的关系



1.4 重言式与代入规则

代入规则

一个重言式，对其中所有相同的命题变项都用一合式公式代换，其结果仍为一重言式。这一规则称为代入规则。

换句话说，A是一个公式，对A使用代入规则得到公式B，若A是重言式，则B也是重言式。

代入规则的具体要求为：

1. 公式中被代换的只能是命题变项（原子命题），而不能是复合命题。
2. 对公式中某命题变项施以代入，必须对该公式中出现的所有同一命题变项施以相同的代换。

1.4 重言式与代入规则

1. 公式中被代换的只能是命题变元（原子命题）而不能是复合命题。如可用$(R\wedge S)$来代换某公式中的P，记作

$$\frac{P}{(R\wedge S)}$$

而不能反过来将公式中的$(R\wedge S)$以P代之。

这一要求可以用代数的例子来说明，如对

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

可以用$a=cd$代入，仍会保持等式成立。

而若将$a+b$以cd代入，结果左端得$(cd)^2$，但右端无法代入cd，不能保持等式成立。

1.4 重言式与代入规则

2. 对公式中某命题变项施以代入，必须对该公式中出现的所有同一命题变项代换同一公式

公式A经代入规则可得任一公式，而仅当A是重言式时，代入后重言式的性质方得保持。

如$A = P \vee \neg P$，作代入 $\dfrac{P}{\neg Q}$

得 $B = \neg Q \vee \neg \neg Q$ 仍是重言式。

若仅将$\neg P$以Q代之得$B = P \vee Q$ (未做P的相关代入，则这不是代入, 违反了规定2) 已不是重言式。

在第三章公理系统中，代入规则视作重要的推理规则经常使用 。

1.4 重言式与代入规则

举例：使用代入规则证明重言式。

例1： 判断 $(R \vee S) \vee \neg(R \vee S)$ 为重言式。

由 $P \vee \neg P$ 为重言式， 作代入

$$\frac{P}{(R \vee S)}$$

依据代入规则，便得 $(R \vee S) \vee \neg(R \vee S)$。

这公式必是重言式。

1.4 重言式与代入规则

例2： 判断 $((R \vee S) \wedge ((R \vee S) \rightarrow (P \vee Q))) \rightarrow (P \vee Q)$ 为重言式.

不难验证 $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ 是重言式。作代入：

$$\frac{A}{(R \vee S)}, \frac{B}{(P \vee Q)}$$

便知（ $(R \vee S) \wedge ((R \vee S) \rightarrow (P \vee Q))) \rightarrow (P \vee Q)$ 是重言式。

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

1.5 命题形式化

1. 注意掌握用不同的方式表示同一命题公式的方法

2. 善于以真值表为工具分析、验证、解决命题形式化中的问题

所谓命题符号化，就是用命题公式的符号串来表示给定的命题。

- 命题符号化的方法　　　化整为零，各个击破

  1. 明确给定命题的含义。

  2. 对复合命题，找联结词，分解出各个原子命题。

  3. 设原子命题符号，并用逻辑联结词联结原子命题符号，构成给定命题的符号表达式。

例1.说离散数学无用且枯燥无味是不对的。

P：离散数学是有用的。

Q：离散数学是枯燥无味的。

该命题可写成：$\neg(\neg P \wedge Q)$

例2.如果小张与小王都不去，则小李去。

P：小张去。 Q：小王去。 R：小李去。

该命题可写成：$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$

- 例3. 仅当天不下雨且我有时间，才上街。
  P：天下雨。Q：我有时间。R：我上街。
  该命题可写成： $R\rightarrow(\neg P\wedge Q)$

- 例4.人不犯我，我不犯人；人若犯我，我必犯人。
  P：人犯我。Q：我犯人。
  该命题可写成：$(\underbrace{\neg P\rightarrow\neg Q}_{\text{P是Q的必要条件}})\wedge(\underbrace{P\rightarrow Q}_{\text{P是Q的充分条件}})$

  或写成： $\underbrace{P\leftrightarrow Q}_{\text{P是Q的充分且必要条件}}$

例5：除非你努力，否则你将失败。

解：

可理解为：如果你不努力，那么你将失败.

设 P：你努力. Q：你失败.

该命题可写成：$\neg P \rightarrow Q$

- 注意：如果理解为“如果你努力，你将成功.”，对吗？

课上与课后思考题

- 举例（课上思考讨论题）
- IF …THEN…ELSE 是常用的编程语句
- 记 A 表示 IF P THEN Q ELSE R

  试将其形式化（用所学的联接词表示）

  进一步可尝试给出两种不同的表示（彼此等值）

课后思考题　已讲过由命题公式写出真值表的方法，思考如何由给出的真值表写出未知的命题公式。

多选题 1分

设置

IF …THEN…ELSE 是常用的编程语句

记 A 表示 IF P THEN Q ELSE R

试将其形式化（用所学的联接词表示）

A $A_1 = (P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R)$

B $A_1 = (P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow \neg R)$

C $A_2 = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$

D $A_2 = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

提交

课堂思考题（续）

解：

记 A 表示 IF P THEN Q ELSE R

将其形式化（用所学的联接词表示）

记 $A_1 = (P \to Q) \wedge (\neg P \to R)$

记 $A_2 = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$

列出A_1 和A_2的真值表如下

课后思考题：如何由给出的真值表写出未知的命题公式

$A_1 = (P\to Q)\land(\neg P\to R)$ $A_2 = (P\land Q)\lor(\neg P\land R)$

P	Q	R	$P\to Q$	$\neg P\to R$	A_1	$P\land Q$	$\neg P\land R$	A_2
0	0	0	1	0				
0	0	1	1	1	1		1	1
0	1	0	1	0				
0	1	1	1	1	1		1	1
1	0	0	0	1				
1	0	1	0	1				
1	1	0	1	1	1	1		1
1	1	1	1	1	1	1		1

Setting

若天不下雨，我就上街；否则在家。

设 P：天下雨。Q ：我上街。R：我在家。

A $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$

B $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge \neg(Q \wedge R)$

C $(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \bar{\vee} (P \wedge \neg Q \wedge R)$

D $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \wedge R)$

Submit

例6：若天不下雨，我就上街；否则在家。

解：

设 P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。

该命题可写成：$(\neg P \to Q) \land (P \to R)$.

注意：中间的联结词一定是"∧"，而不是"∨"，也不是"$\bar{\vee}$"。

因为原命题表示："天不下雨时我做什么，天下雨我又做什么"的两种作法，其中有一种作法是假的，则命题的真值为假，所以中间的联结词一定是"∧"。

解法是否正确？

问题：若天不下雨，我就上街；否则在家

设 P：天下雨。Q：我上街。R：我在家

P Q R	$\neg P$	$\neg P \rightarrow Q$	$P \rightarrow R$	$(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$
0 0 0	1	0	1	0
0 0 1	1	0	1	0
0 1 0	1	1	1	1
~~0 1 1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
1 0 0	0	1	0	0
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	0	1	0	0
~~1 1 1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~

例6：若天不下雨，我就上街；否则在家

P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。

该命题可写成：$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)\wedge \neg(Q\wedge R)$

还可以形式化为：$(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\bar{\vee}(P\wedge\neg Q\wedge R)$

问题：若天不下雨，我就上街；否则在家

P Q R	P	¬P→Q	P→ R	(¬P→Q)∧(P→ R)¬(Q∧R)
0 0 0	1	0	1	0
0 0 1	1	0	1	0
0 1 0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	0
1 0 0	0	1	0	0
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	0	1	0	0
1 1 1	0	1	1	0

谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn