0.1 一般線形群の表現と Schur-Weyl 双対性

前節までで対称群の既約表現に関して解説してきたが、次に対称群と表現論的に関係の深い一般線形群の表現について解説する。とくに多項式表現と呼ばれる表現のクラスが、Schur-Weyl 双対性を通して対称群の表現と密接にかかわりあっている。

0.1.1 Lie 群と Lie 代数

Schur-Weyl 双対性のために若干の Lie 群・Lie 代数の知識を用いる。

定義 0.1.1.1 (Lie 群)**.** G を群であり複素多様体でもあるとする。G の演算 $\cdot : G \times G \to G$, および逆元を取る写像 ${}^{-1} : G \to G$ がともに正則であるとき、G を (複素)Lie 群という。Lie 群の間の写像 $f : G \to H$ について、f が群準同型かつ正則であるとき f を Lie 群の準同型という。

例 0.1.1.2. $\mathbb{C}$ ベクトル空間 V に対して一般線形群 $\mathrm{GL}\,(V)$ は行列の積に関して Lie 群である。実際、行列の積は成分の多項式であるし、逆行列は分母が 0 でない有理関数で表されるから正則である。同様に $\mathrm{SL}(V)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ も Lie 群である。

定義 0.1.1.3 (Lie 代数)**.** $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ ベクトル空間とする。写像 $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が与えられており

(i) $[\ ,\ ]$ は双線形
(ii) $[x, x] = 0$, (交代性)
(iii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, (Jacobi の恒等式)

をみたすとき、$\mathfrak{g}$ を (複素)Lie 代数という。Lie 代数の積 $[,]$ を括弧積や Lie ブラケットと呼ぶ。Lie 代数の間の写像 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ について、f が線形写像かつ $f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]$ をみたすとき、f を Lie 代数の準同型という。

とくにこの節では Lie 代数はすべて有限次元のものを扱う。

例 0.1.1.4. $\mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}(V)$ とし、$X, Y \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して

$$[X, Y] = XY - YX$$

とおくと $\mathfrak{gl}(V)$ は複素 Lie 代数である。同様の演算で

- $\mathfrak{sl}(V) = \{\, X \in \mathfrak{gl}(V) \mid \mathrm{tr}\,(X) = 0 \,\}$
- $\mathfrak{alt}(V) = \{\, X \in \mathfrak{gl}(V) \mid {}^{t}X = -X \,\}$

なども Lie 代数である。また、一般に $\mathbb{C}$ 代数 A に対して

$$X, Y \in A, \qquad [X, Y] = XY - YX$$

と定めると A は Lie 代数の構造をもつ。逆にすべての Lie 代数がこのように $\mathbb{C}$ 代数から誘導されるか、というのは興味深い問題である。

Lie 代数は Lie 群を調べる際に自然に現れる。G を Lie 群とし、G の単位元 e における接空間 T_eG に積

$[,]$ を

$$\text{正則関数 } f: G \to \mathbb{C} \text{ に対して } [X,Y](f) = X(f)Y(f) - Y(f)X(f)$$

によって定める。これによって T_eG は Lie 代数の構造をもつ。これを G から定まる Lie 代数といい、Lie(G) とかく。

例 0.1.1.5. $\mathrm{Lie}\,(\mathrm{GL}\,(V)) = \mathfrak{gl}(V)$ である。実際、$\mathrm{GL}\,(V)$ は $M_{n^2}(\mathbb{C})$ の開集合であり、$T_E(M_{n^2}(\mathbb{C})) = M_{n^2}(\mathbb{C}) = \mathfrak{gl}(V)$ だから、

$$\mathrm{Lie}\,(\mathrm{GL}\,(V)) = \mathfrak{gl}(V)$$

定義 0.1.1.6. Lie 群の準同型 $\rho: G \to H$ が与えられたとき、その微分 $(d\rho)_e : \mathrm{Lie}\,(G) \to \mathrm{Lie}\,(H)$ は Lie 代数の準同型となる。すなわち

$$(d\rho)_e([X,Y]) = [(d\rho)_e(X), (d\rho)_e(Y)]$$

を満たす。これを ρ が誘導する Lie 代数の準同型と呼ぶ。

定義 0.1.1.7. V をベクトル空間,G を Lie 群とし、Lie 群の準同型 $\rho: G \to \mathrm{GL}\,(V)$ を G の表現という。また、$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし、Lie 代数の準同型 $\rho: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ を $\mathfrak{g}$ の表現という。

定義 0.1.1.6 より、Lie 群の表現 $\rho: G \to \mathrm{GL}\,(V)$ は Lie 代数の表現 $(d\rho)_e : \mathrm{Lie}\,(G) \to \mathfrak{gl}(V)$ を誘導する。

例 0.1.1.8. V をベクトル空間、$G = \mathrm{GL}\,(V)$ とする。$\rho: G \to \mathrm{GL}\,(V^{\otimes m})$ を

$$\rho(g) = g \otimes \cdots \otimes g, \quad \text{i.e.} \quad \rho(g)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_m$$

によって定めると ρ は G の表現になる。ρ の誘導する Lie 代数の表現を求める。V の基底 $e_1, \cdots, e_n$ を固定して G を $\mathrm{GL}\,_n(\mathbb{C})$ と同一視し、$E_{ij} \in G$ を行列単位とする。このとき $g \in G$ は

$$g = \sum_{i,j} x_{ij} E_{ij}$$

と座標表示でき、$g \otimes \cdots \otimes g \in \mathrm{GL}\,(V^{\otimes m})$ は

$$g \otimes \cdots \otimes g = \sum_{i_1, j_1, \cdots, i_m, j_m} x_{i_1 j_1} \cdots x_{i_m j_m} E_{i_1 j_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_m j_m}$$

と座標表示できる。$y_{i_1, j_1, \cdots, i_m, j_m} = x_{i_1 j_1} \cdots x_{i_m j_m}$ とおくと、

$$\frac{\partial y_{i_1, j_1, \cdots, i_m, j_m}}{\partial x_{k,l}} = \begin{cases} x_{i_1 j_1} \cdots \hat{x}_{i_s j_s} \cdots x_{i_m j_m} & \text{ある } s \text{ で } (k,l) = (i_s, j_s) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。ここで $\hat{x}_{i_s j_s}$ は $x_{i_s j_s}$ を取り除いていることを意味する。これより $X = E$(単位行列) のとき

$$\frac{\partial y_{i_1, j_1, \cdots, i_m, j_m}}{\partial x_{k,l}}(E) = \begin{cases} 1 & \text{ある } s \text{ で } (k,l) = (i_s, j_s) \text{ かつ } i_1 = j_1, \cdots, i_m = j_m, \ (i_s = j_s \text{ は除く}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。よって $X \in \mathrm{Lie}\,(G) = T_E G = M_{n^2}(\mathbb{C})$ に対して

$$X = \sum_{k,l} a_{kl} E_{kl}$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
(d\rho)_E(X) &= \sum_{i_1,j_1,\cdots,i_m,j_m} \left(\sum_{k,l} \frac{\partial y_{i_1,j_1,\cdots,i_m,j_m}}{\partial x_{k,l}}(E) a_{kl} \right) E_{i_1 j_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_m j_m} \\
&= \sum_{i_2=j_2,\cdots,i_m=j_m} \left(\sum_{i_1,j_1} a_{i_1 j_1} E_{i_1 j_1} \right) \otimes E_{i_2 i_2} \otimes \cdots \otimes E_{i_m i_m} \\
&\quad + \sum_{i_1=j_1,i_3=j_3\cdots,i_m=j_m} E_{i_1 i_1} \otimes \left(\sum_{i_2,j_2} a_{i_2 j_2} E_{i_2 j_2} \right) \otimes E_{i_3 i_3} \otimes \cdots \otimes E_{i_m i_m} \\
&\quad + \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \sum_{i_1=j_1,\cdots,i_{m-1}=j_{m-1}} E_{i_1 i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_{m-1} j_{m-1}} \otimes \left(\sum_{i_m,j_m} a_{i_m j_m} E_{i_m j_m} \right) \\
&= X \otimes E \otimes \cdots \otimes E + E \otimes X \otimes E \otimes \cdots \otimes E + \cdots + E \otimes E \otimes \cdots \otimes X
\end{aligned}
$$

すべての Lie 代数が $\mathbb{C}$ 代数から誘導されるか、という問題について考えよう。$\mathfrak{g}$ を Lie 代数とし、$\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ のテンソル代数とする。すなわち、

$$\mathcal{T}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{g}^{\otimes k}$$

このとき $\mathcal{I}$ を

$$\{\, [X,Y] - X \otimes Y - Y \otimes X \mid X, Y \in \mathfrak{g} \,\}$$

によって生成される $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ の両側イデアルとして、

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{T}(\mathfrak{g})/\mathcal{I}$$

とする。$T, S \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ に対して括弧積 $[,]$ を

$$[T,S] = T \otimes S - S \otimes T$$

によって定めると $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ は Lie 代数となる。これを $\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数という。$\mathfrak{g}$ から $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ に対しては、

$$\mathfrak{g} \to \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

なる自然な Lie 代数の準同型 $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ が存在する。普遍包絡代数については次の定理が知られている。

定理 0.1.1.9 (Poincare-Birkhoff-Witt の定理)**.** $e_1, \cdots, e_n$ を $\mathfrak{g}$ の基底とする。このとき $\{\, \sigma(e_{i_1}) \otimes \cdots \otimes \sigma(e_{i_k}) \mid 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n \,\}$ は $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の基底となる。

この定理から、σ が単射であることが従う。実際、$\{\sigma(e_i)\}$ は主張の基底の一部に含まれている。したがって、すべての Lie 代数はある $\mathbb{C}$ 代数から誘導される Lie 代数の部分代数として実現できるのである。普遍包絡代数は表現論的にも重要である。

命題 0.1.1.10 (普遍包絡代数の普遍性)**.** $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ は次の性質をもつ。

任意の $\mathbb{C}$ 代数 A と Lie 代数の準同型 $f:\mathfrak{g}\to A$ が与えられたとき、$\mathbb{C}$ 代数の準同型 $\overline{f}:\mathcal{U}(\mathfrak{g})\to A$ が一意的に存在して、$f=\overline{f}\circ\sigma$ を満たす。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[dr, dotted, "\overline{f}"] & \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

また、この性質をもつ $\mathbb{C}$ 代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ と Lie 代数の準同型 σ の組は同型を除いて一意的である。

これにより、$\mathfrak{g}$ の表現 $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ は $\mathbb{C}$ 代数の準同型 $\overline{\rho}:\mathcal{U}(\mathfrak{g})\to\mathfrak{gl}(V)$ を一意的に誘導する。すなわち、$\mathfrak{g}$ の表現を調べる代わりに $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の表現を調べればよいということになる。

0.1.2 Double Centralizer Theorem

もう一つ Schur-Weyl 双対性の証明で用いる定理を一つ解説しておく。

定理 0.1.2.1 (Double Centralizer Theorem)**.** V を有限次元ベクトル空間、A を $\mathrm{End}(V)$ の半単純部分環とし、$B=\mathrm{End}_A(V)$ とする。このとき、

(i) B は半単純環である

(ii) $A=\mathrm{End}_B(V)$ が成り立つ

(iii) $A\otimes_{\mathbb{C}} B$ 加群として分解

$$V\simeq\bigoplus_i U_i\otimes_{\mathbb{C}} W_i$$

が成り立つ。ここで U_i は単純 A 加群で $W_i=\mathrm{Hom}_A(U_i,V)$ は単純 B 加群である。

Proof. (i) から示す。A は有限次元半単純 $\mathbb{C}$ 代数だから、系**??**の証明において、「既約表現」を「単純 A 加群」,「G 線形」を「A 準同型」にそのまま変えて A 加群として

$$V\simeq\bigoplus_i U_i\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_A(U_i,V)$$

と分解されることがわかる。よって

$$\begin{aligned} B&=\mathrm{End}_A(V)\\ &=\mathrm{Hom}_A\left(\bigoplus_i U_i\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_A(U_i,V),A\right)\\ &=\bigoplus_i\mathrm{Hom}_A(U_i\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_A(U_i,V),V)\\ &=\bigoplus_i\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_A(U_i,V),\mathrm{Hom}_A(U_i,V)),\qquad(\mathrm{Hom}\text{ と }\otimes\text{ の随伴性})\\ &=\bigoplus_i\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W_i) \end{aligned}$$

となる。したがって B は有限個の全行列環の直積に同型であるから Wedderburn の構造定理 (付録参照) により B は半単純環である。

次に (iii) を示す。まず W_i が単純 B 加群であることを示そう。そのためには、B が W_i に推移的に作用することを示せばよい。[*1] $f \in W_i = \mathrm{Hom}_A(U_i, V)$, $\phi \in B = \mathrm{End}_A(V)$ に対して ϕ は f に写像の合成として作用する。U_i は単純 A 加群だから、0 でない U_i の元 u を 1 つ固定して $U_i = Au$ である。任意の $f, f' \in \mathrm{Hom}_A(U_i, V)$ に対して

$$v = f(u), \qquad v' = f'(u)$$

とおくと、A は半単純だから

$$V = Av \oplus M$$

をみたす V の部分 A 加群 M が存在する。そこで、$\phi \in B$ を

$$\phi(av) = av', \qquad \phi(w) = 0, \qquad (a \in A, w \in W)$$

によって定めれば、$f' = \phi \circ f$ である。

V は少なくとも A 加群として

$$V \simeq \bigoplus_i U_i \otimes_{\mathbb{C}} W_i$$

と分解されるが、$U_i \otimes_{\mathbb{C}} W_i$ は $A \otimes_{\mathbb{C}} B$ 加群でもあるからよい。

最後に (ii) を示す。 □

0.1.3 Schur-Weyl 双対性

次のような問題を考えることから始める。V を n 次元ベクトル空間としたとき、テンソル空間 $V^{\otimes k}$ の部分空間として対称テンソル空間 $\mathrm{Sym}^k(V)$, 交代テンソル空間 $\mathrm{Alt}^k(V)$ というものが

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sym}^k(V) &= \left\{ v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \,\middle|\, v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)} = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k, \quad \text{for all } \sigma \in \mathfrak{S}_k \right\} \\
\mathrm{Alt}^k(V) &= \left\{ v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \,\middle|\, v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)} = \mathrm{sgn}(\sigma) v_1 \otimes \cdots \otimes v_k, \quad \text{for all } \sigma \in \mathfrak{S}_k \right\}
\end{aligned}$$

によって定義された。

$$\dim \mathrm{Sym}^k(V) = \binom{n+k-1}{k}, \qquad \dim \mathrm{Alt}^k(V) = \binom{n}{k}$$

より、$k = 2$ の場合

$$\dim \mathrm{Sym}^2(V) + \dim \mathrm{Alt}^2(V) = n^2 = \dim V \otimes V$$

だから、$\mathrm{Sym}^k(V) \cap \mathrm{Alt}^k(V) = 0$ に注意すれば

$$V \otimes V = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Alt}^2(V)$$

が成り立つ。一般の k に対してもこのようなテンソル空間の分解を行うことを考える。特に、表現も含めた分解を考えることが鍵になる。

$\sigma \in \mathfrak{S}_k$ に対して、

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}$$

[*1] 一般に A 加群 M が単純であることと任意の 0 でない M の元 x に対して $M = Ax$ が成り立つことは同値である。

によって $V^{\otimes k}$ を $\mathfrak{S}_n$ の表現とみなす。さらに、$g \in \mathrm{GL}\,(V)$ に対して

$$g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_k$$

とによって $V^{\otimes k}$ は $\mathrm{GL}\,(V)$ の表現とみなすこともできる。$V^{\otimes k}$ は $\mathfrak{S}_k$, $\mathrm{GL}\,(V)$ 両方の作用を同時に受けている。さらに次が成り立つ。

命題 0.1.3.1. 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, $g \in \mathrm{GL}\,(V)$ に対して、

$$\sigma g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = g\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)$$

である。

Proof. $u_i = gv_i$ とおく。

$$\begin{aligned}
\sigma g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) &= \sigma(gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_k) \\
&= \sigma(u_1 \otimes \cdots \otimes u_k) \\
&= u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma^{-1}(k)} \\
&= gv_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes gv_{\sigma^{-1}(k)} \\
&= g\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)
\end{aligned}$$

□

このとき、$c_{(k)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, $c_{1^k} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ とおくと

$$\mathrm{Sym}^k(V) = c_{(k)}V^{\otimes k}, \qquad \mathrm{Alt}^k(V) = c_{1^k}V^{\otimes k}$$

となることがわかり、命題 0.1.3.1 よりこの 2 つは $\mathrm{GL}\,(V)$ の表現でもある。よって $k > 2$ のときにも、$\lambda \in \mathcal{P}_k$ に対する Young 対称子 c_λ による像

$$W_\lambda = c_\lambda V^{\otimes k}$$

を考察することは自然である。再び 0.1.3.1 より W_λ は $\mathrm{GL}\,(V)$ の部分表現になるが、このとき次が成り立つ

定理 0.1.3.2 (Schur-Weyl 双対性)**.** W_λ は $\mathrm{GL}\,(V)$ の既約表現であり、$\mathfrak{S}_\lambda \times \mathrm{GL}\,(V)$ の表現として

$$V^{\otimes k} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_k} S_\lambda \boxtimes W_\lambda$$

が成り立つ。

定理 0.1.3.2 は以下の補題を示すことによって示される。まず、0.1.1 節で述べたことにより、$\mathrm{GL}\,(V)$ の表現 $\mathrm{GL}\,(V) \to \mathrm{GL}\,(V^{\otimes k})$ は $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(V))$ の表現 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}l(V)) \to \mathfrak{gl}(V^{\otimes k}) = \mathrm{End}(V^{\otimes k})$ を誘導する。

補題 0.1.3.3. V を n 次元ベクトル空間とする。$\mathrm{Sym}^k(V)$ は $\{v \otimes \cdots \otimes v\}_{v \in V}$ によって生成される

Proof. n 変数 k 次斉次多項式のなすベクトル空間を S とおく。主張は S が 1 次斉次多項式の k 乗で生成されることと同値である。単項式

$$x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, \quad i_1 + \cdots + i_n = k$$

が生成されることを示せば十分である。$f_0(x_1, \cdots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n)^k$ とおく。

$$f_1(x_1, \cdots, x_n) = f_0(2x_1, x_2, \cdots, x_n) - 2^k f_0(x_1, \cdots, x_n)$$

とすれば、f_1 は x_1^k を含む項をもたない。次に

$$f_2(x_1, \cdots, x_n) = f_1(2x_1, x_2, \cdots, x_n) - 2^{k-1} f_1(x_1, \cdots, x_n)$$

とすれば f_2 は x_1^k, x_1^{k-1} を含む項をもたない。この操作を i_1 以外に対して行えば、最終的に $x_1^{i_1}$ を含む項以外をもたないような多項式 $g_0(x_1, \cdots, x_n)$ を得る。そして g_0 は作り方から、一次斉次多項式の k 乗の線形結合で表される。同様に

$$g_1(x_1, \cdots, x_n) = g_0(x_1, 2x_2, x_3, \cdots, x_n) - 2^k g_0(x_1, \cdots, x_n)$$

とすれば g_1 は x_2^k を含む項をもたない。再びこの操作を繰り返して $x_1^{i_1}$, $x_2^{i_2}$ を含む項以外をもたないような多項式を得る。これを繰り返していけば、有限回のうちに $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$ を作ることができる。 □

補題 0.1.3.4. A を $\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ における $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$ の像とし、B を $\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ における $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(V))$ の像とする。A は半単純環であり、$B = \mathrm{End}_A(V^{\otimes k})$ が成り立つ。

Proof. Maschke の定理 (定理**??**) より $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ は半単純であり、A は $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ の剰余環であるが、半単純環の剰余環はまた半単純であるからよい。

$\mathrm{End}(V^{\otimes k}) = \mathrm{End}(V)^{\otimes k}$ であり、任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ に対して

$$\sigma(f_1 \otimes \cdots \otimes f_k) = (f_1 \otimes \cdots \otimes f_k)\sigma$$

であることと $f_1 \otimes \cdots \otimes f_k \in \mathrm{Sym}^k(\mathrm{End}(V))$ は同値だから、

$$\mathrm{End}_A(V^{\otimes k}) = \mathrm{Sym}^k(\mathrm{End}(V))$$

である。

例 0.1.1.8 より、$X \in \mathfrak{gl}(V)$ の $\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ における像を $\Pi(X)$ とすると

$$\Pi(X) = X \otimes E \otimes \cdots \otimes E + \cdots + E \otimes \cdots \otimes E \otimes X \in \mathrm{Sym}^k(\mathrm{End}(V))$$

だから、$B \subset \mathrm{End}_A(V^{\otimes k})$ が従う。

ここで $X_1 = X \otimes E \otimes \cdots \otimes E$, $X_2 = E \otimes X \otimes E \otimes \cdots \otimes E$, $\cdots$, $X_k = E \otimes \cdots \otimes E \otimes X$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\Pi(X) &= X_1 + X_2 + \cdots + X_k = p_1(X_1, \cdots, X_k) \\
\Pi(X^2) &= X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_k^2 = p_2(X_1, \cdots, X_k) \\
&\vdots \\
\Pi(X^k) &= X_1^k + X_2^k + \cdots + X_k^k = p_k(X_1, \cdots, X_k)
\end{aligned}$$

であるが、命題**??**より、

$$X \otimes \cdots \otimes X = e_k(X_1, \cdots, X_k) = P(\Pi(X), \Pi(X^2), \cdots, \Pi(X^k))$$

をみたす多項式 P が存在する。すなわち $X \otimes \cdots \otimes X \in B$ である。補題 0.1.3.3 より、$\{X \otimes \cdots \otimes X\}_{X \in \mathrm{End}(V)}$ は $\mathrm{Sym}^k(\mathrm{End}(V))$ を生成するから

$$B = \mathrm{Sym}^k(\mathrm{End}(V)) = \mathrm{End}_A(V^{\otimes k})$$

□

補題 0.1.3.5. $\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ における $\mathbb{C}[\mathrm{GL}\,(V)]$ の像は $B = \mathrm{End}_A(V^{\otimes k})$ に等しい。

Proof. $g \in \mathrm{GL}\,(V)$ の $\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ における像は $g \otimes \cdots \otimes g$ だから B に含まれている。$g \in \mathrm{GL}\,(V)$ に対して $g \otimes \cdots \otimes g$ が生成する $\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ の部分代数を B' とする。任意の (正則とは限らない)$X \in \mathrm{End}(V)$ に対して $X \otimes \cdots \otimes X$ が B' に含まれることを示せばよい。$X + tE$ は有限個の t を除いて正則である[*2] から、X に収束する $\mathrm{GL}\,(V)$ の点列 $(X + t_i E)$ が存在する[*3]。$\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ は有限次元だから B' は閉部分空間であるので、

$$X^{\otimes k} = \lim_{i \to \infty} (X + t_i E)^{\otimes k} \in B'$$

が成り立つ[*4] □

定理 0.1.3.2 を示そう。

Proof. 補題 0.1.3.5 と定理 0.1.2.1 より $\mathfrak{S}_k \times \mathrm{GL}\,(V)$ の表現 (すなわち $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathrm{GL}\,(V)]$ 加群) として

$$V^{\otimes k} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_k} S_\lambda \boxtimes \mathrm{Hom}_A(S_\lambda, V^{\otimes k})$$

と分解される。

ここで S_λ の指標を χ_λ とすると、S_λ の反傾表現の指標を χ_λ^* とすると、

$$\chi_\lambda^*(g) = \overline{\chi_\lambda(g)} = \chi_\lambda(g^{-1}) = \chi_\lambda(g)$$

である。実際 g は置換なので g と g^{-1} は同一の共役類に含まれる。よって表現として $S_\lambda \simeq S_\lambda^*$ が成り立つ。

$S_\lambda = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]c_\lambda$ だから

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_A(S_\lambda, V^{\otimes k}) &= (S_\lambda)^* \otimes_A V^{\otimes k} \\
&= S_\lambda \otimes_A V^{\otimes k} \\
&= \mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]c_\lambda \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]} V^{\otimes k} \\
&= c_\lambda V^{\otimes k} \\
&= W_\lambda
\end{aligned}$$

定理 0.1.2.1 より $\mathrm{Hom}_A(S_\lambda, V^{\otimes k})$ は既約 $\mathrm{GL}\,(V)$ 表現だから W_λ は既約である。 □

W_λ を $\mathrm{GL}\,(V)$ の Weyl 表現という。とくに、W_λ は Lie 代数 $\mathfrak{gl}(V)$ の既約表現でもある。

[*2] 行列式は t の多項式

[*3] すなわち $\mathrm{GL}\,(V)$ は $\mathrm{End}(V)$ の稠密集合

[*4] 表現は連続だからこのような極限操作が可能である。