付録 A

Robinson-Schensted-Knuth 対応

Robinson-Schensted-Knuth 対応 (以下 RSK 対応と呼ぶ) とは、非負整数行列と、同じ形をもつ半標準タブローの組との間の 1 対 1 対応のことである。この付録では RSK 対応の証明はせず、主張の紹介と第 2 章で用いた Cauchy の等式 (補題??) の証明を解説する。

定義 A.0.0.1 (行挿入)**.** T を形 λ の半標準タブローとし、k を正の整数とする。次の帰納的な操作で得られる半標準タブローを $T \leftarrow k$ と書く：

(i) T の一行目の一番右の数が k 以下なら、右端に k を追加したものを $T \leftarrow k$ として操作を終了する。

(ii) T の右端が k より真に大きいならば、T の一行目において k より大きいもののうち最も左にある箱を k で置き換える。またそのときもともと入っていた数を l とおく。

(iii) T の二行目以降の部分タブローを T' とし、$T' \leftarrow l$ と T の一行目を結合したものを $T \leftarrow k$ として操作を終了する。

定義 A.0.0.2. A を非負整数行列とする。$A = (a_{ij})$ とおいて、次の操作で定まる $2 \times n$ 行列 W を A の biword という。

(i) 各成分 a_{ij} に対して、a_{ij} 個の列ベクトル $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ を並べていった行列を W' とする

(ii) $W' = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ において、$v_1, v_2, \cdots, v_n$ の第 1 成分を優先した辞書式順序に関して左から右に昇順に並び変えたものを W とする。

例 A.0.0.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である。

定理 A.0.0.4 (RSK 対応)**.** 非負整数行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ に対して、次の操作で定まるタブローの組 (P, Q) はどちらも半標準であり、P に書かれた数はたかだか n, Q に書かれた数はたかだか m である。そしてこの対応は $M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ から $\mathcal{T}_n \times \mathcal{T}_m$ への全単射である。ここで $\mathcal{T}_n$ はすべての Young 図形に対するたかだか n までを用いた半標準タブロー全体のなす集合である。

(i) A の biword を W とする。$P, Q = \varnothing$ として初期化する。

(ii) W の各列ベクトル $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ を左から右へ読んでいって、次の処理をする。

- P を $P \leftarrow j$ で置き換える。
- Q に対して、$P \leftarrow j$ の行挿入で新しく追加された箱の場所に i を追加する。

また P, Q は同じ Young 図形を形にもつタブローである。

例 A.0.0.5. 上記の例において、A から定まる P, Q は

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2}\end{array}, \qquad Q = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 3 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

対応からわかるように、$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ とし P, Q のウェイトをそれぞれ $p = (p_1, \cdots, p_n)$, $q = (q_1, \cdots, q_m)$ とおくと

$$p_i = a_{1i} + \cdots + a_{mi}, \qquad q_j = a_{j1} + \cdots + a_{jn} \tag{A.1}$$

である。

定理 A.0.0.6 (Cauchy の等式)**.**

$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda} s_\lambda(x_1, \cdots, x_n) s_\lambda(y_1, \cdots, y_m)$$

が成り立つ。ただし右辺の和はすべての Young 図形をわたる。

Proof. $\mathcal{T}(\lambda)$ で形 λ の半標準タブロー全体のなす集合とすれば、Schur 多項式はタブロー和に等しい (第 1 部参照) ので右辺の和は

$$\sum_{\lambda} s_\lambda(x_1, \cdots, x_n) s_\lambda(y_1, \cdots, y_m) = \sum_{\lambda} \sum_{P \in \mathcal{T}_n(\lambda), Q \in \mathcal{T}_m(\lambda)} (x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n})(y_1^{q_1} \cdots y_m^{q_m})$$

である。一方、左辺の式は

$$\begin{aligned}
\prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} &= \prod_{i,j} (1 + x_i y_j + (x_i y_j)^2 + \cdots) \\
&= \sum_{A \in M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})} \prod_{i,j} (x_i y_j)^{a_{ji}} \\
&= \sum_{A \in M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})} \prod_{i} x_i^{a_{1i} + \cdots + a_{mi}} \prod_{j} y_j^{a_{j1} + \cdots + a_{jn}}
\end{aligned}$$

と書くことができる。RSK 対応によって $M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ と半標準タブローの組 (P, Q) が 1 対 1 に対応し、このとき (A.1) がなりたつから、

$$\begin{aligned}
\sum_{A \in M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})} \prod_{i} x_i^{a_{1i} + \cdots + a_{mi}} \prod_{j} y_j^{a_{j1} + \cdots + a_{jn}} &= \sum_{A \in M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})} \prod_{i} x_i^{p_i} \prod_{j} y_j^{q_j} \\
&= \sum_{\lambda} \sum_{P \in \mathcal{T}_n(\lambda), Q \in \mathcal{T}_m(\lambda)} (x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n})(y_1^{q_1} \cdots y_m^{q_m})
\end{aligned}$$

よって示せた。 □