0.1 Grassmann 多様体の交叉理論

0.1.1 一般の位置

前節で導入したように、$\mathbb{P}^n$ の固定された旗に対して、ある特定の位置条件にある線形部分多様体をパラメータづける空間が Schubert 多様体であった。したがって今度は複数の旗に対してそれぞれの Schubert 多様体がどのように交わるかを記述することを考える。ここで重要になるのが 2 つの旗が一般の位置にあるという条件である。これが第 3 章冒頭に述べた「ある程度一般の状況」という言葉の意味である。一般の位置にある 2 つの旗の Schubert 多様体に対してはその次元がうまくふるまうことが知られており、それによって交点の数え上げに整った代数的・組み合わせ的計算が現れる。

定義 0.1.1.1. $F^\bullet$, $E^\bullet$ を $\mathbb{C}^n$ の旗とする。各 k において

$$F^k \cap E^{n-k} = 0$$

が成り立つとき、$F^\bullet, E^\bullet$ は一般の位置にあるという。

例 0.1.1.2. 旗 $F^\bullet$ に対して $F^k = \langle\, v_{k+1}, \cdots, v_n \,\rangle$ となる基底 $v_1, \cdots, v_n$ をとる。F^k_{op} を

$$F^k_{op} = \langle\, v_1, \cdots, v_{n-k} \,\rangle$$

とすれば

$$F^{n-k}_{op} \cap F^k = \langle\, v_1, \cdots, v_k \,\rangle \cap \langle\, v_{k+1}, \cdots, v_n \,\rangle = 0$$

となるから、$F^\bullet, F^\bullet_{op}$ は一般の位置にある。$F^\bullet_{op}$ を $F^\bullet$ の反対旗という。

例 0.1.1.3. $F^\bullet$ を標準旗とする。$g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を $g = (v_1, \cdots, v_n) = (a_{ij})$ とすれば

$$gF^k = \langle\, v_{k+1}, \cdots, v_n \,\rangle$$

である。$F^\bullet$, $gF^\bullet$ が一般の位置にあるための必要十分条件は、各 k において

$$e_{k+1}, \cdots, e_n, v_{n-k+1}, \cdots, v_n$$

が一次独立となることである。すなわち $\det(e_{k+1}, \cdots, e_n, v_{n-k+1}, \cdots, v_n) \neq 0$ である。よって $F^\bullet$, $gF^\bullet$ が一般の位置にあるような g のなす $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の部分集合は Zariski 開集合である。Zariski 開集合は稠密であるので、ほとんどすべての旗は一般の位置にあるといってよい。

命題 0.1.1.4. $F^\bullet$, $E^\bullet$ を一般の位置にある旗とする。$\mathbb{C}^n$ の基底 $v_1, \cdots, v_n$ を適当にとって、

$$F^k = \langle\, v_{k+1}, \cdots, v_n \,\rangle, \quad E^{n-k} = \langle\, v_1, \cdots, v_k \,\rangle$$

となるようにできる。

Proof. $\dim(E^{n-k} \cap F^{k-1}) = 1$ を示す。まず $E^{n-k} \cap F^k = 0$ より

$$dim(E^{n-k} + F^k) = \dim E^{n-k} + \dim F^k - \dim(E^{n-k} \cap F^k) = n$$

よって $\dim(E^{n-k}+F^{k-1})=n$ であるから

$$\begin{aligned}\dim(E^{n-k}\cap F^{k-1}) &= \dim E^{n-k}+\dim F^{k-1}-\dim(E^{n-k}+F^{k-1})\\ &= k+(n-k+1)-n\\ &= 1\end{aligned}$$

そこで v_k を $E^{n-k}\cap F^{k-1}$ の生成元とする。$\dim E^{n-1}=1$ だから $E^{n-1}=\langle v_1\rangle$ である。$E^{n-k}=\langle v_1,\cdots,v_k\rangle$ であるとする。

$$v_{k+1}\in E^{n-k-1}\cap F^k$$

であり $F^k\cap E^{n-k}=0$ であるから $v_{k+1}\notin E^{n-k}$ となる。よって $E^{n-k-1}=\langle\, v_1,\cdots,v_k,v_{k+1}\,\rangle$。同様に $F^k=\langle\, v_{k+1},\cdots,v_n\,\rangle$ も示せる。 □

以下 $F^\bullet$ を標準旗とする。命題 0.1.1.4 より $F^\bullet$ と $F^\bullet_{st}$ に対して考察すれば