

0.1 Grassmann 多様体

0.1.1 射影空間

まずは、数え上げ問題の舞台となる射影空間について解説する。

定義 0.1.1.1. $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上の同値関係 \sim を

$$z \sim w \Leftrightarrow \text{ある } c \in \mathbb{C} \text{ が存在して } w = cz$$

と定義する。 $\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ を n 次元 (複素) 射影空間という。 $(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ の同値類を $[z_0 : z_1 : \dots : z_n]$ と書いて、これを斉次座標という。自然な全射 $p: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ を射影化と呼ぶ。また、 $S \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ が任意の $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ に対して $\lambda S \subset S$ を満たすとき、 $p(S)$ を S の射影化と呼ぶ。

$\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ の部分集合 \tilde{U}_i を

$$\tilde{U}_i = \{ (z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \mid z_i \neq 0 \}$$

とする。 \tilde{U}_i の射影化を $U_i = p(\tilde{U}_i)$ とする。

$$U_i = \{ [z_0 : z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{P}^n \mid z_i \neq 0 \} = \{ [z_0 : \dots : z_{i-1} : 1 : z_{i+1} : \dots : z_n] \in \mathbb{P}^n \mid \}$$

また、写像 $\tilde{\varphi}_i: \tilde{U}_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ を

$$\tilde{\varphi}_i(z_0, z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{z_0}{z_i}, \frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right)$$

によって定めると \tilde{U}_i の射影化 U_i に写像 $\varphi: U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ を誘導する。

$$\varphi([z_0 : z_1 : \dots : z_n]) = \left[\frac{z_0}{z_i} : \frac{z_1}{z_i} : \dots : 1 : \dots : \frac{z_n}{z_i} \right]$$

φ は全単射であり

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$$

が成り立つから、 \mathbb{P}^n は \mathbb{C}^n を $n+1$ 枚貼り合わせた構造を持っている。

複素数上で定義をしたが実数上でもまったく同様に実射影空間が定義できる。射影空間を考える理由に次の2つがある。

- \mathbb{P}^n における k 次元平面は \mathbb{C}^{n+1} の $k+1$ 次元線形部分空間と1対1に対応する。
- \mathbb{P}^n における平行線は1点で交わる

これらのことを説明しよう。

定義 0.1.1.2. A をランク $n-r$ の $(n-r) \times (n+1)$ 行列とする。

$$\left\{ [z_0 : z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{P}^n \mid A \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

の形の \mathbb{P}^n の部分集合を \mathbb{P}^n の r 次元平面という。とくに $r = 1$ のときは直線, $r = n - 1$ のときは超平面と呼ぶ。

例 0.1.1.3. 直線

$$L = \{ [z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2 \mid z_2 - 2z_0 - z_1 = 0 \}$$

を考えてみる。

$$L \cap U_0 = \{ [1 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2 \mid z_2 - z_1 - 2 = 0 \} \approx \{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x - y - 2 = 0 \} \subset \mathbb{C}^2$$

$$L \cap U_1 = \{ [z_0 : 1 : z_2] \in \mathbb{P}^2 \mid z_2 - 2z_0 - 1 = 0 \} \approx \{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y - 2x - 1 = 0 \} \subset \mathbb{C}^2$$

$$L \cap U_2 = \{ [z_0 : z_1 : 1] \in \mathbb{P}^2 \mid 1 - 2z_0 - z_1 = 0 \} \approx \{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid 1 - 2x - y = 0 \} \subset \mathbb{C}^2$$

となって、 L は各 $U_i \approx \mathbb{C}^2$ 上で直線のようにふるまっていることがわかる。