第八章 群

刘世霞
shixia@tsinghua.edu.cn

第八章 群

8.1 半群

8.2 群、群的基本性质

8.3 循环群 群的同构

8.4 变换群和置换群 Cayley定理

8.5 陪集和群的陪集分解 Lagrange定理

8.6 正规子群与商群

8.7 群的同态、同态基本定理（不做考试要求）

8.7 群的同态、同态基本定理（**不做考试要求**）

定义8.7.1

- 设G_1, G_2是两个群，f是G_1到G_2的一个映射。如果对任意的$a, b \in G_1$都有

$$f(ab) = f(a)f(b),$$

- 则称f是G_1到G_2的一个同态映射，或简称同态。

8.7 群的同态、同态基本定理

- 若映射f分别是单射、满射、双射时，分别称之为G_1到G_2的单一同态、满同态、同构
- 用$G_1 \sim G_2$表示满同态，并称G_2是f作用下G_1的同态象

8.7 群的同态、同态基本定理

- 引理8.7.1：设H是G的正规子群，$\forall a \in G$令$f: a \to aH$，则f是G到G/H的满同态。
- 证明：
  - 显然，f是G到G/H的一个映射
  - 同时，$\forall aH \in G/H$，总是$\exists a \in G$，满足$f(a) = aH$
  - 因此f是G到G/H的一个满射

定理8.6.3：设H是G的一个正规子群，G/H表示H的所有陪集构成的集合，即

$$G/H = \{gH | g \in G\}$$

则G/H关于陪集乘法作成群。称之为G关于H的**商群**

8.7 群的同态、同态基本定理

- 引理8.7.1：设H是G的正规子群，$\forall a \in G$令$f: a \to aH$，则f是G到G/H的满同态。
- 证明（续）：
  - 由于$\forall a, b \in G, f(ab) = abH$
  - 且群G/H中的运算满足$aHbH = abH$（定理8.6.3）
  - 故$f(ab) = abH = aHbH = f(a)f(b)$ 保持运算！
  - 因此f是G到G/H的满同态

$aHbH = abH \in G/H$

关于乘法是封闭的

8.7 群的同态、同态基本定理

定理8.7.1

- 若f是G_1到G_2的同态，g是G_2到G_3的同态，则gf是G_1到G_3的同态。
- 证明：显然gf是G_1到G_3的映射，以下只证明它保持运算，对任意$a,b\in G_1$

$$gf(ab)=g\big(f(ab)\big)=g\big(f(a)f(b)\big)$$
$$=g\big(f(a)\big)g\big(f(b)\big)=gf(a)gf(b)$$

- 因此gf是G_1到G_3的同态。

8.7 群的同态、同态基本定理

定理8.7.2

- 设G是一个群，$(G',\cdot)$是一个有二元运算的代数系统，若$f: G \to G'$是满射，且保持运算，则G'也是群，而且$G \sim G'$

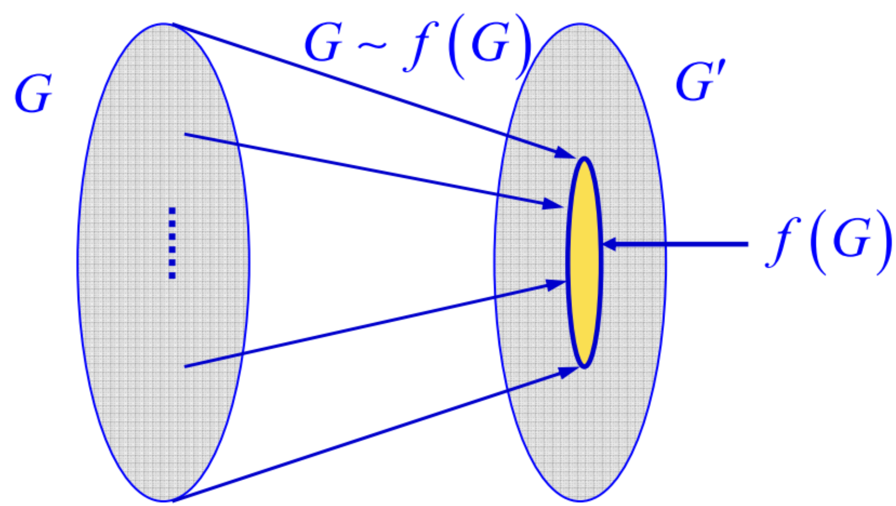
群的同态象，仍然是群！

$G = (Z, +), G' = (Z_n, +), f(a) = a\ (mod)\ n$

8.7 群的同态、同态基本定理

- **推论8.7.2** 设f是G到G'的同态，则G的象集$f(G)$是群G'的子群！

  且f是G到$f(G)$的满同态



群的同态象，仍然是群！

8.7 群的同态、同态基本定理

定理8.7.3

- 设f是G到G'的同态，则
  1. 若e和e'分别是G和G'的单位元，则$f(e) = e'$
  2. $\forall a \in G$，f将a的逆元映射到G'中的逆元，即$f(a^{-1}) = f^{-1}(a)$
  3. 如果H是G的子群，则H在f下的象$f(H) = \{f(a)|a \in H\}$是G'的子群，且$H \sim f(H)$

8.7 群的同态、同态基本定理

证明： 1.若e和e'分别是G和G'的单位元 $\Rightarrow$ $f(e) = e'$

- $f: G \sim f(G)$ $\quad \forall a, b \in G, f(ab) = f(a)f(b)$
- $\forall a' \in f(G)$, 由于f为满射，因此必定$\exists a \in G$使得 $f(a) = a'$
- 因此，$a'f(e) = f(a)f(e) = f(ae) = f(a) = a'$
- 同理，$f(e)a' = a'$。因此$f(e)$是$f(G)$中单位元
- 因为单位元唯一，故$f(e) = e'$

设f是G到G'的同态,

8.7 群的同态、同态基本定理

证明： 2. $\forall a \in G, f(a^{-1}) = f^{-1}(a)$

- $\forall a \in G$, 有$a^{-1} \in G$
- 因此，$f(aa^{-1}) = f(e) = e' = f(a)f(a^{-1})$
- 同理，$f(a^{-1}a) = f(e) = e' = f(a^{-1})f(a)$
- 故$f^{-1}(a) = f(a^{-1})$

设f是G到G'的同态,

8.7 群的同态、同态基本定理

证明： 3. $H \leq G \Rightarrow f(H) \leq G'$, 且$H \sim f(H)$

- $\forall a, b \in f(H)$，由于f为满射，因此必定存在$a', b' \in H$，使得$f(a') = a, f(b') = b$。
- 则$ab = f(a')f(b') = f(a'b') \in f(H)$ 封闭性！
- $e \in H \Rightarrow f(e) \in f(H)$ 单位元！

如果H是G的子群，则H在f下的象$f(H) = \{f(a)|a \in H\}$是G'的子群，且$H \sim f(H)$

8.7 群的同态、同态基本定理

证明：

3. $H \leq G \Rightarrow f(H) \leq G'$，且$H \sim f(H)$

- $\forall a \in f(H)$，由于f为满射，因此必定$\exists a' \in H$，使得$f(a') = a$
- 显然$(a')^{-1} \in H$，则$f((a')^{-1}) \in f(H)$
- $f\big((a')^{-1}\big)a = f\big((a')^{-1}\big)f(a') = f\big((a')^{-1}(a')\big) = f(e) = e'$
- 同理，$af\big((a')^{-1}\big) = e'$

逆元素！

- 即$\forall a \in f(H)$，在$f(H)$中有逆元素

如果H是G的子群，则H在f下的象$f(H) = \{f(a) | a \in H\}$是$G'$的子群，且$H \sim f(H)$

8.7 群的同态、同态基本定理

证明： 3. $H \le G \Longrightarrow f(H) \le G'$, 且$H \sim f(H)$

- $\forall a \in f(H)$，根据$f(H)$的定义，必定存在$a' \in H$，使得$f(a') = a$

满射！

- 说明f是从H到$f(H)$的满射！
- $\forall a, b \in H$, 因为f是同态，所以

$$f(ab) = f(a)f(b) \in f(H)$$

保持运算！

- 故$H \sim f(H)$

如果H是G的子群，则H在f下的象$f(H) = \{f(a) | a \in H\}$是$G'$的子群，且$H \sim f(H)$

8.7 群的同态、同态基本定理

定理8.7.3

- 设f是G到G'的同态，则

1. 若e和e'分别是G和G'的单位元，则$f(e) = e'$

在同态映射下，单位元的象仍然是单位元

2. $\forall a \in G$，f将a的逆元映射到G'中的逆元，即

$f(a^{-1}) = f^{-1}(a)$ 在同态映射下，逆元素的象是象的逆元素

3. 如果H是G的子群，则H在f下的象$f(H) = \{f(a) | a \in H\}$是$G'$的子群，且$H \sim f(H)$

在同态映射下，子群的象仍然是子群，且该同态映射形成二者之间的满同态

8.7 群的同态、同态基本定理

定理8.7.5

- 设f是G到G'的同态，e是G的单位元，令$K=\{a\in G|f(a)=f(e)\}$，则K是G的正规子群，K称为同态f的核，记作$Ker\ f$

$$G=(Z,+),G'=(Z_n,+),f(a)=a\ (mod)\ n$$
$$\mathrm{Ker}\ f=nZ=\{nk|k\in Z\}\lhd G$$

8.7 群的同态、同态基本定理

证明：

- 显然，e为K中的元素
- 由于f是同态，因此$f(e) = e'$是G'的单位元
- $\forall k, k_1 \in K, f(kk_1) = f(k)f(k_1) = f(e)f(e) = e' = f(e)$
- $\forall k \in K, f(k^{-1}) = f^{-1}(k) = f^{-1}(e) = e' = f(e) \Longrightarrow k^{-1} \in K$
- 因此，K为G的子群。

设f是G到G'的同态，e是G的单位元，令$K = \{a \in G | f(a) = f(e)\}$，则$K$是$G$的正规子群，$K$称为同态$f$的核，记作$Ker\ f$

8.7 群的同态、同态基本定理

证明：

- $\forall g \in G, \forall k \in K$
- $f(g^{-1}kg) = f(g^{-1})f(k)f(g) = f^{-1}(g)f(k)f(g) = f^{-1}(g)f(g) = e' = f(e)$
- 即$\forall g \in G, \forall k \in K, g^{-1}kg \in K$
- 因此，$K \lhd G$ 证毕！

设H是G的子群，则以下几个条件等价：

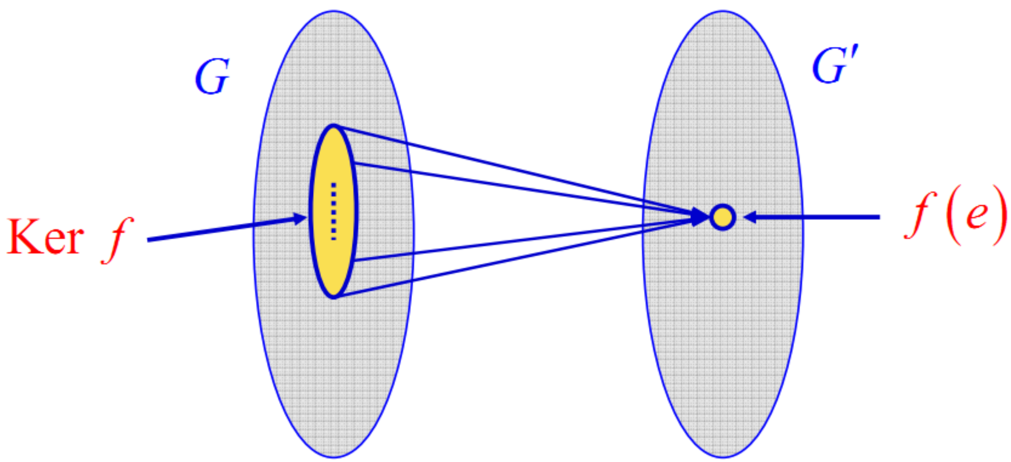
1. $H \lhd G$
2. $\forall g \in G, gHg^{-1} = H$
3. $\forall g \in G, gHg^{-1} \subseteq H$
4. $\forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H$

设f是G到G'的同态，e是G的单位元，令$K = \{a \in G | f(a) = f(e)\}$，则$K$是$G$的正规子群，$K$称为同态$f$的核，记作$Ker\ f$

8.7 群的同态、同态基本定理

定理8.7.5

- 设f是G到G'的同态，e是G的单位元，令$K = \{a \in G | f(a) = f(e)\}$，则$K$是$G$的正规子群，$K$称为同态$f$的核，记作$Ker\ f$



8.7 群的同态、同态基本定理

- 定理8.7.6 设f是G到G'的同态，K是同态的核，那么对任意的$a, b \in G, f(a) = f(b)$的充要条件是$b \in aK$。

证明：

- 充分性：已知$b \in aK$　　$\forall a, b \in G, f(a) = f(b)$
  - $\exists k \in K$,使得$b = ak$
  - $f(b) = f(ak) = f(a)f(k) = f(a)f(e) = f(a)$
- 必要性：已知$\forall a, b \in G, f(a) = f(b)$　　$b \in aK$
  - $e' = f^{-1}(a)f(a) = f^{-1}(a)f(b) = f(a^{-1})f(b) = f(a^{-1}b)$
  - 说明$a^{-1}b \in K$, 即$b \in aK$

$f(a) = f(b) \Leftrightarrow a \equiv b (\bmod n) \;\; \Leftrightarrow b \in aK$

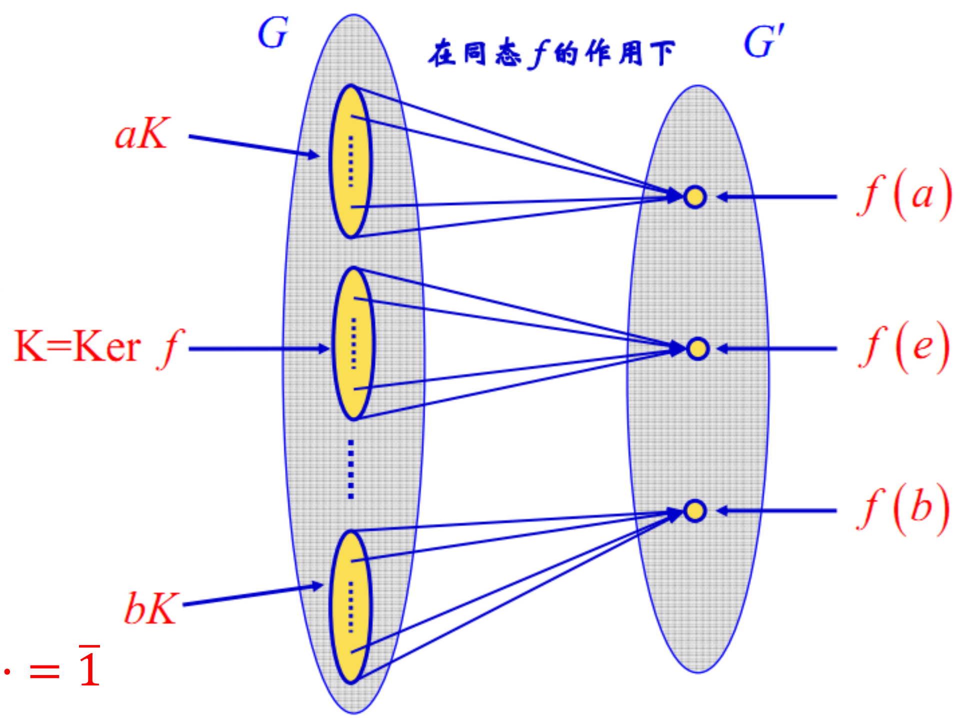
8.7 群的同态、同态基本定理

定理8.7.6

- 设f是G到G'的同态，K是同态的核，那么对任意的$a,b\in G$, $f(a)=f(b)$的充要条件是$b\in aK\ \ a\in bK$

$$b\in aK \Leftrightarrow bK=aK$$

同态核的陪集所有元素映射到一个象！
同态核不同陪集的象一定不同！



$f(0)=f(6)=\cdots=\bar{0};\ f(1)=f(7)=\cdots=\bar{1}$

8.7 群的同态、同态基本定理

定理8.7.7 设f是G到G'的同态，则f是单同态的充要条件是$Ker\ f = \{e\}$。

- 必要性：已知f为单同态　　$Ker\ f = \{e\}$
  - G'中单位元e'在G中只有一个原象e, 即$Ker\ f = \{e\}$
- 充分性：已知$Ker\ f = \{e\}$　　f为单同态
  - $\forall a, b \in G$，若$f(a) = f(b)$

  $f(a)f^{-1}(b) = f(a)f(b^{-1}) = f(ab^{-1}) = f(b)f^{-1}(b) = e'$
  - 由已知条件，$ab^{-1} = e$　　$a = b$

证毕！

8.7 群的同态、同态基本定理

定理8.7.7

- 设f是G到G'的同态，则f是单同态的充要条件是$Ker\ f = \{e\}$。

推论

- 设f是G到G'的满同态，则f为同构的充要条件是$Ker\ f = \{e\}$。

8.7 群的同态、同态基本定理

同态基本定理

- 设G是一个群，则G的任一商群都是G的同态象；反之，若G'是G的同态象，f是G到G'的满同态，则$G' \cong G/K$，其中$K = Ker\ f$

$G = (Z,+), G' = (Z_n,+), f(a) = a\ (mod)\ n$
$K = \mathrm{Ker}\ f = nZ = \{nk|k \in Z\} \lhd G$
$G/K = (\{K, K+1, \dots, K+(n-1)\},+)$
$G' \cong G/K : \bar{i} \leftrightarrow K + i$

定理8.6.3：设H是G的一个正规子群，G/H表示H的所有陪集构成的集合，即

$$G/H = \{gH|g \in G\}$$

则G/H关于陪集乘法作成群。称之为G关于H的商群

8.7 群的同态、同态基本定理

证明： $G \sim G/H$

- G/H为任一商群，则$H \lhd G$　　　（商群的定义）
- 则可构造映射 $g: a \rightarrow aH(\forall a \in G)$
- 由引理8.7.1可知，g为满同态。
- 而G/H为G在g下的同态象
- 即$G \sim G/H$

引理8.7.1：设$\boldsymbol{H}$是$\boldsymbol{G}$的正规子群，$\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{G}$令$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{a} \rightarrow \boldsymbol{aH}$，则$\boldsymbol{f}$是$\boldsymbol{G}$到$\boldsymbol{G/H}$的满同态。

定理8.6.3：设H是G的一个正规子群，G/H表示H的所有陪集构成的集合，即

$$G/H = \{gH | g \in G\}$$

则G/H关于陪集乘法作成群。称之为G关于H的商群

8.7 群的同态、同态基本定理

证明：　f是G到G'的满同态 $\Longrightarrow$ $G/K \cong G'(K = Ker\ f)$

- 令$\varphi: aK \to f(a)$，显然符合映射条件
- $\forall x \in G'$, 由于f是满同态，因此必定$\exists a \in G$，使得$f(a) = x$，即$\varphi(aK) = f(a) = x$
- 因此φ是G/K到G'的满射
- 据定理8.7.6，$\varphi(aK) = \varphi(bK) \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow aK = bK$
- 因此φ是G/K到G'的单射

定理8.7.6：设f是G到G'的同态，K是同态的核，那么对任意的$a, b \in G, f(a) = f(b)$的充要条件是$b \in aK$。

8.7 群的同态、同态基本定理

证明： f是G到G'的满同态 ⟹ $G/K \cong G'(K = Ker\ f)$

- $\varphi(aKbK) = \varphi(abK) = f(ab) = f(a)f(b) = \varphi(aK)\varphi(bK)$
- 因此φ是G/K到G'的同构映射，即$G/k \cong G'$

$aHbH = abH = G/H$

关于乘法是封闭的

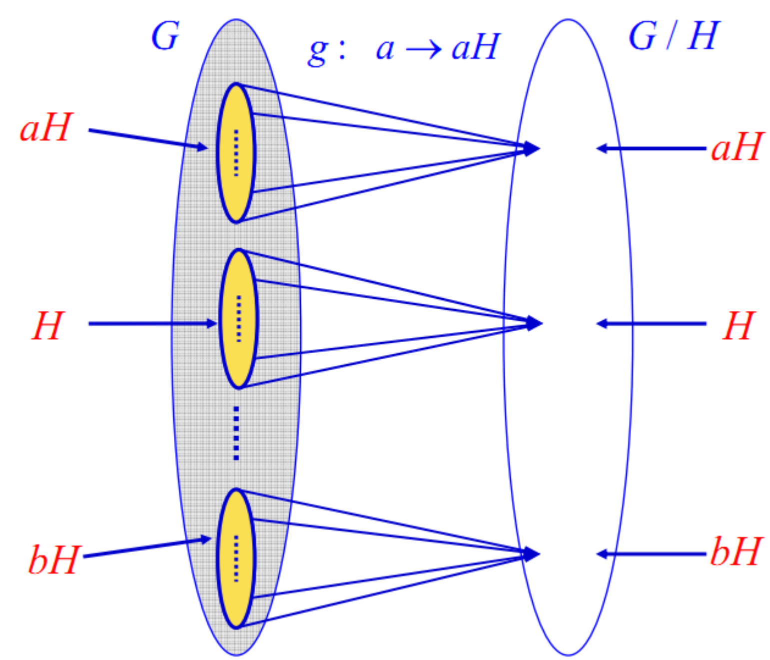
8.7 群的同态、同态基本定理

同态基本定理

- 设G是一个群，则G的任一商群都是G的同态象；反之，若G'是G的同态象，f是G到G'的满同态，则$G' \cong G/K$，其中$K = Ker\ f$

群的商群可以成为其同态象！

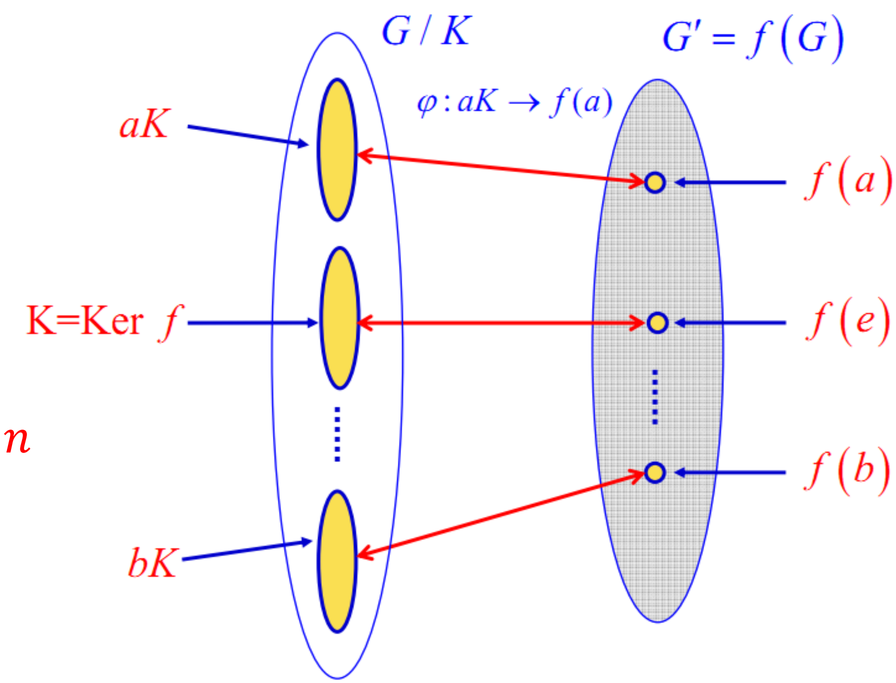
$G = (Z,+), H = nZ = \{nk|k \in Z\} \lhd G\ , f(a) = H + a$



8.7 群的同态、同态基本定理

- **同态基本定理**：设G是一个群，则G的任一商群都是G的同态象；反之，若G'是G的同态象，f是G到G'的满同态，则$G' \cong G/K$，其中$K = Ker\ f$

群（关于某个满同态）的同态象与该同态核的商群同构！



$G = (Z, +), G' = (Z_n, +), f(a) = a\ (mod)\ n$
$K = \text{Ker}\ f = nZ = \{nk | k \in Z\} \lhd G$
$G/K = (\{K, K+1, \dots, K+(n-1)\}, +)$
$\boldsymbol{G' \cong G/K : \bar{i} \leftrightarrow K + i}$

8.7 群的同态、同态基本定理

几个经典的例子

- $G=(Z,+)$ 映射 $f: k \mapsto \bar{k}$　$(Z \to Z_n)$
  - 验证 f 是满同态
  - $K=\ker f=\langle n\rangle$
  - $Z/\langle n\rangle \cong Z_n$
- G 为全体n阶可逆实矩阵，对矩阵乘法构成群，取映射 $f: A \mapsto \det A$ (行列式的值)　$(G \to R^*)$
  - 验证 f 是满同态
  - $K=\ker f$ 为全体n阶行列式为1的可逆实矩阵
  - $G/K \cong R^*$

R^*：去掉0后的实数构成乘法群

8.7 群的同态、同态基本定理

小结

- 群的同态、同态象
- 同态性质：单位元、逆元、子群
- 同态核，同态核性质
- 同态基本定理

谢谢

shixia@tsinghua.edu.cn