0.1 一般線形群の表現と Schur-Weyl 双対性

前節までで対称群の既約表現に関して解説してきたが、次に対称群と表現論的に関係の深い一般線形群の表現について解説する。とくに多項式表現と呼ばれる表現のクラスが、Schur-Weyl 双対性を通して対称群の表現と密接にかかわりあっている。

0.1.1 Schur-Weyl 双対性

次の問題を考察することから始める。V を n 次元ベクトル空間としたとき、テンソル空間 $V^{\otimes k}$ の部分空間として対称テンソル空間 $\mathrm{Sym}^k(V)$, 交代テンソル空間 $\mathrm{Alt}^k(V)$ が

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}^k(V) &= \left\{ v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \,\middle|\, v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)} = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k, \quad \text{for all } \sigma \in \mathfrak{S}_k \right\} \\ \mathrm{Alt}^k(V) &= \left\{ v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \,\middle|\, v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)} = \mathrm{sgn}(\sigma) v_1 \otimes \cdots \otimes v_k, \quad \text{for all } \sigma \in \mathfrak{S}_k \right\}\end{aligned}$$

によって定義された。

$$\dim \mathrm{Sym}^k(V) = \binom{n+k-1}{k}, \qquad \dim \mathrm{Alt}^k(V) = \binom{n}{k}$$

より、$k=2$ の場合

$$\dim \mathrm{Sym}^2(V) + \dim \mathrm{Alt}^2(V) = n^2 = \dim V \otimes V$$

であるから、$\mathrm{Sym}^k(V) \cap \mathrm{Alt}^k(V) = 0$ に注意すれば

$$V \otimes V = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Alt}^2(V)$$

が成り立つ。$k > 2$ のときは次元が足りず、対称テンソルと交代テンソル以外の部分が現れる。その分解を与える規則は何であろうか。特に、表現を含めた分解を考える。

$\sigma \in \mathfrak{S}_k$ に対して、

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}$$

によって $V^{\otimes k}$ を $\mathfrak{S}_k$ の表現とみなす。あるいは同じことだが

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)\sigma = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$$

によって右 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$ 加群とみなす。

さらに、$g \in \mathrm{GL}(V)$ に対して

$$g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_k$$

によって $V^{\otimes k}$ は $\mathrm{GL}(V)$ の表現とみなすこともできる。$V^{\otimes k}$ は $\mathfrak{S}_k$, $\mathrm{GL}(V)$ 両方の作用を同時に受けている。

命題 0.1.1.1. 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, $g \in \mathrm{GL}(V)$ に対して、

$$(g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k))\sigma = g((v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)\sigma)$$

である。

Proof. $u_i = gv_i$ とおく。

$$\begin{aligned}(g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k))\sigma &= (gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_k)\sigma \\ &= (gv_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes gv_{\sigma(k)}) \\ &= g(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}) \\ &= g((v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)\sigma)\end{aligned}$$

よって示せた。 $\square$

$c_{(k)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n], \quad c_{1^k} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ とおくと

$$\mathrm{Sym}^k(V) = V^{\otimes k} c_{(k)}, \qquad \mathrm{Alt}^k(V) = V^{\otimes k} c_{1^k}$$

となるが、命題 0.1.1.1 よりこの 2 つは $\mathrm{GL}(V)$ の表現でもある。よって $k > 2$ のときにも、$\lambda \in \mathcal{P}_k$ に対する Young 対称子 c_λ による像

$$W_\lambda(V) = V^{\otimes k} c_\lambda$$

を考察することは自然である。再び命題 0.1.1.1 より $W_\lambda(V)$ は $\mathrm{GL}(V)$ の部分表現になるが、このとき次が成り立つ。

定理 0.1.1.2 (Schur-Weyl 双対性)**.** $W_\lambda(V)$ は $\mathrm{GL}(V)$ の既約表現であり、$\mathfrak{S}_k \times \mathrm{GL}(V)$ の表現として

$$V^{\otimes k} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_k} S_\lambda \boxtimes W_\lambda(V)$$

が成り立つ。

ポイントになるのは次の補題である。

補題 0.1.1.3. G を有限群, $A = \mathbb{C}[G]$, U を右 A 加群, $B = \mathrm{End}_A(U)$ とおく。

(i) $c \in A$ に対して、左 B 加群として $U \otimes_A Ac \simeq Uc$ が成り立つ。
(ii) $c \in A$ に対して、$W = Ac$ が単純左 A 加群ならば $U \otimes_A W = Uc$ は単純左 B 加群である。が成り立つ。

Proof. (i) 次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd} U \otimes_A A \arrow[r, "\cdot c"] \arrow[d] & U \otimes_A Ac \arrow[r] \arrow[d] & U \otimes_A A \arrow[d] \\ U \arrow[r, "\cdot c"] & Uc \arrow[r] & U \end{tikzcd}$$

ここで $\cdot c$ は c 倍写像 (全射) であり、$U \otimes_A Ac \to U \otimes_A A$, $U_c \to U$ は埋め込み (単射), 両端の縦の写像は自然な同型である。このとき Diagram Chasing をすれば中央の縦の写像も同型になることがわかる。

(ii) U が単純右 A 加群である場合を考える。このとき Schur の補題から $B \simeq \mathbb{C}$ であることに注意する。$\dim_{\mathbb{C}} U \otimes_A W \leq 1$ であることを示せばよい。Wedderburn の構造定理より、

$$A \simeq \prod_{i=1}^{r} M_{m_i}(\mathbb{C})$$

である。W は A の極小左イデアルなので、W は

$$W = \{ (M_1, \cdots, M_i, \cdots, M_r) \mid M_k = 0, (k \neq i), M_i \in I_\alpha \} = 0 \times \cdots \times I_\alpha \times \cdots \times 0$$

$$I_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{m_i} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a_1, a_2 \cdots, a_{m_i} \in \mathbb{C}\text{は第 } \alpha \text{ 列} \right\}$$

このような形になる。同様に U を A の極小右イデアルと同一視すれば[*1]、

$$U = \{ (M_1, \cdots, M_j, \cdots, M_r) \mid M_k = 0, (k \neq j), M_j \in J_\beta \} = 0 \times \cdots \times J_\beta \times \cdots \times 0$$

$$J_\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{m_j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a_1, a_2 \cdots, a_{m_j} \in \mathbb{C}\text{は } \beta \text{ 行} \right\}$$

となるから、

$$U \otimes_A W = \begin{cases} J_\beta \otimes_{M_{m_i}(\mathbb{C})} I_\alpha = \mathbb{C}E_{\beta\alpha} & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となることがわかる。よって $\dim_{\mathbb{C}}(U \otimes_A W) \leq 1$ であるから単純である。
一般の U については、A の半単純性より U を単純右 A 加群の直和 $U \simeq \bigoplus_i U_k^{\oplus n_k}$ に分解しておいて、再び Schur の補題から

$$B = \mathrm{End}_A(U) = \mathrm{End}_A(\bigoplus_k U_k^{\oplus n_k}) = \bigoplus_k \mathrm{End}_A(U_k^{\oplus n_k}) = \prod_k M_{n_k}(\mathbb{C})$$

また、前半に示したことにより

$$U \otimes_A W = \bigoplus_k (U_k \otimes_A W)^{\oplus n_k} \simeq \mathbb{C}^{\oplus n_i}$$

となる。実際、$U_j \otimes_A W \simeq \mathbb{C}$ ならば $U_j = 0 \times \cdots \times J_\beta \times \cdots \times 0$ と表した時、J_β は i 番目の位置になければならないから、$U_j \simeq U_i$ となる。$\mathbb{C}^{\oplus n_i}$ は単純左 $M_{n_i}(\mathbb{C})$ 加群であるから、$U \otimes_A W$ は単純左 B 加群である。

□

補題 0.1.1.4. V を n 次元ベクトル空間とする。$\mathrm{Sym}^k(V)$ は $\{v \otimes \cdots \otimes v\}_{v \in V}$ によって生成される

Proof. n 変数 k 次斉次多項式のなすベクトル空間を S とおく。主張は S が 1 次斉次多項式の k 乗で生成されることと同値である。単項式

$$x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, \quad i_1 + \cdots + i_n = k$$

が生成されることを示せば十分である。$f_0(x_1, \cdots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n)^k$ とおく。

$$f_1(x_1, \cdots, x_n) = f_0(2x_1, x_2, \cdots, x_n) - 2^k f_0(x_1, \cdots, x_n)$$

[*1] G の正則表現はすべての既約表現を直和因子に含むことに注意すればわかる。

とすれば、f_1 は x_1^k を含む項をもたない。次に

$$f_2(x_1, \cdots, x_n) = f_1(2x_1, x_2, \cdots, x_n) - 2^{k-1} f_1(x_1, \cdots, x_n)$$

とすれば f_2 は x_1^k, x_1^{k-1} を含む項をもたない。この操作を i_1 以外に対して行えば、最終的に $x_1^{i_1}$ を含む項以外をもたないような多項式 $g_0(x_1, \cdots, x_n)$ を得る。そして g_0 は作り方から、一次斉次多項式の k 乗の線形結合で表される。同様に

$$g_1(x_1, \cdots, x_n) = g_0(x_1, 2x_2, x_3, \cdots, x_n) - 2^k g_0(x_1, \cdots, x_n)$$

とすれば g_1 は x_2^k を含む項をもたない。再びこの操作を繰り返して $x_1^{i_1}$, $x_2^{i_2}$ を含む項以外をもたないような多項式を得る。これを繰り返していけば、有限回のうちに $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$ を作ることができる。 $\square$

補題 0.1.1.5. A を $\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ における $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$ の像とし、B を $\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ における $\mathbb{C}[\mathrm{GL}(V)]$ の像とする。$B = \mathrm{End}_A(V^{\otimes k})$ が成り立つ。

Proof. $\mathrm{End}_A(V^{\otimes k}) = (\mathrm{End}(V^{\otimes k}))^{\mathfrak{S}_n} = (\mathrm{End}(V)^{\otimes k})^{\mathfrak{S}_n} = \mathrm{Sym}^k(\mathrm{End}(V))$ であるから補題 0.1.1.4 より、$\mathrm{End}_A(V^{\otimes k})$ は $\{X \otimes \cdots \otimes X\}_{X \in \mathrm{End}(V)}$ によって生成される。$\mathrm{GL}(V) \subset \mathrm{End}(V)$ なのであるから、$B \subset \mathrm{End}_A(V^{\otimes k})$ は直ちに従う。$g \in \mathrm{GL}(V)$ に対して $g \otimes \cdots \otimes g$ が生成する $\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ の部分代数を B' とする。任意の (正則とは限らない)$X \in \mathrm{End}(V)$ に対して $X \otimes \cdots \otimes X$ が B' に含まれることを示せばよい。$X + tE$ は有限個の t を除いて正則である[*2] から、X に収束する $\mathrm{GL}(V)$ の点列 $(X + t_i E)$ が存在する[*3]。$\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ は有限次元であるから B' は閉部分空間であるので、

$$X^{\otimes k} = \lim_{i \to \infty} (X + t_i E)^{\otimes k} \in B'$$

が成り立つ[*4] $\square$

定理 0.1.1.2 を証明しよう

Proof. 補題 0.1.1.3 と補題 0.1.1.4, 補題 0.1.1.5 より、

$$W_\lambda(V) = V^{\otimes k} c_\lambda = V^{\otimes k} \otimes_{\mathbb{C}[G]} \mathbb{C}[G] c_\lambda$$

は単純 $\mathrm{GL}(V)$ 加群であることが従う。ここで、$V^{\otimes k}$ は左 $A = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$ 加群とみなすこともできたことを思い出す。

$$\sigma \in \mathcal{H}_\lambda \implies \sigma^{-1} \in \mathcal{H}_\lambda$$
$$\tau \in \mathcal{V}_\lambda \implies \tau^{-1} \in \mathcal{V}_\lambda$$

が成り立つことに注意すると、

$$c_\lambda V^{\otimes k} = V^{\otimes k} c_\lambda$$

となることがわかる。

命題**??**より、

$$V^{\otimes k} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_k} S_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_A(S_\lambda, V^{\otimes k})$$

[*2] 行列式は t の多項式

[*3] すなわち $\mathrm{GL}(V)$ は $\mathrm{End}(V)$ の稠密集合

[*4] 表現は連続であるからこのような極限操作が可能である。

となる。$B = \mathrm{GL}(V)$ 加群として $\mathrm{Hom}_A(S_\lambda, V^{\otimes k}) \simeq W_\lambda(V)$ となることを示せばよい。$S_\lambda = Ac_\lambda$ であるから、$\phi : \mathrm{Hom}_A(S_\lambda, V^{\otimes k}) \to W_\lambda(V)$ を

$$\phi(f) = f(c_\lambda) = f(c_\lambda^2) = c_\lambda f(c_\lambda)$$

によって定める[*5]。$b \in \mathrm{End}_A(V^{\otimes k}) = \mathrm{GL}(V)$ に対して、

$$\phi(bf) = c_\lambda bf(c_\lambda) = b(c_\lambda f(c_\lambda)) = b\phi(f)$$

より ϕ は左 B 加群の準同型である。$S_\lambda = Ac_\lambda$, $W_\lambda(V) = c_\lambda V^{\otimes k}$ より、ϕ は全単射である。 □

系 0.1.1.6. $\lambda \in \mathcal{P}_k$ に対して、$d_\lambda = \dim_{\mathbb{C}} S_\lambda$ とおく。$\mathrm{GL}(V)$ の表現として

$$V^{\otimes k} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_k} W_\lambda(V)^{\otimes d_\lambda}$$

が成り立つ。

例 0.1.1.7. $\dim V = n$ とする。λ が n 行よりも長い Young 図形のとき $W_\lambda(V) = 0$ となることを示す。λ の共役 Young 図形を $\lambda^* = (\lambda_1^*, \cdots, \lambda_s^*)$, $\lambda_1^* > n$ とおく。このとき、

$$b_\lambda = \left(\sum_{\mathfrak{S}_{\lambda_s^*}} \mathrm{sgn}(\sigma_s)\sigma_s \right) \cdots \left(\sum_{\mathfrak{S}_{\lambda_1^*}} \mathrm{sgn}(\sigma_1)\sigma_1 \right)$$

と書くことができる。$\tilde{b}_\lambda = \sum_{\mathfrak{S}_{\lambda_1^*}} \mathrm{sgn}(\sigma_1)\sigma_1$ とする。

例：$\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 5 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$, のとき $b_\lambda = \left(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}(\{5,6\})} \mathrm{sgn}(\tau)\tau \right) \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(\{1,2,3,4\})} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma \right), \tilde{b}_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(\{1,2,3,4\})} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma$

$V^{\otimes k}$ を λ の各箱に V の元が書かれているものと同一視する。V の基底を $e_1, \cdots, e_n$ とすれば $V^{\otimes k}$ の元は $e_1, \cdots, e_n$ を λ の各箱に配置した元で生成される。

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \text{ のとき } V^{\otimes k} = \langle \{ \begin{array}{|c|c|}\hline e_{i_1} & e_{i_5} \\ \hline e_{i_2} & e_{i_6} \\ \hline e_{i_3} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} e_{i_4} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \}_{i_1, \cdots, i_6} \rangle$$

このとき、$\lambda_1^* > n$ より、$e_{i_1}, \cdots, e_{i_{\lambda_1^*}}$ には必ず重複がある。よって

$$\tilde{b}_\lambda(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\lambda_1^*}}) = 0$$

であるから、$b_\lambda V^{\otimes k} = 0$ である。

[*5] c_λ は適当にスカラー倍することでべき等元であった

例 0.1.1.8. $k=3,\ n>k$ とする。$\lambda = \ydiagram{2,1}$ として

$$V^{\otimes 3} = \mathrm{Sym}^3(V) \oplus (S_\lambda \boxtimes W_\lambda(V)) \oplus \mathrm{Alt}^3(V)$$

であり、$\dim S_\lambda = 2$ であるので

$$\dim W_\lambda(V) = \frac{1}{2}(n^3 - \dim \mathrm{Sym}^3(V) - \dim \mathrm{Alt}^3(V)) = \frac{1}{12}(4n^3 - 3n^2 - 13n - 6)$$

0.1.2　一般線形群の表現に対する指標

前節で Weyl 表現という一般線形群の既約表現を構成したが、これらが互いに同型でないことは示していなかった。本節ではこれを示し、さらに表現の指標を導入する。指標は有限群の場合のように、ある意味で表現を特徴づけるものであり、一般線形群においても強力な道具となる。

定義 0.1.2.1. $\rho : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(W)$ を表現とする。H を $\mathrm{GL}(V)$ の対角行列のなす部分群とする。$\mathrm{ch}_W : H \to \mathbb{C}$ を

$$\mathrm{ch}_W(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$$

によって定め、ρ の指標という。

例 0.1.2.2. $\lambda = (k) \in \mathcal{P}_k,\ \dim_{\mathbb{C}} V = n > k$ とする。$\mathrm{ch}_\lambda = \mathrm{ch}_{W_\lambda(V)}$ とすると、$g \in H$ に対して、g の固有値を $x_1, \cdots, x_n$ とすると、

$$\mathrm{ch}_\lambda(g) = h_k(x_1, \cdots, x_n)$$

となる。実際 $g = \mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n)$ とおくと $\mathrm{Sym}^k(V)$ の基底 $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ に対して

$$g^{\otimes k}(e_{i_1} \cdots e_{i_k}) = x_{i_1} \cdots x_{i_k} e_{i_1} \cdots e_{i_k}$$

である。

例 0.1.2.3. 同様に $\lambda = (1^k)$ ならば、

$$\mathrm{ch}_\lambda(g) = e_k(x_1, \cdots, x_n)$$

である。

有限群の場合と同様、トレースの性質から次が従う。

命題 0.1.2.4. W, U を $\mathrm{GL}(V)$ の表現とする。

(i) $\mathrm{ch}_{W \oplus U} = \mathrm{ch}_W + \mathrm{ch}_U$
(ii) $\mathrm{ch}_{W \otimes U} = \mathrm{ch}_W \mathrm{ch}_U$

が成り立つ。

定理 0.1.2.5. $\lambda \in \mathcal{P}_k,\ \dim_{\mathbb{C}} V = n$ とする。$W_\lambda(V)$ の指標を ch_λ とおくと、$g = \mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n)$ に対して

$$\mathrm{ch}_\lambda(g) = s_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$$

が成り立つ。

Proof. $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_s)$ とする。補題 0.1.1.3 を $M_\lambda = Aa_\lambda$ に用いて、

$$V^{\otimes k} a_\lambda \simeq V^{\otimes k} \otimes_A M_\lambda$$

a_λ の定義から、

$$V^{\otimes k} a_\lambda = \mathrm{Sym}^{\lambda_1}(V) \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Sym}^{\lambda_s}(V) = W_{(\lambda_1)}(V) \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} W_{(\lambda_s)}(V)$$

となる。Young の規則 (系**??**) より

$$M_\lambda = S_\lambda \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} S_\mu^{\oplus k_{\lambda\mu}} = Ac_\lambda \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} Ac_\mu^{\oplus k_{\lambda\mu}}$$

したがって、

$$W_{(\lambda_1)}(V) \otimes \cdots \otimes W_{(\lambda_s)}(V) \simeq W_\lambda(V) \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} W_\mu(V)^{\oplus k_{\lambda\mu}}$$

両辺の指標をとれば

$$h_\lambda = \mathrm{ch}_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} k_{\lambda\mu} \mathrm{ch}_\mu$$

よって帰納法により従う。 □

系 0.1.2.6. $W_\lambda(V) \simeq W_\mu(V)$ であることと $\lambda = \mu$ は同値である。

Proof. 定理 0.1.2.5 より $\lambda \neq \mu$ ならば指標が異なる。 □

系 0.1.2.7. W, U を $\mathrm{GL}(V)$ の表現で、ともに Weyl 表現の直和で表されるものとする。$W \simeq U$ となるための必要十分条件はその指標が等しいことである。

Proof. Schur 多項式の一次独立性から従う。 □

定理 0.1.2.5 の証明中に現れた式を再掲しておく

系 0.1.2.8 (Young の規則)**.**

$$W_{(\lambda_1)}(V) \otimes \cdots \otimes W_{(\lambda_s)}(V) \simeq W_\lambda(V) \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} W_\mu(V)^{\oplus k_{\lambda\mu}}$$

が成り立つ。ただし $k_{\lambda\mu}$ は Kostka 数である。

系 0.1.2.9 (Littlewood-Richardson 規則)**.** 2 つの Young 図形 λ, μ に対して、

$$W_\lambda(V) \otimes_{\mathbb{C}} W_\mu(V) \simeq \bigoplus_\nu W_\nu(V)^{\oplus \eta_{\lambda\mu}^\nu}$$

が成り立つ。ただし $\eta_{\lambda\mu}^\nu$ は Littlewood-Richardson 数である。

Proof. $W_\lambda(V) \otimes_{\mathbb{C}} W_\mu(V)$ が Weyl 表現の直和に表されることを示せばよい。$\lambda \in \mathcal{P}_k$, $\mu \in \mathcal{P}_l$ とする。

$$\begin{aligned} W_\lambda(V) \otimes_{\mathbb{C}} W_\mu(V) &\simeq V^{\otimes k} c_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} V^{\otimes l} c_\mu \\ &\simeq V^{\otimes (k+l)} (c_\lambda \otimes c_\mu) \end{aligned}$$

ここで、$c_\lambda \otimes c_\mu \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_k] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathfrak{S}_l] = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_l] \subset \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]$ である。$c = c_\lambda \otimes c_\mu$ とおく。

$$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]c = \bigoplus_{\nu \in \mathcal{P}_{k+l}} S_\nu^{\oplus t_\nu}$$

とおけば[*6]、補題 0.1.1.3 より

$$\begin{aligned}
V^{\otimes(k+l)}c &\simeq V^{\otimes(k+l)} \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]} \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]c \\
&\simeq V^{\otimes(k+l)} \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]} \bigoplus_{\nu \in \mathcal{P}_{k+l}} S_\nu^{\oplus t_\nu} \\
&\simeq \bigoplus_{\nu \in \mathcal{P}_{k+l}} V^{\otimes(k+l)} \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]} \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]c_\nu^{\oplus t_\nu} \\
&\simeq \bigoplus_{\nu \in \mathcal{P}_{k+l}} W_\nu(V)^{\oplus t_\nu}
\end{aligned}$$

□

*6 実際は個の表現は $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]c = \mathrm{Ind}_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k] \times \mathbb{C}[\mathfrak{S}_l]}^{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]} S_\lambda \boxtimes S_\mu = S_\lambda \circ S_\mu$ に他ならない。