0.1 Grassmann 多様体と Schubert 多様体

0.1.1 Grassmann 多様体

前節の準備をもとに数え上げ問題を定式化しよう。以下では係数体はすべて $\mathbb{C}$ で考えているとする。

定義 0.1.1.1. $\mathbb{C}^n$ の d 次元部分空間全体のなす集合を $\mathcal{G}(d,n)$ と書き、これを Grassmann 多様体という。

Grassmann 多様体が代数多様体の構造をもつことを示しておく。$\mathbb{C}^n$ の d 階交代テンソル空間 $\bigwedge^d \mathbb{C}^n$ を考える。$\bigwedge^d \mathbb{C}^n$ は ${}_nC_d$ 次元ベクトル空間であるから、その射影化 $\mathbb{P}(\bigwedge^d \mathbb{C}^n)$ は $\mathbb{P}^{{}_nC_d-1}$ と同一視することができる。また、$e_1, \cdots, e_n$ を $\mathbb{C}^n$ の標準基底とすれば $\omega \in \bigwedge^d \mathbb{C}^n$ は

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_d \le n} x_{i_1,\cdots,i_d} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d}$$

と表せるので、$p(\omega)$ の斉次座標は

$$p(\omega) = [x_{i_1,\cdots,i_d}]_{1 \le i_1 < \cdots < i_d \le n}$$

のように書くことができる。

$V \in \mathcal{G}(d,n)$ に対して、V の基底を $v_1, \cdots, v_d \in \mathbb{C}^n$ とし写像 $\pi : \mathcal{G}(d,n) \to \mathbb{P}^{{}_nC_d-1}$ を

$$\pi(V) = p(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d)$$

とする。ただし p は射影化 $p : \bigwedge^d \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^{{}_nC_d-1}$ である。π は well-defined である。実際、V の別の基底 $u_1, \cdots, u_d$ をとったとき、ある正則行列 $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ が存在して

$$(v_1, \cdots, v_d) = (u_1, \cdots, u_d)P$$

が成り立つから、$P = (a_{ij})$ とおけば

$$\begin{aligned} p(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d) &= p\left((a_{11}u_1 + \cdots + a_{d1}u_d) \wedge \cdots \wedge (a_{d1}u_1 + \cdots + a_{dd}u_d)\right) \\ &= p(\det P(u_1 \wedge \cdots \wedge u_d)) \\ &= p(u_1 \wedge \cdots \wedge u_d) \end{aligned}$$

命題 0.1.1.2 (Plucker 埋め込み)**.** $\pi : \mathcal{G}(d,n) \to \mathbb{P}^{{}_nC_d-1}$ は単射である。

Proof. 次の補題を用いる。

補題 0.1.1.3. $V \in \mathcal{G}(d,n)$ に対してその基底 $v_1, \cdots, v_d$ を固定して、$\omega = v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \in \bigwedge^d \mathbb{C}^n$ とする。$\Gamma_\omega : \mathbb{C}^n \to \bigwedge^{d+1} \mathbb{C}^n$ を

$$\Gamma_\omega(u) = \omega \wedge u$$

によって定めると、

$$\ker \Gamma_\omega = V$$

が成り立つ。

Proof. V の元が $\ker\Gamma_\omega$ に含まれることは明らか。$u \in \ker\Gamma_\omega$ であるとする。$v_1, \cdots, v_d$ を延長して $\mathbb{C}^n$ の基底 $v_1, \cdots, v_d, v_{d+1}, \cdots, v_n$ をとる。

$$u = a_1 v_1 + \cdots + a_d v_d + a_{d+1} v_{d+1} + \cdots + a_n v_n$$

とおく。

$$\begin{aligned} 0 = \omega \wedge u &= v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \wedge (a_1 v_1 + \cdots + a_d v_d + a_{d+1} v_{d+1} + \cdots + a_n v_n) \\ &= a_{d+1} v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \wedge v_{d+1} + \cdots + a_n v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \wedge v_n \end{aligned}$$

となるが、$v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_{d+1}}, (i_1 < \cdots < i_{d+1})$ は 1 次独立であるので、$a_{d+1} = \cdots = a_n = 0$. よって $u \in V$ □

命題の証明に戻る。$\pi(V) = \pi(U)$ であるとする。U の基底を $u_1, \cdots, u_d$ とすると仮定より

$$cu_1 \wedge \cdots \wedge u_d = v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = \omega$$

となる定数 c が存在する。したがって $\Gamma_\omega(u_i) = \omega \wedge u_i = 0$ であるから補題により、$U = \ker\Gamma_\omega = V$ □

$\pi(\mathcal{G}(d,n)) \subset \mathbb{P}^{{}_nC_d - 1}$ が射影多様体の構造をもつことを示す。

定義 0.1.1.4. $\omega \in \bigwedge^d \mathbb{C}^n$ が totally decomposable であるとは、1 次独立な $v_1, \cdots, v_d \in V$ が存在して $\omega = v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$ となることをいう。

補題 0.1.1.5. $\omega \in \bigwedge^d \mathbb{C}^n$ が totally decomposable であることと $\Gamma_\omega : \mathbb{C}^n \to \bigwedge^{d+1} \mathbb{C}^n$ のランクが $n-d$ となることは同値である。

Proof. $\omega = v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$ とおく。このとき補題 0.1.1.3 の証明より $\dim\ker\Gamma_\omega = \dim\langle v_1, \cdots, v_d \rangle = d$ だから $\operatorname{rank}\,\Gamma_\omega = n-d$ である。逆に $\operatorname{rank}\,\Gamma_\omega = n-d$ であるとする。$\dim\ker\Gamma_\omega = d$ だから $\ker\Gamma_\omega$ の基底を $v_1, \cdots, v_d$ をとり、これを延長して $\mathbb{C}^n$ の基底 $v_1, \cdots, v_d, v_{d+1}, \cdots, v_n$ をとって

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_d \le n} c_{i_1, \cdots, i_d} v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d}$$

とおく。すると $\Gamma_\omega(v_j) = 0,\ j = 1, \cdots, d$ より

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \omega = 0 \text{ すなわち } c_{i_1, \cdots, i_d} &= 0 \text{ for } i_1 > 1 \\ v_2 \wedge \omega = 0 \text{ すなわち } c_{i_1, \cdots, i_d} &= 0 \text{ for } i_2 > 2 \\ &\vdots \\ v_d \wedge \omega = 0 \text{ すなわち } c_{i_1, \cdots, i_d} &= 0 \text{ for } i_d > d \end{aligned}$$

よって $\omega = c_{1,2,\cdots,d} v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$ □

$\pi(\mathcal{G}(n,d)) = \left\{ p(\omega) \in \mathbb{P}(\bigwedge^d \mathbb{C}^n) \,\middle|\, \omega \text{ is totally decomposable} \right\}$ である。$e_1, \cdots, e_n \in \mathbb{C}^n$ を標準基底とし、$\omega \in \bigwedge^d \mathbb{C}^n$ を

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_d \le n} x_{i_1, \cdots, i_d} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d}$$

とおく。補題より、$p(\omega) \in \pi(\mathcal{G}(n,d))$ であるための必要十分条件は $\operatorname{rank}\,\Gamma_\omega = n-d$ となることである。この条件は $\Gamma_\omega : \mathbb{C}^n \to \bigwedge^d \mathbb{C}^n$ を行列表示したとき、その $(n-d+1) \times (n-d+1)$ 小行列式がすべて 0 になる

ことと同値である[*1]。そして Γ_ω の小行列式は $x_{i_1,\cdots,i_d}$ の多項式で表されるから、$\pi(\mathcal{G}(n,d))$ は $\mathbb{P}(\bigwedge^d \mathbb{C}^n)$ の代数的集合である。

最後に Grassmann 多様体が既約、すなわち射影多様体の構造を持つことを示そう。

補題 0.1.1.6. X, Y を位相空間, $f : X \to Y$ を連続写像とする。$A \subset X$ が既約であるならば $f(A)$ も既約である。

Proof. $f(A)$ が可約であったとして $f(A) = Z_1 \cup Z_2,\ \varnothing \subsetneq Z_1, Z_2 \subsetneq f(A)$ となる閉集合 Z_1, Z_2 をとる。

$$A \subset f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(Z_1 \cup Z_2) = f^{-1}(Z_1) \cup f^{-1}(Z_2)$$

f は連続であるから $f^{-1}(Z_1), f^{-1}(Z_2)$ は閉集合である。

$$A = (A \cap f^{-1}(Z_1)) \cup (A \cap f^{-1}(Z_2))$$

より A は可約である。 □

命題 0.1.1.7. $\mathcal{G}(n,d)$ は既約である。

Proof. $V \in \mathcal{G}(n,d)$ を固定して、$\alpha : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{G}(n,d)$ を

$$\alpha(P) = PV$$

によって定める。ただし PV は V の基底を $v_1, \cdots, v_d$ とするとき $Pv_1, \cdots, Pv_d$ によって生成される d 次元部分空間を表す。α は全射である。実際任意の d 次元部分空間 $W = \langle\, w_1, \cdots, w_d \,\rangle$ に対して、各 v_i を w_i に写すような n 次正則行列 P をとればよい。また α は多項式写像だから命題**??**より連続である。$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は既約であるから、補題 0.1.1.6 より $\mathcal{G}(n,d)$ も既約である。 □

0.1.2 Shubert 胞体

第 3 章冒頭で述べた数え上げ問題においては $\mathbb{P}^3$ 中の直線全体を考えたいから、$\mathcal{G}(2,4)$ を考察していくことになる。重要な考え方として、ある条件をみたす直線の集合を $\mathcal{G}(2,4)$ の部分多様体としてとらえることで、「複数の条件を満たす直線の数え上げ $\Leftrightarrow$ いくつかの $\mathcal{G}(2,4)$ の部分多様体の交点を数える」という問題の変換を行う。

[*1] Γ_ω のランクは必ず $n-d$ 以上であることに注意。実際、もし $\dim\ker\Gamma_\omega \geq d+1$ であるなら、補題 0.1.1.5 の証明と同様の議論をすると、$\omega = 0$ となってしまう。