

第 I 部

Schur 多項式

1 Schur 多項式

1.1 対称多項式と交代多項式

定義 1.1.1. n 変数多項式 $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ が対称多項式であるとは、任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して $\sigma f := f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$ が成り立つことをいう。対称多項式全体のなす $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ の部分集合を $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ と書く。 f が交代多項式であるとは、任意の置換 σ に対して $\sigma f := f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \text{sgn}(\sigma)f(x_1, \dots, x_n)$ が成り立つことをいう。ただし sgn は置換の符号である。

例 1.1.2. $xy, x+y, x^2+y^2$ はいずれも $\mathbb{C}[x, y]$ の対称多項式であり、 $x-y$ は交代多項式である。 $xy^2, x+2y$ などは対称でも交代でもない

命題 1.1.3. $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ は $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ の部分環をなす

Proof. $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], \sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\sigma(f+g) = \sigma f + \sigma g, \quad \sigma(f \cdot g) = \sigma f \cdot \sigma g$$

が成り立つことから従う。 □

定義 1.1.4. $e_k, h_k \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ を次のように定め、それぞれ基本対称式, 完全対称式という。

$$e_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$$
$$h_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$$

例 1.1.5. n 変数の場合

$$e_1 = x_1 + \dots + x_n, \quad e_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots, \quad e_n = x_1 x_2 \dots x_n$$
$$h_1 = x_1 + \dots + x_n, \quad h_2 = x_1^2 + x_1 x_2 + \dots, \quad h_n = x_1^n + x_1^{n-1} x_2 + \dots$$
$$h_{n+1} = x_1^{n+1} + x_1^n x_2 + \dots$$

n 変数の基本対称式は e_1, \dots, e_n だけだが、完全対称式は無限に存在することに注意。また、基本対称式については次の基本的な事実が知られている。

定理 1.1.6 (対称式の基本定理). 任意の対称多項式は基本対称式の多項式で表される。すなわち

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{C}[e_1, \dots, e_n]$$

が成り立つ。

Proof. 対称多項式

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

について、任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_n) &= f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_1, \dots, i_n} x_{\sigma(1)}^{i_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{i_n} \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots x_n^{i_{\sigma^{-1}(n)}} \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}
\end{aligned}$$

よって

$$c_{i_1, \dots, i_n} = c_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}}$$

がなりたつ。これにより f は

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1)}^{i_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{i_n} \quad (1)$$

の形の対称多項式の線形結合であることがわかるから、この形の多項式について主張を示せばよい。適当に並べ替えて (i_1, \dots, i_n) は単調減少であると仮定してよい。 $d = i_1 + \dots + i_n$ とし、

$$\mathcal{I} = \{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \mid j_1 + \dots + j_n = d\}$$

とし、 \mathcal{I} に辞書式順序を入れておく。このとき

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1)}^{i_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{i_n} - e_n^{i_n} e_{n-1}^{i_{n-1} - i_n} \cdots e_2^{i_2 - i_3} e_1^{i_1 - i_2}$$

とおく。 g は d 次斉次項式で、 g に現れる単項式の指数（それは \mathcal{I} の元である）を考えたとき、それはすべて (i_1, \dots, i_n) より真に小さい。 \mathcal{I} は有限集合なので帰納法により主張が従う。□

例 1.1.7. 完全対称式は対称多項式なので定理 1.1.6 より基本対称式の多項式である。実際

$$\begin{aligned}
h_1 &= e_1 \\
h_2 &= e_1^2 - e_2 \\
h_3 &= e_1^3 + e_3 - 2e_1e_2
\end{aligned}$$

一般に

$$h_k = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_k \\ 1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{k-1} \\ 0 & 1 & e_1 & \cdots & e_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e_1 \end{vmatrix}$$

が成り立つことがわかる。

定義 1.1.8. $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$, $a_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して多項式 $A_\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ を

$$A_\alpha = \det((x_i^{a_j}))$$

によって定める。行列式の交代性から、 A_α は交代多項式である。よって、 α に重複があるなら $A_\alpha = 0$ となる。

例 1.1.9. $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$ のとき

$$A_\delta = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

は Vandermonde 行列式に他ならない。したがって

$$A_\delta = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

命題 1.1.10. 任意の交代多項式は A_δ で割り切れる

Proof. $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ を交代多項式とする。交代性から $i < j$ のとき f は x_i に x_j を代入すると 0 になる。よって f は $x_i - x_j$ で割り切れる。 $x_i - x_j$ は既約多項式であり、 $(i, j), (k, l)$ が異なるならば $x_i - x_j, x_k - x_l$ は互いに素である。 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ は UFD であるので f は A_δ で割り切れる。□

1.2 Schur 多項式

定義 1.2.1 (Schur 多項式). $\alpha = (a_1, \dots, a_n), a_1 > \dots > a_n \geq 0$ に対して

$$s_\alpha = \frac{A_\alpha}{A_\delta}$$

を Schur 多項式という。

命題 1.1.10 より、 A_α は A_δ で割り切れるので s_α は多項式である。また任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\sigma s_\alpha = \frac{\sigma A_\alpha}{\sigma A_\delta} = \frac{\text{sgn}(\sigma) A_\alpha}{\text{sgn}(\sigma) A_\delta} = s_\alpha$$

となるから Schur 多項式は対称多項式である。

例 1.2.2. $\alpha = (4, 2, 0)$ とする。

$$\begin{aligned} s_\alpha &= \frac{\begin{vmatrix} x_1^4 & x_1^2 & 1 \\ x_2^4 & x_2^2 & 1 \\ x_3^4 & x_3^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^1 & 1 \\ x_2^2 & x_2^1 & 1 \\ x_3^2 & x_3^1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 - x_3^2)(x_2^2 - x_3^2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} \\ &= (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = e_1e_2 \end{aligned}$$

Schur 多項式について重要な命題が次の定理である。

定理 1.2.3. $n > 0$ を整数とする。Schur 多項式の集合 $\{s_\alpha \mid \alpha = (a_1, \dots, a_n), a_1 > \dots > a_n \geq 0\}$ は対称多項式のなす環 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ の基底をなす

Proof. 次の補題を示す。

補題 1.2.4. $\mathcal{S} = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 > \dots > a_n \geq 0\}$ とする。交代多項式全体のなすベクトル空間は $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{S}}$ を基底にもつ

Proof. $f(x_1, \dots, x_n)$ を交代多項式とする。

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

とおく。任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \text{sgn}(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} \text{sgn}(\sigma) c_{i_1, \dots, i_n} x_{\sigma(1)}^{i_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{i_n} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} \text{sgn}(\sigma) c_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \end{aligned}$$

がなりたつ。よって

$$\text{sgn}(\sigma) c_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} = c_{i_1, \dots, i_n} \quad (2)$$

これにより、 (i_1, \dots, i_n) に重複がある場合

$$c_{i_1, \dots, i_n} = 0$$

であることがわかる。よって

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{S}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} x_1^{i_{\sigma(1)}} \cdots x_n^{i_{\sigma(n)}}$$

と書くことができる。再び (2) より

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{S}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} x_1^{i_{\sigma(1)}} \cdots x_n^{i_{\sigma(n)}} \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{S}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) c_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_{\sigma(1)}} \cdots x_n^{i_{\sigma(n)}} \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{S}} c_{i_1, \dots, i_n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) x_1^{i_{\sigma(1)}} \cdots x_n^{i_{\sigma(n)}} \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{S}} c_{i_1, \dots, i_n} A_{(i_1, \dots, i_n)} \end{aligned}$$

$\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{S}}$ が一次独立であることは $\alpha \neq \beta$ ならば A_α と A_β は異なる単項式を含むことからわかる。 \square

定理の証明に戻る。 f が対称多項式ならば $f A_\delta$ は交代多項式であるから、補題により

$$f A_\delta = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}} c_\alpha A_\alpha$$

両辺を A_δ で割って

$$f = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}} c_\alpha \frac{A_\alpha}{A_\delta} = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}} c_\alpha s_\alpha$$

一意的に表せることは $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{S}}$ が一次独立であることからわかる。 \square

定理 1.2.3 より、2 つの Schur 多項式の積は Schur 多項式の線形結合であることがわかる。次節ではその係数を記述する Littlewood-Richardson 規則について解説する。

2 Littlewood-Richardson 規則

2.1 Young 図形

定義 2.1.1. 整数列 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots)$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ に対して、1 行目に λ_1 個の箱を書き、2 行目に λ_2 個の箱を書き... と続けてできる図形を Young 図形といい、 λ で表す。ある n 以降 $\lambda_n = \lambda_{n+1} = \dots = 0$ となる場合は、0 を省略して $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ と書くこともある。箱が 1 つもないものも Young 図形であるとし、これを \emptyset で表す。また $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$ とし、これを λ の大きさという。

例 2.1.2.

$$(2, 1) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}, \quad (4, 3, 3, 1) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array}, \quad (3) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad (1, 1, 1, 1) = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

定義 2.1.3. 2 つの Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n, \dots)$ に対して、

$$\lambda \leq \mu \Leftrightarrow \lambda_1 \leq \mu_1, \dots, \lambda_n \leq \mu_n, \dots$$

と定義する。このとき λ は μ の部分 Young 図形であるという。

定義 2.1.4. n 行からなる Young 図形の全体を \mathcal{Y}_n とする。すなわち

$$\mathcal{Y}_n = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0) \mid \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0\}$$

である。また、 $(m-n, m-n, \dots, m-n)$, $(m-n)$ が n 個、つまり $n \times (m-n)$ 長方形) の部分 Young 図形の全体を $\mathcal{Y}_n(m)$ とする。

定義より

$$\mathcal{Y}_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} \mathcal{Y}_n(k)$$

が成り立つ。

Young 図形と Schur 多項式との関係は次の命題で表される

命題 2.1.5. $\mathcal{S} = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 > \dots > a_n \geq 0\}$ と \mathcal{Y}_n には次の全単射が存在する。

$$\mathcal{Y}_n \ni \lambda \mapsto \alpha = \lambda + \delta \in \mathcal{S}$$

ただし $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$ である

Proof. $\lambda \in \mathcal{Y}_n$ は単調減少であるから、実際に $\lambda + \delta \in \mathcal{S}$ であることはわかる。逆に任意の $\alpha \in \mathcal{S}$ に対して、 δ が \mathcal{S} の辞書式順序に関する最小元であることから $\alpha - \delta \in \mathcal{Y}_n$ であることもわかり、全単射であることが従う。 \square

よって Young 図形 λ に対応する Schur 多項式を $s_\lambda = \frac{A_{\lambda+\delta}}{A_\delta}$ と書くことにする。

定義 2.1.6. $\lambda \in \mathcal{Y}_n$ に対して、 λ の各箱に次の条件が満たされるように数字を書き入れたものを形 λ の半標準タブローという。

- 各数字は 1 以上 n 以下
- 各行は左から右に広義単調増加
- 各列は上から下に狭義単調増加

形 λ の半標準タブロー全体のなす集合を $\mathcal{T}(\lambda)$ と書く。半標準タブロー $T \in \mathcal{T}(\lambda)$ について、 T に数字 $k \in \{1, \dots, n\}$ が t_k 個書かれているとき $\omega_k(T) = t_k$ のように書き、

$$\omega(T) = (t_1, \dots, t_n)$$

とし、これを T のウェイトと呼ぶ。

例 2.1.7. 形 $(2, 1) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \in \mathcal{Y}_3$ の半標準タブローは次の通りである

$$\mathcal{T}((2, 1)) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \right. \\ \left. \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right\}$$

しかし次などは半標準タブローではない

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

定義 2.1.8. Young 図形 $\lambda \in \mathcal{Y}_n$ に対して次で定まる多項式を λ のタブロー和という。

$$T_\lambda = \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} x_1^{\omega_1(T)} \dots x_n^{\omega_n(T)}$$

例 2.1.9. 例 2.1.7 より、

$$T_{(2,1)} = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + 2x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 = e_1 e_2 = s_{(2,1)}$$

2.2 Littlewood-Richardson 規則

定理 2.2.1 (Littlewood-Richardson 規則). Young 図形 $\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_n$ について

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu \in \mathcal{Y}_n} \eta_{\lambda\mu}^\nu s_\nu$$

とおいたとき、

$$\eta_{\lambda\mu}^\nu = \# \{T \in \mathcal{T}(\mu) \mid T \text{ は } \lambda\text{-good であり、} \omega(T) = \nu - \lambda\}$$

が成り立つ。係数 $\eta_{\lambda\mu}^\nu$ を Littlewood-Richardson 数と呼ぶ。

ここで $T \in \mathcal{T}(\mu)$ が λ -good であるとは、次の条件を満たすことをいう。 T に書かれている数字を上から下、右から左へ読んでいったときにできる数字の並びを $c(T)$ とする。

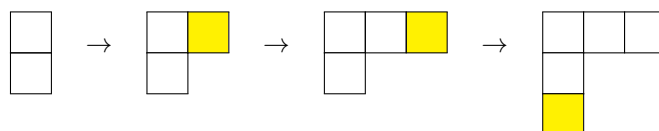
$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 5 & & \\ \hline \end{array} \rightarrow c(T) = 2423135134$$

$c(T)_j$ を $c(T)$ の左から j 番目までの部分列とすると

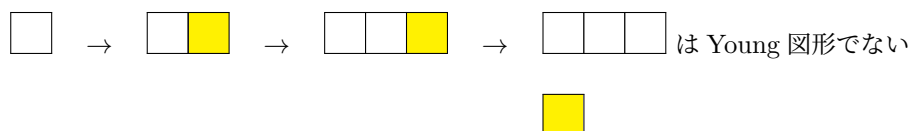
$$\lambda + \omega(c(T)_j) \in \mathcal{Y}_n, \quad \forall j = 1, \dots, |\mu|$$

が成り立つとき、 T は λ -good であるという。すなわち、「 T の右上から左下へ数字を読んでいくとき、読まれた数に対応する λ の行に箱を追加する」という操作を続けて各ステップで Young 図形であることが保たれるということである。

例 2.2.2. $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ は $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$ -good である。実際 $c(T) = 113$ であり



一方で T は $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$ -good ではない。



例 2.2.3. \emptyset -good であるような形 μ の半標準タブローは 1 行目がすべて 1, 2 行目がすべて 2, ... というものただ一つである。この半標準タブローを μ^{st} と書く。

T が \emptyset -good であるとする。 \emptyset に箱を 1 つ追加して Young 図形になるためには第 1 行目に追加しなければならない。よって T の一番右上には 1 が入っており、半標準タブローの行単調性から 1 行目はすべて 1 である。半標準タブローの列単調性から 2 行目の一番右は 2 以上が入っているはずであり、3 より大きければ Young 図形ができないので 2 である。よって行単調性から 2 行目はすべて 2 である。以下同様にして k 行目に入っている数字はすべて k であることがわかる。

例 2.2.4. $\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \in \mathcal{Y}_2$ とし、 s_λ^2 を Schur 多項式の線形結合として表そう。 λ -good な形 λ の半標準タブローは

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

ですべてである。それぞれのウェイトは

$$\omega(T_1) = (2, 1), \quad \omega(T_2) = (1, 2)$$

定理 2.2.1 より

$$s_\lambda^2 = s_{4,2} + s_{3,3}$$

である。実際、定義より

$$\begin{aligned} s_\lambda &= \frac{\begin{vmatrix} x^3 & x \\ y^3 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x^3y - xy^3}{x - y} = xy(x + y), & s_\lambda^2 &= x^4y^2 + 2x^3y^3 + x^2y^4 \\ s_{4,2} &= \frac{\begin{vmatrix} x^5 & x^2 \\ y^5 & y^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x^5y^2 - x^2y^5}{x - y} = x^2y^2(x^2 + xy + y^2) = x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 \\ s_{3,3} &= \frac{\begin{vmatrix} x^4 & x^3 \\ y^4 & y^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x^4y^3 - x^3y^4}{x - y} = x^3y^3 \end{aligned}$$

で確かに正しい。

定理 2.2.1 の証明のあらすじを述べよう。ポイントになるのが次の等式 (補題 2.2.6) である：

$$A_{\lambda+\delta}T_\mu = \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)} A_{\lambda+\omega(T)+\delta}$$

この等式はタブロー和 T_μ が対称多項式であること (命題 2.2.5) から示される。右辺に関して、 T が λ -good でない項たちは互いにキャンセルされることが示され (補題 2.2.7)、結局

$$A_{\lambda+\delta}T_\mu = \sum_{T: \lambda\text{-good}} A_{\lambda+\omega(T)+\delta} \quad (3)$$

ここで、 $\lambda = \emptyset$ の場合を考えると例 2.2.3 より

$$A_\delta T_\mu = A_{\omega(\mu^{st})+\delta}$$

両辺を A_δ で割れば

$$T_\mu = \frac{A_{\omega(\mu^{st})+\delta}}{A_\delta} = \frac{A_{\mu+\delta}}{A_\delta} = s_\mu$$

すなわち、タブロー和は Schur 多項式と等しいということが導かれる。再び一般の λ に対し式 (3) の両辺を A_δ で割って

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{T: \lambda\text{-good}} s_{\lambda+\omega(T)}$$

これより主張が従う。

あらすじで用いた命題・等式を示そう。

命題 2.2.5. タブロー和 T_λ は対称多項式である。

Proof. 対称群は隣り合う数字の互換 $\sigma = (k-1, k)$, $k = 2, \dots, n$ によって生成されるから、

$$\sigma T_\lambda = T_\lambda$$

を証明すればよい。ポイントになるのは半標準タブローの集合 $\mathcal{T}(\lambda)$ 上の対合^{*1} ι であって

$$\omega(\iota(T)) = \sigma(\omega(T)) \quad (4)$$

をみたすものの存在である。ここで、

$$\sigma(\omega(T)) = (\omega_{\sigma^{-1}(1)}(T), \dots, \omega_{\sigma^{-1}(n)}(T))$$

である。このような ι が構成できれば、

$$\begin{aligned} \sigma T_\lambda &= \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} x_{\sigma(1)}^{\omega_1(T)} \dots x_{\sigma(n)}^{\omega_n(T)} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} x_1^{\omega_{\sigma^{-1}(1)}(T)} \dots x_n^{\omega_{\sigma^{-1}(n)}(T)} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} x_1^{\omega_1(\iota(T))} \dots x_n^{\omega_n(\iota(T))} \\ &= T_\lambda \end{aligned}$$

となり対称性が従う。最後の等式は ι が全単射であることによる。

このような ι は次のように構成される。まず条件 (4) は、半標準タブロー T と $\iota(T)$ は書かれている $k-1$ と k の数が逆転した関係にある、ということを意味している。最初に T が一行の Young 図形からなる場合を考えよう。半標準タブローの単調性から $k-1$ か k の書かれている部分はひとつながりの帯領域をなしており、その長さは $\omega_{k-1}(T) + \omega_k(T)$ である。よってこの帯領域の数字を、左 $\omega_k(T)$ 個の箱に $k-1$ 、残りの $\omega_{k-1}(T)$ 個の箱に k を入れるように変更したものを $\iota(T)$ とすれば、これは条件 (4) を満たす半標準タブローになる。

$$T = \cdots \boxed{k-2} \boxed{k-1} \boxed{k-1} \boxed{k} \boxed{k} \boxed{k} \boxed{k+1} \cdots \quad \rightarrow \quad \iota(T) = \cdots \boxed{k-2} \boxed{k-1} \boxed{k-1} \boxed{k-1} \boxed{k} \boxed{k} \boxed{k+1} \cdots$$

また、この場合に $\iota^2(T) = T$ が成立していることもわかる。

一般の半標準タブロー T に対しては一行の場合の操作を拡張することで得られる。まず、 T の箱が自由であることを

- 箱に k が入っており、上の箱は $k-1$ より真に小さい
- 箱に $k-1$ が入っており、下の箱は k より真に大きいか下に箱がない

のどちらかを満たしていることと定義する。例えば $k=4$ において

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 5 & & \\ \hline 5 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

黄色の箱は自由であり、緑の箱は自由でない。不自由な箱は数字を入れ替えると単調性が崩れるので、入れ替えることができないという意味で不自由である。したがって数字の入れ替えをするには、自由な箱のみを考えればよい。重要なこととして、

^{*1} 集合 X 上の対合とは写像 $\iota: X \rightarrow X$ であって $\iota^2 = \text{id}_X$ をみたすものをいう

自由な箱の全体はいくつかの帯領域をなし、さらに帯は各行にたかだか 1 つである。

実際

- $k - 1$ が書かれている箱が自由なら、その右にある $k - 1$ の書かれた箱はすべて自由である。なぜなら半標準タブローの行単調性から、その下にある箱はすべて k より真に大きいからである。
- k が書かれている箱が自由なら、その左にある k の書かれた箱はすべて自由である。なぜなら半標準タブローの行単調性から、その上にある箱はすべて $k - 1$ より真に小さいからである。

より、各行に帯領域はたかだか一つである。そこで各帯領域に対して、1 行の場合の入れ替え操作を行った半標準タブローを $\iota(T)$ と置けば、 $\iota(T)$ は条件 (4) を満たす。なぜなら、不自由な箱は $k - 1$ が書かれているものと k が書かれているもので同数あり、1 行の場合に条件 (4) は満たされているからである。また半標準タブローの列単調性から $\iota(T)$ と T で箱の自由性は保たれるので $\iota^2(T) = T$ であることもわかる。また、もし T に自由な箱が存在しない場合は $\iota(T) = T$ とする。これで構成できた。

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 4 & & 5 & \\ \hline 5 & & & & & \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \iota(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline 4 & 4 & 4 & & 5 & \\ \hline 5 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

□

補題 2.2.6. $\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_n$ に対して

$$A_{\lambda+\delta}T_\mu = \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)} A_{\lambda+\omega(T)+\delta}$$

が成り立つ。

Proof. $\text{Alt}_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma)\sigma$ とおく (これは交代化作用素と呼ばれる)。交代化作用素と対称多項式をかけることは可換である。実際、 $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$, $g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ に対し

$$\begin{aligned} \text{Alt}_n(fg) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma)\sigma(fg) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma)\sigma f \cdot \sigma g \\ &= f \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma)\sigma g \\ &= f \cdot \text{Alt}_n(g) \end{aligned}$$

である。

$$A_{\lambda+\delta} = \text{Alt}_n(x_1^{\lambda_1+\delta_1} \dots x_n^{\lambda_n+\delta_n})$$

だから命題 2.2.5 より

$$\begin{aligned}
A_{\lambda+\delta}T_\mu &= \text{Alt}_n(T_\mu \cdot x_1^{\lambda_1+\delta_1} \cdots x_n^{\lambda_n+\delta_n}) \\
&= \text{Alt}_n \left(\sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)} x_1^{\lambda_1+\omega_1(T)+\delta_1} \cdots x_n^{\lambda_n+\omega_n(T)+\delta_n} \right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)}^{\lambda_1+\omega_1(T)+\delta_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n+\omega_n(T)+\delta_n} \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)} \sum_{\sigma \in (S)_n} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)}^{\lambda_1+\omega_1(T)+\delta_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n+\omega_n(T)+\delta_n} \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)} A_{\lambda+\omega(T)+\delta}
\end{aligned}$$

□

補題 2.2.7. $\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_n$ に対して、形 μ の半標準タブローで λ -good でないものを λ -bad と呼び、その全体を $\mathcal{T}(\mu)^{\lambda\text{-bad}}$ とおく。このとき

$$\sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)^{\lambda\text{-bad}}} A_{\lambda+\omega(T)+\delta} = 0$$

が成り立つ。

Proof. この証明においてもポイントになるのが $\mathcal{T}(\mu)^{\lambda\text{-bad}}$ 上の対合 ι であって各 $T \in \mathcal{T}(\mu)^{\lambda\text{-bad}}$ に対してある k が存在して $\sigma = (k-1, k)$ に対して

$$\lambda + \omega(\iota(T)) + \delta = \sigma(\lambda + \omega(T) + \delta) \quad (5)$$

をみたすものの存在である。このような ι が構成されれば、 $A_{\lambda+\omega(T)+\delta}$ たちはペアごとに打ち消される。実際、

$$\begin{aligned}
\sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)^{\lambda\text{-bad}}} A_{\lambda+\omega(T)+\delta} &= \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)^{\lambda\text{-bad}}} (A_{\lambda+\omega(T)+\delta} + A_{\lambda+\omega(\iota(T))+\delta}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)^{\lambda\text{-bad}}} (A_{\lambda+\omega(T)+\delta} + A_{\sigma(\lambda+\omega(T)+\delta)}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)^{\lambda\text{-bad}}} (A_{\lambda+\omega(T)+\delta} - A_{\lambda+\omega(T)+\delta}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(5) をみたす ι を構成するために、条件 (5) が成り立つための必要条件から考察していく。(5) が成り立つには

$$\lambda_k + \omega_k(\iota(T)) + \delta_k = \lambda_{k-1} + \omega_{k-1}(T) + \delta_{k-1}$$

したがって

$$\omega_k(\iota(T)) = \omega_{k-1}(T) + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) + 1 \quad (6)$$

となる必要がある。この右辺の値は、 λ の k 行目にいくつ箱を追加すると Young 図形でなくなるか、ということを表していることに注意する。このような k と $\iota(T)$ をみつきたいのである。

そこで、

$$\lambda + \omega(c(T)_j) \notin \mathcal{Y}_n$$

を満たす最小の j をとてこよう。これは λ -bad の定義から必ず存在する。そして j に対応する箱に入っている数字を k とおく。すなわち、 j ステップ目で k 行目に箱を追加すると初めて Young 図形でなくなるとする。またこの箱を悪い箱と呼ぶことにする。このとき

$$\omega_k(c(T)_j) = \omega_{k-1}(c(T)_j) + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) + 1 \quad (7)$$

が成り立つ。ここで、 T を悪い箱よりも左側にある部分 T_1 と悪い箱を含む右側の部分 T_2 に分割する。例えば

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 & \\ \hline 4 & 5 & 5 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{は} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \text{-bad}$$

においては、黄色い箱が悪い箱で

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array}, \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 4 & 4 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$$

である。すると、半標準タブローの列単調性から悪い箱の下にある箱には $k+1$ 以上しか存在しないから、

$$\omega_k(c(T)_j) = \omega_k(T_2), \quad \omega_{k-1}(c(T)_j) = \omega_{k-1}(T_2)$$

よって (7) は

$$\omega_k(T_2) = \omega_{k-1}(T_2) + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) + 1$$

と書き換えることができる。 $\iota(T)$ の満たすべき必要条件 (6) は

$$\begin{aligned} \omega_k(\iota(T)) &= \omega_{k-1}(T) + (\lambda_{k-1} + \lambda_k) + 1 \\ \omega_k(\iota(T_1)) + \omega_k(\iota(T_2)) &= \omega_{k-1}(T_1) + \omega_{k-1}(T_2) + (\lambda_{k-1} + \lambda_k) + 1 \end{aligned}$$

となるが、 $\iota(T_2) = T_2$ であると仮定すれば

$$\begin{aligned} \omega_k(\iota(T_1)) + \omega_k(T_2) &= \omega_{k-1}(T_1) + \omega_{k-1}(T_2) + (\lambda_{k-1} + \lambda_k) + 1 \\ \omega_k(\iota(T_1)) &= \omega_{k-1}(T_1) \end{aligned}$$

結局、 $\iota(T)$ は次のように定義すればよいであろうことがわかる。

$\iota(T)$ は T_1 に命題 2.2.5 で定義した対合を施し、 T_2 には何もしない

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 & \\ \hline 4 & 5 & 5 & & \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \iota(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & \\ \hline 3 & 4 & 4 & 4 & \\ \hline 4 & 5 & 5 & & \\ \hline \end{array}$$

示すべきことは

1. 実際に $\iota(T)$ が λ -bad な半標準タブローであること
2. $\iota(T)$ が (5) をみたすこと

である。

1. ι が T_2 には何もしないことから、 λ -bad であることは直ちに従う。よって $\iota(T)$ が半標準タブローであることさえ示せばよい。 $\iota(T_1)$ は命題 2.2.5 から半標準タブローであり、 T_2 も半標準タブローだから、問題になるのは $\iota(T_1)$ と T_2 の境界部分である。悪い箱は命題 2.2.5 の証明中の意味で自由である。すなわちその上にある箱は $k-1$ より真に小さい。

なぜならもし悪い箱の上に $k-1$ があったとすると、 $j-1$ ステップ目で $k-1$ 行目に箱を追加しても Young 図形であることは保たれている。よってそのとき k 行目の箱の数は $k-1$ 行目の箱の数と同じかそれ以下である。もし同じなら $j-2$ ステップの時点では $k-1$ 行目の箱の数が k 行目の箱の数より小さいこととなり、これは Young 図形になっていない。 $k-1$ 行目の箱の数以下であるなら j ステップ目に k 行目に箱を追加しても Young 図形であることは保たれるから、悪い箱であることに矛盾する。

よって T の悪い箱よりも上部分は考えなくてよい。悪い箱の下部分は半標準タブローの列単調性から k より真に大きいのでここも考えなくてよい。したがって問題になるのは悪い箱の左に入っている数が ι によってどうなるかということだけであるが、 ι は $k-1$ と k を適当に入れ替える操作なので単調性は崩れない。

2. ι は結局のところ $k-1$ と k を (6) が成り立つように入れ替える操作であるから、

$$\begin{aligned}\lambda_k + \omega_k(\iota(T)) + \delta_k &= \lambda_{k-1} + \omega_{k-1}(T) + \delta_{k-1} \\ l \neq k, k-1 &\implies \lambda_l + \omega_l(\iota(T)) + \delta_l = \lambda_l + \omega_l(T) + \delta_l\end{aligned}$$

が成り立つ。命題 2.2.5 の対合を用いているので ι もまた対合であるから

$$\begin{aligned}\lambda_{k-1} + \omega_{k-1}(\iota(T)) + \delta_{k-1} &= \lambda_k + \omega_k(\iota^2(T)) + \delta_k \\ &= \lambda_k + \omega_k(T) + \delta_k\end{aligned}$$

よって $\sigma = (k, k-1)$ として

$$\lambda + \omega(\iota(T)) + \delta = \sigma(\lambda + \omega(T) + \delta)$$

が成り立つ。

□

Littlewood-Richardson 規則の特別な場合として、 λ が一行の Young 図形の場合は Pieri の規則と呼ばれ、比較的簡単に計算できる。

定義 2.2.8. Young 図形 $\mu \leq \nu$, $|\nu| = |\mu| + k$ に対して、 ν/μ が水平帯であるとは

ν に含まれ、 μ に含まれない箱が各列にたかだか一つ

を満たすことをいう。このことは

$$\nu_l \leq \mu_{l-1}$$

がすべての $l = 2, 3, \dots$ について成り立つことと同値である。

定理 2.2.9 (Pieri の規則). $\lambda = (k)$, $\mu \in \mathcal{Y}_n$ に対して



$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\substack{|\nu|=|\mu|+k \\ \nu/\mu \text{ は水平帯}}} s_\nu$$



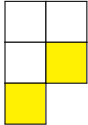
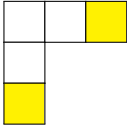
が成り立つ

Proof. 定理 2.2.1 より、 μ -good な形 λ の半標準タブローを考える。 T が形 λ の μ -good な半標準タブローであるとする。いま λ は一行の Young 図形だから、 T が μ -good であることは

$$\omega_l(T) + \mu_l \leq \mu_{l-1}$$

がすべての $l = 2, 3, \dots, n$ に対して成り立つことと同値である。 $\nu = \mu + \omega(T)$ とすれば、これは ν/μ が水平帯であることに他ならない。 \square

例 2.2.10. $\lambda =$ , $\mu =$  $\in \mathcal{Y}_3$ として $s_\lambda s_\mu$ を計算する。定理 2.2.9 より大きさ 5 の Young 図形で水平帯となっているものを探せばよい。それらは

$$\nu_1 =$$
 , $\nu_2 =$ , $\nu_3 =$ , $\nu_4 =$ 

だから

$$s_\lambda s_\mu = s_{\nu_1} + s_{\nu_2} + s_{\nu_3} + s_{\nu_4}$$