第 1 章

対称群と一般線形群の表現

表現論とは群や多元環をベクトル空間への作用を通して研究する分野である。第 2 章では最も古典的な有限群の表現論の一般論 (Maschke の定理と指標理論, 群環) と対称群と一般線形群の表現について述べる。とくに対称群・一般線形群の表現は対称多項式と深いかかわりを持っている。

なお第 2 章で環は、乗法単位元をもつ必ずしも可換とは限らない環を指すとする。また、単に加群といったら環上の左加群を指しているとする。

本章は [?],[?],[?],[?],[?],[?],[?],[?],[?] をまとめた内容になっている。

1.1 有限群の表現論

1.1.1 既約表現と Maschke の定理

定義 1.1.1.1. G を群、V をベクトル空間とする。群準同型 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ が与えられたとき、(ρ, V) を G の表現といい V を表現空間という。ρ や V のことを表現ということもある。

以下、本節ではベクトル空間と言ったら複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間を指すものとし、群と言ったら有限群を指すものとする。

例 1.1.1.2. G を群、$V = \mathbb{C}$ とする。$\rho : G \to \mathrm{GL}(V) = \mathbb{C}^\times$ を、すべての $g \in G$ に対して $\rho(g) = 1$ とすると ρ は表現になる。これを自明な表現という

例 1.1.1.3. $G = \mathfrak{S}_n$, $V = \mathbb{C}^n$ とする。$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ を $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\rho(\sigma)(a_1, \cdots, a_n) = (a_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, a_{\sigma^{-1}(b)})$$

とすると ρ は表現になる。

例 1.1.1.4. G を群、$\mathbb{C}[G]$ を G の元を基底にもつ自由ベクトル空間とする。$\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}[G])$ を $g \in G$ に対して

$$\rho(g)\left(\sum_{x \in G} a_x x\right) = \sum_{x \in G} a_x g x$$

によって定めるとこれは表現になる。これを G の正則表現という

文脈から明らかな場合や特に明示する必要がないとき、$\rho(g)x$ のことをたんに gx と書く。表現論の基本的

な問題は、G の考えうるあらゆる作用を分類することである。表現の分類の基準となるのは、次の定義である。

定義 1.1.1.5. (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) を G の表現とする。線形写像 $\varphi : V_1 \to V_2$ が

$$\rho_2(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho_1(g), \quad \text{for all } g \in G$$

をみたすとき、φ を G 線形写像という。G 線形写像の全体を $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ と書く。

定義 1.1.1.6. G の表現 (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) の間に同型な G 線形写像があるとき、(ρ_1, V_1) と (ρ_2, V_2) 同値な表現であるといい、

$$\rho_1 \simeq \rho_2$$

と書く。

表現の同値は同値関係になる。したがって表現の分類はその同値類を求めることと言い換えられる。いきなりすべての表現を考えるのは難しいのでまずは「小さい表現」を考えたい。そのために、与えられた表現よりも小さい表現とは何かを定義する。

定義 1.1.1.7. (ρ, V) を G の表現とする。V の部分空間 W が G 不変であるとは

$$\rho(g)W \subset W, \qquad \text{for all } g \in G$$

が成り立つことをいう。このとき $\rho' : G \to \mathrm{GL}(W)$ を

$$\rho'(g) = \rho(g)|_W$$

によって定義することができ、表現になる。(ρ', W) を (ρ, V) の部分表現という。定義より、すべての表現 (ρ, V) は 0 と V を部分表現に持っていることに注意。これらを自明な部分表現という。

定義 1.1.1.8. G の表現 (ρ, V) が既約であるとは、V が非自明な部分表現を持たないことをいう。

例 1.1.1.9. $f : V \to W$ が G 線形写像であるなら $\ker f \subset V$, $\mathrm{Im}\ f \subset W$ はともに G 不変部分空間である。

例 1.1.1.10. すべての 1 次元表現は既約である。実際 1 次元のベクトル空間 V の部分空間は 0 と V のみである。

例 1.1.1.11. 例 1.1.1.3 の表現を考える。

$$W = \{\, (a_1, \cdots, a_n) \in V \mid a_1 + \cdots + a_n = 0 \,\}$$

とすると、W は G 不変である。

$$v = (1, 1, \cdots, 1) \in V$$

とし $U = \langle\, v \,\rangle$ とおくと

$$\rho(g)v = v$$

であるから U も G 不変部分空間で、自明な表現と同値である。例 1.1.1.10 より U は既約である。

与えられた表現から新しい表現を作る方法について解説する。

定義 1.1.1.12. (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) を G の表現とする。

- $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V_1 \oplus V_2)$ を

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(x, y) = (\rho_1(x), \rho_2(y))$$

で定義する。これを ρ_1 と ρ_2 の直和という。
- $\rho_1 \otimes \rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V_1 \otimes V_2)$ を

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(x \otimes y) = \rho_1(x) \otimes \rho_2(y)$$

で定義する。これを ρ_1 と ρ_2 の (内部) テンソル積という。
- $\rho_1^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ を

$$\rho_1^*(g)(f) = f \circ (\rho_1(g^{-1}))$$

で定義する。これを ρ_1 の反傾表現という。
- (ρ_G, V) を群 G の表現、(ρ_H, W) を群 H の表現とする。このとき $\rho_G \boxtimes \rho_H : G \times H \to GL(V \otimes W)$ を

$$\rho_G \boxtimes \rho_H(g, h)(x \otimes y) = \rho_G(g)(x) \otimes \rho_H(h)(y)$$

で定義する。これを ρ_G と ρ_H の外部テンソル積という。

これらが実際に表現になっていることは容易にわかる。実は、有限群の複素数体上の有限次元表現は既約表現の有限個の直和に同値であることがわかる (系 1.1.1.14)。すなわち、表現の分類を考える上では本質的に最も小さい表現、既約表現のみを考えれば良いことがわかる。

定理 1.1.1.13 (Maschke の定理)**.** V を G の表現とする。任意の V の G 不変部分空間 W に対して、V の G 不変部分空間 U が存在し

$$V = W \oplus U$$

がなりたつ。

Proof. 証明のポイントは W への G 不変な射影を構成することである。$p : V \to W$ を G 不変とは限らない何らかの射影とする。

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} hp(h^{-1}x)$$

と定めると、f は G 線形な W への射影となる。実際任意の $g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} f(gx) &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} hp(h^{-1}gx) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} gkp(k^{-1}x) \qquad \text{where } k = g^{-1}h \\ &= gf(x) \end{aligned}$$

より G 線形性は示された。また

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gp(g^{-1}x)\right) \\ &= \frac{1}{|G|^2} \sum_{g, h \in G} ghp(h^{-1}p(g^{-1}x)) \end{aligned}$$

ここで、$p: V \to W$ は射影で W は G 不変であるから $p(h^{-1}p(g^{-1}x)) = h^{-1}p(g^{-1}x)$ ゆえに

$$f^2(x) = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g,h \in G} gp(g^{-1}x) = f(x)$$

$f(W) \subset W$ であり、任意の W の元 x に対して

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gp(g^{-1}x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gg^{-1}x = x$$

であるから f は W への射影である。したがって

$$V = \mathrm{Im}\ f \oplus \ker f = W \oplus \ker f$$

が成り立つが、f は G 線形なので $\ker f$ は G 不変部分空間である (例 1.1.1.9)。 □

系 1.1.1.14. V を G の表現とすると、既約表現 $W_1, \cdots, W_r$ が存在して

$$V \simeq W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$$

が表現の同値として成り立つ。このことを G の表現の完全可約性という。

Proof. $\dim_{\mathbb{C}} V$ に関する帰納法で示す。$\dim_{\mathbb{C}} V = 1$ なら V は既約であるからよい。$\dim_{\mathbb{C}} V > 1$ で V は可約であるとする。このとき V は非自明な部分表現 V_1 をもつが、定理 1.1.1.13 より部分表現 U_1 で

$$V = V_1 \oplus U_1$$

となるものが存在する。$\dim_{\mathbb{C}} V_1, \dim_{\mathbb{C}} U_1 < \dim_{\mathbb{C}} V$ であるから帰納法の仮定により、

$$\begin{aligned} V_1 &= W_1 \oplus \cdots \oplus W_{s_1}, \\ U_1 &= W_{s+1} \oplus \cdots \oplus W_r, \qquad \text{各 } W_i \text{ は既約} \end{aligned}$$

と既約分解できる。したがって V も既約分解される。 □

注意 1.1.1.15. 定理 1.1.1.13 は標数が群の位数と互いに素な任意の体上で成立する。実際証明中で $|G|$ で割る操作があるが、それ以外体に依存する議論はしていない。しかし G の位数が無限の場合は成り立たない。例えば無限巡回群 $\mathbb{Z}$ の表現として

$$n \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える。$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有空間 $V(1)$ は $\mathbb{Z}$ 不変だが、$\mathbb{Z}$ 不変な補空間をもたない。

ただし定理 1.1.1.13 の証明は V が無限次元であっても通用する[*1]。しかし系 1.1.1.14 の証明は次元に関する帰納法を用いているので無限次元では通用しない。「有限個」の既約表現に分解できるということがポイントである。

[*1] 選択公理により、無限次元ベクトル空間においても任意の部分空間に対する補空間が存在し、それにより射影が得られる。

1.1.2　有限群の表現に対する指標

次に既約表現の分類をする上で鍵となる指標の概念を導入する。

定義 1.1.2.1. (ρ, V) を G の表現とする。$\chi_V : G \to \mathbb{C}$ を

$$\chi_V(g) = \mathrm{tr}\rho(g)$$

で定め、これを V の指標という。

本節では指標の直交関係 (定理 1.1.2.16) を示すことが目標である。指標は類関数と呼ばれる群上の関数になっており、類関数のなすベクトル空間に特別な内積を入れるとこの内積に関して指標が正規直交基底をなす、というのが主張である。この系として、

- 既約表現の個数は共役類の個数に等しい
- 既約表現の分類は既約指標の分類に帰着される
- 既約表現の次元に関する公式

といったさまざまな有用な事実が導かれる。

表現の各種の演算と指標との関係を見ておく

命題 1.1.2.2. V_1, V_2 を G の表現とする。

(i) $\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_1 + \chi_2$

(ii) $\chi_{V_1 \otimes V_2} = \chi_1 \chi_2$

(iii) $\chi_{V_1^*} = \overline{\chi_1}$

が成り立つ

Proof. (i) $\mathrm{tr}(A \oplus B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ より従う

(ii) $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$ より従う

(iii) $\rho^*(g) =^t \rho(g^{-1})$ であるから、$\mathrm{tr}(\rho^*(g)) = \mathrm{tr}({}^t\rho(g^{-1})) = \mathrm{tr}(\rho(g^{-1}))$ となる。ここで、G は有限群であるから $\rho(g)$ は有限位数、したがってユニタリ行列である。よって $\rho(g)$ の固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ はすべて絶対値が 1 なので

$$\mathrm{tr}(\rho(g^{-1})) = \frac{1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n} = \overline{\lambda_1} + \cdots + \overline{\lambda_n} = \overline{\mathrm{tr}(\rho(g))}$$

□

例 1.1.2.3. 自明な表現の指標は 1 である。

例 1.1.2.4. $G = \mathfrak{S}_n$ として $V = \mathbb{C}^n$ を

$$\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}$$

によって表現とする (例 1.1.1.3)。すなわち $e_1, \cdots, e_n$ を標準基底として

$$\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

である。よって指標を χ_V とすれば

$$\chi_V(\sigma) = \sharp\{\, i \in \{1, \cdots, n\} \mid \sigma(i) = i \,\}$$

となる。V は

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1 + \cdot + x_n = 0 \right\}, \quad W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

として $V = U \oplus W$ と分解されたから、

$$\chi_U = \chi_V - 1$$

例 1.1.2.5. 有限群 G に対してその正則表現 (例 1.1.1.4)$\mathbb{C}[G]$ を考える。任意の $g \in G$ に対して、ある $x \in G$ があって $gx = x$ ならば $g = e$ であるから、g を基底 G に関して行列表示したとき $g \neq e$ ならば対角成分はすべて 0 である。よって指標を R とすると

$$R(g) = \begin{cases} 0 & \text{if } g \neq e \\ |G| & \text{if } g = e \end{cases}$$

例 1.1.2.6. V を G の表現, χ を V の指標とするとき

$$\dim V = \chi(e)$$

である。実際、e の作用を行列表示すれば単位行列になるから、そのトレースは次元に等しい。

指標の直交関係を示そう。まず、いくつか必要な補題を示す。

補題 1.1.2.7 (Schur の補題)**.** V, W を G の既約表現とする。このとき

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} 1 & \text{if } V \simeq W \text{ as } G\text{-representation} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。とくに $V = W$ なら $f \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$ はスカラー写像である。

Proof. 先に後半の主張を示す。$f : V \to V$ を G 線形写像とする。f の固有空間を $V(\lambda)$ とすると、$V(\lambda)$ は G 不変である。実際、$x \in V(\lambda)$, $g \in G$ に対して

$$f(gx) = gf(x) = g(\lambda x) = \lambda gx$$

である。V は既約であり $V(\lambda) \neq 0$ なので $V(\lambda) = V$ よって

$$f = \lambda \mathrm{id}_V$$

である。

前半を示そう。$V \simeq W$ とし $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ を G 同型として固定する。任意の $f \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ について、$\varphi^{-1} \circ f : V \to V$ は G 線形写像であるから前半の結果より

$$\varphi^{-1} \circ f = \lambda \mathrm{id}_V$$

と表される。すなわち

$$f = \lambda\varphi$$

である。したがって $\mathrm{Hom}_G(V, W) = \langle\, \varphi \,\rangle$ となる。

$V \not\simeq W$ の場合、$f \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ について V, W の既約性から

$$\ker f = 0 \text{または} V, \quad \mathrm{Im}\ f = 0 \text{または} W$$

を得るが、$V \neq W$ より $\ker f = V$, $\mathrm{Im}\ f = 0$ すなわち $f = 0$ である。これで示せた。 □

注意 1.1.2.8. 補題 1.1.2.7 の証明より $f \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ は $V \simeq W$ なら 0 または同型、$V \not\simeq W$ なら $f = 0$ であることがわかる。こちらを Schur の補題と呼ぶ場合もある。

補題 1.1.2.9. $(\rho, V), (\theta, W)$ を G の表現とする。$\mathrm{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$ より、$\psi : G \to \mathrm{GL}(\mathrm{Hom}(V, W))$ を

$$\psi(g)(f) = \theta(g) \circ f \circ \rho(g^{-1})$$

とするとこれは表現となり、

$$\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)} = \overline{\chi_V}\chi_W$$

が成り立つ

Proof. 命題 1.1.2.2 より従う。 □

補題 1.1.2.10. V を G の表現とし、V^G を G の固定点の集合とする。すなわち

$$V^G = \{\, v \in V \mid \forall g \in G, \quad gv = v \,\}$$

とする。このとき V^G は V の部分表現であり

$$\dim V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)$$

が成り立つ。とくに V^G は G の自明な表現の直和である。

Proof. $f : V \to V$ を

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gx$$

で定義すると f は射影になる。実際、

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g,h \in G} ghx \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} kx \\ &= f(x) \end{aligned}$$

である。$h \in G$ に対して

$$hf(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hgx = \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} kx = f(x)$$

より $\mathrm{Im}\ f \subset V^G$ である。逆に任意の $x \in V^G$ に対して

$$f(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gx = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} x = x$$

ゆえに $\mathrm{Im}\ f \subset V^G$. 射影のトレースは像の次元に等しい[*2]ので

$$\mathrm{tr}(f) = \dim \mathrm{Im}\ f = V^G$$

だが、

$$\mathrm{tr}(f) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_V(g)$$

よって示せた。V^G が G の自明な表現の直和であることは、V^G の定義そのものである。 □

例 1.1.2.11. $\mathrm{Hom}(V,W)^G = \mathrm{Hom}_G(V,W)$ である。実際 $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ に対して

$$\theta(g)\circ f \circ \rho(g^{-1}) = f \Leftrightarrow \theta(g)\circ f = f \circ \rho(g)$$

である。

定義 1.1.2.12. 関数 $f : G \to \mathbb{C}$ が

$$f(g^{-1}xg) = f(x), \qquad \text{for all } g \in G$$

を満たすとき、f を類関数という。類関数全体を $C(G)$ と置くと $C(G)$ には点ごとに和とスカラー倍を定めて $\mathbb{C}$ ベクトル空間の構造が入る

例 1.1.2.13. トレースの性質 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ より表現の指標は類関数である。

例 1.1.2.14. G の共役類を $C_1, \cdots, C_s$ とし、G 上の関数 ω_i を

$$\omega_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in C_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定めると ω_i は類関数であり $\omega_1, \cdots, \omega_s$ は $C(G)$ の基底である。よって $\dim C(G) = s$ である。

定義 1.1.2.15. $\phi, \psi \in C(G)$ に対して

$$\langle\, \phi, \psi \,\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\phi(g)}\psi(g)$$

によって $\langle\, \cdot, \cdot \,\rangle : C(G)\times C(G) \to \mathbb{C}$ を定めると、これは $C(G)$ 上の Hermite 内積となる。$C(G)$ にはいつもこの内積が入っているものとする。

定理 1.1.2.16 (指標の直交関係)**.** V, W を G の既約表現とする。このとき

$$\langle\, \chi_V, \chi_W \,\rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } V \simeq W \text{ as } G\text{-representation} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。

[*2] 射影は $f^2 = f$ をみたすので固有値は 0 か 1 のどちらかであることから従う。

Proof. 補題 1.1.2.9 と補題 1.1.2.10 および Schur の補題 (補題 1.1.2.7) から

$$\begin{aligned}
\langle \chi_V, \chi_W \rangle &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_V(g)}\chi_W(g) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) \\
&= \dim \mathrm{Hom}(V,W)^G \\
&= \dim \mathrm{Hom}_G(V,W) \\
&= \begin{cases} 1 & \text{if } V \simeq W \text{ as } G\text{-representation} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}$$

□

この定理から直ちに、G の既約指標は有限個であることがわかる。とくに次が成り立つ。

系 1.1.2.17. G の既約指標 $\chi_1, \cdots, \chi_r$ は $C(G)$ の正規直交基底をなす。したがって r は G の共役類の数に等しい。

Proof. 正規直交であることは定理 1.1.2.16 で示されたので、基底であること、すなわち次を示せばよい：

$f \in C(G)$ が $\langle \chi_i, f \rangle = 0$ を各 $i = 1, \cdots, r$ に対して満たせば $f = 0$ である[*3]

f が仮定をみたす類関数であるとする。各 i について χ_i を指標に持つ既約表現を (ρ_i, V_i) とおく。

$$0 = \langle f, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{f(g)}\mathrm{tr}(\rho_i(g))$$

より、写像 $F_i : V_i \to V_i$ を

$$F_i = \sum_{g\in G}\overline{f(g)}\rho_i(g)$$

とおけば $\mathrm{tr}(F_i) = 0$ である。F_i は G 線形写像である。実際 $h \in G, x \in V_i$ として

$$\begin{aligned}
F_i(\rho_i(h)x) &= \sum_{g\in G}\overline{f(g)}\rho_i(gh)x \\
&= \sum_{k\in G}\overline{f(kh^{-1})}\rho_i(k)x, \qquad \text{where } k = gh \\
&= \sum_{k\in G}\overline{f(h^{-1}k)}\rho_i(k)x, \qquad (f \text{ は類関数}) \\
&= \sum_{l\in G}\overline{f(l)}\rho_i(hl)x, \qquad \text{where } l = h^{-1}k \\
&= \rho_i(h)F_i(x)
\end{aligned}$$

よって Schur の補題 (補題 1.1.2.7) よりある $\lambda \in \mathbb{C}$ で

$$F_i = \lambda \mathrm{id}_V$$

[*3] 一般に内積空間 V の正規直交系 $v_1, \cdots, v_n$ が、性質「$w \in V$ がすべての i に対して $\langle w, v_i \rangle = 0$ をみたすならば $w = 0$」をもてば $v_1, \cdots, v_n$ は V の基底になる。実際、任意の $x \in V$ に対して $w = x - (\langle x, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle x, v_n \rangle v_n)$ と置けば $\langle w, v_i \rangle = 0$ をみたすから $w = 0$

となるが、$\mathrm{tr}(F_i)=0$ だったから $\lambda=0$ でなければならない。よって $F_i=0$ であることがわかる。

次に、$\theta : G \to \mathbb{C}[G]$ を G の正則表現とする。ただし $\mathbb{C}[G]$ は G を基底に持つ自由ベクトル空間である。定理 1.1.1.13 より θ はいくつかの既約表現の直和に同値である。よって

$$\theta = \rho_1^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus \rho_r^{\oplus m_2} \tag{1.1}$$

とおく。写像 $F : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ を

$$F = \sum_{g\in G} \overline{f(g)}\theta(g)$$

とすれば (1.1) より

$$F = \left(\sum_{g\in G} \overline{f(g)}\rho_1(g)\right)^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus \left(\sum_{g\in G} \overline{f(g)}\rho_r(g)\right)^{\oplus m_r} = F_1^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus F_r^{\oplus m_r} = 0$$

よって e を G の単位元として

$$0 = F(e) = \sum_{g\in G} \overline{f(g)}g$$

G は一次独立であるからすべての g について $f(g)=0$ □

系 1.1.2.18. $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ を G の表現、対応する指標を χ_1, χ_2 とする。$\rho_1 \simeq \rho_2$ であるための必要十分条件は $\chi_1 = \chi_2$ が成り立つことである。とくに既約表現の同値類も、共役類と同じ数だけ存在する。

Proof. 必要性は明らか。十分性を示す。V_1, V_2 が既約である場合だけを考えれば、既約指標の一次独立性から従う。もし $\chi_1 = \chi_2$ かつ $V_1 \not\simeq V_2$ であったとする。Schur の補題より

$$\langle\, \chi_1, \chi_2 \,\rangle = \dim \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = 0$$

となるが $\chi_1, \chi_2 \neq 0$ なので矛盾である。 □

系 1.1.2.19. V を G の表現, $W_1, \cdots, W_r$ を G の既約表現の同値類の完全代表系とし、それぞれの対応する指標を $\chi, \chi_1, \cdots, \chi_r$ とおく。

$$V \simeq W_1^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus W_r^{\oplus m_r}$$

とすると、

$$m_i = \langle\, \chi, \chi_i \,\rangle = \dim \mathrm{Hom}_G(W_i, V)$$

が成り立つ。m_i を V の W_i に関する重複度という。とくに表現の既約表現への分解は同値の違いを除いて一意的である。

系 1.1.2.20. 指標 χ が既約指標であるための必要十分条件は $\langle\, \chi, \chi \,\rangle = 1$ が成り立つことである

Proof. 必要性は明らか。十分性を示す。$\chi = m_1\chi_1 + \cdots + m_r\chi_r$ とおくと

$$\langle\, \chi, \chi \,\rangle = 1$$

であるならば

$$m_1^2 + \cdots + m_r^2 = 1$$

ゆえにある i で $\chi = \chi_i$ である。 □

系 1.1.2.21 (Schur の補題の逆)**.** V を G の表現とする。$\dim \mathrm{Hom}_G(V,V)=1$ であるならば V は既約表現である。

Proof. χ を V の指標とするとき、補題 1.1.2.9, 補題 1.1.2.10 より条件は

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\chi(g)|^2=1$$

すなわち $\langle\, \chi,\chi\,\rangle=1$ に他ならない。 □

命題 1.1.2.22. $W_1,\cdots,W_r$ を G の既約表現の同値類の完全代表系とする。

$$|G|=(\dim W_1)^2+\cdots+(\dim W_r)^2$$

が成り立つ

Proof. θ を G の正則表現とする。θ の指標を R, W_i の指標を χ_i とおく。系 1.1.2.19 より θ の W_i に関する重複度を m_i とおくと

$$m_i=\langle\, R,\chi_i\,\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{R(g)}\chi_i(g)$$

ここで、

$$R(g)=\mathrm{tr}(\theta(g))=\begin{cases}0 & \text{if } g\neq e\\ |G| & \text{if } g=e\end{cases}$$

であるから

$$m_i=\chi_i(e)=\dim W_i$$

よって

$$R=(\dim W_1)\chi_1+\cdots+(\dim W_r)\chi_r$$

であるから

$$|G|=R(e)=(\dim W_1)^2+\cdots+(\dim W_r)^2$$

□

命題 1.1.2.23. V を G の表現とする。

$$V\simeq\bigoplus_{i=1}^{r}W_i\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_G(W_i,V)$$

が成り立つ。

Proof. $\phi_i : W_i\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_G(W_i,V)\to V$ を

$$\phi_i(x\otimes f)=f(x)$$

を双線形に拡張して定める。

$$\phi(gx\otimes f)=f(gx)=g(f(x))=\phi(x\otimes gf)$$

より ϕ は G 線形である。$\phi=\bigoplus_i\phi_i$ とする。

V の既約分解

$$V = \bigoplus_{i}^{r} (U_1^{(i)} \oplus \cdots \oplus U_{m_i}^{(i)}), \qquad U_j^{(i)} \simeq W_i$$

を固定し、$\theta_j^{(i)} : U_j^{(i)} \to W_i$ を G 同型とする。$\psi_j^{(i)} : U_j^{(i)} \to W_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(W_i, V)$ を

$$\psi_j^{(i)}(x) = \theta_j^{(i)}(x) \otimes \theta_j^{(i)-1}$$

として $\psi = \bigoplus_{i,j} \psi_j^{(i)}$ とする。ψ も G 線形で $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$ がわかるから、次元を比べて同型であることがわかる。 □

例 1.1.2.24. $G = \mathfrak{S}_3$ の既約指標を全て求めよう。G の共役類は

$$e,\ (1,2),\ (1,2,3)$$

で代表される 3 つであるから既約表現も 3 つある。またそれぞれの共役類の濃度は順に

$$1, 3, 2$$

である。

1 を自明な表現とし、sgn を置換の符号とすると、sgn は 1 次元の既約表現である。例 1.1.2.4 の指標を考えよう。

$$\chi_U(g) = \chi_V(g) - 1 = |\{\, x \in \{1,2,3\} \mid gx = x \,\}| - 1$$

であるから

$$\langle\, \chi_U, \chi_U \,\rangle = \frac{1}{6}(1 \cdot 2^2 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot (-1)^2) = \frac{6}{6} = 1$$

よって既約である。まとめると G の既約指標は次の 3 つである

	e	$(1,2)$	$(1,2,3)$
1	1	1	1
sgn	1	-1	1
χ_U	2	0	-1

例 1.1.2.25. $G = \mathfrak{S}_4$ の既約指標を全て求めよう。G の共役類は

$$e,\ (1,2),\ (1,2,3),\ (1,2,3,4),\ (1,2)(3,4)$$

で代表される 5 つであるから既約指標も 5 つある。またそれぞれの共役類の濃度は順に

$$1, 6, 8, 6, 3$$

である。

$\mathfrak{S}_3$ と同様、1 次元の既約表現として 1 と sgn がある。再び例 1.1.2.4 の指標を考える。

$$\chi_U(g) = |\{\, x \in \{1,2,3,4\} \mid gx = x \,\}| - 1$$

であるから

$$\langle\, \chi_U, \chi_U \,\rangle = \frac{1}{24}(1 \cdot 3^2 + 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 0^2 + 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2) = \frac{24}{24} = 1$$

よって既約である。さらに $\mathrm{sgn}^2 = 1$ より

$$\langle\, \chi_U \mathrm{sgn}, \chi_U \mathrm{sgn}\,\rangle = 1$$

であることがわかるので $\chi_U \mathrm{sgn}$ も既約指標である。ここまでをまとめると次の表を得る。

	e	$(1,2)$	$(1,2,3)$	$(1,2,3,4)$	$(1,2)(3,4)$
1	1	1	1	1	1
sgn	1	-1	1	-1	1
χ_U	3	1	0	-1	-1
$\chi_U \mathrm{sgn}$	3	-1	0	1	-1
ψ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

あと 1 つの指標 ψ は直交関係や次元公式を用いることで具体的な作用の考察なしに求めることができる。次元公式より

$$\psi(e) = 24 - (1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2) = 4$$

ゆえに $\psi(e) = 2$ である。直交関係より

$$\begin{cases} 6x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 3x_5 & = & -2 \\ -6x_2 + 8x_3 - 6x_4 + 3x_5 & = & -2 \\ 6x_2 - 6x_4 - 3x_5 & = & -6 \\ 4 + 6x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_4^2 + 3x_5^2 & = & 24 \end{cases}$$

これを解くと

	e	$(1,2)$	$(1,2,3)$	$(1,2,3,4)$	$(1,2)(3,4)$
1	1	1	1	1	1
sgn	1	-1	1	-1	1
χ_U	3	1	0	-1	-1
$\chi_U \mathrm{sgn}$	3	-1	0	1	-1
ψ	2	0	-1	0	2

ψ を指標に持つ既約表現は $\mathfrak{S}_3$ の既約表現からつくることができる。$\mathfrak{S}_3$ の既約表現

$$U' = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

を考える。$\mathfrak{S}_4$ の正規部分群 $N = \{e, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$ を考えると、

$$\mathfrak{S}_4/N \simeq \mathfrak{S}_3$$

となる[*4]。

$$\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_4/N \simeq \mathfrak{S}_3 \to \mathrm{GL}(U')$$

は既約表現になる[*5]が、その指標を ψ' とおくと $\psi' = \psi$ となることが確認できる。

[*4] $\mathfrak{S}_4$ の $X = \{(1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$ への共役作用を考えればよい。

[*5] 一般に全射群準同型と既約表現の合成は、再び既約表現になる。

1.1.3　群環

本節では群環という代数を導入し、環上の加群論を用いた表現論に関するいくつかの命題を証明する。

定義 1.1.3.1. G を群, K を体とする。$K[G]$ を G を基底にもつ K 上の自由ベクトル空間とし、G の積から自然に定まる演算で $K[G]$ に積を入れる。すなわち

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\cdot\left(\sum_{h\in G} b_h h\right)=\sum_{k\in G}\left(\sum_{gh=k} a_g b_h\right)k$$

である。これによって $K[G]$ は K 上の多元環の構造をもつ。これを G の K 上の群環という。

V を G の体 K 上の表現とする。V は自然に $K[G]$ 加群の構造が入り、逆に $K[G]$ 加群は自然に G の表現とみなすことができる。

このとき、

- 部分表現は部分加群
- 表現の直和は加群の直和
- 既約表現は単純加群
- G 線形写像は $K[G]$ 加群の準同型
- 表現の同値は加群の同型

にそれぞれ対応することがわかる。ここで、A 加群 M が単純であるとは、M が非自明な部分加群をもたないことをいう。また、表現のテンソル積は $K[G]$ 加群としてのテンソル積ではないことに注意。V, W を $K[G]$ 加群とするとき、V と W の表現のテンソル積は $V\otimes_K W$ に $g(x\otimes y)=gx\otimes gy$ による作用を入れたものである。

である。環 A を A 加群とみなしたとき、A の部分加群とは A の左イデアルにほかならず、A に含まれる単純 A 加群は A の極小左イデアルである。したがって、G の有限次元既約表現を求めることは環 $\mathbb{C}[G]$ の極小左イデアルを求めることと同等である。単純性に関連して次の定義をする。

定義 1.1.3.2. A 加群 M が半単純であるとは、任意の M の部分加群が M の直和因子であることをいう。また、任意の A 加群が半単純であるとき、A を半単純環という。

定理 1.1.3.3 (Maschke の定理)**.** $K[G]$ が半単純環であるための必要十分条件は、$|G|$ が $p=\mathrm{ch}\,K$ で割り切れないことである。

Proof. 十分性は定理 1.1.1.13 の証明とまったく同様である。必要性を示す。$|G|$ が p がの倍数であるとする。Wedderburn の構造定理 (付録参照) より $K[G]$ の Jacobson 根基が 0 でないことを示せばよい。$K[G]$ の元 m を

$$m=\sum_{g\in G} g$$

とおくと、任意の $x\in K[G]$ に対して $xm=mx$ であり、さらに

$$m^2=\sum_{g,h\in G} gh=|G|m=0$$

であるから

$$(1-xm)(1+xm)=1-x^2m^2=1$$

よって $1-xm$ は単元であるから $m\in\mathrm{Jac}(K[G])$ である。 $\square$

$\mathbb{C}$ の標数は 0 であるから定理 1.1.1.13 は定理 1.1.3.3 の特別な場合である。しかし系 1.1.1.14 は一般には成り立たない。考えている表現が有限次元の場合において成り立つことに注意せよ。

以下、$K=\mathbb{C}$ の場合を考える。命題 1.1.2.22 の証明より、G の正則表現は G のすべての有限次元既約表現をその次元の数だけ直和因子にもっている。このことを群環のことばで述べると、$\mathbb{C}[G]$ は $\mathbb{C}[G]$ 加群として極小左イデアルの直和

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[G]=&L_1\oplus\cdots\oplus L_s,\quad s=m_1+\cdots+m_r\\&L_1,\cdots,L_{m_1}\simeq W_1\\&L_{m_1+1},\cdots,L_{m_1+m_2}\simeq W_2\\&\qquad\vdots\\&L_{m_1+\cdots+m_{r-1}+1},\cdots,L_{m_1+\cdots+m_{r-1}+m_r}\simeq W_r\end{aligned}$$

と分解できるということである。ここで $W_1,\cdots,W_r$ は G の既約表現から定まる $\mathbb{C}[G]$ 加群であり、$m_i=\dim_{\mathbb{C}}W_i$ である。

定義 1.1.3.4. A を環とする。べき等元 $e\in A$ $(e^2=e)$ が原始的であるとは、

$$e=e_1+e_2,\quad e_1^2=e_1,\quad e_2^2=e_2,\quad e_1e_2=0\implies e_1=0\text{または}e_2=0$$

を満たすことをいう。

命題 1.1.3.5. A を半単純環, $e\in A$ を単元でないとする。Ae が極小左イデアルとなるための必要十分条件は e が原始的べき等元となることである。

Proof. Ae が極小左イデアルであるとする。

$$e=e_1+e_2,\quad e_1^2=e_1,\quad e_2^2=e_2,\quad e_1e_2=0$$

となる $e_1,e_2\in A$ が存在したとすると、

$$e_1=e_1^2=e_1^2+e_1e_2=e_1e\in Ae$$

同様に $e_2\in Ae$ である。よって Ae の極小性から $Ae_1=Ae$ or 0, $Ae_2=Ae$ or 0 である。$Ae_1=Ae$ であったとしよう。このとき

$$e=ce_1,\quad c\in A$$

とおくことができるから

$$e_2=e-e_1=(c-1)e_1$$

よって

$$e_2=e_2^2=(c-1)e_1e_2=0$$

$Ae_2=A_e$ ならば同様の議論で $e_1=0$ となる。

逆に e が原始的べき等元であるとする。$I \subsetneq Ae$ を左イデアルとする。A は半単純であるから

$$Ae = I \oplus J$$

となる左イデアル J が存在する。よって

$$e = x + y$$

となる $x \in I, y \in J$ をとることができる。$x \in Ae$ より

$$x = ce, \quad c \in A$$

とおくと $xe = ce^2 = ce = x$。よって

$$x = xe = x^2 + xy$$

だが、$xy \in J$ かつ $I \cap J = 0$ より $xy = 0$。同様に $yx = 0$ である。したがって $x^2 = x$, $y^2 = y$ も導かれる。e は原始的なので $x = 0$ または $y = 0$ が成り立つが、これより $I = 0$ または $J = 0$ が従う。

実際、$x = 0$ であったとして $m \in I$ を $m = ae$ とおけば

$$m = a(x + y) = ay \in J$$

$I \cap J = 0$ より $m = 0$ □

したがって G の既約表現を求める問題は $\mathbb{C}[G]$ の原始的べき等元を求める問題に帰着された。具体的に原始的べき等元を見つけるのは難しいが、対称群の場合は Young 図形とのきれいな対応により構成することができる。次節にそのことを解説する。

最後にべき等元 e を用いて Ae の形に書ける加群の間の準同型について考察する。

命題 1.1.3.6. A を環とする。$e, f \in A$ をべき等元とするとき、Abel 群の同型として

$$\mathrm{Hom}_A(Ae, Af) \simeq eAf$$

が成り立つ。

Proof. $\phi \in \mathrm{Hom}_A(Ae, Af)$ に対して、

$$\phi(e) = af$$

とおくと、e はべき等元であるから

$$\phi(e) = \phi(e^2) = e\phi(e) = eaf$$

よって $\phi \mapsto eaf$ を考えればこれが同型を与える。 □

注意 1.1.3.7. 証明からわかる通り、A が体 K 上の多元環である場合 e はべき等元である必要はなく、スカラー倍のずれが許容される。すなわち

$$e^2 = \lambda e, \qquad \lambda \in K$$

となる e に対しても同様のことが成り立つ。

1.1.4 誘導表現

部分群の表現が与えられたとき、それを元の群に拡張する方法について解説する。

定義 1.1.4.1. G を群、H を G の部分群とする。W を H の表現とするとき、

$$V = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$$

は左 $\mathbb{C}[G]$ 加群の構造をもつ[*6]。V を W が誘導する G の表現といい

$$V = \mathrm{Ind}_H^G W$$

と書く。

誘導表現は次の普遍性で特徴づけることができる。

定理 1.1.4.2 (誘導表現の普遍性)**.** H を群 G の部分群、W を H の表現とする。このとき G の表現 V と H 線形写像 $\iota : W \to V$ が一意的に存在して、次の性質をもつ：

> 任意の G の表現 U と H 線形写像 $f : W \to U$ が与えられたとき、G 線形写像 $\overline{f} : V \to U$ が一意的に存在して
>
> $$f = \overline{f} \circ \iota$$
>
> が成り立つ

Proof. 定義 1.1.4.1 の V がこの性質を持つことを示す。$\iota : W \to V$ を

$$\iota(x) = 1 \otimes x$$

で定めれば、($\mathbb{C}[H]$ 上のテンソル積なので)ι は H 線形写像である。$f : W \to U$ を H 線形写像とする。$\overline{f} : V \to U$ を

$$\overline{f}(g \otimes x) = gf(x)$$

を双線形に拡張して得られる写像とすれば、より、

$$\overline{f}(g(\alpha \otimes x)) = \overline{f}(g\alpha \otimes x) = g\alpha f(x) = g\overline{f}(\alpha \otimes x)$$

$\overline{f}$ は G 線形写像であり $f = \overline{f} \circ \iota$ を満たす。$\overline{f}$ の一意性を示す。G 線形写像 $f' : W \to U$ も $f = f' \circ \iota$ を満たしたとする。G 線形性から

$$f'(g \otimes x) = gf'(1 \otimes x) = gf'(\iota(x)) = gf(x) = \overline{f}(g \otimes x)$$

である。

最後にこの性質をもつ V が一意的であることを示す。G の表現 V' と H 線形写像 $\iota' : W \to V'$ がこの性質を満たしたとする。ι の普遍性を用いれば、$\bar{\iota} : V \to V'$ が存在して $\iota' = \bar{\iota} \circ \iota$ が成り立つ。また、ι' の普遍性を

[*6] ここで $\mathbb{C}[G]$ は右からの積で右 $\mathbb{C}[H]$ 加群とみなしていることに注意。

用いれば $\overline{\iota'} : V' \to V$ が存在して $\iota = \overline{\iota'} \circ \iota'$ が成り立つ。

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\iota'"'] & V \arrow[dl, dotted, shift left, "\overline{\iota'}"] \\ V' \arrow[ur, dotted, shift left, "\overline{\iota}"] & \end{tikzcd}$$

$\overline{\iota}, \overline{\iota'}$ が互いに逆の写像であることを示そう。$\overline{\iota'} \circ \overline{\iota} : V \to V$ は G 線形写像であり、

$$(\overline{\iota'} \circ \overline{\iota}) \circ \iota = \overline{\iota'} \circ (\overline{\iota} \circ \iota) = \overline{\iota'} \circ \iota' = \iota$$

を満たす。しかし、$\mathrm{id}_V \circ \iota = \iota$ であるから、ι の普遍性から

$$\overline{\iota'} \circ \overline{\iota} = \mathrm{id}_V$$

でなければならない。同様に $\overline{\iota} \circ \overline{\iota'} = \mathrm{id}_{V'}$ である。 □

定義 1.1.4.1 は加群論的で簡単だが、どのような作用を考えているのかがわかりにくい。そこで線形代数的な誘導表現の定義もみておく。

定義 1.1.4.3. V を G の表現、W を V の部分空間で H の表現であるとする。R を G/H の完全代表系とする。このとき V が W から誘導されているとは

$$V = \bigoplus_{\sigma \in R} \sigma W$$

が成り立つことをいう。

$\sigma^{-1}\tau \in H$ ならば $\sigma W = \tau W$ が成り立つのでこの定義は R の取り方によらない。W の基底を $e_1, \cdots, e_n$ として、$R = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_r\}$ とすれば

$$V = \mathbb{C}\sigma_1 e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\sigma_1 e_n \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\sigma_r e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\sigma_r e_n$$

G の元 g は G/H に左からの積で置換作用する。すなわち、各 σ_i に対して、

$$g\sigma_i = \sigma_j h$$

となる $\sigma_j \in R$ と $h \in H$ が存在する。よってこのとき、$g\sigma_i W = \sigma_j W$、とくに

$$g\sigma_i e_k = \sigma_j h e_k \quad \in \sigma_j W, \qquad \text{for all } k = 1, \cdots, n \tag{1.2}$$

となる。g の V への作用は G/H への置換作用と H の W への作用を組み合わせたようなものである。また式 (1.2) から次が従う。

命題 1.1.4.4 (誘導表現の指標)**.** $V = \mathrm{Ind}_H^G W$ のとき、

$$\chi_V(g) = \sum_{\substack{\sigma_i \in R \\ \sigma_i^{-1} g \sigma_i \in H}} \chi_W(\sigma_i^{-1} g \sigma_i) = \frac{1}{H} \sum_{\substack{\sigma \in G \\ \sigma^{-1} g \sigma \in H}} \chi_W(\sigma^{-1} g \sigma) \tag{1.3}$$

が成り立つ。

Proof. 式 (1.2) より、g の作用の対角成分を考えるうえで $\sigma_i = \sigma_j$ すなわち $i = j$ となる部分だけ考えればよいことがわかる。このとき $\sigma_i^{-1} g \sigma_i \in H$ であり、

$$h = \sigma_i^{-1} g \sigma_i$$

であるから、あとは h の W への作用の対角成分の和をとればよいので前半の式がでる。後半については指標が類関数であること、$|\sigma H| = |H|$ であることから従う。 □

定義 1.1.4.3 が定義 1.1.4.1 と一致することを確かめておく。定義 1.1.4.3 の V が普遍性 (定理 1.1.4.2) を満たすことを示せば、一意性から従う。

$V = \bigoplus_{\sigma \in R} \sigma W$ において、R として単位元 e を含むものをとり、W を eW と同一視する。この同一視を ι とすれば ι は H 線形写像である。U を任意の G の表現とし、$f : W \to U$ を H 線形写像とする。このとき $\overline{f} : V \to U$ を

$$\overline{f}(\sigma_i x) = \sigma_i f(x)$$

によって定義すると、$\overline{f}$ は G 線形である。実際 $g \in G$ に対して、$g\sigma_i = \tau_j h$ となる $\sigma_j \in R, h \in H$ をとれば

$$\overline{f}(g\sigma_i x) = \overline{f}(\sigma_j h x) = \sigma_j f(hx) = \sigma_j h f(x) = g\sigma_i f(x)$$

また、

$$\overline{f} \circ \iota(x) = \overline{f}(ex) = ef(x) = f(x)$$

例 1.1.4.5. H を G の部分群とする。$X = G/H = \{H, g_1 H, \cdots, g_n H\}$ とする。G の X への左からの積による置換表現を考える。すなわち V を X を基底に持つ自由ベクトル空間として、G の左からの積を線形に拡張して V を G の表現とみなす。V の部分空間 W を

$$W = \mathbb{C}H \subset V$$

とすれば W は H の自明な表現であり、$R = \{e, g_1, \cdots, e_n\}$ とすれば

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}g_1 H \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}g_n H \\ &= \bigoplus_{\sigma \in R} \sigma \mathbb{C}H \\ &= \bigoplus_{\sigma \in R} \sigma W \end{aligned}$$

であるから $V = \mathrm{Ind}_H^G W$ である。すなわち、H の自明な表現から誘導される G の表現は G/H への置換表現である。

1.2 対称群の表現論

1.2.1 対称群の既約表現

前節までに述べたことは有限群の表現論の一般論であり、具体的な群が与えられたときその表現を求める手法を提供しているわけではない。そこでこの節では対称群を例に取り上げ、既約表現の分類を行う。

$\mathcal{P}_n$ を大きさ n の Young 図形のなす集合とする。既約表現の同値類は共役類の数だけあったが、$G = \mathfrak{S}_n$ の共役類は置換の型によって $\mathcal{P}_n$ と 1 対 1 に対応することが知られている。さらに G の既約表現は $\mathcal{P}_n$ から自然に作ることができる。

定義 1.2.1.1. $\lambda \in \mathcal{P}_n$ の各箱に 1 から n の各数字を重複なく書き入れた図を形 λ の標準タブローという。T を標準タブローとし、T の i 行目の箱に書かれている数字の集合を $H_i(T)$, 同様に T の j 列目の箱に書かれている数字の集合を $V_j(T)$ とする。

定義 1.2.1.2. T を形 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_s)$ の標準タブローとする。$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して、σT を各数字を σ によって置換してできる標準タブローとする。

- 各 i に対して $H_i(\sigma T) = H_i(T)$ が成り立つなら σ を T の水平置換という。T の水平置換の全体は G の部分群をなす。これを $\mathcal{H}_T$ と書き、T の水平置換群という。$\mathcal{H}_T = \mathfrak{S}(H_1(T)) \times \cdots \times \mathfrak{S}(H_s(T))$ である。
- 各 j に対して $V_j(\sigma T) = V_j(T)$ が成り立つなら σ を T の垂直置換という。T の垂直置換の全体は G の部分群をなす。これを $\mathcal{V}_T$ と書き、T の垂直置換群という。$\mathcal{V}_T = \mathfrak{S}(V_1(T)) \times \cdots \times \mathfrak{S}(V_{\lambda_1}(T))$ である。

例 1.2.1.3. 形 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \\ \cline{1-2}\end{array}$ の標準タブロー $T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 5 & 1 \\ \hline 3 & 2 \\ \cline{1-2}\end{array}$ に対して、

$$\mathcal{H}_T = \mathfrak{S}(\{1,4,5\}) \times \mathfrak{S}(\{2,3\}), \qquad \mathcal{V}_T = \mathfrak{S}(\{3,4\}) \times \mathfrak{S}(\{2,5\})$$

である。

例 1.2.1.4. Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_s) \in \mathcal{P}_n$ に対して、λ の第 1 行に $1, 2, \cdots, \lambda_1$ を、λ の第 2 行に $\lambda_1 + 1, \lambda_1 + 2, \cdots, \lambda_1 + \lambda_2$ を、と続けてできる標準タブローを λ から定まる自然なタブローという。

例 1.2.1.3 の Young 図形の自然なタブローは $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$

水平置換 σ が垂直置換でもあるならば、σ の引き起こす各 $H_i(T)$ 上の置換は恒等置換でなければならない。したがって $\sigma = e$ である。よって $\mathcal{H}_T \cap \mathcal{V}_T = \{e\}$ が成り立つ。また $\mathcal{H}_{gT} = g\mathcal{H}_T g^{-1}$, $\mathcal{V}_{gT} = g\mathcal{V}_T g^{-1}$ が成り立つ。実際

$$\begin{aligned} \sigma \in \mathcal{H}_{gT} &\Leftrightarrow \sigma g T = gT \\ &\Leftrightarrow g^{-1}\sigma g T = T \\ &\Leftrightarrow \sigma \in g\mathcal{H}_T g^{-1} \end{aligned}$$

群環 $\mathbb{C}[G]$ の元 a_T, b_T, c_T を

$$a_T = \sum_{\sigma \in \mathcal{H}_T} \sigma, \qquad b_T = \sum_{\tau \in \mathcal{V}_T} \mathrm{sgn}(\tau)\tau, \qquad c_T = a_T b_T = \sum_{\sigma \in \mathcal{H}_T, \tau \in \mathcal{V}_T} \mathrm{sgn}(\tau)\sigma\tau$$

によって定める。c_T を Young 対称子という。c_T は 0 でない。実際 c_T の和に現れる $\sigma\tau$ はすべて異なる元である。なぜならもし $\sigma\tau = \sigma'\tau'$, ($\sigma, \sigma' \in \mathcal{H}_T, \quad \tau, \tau' \in \mathcal{V}_T$) ならば、$\mathcal{H}_T \cap \mathcal{V}_T = e$ より $\sigma = \sigma'$, $\tau = \tau'$ である。

定理 1.2.1.5. $\mathbb{C}[G]$ の左イデアル $\mathbb{C}[G]c_T$ は極小である。

定理 1.2.1.5 を証明しよう。ポイントになるのは次の補題である。

補題 1.2.1.6. $\alpha \in \mathbb{C}[G]$ が

- 任意の $\sigma \in \mathcal{H}_T$ に対して $\sigma\alpha = \alpha$
- 任意の $\tau \in \mathcal{V}_T$ に対して $\alpha\tau = \mathrm{sgn}(\tau)\alpha$

を満たすならば、α は c_T のスカラー倍である。

Proof. $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$ を仮定を満たす元とする。仮定より $\sigma \in \mathcal{H}_T$ に対して

$$\alpha = \sigma^{-1}\alpha = \sum_{g \in G} a_g \sigma^{-1} g = \sum_{g \in G} a_{\sigma g} g$$

よって

$$a_{\sigma g} = a_g \tag{1.4}$$

が成り立つ。また $\tau \in \mathcal{V}_T$ に対しては

$$\alpha = \mathrm{sgn}(\tau)\alpha\tau^{-1} = \sum_{g \in G} \mathrm{sgn}(\tau) a_g g \tau^{-1} = \sum_{g \in G} \mathrm{sgn}(\tau) a_{g\tau} g$$

より

$$a_{g\tau} = \mathrm{sgn}(\tau) a_g \tag{1.5}$$

が成り立つ。(1.4),(1.5) より $\sigma\tau \in \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T$ に対して

$$a_{\sigma\tau} = \mathrm{sgn}(\tau) a_e$$

であることがわかる。よって

$$g \notin \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T \implies a_g = 0 \tag{1.6}$$

を示せば $\alpha = a_e c_T$ となって証明が完了する。g に関する条件 $g \notin \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T$ について次の補題を示す。

補題 1.2.1.7. $g \in G$ について、T の同じ行にある任意の数字 i, j(ただし $i \neq j$) が gT では異なる列にあるならば $g \in \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T$ が成り立つ。

Proof. T の Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ の高さ r に関する帰納法で示す。$r = 1$ ならば $\mathcal{H}_T = G$ なので明らか。$r > 1$ とする。T の第 1 行にある数字に注目する。仮定から、これらは gT でそれぞれ異なる列に入っ

ているので、適当に gT に垂直置換 $\nu \in \mathcal{V}_{gT}$ を施すことで νgT においても第 1 行に入っているようにできる。

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 7 & 8 & 2 \\ \hline 3 & 5 & 4 \\ \hline 1 & 6 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} \quad \rightarrow \quad gT = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 8 \\ \hline 6 & 7 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} \quad \rightarrow \quad \nu gT = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 7 & 8 \\ \hline 5 & 1 & 4 \\ \hline 6 & 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}$$

すなわち

$$H_1(T) = H_1(\nu gT)$$

が成り立つようにできる。このとき νg は T の第 1 行への水平置換 σ_1 と、T の第 2 行以下を取り出したタブロー T' への置換 g' との積

$$\nu g = \sigma_1 g'$$

で表される。g' は T' への置換とみなせば主張の条件をみたすから、帰納法の仮定により

$$g' \in \mathcal{H}_{T'}\mathcal{V}_{T'}$$

である。$\mathcal{H}_{T'} \subset \mathcal{H}_T, \mathcal{V}_{T'} \subset \mathcal{V}_T$ であるから

$$g' = \sigma_2\tau_2, \qquad \sigma_2 \in \mathcal{H}_T,\ \tau_2 \in \mathcal{V}_T$$

と書ける。ここで $\nu \in \mathcal{V}_{gT} = g\mathcal{V}_T g^{-1}$ であるから

$$\nu = g\tau_3 g^{-1}, \qquad \tau_3 \in \mathcal{V}_T$$

と表せる。よって

$$g = \sigma_1 g' \tau_3^{-1} = \sigma_1\sigma_2\tau_2\tau_3^{-1}$$

となるので示せた。 □

補題 1.2.1.6 の証明に戻ろう。(1.6) を示せばよいのであった。$g \notin \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T$ であるのなら、上記の補題から T の同じ行にある異なる数字 i, j であって gT では同じ列にあるものが存在する。よって $\sigma = (i, j)$ とすれば $\sigma \in \mathcal{H}_T \cap \mathcal{V}_{gT}$ である。$\mathcal{V}_{gT} = g\mathcal{V}_T g^{-1}$ より $\sigma = g\tau g^{-1}$ とおけば (1.4), (1.5) より

$$a_g = a_{\sigma g} = a_{g\tau} = \mathrm{sgn}(\tau)a_g = -a_g$$

よって $a_g = 0$ となる。 □

命題 1.2.1.8.

$$c_T^2 = \frac{n!}{\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[G]c_T)} c_T$$

が成り立つ。

Proof. $\sigma \in \mathcal{H}_T, \tau \in \mathcal{V}_T$ に対して

$$\sigma a_T = \sigma \sum_{g \in \mathcal{H}_T} g = \sum_{g \in \mathcal{H}_T} \sigma g = a_T$$

であり、

$$b_T\tau = \sum_{g \in \mathcal{V}_T} \mathrm{sgn}(g) g\tau = \mathrm{sgn}(\tau) b_T$$

であるから、補題 1.2.1.6 よりある $n_T \in \mathbb{C}$ で

$$c_T^2 = n_T c_T$$

となることはわかる。n_T を求めよう。$\mathbb{C}[G]$ 加群の準同型 $\phi : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ を

$$\phi(\alpha) = \alpha c_T$$

によって定める。任意の $g \in G$ に対して、

$$gc_T = g + \sum_{\sigma\tau \in \mathcal{H}_T \mathcal{V}_T \setminus \{e\}} \mathrm{sgn}(\tau) g\sigma\tau$$

となるから、ϕ の対角成分はすべて 1 である。よって

$$\mathrm{tr}(\phi) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G] = n!$$

である。$\mathbb{C}[G]$ は半単純であるから、

$$\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}[G]c_T \oplus W$$

となる左イデアル W をとる。すると

$$\mathbb{C}[G]c_T = \mathbb{C}[G]c_T^2 \oplus Wc_T = \mathbb{C}[G]c_T \oplus Wc_T$$

より $Wc_T = 0$ である。したがって、

$$\begin{aligned} &\phi(\mathbb{C}[G]c_T) \subset \mathbb{C}[G]c_T \\ &\phi(W) = 0 \end{aligned}$$

となることがわかる。よって

$$\mathrm{tr}(\phi) = \mathrm{tr}(\phi|_{\mathbb{C}[G]c_T})$$

である。$\alpha \in \mathbb{C}[G]$ に対して

$$\phi(\alpha c_T) = \alpha\phi(c_T) = \alpha\phi(c_T^2) = n_T \alpha c_T$$

であるから、$\mathbb{C}[G]c_T$ は ϕ の固有値 n_T の固有空間の部分空間である。したがって

$$\mathrm{tr}(\phi|_{\mathbb{C}[G]c_T}) = n_T \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]c_T$$

$c_T \neq 0$ であるから $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]c_T \neq 0$, よって

$$n_T = \frac{n!}{\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]c_T}.$$

□

定理 1.2.1.5 の証明を述べる。

Proof. 系 1.1.2.21 より

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(\mathbb{C}[G]c_T, \mathbb{C}[G]c_T) = 1$$

を示せばよい。命題 1.2.1.6 より c_T は適当にスカラー倍してべき等元になる。よって命題 1.1.3.6 より

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{C}[G]c_T, \mathbb{C}[G]c_T) = c_T\mathbb{C}[G]c_T$$

である。任意の $c_T\alpha c_T \in c_T\mathbb{C}[G]c_T$ は補題 1.2.1.6 の仮定をみたすので

$$c_T\alpha c_T = \mu c_T, \qquad \mu \in \mathbb{C}$$

と書ける。よって $\dim_{\mathbb{C}} c_T\mathbb{C}[G]c_T = 1$ である。 □

Young 対称子の定義において a_T, b_T の積の順序に本質的な違いはない。

命題 1.2.1.9. $b_Ta_T = \tilde{c_T}$ とおくと、$\mathbb{C}[G]\tilde{c_T} \simeq \mathbb{C}[G]c_T$ が成り立つ。

Proof. $\phi : \mathbb{C}[G]a_Tb_T \to \mathbb{C}[G]b_Ta_T$ を

$$\phi(xa_Tb_T) = xa_Tb_Ta_T$$

$\psi : \mathbb{C}[G]b_Ta_T \to \mathbb{C}[G]a_Tb_T$ を

$$\psi(xb_Ta_T) = xb_Ta_Tb_T$$

とすれば

$$\psi(\phi(xa_Tb_T)) = \psi(xa_Tb_Ta_T) = xa_Tb_Ta_Tb_T = n_Txa_Tb_T$$

よって $\psi \circ \phi$ は 0 でないスカラー倍写像なので ϕ は単射、ψ は全射である。命題 1.2.1.8 とまったく同様に $\tilde{c_T}^2 = \tilde{n_T}\tilde{c_T}$ となる 0 でないスカラー $\tilde{n_T}$ が存在することがわかる。よって $\phi \circ \psi$ もスカラー倍写像になるから、ϕ は同型である。 □

命題 1.2.1.10. $\lambda \in \mathcal{P}_n$ とする。T, U を λ に書かれた標準タブローとすると $\mathbb{C}[G]c_T \simeq \mathbb{C}[G]c_U$ である。

Proof. このときある $g \in G$ が存在して $U = gT$ となるから、

$$\mathcal{H}_U = g\mathcal{H}_Tg^{-1}, \qquad \mathcal{V}_U = g\mathcal{V}_Tg^{-1}$$

よって

$$c_U = a_Ub_U = ga_Tg^{-1}gb_Tg^{-1} = gc_Tg^{-1}$$

である。

$$\mathbb{C}[G]c_U = \mathbb{C}[G]gc_Tg^{-1} = \mathbb{C}[G]c_Tg^{-1}$$

であるから、

$$\mathbb{C}[G]c_T \simeq \mathbb{C}[G]c_Tg^{-1}$$

を示せばよい。$\phi : \mathbb{C}[G]c_T \to \mathbb{C}[G]c_Tg^{-1}$ を

$$\phi(\alpha c_T) = \alpha c_Tg^{-1}$$

と置けば ϕ は左 $\mathbb{C}[G]$ 加群の準同型で、g を右から書ける準同型が逆写像を与えるので、同型である。 □

したがって、同じ Young 図形に対しては $\mathbb{C}[G]c_T$ は標準タブロー T の取り方によらず同型である。そこで $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対して、λ の自然なタブロー (例 1.2.1.4) から定まる Young 対称子を c_λ とし、$S_\lambda = \mathbb{C}[G]c_\lambda$ とおく。

次の定理を証明することで、既約表現の分類は完成する。

定理 1.2.1.11. $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$ とする。

$$S_\lambda \simeq S_\mu$$

となるための必要十分条件は $\lambda = \mu$ である。

Proof. 十分性は明らか。必要性を示す。$\lambda \neq \mu$ であるとする。S_λ, S_μ は既約表現なので、Schur の補題 (補題 1.1.2.7) より、

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}(S_\lambda, S_\mu) = 0$$

を証明すればよいが、命題 1.1.3.6 より、

$$\operatorname{Hom}(S_\lambda, S_\mu) = c_\lambda \mathbb{C}[G] c_\mu$$

ゆえに、すべての $g \in G$ に対して

$$c_\lambda g c_\mu = a_\lambda b_\lambda g a_\mu b_\mu = 0$$

が成り立つことを示せばよい。次の補題を用いる。

補題 1.2.1.12. $\mathcal{P}_n$ に辞書式順序を入れ、$\lambda < \mu$ であるとする。λ, μ でその自然なタブローを表すものとする。このとき任意の $g \in G$ に対して、μ の同じ行にある数字 i, j であって $g\lambda$ でも同じ列にあるものが存在する。

Proof. $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_s)$, $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_t)$ とおく。t についての帰納法で示す。

$t = 1$ の場合 $\lambda_1 < \mu_1$ となるから、λ の列数は μ_1 より少ない。よって鳩の巣原理を用いれば $1, 2, \cdots, \mu_1$ のうち、$g\lambda$ の同じ列にあるペアが必ず存在することがわかる。

$t > 1$ とする。$\lambda_1 < \mu_1$ である場合はまったく同様に鳩の巣原理から従う。$\lambda_1 = \mu_1$ かつ、$1, 2, \cdots, \mu_1$ が $g\lambda$ ではすべて異なる列に存在するとする。このとき垂直置換 $\tau \in \mathcal{V}_{g\lambda}$ を施して

$$H_1(\mu) = H_1(\tau g\lambda) = \{1, 2, \cdots, \mu_1\}$$

が成り立つようにできる。そこで、μ, $\tau g\lambda$ の 2 行目以降をとりだしたタブロー μ', $(\tau g\lambda)'$ を考える。すると $(\tau g\lambda)' < \mu'$ であるから帰納法の仮定により μ' の同じ行にある数字 i, j であって $(\tau g\lambda)'$ では同じ列にあるものが存在する。i, j が $(\tau g\lambda)'$ の第 m 列にあるとする。τ は垂直置換であるから

$$V_m(\tau g\lambda) = V_m(g\lambda)$$

よって i, j は $g\lambda$ の同じ列に存在する。 □

定理 1.2.1.11 の証明に戻る。補題から、$\nu = (i, j)$ であって $\nu \in \mathcal{H}_\mu \cap \mathcal{V}_{g^{-1}\lambda}$ となるものが存在する。よって

$$\nu = g^{-1}\pi g, \qquad \pi \in \mathcal{V}_\lambda$$

とおけば

$$\begin{aligned} c_\lambda g c_\mu &= a_\lambda b_\lambda g a_\mu b_\mu \\ &= a_\lambda b_\lambda \operatorname{sgn}(\pi) \pi g a_\mu b_\mu \\ &= a_\lambda b_\lambda \operatorname{sgn}(\pi) g \nu a_\mu b_\mu \\ &= \operatorname{sgn}(\pi) a_\lambda b_\lambda g a_\mu b_\mu \\ &= -c_\lambda g c_\mu \end{aligned}$$

よって

$$c_\lambda g c_\mu = 0$$

で示せた。 □

例 1.2.1.13. $\lambda = (n), \mu = (1, 1, \cdots, 1) \in \mathcal{P}_n$ とする。このとき $\mathcal{H}_\lambda = \mathfrak{S}_n$, $\mathcal{V}_\lambda = e$ であるから、

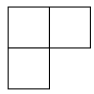
$$c_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma$$

また $\mathcal{H}_\mu = e$, $\mathcal{V}_\mu = \mathfrak{S}_n$ であるから、

$$c_\mu = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma$$

したがって λ の定める既約表現は自明な表現 1 であり、μ の定める既約表現は置換の符号 sgn であるとわかる。

例 1.2.1.14. $G = \mathfrak{S}_3$ とする。

$\lambda =$ 

に対応する Young 対称子は

$$c_\lambda = (e + (1, 2))(e - (1, 3)) = e + (1, 2) - (1, 3) - (1, 3, 2)$$

である。c_λ の定める既約表現が、例 1.1.2.24 で求めた既約表現 U と一致することをたしかめる。

$$c_\lambda^2 = 3c_\lambda$$

となるから、命題 1.2.1.8 より

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]c_\lambda = 2$$

である。

$$v = c_\lambda, \qquad u = (1, 2, 3)c_\lambda = -e + (1, 3) - (2, 3) + (1, 2, 3)$$

とすれば、$\mathbb{C}[G]c_\lambda = \mathbb{C}v \oplus \mathbb{C}u$ であり、

$$\begin{aligned} (1, 2)v &= v, \qquad (1, 2)u = -v - u \\ (1, 2, 3)v &= u, \qquad (1, 2, 3)u = -v - u \end{aligned}$$

であるから、指標を χ とすると

$$\begin{aligned} \chi(e) &= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]c_\lambda = 2 \\ \chi((1, 2)) &= 0 \\ \chi((1, 2, 3)) &= -1 \end{aligned}$$

となり、指標が一致している。

補題 1.2.1.15. $\phi : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ を

$$\phi(g) = \mathrm{sgn}(g)g$$

を線形に拡張して定める。ϕ は環準同型であり、対合である。$\alpha \in \mathbb{C}[G]$ に対して

$$\mathbb{C}[G]\alpha \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}} \simeq \mathbb{C}[G]\phi(\alpha)$$

が成り立つ。ここで、$\mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}$ は $\mathbb{C}_{\mathrm{sgn}} = \mathbb{C}$ であり、

$$g \cdot \lambda = \mathrm{sgn}(g)\lambda, \qquad g \in G, \lambda \in \mathbb{C}$$

で定まる $\mathbb{C}[G]$ 加群である（すなわち sgn 表現）。

Proof. $f : \mathbb{C}[G]\phi(\alpha) \to \mathbb{C}[G]\alpha \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}$ を

$$f(x) = \phi(x) \otimes 1$$

で定めれば $g \in G$ として

$$\begin{aligned} gf(x) &= g(\phi(x) \otimes 1) \\ &= g\phi(x) \otimes \mathrm{sgn}(g) \\ &= \mathrm{sgn}(g) g\phi(x) \otimes 1 \\ &= \phi(gx) \otimes 1 \\ &= f(gx) \end{aligned}$$

より $\mathbb{C}[G]$ 加群の準同型である。任意の $y \otimes 1 \in \mathbb{C}[G]\alpha \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}$ に対して

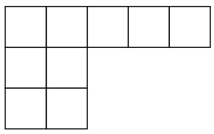
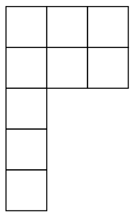
$$f(\phi(y)) = y \otimes 1$$

となり、$\mathbb{C}[G]\alpha \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}$ は $y \otimes 1$ の形の元で生成されるから、f は全射である。

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]\alpha \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]\alpha \cdot \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]\alpha$$

より f は同型。 □

例 1.2.1.16. $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対して、λ の行と列を反転させたものを共役 Young 図形といい λ^* と書く。

$\lambda =$  $\to \quad \lambda^* =$ 

このとき

$$\mathbb{C}[G]c_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}} \simeq \mathbb{C}[G]c_{\lambda^*}$$

となることを示す。定義より、

$$\mathcal{H}_{\lambda^*} = \mathcal{V}_\lambda, \qquad \mathcal{V}_{\lambda^*} = \mathcal{H}_\lambda$$

であるから、

$$a_{\lambda^*} = \phi(b_\lambda), \qquad b_{\lambda^*} = \phi(a_\lambda)$$

したがって

$$c_{\lambda^*} = \phi(b_\lambda)\phi(a_\lambda) = \phi(b_\lambda a_\lambda) = \phi(\tilde{c_\lambda})$$

である。命題 1.2.1.9 より、

$$\mathbb{C}[G]c_\lambda \simeq \mathbb{C}[G]\tilde{c_\lambda}$$

であるから、補題 1.2.1.15 より、

$$\mathbb{C}[G]c_{\lambda^*} \simeq \mathbb{C}[G]c_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}$$

1.2.2 水平置換群からの誘導表現

$\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対して

$$M_\lambda = \mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_\lambda}^G(\mathbf{1})$$

とする。ここで $\mathbf{1}$ は $\mathcal{H}_\lambda$ の自明な表現である。例 1.1.4.5 より、M_λ は $G/\mathcal{H}_\lambda$ の置換表現に他ならない (例 1.1.4.5)。$M_\lambda = \mathbb{C}[G]a_\lambda$ となることを示す。$\phi : M_\lambda = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H_\lambda]} \mathbf{1} \to \mathbb{C}[G]a_\lambda$ を

$$\phi(g \otimes c) = cga_\lambda$$

を $\mathbb{C}[\mathcal{H}_\lambda]$ 双線形に拡張して定める。$h \in \mathcal{H}_\lambda$ に対して

$$\phi(gh \otimes c) = cgha_\lambda = cga_\lambda = \phi(g \otimes hc)$$

であるから ϕ は well-defined であり $\mathbb{C}[G]$ 準同型である。逆に $\psi : \mathbb{C}[G]a_\lambda \to \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H_\lambda]} \mathbf{1}$ を

$$\psi(x) = \frac{1}{|\mathcal{H}_\lambda|} x \otimes 1$$

によって定めれば ϕ, ψ は互いに逆写像であるから、同型である。

λ が 1 行の Young 図形の場合、$\mathcal{H}_\lambda = G$ であるから、M_λ は自明な表現にほかならない。一方 λ が 1 列の Young 図形の場合は $\mathcal{H}_\lambda = 1$ であるから M_λ は正則表現である。

定理 1.2.2.1 (Young の規則)**.** $\lambda \in \mathcal{P}_n$ と、辞書式順序で λ より大きい $\mu \in \mathcal{P}_n$ に対して正の整数 $k'_{\lambda\mu}$ が存在して

$$M_\lambda = S_\lambda \oplus \left(\bigoplus_{\mu > \lambda} S_\mu^{\oplus k'_{\lambda\mu}} \right)$$

Proof. 定理 1.1.2.16 より、

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(M_\lambda, S_\mu) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu = \lambda \\ 0 & \text{if } \mu < \lambda \end{cases}$$

を証明すればよい。例 1.2.2 より $M_\lambda = \mathbb{C}[G]a_\lambda$ であるから、1.1.3.6 より

$$\mathrm{Hom}(M_\lambda, S_\mu) = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}[G]a_\lambda, \mathbb{C}[G]c_\mu) = a_\lambda \mathbb{C}[G]c_\mu$$

である。$\lambda = \mu$ の場合、任意の $\alpha \in \mathbb{C}[G]$ に対して $a_\lambda \alpha c_\lambda$ は補題 1.2.1.6 の条件をみたすから、

$$a_\lambda \mathbb{C}[G]c_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$$

よって

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(M_\lambda, S_\mu) = 1$$

次に $\mu < \lambda$ のとき、補題 1.2.1.12 より、任意の $g \in G$ に対して λ の同じ行にある文字 i, j であって $g\mu$ で同じ列にあるものが存在する。すなわち $\sigma = (i, j)$ とおけば $\sigma \in \mathcal{H}_\lambda$ かつ $\sigma \in \mathcal{V}_{g\mu} = g\mathcal{V}_\mu g^{-1}$ である。そこで $\sigma = g\tau g^{-1}$, $\tau \in \mathcal{V}_\mu$ とおけば、

$$\begin{aligned} a_\lambda g b_\mu &= a_\lambda \sigma g b_\mu \\ &= a_\lambda g \tau b_\mu \\ &= -a_\lambda g b_\mu \end{aligned}$$

ゆえに $a_\lambda \mathbb{C}[G] b_\mu = 0$ であるから、

$$a_\lambda \mathbb{C}[G] c_\lambda \subset a_\lambda \mathbb{C}[G] b_\mu = 0$$

よって示せた。 □

Young の規則は Schur 多項式の線形結合で表すときにも現れた (系??)。実際にこの二つの係数が等しいことは次節に示される。Young の規則から、対称群の既約指標の整数性が従う。

系 1.2.2.2. S_λ の指標を χ_λ とおく。すべての $g \in G$ に対して $\chi_\lambda(g) \in \mathbb{Z}$ である

Proof. $\lambda \in \mathcal{P}_n$ の辞書式順序に関する数学的帰納法で示す。$\mathcal{P}_n$ の最大元は 1 行 Young 図形 (n) であるが、このとき $S_{(n)}$ は自明な表現なので指標は当然整数値である。ある λ より大きいすべての Young 図形 μ に対して χ_μ が整数値であったとする。定理 1.2.2.1 より

$$\chi_{M_\lambda} = \chi_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} k_{\lambda\mu} \chi_\mu$$

であるが、M_λ は置換表現であるから χ_{M_λ} は整数値である。帰納法の仮定より χ_μ も整数値であるから、χ_λ は整数値でなければならない。 □

既約指標 S_λ の具体的な値は Frobenius の指標公式として知られている。公式を明示的に与えるのは難しいが、Schur 多項式との関連を次節 (1.3.3.7) で述べる。また、M_λ の指標なら比較的簡単に計算できる。

命題 1.2.2.3. $g \in \mathfrak{S}_n$ を巡回置換の積に表したとき、含まれている長さ q の巡回置換の数を m_q とする。このとき、$\chi_{M_\lambda}(g)$ は次の値に等しい

$$\chi_{M_\lambda}(g) = \sum \prod_{q=1}^{n} \frac{m_q!}{c_{1q}! \cdots c_{nq}!}$$

ただし和は

- $c_{p1} + 2c_{p2} + 3c_{p3} + \cdots + nc_{pn} = \lambda_p$, for all $p = 1, \cdots, n$
- $c_{1q} + c_{2q} + c_{3q} + \cdots + c_{nq} = m_q$, for all $q = 1, \cdots, n$

をみたす非負行列 $\{c_{pq}\} \in M_n(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ 全体をわたる。

Proof. M_λ は $G/\mathcal{H}_\lambda$ への置換表現であるから、

$$\chi_{M_\lambda}(g) = \sharp\{\, \sigma\mathcal{H}_\lambda \in G/\mathcal{H}_\lambda \mid g\sigma\mathcal{H}_\lambda = \sigma\mathcal{H}_\lambda \,\} = \frac{1}{|\mathcal{H}_\lambda|} \sharp\{\, \sigma \in G \mid g \in \mathcal{H}_{\sigma\lambda} \,\}$$

と書くことができる。$N = \sharp\{\, \sigma \in G \mid g \in \mathcal{H}_{\sigma\lambda} \,\}$ とおく。N は g を水平置換にもつ形 λ の標準タブローの個数である。

g がある標準タブロー $\sigma\lambda$ の水平置換であるための必要十分条件は、g を巡回置換の積で表したときその各巡回置換 $(i_1, \cdots, i_k)$ について、各文字 $i_1, \cdots, i_k$ が $\sigma\lambda$ の同一行に含まれていることである。よって、逆に g からそのような標準タブローを構成するには、g の長さ q の巡回置換が λ の p 行目に何個含まれているかを指定し、水平置換で動かせばよい。

g の長さ q の巡回置換が λ の p 行目に c_{pq} 個含まれているとする。このとき p 行目に含まれる巡回置換の長さの総和が、λ の p 行目の箱の数に等しくなければならない。また、長さ q の巡回置換は全部で m_q 個ある。この 2 つの条件を式で表せば c_{pq} は

- $c_{p1} + 2c_{p2} + 3c_{p3} + \cdots + nc_{pn} = \lambda_p$, for all $p = 1, \cdots, n$
- $c_{1q} + c_{2q} + c_{3q} + \cdots + c_{nq} = m_q$, for all $q = 1, \cdots, n$

を満たすように動かなければならないことがわかる。

長さ q の巡回置換を各 p 行目に c_{pq} 個ずつ置く置き方は

$$\prod_{q=1}^{n} \frac{m_q!}{c_{1q}! \cdots c_{nq}!}$$

通りある。そこから λ の水平置換を作用させて異なる標準タブローが作れるので

$$N = \sum |\mathcal{H}_\lambda| \prod_{q=1}^{n} \frac{m_q!}{c_{1q}! \cdots c_{nq}!}$$

である。これより、

$$\chi_{M_\lambda} = \sum \prod_{q=1}^{n} \frac{m_q!}{c_{1q}! \cdots c_{nq}!}$$

□

例 1.2.2.4. $\lambda = (n)$ とすると $M_\lambda = 1$ であり、$\lambda = (1^n)$ とすると $M_\lambda = \mathbb{C}[G]$ である。

1.3 表現環と対称関数環

対称群の表現と対称多項式の間には深い関係がある。すべての対称群のすべての表現 (その同値類) をあつめたものは次数付き環の構造をもつ。また、対称多項式を無限変数に一般化した対称関数を考えると、対称関数の全体も次数付き環となる。これら 2 つの環には適切な内積を入れることができ、その内積を含め同型となることを示すのが本節の目標である。これによって表現間における結合係数を対称多項式の組み合わせ論によって記述することができるようになる。

1.3.1 続・対称多項式

準備として対称多項式に関してより詳しく解説する。以下正の整数 n を固定し、Λ_n^k を n 変数の k 次斉次対称多項式のなす $\mathbb{Z}$ 加群とする。第 1 章の記号を復習すると、n 行の Young 図形 λ に対して

$$m_\lambda = \sum_{\alpha\sim\lambda} x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

とし

$$\begin{aligned} e_k &= m_{1^k} = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} x_{i_1}\cdots x_{i_k}, \qquad (k=1,\cdots,n) \\ h_k &= \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_k} m_\lambda = \sum_{1\le i_1\le\cdots\le i_k\le n} x_{i_1}\cdots x_{i_k} \\ p_k &= m_{(k)} = x_1^k+\cdots+x_n^k \end{aligned}$$

とするのであった。e_k や h_k に対しては、その母関数を考えることは有用である。すなわち

$$E(t) = 1+e_1t+e_2t^2+\cdots+e_nt^n = \prod_{i=1}^n (1+x_it) \tag{1.7}$$

$$H(t) = 1-h_1t+h_2t^2+\cdots+(-1)^nh_nt^n+\cdots = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1+x_it} \tag{1.8}$$

である。とくに $E(t)H(t)=1$ であるので、$k=1,\cdots,n$ のとき

$$e_k - h_1e_{k-1}+\cdots+(-1)^{k-1}e_1h_{k-1}+(-1)^kh_k = 0 \tag{1.9}$$

を得る。

命題 1.3.1.1. $k=1,\cdots,n$ に対して

$$h_k = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_k \\ 1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{k-1} \\ 0 & 1 & e_1 & \cdots & e_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e_1 \end{vmatrix}, \qquad e_k = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_k \\ 1 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{k-1} \\ 0 & 1 & h_1 & \cdots & h_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_1 \end{vmatrix}$$

Proof. まったく同様なので h_k の場合だけ示す。$e_1 = h_1$ であり、$k-1$ までこの公式が成り立っていたとすると、

$$\begin{aligned} e_k &= h_1 e_{k-1} - h_2 e_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1} h_k \\ &= h_1 \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_{k-1} \\ 1 & h_1 & \cdots & h_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_1 \end{vmatrix} - h_2 \begin{vmatrix} h_1 & \cdots & h_{k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_1 \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{k-1} h_k \\ &= \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_k \\ 1 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{k-1} \\ 0 & 1 & h_1 & \cdots & h_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

次に、$\lambda \in \mathcal{P}_k$ に対して

$$\begin{aligned} e_\lambda &= e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_n} \\ h_\lambda &= h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_n} \\ p_\lambda &= p_{\lambda_1} \cdots p_{\lambda_n} \end{aligned}$$

とする。

命題 1.3.1.2. Λ_n^k の部分集合

(i) $\{m_\lambda\}_\lambda$ ただし λ は大きさが k で n 行
(ii) $\{e_\lambda\}_\lambda$ ただし λ は大きさが k で n 列
(iii) $\{h_\lambda\}_\lambda$ ただし λ は大きさが k で n 列
(iv) $\{s_\lambda\}_\lambda$ ただし λ は大きさが k で n 行
(v) $\{p_\lambda\}_\lambda$ ただし λ は大きさが k で n 列

について、(i)~(iv) は Λ_n^k の $\mathbb{Z}$ 上の基底をなし、(v) は $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda_n^k$ の基底をなす。

Proof. (i) は命題**??**の証明を斉次部分で考えればまったく同様である。(ii) については定理**??**の証明において、任意の対称多項式 f が

$$e_1^{a_1} \cdots e_n^{a_n}$$

で生成されていることを示したことからわかる。(iv) は**??**の証明を斉次部分で行えばよい。(iii) については、命題 1.3.1.1 より $\{h_\lambda\}$ が $\{e_\lambda\}$ を生成することがわかるが、ともに集合の濃度が等しいことから基底をなすこ

とがわかる。(v) が基底をなすことを示そう。(v) が (iii) を生成することを示せばよい。

$$
\begin{aligned}
&1 + h_1 t + h_2 t^2 + \cdots \\
&= H(-t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i t} \\
&= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} -\log(1 - x_i t)\right) \\
&= \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{x_i^r t^r}{r}\right) \\
&= \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{p_r}{r} t^r\right) \\
&= \prod_{r=1}^{\infty} \exp\left(\frac{p_r}{r} t^r\right) \\
&= \prod_{r=1}^{\infty} \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{p_r^{m_r}}{m_r! \cdot r^{m_r}} t^{r \cdot m_r} \\
&= \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{p_1^{m_1}}{m_1! \cdot 1^{m_1}} t^{m_1}\right) \cdot \left(\sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{p_2^{m_2}}{m_2! \cdot 2^{m_2}} t^{2 \cdot m_2}\right) \cdot \left(\sum_{m_3=0}^{\infty} \frac{p_3^{m_3}}{m_3! \cdot 3^{m_3}} t^{3 \cdot m_3}\right) \cdots
\end{aligned}
$$

となるから、Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ に対して

$$
z(\lambda) = \prod_i m_i! \cdot i^{m_i}, \qquad \text{ただし } m_i \text{ は } \lambda \text{ に現れる } i \text{ の個数}
$$

とおけば、最後の式は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m_1, m_2, m_3, \cdots} \frac{p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \cdots}{(m_1! \cdot 1^{m_1})(m_2! \cdot 2^{m_2})(m_3! \cdot 3^{m_3}) \cdots} t^{m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + \cdots} \\
&= \sum_{\lambda} \frac{p_\lambda}{z(\lambda)} t^{|\lambda|} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} \frac{p_\lambda}{z(\lambda)} t^k
\end{aligned}
$$

となる。よって

$$
h_k = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} \frac{p_\lambda}{z(\lambda)}
$$

が成り立つ。n 列の Young 図形 λ に対して

$$
h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_s}, \qquad \lambda_i \leq n
$$

とおくと、

$$
h_{\lambda_i} = \sum_{\mu_i \in \mathcal{P}_{\lambda_i}} \frac{p_{\mu_i}}{z(\mu_i)}
$$

であるから

$$
h_\lambda = \sum_{\mu_1, \cdots, \mu_s} \frac{p_{\mu_1} \cdots p_{\mu_s}}{z(\mu_1) \cdots z(\mu_s)}
$$

各 μ_i は $\lambda_i \leq n$ の分割を与えているから、$p_{\mu_1} \cdots p_{\mu_s}$ はたかだか n 列の Young 図形に対応するべき和対称式である。よって (v) も基底を与える。 □

証明中に現れた等式は重要なので再掲しておく。

命題 1.3.1.3. 正の整数 k, n に対して

$$h_k(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} \frac{p_\lambda(x_1, \cdots, x_n)}{z(\lambda)}$$

が成り立つ。

後に必要になる公式を用意しておく

補題 1.3.1.4 (Cauchy の等式)**.** 形式的べき級数 $\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1-x_i y_j}$ は次と等しい。

$$\text{(i):} \sum_{\lambda, \lambda_{n+1}=0} h_\lambda(x_1, \cdots, x_m) m_\lambda(y_1, \cdots, y_n), \qquad \text{ただし和は } n \text{ 行 Young 図形全体をわたる}$$

$$\text{(ii):} \sum_{\lambda} \frac{1}{z(\lambda)} p_\lambda(x_1, \cdots, x_m) p_\lambda(y_1, \cdots, y_n), \qquad \text{ただし和はすべての Young 図形全体をわたる}$$

$$\text{(iii):} \sum_{\lambda} s_\lambda(x_1, \cdots, x_m) s_\lambda(y_1, \cdots, y_n), \qquad \text{ただし和はすべての Young 図形全体をわたる}$$

Proof. (i) を示す。

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i y_j} \\
&= \prod_{j=1}^{n} H(y_j) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{k_j=0}^{\infty} h_{k_j}(x_1, \cdots, x_m) y_j^{k_j} \right) \\
&= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} h_{k_1}(x_1, \cdots, x_m) y_1^{k_1} \right) \cdot \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} h_{k_2}(x_1, \cdots, x_m) y_2^{k_2} \right) \cdots \left(\sum_{k_n=0}^{\infty} h_{k_n}(x_1, \cdots, x_m) y_n^{k_n} \right) \\
&= \sum_{k_1, \cdots, k_n} h_{k_1} \cdots h_{k_n} y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n} \\
&= \sum_{\lambda, \lambda_{n+1}=0} h_\lambda(x_1, \cdots, x_m) m_\lambda(y_1, \cdots, y_n)
\end{aligned}$$

(ii) を示す。命題 1.3.1.3 より

$$\begin{aligned}\prod_{i,j}\frac{1}{1-x_iy_j} &= 1+h_1(\{x_iy_j\})+h_2(\{x_iy_j\})+\cdots \\ &= 1+\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_1}\frac{1}{z(\lambda)}p_\lambda(\{x_iy_j\})+\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_2}\frac{1}{z(\lambda)}p_\lambda(\{x_iy_j\})+\cdots \\ &= \sum_{\lambda}\frac{1}{z(\lambda)}p_\lambda(\{x_iy_j\}) \\ &= \sum_{\lambda}\frac{1}{z(\lambda)}p_\lambda(x_1,\cdots,x_m)p_\lambda(y_1,\cdots,y_n)\end{aligned}$$

(iii) については、Robinson-Schensted-Knuth 対応と呼ばれる対応を用いて証明される。詳細は付録を参照。 □

補題 1.3.1.5. $\mu\in\mathcal{P}_k$ とし、変数の数 n は $n\geq k$ とする。

$$p_\mu=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_k}\xi_{\lambda\mu}m_\lambda$$

とおいたとき、

$$\xi_{\lambda\mu}=\sum\prod_{q=1}^{n}\frac{m_q!}{c_{1q}!\cdots c_{nq}!}=\chi_{M_\lambda}(g_\mu)$$

ただし、g_μ は μ を置換の型にもつ元であり、$\mu=(1^{m_1},2^{m_2},\cdots,n^{m_n})$ であり、また和は命題 1.2.2.3 と同様

- $c_{p1}+2c_{p2}+3c_{p3}+\cdots+nc_{pn}=\lambda_p$, for all $p=1,\cdots,n$
- $c_{1q}+c_{2q}+c_{3q}+\cdots+c_{nq}=m_q$, for all $q=1,\cdots,n$

をみたす非負行列 $\{c_{pq}\}\in M_n(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ 全体をわたる。

Proof. $p_\mu=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_n^{m_n}$ であるが、

$$p_q^{m_q}=(x_1^q+x_2^q+\cdots+x_n^q)^{m_q}=\sum_{c_{1q},c_{2q},\cdots,c_{nq}\geq 0}\frac{m_q!}{c_{1q}!c_{2q}!\cdots c_{nq}!}x_1^{qc_{1q}}x_2^{qc_{2q}}\cdots x_n^{qc_{nq}}$$

であるので、

$$\begin{aligned}p_\mu &= \prod_{q=1}^{n}\sum_{c_{1q},c_{2q},\cdots,c_{nq}\geq 0}\frac{m_q!}{c_{1q}!c_{2q}!\cdots c_{nq}!}x_1^{qc_{1q}}x_2^{qc_{2q}}\cdots x_n^{qc_{nq}} \\ &= \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_k}\sum\prod_{q=1}^{n}\frac{m_q!}{c_{1q}!c_{2q}!\cdots c_{nq}!}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}\end{aligned}$$

□

1.3.2 対称関数環

定義 1.3.2.1. 可算無限個の変数をもつ形式的べき級数環 $\mathbb{Z}[[x_1,x_2,\cdots]]$ を考える。

$$\mathfrak{S}=\left\{\,\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\;\middle|\;f\text{ は全単射で }f(n)\neq n\text{ なる }n\text{ が有限個}\,\right\}$$

とする[*7]。

$$\Lambda = \left\{\, f \in \mathbb{Z}[[x_1, x_2, \cdots]] \;\middle|\; \sigma f = f,\ (\text{for all } \sigma \in \mathfrak{S}),\ f \text{ の単項式の次数は有界} \,\right\}$$

Λ は $\mathbb{Z}[[x_1, x_2, \cdots]]$ の部分環で対称関数環と呼ばれる。Λ^k を

$$\Lambda^k = \left\{\, f \in \Lambda \;\middle|\; f \text{ の単項式の次数はすべて } k \,\right\}$$

で定め、Λ^k の元を k 次斉次対称関数という。

$$\Lambda = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k$$

より Λ は次数付き環の構造をもつ。

ここで、Λ の定義において単項式の次数が有界であることを要請するのは自然である。実際、もし仮定しなければ Λ は Λ^k の直和にはならない。

例 1.3.2.2 (単項対称関数)**.** 任意の Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ に対して

$$m_\lambda = \sum_{\alpha \sim \lambda} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

とする。ここで指数 α は、λ の置換になっているもの全体をわたる。すなわちある $\sigma \in \mathfrak{S}$ が存在して $\alpha = \sigma\lambda$ をみたすもの全体である。m_λ は対称関数である。対称多項式の場合と同様の議論で、Λ^k は $\{m_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}_k}$ を基底に持つことがわかる。

例 1.3.2.3 (基本対称関数・完全対称関数)**.**

$$e_k = m_{1^k} = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$
$$h_k = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} m_\lambda = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

をそれぞれ、基本対称関数, 完全対称関数という。また、任意の Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ に対して

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_n}$$
$$h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_n}$$

とする。

$$e_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$$
$$e_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$$

である。

例 1.3.2.4 (べき和対称関数)**.** $(k) = (k, 0, \cdots, 0)$ に対して

$$p_k = m_{(k)} = x_1^k + x_2^k + \cdots$$

とする。

[*7] $\mathfrak{S}$ は対称群 $\mathfrak{S}_n$ と自然な包含 $\iota : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_{n+1}$ のなす帰納系の帰納極限である。

このように、対称関数はいままでみてきた対称多項式を自然に無限変数に拡張した概念であり、対称多項式で成り立っていた関係式が対称関数においても成立することが多い。このことは対称関数の k 次斉次部分 Λ^k が k 次斉次対称多項式からの射影極限と考えることができることによる。Λ_n^k を n 変数 k 次斉次対称多項式のなす $\mathbb{Z}$ 加群とする。$m \leq n$ に対して準同型 $\rho_{m,n} : \Lambda_n^k \to \Lambda_m^k$ を

$$\rho_{m,n}(f(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n)) = f(x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)$$

によって定める。ここで $\rho_{m,n}(f)$ は実際に m 変数の k 次斉次対称多項式である[*8]。$l \leq m \leq n$ に対して

$$\rho_{l,m} \circ \rho_{m,n} = \rho_{l,n}$$

が成り立つから、$\{\Lambda_n^k, \rho_{m,n}\}$ は射影系をなす。

命題 1.3.2.5. 上の状況において、

$$\Lambda^k = \varprojlim \Lambda_n^k$$

がなりたつ。

Proof. $\theta_n : \Lambda^k \to \Lambda_n^k$ を $n+1$ 番目以降の変数を 0 にする写像とすれば、

$$\rho_{m,n} \circ \theta_n = \theta_m$$

が成り立つから、射影極限の普遍性から準同型

$$\theta : \Lambda^k \to \varprojlim \Lambda_n^k$$

が誘導される。$\varprojlim \Lambda_n^k$ から Λ^k への写像 φ は次のように定義する。$\varprojlim \Lambda_n^k$ の元 $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$, $(f_n \in \Lambda_n^k)$ に対して、k 変数の部分に注目すると

$$f_k = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda m_\lambda(x_1, \cdots, x_k)$$

と一意的に表せるので

$$\varphi((f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda m_\lambda$$

と定める。ただし右辺の m_λ は例 1.3.2.2 の対称関数である。φ が θ の逆写像であることを示そう。

$$\theta_n(m_\lambda) = \begin{cases} m_\lambda(x_1, \cdots, x_n) & \text{if } \lambda_{n+1} = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1.10}$$

であるが、λ は k の分割であるので $n \geq k$ において $\lambda_{n+1} = 0$ である。よって $n \geq k$ ならば

$$\theta_n(\varphi((f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}})) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda m_\lambda(x_1, \cdots, x_n) \tag{1.11}$$

が成り立つ。一方、

$$f_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k(n)} d_\lambda m_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$$

[*8] 変数の置換と 0 を代入する操作が可換であることによる

とおくと $n \geq k$ より $\mathcal{P}_k(n) = \mathcal{P}_k$ であるから

$$f_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} d_\lambda m_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$$

となる。よって $\rho_{k,n}(f_n) = f_k$ と (1.11) より

$$f_n = \theta_n(\varphi((f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}))$$

次に $n < k$ の場合、(1.10) より

$$\theta_n(\varphi((f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}})) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(k)} c_\lambda m_\lambda$$

となるが、

$$f_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} d_\lambda m_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$$

とおけば $\rho_{n,k}(f_k) = f_n$ より

$$f_n = \theta_n(\varphi((f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}))$$

以上より

$$\theta \circ \varphi = \mathrm{id}$$

がわかる。逆に任意の $f \in \Lambda^k$ に対して

$$f = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda m_\lambda$$

とおけば (1.10) より

$$\theta_k(f) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda m_\lambda(x_1, \cdots, x_k)$$

であるから

$$\varphi(\theta(f)) = f$$

がわかる。 □

注意 1.3.2.6. 対称多項式環全体の射影極限をとっても対称関数環にはならないことに注意せよ。例えば対称多項式の列

$$f = ((1 + x_1),\ (1 + x_1)(1 + x_2),\ (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3),\ \cdots)$$

を考えると、f は対称多項式の射影極限の元であるが、次数の有界性を満たさないので対称関数ではない。斉次部分にわけて極限をとらなければならない。

例 1.3.2.7. n 行の Young 図形 λ に対して

$$\rho_{n,n+1}(m_\lambda(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})) = m_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$$

が成り立つ。実際

$$\begin{aligned}
\rho_{n,n+1}(m_\lambda(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})) &= \rho_{n,n+1}\left(\sum_{\alpha \sim \lambda} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\right) \\
&= \sum_{\substack{\alpha \sim \lambda \\ \alpha_{n+1} = 0}} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \\
&= m_\lambda(x_1, \cdots, x_n)
\end{aligned}$$

よって $k = |\lambda|$ 次対称多項式の列 $(m_\lambda(x_1, \cdots, x_l))_{l\in\mathbb{Z}_{\geq n}}$ は一つの対称関数を定めるが、これは単項対称関数 m_λ に他ならない。

例 1.3.2.8. 例 1.3.2.7 と命題 1.3.1.2 より e_λ, h_λ, p_λ,s_λ もすべて一つの対称関数を定める。$e_\lambda, h_\lambda, p_\lambda$ の定める対称関数は、例 1.3.2.3 と例 1.3.2.4 に他ならない。また s_λ の定める対称関数を Schur 関数という。

命題 1.3.1.2 より、次が成り立つ。

命題 1.3.2.9. Λ^k の部分集合

(i) $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{P}_k}$
(ii) $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{P}_k}$
(iii) $\{h_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{P}_k}$
(iv) $\{s_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{P}_k}$
(v) $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{P}_k}$

について、(i)~(iv) は Λ^k の $\mathbb{Z}$ 上の基底をなし、(v) は $\mathbb{Q}\otimes_\mathbb{Z}\Lambda^k$ 上の基底をなす。特に λ の範囲をすべての Young 図形全体に変えれば、これらは Λ または $\mathbb{Q}\otimes_\mathbb{Z}\Lambda$ の基底を与える。

また、命題 1.3.1.1 や命題 1.3.1.3, 補題 1.3.1.4, Littlewood-Richardson 規則などの関係式は、そのまま対称関数においても成立することがわかる。(変数の制限 $\rho_{m,n}$ は和や積と可換である)

命題 1.3.2.10. 次の関係式が成り立つ[*9]

$$\text{(i)}: h_k = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_k \\ 1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{k-1} \\ 0 & 1 & e_1 & \cdots & e_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e_1 \end{vmatrix}, \qquad e_k = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_k \\ 1 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{k-1} \\ 0 & 1 & h_1 & \cdots & h_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_1 \end{vmatrix}$$

$$\text{(ii)}: h_k = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_k} \frac{p_\lambda}{z(\lambda)}$$

$$\text{(iii)}: \sum_\lambda h_\lambda(x)m_\lambda(y) = \sum_\lambda \frac{1}{z(\lambda)}p_\lambda(x)p_\lambda(y) = \sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y) = \prod_{i,j}\frac{1}{1-x_iy_j}$$

$$\text{(iv)}: s_\lambda s_\mu = \sum_\nu \eta^\nu_{\lambda\mu}s_\nu, \qquad \text{ただし } \eta^\nu_{\lambda\mu} \text{ は Littlewood-Richardson 数}$$

$$\text{(vi)}: p_\mu = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_k}\xi_{\lambda\mu}m_\lambda \text{ ここで } \xi_{\lambda\mu} = \sum\prod_{q=1}^n \frac{m_q!}{c_{1q}!\cdots c_{nq}!} = \chi_{M_\lambda}(g_\mu) \quad \text{であり} \quad k = |\mu|$$

以下、Λ の係数を $\mathbb{Q}$ に拡大して考える。命題 1.3.2.9 より、$\{s_\lambda\}_\lambda$ は Λ の基底をなすので、Λ に

$$\langle\, s_\lambda, s_\mu \,\rangle = \delta_{\lambda\mu}$$

となるような内積を入れて考える。ただし $\delta_{\lambda\mu}$ は Kronecker のデルタである。

命題 1.3.2.11. 次が成り立つ：

[*9] e_k の母関数 $E(t) = \prod_{i=1}^\infty(1+x_it)$ や h_k の母関数 $H(t) = \prod_{i=1}^\infty \frac{1}{1-x_it}$ を用いて補題 1.3.1.4 と同じ計算で直接示してもよい。

(i) $\langle\, h_\lambda, m_\mu \,\rangle = \delta_{\lambda\mu}$

(ii) $\langle\, p_\lambda, p_\mu \,\rangle = \delta_{\lambda\mu} z(\lambda)$

Proof. 一般に Λ の基底 $\{u_\lambda\}$, $\{v_\lambda\}$ について

(i) $\langle\, u_\lambda, v_\mu \,\rangle = \delta_{\lambda\mu}$

(ii) $\sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y) = \prod_{i,j} \frac{1}{1-x_i y_j}$

が同値であることを示せば命題 1.3.2.10 より従う。

$u_\lambda(x) = \sum_{\nu_1} a_{\lambda\nu_1} s_{\nu_1}$, $v_\mu = \sum_{\nu_2} b_{\mu\nu_2} s_{\nu_2}$ とおく。(a) は

$$\sum_\nu a_{\lambda\nu} b_{\mu\nu} = \delta_{\lambda\mu} \tag{1.12}$$

と同値である。命題 1.3.2.10 より

$$\prod_{i,j} \frac{1}{1-x_i y_j} = \sum_\lambda s_\lambda(x) s_\lambda(y)$$

であり、

$$\begin{aligned}
\sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y) &= \sum_\lambda \sum_{\nu_1,\nu_2} a_{\lambda\nu_1} b_{\lambda\nu_2} s_{\nu_1}(x) s_{\nu_2}(y) \\
&= \sum_{\nu_1,\nu_2} \left(\sum_\lambda a_{\lambda\nu_1} b_{\lambda\nu_2} \right) s_{\nu_1} s_{\nu_2} \\
&= \sum_\nu \left(\sum_\lambda a_{\lambda\nu} b_{\lambda\nu} \right) s_\nu(x) s_\nu(y) + \sum_{\nu_1 \neq \nu_2} \left(\sum_\lambda a_{\lambda\nu_1} b_{\lambda\nu_2} \right) s_{\nu_1}(x) s_{\nu_2}(y)
\end{aligned}$$

であるから、$\{s_\lambda(x) s_\mu(y)\}_{\lambda,\mu}$ は一次独立であることに注意すれば、(b) は

$$\sum_\lambda a_{\lambda\nu_1} b_{\lambda\nu_2} = \delta_{\nu_1\nu_2} \tag{1.13}$$

と同値である。(1.12) と (1.13) は同値 (行列の行ベクトルが正規直交であることと列ベクトルが正規直交であることは同値) であるので、(a) と (b) も同値である。 □

系 1.3.2.12. $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_k$ に対して

$$h_\lambda = \sum_\mu \frac{\chi_{M_\lambda}(g_\mu)}{z(\mu)} p_\mu$$

が成り立つ。

Proof. 命題 1.3.2.11, 命題 1.3.2.10 より

$$\langle\, h_\lambda, p_\mu \,\rangle = \langle\, h_\lambda, \sum_{\nu \in \mathcal{P}_k} \chi_{M_\nu}(g_\mu) m_\nu \,\rangle = \chi_{M_\lambda}(g_\mu)$$

したがって、

$$h_\lambda = \sum_\mu \frac{\chi_{M_\lambda}(g_\mu)}{z(\mu)} p_\mu$$

となる。 □

1.3.3 表現環

次に対称群の表現全体から作られる環を導入する。

定義 1.3.3.1. $\mathfrak{S}_n$ の表現の同値類全体で生成される自由 Abel 群を $\tilde{R_n}$ とする。D を

$$\left\{ [V \oplus W] - [V] - [W] \in R \,\middle|\, V, W \text{はそれぞれ } \mathfrak{S}_n \text{ の表現} \right\}$$

で生成される $\tilde{R_n}$ の部分加群とし、$R_n = \tilde{R_n}/D$ とする。$R_0 = \mathbb{Z}$ として $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ とおく。

$\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{S}_m$ の表現 V, W に対して、

$$[V] \circ [W] = [\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} V \boxtimes W]$$

と定める。ここで、$\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$ は $\mathfrak{S}_n$ の元を $n+1$ から $n+m$ を固定する置換と同一視し、$\mathfrak{S}_m$ の元を 1 から n を固定する置換と同一視することで $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$ の部分群とみなしている。$\circ$ を双線形に拡張することによって R は可換環の構造を持つ。R を対称群の表現環という。

命題 1.3.3.2. $\circ$ は実際に乗法を定め、R は次数付き可換環となる。

Proof. テンソル積と直和の可換性から、$\mathfrak{S}_n$ の表現 V, V' に対して

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} (V \oplus V') \boxtimes W = (\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} V \boxtimes W) \oplus (\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} V' \boxtimes W)$$

よって

$$([V] + [V']) \circ [W] = [V \oplus V'] \circ [W] = [V] \circ [W] + [V'] \circ [W]$$

より $\circ$ は双線形である。$\circ$ が可換であることは $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m \simeq \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$ であることからわかる。

乗法が結合的であることを示そう。すなわち

$$([V] \circ [W]) \circ [U] = [V] \circ ([W] \circ [U])$$

を示す。そのためには $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{S}_m$, $\mathfrak{S}_l$ それぞれの表現 V, W, U に対して、2 つの表現

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n+m} \times \mathfrak{S}_l}^{\mathfrak{S}_{n+m+l}} \left\{ (\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} V \boxtimes W) \boxtimes U \right\}, \qquad \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_{m+l}}^{\mathfrak{S}_{n+m+l}} \left\{ V \boxtimes (\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_l}^{\mathfrak{S}_{m+l}} W \boxtimes U) \right\}$$

の指標が等しいことをみればよい。$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n+m} \times \mathfrak{S}_l}^{\mathfrak{S}_{n+m+l}} \left\{ (\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} V \boxtimes W) \boxtimes U \right\}$ の指標を χ_A とおき、$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} V \boxtimes W$ の指標を $\chi_{A'}$ とおく。誘導指標の公式 (命題 1.1.4.4) より、

$$\chi_A(g) = \frac{1}{(n+m)!\, l!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+m+l} \\ \sigma^{-1} g \sigma \in \mathfrak{S}_{n+m} \times \mathfrak{S}_l}} \chi_{A'}((\sigma^{-1} g \sigma)|_{n+m}) \chi_U((\sigma^{-1} g \sigma)|_l)$$

ここで、$(\sigma^{-1} g \sigma)|_{n+m}$ は $\sigma^{-1} g \sigma$ の最初の $n+m$ 文字の置換への制限である。g と $\sigma^{-1} g \sigma$ の置換の型は同じであるから、$\sigma^{-1} g \sigma \in \mathfrak{S}_{n+m} \times \mathfrak{S}_l$ と、$g \in \mathfrak{S}_{n+m} \times \mathfrak{S}_l$ は同値である。よって、

$$\chi_A(g) = \begin{cases} \frac{(n+m+l)!}{(n+m)!\, l!} \chi_{A'}(g|_{n+m}) \chi_U(g|_l) & \text{if } g \in \mathfrak{S}_{n+m} \times \mathfrak{S}_l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。同様の議論で、

$$\begin{aligned}\chi_{A'}(g|_{n+m}) &= \frac{1}{n!\,m!} \sum_{\substack{t\in\mathfrak{S}_{n+m} \\ t^{-1}g|_{n+m}t\in\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_m}} \chi_V((t^{-1}gt)_n)\chi_W((t^{-1}gt)_m) \\ &= \begin{cases} \frac{(n+m)!}{n!\,m!}\chi_V(g|_n)\chi_W(g|_m) & \text{if } g\in\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_l \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\end{aligned}$$

となる。結局、

$$\chi_A(g) = \begin{cases} \frac{(n+m+l)!}{n!\,m!\,l!}\chi_V(g|_n)\chi_W(g|_m)\chi_U(g|_l) & \text{if } g\in\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_l \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{1.14}$$

で、n, m, l について対称な形となった。同様に $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_{m+l}}^{\mathfrak{S}_{n+m+l}}\left\{V\boxtimes(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_l}^{\mathfrak{S}_{m+l}}W\boxtimes U)\right\}$ の指標を計算すると、(1.14) となることがわかる。 □

R の係数を $\mathbb{Q}$ に拡大して考える。$[V], [W]\in R_n$ に対して

$$\langle\,[V],[W]\,\rangle = \langle\,\chi_V,\chi_W\,\rangle$$

と定義し、$\langle\,,\,\rangle$ を R に双線形に拡張し内積を入れる。本節の主定理が次の定理である。

定理 1.3.3.3. $\varphi:\Lambda\to R$ を $\varphi(h_\lambda)=[M_\lambda]$ によって定めると φ は内積を保つ環の同型であり、

$$\varphi(s_\lambda)=[S_\lambda]$$

が成り立つ。ただし M_λ は 1.2.2 節の誘導表現, S_λ は λ で定まる対称群の既約表現である。

Proof. $\{h_\lambda\}$ は Λ の基底であるから φ は $\mathbb{Q}$ 線形写像として定義できることに注意する。また、Young の規則 (定理 1.2.2.1) より

$$[M_\lambda]=[S_\lambda]+\sum_{\mu>\lambda}k_{\lambda\mu}[S_\mu]$$

となるから、R_n の基底 $\{[S_\lambda]\}_\lambda$ に関して $\{[M_\lambda]\}_\lambda$ を成分表示して並べたとき、対角成分がすべて 1 の上三角行列になる。すなわち $\{[M_\lambda]\}_\lambda$ は R_n の基底となることがわかる。したがって φ は少なくとも線形同型であることがわかる。

φ が環準同型であることを示す。$h_\lambda=h_{\lambda_1}\cdots h_{\lambda_r}$ であるから、

$$[M_\lambda]=[M_{(\lambda_1)}]\circ\cdots\circ[M_{(\lambda_r)}]$$

となることを示せばよい。$n=|\lambda|$ とおく。各 $M_{(\lambda_i)}$ について、(λ_i) は 1 行の Young 図形であるから $M_{(\lambda_i)}$ は $\mathfrak{S}_{\lambda_i}$ の自明な表現である。よって $M_{(\lambda_i)}\boxtimes M_{(\lambda_j)}$ は $\mathfrak{S}_{\lambda_i}\times\mathfrak{S}_{\lambda_j}$ の自明な表現であるから、

$$[M_{(\lambda_i)}]\circ[M_{(\lambda_j)}]=[\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\lambda_i}\times\mathfrak{S}_{\lambda_j}}^{\mathfrak{S}_{\lambda_i+\lambda_j}}\mathbf{1}]=[M_{(\lambda_i,\lambda_j)}]$$

積は可換かつ結合的であるから

$$[M_\lambda]=[M_{(\lambda_1)}]\circ\cdots\circ[M_{(\lambda_r)}]$$

次に φ が内積を保つことを示す。φ は同型なので φ の逆写像 ψ が内積を保つことを示せばよい。ψ を求める。

系 1.3.2.12 より

$$h_\lambda = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_n} \frac{\chi_{M_\lambda}(g_\mu)}{z(\mu)} p_\mu$$

そこで

$$\psi([V]) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_n} \frac{\chi_V(g_\mu)}{z(\mu)} p_\mu$$

と定義すると ψ は φ の逆写像になっている。

ここで、$z(\mu) = \prod m_i! \cdot i^{m_i}$, ($m_i$ は μ に現れる i の個数) について、g_μ の共役類の大きさ $|C(g_\mu)|$ を考えると

$$|C(g_\mu)| = \frac{n!}{m_1! 1^{m_1} \cdots m_n! n^{m_n}} = \frac{n!}{z(\mu)}$$

である。これは、n の置換のうち、長さ i の巡回置換は i 通りの表示をもつ (例えば $(1,2,3) = (3,1,2) = (2,3,1)$ である。) こと、m_i 個の巡回置換の並べ替えの分重複があることを考えればわかる。よって

$$z(\mu) = \frac{n!}{|C(g_\mu)|}$$

これより、

$$\begin{aligned}
\langle\, \psi([V]), \psi([W]) \,\rangle &= \langle\, \sum_{\nu_1 \in \mathcal{P}_k} \frac{\chi_V(g_{\nu_1})}{z(\nu_1)} p_{\nu_1}, \sum_{\nu_2 \in \mathcal{P}_k} \frac{\chi_W(g_{\nu_2})}{z(\nu_2)} p_{\nu_2} \,\rangle \\
&= \sum_{\nu \in \mathcal{P}_k} \frac{\chi_V(g_\nu)\chi_W(g_\nu)}{z(\nu)} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_k} |C(g_\nu)| \chi_V(g_\nu)\chi_W(g_\nu) \\
&= \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi_V(\sigma)\chi_W(\sigma) \\
&= \langle\, [V], [W] \,\rangle
\end{aligned}$$

よって示せた。最後に $\varphi(s_\lambda) = [S_\lambda]$ であることを示す。Young の規則 (系**??**, 命題 1.2.2.1) より

$$\begin{aligned}
\varphi(s_\lambda) &= \varphi(h_\lambda) - \sum_{\nu > \lambda} k_{\lambda\nu} \varphi(s_\nu) \\
&= [S_\lambda] + \sum_{\nu' > \lambda} k_{\lambda\nu'} [S'_\nu] - \sum_{\nu > \lambda} k_{\lambda\nu} \varphi(s_\nu) \\
&= [S_\lambda] + \sum_{\nu > \lambda} m_{\lambda\nu} [S_\nu]
\end{aligned}$$

となるような整数 $m_{\lambda\mu}$ が存在する。

$$1 = \langle\, \varphi(s_\lambda), \varphi(s_\lambda) \,\rangle = 1 + \sum_{\nu > \lambda} m_{\lambda\nu}^2$$

ゆえに $m_{\lambda\nu} = 0$。よって示せた。 □

系 1.3.3.4 (Littlewood-Richardson 規則)**.** $\mathfrak{S}_n$ の既約表現 S_λ, $\mathfrak{S}_m$ の既約表現 S_μ について

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} S_\lambda \boxtimes S_\mu = \bigoplus_\nu S_\nu^{\oplus \eta_{\lambda\mu}^\nu}$$

が成り立つ。ただし $\eta^{\nu}_{\lambda\mu}$ は Littlewood-Richardson 数である。

系 1.3.3.5 (Young の規則)**.** $k_{\lambda\mu}$ を Kostka 数とする。

$$M_\lambda = S_\lambda \oplus \left(\bigoplus_{\mu > \lambda} S_\mu^{\oplus k_{\lambda\mu}} \right)$$

が成り立つ。

Proof. 系**??**, 定理 1.2.2.1 よりただちに従う。 □

系 1.3.3.6 (Pieri の規則)**.** $\mathfrak{S}_n$ の既約表現 S_λ に対して、

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+m}} S_\lambda = \bigoplus_{\substack{|\mu|=|\lambda|+m \\ \mu/\lambda\text{は水平帯}}} S_\mu$$

系 1.3.3.7 (Frobenius の指標公式)**.** $\mathfrak{S}_n$ の既約指標 χ_λ について、$\chi_\lambda(g_\mu)$ の値は s_λ を $\{\frac{p_\mu}{z(\mu)}\}_\lambda$ の線形結合で表したときの $\frac{p_\mu}{z(\mu)}{}_\lambda$ の係数に等しい

Proof.

$$s_\lambda = \psi([S_\lambda]) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_n} \frac{\chi_\lambda(g_\mu)}{z(\mu)} p_\mu$$

より従う。 □

定理の応用例を紹介しよう。

例 1.3.3.8. $\lambda = (n-1, 1) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & \cdots & \\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array}$ とする。S_λ が

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\}$$

に同値であることを示す。Pieri の規則より、

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1} = S_{(n)} \oplus S_{(n-1,1)}$$

である。ここで、$\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_{n-1}$ の完全代表系を求めると

$$X = \{(1\,n), (2\,n), \cdots, (n-1\,n), e\}$$

が取れる。$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1}$ は X への置換表現に他ならない。$v_i = (i\,n)$, $v_n = e$ とおけば

$$(j\,n) v_i = \begin{cases} v_n & \text{if } i = j \\ v_j & \text{if } i = n \\ v_i & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。すなわち $(j\,n)$ が引き起こす X 上の置換は $(j\,n)$ に他ならない。これは $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1}$ が標準的な置換表現

$$V = \mathbb{C}^n, \quad \text{for } \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}$$

に同値であることを意味する。

$$V \simeq \mathbf{1} \oplus U$$

であり、

$$V \simeq \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1} = S_{(n)} \oplus S_{(n-1,1)} = \mathbf{1} \oplus S_{(n-1,1)}$$

であるから

$$S_{(n-1,1)} \simeq U$$

1.4 一般線形群の表現と Schur-Weyl 双対性

前節までで対称群の既約表現に関して解説してきたが、次に対称群と表現論的に関係の深い一般線形群の表現について解説する。とくに多項式表現と呼ばれる表現のクラスが、Schur-Weyl 双対性を通して対称群の表現と密接にかかわりあっている。

1.4.1 Schur-Weyl 双対性

次の問題を考察することから始める。V を n 次元ベクトル空間としたとき、テンソル空間 $V^{\otimes k}$ の部分空間として対称テンソル空間 $\mathrm{Sym}^k(V)$, 交代テンソル空間 $\mathrm{Alt}^k(V)$ が

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}^k(V) &= \left\{ v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \;\middle|\; v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)} = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k, \quad \text{for all } \sigma \in \mathfrak{S}_k \right\} \\ \mathrm{Alt}^k(V) &= \left\{ v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \;\middle|\; v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)} = \mathrm{sgn}(\sigma) v_1 \otimes \cdots \otimes v_k, \quad \text{for all } \sigma \in \mathfrak{S}_k \right\}\end{aligned}$$

によって定義された。

$$\dim \mathrm{Sym}^k(V) = \binom{n+k-1}{k}, \qquad \dim \mathrm{Alt}^k(V) = \binom{n}{k}$$

より、$k=2$ の場合

$$\dim \mathrm{Sym}^2(V) + \dim \mathrm{Alt}^2(V) = n^2 = \dim V \otimes V$$

であるから、$\mathrm{Sym}^k(V) \cap \mathrm{Alt}^k(V) = 0$ に注意すれば

$$V \otimes V = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Alt}^2(V)$$

が成り立つ。$k > 2$ のときは次元が足りず、対称テンソルと交代テンソル以外の部分が現れる。その分解を与える規則は何であろうか。特に、表現を含めた分解を考える。

$\sigma \in \mathfrak{S}_k$ に対して、

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}$$

によって $V^{\otimes k}$ を $\mathfrak{S}_k$ の表現とみなす。あるいは同じことだが

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)\sigma = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$$

によって右 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$ 加群とみなす。

さらに、$g \in \mathrm{GL}(V)$ に対して

$$g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_k$$

によって $V^{\otimes k}$ は $\mathrm{GL}(V)$ の表現とみなすこともできる。$V^{\otimes k}$ は $\mathfrak{S}_k$, $\mathrm{GL}(V)$ 両方の作用を同時に受けている。

命題 1.4.1.1. 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, $g \in \mathrm{GL}(V)$ に対して、

$$(g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k))\sigma = g((v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)\sigma)$$

である。

Proof. $u_i = gv_i$ とおく。

$$\begin{aligned}(g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k))\sigma &= (gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_k)\sigma \\ &= (gv_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes gv_{\sigma(k)}) \\ &= g(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}) \\ &= g((v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)\sigma)\end{aligned}$$

よって示せた。 □

$c_{(k)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n], \quad c_{1^k} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ とおくと

$$\mathrm{Sym}^k(V) = V^{\otimes k} c_{(k)}, \qquad \mathrm{Alt}^k(V) = V^{\otimes k} c_{1^k}$$

となるが、命題 1.4.1.1 よりこの 2 つは $\mathrm{GL}(V)$ の表現でもある。よって $k > 2$ のときにも、$\lambda \in \mathcal{P}_k$ に対する Young 対称子 c_λ による像

$$W_\lambda(V) = V^{\otimes k} c_\lambda$$

を考察することは自然である。再び命題 1.4.1.1 より $W_\lambda(V)$ は $\mathrm{GL}(V)$ の部分表現になるが、このとき次が成り立つ。

定理 1.4.1.2 (Schur-Weyl 双対性)**.** $W_\lambda(V)$ は $\mathrm{GL}(V)$ の既約表現であり、$\mathfrak{S}_k \times \mathrm{GL}(V)$ の表現として

$$V^{\otimes k} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_k} S_\lambda \boxtimes W_\lambda(V)$$

が成り立つ。

ポイントになるのは次の補題である。

補題 1.4.1.3. G を有限群, $A = \mathbb{C}[G]$, U を右 A 加群, $B = \mathrm{End}_A(U)$ とおく。

(i) $c \in A$ に対して、左 B 加群として $U \otimes_A Ac \simeq Uc$ が成り立つ。
(ii) $c \in A$ に対して、$W = Ac$ が単純左 A 加群ならば $U \otimes_A W = Uc$ は単純左 B 加群である。が成り立つ。

Proof. (i) 次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd} U \otimes_A A \arrow[r, "\cdot c"] \arrow[d] & U \otimes_A Ac \arrow[r] \arrow[d] & U \otimes_A A \arrow[d] \\ U \arrow[r, "\cdot c"] & Uc \arrow[r] & U \end{tikzcd}$$

ここで $\cdot c$ は c 倍写像 (全射) であり、$U \otimes_A Ac \to U \otimes_A A$, $U_c \to U$ は埋め込み (単射), 両端の縦の写像は自然な同型である。このとき Diagram Chasing をすれば中央の縦の写像も同型になることがわかる。

(ii) U が単純右 A 加群である場合を考える。このとき Schur の補題から $B \simeq \mathbb{C}$ であることに注意する。$\dim_{\mathbb{C}} U \otimes_A W \leq 1$ であることを示せばよい。Wedderburn の構造定理より、

$$A \simeq \prod_{i=1}^{r} M_{m_i}(\mathbb{C})$$

である。W は A の極小左イデアルなので、W は

$$W = \{\, (M_1, \cdots, M_i, \cdots, M_r) \mid M_k = 0, (k \neq i), M_i \in I_\alpha \,\} = 0 \times \cdots \times I_\alpha \times \cdots \times 0$$
$$I_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{m_i} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a_1, a_2 \cdots, a_{m_i} \in \mathbb{C} \text{は第 } \alpha \text{ 列} \right\}$$

このような形になる。同様に U を A の極小右イデアルと同一視すれば[*10]、

$$U = \{\, (M_1, \cdots, M_j, \cdots, M_r) \mid M_k = 0, (k \neq j), M_j \in J_\beta \,\} = 0 \times \cdots \times J_\beta \times \cdots \times 0$$
$$J_\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{m_j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a_1, a_2 \cdots, a_{m_j} \in \mathbb{C} \text{は } \beta \text{ 行} \right\}$$

となるから、

$$U \otimes_A W = \begin{cases} J_\beta \otimes_{M_{m_i}(\mathbb{C})} I_\alpha = \mathbb{C}E_{\beta\alpha} & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となることがわかる。よって $\dim_{\mathbb{C}}(U \otimes_A W) \leq 1$ であるから単純である。
一般の U については、A の半単純性より U を単純右 A 加群の直和 $U \simeq \bigoplus_i U_k^{\oplus n_k}$ に分解しておいて、再び Schur の補題から

$$B = \mathrm{End}_A(U) = \mathrm{End}_A(\bigoplus_k U_k^{\oplus n_k}) = \bigoplus_k \mathrm{End}_A(U_k^{\oplus n_k}) = \prod_k M_{n_k}(\mathbb{C})$$

また、前半に示したことにより

$$U \otimes_A W = \bigoplus_k (U_k \otimes_A W)^{\oplus n_k} \simeq \mathbb{C}^{\oplus n_i}$$

となる。実際、$U_j \otimes_A W \simeq \mathbb{C}$ ならば $U_j = 0 \times \cdots \times J_\beta \times \cdots \times 0$ と表した時、J_β は i 番目の位置になければばならないから、$U_j \simeq U_i$ となる。$\mathbb{C}^{\oplus n_i}$ は単純左 $M_{n_i}(\mathbb{C})$ 加群であるから、$U \otimes_A W$ は単純左 B 加群である。

□

補題 1.4.1.4. V を n 次元ベクトル空間とする。$\mathrm{Sym}^k(V)$ は $\{v \otimes \cdots \otimes v\}_{v \in V}$ によって生成される

Proof. n 変数 k 次斉次多項式のなすベクトル空間を S とおく。主張は S が 1 次斉次多項式の k 乗で生成されることと同値である。単項式

$$x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, \quad i_1 + \cdots + i_n = k$$

が生成されることを示せば十分である。$f_0(x_1, \cdots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n)^k$ とおく。

$$f_1(x_1, \cdots, x_n) = f_0(2x_1, x_2, \cdots, x_n) - 2^k f_0(x_1, \cdots, x_n)$$

[*10] G の正則表現はすべての既約表現を直和因子に含むことに注意すればわかる。

とすれば、f_1 は x_1^k を含む項をもたない。次に

$$f_2(x_1,\cdots,x_n)=f_1(2x_1,x_2,\cdots,x_n)-2^{k-1}f_1(x_1,\cdots,x_n)$$

とすれば f_2 は x_1^k, x_1^{k-1} を含む項をもたない。この操作を i_1 以外に対して行えば、最終的に $x_1^{i_1}$ を含む項以外をもたないような多項式 $g_0(x_1,\cdots,x_n)$ を得る。そして g_0 は作り方から、一次斉次多項式の k 乗の線形結合で表される。同様に

$$g_1(x_1,\cdots,x_n)=g_0(x_1,2x_2,x_3,\cdots,x_n)-2^kg_0(x_1,\cdots,x_n)$$

とすれば g_1 は x_2^k を含む項をもたない。再びこの操作を繰り返して $x_1^{i_1}$, $x_2^{i_2}$ を含む項以外をもたないような多項式を得る。これを繰り返していけば、有限回のうちに $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ を作ることができる。 □

補題 1.4.1.5. A を $\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ における $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$ の像とし、B を $\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ における $\mathbb{C}[\mathrm{GL}(V)]$ の像とする。$B=\mathrm{End}_A(V^{\otimes k})$ が成り立つ。

Proof. $\mathrm{End}_A(V^{\otimes k})=(\mathrm{End}(V^{\otimes k}))^{\mathfrak{S}_n}=(\mathrm{End}(V)^{\otimes k})^{\mathfrak{S}_n}=\mathrm{Sym}^k(\mathrm{End}(V))$ であるから補題 1.4.1.4 より、$\mathrm{End}_A(V^{\otimes k})$ は $\{X\otimes\cdots\otimes X\}_{X\in\mathrm{End}(V)}$ によって生成される。$\mathrm{GL}(V)\subset\mathrm{End}(V)$ なのであるから、$B\subset\mathrm{End}_A(V^{\otimes k})$ は直ちに従う。$g\in\mathrm{GL}(V)$ に対して $g\otimes\cdots\otimes g$ が生成する $\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ の部分代数を B' とする。任意の (正則とは限らない)$X\in\mathrm{End}(V)$ に対して $X\otimes\cdots\otimes X$ が B' に含まれることを示せばよい。$X+tE$ は有限個の t を除いて正則である[*11] から、X に収束する $\mathrm{GL}(V)$ の点列 $(X+t_iE)$ が存在する[*12]。$\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ は有限次元であるから B' は閉部分空間であるので、

$$X^{\otimes k}=\lim_{i\to\infty}(X+t_iE)^{\otimes k}\in B'$$

が成り立つ[*13] □

定理 1.4.1.2 を証明しよう

Proof. 補題 1.4.1.3 と補題 1.4.1.4, 補題 1.4.1.5 より、

$$W_\lambda(V)=V^{\otimes k}c_\lambda=V^{\otimes k}\otimes_{\mathbb{C}[G]}\mathbb{C}[G]c_\lambda$$

は単純 $\mathrm{GL}(V)$ 加群であることが従う。ここで、$V^{\otimes k}$ は左 $A=\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$ 加群とみなすこともできたことを思い出す。

$$\sigma\in\mathcal{H}_\lambda\implies\sigma^{-1}\in\mathcal{H}_\lambda$$
$$\tau\in\mathcal{V}_\lambda\implies\tau^{-1}\in\mathcal{V}_\lambda$$

が成り立つことに注意すると、

$$c_\lambda V^{\otimes k}=V^{\otimes k}c_\lambda$$

となることがわかる。

命題 1.1.2.23 より、

$$V^{\otimes k}\simeq\bigoplus_{\lambda\in\mathcal{P}_k}S_\lambda\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_A(S_\lambda,V^{\otimes k})$$

[*11] 行列式は t の多項式

[*12] すなわち $\mathrm{GL}(V)$ は $\mathrm{End}(V)$ の稠密集合

[*13] 表現は連続であるからこのような極限操作が可能である。

となる。$B = \mathrm{GL}(V)$ 加群として $\mathrm{Hom}_A(S_\lambda, V^{\otimes k}) \simeq W_\lambda(V)$ となることを示せばよい。$S_\lambda = Ac_\lambda$ であるから、$\phi : \mathrm{Hom}_A(S_\lambda, V^{\otimes k}) \to W_\lambda(V)$ を

$$\phi(f) = f(c_\lambda) = f(c_\lambda^2) = c_\lambda f(c_\lambda)$$

によって定める[*14]。$b \in \mathrm{End}_A(V^{\otimes k}) = \mathrm{GL}(V)$ に対して、

$$\phi(bf) = c_\lambda bf(c_\lambda) = b(c_\lambda f(c_\lambda)) = b\phi(f)$$

より ϕ は左 B 加群の準同型である。$S_\lambda = Ac_\lambda$, $W_\lambda(V) = c_\lambda V^{\otimes k}$ より、ϕ は全単射である。 □

系 1.4.1.6. $\lambda \in \mathcal{P}_k$ に対して、$d_\lambda = \dim_{\mathbb{C}} S_\lambda$ とおく。$\mathrm{GL}(V)$ の表現として

$$V^{\otimes k} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_k} W_\lambda(V)^{\otimes d_\lambda}$$

が成り立つ。

例 1.4.1.7. $\dim V = n$ とする。λ が n 行よりも長い Young 図形のとき $W_\lambda(V) = 0$ となることを示す。λ の共役 Young 図形を $\lambda^* = (\lambda_1^*, \cdots, \lambda_s^*)$, $\lambda_1^* > n$ とおく。このとき、

$$b_\lambda = \left(\sum_{\mathfrak{S}_{\lambda_s^*}} \mathrm{sgn}(\sigma_s)\sigma_s\right) \cdots \left(\sum_{\mathfrak{S}_{\lambda_1^*}} \mathrm{sgn}(\sigma_1)\sigma_1\right)$$

と書くことができる。$\tilde{b}_\lambda = \sum_{\mathfrak{S}_{\lambda_1^*}} \mathrm{sgn}(\sigma_1)\sigma_1$ とする。

例：$\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 5 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1} \end{array}$, のとき $b_\lambda = \left(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}(\{5,6\})} \mathrm{sgn}(\tau)\tau\right)\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(\{1,2,3,4\})} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma\right), \tilde{b}_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(\{1,2,3,4\})} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma$

$V^{\otimes k}$ を λ の各箱に V の元が書かれているものと同一視する。V の基底を $e_1, \cdots, e_n$ とすれば $V^{\otimes k}$ の元は $e_1, \cdots, e_n$ を λ の各箱に配置した元で生成される。

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline \\ \cline{1-1} \\ \cline{1-1} \end{array} \text{ のとき } V^{\otimes k} = \left\langle \left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline e_{i_1} & e_{i_5} \\ \hline e_{i_2} & e_{i_6} \\ \hline e_{i_3} \\ \cline{1-1} e_{i_4} \\ \cline{1-1} \end{array} \right\}_{i_1, \cdots, i_6} \right\rangle$$

このとき、$\lambda_1^* > n$ より、$e_{i_1}, \cdots, e_{i_{\lambda_1^*}}$ には必ず重複がある。よって

$$\tilde{b}_\lambda(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\lambda_1^*}}) = 0$$

であるから、$b_\lambda V^{\otimes k} = 0$ である。

[*14] c_λ は適当にスカラー倍することでべき等元であった

例 1.4.1.8. $k=3$, $n>k$ とする。$\lambda = \ydiagram{2,1}$ として

$$V^{\otimes 3} = \mathrm{Sym}^3(V) \oplus (S_\lambda \boxtimes W_\lambda(V)) \oplus \mathrm{Alt}^3(V)$$

であり、$\dim S_\lambda = 2$ であるので

$$\dim W_\lambda(V) = \frac{1}{2}(n^3 - \dim \mathrm{Sym}^3(V) - \dim \mathrm{Alt}^3(V)) = \frac{1}{12}(4n^3 - 3n^2 - 13n - 6)$$

1.4.2 一般線形群の表現に対する指標

前節で Weyl 表現という一般線形群の既約表現を構成したが、これらが互いに同型でないことは示していなかった。本節ではこれを示し、さらに表現の指標を導入する。指標は有限群の場合のように、ある意味で表現を特徴づけるものであり、一般線形群においても強力な道具となる。

定義 1.4.2.1. $\rho : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(W)$ を表現とする。H を $\mathrm{GL}(V)$ の対角行列のなす部分群とする。$\mathrm{ch}_W : H \to \mathbb{C}$ を

$$\mathrm{ch}_W(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$$

によって定め、ρ の指標という。

例 1.4.2.2. $\lambda = (k) \in \mathcal{P}_k$, $\dim_{\mathbb{C}} V = n > k$ とする。$\mathrm{ch}_\lambda = \mathrm{ch}_{W_\lambda(V)}$ とすると、$g \in H$ に対して、g の固有値を $x_1, \cdots, x_n$ とすると、

$$\mathrm{ch}_\lambda(g) = h_k(x_1, \cdots, x_n)$$

となる。実際 $g = \mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n)$ とおくと $\mathrm{Sym}^k(V)$ の基底 $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ に対して

$$g^{\otimes k}(e_{i_1} \cdots e_{i_k}) = x_{i_1} \cdots x_{i_k} e_{i_1} \cdots e_{i_k}$$

である。

例 1.4.2.3. 同様に $\lambda = (1^k)$ ならば、

$$\mathrm{ch}_\lambda(g) = e_k(x_1, \cdots, x_n)$$

である。

有限群の場合と同様、トレースの性質から次が従う。

命題 1.4.2.4. W, U を $\mathrm{GL}(V)$ の表現とする。

(i) $\mathrm{ch}_{W \oplus U} = \mathrm{ch}_W + \mathrm{ch}_U$
(ii) $\mathrm{ch}_{W \otimes U} = \mathrm{ch}_W \mathrm{ch}_U$

が成り立つ。

定理 1.4.2.5. $\lambda \in \mathcal{P}_k$, $\dim_{\mathbb{C}} V = n$ とする。$W_\lambda(V)$ の指標を ch_λ とおくと、$g = \mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n)$ に対して

$$\mathrm{ch}_\lambda(g) = s_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$$

が成り立つ。

Proof. $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_s)$ とする。補題 1.4.1.3 を $M_\lambda = Aa_\lambda$ に用いて、

$$V^{\otimes k} a_\lambda \simeq V^{\otimes k} \otimes_A M_\lambda$$

a_λ の定義から、

$$V^{\otimes k} a_\lambda = \mathrm{Sym}^{\lambda_1}(V) \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Sym}^{\lambda_s}(V) = W_{(\lambda_1)}(V) \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} W_{(\lambda_s)}(V)$$

となる。Young の規則 (系**??**) より

$$M_\lambda = S_\lambda \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} S_\mu^{\oplus k_{\lambda\mu}} = Ac_\lambda \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} Ac_\mu^{\oplus k_{\lambda\mu}}$$

したがって、

$$W_{(\lambda_1)}(V) \otimes \cdots \otimes W_{(\lambda_s)}(V) \simeq W_\lambda(V) \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} W_\mu(V)^{\oplus k_{\lambda\mu}}$$

両辺の指標をとれば

$$h_\lambda = \mathrm{ch}_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} k_{\lambda\mu} \mathrm{ch}_\mu$$

よって帰納法により従う。 □

系 1.4.2.6. $W_\lambda(V) \simeq W_\mu(V)$ であることと $\lambda = \mu$ は同値である。

Proof. 定理 1.4.2.5 より $\lambda \neq \mu$ ならば指標が異なる。 □

系 1.4.2.7. W, U を $\mathrm{GL}(V)$ の表現で、ともに Weyl 表現の直和で表されるものとする。$W \simeq U$ となるための必要十分条件はその指標が等しいことである。

Proof. Schur 多項式の一次独立性から従う。 □

定理 1.4.2.5 の証明中に現れた式を再掲しておく

系 1.4.2.8 (Young の規則)**.**

$$W_{(\lambda_1)}(V) \otimes \cdots \otimes W_{(\lambda_s)}(V) \simeq W_\lambda(V) \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} W_\mu(V)^{\oplus k_{\lambda\mu}}$$

が成り立つ。ただし $k_{\lambda\mu}$ は Kostka 数である。

系 1.4.2.9 (Littlewood-Richardson 規則)**.** 2 つの Young 図形 λ, μ に対して、

$$W_\lambda(V) \otimes_{\mathbb{C}} W_\mu(V) \simeq \bigoplus_\nu W_\nu(V)^{\oplus \eta_{\lambda\mu}^\nu}$$

が成り立つ。ただし $\eta_{\lambda\mu}^\nu$ は Littlewood-Richardson 数である。

Proof. $W_\lambda(V) \otimes_{\mathbb{C}} W_\mu(V)$ が Weyl 表現の直和に表されることを示せばよい。$\lambda \in \mathcal{P}_k$, $\mu \in \mathcal{P}_l$ とする。

$$\begin{aligned} W_\lambda(V) \otimes_{\mathbb{C}} W_\mu(V) &\simeq V^{\otimes k} c_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} V^{\otimes l} c_\mu \\ &\simeq V^{\otimes (k+l)} (c_\lambda \otimes c_\mu) \end{aligned}$$

ここで、$c_\lambda \otimes c_\mu \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_k] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathfrak{S}_l] = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_l] \subset \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]$ である。$c = c_\lambda \otimes c_\mu$ とおく。

$$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]c = \bigoplus_{\nu \in \mathcal{P}_{k+l}} S_\nu^{\oplus t_\nu}$$

とおけば[*15]、補題 1.4.1.3 より

$$\begin{aligned} V^{\otimes(k+l)}c &\simeq V^{\otimes(k+l)} \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]} \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]c \\ &\simeq V^{\otimes(k+l)} \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]} \bigoplus_{\nu \in \mathcal{P}_{k+l}} S_\nu^{\oplus t_\nu} \\ &\simeq \bigoplus_{\nu \in \mathcal{P}_{k+l}} V^{\otimes(k+l)} \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]} \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]c_\nu^{\oplus t_\nu} \\ &\simeq \bigoplus_{\nu \in \mathcal{P}_{k+l}} W_\nu(V)^{\oplus t_\nu} \end{aligned}$$

よって示せた。 □

[*15] 実際はこの表現は $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]c = \mathrm{Ind}_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k] \times \mathbb{C}[\mathfrak{S}_l]}^{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]} S_\lambda \boxtimes S_\mu = S_\lambda \circ S_\mu$ に他ならない。