淨收益：到期日總收益函數如圖紅色線所示，雖然總收益在 $[0, \infty]$ 區間中，不論多空都可能獲利，但要注意交易成本可能會高過實際獲益，進而造成虧損。

結語：由以上的範例中可以看出與選擇權相關的交易策略相當的靈活、豐富，甚至可以用來檢驗是否存在套利的空間。

第二節　參數估計（Parameter Estimation）

本節首先介紹在統計學裡，關於估計母體參數如平均值與變異數等基本結果，然後以幾何布朗運動為例，估計出成長率和波動率兩個參數。

統計推論（Statistical Inference）

如何從母體（population）所抽出的樣本中，取得該母體參數的一些推測？經常使用的方法包括了（一）估計（estimation）例如對母體均值或標準差做數值推估，與（二）假設檢定（hypothesis testing），例如對母體參數的假設值進行檢定。針對本章的需要，我們僅僅回顧估計的部分如下。

從母體取得的樣本中，估算母體平均數（population mean）的點估計（point estimate）是這裡要探討的主題。對於一組給定的樣本資料 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 通常其平均值

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}, \qquad (2\text{-}1)$$

也稱作樣本平均（sample mean），是母體平均（population mean，記做 μ）的一個點估計。以下幾個性質常被用來衡量估計式（estimator）的良瓠。

1. 不偏性（Unbiasedness）：一估計式是不偏的（unbiased），若它的期望值等同於該母體參數。
2. 效率性（Efficiency）：意指在一固定的樣本個數（sample size）下，樣本統計量的標準誤差（standard error）達到最小。
3. 一致性（Consistency）：一估計式是一致的（consistent），意指當樣本個數增加到無限大時，其估計值會收斂到所欲估計的母體參數。

可以證明先前定義的樣本平均會滿足以上三個特點。作為對母體平均的一個估計值，此單一數值就成為母體參數 μ 的點估計。此外，母體變異數 σ^2 的不偏估計式為

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} 。 \qquad (2\text{-}2)$$

成長率與波動率估計（Estimation of Growth Rate and Volatility）

本小節提供估計幾何布朗運動的模型參數－成長率與波動率的一種簡便的方法。幾何布朗運動的動態行為服從了以下的隨機微分方程式：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t 。 \qquad (2\text{-}3)$$

它的離散形式為

$$\Delta S_{t_i} \approx \mu S_{t_i} \Delta t + \sigma S_{t_i} \sqrt{\Delta t}\, \varepsilon_{t_i},\ \varepsilon_{t_i} \sim \mathcal{N}(0,1),\ i.i.d., \quad (2\text{-}4)$$

現在定義「標準化報酬率」（standardized return）成為互相獨立的常態變數如下：

$$\frac{\Delta S_{t_i}}{S_{t_i}\sqrt{\Delta t}} \sim \mathcal{N}\left(\mu\sqrt{\Delta t},\ \sigma^2\right)。 \quad (2\text{-}5)$$

從上式可以觀察到，母體參數 μ 與 σ^2 分別出現在資料的平均值與變異數中，因此，運用估計式（2-1）與（2-2）就可以把母體參數估出來了。

根據式（2-5），標準化報酬率的樣本平均是 $\mu\sqrt{\Delta t}$。假設樣本資料的個數大小是 N，兩相鄰樣本的資料期間是 Δt，所有資料的期間是 $T = N\Delta t$，則母體成長率 μ 的估計式即為

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\Delta S_{t_i}}{S_{t_i}} \quad (2\text{-}6)$$

如果進一步用對數報酬率 $\ln\frac{\Delta S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}$ 來逼近相對報酬率 $\frac{\Delta S_{t_i}}{S_{t_i}}$，則上面的估計式又可簡化為

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\Delta S_{t_i}}{S_{t_i}} \\ &= \frac{1}{T}\ln\frac{S_T}{S_0} \\ &\approx \frac{1}{T}\ln\frac{S_T - S_0}{S_0}\end{aligned}$$

此外，標準化報酬率 $\left[\dfrac{\Delta S_{t_i}}{S_{ti}\sqrt{\Delta t}}\right]_{i=0,1,2\ldots,N-1}$ 的變異數恰好是母體波動率 σ 的平方。根據式（2-2），標準化報酬率的樣本標準差即成為波動率的一個估計式，

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=0}^{N-1}\left[\frac{\Delta S_{t_i}}{S_{t_i}\sqrt{\Delta t}} - \mu\sqrt{\Delta t}\right]^2}, \qquad (2\text{-}7)$$

此估計量稱作「歷史波動率」（historical volatility）。

有幾件事項是值得注意的：

1. 在推導過程之初，使用了對隨機微分方程式（2-3）的離散化，見式（2-4），然後才進行估計式的討論。離散的誤差大小當然會影響對母體參數估計的精確程度。不難想見的是，當單位離散時間 Δt 很小的時候，隨機微分方程式的離散誤差也會變小。因此，這裡所提供的估計式，應該使用在樣本數據資料比較密集的情形之下，金融上稱為高頻（high frequency）資料。
2. 這些估計式都包含了單位離散時間 Δt，當 Δt 是以年為單位，則估計量如成長率和標準差稱之為年化成長率（growth rate per annum）和年化標準差（volatility per annum 或 annualized volatility）。若 Δt 是以日為單位，則稱之為日化成長率和日化標準差。

第三節　時間序列（Time Series）

第四章第二節討論了使用點估計的辦法，進行訂價模型的參數推估，其中主要是針對 Black-Scholes 模型中的成長率 μ 與標準差 σ。