第 1 章

Wedderburn の構造定理

Wedderburn の構造定理は、半単純 Artin 環の分類に関する定理である。本節で環は乗法単位元をもつ必ずしも可換とは限らない環を指し、たんに環の上の加群といったら左加群を指しているとする。

定義 1.0.0.1. 環 A が半単純であるとは任意の A 加群 M が半単純である、すなわち任意の M の部分加群が M の直和因子であることをいう。

例 1.0.0.2. 有限群 G の体 K 上の群環 $K[G]$ は $\mathrm{ch}K$ と $|G|$ が互いに素であるとき、またその時に限り半単純である (Maschke の定理)。

定義 1.0.0.3. 環 A が左 Artin 環であるとは、任意の左イデアルの列

$$I_0 \supset I_1 \supset \cdots$$

に対して、ある番号 n が存在して $I_n = I_{n+1} = \cdots$ が成り立つことをいう。

例 1.0.0.4. 体 K 上の有限次元代数 A は Artin 環である。特に有限群 G の群環 $K[G]$ は Artin 環である。

定理 1.0.0.5 (Wedderburn の構造定理)**.** 次の条件は同値である。

(i) A は半単純 Artin 環である

(ii) A は左加群として半単純である

(iii) A の左 Jacobson 根基が 0 である。

(iv) 斜体 D_i が存在して、

$$A \simeq \prod_i M_{n_i}(D_i)$$

が成り立つ。ただし $M_{n_i}(D_i)$ は D_i を成分にもつ全行列環である。