

0.1 Grassmann 多様体の交叉理論

0.1.1 一般の位置

前節で導入したように、 \mathbb{P}^n の固定された旗に対して、その旗と特定の位置にある線形部分多様体をパラメータづける空間が Schubert 多様体であった。今度は複数の旗に対してそれぞれの Schubert 多様体がどのように交わるかを記述することを考える。ここで重要になるのが2つの旗が一般の位置にあるという条件である。これが第3章冒頭に述べた「ある程度一般の状況」という言葉の意味である。一般の位置にある2つの旗の Schubert 多様体の交叉に対してはその次元がうまくふるまうことが知られており、それによって交点の数え上げに整った代数的・組み合わせ的計算が現れる。

定義 0.1.1.1. F^\bullet, E^\bullet を \mathbb{C}^n の旗とする。各 k において

$$F^k \cap E^{n-k} = 0$$

が成り立つとき、 F^\bullet, E^\bullet は一般の位置にあるという。

例 0.1.1.2. 旗 F^\bullet に対して $F^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$ となる基底 v_1, \dots, v_n をとる。 F_{op}^k を

$$F_{op}^k = \langle v_1, \dots, v_{n-k} \rangle$$

とすれば

$$F_{op}^{n-k} \cap F^k = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \cap \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle = 0$$

となるから、 $F^\bullet, F_{op}^\bullet$ は一般の位置にある。 F_{op}^\bullet を F^\bullet の反対旗という。

例 0.1.1.3. F^\bullet を標準旗とする。 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を $g = (v_1, \dots, v_n) = (a_{ij})$ とすれば

$$gF^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$$

である。 F^\bullet, gF^\bullet が一般の位置にあるための必要十分条件は、各 k において

$$e_{k+1}, \dots, e_n, v_{n-k+1}, \dots, v_n$$

が一次独立となることである。すなわち $\det(e_{k+1}, \dots, e_n, v_{n-k+1}, \dots, v_n) \neq 0$ である。よって F^\bullet, gF^\bullet が一般の位置にあるような g のなす $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の部分集合は Zariski 開集合である。Zariski 開集合は稠密であるから、ほとんどすべての旗は一般の位置にあるといってよい。

命題 0.1.1.4. F^\bullet, E^\bullet を一般の位置にある旗とする。 \mathbb{C}^n の基底 v_1, \dots, v_n を適当にとつて、

$$F^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle, \quad E^{n-k} = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

となるようにできる。

Proof. $\dim(E^{n-k} \cap F^{k-1}) = 1$ を示す。まず $E^{n-k} \cap F^k = 0$ より

$$\dim(E^{n-k} + F^k) = \dim E^{n-k} + \dim F^k - \dim(E^{n-k} \cap F^k) = n$$

よって $\dim(E^{n-k} + F^{k-1}) = n$ であるから

$$\begin{aligned}\dim(E^{n-k} \cap F^{k-1}) &= \dim E^{n-k} + \dim F^{k-1} - \dim(E^{n-k} + F^{k-1}) \\ &= k + (n - k + 1) - n \\ &= 1\end{aligned}$$

そこで v_k を $E^{n-k} \cap F^{k-1}$ の生成元とする。 $E^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$ となることが帰納法により従う。

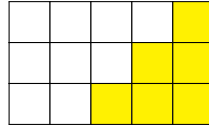
$\dim E^{n-1} = 1$ であるから $E^{n-1} = \langle v_1 \rangle$ である。 $E^{n-k} = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ であるとする。

$$v_{k+1} \in E^{n-k-1} \cap F^k$$

であり $F^k \cap E^{n-k} = 0$ であるから $v_{k+1} \notin E^{n-k}$ となる。 よって $E^{n-k-1} = \langle v_1, \dots, v_k, v_{k+1} \rangle$ 。 同様に $F^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$ も示せる。 \square

0.1.2 双対定理と交叉条件

定義 0.1.2.1. $\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)$ に対して、 $d \times (n - d)$ 長方形から λ を取り除いてできる図形を、 180° 回転させて得られる Young 図形を λ の双対といい λ^\vee と書く。



式で書けば $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ に対し

$$\lambda_i^\vee = n - d - \lambda_{d+1-i}$$

である。

例 0.1.2.2. $d = 2, n = 4$ として

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad \text{なら} \quad \lambda^\vee = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

定理 0.1.2.3 (双対定理). $\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_d(n)$ を $|\lambda| + |\mu| = d(n - d)$ であるとする。 F^\bullet を旗とする。 このとき

$$|\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet)| = \delta_{\lambda\mu^\vee}$$

が成り立つ。

Proof. $F^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$, $F_{op}^k = \langle v_1, \dots, v_{n-k} \rangle$ となる基底 v_1, \dots, v_n をとる。 $i^* = d + 1 - i$ とおく。 すなわち i が 1 から d まで動くとき i^* は d から 1 へ動く。

$\mu = \lambda^\vee$ であるとする。 $A_i = F^{\lambda_i + d - i}$, $B_i = F_{op}^{\lambda_{i^*}^\vee + d - i^*}$ とおく。 すると $V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_{\lambda^\vee}(F_{op}^\bullet)$ ならば

$$\dim(V \cap A_i) \geq i, \quad \dim(V \cap B_i) \geq i^*$$

である。 よって

$$\begin{aligned}d &\geq \dim(V \cap A_i + V \cap B_i) \\ &= \dim(V \cap A_i) + \dim(V \cap B_i) - \dim(V \cap A_i \cap B_i) \\ &\geq i + i^* - \dim(V \cap A_i \cap B_i) \\ &= d + 1 - \dim(V \cap A_i \cap B_i)\end{aligned}$$

より

$$\dim(V \cap A_i \cap B_i) \geq 1$$

一方

$$\begin{aligned} A_i &= F^{\lambda_i+d-i} = \langle v_{\lambda_i+d-i+1}, \dots, v_n \rangle \\ B_i &= F_{op}^{\lambda_{i^*}^\vee+d-i^*} \\ &= F_{op}^{n-d-\lambda_{d+1-i^*}+d-i^*} \\ &= F^{n-d-\lambda_i+d-d-1+i} \\ &= F^{(n-(\lambda_i+d-i+1))} \\ &= \langle v_1, \dots, v_{\lambda_i+d-i+1} \rangle \end{aligned}$$

より

$$A_i \cap B_i = \langle v_{\lambda_i+d-i+1} \rangle$$

となるから、

$$v_{\lambda_i+d-i+1} \in V$$

v_1, \dots, v_n は一次独立であるから

$$V = \langle v_{\lambda_1+d}, v_{\lambda_2+d-1}, \dots, v_{\lambda_d+1} \rangle$$

したがって $\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_{\lambda^\vee}(F_{op}^\bullet)$ は 1 点からなる。

次に $\mu \neq \lambda^\vee$ であるとする。 $|\lambda| + |\mu| = d(n-d)$ より、ある i で $\lambda_i + \mu_{i^*} > n-d$ となる。前半と同様 $A_i = F^{\lambda_i+d-i}, B_i = F_{op}^{\mu_{i^*}+d-i^*}$ とおけば

$$\begin{aligned} A_i &= \langle v_{\lambda_i+d-i+1}, \dots, v_n \rangle \\ B_i &= \langle v_1, \dots, v_{n-\mu_{i^*}-d+i^*} \rangle \\ &= \langle v_1, \dots, v_{n-\mu_{i^*}+1-i} \rangle \\ &\subsetneq \langle v_1, \dots, v_{\lambda_i+d-i+1} \rangle \end{aligned}$$

より $A_i \cap B_i = 0$ であるから、前半と同様の議論をすれば $V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet)$ とはなりえないことがわかる。 \square

例 0.1.2.4. 双対定理を例??の場合で考えてみる。例えば $|\Omega_{\square\square}(F^\bullet) \cap \Omega_{\square}(F_{op}^\bullet)| = 1$ は、「直線 l_0 と交わり、点 p_0 を通り平面 e_0 に含まれるような直線はただ 1 つ」と解釈できる。また $|\Omega_{\square\square}(F^\bullet) \cap \Omega_{\square\square}(F_{op}^\bullet)| = 1$ は、「与えられた 2 点を通る直線はただ 1 つ」と解釈でき、これも確かにもっともらしい主張である。さらに $|\Omega_{\square}(F^\bullet) \cap \Omega_{\square}(F_{op}^\bullet)| = 1$ は、「与えられた 2 平面両方に含まれる直線はただ 1 つ」となる。

系 0.1.2.5 (交叉条件). $\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_d(n)$ に対して、 $\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet) \neq \emptyset$ となるための必要十分条件はすべての i に対して $\lambda_i + \mu_{i^*} \leq n-d$ が成り立つことである。

Proof. 必要性から示す。 $V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet)$ ならば、定理 0.1.2.3 の証明と同様にして

$$\dim(V \cap A_i \cap B_i) \geq 1$$

したがって $A_i \cap B_i \neq 0$ が成り立つ。

$$A_i = \langle v_{\lambda_i+d-i+1}, \dots, v_n \rangle, \quad B_i = \langle v_1, \dots, v_{n-\mu_{i^*}+1-i} \rangle$$

より

$$\begin{aligned}\lambda_i + d - i + 1 &\leq n - \mu_{i^*} + 1 - i \\ \lambda_i + \mu_{i^*} &\leq n - d\end{aligned}$$

逆にすべての i に対して $\lambda_i + \mu_{i^*} \leq n - d$ であるならば $\mu \in \lambda^\vee$ であるから、双対定理により

$$\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet) \supset \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_{\lambda^\vee}(F_{op}^\bullet) \neq \emptyset$$

となる。 □

命題 0.1.1.4 より双対定理・交叉条件は任意の一般の位置にある旗に対しても成り立つことがわかる。実際の証明において

$$F^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle, \quad E^{n-k} = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

なる基底の存在が本質的である。

交叉条件は視覚的には、 μ を 180° 回転させて $d \times (n - d)$ 長方形の右下隅に置いたとき、 λ と重なることがないということと同値である。それがちょうど λ^\vee になるときが双対定理の主張である。

0.1.3 Schubert 計算

いくつかの代数幾何学的事実を認めて、Schubert 多様体の交点を計算する Schubert 計算について説明する。

事実 0.1.3.1 (Kleiman の横断性定理 [?],[?]). $X \subset \mathcal{G}(d, n)$ を部分多様体, F^\bullet を標準旗とする。このとき $|\lambda| = k$ なる Young 図形 $\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)$ に対して $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の稠密^{*1}な開集合 U が存在して、 $X \cap \Omega_{\lambda^\vee}(gF^\bullet)$ は空であるか、横断的に交わる^{*2}。とくに $\mathrm{codim} X = k$ であるなら $|X \cap \Omega_{\lambda^\vee}(gF^\bullet)|$ は 0 であるか g によらない一定の値である。

文字の集合 $\{\sigma_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{Y}_d(n), |\lambda|=k}$ で生成される自由 \mathbb{Z} 加群を $A^k(\mathcal{G}(d, n))$ とする。 $X \subset \mathcal{G}(d, n)$ を余次元が k の部分多様体とすると、事実 0.1.3.1 の値が定まるような十分一般の旗 F^\bullet に対して

$$[X] = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_d(n), |\lambda|=k} |X \cap \Omega_{\lambda^\vee}(F^\bullet)| \sigma_\lambda$$

とする。これを X のシンボルという。 $\Omega_{\lambda^\vee}(F^\bullet)$ の次元は $|\lambda| = k$ であるから、 $|X \cap \Omega_{\lambda^\vee}(F^\bullet)|$ は 0 次元、すなわち有限集合となるので係数は自然数として定まる。

例 0.1.3.2. $\Omega_\lambda(F^\bullet)$ は余次元が $|\lambda|$ であるから、双対定理より

$$[\Omega_\lambda(F^\bullet)] = \sigma_\lambda$$

これを Schubert 類という。

^{*1} 位相空間 X の部分集合 D が X で稠密であるとは、 D の閉包 \overline{D} について $\overline{D} = X$ がなりたつことをいう。

^{*2} 多様体 X の部分多様体 Y, Z が点 $p \in Y \cap Z$ で横断的に交わるとは、 $T_p Y + T_p Z = T_p X$ が成り立つことをいう。例えば、平面内の直線 $x = 0$ と $y = 0$ は $(x, y) = (0, 0)$ で横断的に交わるが、放物線 $y = x^2$ と $y = 0$ は $(x, y) = (0, 0)$ で横断的に交わらない。

事実 0.1.3.3 ([?]). F^\bullet, E^\bullet を一般の位置にある旗とする。 $\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(E^\bullet)$ は余次元が $|\lambda| + |\mu|$ の既約部分多様体になる。

そこで、 $A^*(\mathcal{G}(d, n)) = \bigoplus_{k=0}^{d(n-d)} A^k(\mathcal{G}(d, n))$ とし、 $\sigma_\lambda \in A^k(\mathcal{G}(d, n)), \sigma_\mu \in A^l(\mathcal{G}(d, n))$ に対して、事実 0.1.3.1 の値が定まるような十分一般の $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ に対して

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = [\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet)] = \sum_{\nu \in \mathcal{Y}_d(n), |\nu|=k+l} |\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet) \cap \Omega_{\nu^\vee}(gF^\bullet)| \sigma_\nu$$

と定め、 $A^*(\mathcal{G}(d, n))$ に積を定義する。これによって $A^*(\mathcal{G}(d, n))$ は次数付き可換環の構造をもつ ([?])。 $A^*(\mathcal{G}(d, n))$ を Chow 環という。係数 $|\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet) \cap \Omega_{\nu^\vee}(gF^\bullet)|$ を $\eta_{\lambda\mu}^\nu$ と置く。

次の事実が重要である。

事実 0.1.3.4 ([?]). $X, Y \subset \mathcal{G}(d, n)$ を一般の点で横断的に交わる部分多様体とする。このとき

$$[X][Y] = [X \cap Y]$$

が成り立つ。

交叉をとるという幾何学的な操作がそのシンボルの積という代数的な操作に置き換わっているのである。

例 0.1.3.5. 第 3 章冒頭で述べた 4 直線問題について考えよう。例??を再掲すると

$$\begin{aligned} \Omega_\emptyset &= \mathcal{G}(2, 4) \\ \Omega_\square &= \{ V \in \mathcal{G}(2, 4) \mid \dim(V \cap F^2) \geq 1 \} \approx \{ l \subset \mathbb{P}^3 : \text{直線} \mid l \cap l_0 \neq \emptyset \} \\ \Omega_{\square\square} &= \{ V \in \mathcal{G}(2, 4) \mid \dim(V \cap F^3) \geq 1 \} \approx \{ l \subset \mathbb{P}^3 : \text{直線} \mid l \ni p_0 \} \\ \Omega_{\square\square} &= \{ V \in \mathcal{G}(2, 4) \mid \dim(V \cap F^2) \geq 1, \dim(V \cap F^1) \geq 2 \} \approx \{ l \subset \mathbb{P}^3 : \text{直線} \mid l \subset e_0 \} \\ \Omega_{\square\square} &= \{ V \in \mathcal{G}(2, 4) \mid \dim(V \cap F^3) \geq 1, \dim(V \cap F^1) \geq 2 \} \approx \{ l \subset \mathbb{P}^3 : \text{直線} \mid p_0 \in l \subset e_0 \} \\ \Omega_{\square\square} &\approx \{ l = l_0 \} \end{aligned}$$

である。

$$|\Omega_\square(F_1^\bullet) \cap \Omega_\square(F_2^\bullet) \cap \Omega_\square(F_3^\bullet) \cap \Omega_\square(F_4^\bullet)|$$

を計算したい。ここで $F_1^\bullet, F_2^\bullet, F_3^\bullet, F_4^\bullet$ は十分一般にとった旗である。

この値を計算するには、事実 0.1.3.4 より

$$|\Omega_\square(F_1^\bullet) \cap \Omega_\square(F_2^\bullet) \cap \Omega_\square(F_3^\bullet) \cap \Omega_\square(F_4^\bullet)| \sigma_{\square\square} = \sigma_{\square\square}^4$$

となるから、 $\sigma_{\square\square}^4$ を計算すればよい。

$\sigma_{\square\square}^2$ を計算する。大きさ 2 の Young 図形は $\square\square$ と $\square\square$ の 2 つで、どちらも自己双対的であるから、

$$\sigma_{\square\square}^2 = \alpha \sigma_{\square\square} + \beta \sigma_{\square\square}$$

である。ここで

$$\alpha = |\Omega_\square(F^\bullet) \cap \Omega_\square(F_{op}^\bullet) \cap \Omega_{\square\square}(gF^\bullet)|, \quad \beta = |\Omega_\square(F^\bullet) \cap \Omega_\square(F_{op}^\bullet) \cap \Omega_{\square\square}(gF^\bullet)|$$

である。

α を求める。 $\Omega_{\square}(F^{\bullet}) \cap \Omega_{\square}(F_{op}^{\bullet}) \cap \Omega_{\square\square}(gF^{\bullet})$ は「2つの直線 l_0, l_1 と交わり、1点 p_0 を通る直線」の全体である。 p を通り l_0 と交わる直線全体の軌跡を考えると、これは1つの平面となる。この平面ともう1本の直線 l_1 は必ず1点で交わる (射影空間で考えている!) から、 $\alpha = 1$ である。

次に β を求める。 $\Omega_{\square}(F^{\bullet}) \cap \Omega_{\square}(F_{op}^{\bullet}) \cap \Omega_{\square\square}(gF^{\bullet})$ は「2つの直線 l_0, l_1 と交わり、1つの平面 e_0 に含まれる直線」の全体である。 e_0 と l_0 は1点 p_0 で交わり、 e_0 と l_1 も1点 p_1 で交わる。よって $l \cap l_0 \neq \emptyset, l \cap l_1 \neq \emptyset$ $l \subset e_0$ ならば $p_0, p_1 \in l$ である。2点を結ぶ直線は一般にただ1つであるから $\beta = 1$ である。

よって $\sigma_{\square}^2 = \sigma_{\square\square} + \sigma_{\square\square}$ である。同様の考察を行うと、

$$\sigma_{\square\square}\sigma_{\square} = \sigma_{\square\square\square} = \sigma_{\square\square\square}$$

がわかる。したがって、

$$\sigma_{\square}^4 = 2\sigma_{\square\square\square\square}$$

であるから、一般の位置にある4本の直線と交わる直線の数はいくつであるか。

0.1.4 Schur 多項式との関係

前小節で4直線問題の解を与えたが、Schubert 類の積を計算するために、易しい問題に帰着されたとはいえ幾何学的な考察が必要であった。しかし、実は Grassmann 多様体の Chow 環は対称多項式環の剰余環として表されることが、さらには Schubert 類は Schur 多項式に対応することが示され、これによって Schubert 計算は Schur 多項式の展開に帰着される。

定理 0.1.4.1 (Pieri の規則). $\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)$ とする。

$$\sigma_{(k)}\sigma_{\lambda} = \sum_{\substack{|\nu|=|\lambda|+k \\ \nu/\lambda \text{ は水平帯}, \nu \in \mathcal{Y}_d(n)}} \sigma_{\nu}$$

が成り立つ。

証明のためにいくつか補題を示そう。まず、一般の旗 $F^{\bullet}, F_{op}^{\bullet}, E^{\bullet}$ に対して、

$$\Omega_{(k)}(E^{\bullet}) \cap \Omega_{\lambda}(F^{\bullet}) \cap \Omega_{\nu^{\vee}}(F_{op}^{\bullet})$$

を考える。双対定理の証明と同様、

$$A_i = F^{\lambda_i + d - i}, \quad B_i = F_{op}^{\mu_{i^*} + d - i^*}$$

とおく。ここで $i^* = d + 1 - i$ である。 $a(i) = \lambda_i + d - i + 1, b(i) = n - \mu_{i^*} - d + i^*$ とおけば、

$$A_i = \langle e_{a(i)}, \dots, e_n \rangle, \quad B_i = \langle e_1, \dots, e_{b(i)} \rangle$$

である。

さらに

$$W_i = A_i \cap B_i = \langle e_{a(i)}, \dots, e_{b(i)} \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, d$$

とおいて、 $W = \sum_{i=1}^d W_i$ とする。

この状況において、 λ, μ が交叉条件をみたすならば、 $a(i) \leq b(i)$ である。すなわち $W_i \neq 0$ が成り立つ。また、 ν/λ が水平帯であるならば、 λ, μ は交叉条件をみたす。

実際、 λ, μ が交叉条件をみたすならば、系 0.1.2.5 より $\lambda_i + \mu_{i^*} \leq n - d$ である。このとき、

$$\begin{aligned} a(i) - b(i) &= (\lambda_i + d - i + 1) - (n - \mu_{i^*} - d + i^*) \\ &= \lambda_i + \mu_{i^*} + (d - i + 1) - (n - i + 1) \\ &= \lambda_i + \mu_{i^*} + d - n \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

よって $a(i) \leq b(i)$ である。

また、 ν/λ が水平帯であるならば、系 ?? より $\mu_{i^*} = \nu_{i^*}^\vee = n - d - \nu_i$ だから、

$$\lambda_i + \mu_{i^*} = \lambda_i - \nu_i + n - d \leq n - d$$

である。よって、 ν/λ が水平帯であるならば $\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet)$ は空でなく、 $W \neq 0$ である。

以下、 ν/λ は水平帯であるとする。

補題 0.1.4.2. $A_0 = 0, B_{d+1} = 0$ とする。

$$W = \bigcap_{i=0}^d (A_i + B_{i+1}) = \bigcap_{i=0}^d \langle e_1, \dots, e_{b(i+1)}, e_{a(i)}, \dots, e_n \rangle$$

が成り立つ。

Proof. $e_j \in W_i$ とする。定義より $a(i) \leq j \leq b(i)$ であるが、任意の $l = 0, 1, \dots, d$ に対して、 $l \geq i$ であるならば、 $a(l) \leq a(i)$ であるから、 $e_j \in A_l \subset A_l + B_{l+1}$ 、一方 $l+1 \leq i$ であるならば、 $b(l+1) \geq b(i)$ であるから、 $e_j \in B_{l+1} \subset A_l + B_{l+1}$ である。

次に $e_j \in \bigcap_{i=0}^d (A_i + B_{i+1})$ とする。 $i = 0$ として $1 \leq j \leq b(1)$ が成り立つ。ここで、もし $a(1) \leq j$ がなりたつなら $e_j \in A_1 \cap B_1$ となるから $a(1) > j$ としよう。すると $i = 1$ として $1 \leq j \leq b(2)$ が成り立つ。 $a(2) \leq j$ ならば $e_j \in A_2 \cap B_2$ となるから $a(2) > j$ としよう。すると $i = 2$ として $1 \leq j \leq b(3)$ が成り立つ。この議論を繰り返して行って、最後には $a(d) \leq j \leq n$ かつ $1 \leq j \leq b(d)$ となるが、これは $e_j \in A_d \cap B_d$ を意味する。□

補題 0.1.4.3. $V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet)$ ならば $V \subset W$ である。

Proof. 補題 0.1.4.2 より、すべての i に対して $V \subset A_i + B_{i+1}$ が成り立つことを示せばよい。 $b(i+1) \geq a(i)$ ならば、 $A_i + B_{i+1} = \mathbb{C}^n$ だから $b(i+1) < a(i)$ としてよい。 $V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet)$ より

$$\dim V \cap A_i \geq i, \quad \dim V \cap B_{i+1} \leq i + 1^* = d - i$$

が成り立つ。また $A_i \cap B_{i+1} = 0$ である。これより

$$\begin{aligned} d &\leq \dim V \cap A_i + \dim V \cap B_{i+1} \\ &= \dim(V \cap A_i + V \cap B_{i+1}) + \dim(V \cap A_i \cap B_{i+1}) \\ &\leq \dim V \cap (A_i + B_{i+1}) \end{aligned}$$

となる。 $\dim V = d$ であるのでこれは $V \subset A_i + B_{i+1}$ を意味する。□

補題 0.1.4.4. $W = \bigoplus_{i=1}^d W_i$ が成り立つ。

Proof. まず、 ν/λ が水平帯であることから

$$\lambda_i + \mu_{(i+1)^*} = \lambda_i + n - d - \nu_{i+1} \geq n - d$$

が成り立つ。これより

$$\begin{aligned} a(i) - b(i+1) &= (\lambda_i + d - i + 1) - (n - \mu_{(i+1)^*} - d + (i+1)^*) \\ &= \lambda_i + \mu_{(i+1)^*} + (d - i - 1) - (n - i) \\ &= \lambda_i + \mu_{(i+1)^*} d - n + 1 \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

すなわち $a(i) \geq b(i+1)$ となるから $A_i \cap B_{i+1} = 0$ である。したがって、

$$W_i \cap W_{i+1} = (A_i \cap B_i) \cap (A_{i+1} \cap B_{i+1}) = 0$$

これより

$$W = \bigoplus_{i=1}^d W_i$$

となる。 □

補題 0.1.4.5. 一般の旗 E^\bullet に対して $L = E^{k+d-1}$ とおくと $\dim W \cap L = 1$ である。

Proof. 補題 0.1.4.4 より

$$\dim W = \sum_{i=1}^d \dim A_i \cap B_i = \sum_{i=1}^d (b(i) - a(i) + 1) = k + d$$

である。一方、

$$\dim L = n + 1 - (k + d)$$

である。よって $\dim W \cap L = (k + d) + (n + 1 - k - d) - \dim(W + L) \geq 1$ となるが、一般の L に対しては $\dim W \cap L = 1$ である*³。 □

補題 0.1.4.6. $V = \bigoplus_{i=1}^d V \cap W_i$ が成り立つ。

Proof. $\dim V \cap A_i \geq i$, $\dim V \cap B_i \geq d + 1 - i$ より

$$\begin{aligned} \dim V \cap W_i &= \dim V \cap A_i \cap B_{i+1} \\ &= \dim V \cap A_i + \dim V \cap B_{i+1} - \dim(V \cap A_i + V \cap B_{i+1}) \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

となる。補題 0.1.4.4 より

$$d \geq \dim \sum_{i=1}^d V \cap W_i = \sum_{i=1}^d \dim V \cap W_i \geq d$$

*³ 一般に部分空間 $V, W \subset \mathbb{C}^n$ が、線形写像 $f, g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ に対して $V = \ker f$, $W = \ker g$ で与えられているとする。このとき $V \cap W = \ker(f \diamond g : \mathbb{C}^n \ni x \mapsto (f(x), g(x)) \in \mathbb{C}^{2n})$ である。よって $\dim V \cap W = 2n - \text{rank}(f \diamond g)$ となるから、 $\dim V \cap W = 1$ となる条件は $f \diamond g$ を行列表示したときの成分の多項式で与えられる。

ゆえに

$$V = \bigoplus_{i=1}^d V \cap W_i$$

□

以上の準備をもとに定理 0.1.4.1 を証明しよう。示した補題をもう一度述べると

$$V \subset W, \quad \text{補題 0.1.4.3}$$

$$W = \bigoplus_{i=1}^d W_i, \quad \text{補題 0.1.4.4}$$

$$\dim W \cap L = 1, \quad \text{補題 0.1.4.5}$$

$$V = \bigoplus_{i=1}^d V \cap W_i, \quad \text{補題 0.1.4.6}$$

である。

Proof. $V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet) \cap \Omega_{(k)}(E^\bullet)$ とする。補題 0.1.4.5 より $W \cap L = \langle w \rangle$ となる w をとる。
 $V \in \Omega_{(k)}(E^\bullet)$ より $\dim V \cap L \geq 1$ であるから、補題 0.1.4.3 より

$$0 \neq V \cap L \subset W \cap L = \langle w \rangle$$

ゆえに $w \in V$ である。補題 0.1.4.6 より、

$$w = w_1 + \cdots + w_d, \quad w_i \in V \cap W_i$$

と分解する。ここで、必要なら L を少し動かして $w_i \neq 0$ としてよい*4。すると、補題 0.1.4.4 より w_1, \dots, w_d は一次独立であるので、 $V = \langle w_1, \dots, w_d \rangle$ である。これで、 ν/λ が水平帯であるならば、

$$\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet) \cap \Omega_{(k)}(E^\bullet) = \{ \langle w_1, \dots, w_d \rangle \}$$

となることが示せた。

次に ν/λ が水平帯でないとする。このとき一連の補題のうち補題 0.1.4.4 が成り立たない。したがって $\dim W < k + d$ となるから、一般の L (その次元は $n + 1 - (k + d)$) に対して $L \cap W = 0$ である。
 $V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet)$ ならば $V \subset W$ であるから、 $\dim V \cap L \geq 1$ とならない。したがって $\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet) \cap \Omega_{(k)}(E^\bullet) = \emptyset$ である。 □

系 0.1.4.7 (Giambelli の公式). $\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)$ に対して

$$\sigma_\lambda = \det(\sigma_{(\lambda_i - i + j)})_{1 \leq i, j \leq d}$$

が成り立つ。ただし $\lambda_i + i - j < 0$ または $\lambda_i + i - j > n - d$ なら $\sigma_{\lambda_i - i + j} = 0$

Proof. Jacobi-Trudi 公式 (定理??) の証明とまったく同様である。 □

*4 L は $\dim W \cap L = 1$ となる次元の和が $n + 1$ の部分空間であった。例えば、 $W = \langle e_1, e_2 \rangle \subset \mathbb{C}^3$, $L = \langle e_2, e_3 \rangle$ のとき $W \cap L = \langle e_2 \rangle$ であるが、 L の基底を動かして $L' = \langle e_1 + e_2, e_3 \rangle$ などにすれば、 $W \cap L = \langle e_1 + e_2 \rangle$ となる。

加法群の準同型 $\varphi : \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}(n)} \rightarrow A^*(\mathcal{G}(d, n))$ を

$$\varphi(s_\lambda) = \begin{cases} \sigma_\lambda & \text{if } \lambda \in \mathcal{Y}_d(n) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

によって定めると、Jacobi-Trudi 公式および Giambelli の公式から φ は全射環準同型である。また

$$\ker \varphi = \bigoplus_{\lambda \notin \mathcal{Y}_d(n)} s_\lambda$$

である。したがって

$$A^*(\mathcal{G}(d, n)) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)} s_\lambda$$

系 0.1.4.8 (Littlewood-Richardson 規則). $\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_d(n)$ に対して、

$$\sigma_\lambda \sigma_\mu = \sum_{\nu \in \mathcal{Y}_d(n)} \eta_{\lambda\mu}^\nu \sigma_\nu$$

が成り立つ。すなわち

$$|\Omega_\lambda(F_1) \cap \Omega_\mu(F_2) \cap \Omega_{\nu^*}(F_3)| = \eta_{\lambda\mu}^\nu$$

ただし $\eta_{\lambda\mu}^\nu$ は Littlewood-Richardson 数である。

これまでの議論を用いて様々な数え上げ問題を解いてみる。

例 0.1.4.9. \mathbb{P}^4 内の 3 つの直線と交わる直線を数える。条件「 \mathbb{P}^4 の 1 つの直線と交わる」に対応する $\mathcal{G}(2, 5)$ の Schubert 多様体は

$$\{ V \in \mathcal{G}(2, 5) \mid \dim V \cap F^3 \geq 1 \} = \Omega_{\square\square}$$

である。よって $\sigma_{\square\square}^3$ を計算すればよい。 $\mathcal{Y}_2(5)$ は 2×3 長方形の部分 Young 図形であることに注意すれば、

$$\begin{aligned} \sigma_{\square\square}^2 &= \sigma_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} + \sigma_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix}} \\ \sigma_{\square\square}^3 &= \sigma_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \end{smallmatrix}} \end{aligned}$$

したがってそのような直線は 1 本である。

例 0.1.4.10. 条件「 \mathbb{P}^n の 1 つの直線と交わる」に対応する $\mathcal{G}(2, n)$ の Schubert 多様体は

$$\{ V \in \mathcal{G}(2, n) \mid \dim V \cap F^{n-2} \geq 1 \} = \Omega_{(n-3)}$$

であるから、 m 本の直線と交わる直線の本数が有限の値として定まるためには、 $n-3$ が $2(n-2) = 2n-4$ を割り切ることが必要十分である。それは $n = 1, 2, 4, 5$ の場合のみである。

例 0.1.4.11. \mathbb{P}^4 内の 6 つの直線と交わる平面を数える。条件「 \mathbb{P}^4 の 1 つの直線と交わる」に対応する $\mathcal{G}(3, 5)$ の Schubert 多様体は

$$\{ V \in \mathcal{G}(3, 5) \mid \dim V \cap F^3 \geq 1 \} = \Omega_{\square}$$

である。よって σ_{\square}^6 を計算すればよい。

$$\begin{aligned}\sigma_{\square}^2 &= \sigma_{\square\square} + \sigma_{\square} \\ \sigma_{\square}^3 &= 2\sigma_{\square\square} + \sigma_{\square} \\ \sigma_{\square}^4 &= 2\sigma_{\square\square} + 3\sigma_{\square} \\ \sigma_{\square}^5 &= 5\sigma_{\square} \\ \sigma_{\square}^6 &= 5\sigma_{\square}\end{aligned}$$

よってそのような平面は 5 枚である。