

## 0.1 Grassmann 多様体と Schubert 多様体

### 0.1.1 Grassmann 多様体

前節の準備をもとに数え上げ問題を定式化しよう。以下では係数体はすべて  $\mathbb{C}$  で考えているとする。

**定義 0.1.1.1.**  $\mathbb{C}^n$  の  $d$  次元部分空間全体のなす集合を  $\mathcal{G}(d, n)$  と書き、これを Grassmann 多様体という。

Grassmann 多様体が代数多様体の構造をもつことを示しておく。 $\mathbb{C}^n$  の  $d$  階交代テンソル空間  $\bigwedge^d \mathbb{C}^n$  を考える。 $\bigwedge^d \mathbb{C}^n$  は  ${}_nC_d$  次元ベクトル空間であるから、その射影化  $\mathbb{P}(\bigwedge^d \mathbb{C}^n)$  は  $\mathbb{P}^{nC_d-1}$  と同一視することができる。また、 $e_1, \dots, e_n$  を  $\mathbb{C}^n$  の標準基底とすれば  $\omega \in \bigwedge^d \mathbb{C}^n$  は

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n} x_{i_1, \dots, i_d} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}$$

と表せるので、 $p(\omega)$  の斉次座標は

$$p(\omega) = [x_{i_1, \dots, i_d}]_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n}$$

のように書くことができる。

$V \in \mathcal{G}(d, n)$  に対して、 $V$  の基底を  $v_1, \dots, v_d \in \mathbb{C}^n$  とし写像  $\pi : \mathcal{G}(d, n) \rightarrow \mathbb{P}^{nC_d-1}$  を

$$\pi(V) = p(v_1 \wedge \dots \wedge v_d)$$

とする。ただし  $p$  は射影化  $p : \bigwedge^d \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{P}^{nC_d-1}$  である。 $\pi$  は well-defined である。実際、 $V$  の別の基底  $u_1, \dots, u_d$  をとったとき、ある正則行列  $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$  が存在して

$$(v_1, \dots, v_d) = (u_1, \dots, u_d)P$$

が成り立つから、 $P = (a_{ij})$  とおけば

$$\begin{aligned} p(v_1 \wedge \dots \wedge v_d) &= p((a_{11}u_1 + \dots + a_{d1}u_d) \wedge \dots \wedge (a_{d1}u_1 + \dots + a_{dd}u_d)) \\ &= p(\det P (u_1 \wedge \dots \wedge u_d)) \\ &= p(u_1 \wedge \dots \wedge u_d) \end{aligned}$$

**命題 0.1.1.2** (Plucker 埋め込み).  $\pi : \mathcal{G}(d, n) \rightarrow \mathbb{P}^{nC_d-1}$  は単射である。

*Proof.* 次の補題を用いる。

**補題 0.1.1.3.**  $V \in \mathcal{G}(d, n)$  に対してその基底  $v_1, \dots, v_d$  を固定して、 $\omega = v_1 \wedge \dots \wedge v_d \in \bigwedge^d \mathbb{C}^n$  とする。

$\Gamma_\omega : \mathbb{C}^n \rightarrow \bigwedge^{d+1} \mathbb{C}^n$  を

$$\Gamma_\omega(u) = \omega \wedge u$$

によって定めると、

$$\ker \Gamma_\omega = V$$

が成り立つ。

*Proof.*  $V$  の元が  $\ker \Gamma_\omega$  に含まれることは明らか。  $u \in \ker \Gamma_\omega$  であるとする。  $v_1, \dots, v_d$  を延長して  $\mathbb{C}^n$  の基底  $v_1, \dots, v_d, v_{d+1}, \dots, v_n$  をとる。

$$u = a_1 v_1 + \dots + a_d v_d + a_{d+1} v_{d+1} + \dots + a_n v_n$$

とおく。

$$\begin{aligned} 0 = \omega \wedge u &= v_1 \wedge \dots \wedge v_d \wedge (a_1 v_1 + \dots + a_d v_d + a_{d+1} v_{d+1} + \dots + a_n v_n) \\ &= a_{d+1} v_1 \wedge \dots \wedge v_d \wedge v_{d+1} + \dots + a_n v_1 \wedge \dots \wedge v_d \wedge v_n \end{aligned}$$

となるが、  $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{d+1}}$ ,  $(i_1 < \dots < i_{d+1})$  は 1 次独立であるので、  $a_{d+1} = \dots = a_n = 0$ . よって  $u \in V$   $\square$

命題の証明に戻る。  $\pi(V) = \pi(U)$  であるとする。  $U$  の基底を  $u_1, \dots, u_d$  とすると仮定より

$$c u_1 \wedge \dots \wedge u_d = v_1 \wedge \dots \wedge v_d = \omega$$

となる定数  $c$  が存在する。したがって  $\Gamma_\omega(u_i) = \omega \wedge u_i = 0$  であるから補題により、  $U = \ker \Gamma_\omega = V$   $\square$

$\pi(\mathcal{G}(d, n)) \subset \mathbb{P}^{n \cdot C_d - 1}$  が射影多様体の構造をもつことを示す。

**定義 0.1.1.4.**  $\omega \in \bigwedge^d \mathbb{C}^n$  が totally decomposable であるとは、1 次独立な  $v_1, \dots, v_d \in V$  が存在して  $\omega = v_1 \wedge \dots \wedge v_d$  となることをいう。

**補題 0.1.1.5.**  $\omega \in \bigwedge^d \mathbb{C}^n$  が totally decomposable であることと  $\Gamma_\omega : \mathbb{C}^n \rightarrow \bigwedge^{d+1} \mathbb{C}^n$  のランクが  $n - d$  となることは同値である。

*Proof.*  $\omega = v_1 \wedge \dots \wedge v_d$  とおく。このとき補題 0.1.1.3 の証明より  $\dim \ker \Gamma_\omega = \dim \langle v_1, \dots, v_d \rangle = d$  だから  $\text{rank } \Gamma_\omega = n - d$  である。逆に  $\text{rank } \Gamma_\omega = n - d$  であるとする。  $\dim \ker \Gamma_\omega = d$  だから  $\ker \Gamma_\omega$  の基底を  $v_1, \dots, v_d$  をとり、これを延長して  $\mathbb{C}^n$  の基底  $v_1, \dots, v_d, v_{d+1}, \dots, v_n$  をとって

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n} c_{i_1, \dots, i_d} v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_d}$$

とおく。すると  $\Gamma_\omega(v_j) = 0$ ,  $j = 1, \dots, d$  より

$$v_1 \wedge \omega = 0 \text{ すなわち } c_{i_1, \dots, i_d} = 0 \text{ for } i_1 > 1$$

$$v_2 \wedge \omega = 0 \text{ すなわち } c_{i_1, \dots, i_d} = 0 \text{ for } i_2 > 2$$

$$\vdots$$

$$v_d \wedge \omega = 0 \text{ すなわち } c_{i_1, \dots, i_d} = 0 \text{ for } i_d > d$$

よって  $\omega = c_{1,2,\dots,d} v_1 \wedge \dots \wedge v_d$   $\square$

$\pi(\mathcal{G}(n, d)) = \left\{ p(\omega) \in \mathbb{P}(\bigwedge^d \mathbb{C}^n) \mid \omega \text{ is totally decomposable} \right\}$  である。  $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{C}^n$  を標準基底とし、  $\omega \in \bigwedge^d \mathbb{C}^n$  を

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n} x_{i_1, \dots, i_d} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}$$

とおく。補題より、  $p(\omega) \in \pi(\mathcal{G}(n, d))$  であるための必要十分条件は  $\text{rank } \Gamma_\omega = n - d$  となることである。この条件は  $\Gamma_\omega : \mathbb{C}^n \rightarrow \bigwedge^d \mathbb{C}^n$  を行列表示したとき、その  $(n - d + 1) \times (n - d + 1)$  小行列式がすべて 0 になる

ことと同値である\*<sup>1</sup>。そして  $\Gamma_\omega$  の小行列式は  $x_{i_1, \dots, i_d}$  の多項式で表されるから、 $\pi(\mathcal{G}(n, d))$  は  $\mathbb{P}(\bigwedge^d \mathbb{C}^n)$  の代数的集合である。

最後に Grassmann 多様体が既約、すなわち射影多様体の構造を持つことを示そう。

**補題 0.1.1.6.**  $X, Y$  を位相空間、 $f : X \rightarrow Y$  を連続写像とする。 $A \subset X$  が既約であるならば  $f(A)$  も既約である。

*Proof.*  $f(A)$  が可約であったとして  $f(A) = Z_1 \cup Z_2$ ,  $\emptyset \subsetneq Z_1, Z_2 \subsetneq f(A)$  となる閉集合  $Z_1, Z_2$  をとる。

$$A \subset f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(Z_1 \cup Z_2) = f^{-1}(Z_1) \cup f^{-1}(Z_2)$$

$f$  は連続であるから  $f^{-1}(Z_1), f^{-1}(Z_2)$  は閉集合である。

$$A = (A \cap f^{-1}(Z_1)) \cup (A \cap f^{-1}(Z_2))$$

より  $A$  は可約である。 □

**命題 0.1.1.7.**  $\mathcal{G}(n, d)$  は既約である。

*Proof.*  $V \in \mathcal{G}(n, d)$  を固定して、 $\alpha : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{G}(n, d)$  を

$$\alpha(P) = PV$$

によって定める。ただし  $PV$  は  $V$  の基底を  $v_1, \dots, v_d$  とするとき  $Pv_1, \dots, Pv_d$  によって生成される  $d$  次元部分空間を表す。 $\alpha$  は全射である。実際任意の  $d$  次元部分空間  $W = \langle w_1, \dots, w_d \rangle$  に対して、各  $v_i$  を  $w_i$  に写すような  $n$  次正則行列  $P$  をとればよい。また  $\alpha$  は多項式写像だから命題??より連続である。 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  は既約であるから、補題 0.1.1.6 より  $\mathcal{G}(n, d)$  も既約である。 □

## 0.1.2 Shubert 胞体と Schubert 多様体

第 3 章冒頭で述べた数え上げ問題においては  $\mathbb{P}^3$  中の直線全体を考えたいから、 $\mathcal{G}(2, 4)$  を考察していくことになる。重要な考え方として、ある条件をみたす直線の集合を  $\mathcal{G}(2, 4)$  の部分多様体としてとらえることで、「複数の条件を満たす直線の数え上げ  $\Leftrightarrow$  いくつかの  $\mathcal{G}(2, 4)$  の部分多様体の交点を数える」という問題の変換を行う。このように幾何学的な条件をみたす射影空間中の直線や平面などの線形部分多様体をパラメトライズする空間を Schubert 多様体という。

$\mathcal{M}(d, n)$  をランク  $d$  の  $n \times d$  行列全体のなす集合とする。 $\mathcal{M}(d, n)$  は  $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$  が右からの積で作用するが、この軌道空間  $\mathcal{M}(d, n)/\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$  は  $\mathcal{G}(d, n)$  と同一視される。実際、 $\mathbb{C}^n$  の  $d$  次元部分空間に対して、その基底を並べた行列を考えればそれは  $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$  軌道の違いを除いて一意的である。 $A \in \mathcal{M}(d, n)$  に対してその  $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$  軌道を  $[A]$  と書く。正則行列を右からかけることはいくつかの列基本変形を施すことと同値だから、 $[A] \in \mathcal{G}(d, n)$  に対して、 $A$  の第 1 列から順に列基本変形を行えば、 $[A] = [(a_{ij})]$  はある  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq n$  があって  $A$  の第  $i_1, \dots, i_d$  行を取り出した小正方行列が単位行列であり、 $(i_1, 1), (i_2, 2), \dots, (i_d, d)$  成分よりも右上の成分がすべて 0 になる。式で表すと

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \leq i_j - 1 \text{ or } i = i_k, j \leq k - 1 \text{ for some } 1 \leq k \leq d \\ 1 & \text{if } i = i_k, j = k \text{ for some } 1 \leq k \leq d \end{cases} \quad (1)$$

---

\*<sup>1</sup>  $\Gamma_\omega$  のランクは必ず  $n - d$  以上であることに注意。実際、もし  $\dim \ker \Gamma_\omega \geq d + 1$  であるなら、補題 0.1.1.5 の証明と同様の議論をすると、 $\omega = 0$  となってしまう。

をみたすということである。

**例 0.1.2.1.**  $[A] \in \mathcal{G}(2, 4)$  は次のいずれかの形になる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & 0 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ただし  $*$  の部分には任意の複素数が入る。

**定義 0.1.2.2.**  $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leq n$  に対して

$$\Omega_{i_1, \dots, i_d}^\circ = \{ [(a_{ij})] \in \mathcal{G}(d, n) \mid a_{ij} \text{ satisfies the condition (1)} \}$$

を Schubert 胞体という。

上の議論から、

$$\mathcal{G}(d, n) = \bigcup_{1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n} \Omega_{i_1, \dots, i_d}^\circ$$

が成り立つ。

**例 0.1.2.3.**  $\mathcal{G}(2, 4)$  の場合

$$\Omega_{1,2}^\circ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad \Omega_{1,3}^\circ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}, \quad \Omega_{1,4}^\circ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & 0 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{2,3}^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}, \quad \Omega_{2,4}^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega_{3,4}^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Omega_{i_1, \dots, i_d}^\circ$  に含まれる  $*$  の数を  $k$  とすれば  $\Omega_{i_1, \dots, i_d}^\circ$  は  $\mathbb{A}^k$  に同相であるから  $\dim \Omega_{i_1, \dots, i_d}^\circ = k$  である。

Schubert 胞体と Young 図形の関係について述べておく。 $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n$  に対して、

$$\lambda_k = i_{d+1-k} - d - 1 + k \quad (2)$$

とおくと、 $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$  は  $d \times (n-d)$  の部分 Young 図形になる。逆に式 (2) によって  $d \times (n-d)$  の部分 Young 図形から Schubert 胞体を得ることができる。そこで  $\mathcal{Y}_d(n)$  を  $d \times (n-d)$  の部分 Young 図形全体のなす集合とし、 $\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)$  に対応する Schubert 胞体を  $\Omega_\lambda^\circ$  と表すことにする。

式 (2) の対応関係をもう少し詳しく説明する。 $d \times (n-d)$  の Young 図形を用意し、各辺に沿って一番左下の頂点から一番右上の頂点に行く最短経路を考える。そのパターンは、各ステップごとに上に行くか右に行くかを選べば決まる。右上にたどり着くためにはどこかで必ず  $d$  上に行く選択をしなければならないから、 $i_1, \dots, i_d$  ステップ目で上に行き、それ以外では右に行くとするれば、1 つ最短経路が定まる。この最短経路によって分けられる  $d \times (n-d)$  Young 図形の左上の部分、に対応する Young 図形  $\lambda$  とするのである。

|             |     |  |       |  |  |  |          |       |
|-------------|-----|--|-------|--|--|--|----------|-------|
|             | $n$ |  |       |  |  |  |          |       |
| $\lambda_1$ |     |  |       |  |  |  |          | $i_d$ |
| $\lambda_2$ |     |  |       |  |  |  | $\ddots$ |       |
| $\vdots$    |     |  |       |  |  |  |          |       |
| $\lambda_d$ |     |  | $i_1$ |  |  |  |          |       |

またこのとき対応する  $\lambda$  は、 $A$  から  $i_1, \dots, i_d$  行と  $*$  の入っている部分を取り除いてできる形 (を  $90^\circ$  左に開店したもの) と同じである。

例 0.1.2.4.

$$\begin{aligned} \Omega_{\emptyset}^{\circ} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}, & \Omega_{\square}^{\circ} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & \boxed{0} \\ 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}, & \Omega_{\square\square}^{\circ} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & \boxed{0} \\ * & \boxed{0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Omega_{\square}^{\circ} &= \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}, & \Omega_{\square\square}^{\circ} &= \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} \\ 1 & 0 \\ * & \boxed{0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \Omega_{\square\square\square}^{\circ} &= \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\square$  で囲った成分のなす形と Young 図形とが対応している。

定義 0.1.2.5 (標準的な旗に付随する Schubert 多様体).  $\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)$  に対して、

$$\Omega_{\lambda} = \bigsqcup_{\mu \supset \lambda} \Omega_{\mu}^{\circ}$$

を Schubert 多様体という。ここで  $\mu \supset \lambda \Leftrightarrow \mu_k \geq \lambda_k$  for all  $k = 1, \dots, d$  である。

ここで定義した Schubert 多様体は、正確には標準的な旗に付随する Schubert 多様体と呼ぶべきものである。旗の概念は後で定義するが、一般の Schubert 多様体はこの標準的な Schubert 多様体のもつ幾何学的な性質を一般化する形で定める。

命題 0.1.2.6.  $\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)$  とする。  $e_1, \dots, e_n$  を  $\mathbb{C}^n$  の標準基底とし  $F^k = \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$  とおく。

$$\Omega_{\lambda} = \{ V \in \mathcal{G}(d, n) \mid \dim(V \cap F^{\lambda_k + d - k}) \geq k \}$$

が成り立つ。

*Proof.*  $\mu \supset \lambda$  とする。式 (2) によって  $\lambda, \mu$  に対応する整数列をそれぞれ  $(i_1, \dots, i_d), (j_1, \dots, j_d)$  とする。すなわち

$$i_k = \lambda_{d+1-k} + k, \quad j_k = \mu_{d+1-k} + k$$

である。 $\mu \supset \lambda$  より  $j_k \geq i_k$  である。

$V \in \Omega_\mu^\circ$  はベクトル

$$\begin{aligned} v_1 &= e_{j_1} + f_1, & f_1 &\in \langle e_{j_1+1}, \dots, e_n \rangle = F^{j_1} \\ v_2 &= e_{j_2} + f_2, & f_2 &\in \langle e_{j_2+1}, \dots, e_n \rangle = F^{j_2} \\ &\vdots \\ v_d &= e_{j_d} + f_d, & f_d &\in \langle e_{j_d+1}, \dots, e_n \rangle = F^{j_d} \end{aligned}$$

を適当にとって  $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_d \rangle$  とできる。  $\lambda_k + d - k = (i_{d+1-k} - d - 1 + k) + d - k = i_{d+1-k} - 1$  であるが、  $\dim(V \cap F^{i_{d+1-k}-1}) \geq k$  を示そう。  $v_{d+1-k}, v_{d+2-k}, \dots, v_d \in F^{j_{d+1-k}-1}$  である。  $j_k \geq i_k$  であるから  $F^{j_{d+1-k}-1} \subset F^{i_{d+1-k}-1}$ 。 したがって

$$\dim(V \cap F^{i_{d+1-k}-1}) \geq k$$

である。

逆に  $V \in \mathcal{G}(d, n)$  が  $\dim(V \cap F^{i_{d+1-k}-1}) \geq k$  を満たしているとする。 このとき  $V$  の基底  $v_1, \dots, v_d$  として次の条件を満たすものがとれる。

$$\begin{aligned} v_d &\in V \cap F^{i_d-1} \\ v_{d-1} &\in V \cap F^{i_{d-1}-1} \setminus F^{i_d-1} \\ &\vdots \\ v_1 &\in V \cap F^{i_1-1} \setminus F^{i_2-1} \end{aligned}$$

よって標準基底に関して成分表示すると

$$\begin{aligned} v_d &= c_{i_d}^{(d)} e_{i_d} + \dots + c_n^{(1)} e_n \\ v_{d-1} &= c_{i_{d-1}}^{(d-1)} e_{i_{d-1}} + \dots + c_{i_d-1}^{(d-1)} e_{i_d-1} + c_{i_d}^{(d-1)} e_{i_d} + \dots + c_n^{(d-1)} e_n \\ &\vdots \\ v_1 &= c_{i_1}^{(1)} e_{i_1} + \dots + c_{i_2-1}^{(1)} e_{i_2-1} + \dots + c_{i_d}^{(1)} e_{i_d} + \dots + c_n^{(1)} e_n \end{aligned}$$

となるが、上の条件より

$$\begin{aligned} c_{i_d}^{(d)}, \dots, c_n^{(d)} &\text{ は同時に 0 にならない} \\ c_{i_{d-1}}^{(d-1)}, \dots, c_{i_d-1}^{(d-1)} &\text{ は同時に 0 にならない} \\ &\vdots \\ c_{i_1}^{(1)}, \dots, c_{i_2-1}^{(1)} &\text{ は同時に 0 にならない} \end{aligned}$$

が成り立つ。 各  $k$  において 0 でない  $c_{i_k}^{(k)}, \dots, c_n^{(k)}$  のうち最も左にあるものを  $c_{j_k}^{(k)}$  とおいて、  $v_k$  を  $\frac{1}{c_{j_k}^{(k)}} v_k$  で置き換えれば、

$$\begin{aligned} v_d &= e_{j_1} + f_1, & f_1 &\in \langle e_{j_1+1}, \dots, e_n \rangle = F^{j_1} \\ v_{d-1} &= e_{j_2} + f_2, & f_2 &\in \langle e_{j_2+1}, \dots, e_n \rangle = F^{j_2} \\ &\vdots \\ v_d &= e_{j_d} + f_d, & f_d &\in \langle e_{j_d+1}, \dots, e_n \rangle = F^{j_d} \end{aligned}$$

の形にすることができる。これは  $V = \langle v_1, \dots, v_d \rangle$  が  $V \in \Omega_{j_1, \dots, j_d}^\circ$  であることに他ならないが、 $j_k \geq i_k$  であるので、 $j_1, \dots, j_d$  の対応する Young 図形を  $\mu$  とすれば  $\mu \supset \lambda$  である。  $\square$

**命題 0.1.2.7.**  $\lambda \neq \mu$  ならば、 $\Omega_\lambda^\circ \cap \Omega_\mu^\circ = \emptyset$  である。

*Proof.*  $\lambda, \mu$  に対応する整数列をそれぞれ  $(i_1, \dots, i_d), (j_1, \dots, j_d)$  とおく。  $V \in \Omega_\lambda^\circ$  とすると、 $V$  の基底  $v_1, \dots, v_d$  を

$$\begin{aligned} v_1 &= e_{i_1} + f_1, & f_1 &\in \langle e_{i_1+1}, \dots, e_n \rangle = F^{i_1} \\ v_2 &= e_{i_2} + f_2, & f_2 &\in \langle e_{i_2+1}, \dots, e_n \rangle = F^{i_2} \\ &\vdots \\ v_d &= e_{i_d} + f_d, & f_d &\in \langle e_{i_d+1}, \dots, e_n \rangle = F^{i_d} \end{aligned}$$

となるように取れる。さらにもし  $V \in \Omega_\mu^\circ$  でもあるなら  $V$  の別の基底  $w_1, \dots, w_d$  で

$$\begin{aligned} w_1 &= e_{j_1} + s_1, & s_1 &\in \langle e_{j_1+1}, \dots, e_n \rangle = F^{j_1} \\ w_2 &= e_{j_2} + s_2, & s_2 &\in \langle e_{j_2+1}, \dots, e_n \rangle = F^{j_2} \\ &\vdots \\ w_d &= e_{j_d} + s_d, & s_d &\in \langle e_{j_d+1}, \dots, e_n \rangle = F^{j_d} \end{aligned}$$

となるものが存在する。ここで  $j_k \neq \{i_1, \dots, i_d\}$  なる  $j_k$  に対して、 $w_k \neq \langle v_1, \dots, v_d \rangle$  であることを示す。もし

$$w_k = c_1 v_1 + \dots + c_d v_d$$

となったとする。このとき

$$e_{j_k} + s_k = c_1 e_{i_1} + \dots + c_d e_{i_d} + c_1 f_1 + \dots + c_d f_d$$

だが、 $i_1 < \dots < i_t < j_k < i_{t+1} < \dots < i_d$  として両辺  $F^{j_k}$  の剰余類を取れば

$$\overline{e_{j_k}} = c_1 \overline{e_{i_1}} + \dots + c_t \overline{e_{i_t}} + c_1 \overline{f_1} + \dots + c_t \overline{f_t}$$

となる。 $\overline{e_{i_1}} \in (F^{i_1-1}/F^{j_k}) \setminus (F^{i_1}/F^{j_k})$  かつ、それ以外のすべての元は  $F^{i_1}/F^{j_k}$  に含まれている。したがって  $c_1 = 0$  でなければならない。 $e_{i_2}$  に同様の議論をして  $c_2 = 0$ 。結局  $c_t = 0$  までが言えるので、 $\overline{e_{j_k}} = 0$  すなわち  $e_{j_k} \in F^{j_k}$  となるがこれは矛盾である。  $\square$

**系 0.1.2.8.** Grassmann 多様体は Schubert 胞体の直和である。

$$\mathcal{G}(d, n) = \bigsqcup_{\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)} \Omega_\lambda^\circ$$

**定義 0.1.2.9.**  $\mathbb{C}^n$  の部分空間の列

$$\mathbb{C}^n = F^0 \supset F^1 \supset \dots \supset F^{n-1} \supset F^n = 0, \quad \dim F^k = n - k$$

を旗といい、 $F^\bullet$  と表す。とくに  $e_1, \dots, e_n$  を標準基底として  $F^k = \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$  なる旗を標準旗といい  $F_{st}^\bullet$  と表す。 $\mathbb{P}^{n-1}$  の線形部分多様体は  $\mathbb{C}^n$  の部分空間と 1 対 1 に対応することを思い出せば、旗の各部分空間を射影化することで  $\mathbb{P}^{n-1}$  の線形部分多様体の列を得る。

例 0.1.2.10.  $\mathbb{C}^4$  において旗

$$\mathbb{C}^4 = F^0 \supset F^1 \supset F^2 \supset F^3 \supset F^4 = 0$$

の射影化は

$$\mathbb{P}^3 \supset e_0 \supset l_0 \ni p_0 \supset \emptyset$$

である。ここで  $e_0, l_0, p_0$  はそれぞれ  $\mathbb{P}^3$  の平面, 直線, 点である。

命題 0.1.2.6 を一般化して次の定義を得る。

定義 0.1.2.11.  $F^\bullet$  を  $\mathbb{C}^n$  の旗とする。  $\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)$  に対して、

$$\Omega_\lambda(F^\bullet) = \{ V \in \mathcal{G}(d, n) \mid \dim(V \cap F^{\lambda_i + d - i}) \geq i \}$$

を  $F^\bullet$  に付随する Schubert 多様体という

$\mathcal{G}(2, 4)$  において、  $F^\bullet$  を任意の  $\mathbb{C}^4$  の旗としてその射影化を  $\mathbb{P}^3 \supset e_0 \supset l_0 \ni p_0 \supset \emptyset$  とする。このとき

$$\Omega_\emptyset = \mathcal{G}(2, 4)$$

$$\Omega_\square = \{ V \in \mathcal{G}(2, 4) \mid \dim(V \cap F^2) \geq 1 \} \approx \{ l \subset \mathbb{P}^3 : \text{直線} \mid l \cap l_0 \neq \emptyset \}$$

$$\Omega_{\square\square} = \{ V \in \mathcal{G}(2, 4) \mid \dim(V \cap F^3) \geq 1 \} \approx \{ l \subset \mathbb{P}^3 : \text{直線} \mid l \ni p_0 \}$$

$$\Omega_{\square\square\square} = \{ V \in \mathcal{G}(2, 4) \mid \dim(V \cap F^2) \geq 1, \dim(V \cap F^1) \geq 2 \} \approx \{ l \subset \mathbb{P}^3 : \text{直線} \mid l \cap l_0 \neq \emptyset, l \subset e_0 \}$$

$$\Omega_{\square\square\square\square} = \{ V \in \mathcal{G}(2, 4) \mid \dim(V \cap F^3) \geq 1, \dim(V \cap F^1) \geq 2 \} \approx \{ l \subset \mathbb{P}^3 : \text{直線} \mid l \ni p_0 \neq \emptyset, l \subset e_0 \}$$

$$\Omega_{\square\square\square\square\square} \approx \{ l = l_0 \}$$

となり、Schubert 多様体が幾何学的な条件をみたす射影空間の線形部分多様体をパラメトライズしていることがわかる。

Schubert 胞体・Schubert 多様体の基本的な性質をいくつか示しておく。

旗  $F^\bullet$  と  $g \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  に対して  $gF^\bullet$  を

$$gF^\bullet : \mathbb{C}^n = gF^0 \supset gF^1 \supset \cdots \supset gF^n = 0$$

によって定めれば  $gF^\bullet$  は新しい旗になる。逆に任意の旗  $F^\bullet, E^\bullet$  に対して、  $F^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$ ,  $E^k = \langle w_{k+1}, \dots, w_n \rangle$  となる  $\mathbb{C}^n$  の基底  $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n$  をとって変換行列  $g$  を考えれば、  $gF^\bullet = E^\bullet$  となる。言い換えれば  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  は  $\mathbb{C}^n$  の旗全体のなす集合に推移的に作用する。

命題 0.1.2.12.  $F^\bullet$  を旗、  $g \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  とする。  $g\Omega_\lambda(F^\bullet) = \Omega_\lambda(gF^\bullet)$  である。

*Proof.*

$$\begin{aligned} V \in \Omega_\lambda(gF^\bullet) &\Leftrightarrow \dim(V \cap gF^{\lambda_k + d - k}) \geq k, \text{ for all } k \\ &\Leftrightarrow \dim(g^{-1}V \cap F^{\lambda_k + d - k}) \geq k, \text{ for all } k \\ &\Leftrightarrow g^{-1}V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \\ &\Leftrightarrow V \in g\Omega_\lambda(F^\bullet) \end{aligned}$$

□



任意の旗  $F^\bullet$  に対して、 $F^\bullet$  はある  $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  で  $F^\bullet = gF_{st}^\bullet$  と書けるが、

$$\Omega_\lambda(F_{st}^\bullet) = \bigsqcup_{\mu \supset \lambda} \Omega_\mu^\circ$$

であったから、

$$\Omega_\lambda(F) = \bigsqcup_{\mu \supset \lambda} g\Omega_\mu^\circ$$

そこで、 $g\Omega_\mu^\circ$  を旗  $F^\bullet$  に付随する Schubert 胞体という。