

## 0.1 Grassmann 多様体の交叉理論

### 0.1.1 一般の位置

前節で導入したように、 $\mathbb{P}^n$  の固定された旗に対して、ある特定の位置条件にある線形部分多様体をパラメータづける空間が Schubert 多様体であった。したがって今度は複数の旗に対してそれぞれの Schubert 多様体がどのように交わるかを記述することを考える。ここで重要になるのが 2 つの旗が一般の位置にあるという条件である。これが第 3 章冒頭に述べた「ある程度一般の状況」という言葉の意味である。一般の位置にある 2 つの旗の Schubert 多様体に対してはその次元がうまくふまうことが知られており、それによって交点の数え上げに整った代数的・組み合わせ的計算が現れる。

**定義 0.1.1.1.**  $F^\bullet, E^\bullet$  を  $\mathbb{C}^n$  の旗とする。各  $k$  において

$$F^k \cap E^{n-k} = 0$$

が成り立つとき、 $F^\bullet, E^\bullet$  は一般の位置にあるという。

**例 0.1.1.2.** 旗  $F^\bullet$  に対して  $F^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$  となる基底  $v_1, \dots, v_n$  をとる。 $F_{op}^k$  を

$$F_{op}^k = \langle v_1, \dots, v_{n-k} \rangle$$

とすれば

$$F_{op}^{n-k} \cap F^k = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \cap \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle = 0$$

となるから、 $F^\bullet, F_{op}^\bullet$  は一般の位置にある。 $F_{op}^\bullet$  を  $F^\bullet$  の反対旗という。

**例 0.1.1.3.**  $F^\bullet$  を標準旗とする。 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  を  $g = (v_1, \dots, v_n) = (a_{ij})$  とすれば

$$gF^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$$

である。 $F^\bullet, gF^\bullet$  が一般の位置にあるための必要十分条件は、各  $k$  において

$$e_{k+1}, \dots, e_n, v_{n-k+1}, \dots, v_n$$

が一次独立となることである。すなわち  $\det(e_{k+1}, \dots, e_n, v_{n-k+1}, \dots, v_n) \neq 0$  である。よって  $F^\bullet, gF^\bullet$  が一般の位置にあるような  $g$  のなす  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  の部分集合は Zariski 開集合である。Zariski 開集合は稠密であるので、ほとんどすべての旗は一般の位置にあるといってよい。

**命題 0.1.1.4.**  $F^\bullet, E^\bullet$  を一般の位置にある旗とする。 $\mathbb{C}^n$  の基底  $v_1, \dots, v_n$  を適当にとつて、

$$F^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle, \quad E^{n-k} = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

となるようにできる。

*Proof.*  $\dim(E^{n-k} \cap F^{k-1}) = 1$  を示す。まず  $E^{n-k} \cap F^k = 0$  より

$$\dim(E^{n-k} + F^k) = \dim E^{n-k} + \dim F^k - \dim(E^{n-k} \cap F^k) = n$$

よって  $\dim(E^{n-k} + F^{k-1}) = n$  であるから

$$\begin{aligned}\dim(E^{n-k} \cap F^{k-1}) &= \dim E^{n-k} + \dim F^{k-1} - \dim(E^{n-k} + F^{k-1}) \\ &= k + (n - k + 1) - n \\ &= 1\end{aligned}$$

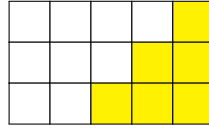
そこで  $v_k$  を  $E^{n-k} \cap F^{k-1}$  の生成元とする。  $\dim E^{n-1} = 1$  だから  $E^{n-1} = \langle v_1 \rangle$  である。  $E^{n-k} = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$  であるとする。

$$v_{k+1} \in E^{n-k-1} \cap F^k$$

であり  $F^k \cap E^{n-k} = 0$  であるから  $v_{k+1} \notin E^{n-k}$  となる。 よって  $E^{n-k-1} = \langle v_1, \dots, v_k, v_{k+1} \rangle$ 。 同様に  $F^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$  も示せる。  $\square$

### 0.1.2 双対定理と交叉条件

**定義 0.1.2.1.**  $\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)$  に対して、  $d \times (n-d)$  長方形から  $\lambda$  を取り除いてできる図形を、  $180^\circ$  回転させて得られる Young 図形を  $\lambda$  の双対といい  $\lambda^\vee$  と書く。



式で書けば  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$  に対し

$$\lambda_i^\vee = n - d - \lambda_{d+1-i}$$

である。

**例 0.1.2.2.**  $d = 2, n = 4$  として

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad \text{なら} \quad \lambda^\vee = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

**定理 0.1.2.3** (双対定理).  $\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_d(n)$  を  $|\lambda| + |\mu| = d(n-d)$  であるとする。  $F^\bullet$  を旗とする。 このとき

$$|\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet)| = \delta_{\lambda\mu^\vee}$$

が成り立つ。

*Proof.*  $F^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$ ,  $F_{op}^k = \langle v_1, \dots, v_{n-k} \rangle$  となる基底  $v_1, \dots, v_n$  をとる。  $i^* = d + 1 - i$  とおく。 すなわち  $i$  が 1 から  $d$  まで動くとき  $i^*$  は  $d$  から 1 へ動く。

$\mu = \lambda^\vee$  であるとする。  $A_i = F^{\lambda_i + d - i}$ ,  $B_i = F_{op}^{\lambda_{i^*}^\vee + d - i^*}$  とおく。 すると  $V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_{\lambda^\vee}(F_{op}^\bullet)$  ならば

$$\dim(V \cap A_i) \geq i, \quad \dim(V \cap B_i) \geq i^*$$

である。 よって

$$\begin{aligned}d &\geq \dim(V \cap A_i + V \cap B_i) \\ &= \dim(V \cap A_i) + \dim(V \cap B_i) - \dim(V \cap A_i \cap B_i) \\ &\geq i + i^* - \dim(V \cap A_i \cap B_i) \\ &= d + 1 - \dim(V \cap A_i \cap B_i)\end{aligned}$$

より

$$\dim(V \cap A_i \cap B_i) \geq 1$$

一方

$$\begin{aligned} A_i &= F^{\lambda_i+d-i} = \langle v_{\lambda_i+d-i+1}, \dots, v_n \rangle \\ B_i &= F_{op}^{\lambda_{i^*}^\vee+d-i^*} \\ &= F_{op}^{n-d-\lambda_{d+1-i^*}+d-i^*} \\ &= F^{n-d-\lambda_i+d-d-1+i} \\ &= F^{(n-(\lambda_i+d-i+1))} \\ &= \langle v_1, \dots, v_{\lambda_i+d-i+1} \rangle \end{aligned}$$

より

$$A_i \cap B_i = \langle v_{\lambda_i+d-i+1} \rangle$$

となるから、

$$v_{\lambda_i+d-i+1} \in V$$

$v_1, \dots, v_n$  は一次独立であるから

$$V = \langle v_{\lambda_1+d}, v_{\lambda_2+d-1}, \dots, v_{\lambda_d+1} \rangle$$

したがって  $\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_{\lambda^\vee}(F_{op}^\bullet)$  は 1 点からなる。

次に  $\mu \neq \lambda^\vee$  であるとする。  $|\lambda| + |\mu| = d(n-d)$  より、ある  $i$  で  $\lambda_i + \mu_{i^*} > n-d$  となる。前半と同様  $A_i = F^{\lambda_i+d-i}$ ,  $B_i = F_{op}^{\mu_{i^*}+d-i^*}$  とおけば

$$\begin{aligned} A_i &= \langle v_{\lambda_i+d-i+1}, \dots, v_n \rangle \\ B_i &= \langle v_1, \dots, v_{n-\mu_{i^*}-d+i^*} \rangle \\ &= \langle v_1, \dots, v_{n-\mu_{i^*}+1-i} \rangle \\ &\subsetneq \langle v_1, \dots, v_{\lambda_i+d-i+1} \rangle \end{aligned}$$

より  $A_i \cap B_i = 0$  であるから、前半と同様の議論をすれば  $V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet)$  とはなりえないことがわかる。  $\square$

**例 0.1.2.4.** 双対定理を例??の場合で考えてみる。例えば  $|\Omega_{\square\square}(F^\bullet) \cap \Omega_{\square}(F_{op}^\bullet)| = 1$  は、「直線  $l_0$  と交わり、点  $p_0$  を通り平面  $e_0$  に含まれるような直線はただ 1 つ」と解釈できる。また  $|\Omega_{\square\square}(F^\bullet) \cap \Omega_{\square\square}(F_{op}^\bullet)| = 1$  は、「与えられた 2 点を通る直線はただ 1 つ」と解釈でき、これも確かにもっともらしい主張である。さらに  $|\Omega_{\square}(F^\bullet) \cap \Omega_{\square}(F_{op}^\bullet)| = 1$  は、「与えられた 2 平面両方に含まれる直線はただ 1 つ」となる。

**系 0.1.2.5** (交叉条件).  $\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_d(n)$  に対して、 $\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet) \neq \emptyset$  となるための必要十分条件はすべての  $i$  に対して  $\lambda_i + \mu_{i^*} \leq n-d$  が成り立つことである。

*Proof.* 必要性から示す。  $V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet)$  ならば、定理 0.1.2.3 の証明と同様にして

$$\dim(V \cap A_i \cap B_i) \geq 1$$

したがって  $A_i \cap B_i \neq 0$  が成り立つ。

$$A_i = \langle v_{\lambda_i+d-i+1}, \dots, v_n \rangle, \quad B_i = \langle v_1, \dots, v_{n-\mu_{i^*}+1-i} \rangle$$

より

$$\begin{aligned}\lambda_i + d - i + 1 &\leq n - \mu_{i^*} + 1 - i \\ \lambda_i + \mu_{i^*} &\leq n - d\end{aligned}$$

逆にすべての  $i$  に対して  $\lambda_i + \mu_{i^*} \leq n - d$  であるならば  $\mu \in \lambda^\vee$  であるから、双対定理により

$$\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet) \supset \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_{\lambda^\vee}(F_{op}^\bullet) \neq \emptyset$$

となる。 □

命題 0.1.1.4 より双対定理・交叉条件は任意の一般の位置にある旗に対しても成り立つことがわかる。実際その証明において

$$F^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle, \quad E^{n-k} = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

なる基底の存在が本質的である。

交叉条件は視覚的には、 $\mu$  を  $180^\circ$  回転させて  $d \times (n - d)$  長方形の右下隅に置いたとき、 $\lambda$  と重なることがないということと同値である。それがちょうど  $\lambda^\vee$  になるときが双対定理の主張である。

### 0.1.3 Schubert 計算

いくつかの代数幾何学的事実を認めて、Schubert 多様体の交点を計算する Schubert 計算について説明する。

**事実 0.1.3.1** (Kleiman の横断性定理 [?],[?]).  $X \subset \mathcal{G}(d, n)$  を部分多様体,  $F^\bullet$  を標準旗とする。このとき  $|\lambda| = k$  なる Young 図形  $\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)$  に対して  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  の稠密な開集合  $U$  が存在して、 $X \cap \Omega_\lambda(gF^\bullet)$  は空であるか、横断的に交わる。とくに  $\mathrm{codim} X = k$  であるなら  $|X \cap \Omega_\lambda(gF^\bullet)|$  は 0 であるか  $g$  によらない一定の値である。

文字の集合  $\{\sigma_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{Y}_d(n), |\lambda|=k}$  で生成される自由  $\mathbb{Z}$  加群を  $A^k(\mathcal{G}(d, n))$  とする。 $X \subset \mathcal{G}(d, n)$  を余次元が  $k$  の部分多様体とすると、事実 0.1.3.1 の値が定まるような十分一般の旗  $F^\bullet$  に対して

$$[X] = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_d(n), |\lambda|=k} |X \cap \Omega_{\lambda^\vee}(F^\bullet)| \sigma_\lambda$$

とする。これを  $X$  のシンボルという。 $\Omega_{\lambda^\vee}(F^\bullet)$  の次元は  $|\lambda| = k$  であるから、 $|X \cap \Omega_{\lambda^\vee}(F^\bullet)|$  は 0 次元、すなわち有限集合となるので係数は自然数として定まる。

**例 0.1.3.2.**  $\Omega_\lambda(F^\bullet)$  は余次元が  $|\lambda|$  であるから、双対定理より

$$[\Omega_\lambda(F^\bullet)] = \sigma_\lambda$$

これを Schubert 類という。

**事実 0.1.3.3** ([?]).  $F^\bullet, E^\bullet$  を一般の位置にある旗とする。 $\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(E^\bullet)$  は余次元が  $|\lambda| + |\mu|$  の既約部分多様体になる。

そこで、 $A^*(\mathcal{G}(d, n)) = \bigoplus_{k=0}^{d(n-d)} A^k(\mathcal{G}(d, n))$  とし、 $\sigma_\lambda \in A^k(\mathcal{G}(d, n))$ ,  $\sigma_\mu \in A^l(\mathcal{G}(d, n))$  に対して、事実 0.1.3.1 の値が定まるような十分一般の  $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  に対して

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = [\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet)] = \sum_{\nu \in \mathcal{Y}_d(n), |\nu|=k+l} |\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet) \cap \Omega_{\nu^\vee}(gF^\bullet)| \sigma_\nu$$

と定め、 $A^*(\mathcal{G}(d, n))$  に積を定義する。これによって  $A^*(\mathcal{G}(d, n))$  は次数付き可換環の構造をもつ ([?])。  $A^*(\mathcal{G}(d, n))$  を Chow 環という。係数  $|\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet) \cap \Omega_{\nu^\vee}(gF^\bullet)|$  を  $\eta_{\lambda\mu}^\nu$  と置く。

次の事実が重要である。

**事実 0.1.3.4** ([?]).  $X, Y \subset \mathcal{G}(d, n)$  をほとんどすべての点で横断的に交わる部分多様体とする。このとき

$$[X][Y] = [X \cap Y]$$

が成り立つ。

交叉をとるという幾何学的な操作がそのシンボルの積という代数的な操作に置き換わっているのである。

**例 0.1.3.5.** 第 3 章冒頭で述べた 4 直線問題について考えよう。例??より

$$|\Omega_\square(F_1^\bullet) \cap \Omega_\square(F_2^\bullet) \cap \Omega_\square(F_3^\bullet) \cap \Omega_\square(F_4^\bullet)|$$

を計算したい。ここで  $F_1^\bullet, F_2^\bullet, F_3^\bullet, F_4^\bullet$  は十分一般にとった旗である。

この値を計算するには、事実 0.1.3.4 より

$$|\Omega_\square(F_1^\bullet) \cap \Omega_\square(F_2^\bullet) \cap \Omega_\square(F_3^\bullet) \cap \Omega_\square(F_4^\bullet)| \sigma_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} = \sigma_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}}^4$$

となるから、 $\eta_{\lambda\mu}^\nu$  を決定したうえで  $\sigma_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}}^4$  を計算すればよい。

ここで例??を再掲しておく。

$$\Omega_\emptyset = \mathcal{G}(2, 4)$$

$$\Omega_\square = \{ V \in \mathcal{G}(2, 4) \mid \dim(V \cap F^2) \geq 1 \} \approx \{ l \subset \mathbb{P}^3 : \text{直線} \mid l \cap l_0 \neq \emptyset \}$$

$$\Omega_{\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix}} = \{ V \in \mathcal{G}(2, 4) \mid \dim(V \cap F^3) \geq 1 \} \approx \{ l \subset \mathbb{P}^3 : \text{直線} \mid l \ni p_0 \}$$

$$\Omega_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}} = \{ V \in \mathcal{G}(2, 4) \mid \dim(V \cap F^2) \geq 1, \dim(V \cap F^1) \geq 2 \} \approx \{ l \subset \mathbb{P}^3 : \text{直線} \mid l \subset e_0 \}$$

$$\Omega_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} = \{ V \in \mathcal{G}(2, 4) \mid \dim(V \cap F^3) \geq 1, \dim(V \cap F^1) \geq 2 \} \approx \{ l \subset \mathbb{P}^3 : \text{直線} \mid p_0 \in l \subset e_0 \}$$

$$\Omega_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} \approx \{ l = l_0 \}$$

$\sigma_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}}^2$  を計算する。大きさ 2 の Young 図形は  $\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix}$  と  $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$  の 2 つで、どちらも自己双対的であるから、

$$\sigma_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}}^2 = \alpha \sigma_{\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix}} + \beta \sigma_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}}$$

である。ここで

$$\alpha = |\Omega_\square(F^\bullet) \cap \Omega_\square(F_{op}^\bullet) \cap \Omega_{\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix}}(gF^\bullet)|, \quad \beta = |\Omega_\square(F^\bullet) \cap \Omega_\square(F_{op}^\bullet) \cap \Omega_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}}(gF^\bullet)|$$

である。

$\alpha$  を求める。 $\Omega_\square(F^\bullet) \cap \Omega_\square(F_{op}^\bullet) \cap \Omega_{\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix}}(gF^\bullet)$  は「2 つの直線  $l_0, l_1$  と交わり、1 点  $p_0$  を通る直線」の全体である。 $p$  を通り  $l_0$  と交わる直線全体の軌跡を考えると、これは 1 つの平面となる。この平面ともう 1 本の直線  $l_1$  は必ず 1 点で交わる (射影空間で考えている!) から、 $\alpha = 1$  である。

次に  $\beta$  を求める。 $\Omega_{\square}(F^{\bullet}) \cap \Omega_{\square}(F_{op}^{\bullet}) \cap \Omega_{\square}(gF^{\bullet})$  は「2 つの直線  $l_0, l_1$  と交わり、1 つの平面  $e_0$  に含まれる直線」の全体である。 $e_0$  と  $l_0$  は 1 点  $p_0$  で交わり、 $e_0$  と  $l_1$  も 1 点  $p_1$  で交わる。よって  $l \cap l_0 \neq \emptyset, l \cap l_1 \neq \emptyset$   $l \subset e_0$  ならば  $p_0, p_1 \in l$  である。2 点を結ぶ直線は一般にただ 1 つだから  $\beta = 1$  である。

よって  $\sigma_{\square}^2 = \sigma_{\square\square} + \sigma_{\square}$  である。同様の考察を行うと、

$$\sigma_{\square\square}\sigma_{\square} = \sigma_{\square}\sigma_{\square\square} = \sigma_{\square\square\square}$$

がわかる。したがって、

$$\sigma_{\square}^4 = 2\sigma_{\square\square\square\square}$$

であるから、一般の位置にある 4 本の直線と交わる直線の数  $\beta$  は 2 である。

#### 0.1.4 Schur 多項式との関係

前小節で 4 直線問題の解を与えたが、Schubert 類の積を計算するために、易しい問題に帰着されたとはいえ幾何学的な考察が必要であった。しかし、実は Grassmann 多様体の Chow 環は対称多項式環と同型であること、さらには Schubert 類は Schur 多項式に対応することが示され、これによって Schubert 計算は完全に組み合わせ論の問題に帰着される。