

# Schur 多項式からみる表現論と幾何学

慶應義塾大学総合政策学部 金沢研究会  
学籍番号：71900121 赤松輝海

# はじめに

Schur 多項式は数学の様々な分野に現れる対称多項式で、その組み合わせ論的性質がまったく関係のないように思える問題の解を与えることがしばしばある。本稿では、表現論と幾何学で Schur 多項式がどのように用いられるかを紹介する。

第 1 部ではまず Schur 多項式の定義と基本性質について述べる。特に重要なのが Schur 多項式が対称多項式環の基底をなすという事実である。これにより、2 つの Schur 多項式の積は Schur 多項式の線形結合で表されることがわかるが、その係数は Littlewood-Richardson 規則という組み合わせ論的ルールによって記述される。その系として、完全対称多項式を Schur 多項式の線形結合で表す Young の規則を解説する。

第 2 部では有限群の表現論の一般論と、その具体例として対称群の表現論、および Schur-Weyl 双対性について紹介する。表現論とは群や多元環などの抽象的な代数系を、ベクトル空間への作用（これを表現という）を通して研究する分野である。第 2 部では有限群の表現論の一般論を解説し、その後最も基本的な対称群の表現論と一般線形群の表現論について解説する。表現論の目標の一つは代数系が与えられたとき、その既約表現（ある意味で最も小さい表現）を分類することである。特に有限群の複素有限次元表現の場合、既約表現の同値類と群の共役類の個数は等しいことが知られている。一般に共役類と既約表現に標準的な全単射を構成することは期待できないが、対称群の場合は Young 対称子によってパラメータ付けることができる。対称群の表現の同値類をすべてあつめたものは表現環という環の構造をもつ。表現環は対称関数環という、対称多項式の無限変数への一般化にあたるものとまったく同型であることが示される。これによって表現の研究に対称多項式の組み合わせ論的知識を用いることができ、第 1 部で導入した Littlewood-Richardson 規則などが活かされる。一般線形群の表現においては、Weyl 表現について解説する。Weyl 表現とは、テンソル積空間  $V^{\otimes k}$  の分解という素朴な問題の解として現れる表現である。その  $V^{\otimes k}$  における重複度は、対称群の既約表現と双対的な関係になっており、これは Schur-Weyl 双対性と呼ばれる。この双対性から、Weyl 表現の分析にも対称関数の知識が役立たれる様子を見る。

第 3 部では数え上げ幾何学を紹介する。数え上げ幾何の古典的な問題として、幾何学的な条件を満たす直線の本数を数えることがある。そのような条件を満たす直線の集合は Schubert 多様体と呼ばれる空間をなし、数え上げ問題を解くことは Schubert 多様体の交叉を調べることに対応する。交叉を調べる際にまたしても Littlewood-Richardson 規則が現れ、これを用いて数え上げ問題に解答を与えることが目標である。

本稿で用いる記号を整理しておく。 $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  でそれぞれ、整数, 有理数, 実数, 複素数全体のなす集合を表すものとする。

# 目次

第 1 章	Schur 多項式	3
1.1	Schur 多項式 . . . . .	3
1.2	Littlewood-Richardson 規則 . . . . .	8
第 2 章	対称群と一般線形群の表現	20
2.1	有限群の表現論 . . . . .	20
2.2	対称群の表現論 . . . . .	39
2.3	表現環と対称関数環 . . . . .	50
2.4	一般線形群の表現と Schur-Weyl 双対性 . . . . .	65
第 3 章	数え上げ幾何学	73
3.1	射影空間 . . . . .	73
付録 A	Robinson-Schensted-Knuth 対応	74
付録 B	Wedderburn の構造定理	76
参考文献		77

# 第 1 章

## Schur 多項式

### 1.1 Schur 多項式

#### 1.1.1 対称多項式と交代多項式

**定義 1.1.1.1.**  $n$  変数多項式  $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  が対称多項式であるとは、任意の置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して  $\sigma f := f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$  が成り立つことをいう。対称多項式全体のなす  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  の部分集合を  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  と書く。 $f$  が交代多項式であるとは、任意の置換  $\sigma$  に対して  $\sigma f := f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \text{sgn}(\sigma)f(x_1, \dots, x_n)$  が成り立つことをいう。ただし  $\text{sgn}$  は置換の符号である。

**例 1.1.1.2.**  $xy, x+y, x^2+y^2$  はいずれも  $\mathbb{Z}[x, y]$  の対称多項式であり、 $x-y$  は交代多項式である。 $xy^2, x+2y$  などは対称でも交代でもない

**命題 1.1.1.3.**  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  は  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  の部分環をなす

*Proof.*  $f, g \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n], \sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して

$$\sigma(f+g) = \sigma f + \sigma g, \quad \sigma(f \cdot g) = \sigma f \cdot \sigma g$$

が成り立つことから従う。 □

**例 1.1.1.4** (単項対称式). 整数  $n > 1$  を固定する。非負整数列  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  に対して、ある置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  が存在して

$$\beta = \sigma \alpha = (\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{\sigma^{-1}(n)})$$

となるとき、 $\beta \sim \alpha$  と書く。広義単調減少な  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  に対して

$$m_\alpha = \sum_{\beta \sim \alpha} x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$$

と定めると、 $m_\alpha$  は対称式である。

$$m_{2,1}(x, y) = x^2y + xy^2$$

$$m_{2,2,0}(x, y, z) = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$$

**例 1.1.1.5** (べき和対称式). 整数  $n > 1$  を固定する。 $k = 1, 2, \dots, n$  に対して  $(k) = (k, 0, \dots, 0)$  とする。 $p_k$  を

$$p_k = m_{(k)} = x_1^k + \cdots + x_n^k$$

によって定義する。 $p_k$  はもちろん対称多項式である。

**例 1.1.1.6** (基本対称式・完全対称式). 整数  $n > 1$  を固定する。 $k = 1, 2, \dots, n$  に対して、 $1^k = (1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  を最初の  $k$  個が 1 で、残りが 0 の数列とする。また

$$\mathcal{Y}_{k,n} = \{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \mid \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n, \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k \}$$

とする。

$$e_k = m_{1^k} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$$

$$h_k = \sum_{\alpha \in \mathcal{Y}_{k,n}} m_\alpha = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$$

として、 $e_k$  を  $k$  次基本対称式、 $h_k$  を  $k$  次完全対称式という。

$$e_1 = x_1 + \dots + x_n, \quad e_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots, \quad e_n = x_1 x_2 \dots x_n$$

$$h_1 = x_1 + \dots + x_n, \quad h_2 = x_1^2 + x_1 x_2 + \dots, \quad h_n = x_1^n + x_1^{n-1} x_2 + \dots$$

$$h_{n+1} = x_1^{n+1} + x_1^n x_2 + \dots$$

$n$  変数の基本対称式は  $e_1, \dots, e_n$  だけだが、完全対称式は無限に存在することに注意。ここで定義したさまざまな対称多項式は、対称多項式環  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  における良い性質をもっている。

**命題 1.1.1.7.**  $\{ m_\alpha \mid \alpha = (\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n), \alpha_n \geq 0 \}$  は  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  の基底をなす

*Proof.*  $\{ m_\alpha \mid \alpha = (\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n), \alpha_n \geq 0 \}$  が一次独立であることは、 $\alpha \neq \beta$  ならば  $m_\alpha, m_\beta$  は異なる単項式を含むことからわかる。よって  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  を生成することを示す。対称多項式

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

について、任意の置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_1, \dots, i_n} x_{\sigma(1)}^{i_1} \dots x_{\sigma(n)}^{i_n} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_{\sigma^{-1}(1)}} \dots x_n^{i_{\sigma^{-1}(n)}} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \end{aligned}$$

よって

$$c_{i_1, \dots, i_n} = c_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}}$$

がなりたつ。したがって

$$f = \sum_{\alpha} c_{\alpha} m_{\alpha}$$

となることがわかる。 □

**定理 1.1.1.8** (対称式の基本定理). 任意の対称多項式は基本対称式の多項式で表される。すなわち

$$\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{Z}[e_1, \dots, e_n]$$

が成り立つ。

*Proof.* 命題 1.1.1.7 より、 $m_\alpha$  が  $e_1, \dots, e_n$  の多項式で表されることを示せばよい。 $\mathcal{Y}_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{Y}_{k,n}$  とおく。 $\mathcal{Y}_n$  には辞書式順序による全順序を入れておく。 $\alpha \in \mathcal{Y}_n$  に関する帰納法によって示そう。 $\mathcal{Y}_n$  の最小元は  $(1, 0, \dots, 0)$  であり、

$$m_{1,0,\dots,0} = e_1$$

であるからよい。 $\alpha = (\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n) \in \mathcal{Y}_n$  を  $\alpha > (1, 0, \dots, 0)$  であるとする。

$$g(x_1, \dots, x_n) = m_\alpha - e_n^{\alpha_n} e_{n-1}^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} \dots e_2^{\alpha_2 - \alpha_3} e_1^{\alpha_1 - \alpha_2}$$

とおく。 $g$  は対称多項式だが、

$$g = \sum_{\beta} m_{\beta}$$

と表した時、このときすべての  $\beta$  は  $\alpha$  より真に小さいことを示そう。 $h = e_n^{\alpha_n} e_{n-1}^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} \dots e_2^{\alpha_2 - \alpha_3} e_1^{\alpha_1 - \alpha_2}$  とおく。まず、

$$e_n^{\alpha_n} = x_1^{\alpha_n} \dots x_n^{\alpha_n}$$

より  $h$  を展開したときの単項式の指数はすべて  $(\alpha_n, \dots, \alpha_n)$  以上であることがわかる。次に

$$e_{n-1}^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} = \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-1} \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_{n-1}} \right)^{\alpha_{n-1} - \alpha_n}$$

より  $h$  の単項式の指数で最も大きいものは

$$(\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$$

以上であることがわかる。このことを繰り返していけば、 $h$  の指数最大の単項式は

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

になることがわかる。またその係数が 1 であることも従う。よって  $\beta < \alpha$  であるから、帰納法の仮定により主張が成立する。□

**例 1.1.1.9.** 完全対称式は対称多項式なので定理 1.1.1.8 より基本対称式の多項式である。実際

$$h_1 = e_1$$

$$h_2 = e_1^2 - e_2$$

$$h_3 = e_1^3 + e_3 - 2e_1e_2$$

一般に

$$h_k = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_k \\ 1 & e_1 & e_2 & \dots & e_{k-1} \\ 0 & 1 & e_1 & \dots & e_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e_1 \end{vmatrix}$$

が成り立つことがわかる (第 2 部参照)。

次に交代多項式についてみていこう。

**定義 1.1.1.10.**  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $a_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対して多項式  $A_\alpha \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  を

$$A_\alpha = \det((x_i^{a_j}))$$

によって定める。行列式の交代性から、 $A_\alpha$  は交代多項式である。よって、 $\alpha$  に重複があるなら  $A_\alpha = 0$  となる。

**例 1.1.1.11.**  $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$  のとき

$$A_\delta = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

は Vandermonde 行列式に他ならない。したがって

$$A_\delta = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

**命題 1.1.1.12.** 任意の交代多項式は  $A_\delta$  で割り切れる

*Proof.*  $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  を交代多項式とする。交代性から  $i < j$  のとき  $f$  は  $x_i$  に  $x_j$  を代入すると 0 になる。よって  $f$  は  $x_i - x_j$  で割り切れる。 $x_i - x_j$  は既約多項式であり、 $(i, j)$ ,  $(k, l)$  が異なるならば  $x_i - x_j$ ,  $x_k - x_l$  は互いに素である。 $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  は UFD であるので  $f$  は  $A_\delta$  で割り切れる。□

## 1.1.2 Schur 多項式

**定義 1.1.2.1** (Schur 多項式).  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $a_1 > \dots > a_n \geq 0$  に対して

$$s_\alpha = \frac{A_\alpha}{A_\delta}$$

を Schur 多項式という。

命題 1.1.1.12 より、 $A_\alpha$  は  $A_\delta$  で割り切れるので  $s_\alpha$  は多項式である。また任意の置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して

$$\sigma s_\alpha = \frac{\sigma A_\alpha}{\sigma A_\delta} = \frac{\text{sgn}(\sigma) A_\alpha}{\text{sgn}(\sigma) A_\delta} = s_\alpha$$

となるから Schur 多項式は対称多項式である。

**例 1.1.2.2.**  $\alpha = (4, 2, 0)$  とする。

$$\begin{aligned} s_\alpha &= \frac{\begin{vmatrix} x_1^4 & x_1^2 & 1 \\ x_2^4 & x_2^2 & 1 \\ x_3^4 & x_3^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 - x_3^2)(x_2^2 - x_3^2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} \\ &= (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = e_1e_2 \end{aligned}$$

Schur 多項式について重要な命題が次の定理である。

**定理 1.1.2.3.**  $n > 0$  を整数とする。Schur 多項式の集合  $\{s_\alpha \mid \alpha = (a_1, \dots, a_n), a_1 > \dots > a_n \geq 0\}$  は対称多項式のなす環  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  の基底をなす

*Proof.* 次の補題を示す。

**補題 1.1.2.4.**  $S = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 > \dots > a_n \geq 0\}$  とする。交代多項式全体のなす  $\mathbb{Z}$  加群は  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in S}$  を基底にもつ

*Proof.*  $f(x_1, \dots, x_n)$  を交代多項式とする。

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

とおく。任意の置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \text{sgn}(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} \text{sgn}(\sigma) c_{i_1, \dots, i_n} x_{\sigma(1)}^{i_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{i_n} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} \text{sgn}(\sigma) c_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \end{aligned}$$

がなりたつ。よって

$$\text{sgn}(\sigma) c_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} = c_{i_1, \dots, i_n} \quad (1.1)$$

これにより、 $(i_1, \dots, i_n)$  に重複がある場合

$$c_{i_1, \dots, i_n} = 0$$

であることがわかる。よって

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} x_1^{i_{\sigma(1)}} \cdots x_n^{i_{\sigma(n)}}$$

と書くことができる。再び (2) より

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} x_1^{i_{\sigma(1)}} \cdots x_n^{i_{\sigma(n)}} \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) c_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_{\sigma(1)}} \cdots x_n^{i_{\sigma(n)}} \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S} c_{i_1, \dots, i_n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) x_1^{i_{\sigma(1)}} \cdots x_n^{i_{\sigma(n)}} \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S} c_{i_1, \dots, i_n} A_{(i_1, \dots, i_n)} \end{aligned}$$

$\{A_\alpha\}_{\alpha \in S}$  が一次独立であることは  $\alpha \neq \beta$  ならば  $A_\alpha$  と  $A_\beta$  は異なる単項式を含むことからわかる。  $\square$

定理の証明に戻る。 $f$  が対称多項式ならば  $fA_\delta$  は交代多項式であるから、補題により

$$fA_\delta = \sum_{\alpha \in S} c_\alpha A_\alpha$$



両辺を  $A_\delta$  で割って

$$f = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}} c_\alpha \frac{A_\alpha}{A_\delta} = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}} c_\alpha s_\alpha$$

一意的に表せることは  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{S}}$  が一次独立であることからわかる。  $\square$

定理 1.1.2.3 より、2 つの Schur 多項式の積は Schur 多項式の線形結合であることがわかる。次節ではその係数を記述する Littlewood-Richardson 規則について解説する。

## 1.2 Littlewood-Richardson 規則

### 1.2.1 Young 図形

**定義 1.2.1.1.** 非負整数列  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = 0$  に対して、1 行目に  $\lambda_1$  個の箱を書き、2 行目に  $\lambda_2$  個の箱を書き... と続けてできる図形を Young 図形といい、同じく  $\lambda$  で表す。箱が 1 つもない Young 図形、すなわち  $(0, 0, \dots)$  は  $\emptyset$  で表す。 $\lambda_{n+1} = 0$  のときたんに  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  と書くこともある。また  $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$  とし、これを  $\lambda$  の大きさという。

**例 1.2.1.2.**

$$(2, 1) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}, \quad (4, 3, 3, 1) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array}, \quad (3) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad (1, 1, 1, 1) = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

**定義 1.2.1.3.** 2 つの Young 図形  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots)$ ,  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n, \dots)$  に対して、

$$\lambda \subset \mu \Leftrightarrow \lambda_1 \leq \mu_1, \dots, \lambda_n \leq \mu_n, \dots$$

と定義する。このとき  $\lambda$  は  $\mu$  の部分 Young 図形であるという。

**定義 1.2.1.4.**  $n$  行からなる Young 図形の全体を第 1 節と同じ記号  $\mathcal{Y}_n$  で表す。すなわち

$$\mathcal{Y}_n = \{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0 \}$$

である。

Young 図形と Schur 多項式との関係は次の命題で表される

**命題 1.2.1.5.**  $\mathcal{S} = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_1 > \dots > a_n \geq 0 \}$  と  $\mathcal{Y}_n$  には次の全単射が存在する。

$$\mathcal{Y}_n \ni \lambda \mapsto \alpha = \lambda + \delta \in \mathcal{S}$$

ただし  $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$  である

*Proof.*  $\lambda \in \mathcal{Y}_n$  は単調減少であるから、実際に  $\lambda + \delta \in \mathcal{S}$  であることはわかる。逆に任意の  $\alpha \in \mathcal{S}$  に対して、 $\delta$  が  $\mathcal{S}$  の辞書式順序に関する最小元であることから  $\alpha - \delta \in \mathcal{Y}_n$  であることもわかり、全単射であることが従う。  $\square$

よって Young 図形  $\lambda$  に対応する Schur 多項式を  $s_\lambda = \frac{A_{\lambda+\delta}}{A_\delta}$  と書くことにする。

**定義 1.2.1.6.**  $\lambda \in \mathcal{Y}_n$  に対して、 $\lambda$  の各箱に次の条件が満たされるように数字を書き入れたものを形  $\lambda$  の半標準タブローという。

- 各数字は 1 以上  $n$  以下
- 各行は左から右に広義単調増加
- 各列は上から下に狭義単調増加

形  $\lambda$  の半標準タブロー全体のなす集合を  $\mathcal{T}(\lambda)$  と書く。半標準タブロー  $T \in \mathcal{T}(\lambda)$  について、 $T$  に数字  $k \in \{1, \dots, n\}$  が  $t_k$  個書かれているとき  $\omega_k(T) = t_k$  のように書き、

$$\omega(T) = (t_1, \dots, t_n)$$

とし、これを  $T$  のウェイトと呼ぶ。

**例 1.2.1.7.** 形  $(2, 1) = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \in \mathcal{Y}_3$  の半標準タブローは次の通りである

$$\mathcal{T}((2, 1)) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \right. \\ \left. \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right\}$$

しかし次などは半標準タブローではない

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

**定義 1.2.1.8.** Young 図形  $\lambda \in \mathcal{Y}_n$  に対して次で定まる多項式を  $\lambda$  のタブロー和という。

$$T_\lambda = \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} x_1^{\omega_1(T)} \dots x_n^{\omega_n(T)}$$

**例 1.2.1.9.** 例 1.2.1.7 より、

$$T_{(2,1)} = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + 2x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 = e_1 e_2 = s_{(2,1)}$$

**例 1.2.1.10.**  $\lambda$  が 1 行からなる Young 図形  $\lambda = (k) \in \mathcal{Y}_n$  の場合、 $T_\lambda = h_k$  である。なぜなら、形  $(k)$  の半標準タブローは左端に 1 をいくつか書き (0 個でもよい)、続けて 2 をいくつか書き、3 をいくつか書き... と続けて得られるから、

$$1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$$

をみたとす  $i_1, \dots, i_k$  の組み合わせと 1 対 1 に対応するからである。

**例 1.2.1.11.**  $\lambda$  が 1 列からなる Young 図形  $\lambda = 1^k \in \mathcal{Y}_n$  ( $k \leq n$ ) の場合、 $T_\lambda = e_k$  である。なぜなら、形  $1^k$  の半標準タブローは

$$1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

をみたとす  $i_1, \dots, i_k$  の組み合わせと 1 対 1 に対応するからである。

## 1.2.2 Littlewood-Richardson 規則

**定理 1.2.2.1** (Littlewood-Richardson 規則). Young 図形  $\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_n$  について

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu \in \mathcal{Y}_n} \eta_{\lambda\mu}^\nu s_\nu$$

とおいたとき、

$$\eta_{\lambda\mu}^\nu = \#\{ T \in \mathcal{T}(\mu) \mid T \text{ は } \lambda\text{-good であり、} \omega(T) = \nu - \lambda \}$$

が成り立つ。係数  $\eta_{\lambda\mu}^\nu$  を Littlewood-Richardson 数と呼ぶ。

ここで  $T \in \mathcal{T}(\mu)$  が  $\lambda$ -good であるとは、次の条件を満たすことをいう。 $T$  に書かれている数字を上から下、右から左へ読んでいったときにできる数字の並びを  $c(T)$  とする。

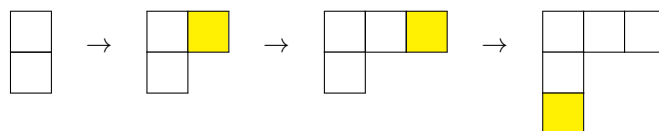
$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 5 & & \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad c(T) = 2423135134$$

$c(T)_j$  を  $c(T)$  の左から  $j$  番目までの部分列とすると

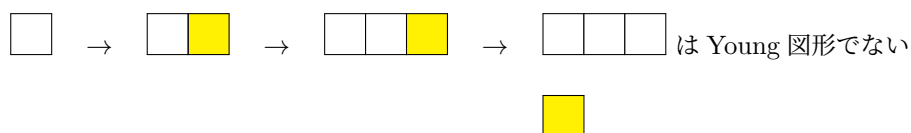
$$\lambda + \omega(c(T)_j) \in \mathcal{Y}_n, \quad \forall j = 1, \dots, |\mu|$$

が成り立つとき、 $T$  は  $\lambda$ -good であるという。すなわち、「 $T$  の右上から左下へ数字を読んでいくとき、読まれた数に対応する  $\lambda$  の行に箱を追加する」という操作を続けて各ステップで Young 図形であることが保たれるということである。

**例 1.2.2.2.**  $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$  は  $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$  -good である。実際  $c(T) = 113$  であり



一方で  $T$  は  $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$  -good ではない。



**例 1.2.2.3.**  $\emptyset$ -good であるような形  $\mu$  の半標準タブローは 1 行目がすべて 1, 2 行目がすべて 2, ... というものただ一つである。この半標準タブローを  $\mu^{st}$  と書く。

$T$  が  $\emptyset$ -good であるとする。 $\emptyset$  に箱を 1 つ追加して Young 図形になるためには第 1 行目に追加しなければならない。よって  $T$  の一番右上には 1 が入っており、半標準タブローの行単調性から 1 行目はすべて 1 である。半標準タブローの列単調性から 2 行目の一番右は 2 以上が入っているはずであり、3 より大きければ Young 図形ができないので 2 である。よって行単調性から 2 行目はすべて 2 である。以下同様にして  $k$  行目に入っている数字はすべて  $k$  であることがわかる。

例 1.2.2.4.  $\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \in \mathcal{Y}_2$  とし、 $s_\lambda^2$  を Schur 多項式の線形結合として表そう。 $\lambda$ -good な形  $\lambda$  の半標準タブローは

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

ですべてである。それぞれのウェイトは

$$\omega(T_1) = (2, 1), \quad \omega(T_2) = (1, 2)$$

定理 1.2.2.1 より

$$s_\lambda^2 = s_{4,2} + s_{3,3}$$

である。実際、定義より

$$\begin{aligned} s_\lambda &= \frac{\begin{vmatrix} x^3 & x \\ y^3 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x^3y - xy^3}{x - y} = xy(x + y), & s_\lambda^2 &= x^4y^2 + 2x^3y^3 + x^2y^4 \\ s_{4,2} &= \frac{\begin{vmatrix} x^5 & x^2 \\ y^5 & y^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x^5y^2 - x^2y^5}{x - y} = x^2y^2(x^2 + xy + y^2) = x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 \\ s_{3,3} &= \frac{\begin{vmatrix} x^4 & x^3 \\ y^4 & y^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x^4y^3 - x^3y^4}{x - y} = x^3y^3 \end{aligned}$$

で確かに正しい。

定理 1.2.2.1 の証明のあらすじを述べよう。ポイントになるのが次の等式 (補題 1.2.2.6) である：

$$A_{\lambda+\delta}T_\mu = \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)} A_{\lambda+\omega(T)+\delta}$$

この等式はタブロー和  $T_\mu$  が対称多項式であること (命題 1.2.2.5) から示される。右辺に関して、 $T$  が  $\lambda$ -good でない項たちは互いにキャンセルされることが示され (補題 1.2.2.7)、結局

$$A_{\lambda+\delta}T_\mu = \sum_{T: \lambda\text{-good}} A_{\lambda+\omega(T)+\delta} \quad (1.2)$$

ここで、 $\lambda = \emptyset$  の場合を考えると例 1.2.2.3 より

$$A_\delta T_\mu = A_{\omega(\mu^{st})+\delta}$$

両辺を  $A_\delta$  で割れば

$$T_\mu = \frac{A_{\omega(\mu^{st})+\delta}}{A_\delta} = \frac{A_{\mu+\delta}}{A_\delta} = s_\mu$$

すなわち、タブロー和は Schur 多項式と等しいということが導かれる。再び一般の  $\lambda$  に対し式 (3) の両辺を  $A_\delta$  で割って

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{T: \lambda\text{-good}} s_{\lambda+\omega(T)}$$

これより主張が従う。

あらすじで用いた命題・等式を示そう。

**命題 1.2.2.5.** タブロー和  $T_\lambda$  は対称多項式である。

*Proof.* 対称群は隣り合う数字の互換  $\sigma = (k-1, k)$ ,  $k = 2, \dots, n$  によって生成されるから、

$$\sigma T_\lambda = T_\lambda$$

を証明すればよい。ポイントになるのは半標準タブローの集合  $\mathcal{T}(\lambda)$  上の対合<sup>\*1</sup> $\iota$ であって

$$\omega(\iota(T)) = \sigma(\omega(T)) \quad (1.3)$$

をみたすものの存在である。ここで、

$$\sigma(\omega(T)) = (\omega_{\sigma^{-1}(1)}(T), \dots, \omega_{\sigma^{-1}(n)}(T))$$

である。このような  $\iota$  が構成できれば、

$$\begin{aligned} \sigma T_\lambda &= \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} x_{\sigma(1)}^{\omega_1(T)} \cdots x_{\sigma(n)}^{\omega_n(T)} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} x_1^{\omega_{\sigma^{-1}(1)}(T)} \cdots x_n^{\omega_{\sigma^{-1}(n)}(T)} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} x_1^{\omega_1(\iota(T))} \cdots x_n^{\omega_n(\iota(T))} \\ &= T_\lambda \end{aligned}$$

となり対称性が従う。最後の等式は  $\iota$  が全単射であることによる。

このような  $\iota$  は次のように構成される。まず条件 (4) は、半標準タブロー  $T$  と  $\iota(T)$  は書かれている  $k-1$  と  $k$  の数が逆転した関係にある、ということを意味している。最初に  $T$  が一行の Young 図形からなる場合を考えよう。半標準タブローの単調性から  $k-1$  か  $k$  の書かれている部分はひとつながりの帶領域をなしており、その長さは  $\omega_{k-1}(T) + \omega_k(T)$  である。よってこの帶領域の数字を、左  $\omega_k(T)$  個の箱に  $k-1$ 、残りの  $\omega_{k-1}(T)$  個の箱に  $k$  を入れるように変更したものを  $\iota(T)$  とすれば、これは条件 (4) を満たす半標準タブローになる。

$$T = \cdots \boxed{k-2} \boxed{k-1} \boxed{k-1} \boxed{k} \boxed{k} \boxed{k} \boxed{k+1} \cdots \quad \rightarrow \quad \iota(T) = \cdots \boxed{k-2} \boxed{k-1} \boxed{k-1} \boxed{k-1} \boxed{k} \boxed{k} \boxed{k+1} \cdots$$

また、この場合に  $\iota^2(T) = T$  が成立していることもわかる。

一般の半標準タブロー  $T$  に対しては一行の場合の操作を拡張することで得られる。まず、 $T$  の箱が自由であることを

- 箱に  $k$  が入っており、上の箱は  $k-1$  より真に小さい
- 箱に  $k-1$  が入っており、下の箱は  $k$  より真に大きいか下に箱がない

<sup>\*1</sup> 集合  $X$  上の対合とは写像  $\iota: X \rightarrow X$  であって  $\iota^2 = \text{id}_X$  をみたすものをいう

のどちらかを満たしていることと定義する。例えば  $k = 4$  において

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 5 & & \\ \hline 5 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

黄色の箱は自由であり、緑の箱は自由でない。不自由な箱は数字を入れ替えると単調性が崩れるので、入れ替えることができないという意味で不自由である。したがって数字の入れ替えをするには、自由な箱のみを考えればよい。重要なこととして、

自由な箱の全体はいくつかの帯領域をなし、さらに帯は各行にたかだか 1 つである。

実際

- $k - 1$  が書かれている箱が自由なら、その右にある  $k - 1$  の書かれた箱はすべて自由である。なぜなら半標準タブローの行単調性から、その下にある箱はすべて  $k$  より真に大きいからである。
- $k$  が書かれている箱が自由なら、その左にある  $k$  の書かれた箱はすべて自由である。なぜなら半標準タブローの行単調性から、その上にある箱はすべて  $k - 1$  より真に小さいからである。

より、各行に帯領域はたかだか一つである。そこで各帯領域に対して、1 行の場合の入れ替え操作を行った半標準タブローを  $\iota(T)$  と置けば、 $\iota(T)$  は条件 (4) を満たす。なぜなら、不自由な箱は  $k - 1$  が書かれているものと  $k$  が書かれているもので同数あり、1 行の場合に条件 (4) は満たされているからである。また半標準タブローの列単調性から  $\iota(T)$  と  $T$  で箱の自由性は保たれるので  $\iota^2(T) = T$  であることもわかる。また、もし  $T$  に自由な箱が存在しない場合は  $\iota(T) = T$  とする。これで構成できた。

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 5 & & \\ \hline 5 & & & & & \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \iota(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 5 & & \\ \hline 5 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

□

**補題 1.2.2.6.**  $\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_n$  に対して

$$A_{\lambda+\delta}T_{\mu} = \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)} A_{\lambda+\omega(T)+\delta}$$

が成り立つ。

*Proof.*  $\text{Alt}_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma)\sigma$  とおく (これは交代化作用素と呼ばれる)。交代化作用素と対称多項式をかけ

ることは可換である。実際、 $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ ,  $g \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  に対し

$$\begin{aligned} \text{Alt}_n(fg) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \sigma(fg) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \sigma f \cdot \sigma g \\ &= f \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \sigma g \\ &= f \cdot \text{Alt}_n(g) \end{aligned}$$

である。

$$A_{\lambda+\delta} = \text{Alt}_n(x_1^{\lambda_1+\delta_1} \dots x_n^{\lambda_n+\delta_n})$$

だから命題 1.2.2.5 より

$$\begin{aligned} A_{\lambda+\delta} T_\mu &= \text{Alt}_n(T_\mu \cdot x_1^{\lambda_1+\delta_1} \dots x_n^{\lambda_n+\delta_n}) \\ &= \text{Alt}_n \left( \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)} x_1^{\lambda_1+\omega_1(T)+\delta_1} \dots x_n^{\lambda_n+\omega_n(T)+\delta_n} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)}^{\lambda_1+\omega_1(T)+\delta_1} \dots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n+\omega_n(T)+\delta_n} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)} \sum_{\sigma \in (S)_n} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)}^{\lambda_1+\omega_1(T)+\delta_1} \dots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n+\omega_n(T)+\delta_n} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)} A_{\lambda+\omega(T)+\delta} \end{aligned}$$

□

**補題 1.2.2.7.**  $\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_n$  に対して、形  $\mu$  の半標準タブローで  $\lambda$ -good でないものを  $\lambda$ -bad と呼び、その全体を  $\mathcal{T}(\mu)^{\lambda\text{-bad}}$  とおく。このとき

$$\sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)^{\lambda\text{-bad}}} A_{\lambda+\omega(T)+\delta} = 0$$

が成り立つ。

*Proof.* この証明においてもポイントになるのが  $\mathcal{T}(\mu)^{\lambda\text{-bad}}$  上の対合  $\iota$  であって各  $T \in \mathcal{T}(\mu)^{\lambda\text{-bad}}$  に対してある  $k$  が存在して  $\sigma = (k-1, k)$  に対して

$$\lambda + \omega(\iota(T)) + \delta = \sigma(\lambda + \omega(T) + \delta) \quad (1.4)$$

をみたすものの存在である。このような  $\iota$  が構成されれば、 $A_{\lambda+\omega(T)+\delta}$  たちはペアごとに打ち消される。実際、

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)^{\lambda\text{-bad}}} A_{\lambda+\omega(T)+\delta} &= \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)^{\lambda\text{-bad}}} (A_{\lambda+\omega(T)+\delta} + A_{\lambda+\omega(\iota(T))+\delta}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)^{\lambda\text{-bad}}} (A_{\lambda+\omega(T)+\delta} + A_{\sigma(\lambda+\omega(T)+\delta)}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)^{\lambda\text{-bad}}} (A_{\lambda+\omega(T)+\delta} - A_{\lambda+\omega(T)+\delta}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(5) をみたす  $\iota$  を構成するために、条件 (5) が成り立つための必要条件から考察していく。(5) が成り立つには

$$\lambda_k + \omega_k(\iota(T)) + \delta_k = \lambda_{k-1} + \omega_{k-1}(T) + \delta_{k-1}$$

したがって

$$\omega_k(\iota(T)) = \omega_{k-1}(T) + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) + 1 \quad (1.5)$$

となることが必要である。この右辺の値は、 $\lambda$  の  $k$  行目にいくつ箱を追加すると Young 図形でなくなるか、ということを表していることに注意する。このような  $k$  と  $\iota(T)$  をみつきたいのである。

そこで、

$$\lambda + \omega(c(T)_j) \notin \mathcal{Y}_n$$

を満たす最小の  $j$  をとてこよう。これは  $\lambda$ -bad の定義から必ず存在する。そして  $j$  に対応する箱に入っている数字を  $k$  とおく。すなわち、 $j$  ステップ目で  $k$  行目に箱を追加すると初めて Young 図形でなくなるとする。またこの箱を悪い箱と呼ぶことにする。このとき

$$\omega_k(c(T)_j) = \omega_{k-1}(c(T)_j) + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) + 1 \quad (1.6)$$

が成り立つ。ここで、 $T$  を悪い箱よりも左側にある部分  $T_1$  と悪い箱を含む右側の部分  $T_2$  に分割する。例えば

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 & \\ \hline 4 & 5 & 5 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{は} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \text{-bad}$$

においては、黄色い箱が悪い箱で

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array}, \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 4 & 4 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$$

である。すると、半標準タブローの列単調性から悪い箱の下にある箱には  $k+1$  以上しか存在しないから、

$$\omega_k(c(T)_j) = \omega_k(T_2), \quad \omega_{k-1}(c(T)_j) = \omega_{k-1}(T_2)$$

よって (7) は

$$\omega_k(T_2) = \omega_{k-1}(T_2) + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) + 1$$

と書き換えることができる。 $\iota(T)$  の満たすべき必要条件 (6) は

$$\begin{aligned} \omega_k(\iota(T)) &= \omega_{k-1}(T) + (\lambda_{k-1} + \lambda_k) + 1 \\ \omega_k(\iota(T_1)) + \omega_k(\iota(T_2)) &= \omega_{k-1}(T_1) + \omega_{k-1}(T_2) + (\lambda_{k-1} + \lambda_k) + 1 \end{aligned}$$

となるが、 $\iota(T_2) = T_2$  であると仮定すれば

$$\begin{aligned} \omega_k(\iota(T_1)) + \omega_k(T_2) &= \omega_{k-1}(T_1) + \omega_{k-1}(T_2) + (\lambda_{k-1} + \lambda_k) + 1 \\ \omega_k(\iota(T_1)) &= \omega_{k-1}(T_1) \end{aligned}$$



結局、 $\iota(T)$  は次のように定義すればよいであろうことがわかる。

$\iota(T)$  は  $T_1$  に命題 1.2.2.5 で定義した対合を施し、 $T_2$  には何もしない

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 & \\ \hline 4 & 5 & 5 & & \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \iota(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & \\ \hline 3 & 4 & 4 & 4 & \\ \hline 4 & 5 & 5 & & \\ \hline \end{array}$$

示すべきことは

- (i) 実際に  $\iota(T)$  が  $\lambda$ -bad な半標準タブローであること
- (ii)  $\iota(T)$  が (5) をみたすこと

である。

- (i)  $\iota$  が  $T_2$  には何もしないことから、 $\lambda$ -bad であることは直ちに従う。よって  $\iota(T)$  が半標準タブローであることさえ示せばよい。 $\iota(T_1)$  は命題 1.2.2.5 から半標準タブローであり、 $T_2$  も半標準タブローだから、問題になるのは  $\iota(T_1)$  と  $T_2$  の境界部分である。悪い箱は命題 1.2.2.5 の証明中の意味で自由である。すなわちその上にある箱は  $k-1$  より真に小さい。

なぜならもし悪い箱の上に  $k-1$  があったとすると、 $j-1$  ステップ目で  $k-1$  行目に箱を追加しても Young 図形であることは保たれている。よってそのとき  $k$  行目の箱の数は  $k-1$  行目の箱の数と同じかそれ以下である。もし同じなら  $j-2$  ステップの時点では  $k-1$  行目の箱の数が  $k$  行目の箱の数より小さいこととなり、これは Young 図形になっていない。 $k-1$  行目の箱の数以下であるなら  $j$  ステップ目に  $k$  行目に箱を追加しても Young 図形であることは保たれるから、悪い箱であることに矛盾する。

よって  $T$  の悪い箱よりも上部分は考えなくてよい。悪い箱の下部分は半標準タブローの列単調性から  $k$  より真に大きいのでここも考えなくてよい。したがって問題になるのは悪い箱の左に入っている数が  $\iota$  によってどうなるかということだけであるが、 $\iota$  は  $k-1$  と  $k$  を適当に入れ替える操作なので単調性は崩れない。

- (ii)  $\iota$  は結局のところ  $k-1$  と  $k$  を (6) が成り立つように入れ替える操作であるから、

$$\begin{aligned} \lambda_k + \omega_k(\iota(T)) + \delta_k &= \lambda_{k-1} + \omega_{k-1}(T) + \delta_{k-1} \\ l \neq k, k-1 &\implies \lambda_l + \omega_l(\iota(T)) + \delta_l = \lambda_l + \omega_l(T) + \delta_l \end{aligned}$$

が成り立つ。命題 1.2.2.5 の対合を用いているので  $\iota$  もまた対合であるから

$$\begin{aligned} \lambda_{k-1} + \omega_{k-1}(\iota(T)) + \delta_{k-1} &= \lambda_k + \omega_k(\iota^2(T)) + \delta_k \\ &= \lambda_k + \omega_k(T) + \delta_k \end{aligned}$$

よって  $\sigma = (k, k-1)$  として

$$\lambda + \omega(\iota(T)) + \delta = \sigma(\lambda + \omega(T) + \delta)$$

が成り立つ。

□

Littlewood-Richardson 規則の特別な場合として、 $\lambda$  が一行の Young 図形の場合は Pieri の規則と呼ばれ、比較的簡単に計算できる。

**定義 1.2.2.8.** Young 図形  $\mu \subset \nu$ ,  $|\nu| = |\mu| + k$  に対して、 $\nu/\mu$  が水平帯であるとは

$\nu$  に含まれ、 $\mu$  に含まれない箱が各列にたかだか一つ

を満たすことをいう。このことは

$$\nu_l \leq \mu_{l-1}$$

がすべての  $l = 2, 3, \dots$  について成り立つことと同値である。

**定理 1.2.2.9** (Pieri の規則).  $\lambda = (k)$ ,  $\mu \in \mathcal{Y}_n$  に対して

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\substack{|\nu|=|\mu|+k \\ \nu/\mu \text{ は水平帯}}} s_\nu$$

が成り立つ

*Proof.* 定理 1.2.2.1 より、 $\mu$ -good な形  $\lambda$  の半標準タブローを考える。 $T$  が形  $\lambda$  の  $\mu$ -good な半標準タブローであるとする。いま  $\lambda$  は一行の Young 図形だから、 $T$  が  $\mu$ -good であることは

$$\omega_l(T) + \mu_l \leq \mu_{l-1}$$

がすべての  $l = 2, 3, \dots, n$  に対して成り立つことと同値である。 $\nu = \mu + \omega(T)$  とすれば、これは  $\nu/\mu$  が水平帯であることに他ならない。□

**例 1.2.2.10.**  $\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ ,  $\mu = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \in \mathcal{Y}_3$  として  $s_\lambda s_\mu$  を計算する。定理 1.2.2.9 より大きさ 5 の Young 図形で水平帯となっているものを探せばよい。それらは

$$\nu_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \textcolor{yellow}{\square} & \textcolor{yellow}{\square} \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array}, \quad \nu_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \textcolor{yellow}{\square} \\ \hline \square & \textcolor{yellow}{\square} & \\ \hline \end{array}, \quad \nu_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \textcolor{yellow}{\square} \\ \hline \textcolor{yellow}{\square} & \\ \hline \end{array}, \quad \nu_4 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \textcolor{yellow}{\square} \\ \hline \square & & \\ \hline \textcolor{yellow}{\square} & & \\ \hline \end{array}$$

だから

$$s_\lambda s_\mu = s_{\nu_1} + s_{\nu_2} + s_{\nu_3} + s_{\nu_4}$$

例 1.2.1.10 より、Pieri の規則は

$$h_k s_\mu = \sum_{\substack{|\nu|=|\mu|+k \\ \nu/\mu \text{ は水平帯}}} s_\nu$$

と書くこともできる。

**系 1.2.2.11** (Young の規則).  $\lambda \in \mathcal{Y}_n$  に対して

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_n} = s_{(\lambda_1)} \cdots s_{(\lambda_n)}$$

とおく。 $h_\lambda$  は対称多項式であるが、その Schur 多項式への分解について次が成り立つ：

$$h_\lambda = s_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} k_{\lambda\mu} s_\mu$$

係数  $k_{\lambda\mu}$  を Kostka 数という。

*Proof.*  $\lambda$  の行数  $n$  に関する帰納法で示す。 $n = 1$  のときは  $h_\lambda = s_\lambda$  ゆえに明らか。 $n > 1$  とする。 $\lambda' = (\lambda_2, \dots, \lambda_n)$  として帰納法の仮定より

$$h_{\lambda_2} \cdots h_{\lambda_n} = s_{\lambda'} + \sum_{\mu > \lambda'} k_{\lambda'\mu} s_\mu$$

と書けるから

$$h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots h_{\lambda_n} = s_{(\lambda_1)} \left( s_{\lambda'} + \sum_{\mu > \lambda'} k_{\lambda'\mu} s_\mu \right)$$

となる。 $s_{(\lambda_1)} s_{\lambda'}$  について考えると、Pieri の規則 (系 1.2.2.9) より、

$$s_{(\lambda_1)} s_{\lambda'} = \sum_{\substack{|\nu|=|\lambda'|+\lambda_1 \\ \nu/\lambda' \text{ は水平帯}}} s_\nu$$

となるが、 $l = 2, 3, \dots, n$  に対して

$$\lambda_l = \lambda'_{l-1}$$

だから  $\lambda/\lambda'$  は水平帯である。また、 $\nu/\lambda'$  が水平帯であるような  $|\nu| = |\lambda'| + \lambda_1$  をみたす任意の  $\nu$  について、

$$\nu_l \leq \lambda'_{l-1} = \lambda_l, \quad l = 2, 3, \dots, n$$

だから、

$$\nu_1 = |\nu| - (\nu_2 + \cdots + \nu_n) \geq |\lambda| - (\lambda_2 + \cdots + \lambda_n) = \lambda_1$$

よって  $\lambda \leq \nu$  である。したがって

$$s_{(\lambda_1)} s_{\lambda'} = s_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} s_\mu$$

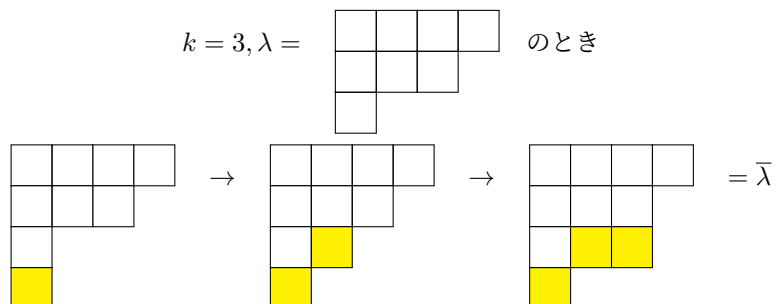
と書くことができる。一方で、 $\mu > \lambda'$  に対して  $s_{(\lambda_1)} s_\mu$  を考えると、再び Pieri の規則から

$$s_{(\lambda_1)} s_\mu = \sum_{\substack{|\nu|=|\mu|+\lambda_1 \\ \nu/\mu \text{ は水平帯}}} s_\nu \quad (1.7)$$

であるが、 $\nu > \lambda$  となることを示れば証明が完了する。次の補題を示す。

**補題 1.2.2.12.** Young 図形  $\lambda, \mu$  について、 $\mu > \lambda$  であるとする。 $\mu$  に  $k$  個の箱を、水平帯条件が成り立つように追加してできる最小の Young 図形を  $\bar{\mu}$  とおき、同様に  $\lambda$  に  $k$  個の箱を、水平帯条件が成り立つように追加してできる最小の Young 図形を  $\bar{\lambda}$  とおく。このとき  $\bar{\mu} > \bar{\lambda}$  である。

*Proof.* 辞書式順序の定義から、 $\lambda$  や  $\mu$  に箱を追加する際、最も小さくなるようにするには各列に左から箱を足していけばよい。



また、 $\lambda < \mu$  であることは「 $\lambda$  の列数と  $\mu$  の列数を右から辞書式順序で比べたとき、 $\mu$  のほうが大きい」ということと同値だから、 $\lambda, \mu$  の列に左から1つずつ箱を足しても大小は保たれる。 □

式 (1.7) において  $\nu\mu$  は水平帯であり、 $\mu > \lambda'$  だったが、 $\lambda'$  に  $\lambda_1$  個の箱を水平帯となるように追加した最小の Young 図形は  $\lambda$  に他ならなかったから、補題により  $\nu > \lambda$  □

## 第 2 章

# 対称群と一般線形群の表現

### 2.1 有限群の表現論

#### 2.1.1 既約表現と Maschke の定理

**定義 2.1.1.1.**  $G$  を群、 $V$  をベクトル空間とする。群準同型  $\rho: G \rightarrow \text{GL } V$  が与えられたとき、 $(\rho, V)$  を  $G$  の表現といい  $V$  を表現空間という。 $\rho$  や  $V$  のことを表現ということもある。

以下、本節ではベクトル空間と言ったら複素数体  $\mathbb{C}$  上の有限次元ベクトル空間を指すものとし、群と言ったら有限群を指すものとする。

**例 2.1.1.2.**  $G$  を群、 $V = \mathbb{C}$  とする。すべての  $g \in G$  に対して  $\rho(g) = \text{id}_V$  とするとこれは表現になる。これを自明な表現という

**例 2.1.1.3.**  $G = \mathfrak{S}_n$ ,  $V = \mathbb{C}^n$  として  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して

$$\rho(\sigma)(a_1, \dots, a_n) = (a_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(n)})$$

とするとこれは表現になる。

**例 2.1.1.4.**  $G$  を群、 $V$  を  $G$  の元を基底にもつ自由ベクトル空間とする。 $g \in G$  に対して

$$\rho(g) \sum_{x \in G} a_x x = \sum_{x \in G} a_x gx$$

によって定めるとこれは表現になる。これを  $G$  の正則表現という

文脈から明らかな場合や特に明示する必要がないとき、 $\rho(g)x$  のことをたんに  $gx$  と書く。表現論の基本的な問題は、 $G$  の考えうるあらゆる作用を分類することである。表現の分類の基準となるのは、次の定義である。

**定義 2.1.1.5.**  $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$  を  $G$  の表現とする。線形写像  $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$  が

$$\rho_2(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho_1(g), \quad \text{for all } g \in G$$

をみたすとき、 $\varphi$  を  $G$  線形写像という。 $G$  線形写像の全体を  $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$  と書く。

**定義 2.1.1.6.**  $G$  の表現  $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$  の間に同型な  $G$  線形写像があるとき、 $(\rho_1, V_1)$  と  $(\rho_2, V_2)$  同値な表現であるといい、

$$\rho_1 \simeq \rho_2$$

と書く。

表現の同値は同値関係になる。したがって表現の分類はその同値類を求めることと言い換えられる。いきなりすべての表現を考えるのは難しいのでまずは「小さい表現」を考えたい。そのために、与えられた表現よりも小さい表現とは何かを定義する。

**定義 2.1.1.7.**  $(\rho, V)$  を  $G$  の表現とする。  $V$  の部分空間  $W$  が  $G$  不変であるとは

$$\rho(g)W \subset W, \quad \text{for all } g \in G$$

が成り立つことをいう。このとき  $\rho' : G \rightarrow GL(W)$  を

$$\rho'(g) = \rho(g)|_W$$

によって定義することができ、表現になる。 $(\rho', W)$  を  $(\rho, V)$  の部分表現という。定義より、すべての表現  $(\rho, V)$  は  $0$  と  $V$  を部分表現に持っていることに注意。これらを自明な部分表現という。

**定義 2.1.1.8.**  $G$  の表現  $(\rho, V)$  が既約であるとは、 $V$  が非自明な部分表現を持たないことをいう。

**例 2.1.1.9.**  $f : V \rightarrow W$  が  $G$  線形写像であるなら  $\ker f \subset V$ ,  $\text{Im } f \subset W$  はともに  $G$  不変部分空間である。

**例 2.1.1.10.** すべての 1 次元表現は既約である。実際 1 次元のベクトル空間  $V$  の部分空間は  $0$  と  $V$  のみである。

**例 2.1.1.11.** 例 2.1.1.3 の表現を考える。

$$W = \{ (a_1, \dots, a_n) \in V \mid a_1 + \dots + a_n = 0 \}$$

とすると、 $W$  は  $G$  不変である。

$$v = (1, 1, \dots, 1) \in V$$

とし  $U = \langle v \rangle$  とおくと

$$\rho(g)v = v$$

だから  $U$  も  $G$  不変部分空間で、自明な表現と同値である。例 2.1.1.10 より  $U$  は既約である。

与えられた表現から新しい表現を作る方法を導入しておく。

**定義 2.1.1.12.**  $(\rho_1, V_1)$ ,  $(\rho_2, V_2)$  を  $G$  の表現とする。

- $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \rightarrow GL(V_1 \oplus V_2)$  を

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(x, y) = (\rho_1(x), \rho_2(y))$$

で定義する。これを  $\rho_1$  と  $\rho_2$  の直和という。

- $\rho_1 \otimes \rho_2 : G \rightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$  を

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(x \otimes y) = \rho_1(x) \otimes \rho_2(y)$$

で定義する。これを  $\rho_1$  と  $\rho_2$  の (内部) テンソル積という。

- $\rho_1^* : G \rightarrow GL(V^*)$  を

$$\rho_1^*(g)(f) = f \circ (\rho_1(g^{-1}))$$

で定義する。これを  $\rho_1$  の反傾表現という。

$(\rho_G, V)$  を群  $G$  の表現、 $(\rho_H, W)$  を群  $H$  の表現とする。このとき  $\rho_G \boxtimes \rho_H : G \times H \rightarrow GL(V \otimes W)$  を

$$\rho_G \boxtimes \rho_H(g, h)(x \otimes y) = \rho_G(g)(x) \otimes \rho_H(h)(y)$$

で定義する。これを  $\rho_G$  と  $\rho_H$  の外部テンソル積という。

これらが実際に表現になっていることは容易にわかる。実は、有限群の複素数体上の有限次元表現は既約表現の直和に同値であることがわかる (系 2.1.1.14)。すなわち、表現の分類を考える上では本質的に最も小さい表現、既約表現のみを考えれば良いことがわかる。

**定理 2.1.1.13** (Maschke の定理).  $V$  を  $G$  の表現とする。任意の  $V$  の  $G$  不変部分空間  $W$  に対して、 $V$  の  $G$  不変部分空間  $U$  が存在し

$$V = W \oplus U$$

がなりたつ。

*Proof.* 証明のポイントは  $W$  への  $G$  不変な射影を構成することである。 $p : V \rightarrow W$  を  $G$  不変とは限らない何らかの射影とする。

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} hp(h^{-1}x)$$

と定めると、 $f$  は  $G$  線形な  $W$  への射影となる。実際任意の  $g \in G$  に対して

$$\begin{aligned} f(gx) &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} hp(h^{-1}gx) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} gkp(k^{-1}x) \quad \text{where } k = g^{-1}h \\ &= gf(x) \end{aligned}$$

より  $G$  線形性は示された。また

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gp(g^{-1}x)\right) \\ &= \frac{1}{|G|^2} \sum_{g, h \in G} gh p(h^{-1}p(g^{-1}x)) \end{aligned}$$

ここで、 $p : V \rightarrow W$  は射影で  $W$  は  $G$  不変だから  $p(h^{-1}p(g^{-1}x)) = h^{-1}p(g^{-1}x)$  ゆえに

$$f^2(x) = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g, h \in G} gp(g^{-1}x) = f(x)$$

$f(W) \subset W$  であり、任意の  $W$  の元  $x$  に対して

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gp(g^{-1}x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gg^{-1}x = x$$

だから  $f$  は  $W$  への射影である。したがって

$$V = \text{Im } f \oplus \ker f = W \oplus \ker f$$

が成り立つが、 $f$  は  $G$  線形なので  $\ker f$  は  $G$  不変部分空間である (例 2.1.1.9)。  $\square$

**系 2.1.1.14.**  $V$  を  $G$  の表現とすると、既約表現  $W_1, \dots, W_r$  が存在して

$$V \simeq W_1 \oplus \dots \oplus W_r$$

が表現の同値として成り立つ。このことを  $G$  の表現の完全可約性という。

*Proof.*  $\dim_{\mathbb{C}} V$  に関する帰納法で示す。 $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$  なら  $V$  は既約だからよい。 $\dim_{\mathbb{C}} V > 1$  で  $V$  は可約であるとする。このとき  $V$  は非自明な部分表現  $V_1$  をもつが、定理 2.1.1.13 より部分表現  $U_1$  で

$$V = V_1 \oplus U_1$$

となるものが存在する。 $\dim_{\mathbb{C}} V_1, \dim_{\mathbb{C}} U_1 < \dim_{\mathbb{C}} V$  だから帰納法の仮定により、

$$\begin{aligned} V_1 &= W_1 \oplus \dots \oplus W_{s_1}, \\ U_1 &= W_{s+1} \oplus \dots \oplus W_r, \quad \text{各 } W_i \text{ は既約} \end{aligned}$$

と既約分解できる。したがって  $V$  も既約分解される。  $\square$

**注意 2.1.1.15.** 定理 2.1.1.13 は標数が群の位数と互いに素な任意の体上で成立する。実際証明中で  $|G|$  で割るシーンがあるが、それ以外体に依存する議論はしていない。しかし  $G$  の位数が無限の場合は成り立たない。例えば無限巡回群  $\mathbb{Z}$  の表現として

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える。 $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  の固有空間  $V(1)$  は  $\mathbb{Z}$  不変だが、 $\mathbb{Z}$  不変な補空間をもたない。

2.1.1.13 の証明は  $V$  が無限次元であっても通用する<sup>\*1</sup>。しかし系 2.1.1.14 の証明は次元に関する帰納法を用いているので無限次元では通用しない。”有限個”の既約表現に分解できるということがポイントである。

## 2.1.2 有限群の表現に対する指標

次に既約表現の分類をする上で鍵となる指標の概念を導入する。

**定義 2.1.2.1.**  $(\rho, V)$  を  $G$  の表現とする。 $\chi_V : G \rightarrow \mathbb{C}$  を

$$\chi_V(g) = \text{tr } \rho(g)$$

で定め、これを  $V$  の指標という。

本節では指標の直交関係 (定理 2.1.2.12) を示すことが目標である。指標は類関数と呼ばれる群上の関数になっており、類関数のなすベクトル空間に特別な内積を入れるとこの内積に関して指標が正規直交基底をなす、というのが主張である。この系として、

<sup>\*1</sup> 選択公理により、無限次元ベクトル空間においても任意の部分空間に対する補空間が存在し、それにより射影が得られる。



- 既約表現の個数は共役類の個数に等しい
- 既約表現の分類は既約指標の分類に帰着される
- 既約表現の次元に関する公式

といったさまざまな有用な事実が導かれる。

表現の各種の演算と指標との関係を見ておく

**命題 2.1.2.2.**  $V_1, V_2$  を  $G$  の表現、対応する指標を  $\chi_1, \chi_2$  とする。

- (i)  $\chi_{1 \oplus 2} = \chi_1 + \chi_2$
- (ii)  $\chi_{1 \otimes 2} = \chi_1 \chi_2$
- (iii)  $\chi_{1^*} = \overline{\chi_1}$

が成り立つ

*Proof.* (i)  $\text{tr}(A \oplus B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$  より従う

(ii)  $\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$  より従う

(iii)  $\text{Hom}(V, V) = V^* \otimes V$  であり  $\text{tr} : \text{Hom}(V, V) \rightarrow \mathbb{C}$  は  $f \otimes v \in V^* \otimes V$  に対して

$$\text{tr}(f \otimes v) = f(v)$$

で与えられることに注意する。 $e_1, \dots, e_n$  を  $V$  の基底として  $e_1^*, \dots, e_n^*$  をその双対基底とする。このとき  $\rho^*(g) \in \text{Hom}(V^*, V^*) = V \otimes V^*$  は

$$\begin{aligned} \rho^*(g) &= e_1 \otimes (\rho^*(g)e_1^*) + \dots + e_n \otimes (\rho^*(g)e_n^*) \\ &= e_1 \otimes (e_1^* \circ \rho(g^{-1})) + \dots + e_n \otimes (e_n^* \circ \rho(g^{-1})) \end{aligned}$$

と表されるから

$$\text{tr}(\rho^*(g)) = (e_1^* \circ \rho(g^{-1}))(e_1) + \dots + (e_n^* \circ \rho(g^{-1}))(e_n) = \text{tr}(\rho(g^{-1})) = \text{tr}(\rho(g)^{-1})$$

である。 $g$  は有限位数だから  $\rho(g)$  はユニタリ行列である。よってその固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  はすべて絶対値が 1 なので

$$\text{tr}(\rho(g)^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_n} = \overline{\lambda_1} + \dots + \overline{\lambda_n} = \overline{\text{tr}(\rho(g))}$$

これで示せた

□

指標の直交関係を示そう。まず、いくつか必要な補題を示す。

**補題 2.1.2.3** (Schur の補題).  $V, W$  を  $G$  の既約表現とする。このとき

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} 1 & \text{if } V \simeq W \text{ as } G\text{-representation} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。とくに  $V = W$  なら  $f \in \text{Hom}_G(V, V)$  はスカラー写像である。

---

<sup>\*2</sup>  $f_1 \otimes v_1 + \dots + f_n \otimes v_n \in V^* \otimes V$  に対して

$$\phi(x) = f_1(x)v_1 + \dots + f_n(x)v_n$$

によって  $\phi \in \text{Hom}(V, V)$  を定めればこれが同型を与える。

*Proof.* 先に後半の主張を示す。 $f : V \rightarrow V$  を  $G$  線形写像とする。 $f$  の固有空間を  $V(\lambda)$  とすると、 $V(\lambda)$  は  $G$  不変である。実際、 $x \in V(\lambda)$ ,  $g \in G$  に対して

$$f(gx) = gf(x) = g(\lambda x) = \lambda gx$$

である。 $V$  は既約であり  $V(\lambda) \neq 0$  なので  $V(\lambda) = V$  よって

$$f = \lambda \text{id}_V$$

である。

前半を示そう。 $V \simeq W$  とし  $\varphi \in \text{Hom}_G(V, W)$  を  $G$  同型として固定する。任意の  $f \in \text{Hom}_G(V, W)$  について、 $\varphi^{-1} \circ f$  は  $V \rightarrow V$  の  $G$  線形写像だから前半の結果より

$$\varphi^{-1} \circ f = \lambda \text{id}_V$$

と表される。すなわち

$$f = \lambda \varphi$$

である。したがって  $\text{Hom}_G(V, W) = \langle \varphi \rangle$  となる。

$V \not\simeq W$  の場合、 $f \in \text{Hom}_G(V, W)$  について  $V, W$  の既約性から

$$\ker f = 0 \text{ または } V, \quad \text{Im } f = 0 \text{ または } W$$

を得るが、 $V \neq W$  より  $\ker f = V$ ,  $\text{Im } f = 0$  すなわち  $f = 0$  である。これで示せた。  $\square$

**注意 2.1.2.4.** 定理 2.1.2.3 の証明より  $f \in \text{Hom}_G(V, W)$  は  $V \simeq W$  なら 0 または同型、 $V \not\simeq W$  なら  $f = 0$  であることがわかる。こちらを Schur の補題と呼ぶ場合もある。

**補題 2.1.2.5.**  $(\rho, V), (\theta, W)$  を  $G$  の表現とする。 $\rho : G \rightarrow \text{GL Hom}(V, W)$  を

$$\rho(g)(f) = \theta(g) \circ f \circ \rho(g^{-1})$$

とするとこれは表現となり、

$$\chi_{\text{Hom}(V, W)} = \overline{\chi_V} \chi_W$$

が成り立つ

*Proof.*  $\text{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$  であることから  $\rho^*(g) \otimes \theta(g) = \rho(g)$  が成り立つことを示せばよい。 $f = v^* \otimes w \in V^* \otimes W$  に対して、反傾表現およびテンソル表現の定義から

$$g(v^* \otimes w) = [v^* \circ (\rho(g^{-1}))] \otimes [\theta(g)w]$$

となるが、これの定める線形写像は、 $x \in V$  として

$$([v^* \circ (\rho(g^{-1}))] \otimes [\theta(g)w])x = [v^* \circ (\rho(g^{-1}))]x \cdot \theta(g)w$$

である。ここで  $[v^* \circ (\rho(g^{-1}))]x$  はスカラーなので

$$\begin{aligned} [v^* \circ (\rho(g^{-1}))]x \cdot \theta(g)w &= \theta(g)([v^* \circ (\rho(g^{-1}))]x)w \\ &= \theta(g)(v^* \otimes w(\rho(g^{-1}))) \\ &= (\theta(g) \circ f \circ \rho(g^{-1}))x \\ &= \rho(g)x \end{aligned}$$

指標の公式は命題 2.1.2.2 より従う  $\square$

**補題 2.1.2.6.**  $V$  を  $G$  の表現とし、 $V^G$  を  $G$  の固定点の集合とする。すなわち

$$V^G = \{ v \in V \mid \forall g \in G, \quad gv = v \}$$

とする。このとき  $V^G$  は  $V$  の部分表現であり

$$\dim V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)$$

が成り立つ。とくに  $V^G$  は  $G$  の自明な表現の直和である。

*Proof.*  $f : V \rightarrow V$  を

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gx$$

で定義すると  $f$  は射影になる。実際、 $h \in G$  として

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g, h \in G} ghx \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} kx \\ &= f(x) \end{aligned}$$

である。また

$$hf(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hgx = \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} kx = f(x)$$

より  $\text{Im } f = V^G$  である。射影のトレースは像の次元に等しいので

$$\text{tr}(f) = \dim \text{Im } f = |V^G|$$

だが、

$$\text{tr}(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)$$

よって示せた。 $V^G$  が  $G$  の自明な表現の直和であることは、 $V^G$  の定義そのものである。 □

**例 2.1.2.7.**  $\text{Hom}(V, W)^G = \text{Hom}_G(V, W)$  である。実際  $f \in \text{Hom}(V, W)$  の条件について

$$\theta(g) \circ f \circ \rho(g^{-1}) = f \Leftrightarrow f \circ \rho(g) = \theta(g) \circ f$$

である。

**定義 2.1.2.8.** 関数  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  が

$$f(g^{-1}xg) = f(x), \quad \text{for all } g \in G$$

を満たすとき、 $f$  を類関数という。類関数全体を  $C(G)$  と置くと  $C(G)$  には自然に  $\mathbb{C}$  ベクトル空間の構造が入る

**例 2.1.2.9.** 一般に  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  が成り立つので、表現の指標は類関数である。

例 2.1.2.10.  $G$  の共役類を  $C_1, \dots, C_s$  とし、 $G$  上の関数  $\omega_i$  を

$$\omega_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in C_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定めると  $\omega_i$  は類関数であり  $\omega_1, \dots, \omega_s$  は  $C(G)$  の基底である。よって  $\dim C(G) = s$  である。

定義 2.1.2.11.  $\phi, \psi \in C(G)$  に対して

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\phi(g)} \psi(g)$$

によって  $\langle \cdot, \cdot \rangle : C(G) \times C(G) \rightarrow \mathbb{C}$  を定めると、これは  $C(G)$  上の Hermite 内積となる。 $C(G)$  にはいつもこの内積が入っているものとする。

定理 2.1.2.12 (指標の直交関係).  $V, W$  を  $G$  の既約表現とする。このとき

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } V \simeq W \text{ as } G\text{-representation} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。

*Proof.* 補題 2.1.2.5 と補題 2.1.2.6 および補題 2.1.2.3 から

$$\begin{aligned} \langle \chi_V, \chi_W \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{Hom}(V, W)}(g) \\ &= \dim \text{Hom}(V, W)^G \\ &= \dim \text{Hom}_G(V, W) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{if } V \simeq W \text{ as } G\text{-representation} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

□

系 2.1.2.13.  $G$  の既約指標は有限個である。したがって  $G$  の既約表現は同値の違いを除いて有限個である。

*Proof.* 定理 2.1.2.12 より既約指標の集合は  $C(G)$  で一次独立である。 $C(G)$  は有限次元だから、既約指標は有限でなければならない □

系 2.1.2.14.  $G$  の既約指標  $\chi_1, \dots, \chi_r$  は  $C(G)$  の正規直交基底をなす。したがって  $r$  は  $G$  の共役類の数に等しい。

*Proof.* 正規直交であることは定理 2.1.2.12 で示されたので、基底であること、すなわち次を示せばよい：

$$f \in C(G) \text{ が } \langle \chi_i, f \rangle = 0 \text{ を各 } i = 1, \dots, r \text{ に対して満たせば } f = 0 \text{ である}^{*3}$$

---

\*3 一般に内積空間  $V$  の正規直交系  $v_1, \dots, v_n$  が、「 $w \in V$  が  $\langle w, v_i \rangle = 0$  ならば  $w = 0$ 」を満たせば  $v_1, \dots, v_n$  は  $V$  の基底になる。実際、任意の  $x \in V$  に対して  $w = x - (\langle x, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle x, v_n \rangle v_n)$  と置けば  $\langle w, v_i \rangle = 0$  をみたすから  $w = 0$

$f$  が仮定をみたす類関数であるとする。各  $i$  について  $\chi_i$  を指標に持つ既約表現を  $(\rho_i, V_i)$  とおく。

$$0 = \langle f, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \operatorname{tr}(\rho_i(g))$$

より、写像  $F_i : V_i \rightarrow V_i$  を

$$F_i = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \rho_i(g)$$

とおけば  $\operatorname{tr}(F_i) = 0$  である。 $F_i$  は  $G$  線形写像である。実際  $h \in G, x \in V_i$  として

$$\begin{aligned} F_i(\rho_i(h)x) &= \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \rho_i(gh)x \\ &= \sum_{k \in G} \overline{f(kh^{-1})} \rho_i(k)x, \quad \text{where } k = gh \\ &= \sum_{k \in G} \overline{f(h^{-1}k)} \rho_i(k)x, \quad f \text{ は類関数} \\ &= \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \rho_i(hg)x, \quad \text{where } g = h^{-1}k \\ &= \rho_i(h)F_i(x) \end{aligned}$$

よって補題 2.1.2.3 よりある  $\lambda \in \mathbb{C}$  で

$$F_i = \lambda \operatorname{id}_{V_i}$$

となるが、 $\operatorname{tr}(F_i) = 0$  だったから  $\lambda = 0$  でなければならない。よって  $F_i = 0$  であることがわかる。

次に、 $\theta : G \rightarrow \mathbb{C}[G]$  を  $G$  の正則表現とする。ただし  $\mathbb{C}[G]$  は  $G$  を基底に持つ自由ベクトル空間である。定理 2.1.1.13 より  $\theta$  はいくつかの既約表現の直和に同値である。よって

$$\theta = \rho_1^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus \rho_r^{\oplus m_r} \quad (2.1)$$

とおく。写像  $F : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[G]$  を

$$F = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \theta(g)$$

とすれば (2.1) より

$$F = \left( \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \rho_1(g) \right)^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus \left( \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \rho_r(g) \right)^{\oplus m_r} = F_1^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus F_r^{\oplus m_r} = 0$$

よって  $e$  を  $G$  の単位元として

$$0 = Fe = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} g$$

$G$  は一次独立だからすべての  $g$  について  $f(g) = 0$  □

**系 2.1.2.15.**  $(\rho, V)$  を  $G$  の表現,  $(\rho_1, W_1), \dots, (\rho_r, W_r)$  を  $G$  の既約表現の同値類の完全代表系とし、それぞれの対応する指標を  $\chi, \chi_1, \dots, \chi_r$  とおく。

$$\rho \simeq \rho_1^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus \rho_r^{\oplus m_r}$$

とすると、

$$m_i = \langle \chi, \chi_i \rangle = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(W_i, V)$$

が成り立つ。 $m_i$  を  $\rho$  の  $\rho_i$  に関する重複度という。また

$$V \simeq \bigoplus_{i=1}^r W_i \otimes \text{Hom}_G(W_i, V) = \bigoplus_{i=1}^r W_i \otimes \text{Hom}_G(V, W_i)$$

がなりたつ。

*Proof.* 系 2.1.2.14 より前半は直ちに従う。後半については、 $\text{Hom}_G(W_i, V)$  は定義から自明な表現の直和に等しいことからわかる。また、 $\langle \chi_{W_i}, \chi_V \rangle$  は整数であるから

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(W_i, V) = \langle \chi_{W_i}, \chi_V \rangle = \langle \chi_V, \chi_{W_i} \rangle = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(V, W_i)$$

よって

$$\text{Hom}_G(W_i, V) \simeq \text{Hom}_G(V, W_i)$$

である。 □

**系 2.1.2.16.** 表現の既約表現への直和分解は、同値の違いを除いて一意である。

**注意 2.1.2.17.** 既約表現への分解は同値の違いを除いて一意であるが、与えられた表現を既約表現の直和に分解する標準的な方法があるわけではない。

**系 2.1.2.18.** 指標  $\chi$  が既約指標であるための必要十分条件は  $\langle \chi, \chi \rangle = 1$  が成り立つことである

*Proof.* 必要性は明らか。十分性を示す。 $\chi = m_1 \chi_1 + \cdots + m_r \chi_r$  とおくと

$$\langle \chi, \chi \rangle = 1$$

であるならば

$$m_1^2 + \cdots + m_r^2 = 1$$

ゆえにある  $i$  で  $\chi = \chi_i$  である。 □

**系 2.1.2.19** (Schur の補題の逆).  $V$  を  $G$  の表現とする。 $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(V, V) = 1$  であるならば  $V$  は既約表現である。

*Proof.*  $\chi$  を  $V$  の指標とすると、補題 2.1.2.5, 補題 2.1.2.6 より条件は

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = 1$$

すなわち  $\langle \chi, \chi \rangle = 1$  に他ならない。 □

**系 2.1.2.20.**  $\rho_1, \rho_2$  を  $G$  の表現、対応する指標を  $\chi_1, \chi_2$  とする。 $\rho_1 \simeq \rho_2$  であるための必要十分条件は  $\chi_1 = \chi_2$  が成り立つことである。

*Proof.* 必要性は明らか。十分性を示す。 $\theta_1, \dots, \theta_r$  を  $G$  の既約表現の同値類の完全代表系とし、対応する指標を  $\psi_1, \dots, \psi_r$  とおく。定理 2.1.1.13 より

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \theta_1^{\oplus m_1^{(1)}} \oplus \dots \oplus \theta_r^{\oplus m_r^{(1)}} \\ \rho_2 &= \theta_1^{\oplus m_1^{(2)}} \oplus \dots \oplus \theta_r^{\oplus m_r^{(2)}}\end{aligned}$$

と分解すれば

$$\begin{aligned}\chi_1 &= m_1^{(1)} \psi_1 + \dots + m_r^{(1)} \psi_r \\ \chi_2 &= m_1^{(2)} \psi_1 + \dots + m_r^{(2)} \psi_r\end{aligned}$$

仮定から  $\chi_1 = \chi_2$  であり、系 2.1.2.14 より

$$m_1^{(1)} = m_1^{(2)}, \dots, m_r^{(1)} = m_r^{(2)}$$

である。よって

$$\rho_1 \simeq \rho_2$$

□

**命題 2.1.2.21.**  $W_1, \dots, W_r$  を  $G$  の既約表現の同値類の完全代表系とする。

$$|G| = \dim W_1^2 + \dots + \dim W_r^2$$

が成り立つ

*Proof.*  $\theta$  を  $G$  の正則表現とする。 $\theta$  の指標を  $R$ ,  $W_i$  の指標を  $\chi_i$  とおく。系 2.1.2.15 より  $\theta$  の  $W_i$  に関する重複度を  $m_i$  とおくと

$$m_i = \langle R, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{R(g)} \chi_i(g)$$

ここで、

$$R(g) = \text{tr}(\theta(g)) = \begin{cases} 0 & \text{if } g \neq e \\ |G| & \text{if } g = e \end{cases}$$

だから

$$m_i = \chi_i(e) = \dim W_i$$

よって

$$R = \dim W_1 \chi_1 + \dots + \dim W_r \chi_r$$

だから

$$|G| = R(e) = \dim W_1^2 + \dots + \dim W_r^2$$

□

**例 2.1.2.22.**  $G = \mathfrak{S}_3$  の既約指標を全て求めよう。 $G$  の共役類は

$$e, (1, 2), (1, 2, 3)$$

で代表される 3 つだから既約表現も 3 つある。またそれぞれの共役類の濃度は順に

$$1, 3, 2$$

である。

1 を自明な表現とし、 $\text{sgn} : G \rightarrow \mathbb{C}$  を置換の符号とすると、 $\text{sgn}$  は 1 次元の既約表現である。例 2.1.1.3 の直和因子として現れた表現を考える。すなわち  $V = \mathbb{C}^3$  として  $\rho : G \rightarrow \text{GL } V$  を自然な置換による作用とする。このとき

$$U = \{ (a_1, a_2, a_3) \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0 \}$$

が  $V$  の不変部分空間となり、

$$\rho \simeq \rho_U \oplus 1$$

となるのであった。 $\rho_U$  が既約であることを示そう。 $\rho_U$  の指標を  $\chi_U$  とすると

$$\chi_U(g) = \chi_V(g) - 1 = |\{x \in \{1, 2, 3\} \mid gx = x\}| - 1$$

であるから

$$\langle \chi_U, \chi_U \rangle = \frac{1}{6}(1 \cdot 2^2 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot (-1)^2) = \frac{6}{6} = 1$$

よって既約である。まとめると  $G$  の既約指標は次の 3 つである

	$e$	$(1, 2)$	$(1, 2, 3)$
1	1	1	1
$\text{sgn}$	1	-1	1
$\chi_U$	2	0	-1

**例 2.1.2.23.**  $G = \mathfrak{S}_4$  の既約指標を全て求めよう。 $G$  の共役類は

$$e, (1, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 3, 4), (1, 2)(3, 4)$$

で代表される 5 つだから既約指標も 5 つある。またそれぞれの共役類の濃度は順に

$$1, 6, 8, 6, 3$$

である。

$\mathfrak{S}_3$  と同様、1 次元の既約表現として 1 と  $\text{sgn}$  がある。再び例 2.1.1.3 の直和因子として現れた表現を考える。すなわち

$$U = \{ (a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \}$$

への置換による作用  $\rho_U$  を考える。 $\rho_U$  が既約であることを示そう。 $\rho_U$  の指標を  $\chi_U$  とすると

$$\chi_U(g) = |\{x \in \{1, 2, 3, 4\} \mid gx = x\}| - 1$$

であるから

$$\langle \chi_U, \chi_U \rangle = \frac{1}{24}(1 \cdot 3^2 + 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 0^2 + 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2) = \frac{24}{24} = 1$$

よって既約である。さらに  $\text{sgn}^2 = 1$  より

$$\langle \chi_U \text{sgn}, \chi_U \text{sgn} \rangle = 1$$



であることがわかるので  $\chi_U \text{sgn}$  も既約指標である。ここまでをまとめると次の表を得る。

	$e$	$(1, 2)$	$(1, 2, 3)$	$(1, 2, 3, 4)$	$(1, 2)(3, 4)$
1	1	1	1	1	1
sgn	1	-1	1	-1	1
$\chi_U$	3	1	0	-1	-1
$\chi_U \text{sgn}$	3	-1	0	1	-1
$\psi$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$

あと 1 つの指標  $\psi$  は直交関係や次元公式を用いることで具体的な作用の考察なしに求めることができる。次元公式より

$$\psi(e) = 24 - (1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2) = 4$$

ゆえに  $\psi(e) = 2$  である。直交関係より

$$\begin{cases} 6x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= -2 \\ -6x_2 + 8x_3 - 6x_4 + 3x_5 &= -2 \\ 6x_2 - 6x_4 - 3x_5 &= -6 \\ 4 + 6x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_4^2 + 3x_5^2 &= 24 \end{cases}$$

これを解くと

	$e$	$(1, 2)$	$(1, 2, 3)$	$(1, 2, 3, 4)$	$(1, 2)(3, 4)$
1	1	1	1	1	1
sgn	1	-1	1	-1	1
$\chi_U$	3	1	0	-1	-1
$\chi_U \text{sgn}$	3	-1	0	1	-1
$\psi$	2	0	-1	0	2

### 2.1.3 群環

本節では群環という代数を導入し、環上の加群論を用いた表現論に関するいくつかの命題を証明する。

なお本節で環は、乗法単位元をもつ必ずしも可換とは限らない環を指すとする。また加群といったら考えている環上の左加群を指しているとする。

**定義 2.1.3.1.**  $G$  を群,  $K$  を体とする。 $K[G]$  を  $G$  を基底にもつ  $K$  上の自由ベクトル空間とし、 $G$  の積から自然に定まる演算で  $K[G]$  に積を入れる。すなわち

$$\left( \sum_{g \in G} a_g g \right) \cdot \left( \sum_{h \in G} b_h h \right) = \sum_{k \in G} \left( \sum_{gh=k} a_g b_h \right) k$$

である。これによって  $K[G]$  は  $K$  上の多元環の構造をもつ。これを  $G$  の  $K$  上の群環という。

$V$  を  $G$  の体  $K$  上の表現とする。 $V$  は自然に  $K[G]$  加群の構造が入り、逆に  $K[G]$  加群は自然に  $G$  の表現とみなすことができる。以下、 $K[G]$  加群といったらすべて  $K$  上有限次元のものを考えることにする。

このとき、

- 部分表現は部分加群
- 表現の直和は加群の直和
- 既約表現は単純加群

- $G$  線形写像は加群の準同型
- 表現の同値は加群の同型

にそれぞれ対応することがわかる。ただし表現のテンソル積は  $K[G]$  加群としてのテンソル積ではないことに注意。 $V, W$  を  $K[G]$  加群とすると、 $V$  と  $W$  の表現のテンソル積は  $V \otimes_K W$  に  $g(x \otimes y) = gx \otimes gy$  による作用を入れたものである。

ここで、

**定義 2.1.3.2.**  $A$  を環とする。 $A$  加群  $M$  が単純であるとは、 $M$  が非自明な部分加群をもたないことをいう。

である。環  $A$  を  $A$  加群とみなしたとき、 $A$  の部分加群とは  $A$  の左イデアルにほかならず、 $A$  に含まれる単純  $A$  加群は  $A$  の極小左イデアルである。単純性に関連して次の定義をする。

**定義 2.1.3.3.**  $A$  加群  $M$  が半単純であるとは、任意の  $M$  の部分加群が  $M$  の直和因子であることをいう。また、任意の  $A$  加群が半単純であるとき、 $A$  を半単純環という。

**定理 2.1.3.4** (Maschke の定理).  $K[G]$  が半単純環であるための必要十分条件は、 $|G|$  が  $p = \text{ch } K$  で割り切れないことである。

*Proof.* 十分性は定理 2.1.1.13 の証明とまったく同様である。必要性を示す。 $|G|$  が  $p$  の倍数であるとする。Wedderburn の構造定理 (付録参照) より  $K[G]$  の Jacobson 根基が 0 でないことを示せばよい。 $K[G]$  の元  $m$  を

$$m = \sum_{g \in G} g$$

とおくと、任意の  $x \in K[G]$  に対して  $xm = mx$  であり、さらに

$$m^2 = \sum_{g, h \in G} gh = |G|m = 0$$

だから

$$(1 - xm)(1 + xm) = 1 - x^2m^2 = 1$$

よって  $1 - xm$  は単元であるから  $m \in \text{Jac}(K[G])$  である。□

$\mathbb{C}$  の標数は 0 だから定理 2.1.1.13 は定理 2.1.3.4 の特別な場合である。しかし系 2.1.1.14 は一般には成り立たない。考えている表現が有限次元の場合において成り立つことに注意せよ。

以下、 $K = \mathbb{C}$  の場合を考える。命題 2.1.2.21 の証明より、 $G$  の正則表現は  $G$  のすべての有限次元既約表現をその次元の数だけ直和因子にもっている。このことを群環のことで述べると、 $\mathbb{C}[G]$  は  $\mathbb{C}[G]$  加群として極小左イデアルの直和

$$\mathbb{C}[G] = L_1 \oplus \cdots \oplus L_s, \quad s = m_1 + \cdots + m_r$$

に分解でき、適当に  $L_1, \dots, L_s$  を並べ替えて

$$\begin{aligned} L_1, \dots, L_{m_1} &\simeq W_1 \\ L_{m_1+1}, \dots, L_{m_1+m_2} &\simeq W_2 \\ &\vdots \\ L_{m_1+\cdots+m_{r-1}+1}, \dots, L_{m_1+\cdots+m_{r-1}+m_r} &\simeq W_r \end{aligned}$$

とできるということである。ここで  $W_1, \dots, W_r$  は  $G$  の既約表現から定まる  $\mathbb{C}[G]$  加群であり、 $m_i = \dim_{\mathbb{C}} W_i$  である。したがって、 $G$  の有限次元既約表現を求めることは環  $\mathbb{C}[G]$  の極小左イデアルを求めることと同等である。

**定義 2.1.3.5.**  $A$  を環とする。べき等元  $e \in A$  ( $e^2 = e$ ) が原始的であるとは、

$$e = e_1 + e_2, \quad e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_1 e_2 = 0 \implies e_1 = 0 \text{ または } e_2 = 0$$

を満たすことをいう。

**命題 2.1.3.6.**  $A$  を半単純環,  $e \in A$  を単元でないとする。 $Ae$  が極小左イデアルとなるための必要十分条件は  $e$  が原始的べき等元であることである。

*Proof.*  $Ae$  が極小左イデアルとする。

$$e = e_1 + e_2, \quad e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_1 e_2 = 0$$

となる  $e_1, e_2 \in A$  が存在したとすると、

$$e_1 = e_1^2 = e_1^2 + e_1 e_2 = e_1 e \in Ae$$

同様に  $e_2 \in Ae$  である。よって  $Ae$  の極小性から  $Ae_1 = Ae$  or  $0$ ,  $Ae_2 = Ae$  or  $0$  である。 $Ae_1 = Ae$  であったとしよう。このとき

$$e = ce_1, \quad c \in A$$

とおくことができるから

$$e_2 = e - e_1 = (c - 1)e_1$$

よって

$$e_2 = e_2^2 = (c - 1)e_1 e_2 = 0$$

また  $e$  はべき等元なので

$$e_1 + e_2 = e = (e_1 + e_2)^2 = e_1 + -e_2 e_1 + e_2$$

ゆえに  $e_2 e_1 = 0$  である。したがって  $Ae_2 = Ae$  ならば同様の議論で  $e_1 = 0$  となる。

逆に  $e$  が原始的べき等元であるとする。 $I \subsetneq Ae$  を左イデアルとする。 $A$  は半単純だから

$$Ae = I \oplus J$$

となる左イデアル  $J$  が存在する。よって

$$e = x + y$$

となる  $x \in I, y \in J$  をとることができる。 $x \in Ae$  より

$$x = ce, \quad c \in A$$

とおくと  $xe = ce^2 = ce = x$ 。これより、

$$x = xe = x^2 + xy$$

だが、 $xy \in J$  かつ  $I \cap J = 0$  より  $xy = 0$ 。同様に  $yx = 0$  である。したがって  $x^2 = x, y^2 = y$  も導かれる。 $e$  は原始的なので  $x = 0$  または  $y = 0$  が成り立つが、これより  $I = 0$  または  $J = 0$  が従う。

実際、 $x = 0$  であったとして  $m \in I$  を  $m = ae$  とおけば

$$m = a(x + y) = ay \in J$$

$I \cap J = 0$  より  $m = 0$

□

したがって  $G$  の既約表現を求める問題は  $\mathbb{C}[G]$  の原始的べき等元を求める問題に帰着された。具体的に原始的べき等元を見つけるのは難しいが、対称群の場合は Young 図形とのきれいな対応により構成することができる。次節にそのことを解説する。

最後にべき等元  $e$  で  $Ae$  の形の加群の間の準同型について考察する。

**命題 2.1.3.7.**  $A$  を環とする。 $e, f \in A$  をべき等元とすると、Abel 群の同型として

$$\text{Hom}_A(Ae, Af) \simeq eAf$$

が成り立つ。

*Proof.*  $\phi \in \text{Hom}_A(Ae, Af)$  に対して、

$$\phi(e) = af$$

とおくと、 $e$  はべき等元だから

$$\phi(e) = \phi(e^2) = e\phi(e) = eaf$$

よって  $\phi \mapsto eaf$  を考えればこれが同型を与える。

□

**注意 2.1.3.8.** 証明からわかる通り、 $A$  が体  $K$  上の多元環である場合  $e$  はべき等元である必要はなく、スカラー倍のずれが許容される。すなわち

$$e^2 = \lambda e, \quad \lambda \in K$$

となる  $e$  に対しても同様のことが成り立つ。

## 2.1.4 誘導表現

部分群の表現が与えられたとき、それを元の群に拡張する方法について解説する。

**定義 2.1.4.1.**  $G$  を群、 $H$  を  $G$  の部分群とする。 $W$  を  $H$  の表現とすると、

$$V = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$$

は左  $\mathbb{C}[G]$  加群の構造をもつ<sup>\*4</sup>。 $V$  を  $W$  が誘導する  $G$  の表現といい

$$V = \text{Ind}_H^G W$$

と書く。

誘導表現は次の普遍性で特徴づけることができる。

**定理 2.1.4.2** (誘導表現の普遍性).  $H$  を群  $G$  の部分群、 $W$  を  $H$  の表現とする。このとき  $G$  の表現  $V$  と  $H$  線形写像  $\iota: W \rightarrow V$  が一意的に存在して、次の性質をもつ：

<sup>\*4</sup> ここで  $\mathbb{C}[G]$  は右からの積で右  $\mathbb{C}[H]$  加群とみなしていることに注意。

任意の  $G$  の表現  $U$  と  $H$  線形写像  $f: W \rightarrow U$  が与えられたとき、 $G$  線形写像  $\bar{f}: V \rightarrow U$  が一意に存在して

$$f = \bar{f} \circ \iota$$

が成り立つ

*Proof.* 定義 2.1.4.1 の  $V$  がこの性質を持つことを示す。 $\iota: W \rightarrow V$  を

$$\iota(x) = 1 \otimes x$$

で定めれば、 $(\mathbb{C}[H]$  上のテンソル積なので)  $\iota$  は  $H$  線形写像である。 $f: W \rightarrow U$  を  $H$  線形写像とする。 $\bar{f}: V \rightarrow U$  を

$$\bar{f}(g \otimes x) = gf(x)$$

を双線形に拡張して得られる写像とすれば、より、

$$\bar{f}(g(\alpha \otimes x)) = \bar{f}(g\alpha \otimes x) = g\alpha f(x) = g\bar{f}(\alpha \otimes x)$$

$\bar{f}$  は  $G$  線形写像であり  $f = \bar{f} \circ \iota$  を満たす。 $\bar{f}$  の一意性を示す。 $G$  線形写像  $f': W \rightarrow U$  も  $f = f' \circ \iota$  を満たしたとする。 $G$  線形性から

$$f'(g \otimes x) = gf'(1 \otimes x) = gf'(\iota(x)) = gf(x) = \bar{f}(g \otimes x)$$

である。

最後にこの性質をもつ  $V$  が一意であることを示す。 $G$  の表現  $V'$  と  $H$  線形写像  $\iota': W \rightarrow V'$  がこの性質を満たしたとする。 $\iota$  の普遍性を用いれば、 $\bar{\iota}: V \rightarrow V'$  が存在して  $\iota' = \bar{\iota} \circ \iota$  が成り立つ。また、 $\iota'$  の普遍性を用いれば  $\bar{\iota}': V' \rightarrow V$  が存在して  $\iota = \bar{\iota}' \circ \iota'$  が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\iota} & V \\ \downarrow \iota' & \nearrow \bar{\iota} & \\ V' & \xleftarrow{\bar{\iota}'} & \end{array}$$

$\bar{\iota}$ ,  $\bar{\iota}'$  が互いに逆の写像であることを示そう。 $\bar{\iota}' \circ \bar{\iota}: V \rightarrow V$  は  $G$  線形写像であり、

$$(\bar{\iota}' \circ \bar{\iota}) \circ \iota = \bar{\iota}' \circ (\bar{\iota} \circ \iota) = \bar{\iota}' \circ \iota' = \iota$$

を満たす。しかし、 $\text{id}_V \circ \iota = \iota$  であるから、 $\iota$  の普遍性から

$$\bar{\iota}' \circ \bar{\iota} = \text{id}_V$$

でなければならない。同様に  $\bar{\iota} \circ \bar{\iota}' = \text{id}_{V'}$  である。□

定義 2.1.4.1 は加群論的で簡単だが、どのような作用を考えているのかがわかりにくい。そこで線形代数的な誘導表現の定義もみておく。

**定義 2.1.4.3.**  $V$  を  $G$  の表現、 $W$  を  $V$  の部分空間で  $H$  の表現であるとする。 $R$  を  $G/H$  の完全代表系とする。このとき  $V$  が  $W$  から誘導されているとは

$$V = \bigoplus_{\sigma \in R} \sigma W$$

が成り立つことをいう。

$\sigma^{-1}\tau \in H$  ならば  $\sigma W = \tau W$  が成り立つのでこの定義は  $R$  の取り方によらない。 $W$  の基底を  $e_1, \dots, e_n$  として、 $R = \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$  とすれば

$$V = \mathbb{C}\sigma_1 e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\sigma_1 e_n \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\sigma_r e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\sigma_r e_n$$

$G$  の元  $g$  は  $G/H$  に左からの積で置換作用する。すなわち、各  $\sigma_i$  に対して、

$$g\sigma_i = \sigma_j h$$

となる  $\sigma_j \in R$  と  $h \in H$  が存在する。よってこのとき、 $g\sigma_i W = \sigma_j W$ 、とくに

$$g\sigma_i e_k = \sigma_j h e_k \in \sigma_j W, \quad \text{for all } k = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

となる。 $g$  の  $V$  への作用は  $G/H$  への置換作用と  $H$  の  $W$  への作用を組み合わせたようなものである。また式 (2.2) から次がでる。

**命題 2.1.4.4** (誘導表現の指標).  $V = \text{Ind}_H^G W$  のとき、

$$\chi_V(g) = \sum_{\substack{\sigma_i \in R \\ \sigma_i^{-1} g \sigma_i \in H}} \chi_W(\sigma_i^{-1} g \sigma_i) = \frac{1}{H} \sum_{\substack{\sigma \in G \\ \sigma^{-1} g \sigma \in H}} \chi_W(\sigma^{-1} g \sigma) \quad (2.3)$$

が成り立つ。

*Proof.* 式 (2.2) より、 $g$  の作用の対角成分を考えるうえで  $\sigma_i = \sigma_j$  すなわち  $i = j$  となる部分だけ考えればよいことがわかる。このとき  $\sigma_i^{-1} g \sigma_i \in H$  であり、

$$h = \sigma_i^{-1} g \sigma_i$$

であるから、あとは  $h$  の  $W$  への作用の対角成分の和をとればよいので前半の式がでる。後半については指標が類関数であること、 $|\sigma H| = |H|$  であることから従う。□

定義 2.1.4.3 が定義 2.1.4.1 と一致することを確かめておく。定義 2.1.4.3 の  $V$  が普遍性 (定理 2.1.4.2) を満たすことを示せば、一意性から従う。

$V = \bigoplus_{\sigma \in R} \sigma W$  において、 $R$  として単位元  $e$  を含むものを取り、 $W$  を  $eW$  と同一視する。この同一視を  $\iota$  とすれば  $\iota$  は  $H$  線形写像である。 $U$  を任意の  $G$  の表現とし、 $f: W \rightarrow U$  を  $H$  線形写像とする。このとき  $\bar{f}: V \rightarrow U$  を

$$\bar{f}(\sigma_i x) = \sigma_i f(x)$$

によって定義すると、 $\bar{f}$  は  $G$  線形である。実際  $g \in G$  に対して、 $g\sigma_i = \sigma_j h$  となる  $\sigma_j \in R, h \in H$  をとれば

$$\bar{f}(g\sigma_i x) = \bar{f}(\sigma_j h x) = \sigma_j f(h x) = \sigma_j h f(x) = g\sigma_i f(x)$$

また、

$$\bar{f} \circ \iota(x) = \bar{f}(ex) = ef(x) = f(x)$$

**例 2.1.4.5.**  $H$  を  $G$  の部分群とする。 $X = G/H = \{H, g_1 H, \dots, g_n H\}$  とし、 $V$  を  $X$  を基底に持つ自由ベクトル空間とする。 $G$  は  $V$  に置換によって作用する。

$$W = \mathbb{C}H \subset V$$

とすれば  $W$  は  $H$  の自明な表現であり、 $R = \{e, g_1, \dots, g_n\}$

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}g_1H \oplus \dots \oplus \mathbb{C}g_nH \\ &= \bigoplus_{\sigma \in R} \sigma \mathbb{C}H \\ &= \bigoplus_{\sigma \in R} \sigma W \end{aligned}$$

だから  $V = \text{Ind}_H^G W$  である。すなわち、 $H$  の自明な表現から誘導される  $G$  の表現は  $G/H$  への置換表現である。

## 2.2 対称群の表現論

### 2.2.1 対称群の既約表現

前節までに述べたことは有限群の表現論の一般論であり、具体的な群が与えられたときその表現を求める手法を提供しているわけではない。そこでこの節では対称群を例に取り上げ、既約表現の分類を行う。

$\mathcal{P}_n$  を大きさ  $n$  の Young 図形のなす集合とする。既約表現の種類は共役類の数だけあったが、 $G = \mathfrak{S}_n$  の共役類と  $\mathcal{P}_n$  の元は 1 対 1 に対応することが知られている。 $G$  の既約表現は  $\mathcal{P}_n$  から自然に作ることができる。

**定義 2.2.1.1.**  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  の各箱に 1 から  $n$  の各数字を重複なく書き入れた図を形  $\lambda$  の標準タブローという。 $T$  を標準タブローとし、 $T$  の  $i$  行目の箱に書かれている数字の集合を  $H_i(T)$ , 同様に  $T$  の  $j$  列目の箱に書かれている数字の集合を  $V_j(T)$  とする。

**定義 2.2.1.2.**  $T$  を形  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$  の標準タブローとする。 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して、 $\sigma T$  を各数字を  $\sigma$  によって置換してできる標準タブローとする。

- 各  $i$  に対して  $H_i(\sigma T) = H_i(T)$  が成り立つなら  $\sigma$  を  $T$  の水平置換という。 $T$  の水平置換の全体は  $G$  の部分群をなす。これを  $\mathcal{H}_T$  と書き、 $T$  の水平置換群という。 $\mathcal{H}_T = \mathfrak{S}(H_1(T)) \times \dots \times \mathfrak{S}(H_s(T))$  である。
- 各  $j$  に対して  $V_j(\sigma T) = V_j(T)$  が成り立つなら  $\sigma$  を  $T$  の垂直置換という。 $T$  の垂直置換の全体は  $G$  の部分群をなす。これを  $\mathcal{V}_T$  と書き、 $T$  の垂直置換群という。 $\mathcal{V}_T = \mathfrak{S}(V_1(T)) \times \dots \times \mathfrak{S}(V_{\lambda_1}(T))$  である。

**例 2.2.1.3.** 形 


 の標準タブロー  $T =$ 

4	5	1
3	2	

 に対して、

$$\mathcal{H}_T = \mathfrak{S}(\{1, 4, 5\}) \times \mathfrak{S}(\{2, 3\}), \quad \mathcal{V}_T = \mathfrak{S}(\{3, 4\}) \times \mathfrak{S}(\{2, 5\})$$

である。

**例 2.2.1.4.** Young 図形  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathcal{P}_n$  に対して、 $\lambda$  の第 1 行に  $1, 2, \dots, \lambda_1$  を、 $\lambda$  の第 2 行に  $\lambda_1 + 1, \lambda_1 + 2, \dots, \lambda_1 + \lambda_2$  を、と続けてできる標準タブローを  $\lambda$  から定まる自然なタブローという。

例 2.2.1.3 の Young 図形の自然なタブローは 

1	2	3
4	5	

水平置換  $\sigma$  が垂直置換でもあるならば、 $\sigma$  の引き起こす各  $H_i(T)$  の置換は恒等置換でなければならない。したがって  $\sigma = e$  である。よって  $\mathcal{H}_T \cap \mathcal{V}_T = \{e\}$  が成り立つ。また  $\mathcal{H}_{gT} = g\mathcal{H}_Tg^{-1}$ ,  $\mathcal{V}_{gT} = g\mathcal{V}_Tg^{-1}$  が成り立つ。実際

$$\begin{aligned} \sigma \in \mathcal{H}_{gT} &\Leftrightarrow \sigma gT = gT \\ &\Leftrightarrow g^{-1}\sigma gT = T \\ &\Leftrightarrow \sigma \in g\mathcal{H}_Tg^{-1} \end{aligned}$$

群環  $\mathbb{C}[G]$  の元  $a_T, b_T, c_T$  を

$$a_T = \sum_{\sigma \in \mathcal{H}_T} \sigma, \quad b_T = \sum_{\tau \in \mathcal{V}_T} \text{sgn}(\tau)\tau, \quad c_T = a_T b_T = \sum_{\sigma \in \mathcal{H}_T, \tau \in \mathcal{V}_T} \text{sgn}(\tau)\sigma\tau$$



によって定める。 $c_T$  を Young 対称子という。ここで  $c_T$  は 0 でないことに注意しておく。実際  $c_T$  の和に現れる  $\sigma\tau$  はすべて異なる元である。なぜならもし  $\sigma\tau = \sigma'\tau'$ ,  $\sigma, \sigma' \in \mathcal{H}_T$ ,  $\tau, \tau' \in \mathcal{V}_T$  ならば、 $\mathcal{H}_T \cap \mathcal{V}_T = e$  より  $\sigma = \sigma'$ ,  $\tau = \tau'$  である。

**定理 2.2.1.5.**  $\mathbb{C}[G]$  の左イデアル  $\mathbb{C}[G]c_T$  は極小である。

定理 2.2.1.5 を証明しよう。ポイントになるのは次の補題である。

**補題 2.2.1.6.**  $\alpha \in \mathbb{C}[G]$  が

- 任意の  $\sigma \in \mathcal{H}_T$  に対して  $\sigma\alpha = \alpha$
- 任意の  $\tau \in \mathcal{V}_T$  に対して  $\alpha\tau = \text{sgn}(\tau)\alpha$

を満たすならば、 $\alpha$  は  $c_T$  のスカラー倍である。

*Proof.*  $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$  を仮定を満たす元とする。仮定より  $\sigma \in \mathcal{H}_T$  に対して

$$\alpha = \sigma^{-1}\alpha = \sum_{g \in G} a_g \sigma^{-1}g = \sum_{g \in G} a_{\sigma g}g$$

よって

$$a_{\sigma g} = a_g \quad (2.4)$$

が成り立つ。また  $\tau \in \mathcal{V}_T$  に対しては

$$\alpha = \text{sgn}(\tau)\alpha\tau^{-1} = \sum_{g \in G} \text{sgn}(\tau)a_g g\tau^{-1} = \sum_{g \in G} \text{sgn}(\tau)a_{g\tau}g$$

より

$$a_{g\tau} = \text{sgn}(\tau)a_g \quad (2.5)$$

が成り立つ。(2.4),(2.5) より  $\sigma\tau \in \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T$  に対して

$$a_{\sigma\tau} = \text{sgn}(\tau)a_e$$

であることがわかる。よって

$$g \notin \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T \implies a_g = 0 \quad (2.6)$$

を示せば  $\alpha = a_e c_T$  となって証明が完了する。 $g$  に関する条件  $g \notin \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T$  について次の補題を示す。

**補題 2.2.1.7.**  $g \in \mathfrak{S}_n$  について、 $T$  の同じ行にある任意の数字  $i, j$  (ただし  $i \neq j$ ) が  $gT$  では異なる列にあるならば  $g \in \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T$  が成り立つ。

*Proof.*  $T$  の Young 図形  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  の高さ  $r$  に関する帰納法で示す。 $r = 1$  ならば  $\mathcal{H}_T = \mathfrak{S}_n$  なので明らか。 $r > 1$  とする。 $T$  の第 1 行にある数字に注目する。仮定から、これらは  $gT$  でそれぞれ異なる列に入っている。適当に  $gT$  に垂直置換  $\nu \in \mathcal{V}_{gT}$  を施すことで  $\nu gT$  においても第 1 行に入っているようにできる。

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & 8 & 2 \\ \hline 3 & 5 & 4 \\ \hline 1 & 6 & \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad gT = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 8 \\ \hline 6 & 7 & \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \nu gT = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 7 & 8 \\ \hline 5 & 1 & 4 \\ \hline 6 & 3 & \\ \hline \end{array}$$

すなわち

$$H_1(T) = H_1(\nu g T)$$

が成り立つようにできる。このとき  $\nu g$  は  $T$  の第 1 行への水平置換  $\sigma_1$  と、 $T$  の第 2 行以下を取り出したタブロー  $T'$  への置換  $g'$  との積

$$\nu g = \sigma_1 g'$$

で表される。 $g'$  は  $T'$  への置換とみなせば主張の条件をみたすから、帰納法の仮定により

$$g' \in \mathcal{H}_{T'} \mathcal{V}_{T'}$$

である。 $\mathcal{H}_{T'} \subset \mathcal{H}_T$ ,  $\mathcal{V}_{T'} \subset \mathcal{V}_T$  だから

$$g' = \sigma_2 \tau_2 \in \mathcal{H}_T \mathcal{V}_T$$

と書ける。ここで  $\nu \in \mathcal{V}_{gT} = g \mathcal{V}_T g^{-1}$  だから

$$\nu = g \tau_3 g^{-1}, \quad \tau_3 \in \mathcal{V}_T$$

よって

$$g = \sigma_1 g' \tau_3^{-1} = \sigma_1 \sigma_2 \tau_2 \tau_3^{-1}$$

となるので示せた。 □

補題 2.2.1.6 の証明に戻ろう。(2.6) を示せばよいのであった。 $g \notin \mathcal{H}_T \mathcal{V}_T$  であるのなら、上記の補題から  $T$  の同じ行になる異なる数字  $i, j$  であって  $gT$  では同じ列にあるものが存在する。よって  $\sigma = (i, j)$  とすれば  $\sigma \in \mathcal{H}_T \cap \mathcal{V}_{gT}$  である。 $\mathcal{V}_{gT} = g \mathcal{V}_T g^{-1}$  より  $\sigma = g \tau g^{-1}$  とおけば (2.4), (2.5) より

$$a_g = a_{\sigma g} = a_{g \tau} = \text{sgn}(\tau) a_g = -a_g$$

よって  $a_g = 0$  □

**命題 2.2.1.8.**

$$c_T^2 = \frac{n!}{\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[G]c_T)} c_T$$

が成り立つ。

*Proof.*  $\sigma \in \mathcal{H}_T$ ,  $\tau \in \mathcal{V}_T$  に対して

$$\sigma a_T = \sigma \sum_{g \in \mathcal{H}_T} g = \sum_{g \in \mathcal{H}_T} \sigma g = a_T$$

であり、

$$b_T \tau = \sum_{g \in \mathcal{V}_T} \text{sgn}(g) g \tau = \text{sgn}(\tau) b_T$$

だから、補題 2.2.1.6 よりある  $n_T \in \mathbb{C}$  で

$$c_T^2 = n_T c_T$$

となることはわかる。 $n_T$  を求めよう。準同型  $\phi : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[G]$  を

$$\phi(\alpha) = \alpha c_T$$

によって定める。任意の  $g \in G$  に対して、

$$gc_T = g + \sum_{hk \in \mathcal{H}_T \mathcal{V}_T \setminus \{e\}} \text{sgn}(k)ghk$$

となるから、 $\phi$  の対角成分はすべて 1 である。よって

$$\text{tr } \phi = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G] = n!$$

である。 $\mathbb{C}[G]$  は半単純だから、

$$\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}[G]_{c_T} \oplus W$$

となる左イデアル  $W$  をとる。すると

$$\mathbb{C}[G]_{c_T} = \mathbb{C}[G]c_T^2 \oplus W_{c_T} = \mathbb{C}[G]_{c_T} \oplus W_{c_T}$$

より  $W_{c_T} = 0$  である。したがって、

$$\begin{aligned} \phi(\mathbb{C}[G]_{c_T}) &\subset \mathbb{C}[G]_{c_T} \\ \phi(W) &= 0 \end{aligned}$$

となることがわかる。よって

$$\text{tr } \phi = \text{tr } \phi|_{\mathbb{C}[G]_{c_T}}$$

である。 $\alpha \in \mathbb{C}[G]$  に対して

$$\phi(\alpha c_T) = \alpha \phi(c_T) = n_T \alpha c_T$$

だから、 $\mathbb{C}[G]_{c_T}$  は  $\phi$  の固有値  $n_T$  の固有空間の部分空間である。

$$\text{tr } \phi|_{\mathbb{C}[G]_{c_T}} = n_T \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]_{c_T}$$

$c_T \neq 0$  だから  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]_{c_T} \neq 0$ , よって

$$n_T = \frac{n!}{\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]_{c_T}}$$

□

定理 2.2.1.5 の証明を述べる

*Proof.* 定理 2.1.2.19 より

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}(\mathbb{C}[G]_{c_T}, \mathbb{C}[G]_{c_T}) = 1$$

を示せばよい。命題 2.2.1.6 より  $c_T$  は適当にスカラー倍してべき等元になる。よって命題 2.1.3.7 より

$$\text{Hom}(\mathbb{C}[G]_{c_T}, \mathbb{C}[G]_{c_T}) = c_T \mathbb{C}[G]_{c_T}$$

である。任意の  $c_T \alpha c_T \in c_T \mathbb{C}[G]_{c_T}$  は補題 2.2.1.6 の仮定をみたすので

$$c_T \alpha c_T = \mu c_T, \quad \mu \in \mathbb{C}$$

と書ける。よって  $\dim_{\mathbb{C}} c_T \mathbb{C}[G]_{c_T} = 1$  である。

□

Young 対称子の定義において  $a_T, b_T$  の積の順序に本質的な違いはない。

**命題 2.2.1.9.**  $b_T a_T = \tilde{c}_T$  とおくと、 $\mathbb{C}[G]\tilde{c}_T \simeq \mathbb{C}[G]c_T$  が成り立つ。

*Proof.*  $\phi : \mathbb{C}[G]a_T b_T \rightarrow \mathbb{C}[G]b_T a_T$  を

$$\phi(x a_T b_T) = x a_T b_T a_T$$

$\psi : \mathbb{C}[G]b_T a_T \rightarrow \mathbb{C}[G]a_T b_T$  を

$$\psi(x b_T a_T) = x b_T a_T b_T$$

とすれば

$$\psi(\phi(x a_T b_T)) = \psi(x a_T b_T a_T) = x a_T b_T a_T b_T = n_T x a_T b_T$$

よって  $\psi \circ \phi$  は 0 でないスカラー倍写像なので  $\phi$  は単射、 $\psi$  は全射である。命題 2.2.1.8 とまったく同様に  $\tilde{c}_T^2 = \tilde{n}_T \tilde{c}_T$  となる 0 でないスカラー  $\tilde{n}_T$  が存在することがわかる。よって  $\phi$  は同型である。  $\square$

**命題 2.2.1.10.**  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  とする。 $T, U$  を  $\lambda$  に書かれた標準タブローとすると  $\mathbb{C}[G]c_T \simeq \mathbb{C}[G]c_U$  である。

*Proof.* このときある  $g \in G$  が存在して  $U = gT$  となるから、

$$\mathcal{H}_U = g\mathcal{H}_T g^{-1}, \quad \mathcal{V}_U = g\mathcal{V}_T g^{-1}$$

よって

$$c_U = a_U b_U = g a_T g^{-1} g b_T g^{-1} = g c_T g^{-1}$$

である。

$$\mathbb{C}[G]c_U = \mathbb{C}[G]g c_T g^{-1} = \mathbb{C}[G]c_T g^{-1}$$

だから、

$$\mathbb{C}[G]c_T \simeq \mathbb{C}[G]c_T g^{-1}$$

を示せばよい。 $\phi : \mathbb{C}[G]c_T \rightarrow \mathbb{C}[G]c_T g^{-1}$  を

$$\phi(\alpha c_T) = \alpha c_T g^{-1}$$

と置けば  $\phi$  は左  $\mathbb{C}[G]$  加群の準同型で、 $g$  を右から書ける準同型が逆写像を与えるので、同型である。  $\square$

したがって、同じ Young 図形に対しては  $\mathbb{C}[G]c_T$  は標準タブロー  $T$  の取り方によらず同型である。そこで  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  に対して、 $\lambda$  の自然なタブロー (例 2.2.1.4) から定まる Young 対称子を  $c_\lambda$  とし、 $S_\lambda = \mathbb{C}[G]c_\lambda$  とおく。

次の定理を証明することで、既約表現の分類は完成する。

**定理 2.2.1.11.**  $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$  とする。

$$S_\lambda \simeq S_\mu$$

となるための必要十分条件は  $\lambda = \mu$  である

*Proof.* 十分性は明らか。必要性を示す。 $\lambda \neq \mu$  であるとする。 $S_\lambda, S_\mu$  は既約表現なので、Schur の補題 (補題 2.1.2.3) より、

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}(S_\lambda, S_\mu) = 0$$

を証明すればよいが、命題 2.1.3.7 より、

$$\text{Hom}(S_\lambda, S_\mu) = c_\lambda \mathbb{C}[G]c_\mu$$

ゆえに、すべての  $g \in G$  に対して

$$c_\lambda g c_\mu = a_\lambda b_\lambda g a_\mu b_\mu = 0$$

が成り立つことを示す。次の補題を示す。

**補題 2.2.1.12.**  $\mathcal{P}_n$  に辞書式順序を入れ、 $\lambda < \mu$  であるとする。 $\lambda, \mu$  でその自然なタブローを表すものとする。このとき任意の  $g \in G$  に対して、 $\mu$  の同じ行にある数字  $i, j$  であって  $g\lambda$  でも同じ列にあるものが存在する。

*Proof.*  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s), \mu = (\mu_1, \dots, \mu_t)$  とおく。 $t$  についての帰納法で示す。

$t = 1$  の場合  $\lambda_1 < \mu_1$  となるから、 $\lambda$  の列数は  $\mu_1$  より少ない。よって鳩の巣原理を用いれば  $1, 2, \dots, \mu_1$  のうち、 $g\lambda$  の同じ列にあるペアが必ず存在することがわかる。

$t > 1$  とする。 $\lambda_1 < \mu_1$  である場合はまったく同様に鳩の巣原理から従う。 $\lambda_1 = \mu_1$  かつ、 $1, 2, \dots, \mu_1$  が  $g\lambda$  ではすべて異なる列に存在するとする。このとき垂直置換  $\tau \in \mathcal{V}_{g\lambda}$  を施して

$$H_1(\mu) = H_1(\tau g \lambda) = \{1, 2, \dots, \mu_1\}$$

が成り立つようにできる。そこで、 $\mu, \tau g \lambda$  の 2 行目以降をとりだしたタブロー  $\mu', (\tau g \lambda)'$  を考える。すると  $(\tau g \lambda)' < \mu'$  であるから帰納法の仮定により  $\mu'$  の同じ行にある数字  $i, j$  であって  $(\tau g \lambda)'$  では同じ列にあるものが存在する。 $i, j$  が  $(\tau g \lambda)'$  の第  $m$  列にあるとする。 $\tau$  は垂直置換だから

$$V_m(\tau g \lambda) = V_m(g \lambda)$$

よって  $i, j$  は  $g\lambda$  の同じ列に存在する。 □

定理 2.2.1.11 の証明に戻る。補題から、 $\nu = (i, j)$  であって  $\nu \in \mathcal{H}_\mu \cap \mathcal{V}_{g^{-1}\lambda}$  となるものが存在する。よって

$$\nu = g^{-1} \pi g, \quad \pi \in \mathcal{V}_\lambda$$

とおけば

$$\begin{aligned} c_\lambda g c_\mu &= a_\lambda b_\lambda g a_\mu b_\mu \\ &= a_\lambda b_\lambda \operatorname{sgn}(\pi) \pi g a_\mu b_\mu \\ &= a_\lambda b_\lambda \operatorname{sgn}(\pi) g \nu a_\mu b_\mu \\ &= \operatorname{sgn}(\pi) a_\lambda b_\lambda g a_\mu b_\mu \\ &= -c_\lambda g c_\mu \end{aligned}$$

よって

$$c_\lambda g c_\mu = 0$$

□

**例 2.2.1.13.**  $\lambda = (n), \mu = (1, 1, \dots, 1) \in \mathcal{P}_n$  とする。このとき  $\mathcal{H}_\lambda = \mathfrak{S}_n, \mathcal{V}_\lambda = e$  だから、

$$c_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma$$

また  $\mathcal{H}_\mu = e, \mathcal{V}_\mu = \mathfrak{S}_n$  だから、

$$c_\mu = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sigma$$

したがって  $\lambda$  の定める既約表現は自明な表現 1 であり、 $\mu$  の定める既約表現は置換の符号  $\operatorname{sgn}$  であるとわかる。

例 2.2.1.14.  $G = \mathfrak{S}_3$  とする。

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$$

に対応する Young 対称子は

$$c_\lambda = (e + (1, 2))(e - (1, 3)) = e + (1, 2) - (1, 3) - (1, 3, 2)$$

である。 $c_\lambda$  の定める既約表現が、例 2.1.2.22 で求めた既約表現  $U$  と一致することをたしかめる。

$$c_\lambda^2 = 3c_\lambda$$

となるから、命題 2.2.1.8 より

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]c_\lambda = 2$$

である。

$$v = c_\lambda, \quad u = (1, 2, 3)c_\lambda = -e + (1, 3) - (2, 3) + (1, 2, 3)$$

とすれば、 $\mathbb{C}[G]c_\lambda = \mathbb{C}v \oplus \mathbb{C}u$  であり、

$$\begin{aligned} (1, 2)v &= v, & (1, 2)u &= -v - u \\ (1, 2, 3)v &= u, & (1, 2, 3)u &= -v - u \end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned} \text{tr } e &= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]c_\lambda = 2 \\ \text{tr } (1, 2) &= 0 \\ \text{tr } (1, 2, 3) &= -1 \end{aligned}$$

となり、指標が一致している。

補題 2.2.1.15.  $\phi : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[G]$  を

$$\phi(g) = \text{sgn}(g)g$$

を線形に拡張して定める。 $\phi$  は環準同型であり、対合である。 $\varepsilon \in \mathbb{C}[G]$  に対して

$$\mathbb{C}[G]\varepsilon \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\text{sgn}} \simeq \mathbb{C}[G]\phi(\varepsilon)$$

が成り立つ。ここで、 $\mathbb{C}_{\text{sgn}}$  は  $\mathbb{C}_{\text{sgn}} = \mathbb{C}$  であり、

$$g \cdot \lambda = \text{sgn}(g)\lambda, \quad g \in G, \lambda \in \mathbb{C}$$

で定まる  $\mathbb{C}[G]$  加群である（すなわち  $\text{sgn}$  表現）。

*Proof.*  $f : \mathbb{C}[G]\phi(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}[G]\varepsilon \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\text{sgn}}$  を

$$f(x) = \phi(x) \otimes 1$$

で定めれば  $g \in G$  として

$$\begin{aligned} gf(x) &= g(\phi(x) \otimes 1) \\ &= g\phi(x) \otimes \text{sgn}(g) \\ &= \text{sgn}(g)g\phi(x) \otimes 1 \\ &= \phi(gx) \otimes 1 \\ &= f(gx) \end{aligned}$$

より  $\mathbb{C}[G]$  加群の準同型である。任意の  $y \otimes 1 \in \mathbb{C}[G]\varepsilon \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\text{sgn}}$  に対して

$$f(\phi(y)) = y \otimes 1$$

となり、 $\mathbb{C}[G]\varepsilon \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\text{sgn}}$  は  $y \otimes 1$  の形の元で生成されるから、 $f$  は全射である。

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]\varepsilon \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\text{sgn}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]\varepsilon \cdot \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\text{sgn}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]\varepsilon$$

より  $f$  は同型。 □

**例 2.2.1.16.**  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  に対して、 $\lambda$  の行と列を反転させたものを共役 Young 図形といい  $\lambda^*$  と書く。

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \lambda^* = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

このとき

$$\mathbb{C}[G]_{c_\lambda} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\text{sgn}} \simeq \mathbb{C}[G]_{c_{\lambda^*}}$$

となることを示す。定義より、

$$\mathcal{H}_{\lambda^*} = \mathcal{V}_\lambda, \quad \mathcal{V}_{\lambda^*} = \mathcal{H}_\lambda$$

であるから、

$$a_{\lambda^*} = \phi(b_\lambda), \quad b_{\lambda^*} = \phi(a_\lambda)$$

したがって

$$c_{\lambda^*} = \phi(b_\lambda)\phi(a_\lambda) = \phi(b_\lambda a_\lambda) = \phi(\tilde{c}_\lambda)$$

である。命題 2.2.1.9 より、

$$\mathbb{C}[G]_{c_\lambda} \simeq \mathbb{C}[G]_{\tilde{c}_\lambda}$$

であるから、補題 2.2.1.15 より、

$$\mathbb{C}[G]_{c_{\lambda^*}} \simeq \mathbb{C}[G]_{c_\lambda} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\text{sgn}}$$

**例 2.2.1.17.**  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  に対して

$$M_\lambda = \text{Ind}_{\mathcal{H}_\lambda}^G(\mathbf{1})$$

とする。ここで  $\mathbf{1}$  は  $\mathcal{H}_\lambda$  の自明な表現である。2.1.4.5 より、 $M_\lambda$  は  $G/\mathcal{H}_\lambda$  の置換表現に他ならない。

$M_\lambda = \mathbb{C}[G]a_\lambda$  となることを示す。 $\phi: M_\lambda = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[\mathcal{H}_\lambda]} \mathbf{1} \rightarrow \mathbb{C}[G]a_\lambda$  を

$$\phi(g \otimes c) = cga_\lambda$$

$\mathbb{C}[\mathcal{H}_\lambda]$  双線形に拡張して定める。 $h \in \mathcal{H}_\lambda$  に対して

$$\phi(gh \otimes c) = cgha_\lambda = cga_\lambda = \phi(g \otimes hc)$$

だから  $\phi$  は well-defined であり  $\mathbb{C}[G]$  準同型である。逆に  $\psi: \mathbb{C}[G]a_\lambda \rightarrow \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[\mathcal{H}_\lambda]} \mathbf{1}$  を

$$\psi(ga_\lambda) = \frac{1}{|\mathcal{H}_\lambda|} ga_\lambda \otimes 1 = g \otimes 1$$

によって定めれば  $\phi, \psi$  は互いに逆写像であるから、同型である。

$\lambda$  が 1 行の Young 図形の場合、 $\mathcal{H}_\lambda = G$  であるから、 $M_\lambda$  は自明な表現にほかならない。一方  $\lambda$  が 1 列の Young 図形の場合は  $\mathfrak{H}_\lambda = 1$  であるから  $M_\lambda$  は正則表現である。

この表現が後に重要になるので、 $M_\lambda$  に関する性質を一つ示しておく。

**定理 2.2.1.18** (Young の規則).  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  と、辞書式順序で  $\lambda$  より大きい  $\mu \in \mathcal{P}_n$  に対して正の整数  $a_{\lambda\mu}$  が存在して

$$M_\lambda = S_\lambda \oplus \left( \bigoplus_{\mu > \lambda} S_\mu^{\oplus a_{\lambda\mu}} \right)$$

*Proof.* 定理 2.1.2.12 より、

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}(M_\lambda, S_\mu) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu = \lambda \\ 0 & \text{if } \mu < \lambda \end{cases}$$

を証明すればよい。例 2.2.1.17 より  $M_\lambda = \mathbb{C}[G]a_\lambda$  であるから、2.1.3.7 より

$$\text{Hom}(M_\lambda, S_\mu) = \text{Hom}(\mathbb{C}[G]a_\lambda, \mathbb{C}[G]c_\mu) = a_\lambda \mathbb{C}[G]c_\mu$$

である。 $\lambda = \mu$  の場合、任意の  $\alpha \in \mathbb{C}[G]$  に対して  $a_\lambda \alpha c_\lambda$  は補題 2.2.1.6 の条件をみたすから、

$$a_\lambda \mathbb{C}[G]c_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$$

よって

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}(M_\lambda, S_\mu) = 1$$

次に  $\mu < \lambda$  のとき、補題 2.2.1.12 より、任意の  $g \in G$  に対して  $\lambda$  の同じ行にある文字  $i, j$  であって  $g\mu$  で同じ列にあるものが存在する。すなわち  $\sigma = (i, j)$  とおけば  $\sigma \in \mathcal{H}_\lambda$  かつ  $\sigma \in \mathcal{V}_{g\mu} = g\mathcal{V}_\mu g^{-1}$  である。そこで  $\sigma = g\tau g^{-1}$ ,  $\tau \in \mathcal{V}_\mu$  とおけば、

$$\begin{aligned} a_\lambda g b_\mu &= a_\lambda \sigma g b_\mu \\ &= a_\lambda g \tau b_\mu \\ &= -a_\lambda g b_\mu \end{aligned}$$

ゆえに  $a_\lambda \mathbb{C}[G]b_\mu = 0$  であるから、

$$a_\lambda \mathbb{C}[G]c_\lambda \subset a_\lambda \mathbb{C}[G]b_\mu = 0$$

よって示せた。 □

Young の規則は Schur 多項式の線形結合で表すときにも現れた (系 1.2.2.11)。実際にこの二つの係数が等しいことは次節に示される。Young の規則から、対称群の既約指標について次がわかる

**系 2.2.1.19.**  $S_\lambda$  の指標を  $\chi_\lambda$  とおく。すべての  $g \in G$  に対して  $\chi_\lambda(g) \in \mathbb{Z}$  である

*Proof.*  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  の、辞書式順序に関する数学的帰納法で示す。 $\mathcal{P}_n$  の最大元は、1 行 Young 図形  $(n)$  であるが、このとき  $S_{(n)}$  は自明な表現なので指標は当然整数である。ある  $\lambda$  より大きいすべての Young 図形  $\mu$  に対して  $\chi_\mu$  が整数値であったとする。定理 2.2.1.18 より

$$\chi_{M_\lambda} = \chi_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} k_{\lambda\mu} \chi_\mu$$

であるが、 $M_\lambda$  は置換表現であるから  $\chi_{M_\lambda}$  は整数値である。帰納法の仮定より  $\chi_\mu$  も整数値だから、 $\chi_\lambda$  は整数値。 □



既約指標  $S_\lambda$  の具体的な値は Frobenius の指標公式として知られている。 $M_\lambda$  の指標は比較的簡単に計算できる。

**命題 2.2.1.20.**  $g \in \mathfrak{S}_n$  を巡回置換の積に表したとき、含まれている長さ  $q$  の巡回置換の数を  $m_q$  とする。このとき、 $\chi_{M_\lambda}(g)$  は次の値に等しい

$$\chi_{M_\lambda}(g) = \sum \prod_{q=1}^n \frac{m_q!}{c_{1q}! \cdots c_{nq}!}$$

ただし和は

- $c_{p1} + 2c_{p2} + 3c_{p3} + \cdots + nc_{pn} = \lambda_p$ , for all  $p = 1, \dots, n$
- $c_{1q} + c_{2q} + c_{3q} + \cdots + c_{nq} = m_q$ , for all  $q = 1, \dots, n$

をみたす非負行列  $\{c_{pq}\} \in M_n(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  全体をわたる。

*Proof.*  $M_\lambda$  は  $G/\mathcal{H}_\lambda$  への置換表現であるから、

$$\chi_{M_\lambda}(g) = \# \{ \sigma \mathcal{H}_\lambda \in G/\mathcal{H}_\lambda \mid g\sigma \mathcal{H}_\lambda = \sigma \mathcal{H}_\lambda \} = \frac{1}{|\mathcal{H}_\lambda|} \# \{ \sigma \in G \mid g \in \mathcal{H}_{\sigma\lambda} \}$$

と書くことができる。 $N = \# \{ \sigma \in G \mid g \in \mathcal{H}_{\sigma\lambda} \}$  とおく。 $N$  は形  $\lambda$  の標準タブローであって、 $g$  がその水平置換になっているものの個数である。

$g$  がある標準タブロー  $\sigma\lambda$  の水平置換であるための必要十分条件は、 $g$  を巡回置換の積で表したときその各巡回置換  $(i_1, \dots, i_k)$  について、 $i_1, \dots, i_k$  が  $\sigma\lambda$  の同一行に含まれていることである。よって、逆に  $g$  からそのような標準タブローを構成するには、 $g$  の長さ  $q$  の巡回置換が  $\lambda$  の  $p$  行目に何個含まれているかを指定し、水平置換で動かせばよい。

$g$  の長さ  $q$  の巡回置換が  $\lambda$  の  $p$  行目に  $c_{pq}$  個含まれているとする。このとき  $p$  行目に含まれる巡回置換の長さの総和が、 $\lambda$  の  $p$  行目の箱の数に等しくなければならない。また、長さ  $q$  の巡回置換は全部で  $m_q$  個あることに注意すると、 $c_{pq}$  は

- $c_{p1} + 2c_{p2} + 3c_{p3} + \cdots + nc_{pn} = \lambda_p$ , for all  $p = 1, \dots, n$
- $c_{1q} + c_{2q} + c_{3q} + \cdots + c_{nq} = m_q$ , for all  $q = 1, \dots, n$

を満たすように動かなければならない。

長さ  $q$  の巡回置換を各  $p$  行目に  $c_{pq}$  個ずつ置く置き方は

$$\prod_{q=1}^n \frac{m_q!}{c_{1q}! \cdots c_{nq}!}$$

通りある。そこから  $\lambda$  の水平置換を作用させて異なる標準タブローが作れるので

$$N = \sum |\mathcal{H}_\lambda| \prod_{q=1}^n \frac{m_q!}{c_{1q}! \cdots c_{nq}!}$$

である。これより、

$$\chi_{M_\lambda} = \sum \prod_{q=1}^n \frac{m_q!}{c_{1q}! \cdots c_{nq}!}$$

□

**例 2.2.1.21.**  $\lambda = (n)$  とすると  $M_\lambda = 1$  であり、 $\lambda = (1^n)$  とすると  $M_\lambda = \mathbb{C}[G]$  である。

## 2.3 表現環と対称関数環

### 2.3.1 続・対称多項式

対称群の表現と対称多項式の間には深い関係がある。次節でそのことを解説するが、そのための準備として対称多項式に関してより詳しく解説する。以下正の整数  $n$  を固定し、 $\Lambda_n^k$  を  $n$  変数の  $k$  次斉次対称多項式のなす  $\mathbb{Z}$  加群とする。第 1 部の記号を復習すると、 $n$  行の Young 図形  $\lambda$  に対して

$$m_\lambda = \sum_{\alpha \sim \lambda} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

とし、に対して

$$\begin{aligned} e_k &= m_{1^k} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}, \quad (k = 1, \dots, n) \\ h_k &= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} m_\lambda = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \\ p_k &= m_{(k)} = x_1^k + \cdots + x_n^k \end{aligned}$$

とするのであった。 $e_k$  や  $h_k$  に対しては、その母関数を考えることは有用である。すなわち

$$E(t) = 1 + e_1 t + e_2 t^2 + \cdots + e_n t^n = \prod_{i=1}^n (1 + x_i t) \quad (2.7)$$

$$H(t) = 1 - h_1 t + h_2 t^2 - \cdots + (-1)^n h_n t^n + \cdots = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + x_i t} \quad (2.8)$$

である。とくに  $E(t)H(t) = 1$  であるので、 $k = 1, \dots, n$  のとき

$$e_k - h_1 e_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1} e_1 h_{k-1} + (-1)^k h_k = 0 \quad (2.9)$$

を得る。

**命題 2.3.1.1.**  $k = 1, \dots, n$  に対して

$$h_k = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_k \\ 1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{k-1} \\ 0 & 1 & e_1 & \cdots & e_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e_1 \end{vmatrix}, \quad e_k = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_k \\ 1 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{k-1} \\ 0 & 1 & h_1 & \cdots & h_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_1 \end{vmatrix}$$

*Proof.* まったく同様なので  $h_k$  の場合だけ示す。 $e_1 = h_1$  であり、 $k-1$  までこの公式が成り立っていたとす

ると、

$$\begin{aligned}
e_k &= h_1 e_{k-1} - h_2 e_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1} h_k \\
&= h_1 \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_{k-1} \\ 1 & h_1 & \cdots & h_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_1 \end{vmatrix} - h_2 \begin{vmatrix} h_1 & \cdots & h_{k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_1 \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{k-1} h_k \\
&= \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_k \\ 1 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{k-1} \\ 0 & 1 & h_1 & \cdots & h_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

□

次に、 $\lambda \in \mathcal{P}_k$  に対して

$$\begin{aligned}
e_\lambda &= e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_n} \\
h_\lambda &= h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_n} \\
p_\lambda &= p_{\lambda_1} \cdots p_{\lambda_n}
\end{aligned}$$

とする。

**命題 2.3.1.2.**  $\Lambda_n^k$  の次の部分集合について

- (i)  $\{m_\lambda\}_\lambda$  ただし  $\lambda$  は大きさが  $k$  で  $n$  行
- (ii)  $\{e_\lambda\}_\lambda$  ただし  $\lambda$  は大きさが  $k$  で  $n$  列
- (iii)  $\{h_\lambda\}_\lambda$  ただし  $\lambda$  は大きさが  $k$  で  $n$  列
- (iv)  $\{s_\lambda\}_\lambda$  ただし  $\lambda$  は大きさが  $k$  で  $n$  行
- (v)  $\{p_\lambda\}_\lambda$  ただし  $\lambda$  は大きさが  $k$  で  $n$  列

(i)~(iv) は  $\Lambda_n^k$  の  $\mathbb{Z}$  上の基底をなし、(v) は  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda_n^k$  の基底をなす。

*Proof.* (i) は命題 1.1.1.7 の証明を斉次部分で考えればまったく同様である。(ii) については定理 1.1.1.8 の証明において、任意の対称多項式  $f$  が

$$e_1^{a_1} \cdots e_n^{a_n}$$

で生成されていることを示したことからわかる。(iv) は 1.1.2.3 の証明を斉次部分で行えばよい。(iii) については、命題 2.3.1.1 より  $\{h_\lambda\}$  が  $\{e_\lambda\}$  を生成することがわかるが、ともに集合の濃度が等しいことから基底を

なすことがわかる。(v) が基底をなすことを示そう。(v) が (iii) を生成することを示せばよい。

$$\begin{aligned}
& 1 + h_1 t + h_2 t^2 + \cdots \\
&= H(-t) \\
&= \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - x_i t} \\
&= \exp \left( \sum_{i=1}^n -\log(1 - x_i t) \right) \\
&= \exp \left( \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x_i^r t^r}{r} \right) \\
&= \exp \left( \sum_{r=1}^{\infty} \frac{p_r}{r} t^r \right) \\
&= \prod_{r=1}^{\infty} \exp \left( \frac{p_r}{r} t^r \right) \\
&= \prod_{r=1}^{\infty} \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{p_r^{m_r}}{m_r! \cdot r^{m_r}} t^{r \cdot m_r} \\
&= \left( \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{p_1^{m_1}}{m_1! \cdot 1^{m_1}} t^{m_1} \right) \cdot \left( \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{p_2^{m_2}}{m_2! \cdot 2^{m_2}} t^{2 \cdot m_2} \right) \cdot \left( \sum_{m_3=0}^{\infty} \frac{p_3^{m_3}}{m_3! \cdot 3^{m_3}} t^{3 \cdot m_3} \right) \cdots
\end{aligned}$$

となるから、Young 図形  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  に対して

$$z(\lambda) = \prod_i m_i! \cdot i^{m_i}, \quad \text{ただし } m_i \text{ は } \lambda \text{ に現れる } i \text{ の個数}$$

とおけば、最後の式は

$$\begin{aligned}
& \sum_{m_1, m_2, m_3, \dots} \frac{p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \cdots}{(m_1! \cdot 1^{m_1})(m_2! \cdot 2^{m_2})(m_3! \cdot 3^{m_3}) \cdots} t^{m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + \cdots} \\
&= \sum_{\lambda} \frac{p_{\lambda}}{z(\lambda)} t^{|\lambda|} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} \frac{p_{\lambda}}{z(\lambda)} t^k
\end{aligned}$$

となる。よって

$$h_k = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} \frac{p_{\lambda}}{z(\lambda)}$$

が成り立つ。 $n$  列の Young 図形  $\lambda$  に対して

$$h_{\lambda} = h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_s}, \quad \lambda_i \leq n$$

とおくと、

$$h_{\lambda_i} = \sum_{\mu_i \in \mathcal{P}_{\lambda_i}} \frac{p_{\mu_i}}{z(\mu_i)}$$

であるから

$$h_{\lambda} = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_s} \frac{p_{\mu_1} \cdots p_{\mu_s}}{z(\mu_1) \cdots z(\mu_s)}$$

各  $\mu_i$  は  $\lambda_i \leq n$  の分割を与えているから、 $p_{\mu_1} \cdots p_{\mu_s}$  はただか  $n$  列の Young 図形に対応するべき和対称式である。よって (v) も基底を与える。  $\square$

証明中に現れた等式は重要なので再掲しておく。

**命題 2.3.1.3.** 正の整数  $k, n$  に対して

$$h_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} \frac{p_\lambda(x_1, \dots, x_n)}{z(\lambda)}$$

が成り立つ。

後に必要になる公式を用意しておく

**補題 2.3.1.4** (Cauchy の等式). 形式的べき級数  $\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \frac{1}{1-x_i y_j}$  は次と等しい。

- (i):  $\sum_{\lambda, \lambda_{n+1}=0} h_\lambda(x_1, \dots, x_m) m_\lambda(y_1, \dots, y_n),$     ただし和は  $n$  行 Young 図形全体をわたる
- (ii):  $\sum_{\lambda} \frac{1}{z(\lambda)} p_\lambda(x_1, \dots, x_m) p_\lambda(y_1, \dots, y_n),$     ただし和はすべての Young 図形全体をわたる
- (iii):  $\sum_{\lambda} s_\lambda(x_1, \dots, x_m) s_\lambda(y_1, \dots, y_n),$     ただし和はすべての Young 図形全体をわたる

*Proof.* (i) を示す。

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \frac{1}{1-x_i y_j} \\
&= \prod_{j=1}^n H(y_j) \\
&= \prod_{j=1}^n \left( \sum_{k_j=0}^{\infty} h_{k_j}(x_1, \dots, x_m) y_j^{k_j} \right) \\
&= \left( \sum_{k_1=0}^{\infty} h_{k_1}(x_1, \dots, x_m) y_1^{k_1} \right) \cdot \left( \sum_{k_2=0}^{\infty} h_{k_2}(x_1, \dots, x_m) y_2^{k_2} \right) \cdots \left( \sum_{k_n=0}^{\infty} h_{k_n}(x_1, \dots, x_m) y_n^{k_n} \right) \\
&= \sum_{k_1, \dots, k_n} h_{k_1} \cdots h_{k_n} y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n} \\
&= \sum_{\lambda, \lambda_{n+1}=0} h_\lambda(x_1, \dots, x_m) m_\lambda(y_1, \dots, y_n)
\end{aligned}$$

(ii) を示す。命題 2.3.1.3 より

$$\begin{aligned}
\prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} &= 1 + h_1(\{x_i y_j\}) + h_2(\{x_i y_j\}) + \cdots \\
&= 1 + \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_1} \frac{1}{z(\lambda)} p_\lambda(\{x_i y_j\}) + \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_2} \frac{1}{z(\lambda)} p_\lambda(\{x_i y_j\}) + \cdots \\
&= \sum_{\lambda} \frac{1}{z(\lambda)} p_\lambda(\{x_i y_j\}) \\
&= \sum_{\lambda} \frac{1}{z(\lambda)} p_\lambda(x_1, \dots, x_m) p_\lambda(y_1, \dots, y_n)
\end{aligned}$$

(iii) については、Robinson-Schensted-Knuth 対応と呼ばれる対応を用いて証明される。詳細は付録を参照 □

**補題 2.3.1.5.**  $\mu \in \mathcal{P}_k$  とし、変数の数  $n$  は  $n \geq k$  とする。

$$p_\mu = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} \xi_{\lambda\mu} m_\lambda$$

とおいたとき、

$$\xi_{\lambda\mu} = \sum \prod_{q=1}^n \frac{m_q!}{c_{1q}! \cdots c_{nq}!} = \chi_{M_\lambda}(g_\mu)$$

ただし、 $g_\mu$  は  $\mu$  を置換の型にもつ元であり、 $\mu = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots)$  であり、また和は命題 2.2.1.20 と同様

- $c_{p1} + 2c_{p2} + 3c_{p3} + \cdots + nc_{pn} = \lambda_p$ , for all  $p = 1, \dots, n$
- $c_{1q} + c_{2q} + c_{3q} + \cdots + c_{nq} = m_q$ , for all  $q = 1, \dots, n$

をみたす非負行列  $\{c_{pq}\} \in M_n(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  全体をわたる。

*Proof.*  $p_\mu = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_n^{m_n}$  であるが、

$$p_q^{m_q} = (x_1^q + x_2^q + \cdots + x_n^q)^{m_q} = \sum_{c_{1q}, c_{2q}, \dots, c_{nq} \geq 0} \frac{m_q!}{c_{1q}! c_{2q}! \cdots c_{nq}!} x_1^{c_{1q}} x_2^{c_{2q}} \cdots x_n^{c_{nq}}$$

であるので、

$$\begin{aligned}
p_\mu &= \prod_{q=1}^n \sum_{c_{1q}, c_{2q}, \dots, c_{nq} \geq 0} \frac{m_q!}{c_{1q}! c_{2q}! \cdots c_{nq}!} x_1^{c_{1q}} x_2^{c_{2q}} \cdots x_n^{c_{nq}} \\
&= \sum \prod_{q=1}^n \frac{m_q!}{c_{1q}! c_{2q}! \cdots c_{nq}!} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots x_n^{\mu_n}
\end{aligned}$$

□

## 2.3.2 表現環と対称関数環

**定義 2.3.2.1.** 可算無限個の変数をもつ形式的べき級数環  $\mathbb{Z}[[x_1, x_2, \dots]]$  を考える。

$$\mathfrak{S} = \{ \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ は全単射で } f(n) \neq n \text{ なる } n \text{ が有限個} \}$$

とする\*5。

$$\Lambda = \{ f \in \mathbb{Z}[[x_1, x_2, \dots]] \mid \sigma f = f, (\text{for all } \sigma \in \mathfrak{S}), f \text{ の単項式の次数は有界} \}$$

$\Lambda$  は  $\mathbb{Z}[[x_1, x_2, \dots]]$  の部分環で対称関数環と呼ばれる。 $\Lambda^k$  を

$$\Lambda^k = \{ f \in \Lambda \mid f \text{ の単項式の次数はすべて } k \}$$

で定め、 $\Lambda^k$  の元を  $k$  次斉次対称関数という。

$$\Lambda = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k$$

より  $\Lambda$  は次数付き環の構造をもつ。

ここで、 $\Lambda$  の定義において単項式の次数が有界であることを要請するのは自然である。実際、もし仮定しなければ  $\Lambda$  は  $\Lambda^k$  の直和にはならない。

**例 2.3.2.2** (単項対称関数). 任意の Young 図形  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  に対して

$$m_\lambda = \sum_{\alpha \sim \lambda} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

とする。ここで指数  $\alpha$  は、 $\lambda$  の置換になっているもの全体をわたる。すなわちある  $\sigma \in \mathfrak{S}$  が存在して  $\alpha = \sigma \lambda$  をみたすもの全体である。 $m_\lambda$  は対称関数である。対称多項式の場合と同様の議論で、 $\Lambda^k$  は  $\{m_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}_k}$  を基底に持つことがわかる。

**例 2.3.2.3** (基本対称関数・完全対称関数).

$$e_k = m_{1^k} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

$$h_k = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} m_\lambda = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

をそれぞれ、基本対称関数、完全対称関数という。また、任意の Young 図形  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  に対して

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_n}$$

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_n}$$

とする。

$$e_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$$

$$e_2 = \sum_{i < j} x_i x_j$$

である。

**例 2.3.2.4** (べき和対称関数).  $(k) = (k, 0, \dots, 0)$  に対して

$$p_k = m_{(k)} = x_1^k + x_2^k + \cdots$$

とする。

---

\*5  $\mathfrak{S}$  は対称群  $\mathfrak{S}_n$  と自然な包含  $\iota: \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_{n+1}$  のなす帰納系の帰納極限である。



このように、対称関数はいままでみてきた対称多項式を自然に無限変数に拡張した概念であり、対称多項式で成り立っていた関係式が対称関数においても成立することが多い。このことは対称関数の  $k$  次斉次部分  $\Lambda^k$  が  $k$  次斉次対称多項式からの射影極限と考えることができることによる。 $\Lambda_n^k$  を  $n$  変数  $k$  次斉次対称多項式のなす  $\mathbb{Z}$  加群とする。 $m \leq n$  に対して線形写像  $\rho_{m,n} : \Lambda_n^k \rightarrow \Lambda_m^k$  を

$$\rho_{m,n}(f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)) = f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

によって定める。ここで  $\rho_{m,n}(f)$  は実際に  $m$  変数の  $k$  次斉次対称多項式である\*6。 $l \leq m \leq n$  に対して

$$\rho_{l,m} \circ \rho_{m,n} = \rho_{l,n}$$

が成り立つから、 $\{\Lambda_n^k, \rho_{m,n}\}$  は射影系をなす。

**命題 2.3.2.5.** 上の状況において、

$$\Lambda^k = \varprojlim \Lambda_n^k$$

がなりたつ。

*Proof.*  $\theta_n : \Lambda^k \rightarrow \Lambda_n^k$  を  $n+1$  番目以降の変数を 0 にする写像とすれば、

$$\rho_{m,n} \circ \theta_n = \theta_m$$

が成り立つから、射影極限の普遍性から線形写像

$$\theta : \Lambda^k \rightarrow \varprojlim \Lambda_n^k$$

が誘導される。 $\varprojlim \Lambda_n^k$  から  $\Lambda^k$  への写像  $\varphi$  は次のように定義する。 $\varprojlim \Lambda_n^k$  の元  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ ,  $(f_n \in \Lambda_n^k)$  に対して、 $k$  変数の部分に注目すると

$$f_k = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda m_\lambda(x_1, \dots, x_k)$$

と一意的に表せるので

$$\varphi((f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda m_\lambda$$

と定める。ただし右辺の  $m_\lambda$  は例 2.3.2.2 の対称関数である。 $\varphi$  が  $\theta$  の逆写像であることを示そう。

$$\theta_n(m_\lambda) = \begin{cases} m_\lambda(x_1, \dots, x_n) & \text{if } \lambda_{n+1} = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.10)$$

であるが、 $\lambda$  は  $k$  の分割であるので  $n \geq k$  において  $\lambda_{n+1} = 0$  である。よって  $n \geq k$  ならば

$$\theta_n(\varphi((f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}})) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda m_\lambda(x_1, \dots, x_n) \quad (2.11)$$

が成り立つ。一方、

$$f_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k(n)} d_\lambda m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$$

---

\*6 変数の置換と 0 を代入する操作が可換であることによる

とおくと  $n \geq k$  より  $\mathcal{P}_k(n) = \mathcal{P}_k$  だから

$$f_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} d_\lambda m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$$

となる。よって  $\rho_{k,n}(f_n) = f_k$  と (2.11) より

$$f_n = \theta_n(\varphi((f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}))$$

次に  $n < k$  の場合、(2.10) より

$$\theta_n(\varphi((f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}})) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(k)} c_\lambda m_\lambda$$

となるが、

$$f_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} d_\lambda m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$$

とおけば  $\rho_{n,k}(f_k) = f_n$  より

$$f_n = \theta_n(\varphi((f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}))$$

以上より

$$\theta \circ \varphi = \text{id}$$

がわかる。逆に任意の  $f \in \Lambda^k$  に対して

$$f = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda m_\lambda$$

とおけば (2.10) より

$$\theta_k(f) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda m_\lambda(x_1, \dots, x_k)$$

だから

$$\varphi(\theta(f)) = f$$

がわかる。 □

**注意 2.3.2.6.** 対称多項式環の射影極限をとっても対称関数環にはならないことに注意せよ。例えば対称多項式の列

$$f = ((1+x_1), (1+x_1)(1+x_2), (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3), \dots)$$

を考えると、 $f$  は対称多項式の射影極限の元であるが、次数の有界性を満たさない所以对称関数ではない。

一方

$$\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda_n^k$$

だから、対称関数環は射影極限が直和と可換でない例を与えている。

**例 2.3.2.7.**  $n$  行の Young 図形  $\lambda$  に対して

$$\rho_{n,n+1}(m_\lambda(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})) = m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$$

が成り立つ。実際

$$\begin{aligned}
\rho_{n,n+1}(m_\lambda(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})) &= \rho_{n,n+1} \left( \sum_{\alpha \sim \lambda} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \right) \\
&= \sum_{\substack{\alpha \sim \lambda \\ \alpha_{n+1}=0}} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \\
&= m_\lambda(x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

よって  $k = |\lambda|$  次対称多項式の列  $(m_\lambda(x_1, \dots, x_l))_{l \in \mathbb{Z}_{\geq n}}$  は一つの対称関数を定めるが、これは単項対称関数  $m_\lambda$  に他ならない。

**例 2.3.2.8.** 例 2.3.2.7 と命題 2.3.1.2 より  $e_\lambda, h_\lambda, p_\lambda, s_\lambda$  もすべて一つの対称関数を定める。 $e_\lambda, h_\lambda, p_\lambda$  の定める対称関数は、例 2.3.2.3 と例 2.3.2.4 に他ならない。また  $s_\lambda$  の定める対称関数は Schur 関数という。

命題 2.3.1.2 より、次が成り立つ。

**命題 2.3.2.9.**  $\Lambda^k$  の次の部分集合について、

- (i)  $\{m_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}_k}$
- (ii)  $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}_k}$
- (iii)  $\{h_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}_k}$
- (iv)  $\{s_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}_k}$
- (v)  $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}_k}$

(i)~(iv) は  $\Lambda^k$  の  $\mathbb{Z}$  上の基底をなし、(v) は  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^k$  上の基底をなす。特に  $\lambda$  の範囲をすべての Young 図形全体に変えれば、これらは  $\Lambda$  または  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$  の基底を与える。

また、命題 2.3.1.1 や命題 2.3.1.3, 補題 2.3.1.4, Littlewood-Richardson 規則などの関係式は、そのまま対称関数においても成立することがわかる。(変数の制限  $\rho_{m,n}$  は和や積と可換である)

**命題 2.3.2.10.** 次の関係式が成り立つ<sup>\*7</sup>

$$\begin{aligned}
\text{(i): } h_k &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_k \\ 1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{k-1} \\ 0 & 1 & e_1 & \cdots & e_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e_1 \end{vmatrix}, \quad e_k = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_k \\ 1 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{k-1} \\ 0 & 1 & h_1 & \cdots & h_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_1 \end{vmatrix} \\
\text{(ii): } h_k &= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} \frac{p_\lambda}{z(\lambda)} \\
\text{(iii): } \sum_{\lambda} h_\lambda(x) m_\lambda(y) &= \sum_{\lambda} \frac{1}{z(\lambda)} p_\lambda(x) p_\lambda(y) = \sum_{\lambda} s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} \\
\text{(iv): } s_\lambda s_\mu &= \sum_{\nu} \eta_{\lambda\mu}^\nu s_\nu, \quad \text{ただし } \eta_{\lambda\mu}^\nu \text{ は Littlewood-Richardson 数} \\
\text{(vi): } p_\mu &= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} \xi_{\lambda\mu} m_\lambda \quad \text{ここで } \xi_{\lambda\mu} = \sum_{q=1}^n \prod \frac{m_q!}{c_{1q}! \cdots c_{nq}!} = \chi_{M_\lambda}(g_\mu)
\end{aligned}$$

以下、 $\Lambda$  の係数を  $\mathbb{Q}$  に拡大して考える。命題 2.3.2.9 より、 $\{s_\lambda\}$  は  $\Lambda$  の基底をなすので、 $\Lambda$  に

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$$

となるような内積を入れて考える。ただし  $\delta_{\lambda\mu}$  は Kronecker のデルタである。

**命題 2.3.2.11.** 次が成り立つ

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad \langle h_\lambda, m_\mu \rangle &= \delta_{\lambda\mu} \\
\text{(ii)} \quad \langle p_\lambda, p_\mu \rangle &= \delta_{\lambda\mu} z(\lambda)
\end{aligned}$$

*Proof.* 一般に  $\Lambda$  の基底  $\{u_\lambda\}, \{v_\lambda\}$  について

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \langle u_\lambda, v_\mu \rangle &= \delta_{\lambda\mu} \\
\text{(b)} \quad \sum_{\lambda} u_\lambda(x) v_\lambda(y) &= \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j}
\end{aligned}$$

が同値であることを示せば命題 2.3.2.10 より従う。

$$u_\lambda(x) = \sum_{\nu_1} a_{\lambda\nu_1} s_{\nu_1}, \quad v_\mu = \sum_{\nu_2} b_{\mu\nu_2} s_{\nu_2} \quad \text{とおく。 (a) は}$$

$$\sum_{\nu} a_{\lambda\nu} b_{\mu\nu} = \delta_{\lambda\mu} \tag{2.12}$$

と同値である。命題 2.3.2.10 より

$$\prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda} s_\lambda(x) s_\lambda(y)$$

---

<sup>\*7</sup>  $e_k$  の母関数  $E(t) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x_i t)$  や  $h_k$  の母関数  $H(t) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x_i t}$  を用いて補題 2.3.1.4 と同じ計算で直接示してもよい。

であり、

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda} u_{\lambda}(x) v_{\lambda}(y) &= \sum_{\lambda} \sum_{\nu_1, \nu_2} a_{\lambda \nu_1} b_{\lambda \nu_2} s_{\nu_1}(x) s_{\nu_2}(y) \\
&= \sum_{\nu_1, \nu_2} \left( \sum_{\lambda} a_{\lambda \nu_1} b_{\lambda \nu_2} \right) s_{\nu_1}(x) s_{\nu_2}(y) \\
&= \sum_{\nu} \left( \sum_{\lambda} a_{\lambda \nu} b_{\lambda \nu} \right) s_{\nu}(x) s_{\nu}(y) + \sum_{\nu_1 \neq \nu_2} \left( \sum_{\lambda} a_{\lambda \nu_1} b_{\lambda \nu_2} \right) s_{\nu_1}(x) s_{\nu_2}(y)
\end{aligned}$$

だから、 $\{s_{\lambda}(x) s_{\mu}(y)\}_{\lambda, \mu}$  は一次独立であることに注意すれば、(b) は

$$\sum_{\lambda} a_{\lambda \nu_1} b_{\lambda \nu_2} = \delta_{\nu_1 \nu_2} \quad (2.13)$$

と同値である。(2.12) と (2.13) は同値 (行列の行ベクトルが正規直交であることと列ベクトルが正規直交であることは同値) であるので、(a) と (b) も同値である。□

次に対称群の表現全体から作られる環を導入する。

**定義 2.3.2.12.**  $\mathfrak{S}_n$  の表現の同値類全体で生成される自由 Abel 群を  $\tilde{R}_n$  とする。 $D$  を

$$\{ [V \oplus W] - [V] - [W] \in R \mid V, W \text{ はそれぞれ } \mathfrak{S}_n \text{ の表現} \}$$

で生成される  $\tilde{R}_n$  の部分加群とし、 $R_n = \tilde{R}_n / D$  とする。 $R_0 = \mathbb{Z}$  として  $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$  とおく。

$\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_m$  の表現  $V, W$  に対して、

$$[V] \circ [W] = [\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} V \boxtimes W]$$

と定める。ここで、 $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$  は  $\mathfrak{S}_n$  の元を  $n+1$  から  $n+m$  を固定する置換と同一視し、 $\mathfrak{S}_m$  の元を  $1$  から  $n$  を固定する置換と同一視することで  $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$  の部分群とみなしている。 $\circ$  を双線形に拡張することによって  $R$  は可換環の構造を持つ。 $R$  を対称群の表現環という。

**命題 2.3.2.13.**  $\circ$  は実際に乗法を定め、 $R$  は次数付き可換環となる。

*Proof.* テンソル積と直和の可換性から、 $\mathfrak{S}_n$  の表現  $V, V'$  に対して

$$\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} (V \oplus V') \boxtimes W = (\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} V \boxtimes W) \oplus (\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} V' \boxtimes W)$$

よって

$$([V] + [V']) \circ [W] = [V \oplus V'] \circ [W] = [V] \circ [W] + [V'] \circ [W]$$

より  $\circ$  は双線形である。 $\circ$  が可換であることは  $\mathfrak{S}_n$  の元と  $\mathfrak{S}_m$  の元が  $\mathfrak{S}_{n+m}$  において可換であることからわかる。

乗法が結合的であることを示そう。すなわち

$$([V] \circ [W]) \circ [U] = [V] \circ ([W] \circ [U])$$

を示す。そのためには  $\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_m, \mathfrak{S}_l$  それぞれの表現  $V, W, U$  に対して、2 つの表現

$$\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n+m} \times \mathfrak{S}_l}^{\mathfrak{S}_{n+m+l}} \left\{ (\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} V \boxtimes W) \boxtimes U \right\}, \quad \text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_{m+l}}^{\mathfrak{S}_{n+m+l}} \left\{ V \boxtimes (\text{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_l}^{\mathfrak{S}_{m+l}} W \boxtimes U) \right\}$$

の指標が等しいことをみればよい。  $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n+m} \times \mathfrak{S}_l}^{\mathfrak{S}_{n+m+l}} \left\{ (\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} V \boxtimes W) \boxtimes U \right\}$  の指標を  $\chi_A$  とおき、  $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} V \boxtimes W$  の指標を  $\chi_{A'}$  とおく。誘導指標の公式 (命題 2.1.4.4) より、

$$\chi_A(g) = \frac{1}{(n+m)! l!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+m+l} \\ \sigma^{-1}g\sigma \in \mathfrak{S}_{n+m} \times \mathfrak{S}_l}} \chi_{A'}((\sigma^{-1}g\sigma)|_{n+m}) \chi_U((\sigma^{-1}g\sigma)|_l)$$

ここで、  $(\sigma^{-1}g\sigma)|_{n+m}$  は  $\sigma^{-1}g\sigma$  の最初の  $n+m$  文字の置換への制限である。  $g$  と  $\sigma^{-1}g\sigma$  の置換の型は同じだから、  $\sigma^{-1}g\sigma \in \mathfrak{S}_{n+m} \times \mathfrak{S}_l$  と、  $g \in \mathfrak{S}_{n+m} \times \mathfrak{S}_l$  は同値である。よって、

$$\chi_A(g) = \begin{cases} \frac{(n+m+l)!}{(n+m)! l!} \chi_{A'}(g|_{n+m}) \chi_U(g|_l) & \text{if } g \in \mathfrak{S}_{n+m} \times \mathfrak{S}_l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。同様の議論で、

$$\begin{aligned} \chi_{A'}(g|_{n+m}) &= \frac{1}{n! m!} \sum_{\substack{t \in \mathfrak{S}_{n+m} \\ t^{-1}g|_{n+m}t \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}} \chi_V((t^{-1}gt)_n) \chi_W((t^{-1}gt)_m) \\ &= \begin{cases} \frac{(n+m)!}{n! m!} \chi_V(g|_n) \chi_W(g|_m) & \text{if } g \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。結局、

$$\chi_A(g) = \begin{cases} \frac{(n+m+l)!}{n! m! l!} \chi_V(g|_n) \chi_W(g|_m) \chi_U(g|_l) & \text{if } g \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.14)$$

で、  $n, m, l$  について対称な形となった。同様に  $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_{m+l}}^{\mathfrak{S}_{n+m+l}} \left\{ V \boxtimes (\text{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_l}^{\mathfrak{S}_{m+l}} W \boxtimes U) \right\}$  の指標を計算すると、(2.14) となることがわかる。  $\square$

$R$  の係数を  $\mathbb{Q}$  に拡大して考える。  $[V], [W] \in R_n$  に対して

$$\langle [V], [W] \rangle = \langle \chi_V, \chi_W \rangle$$

と定義し、  $\langle, \rangle$  を  $R$  に双線形に拡張し内積を入れる。本節の主定理の一つが次の定理である。

**定理 2.3.2.14.**  $\varphi: \Lambda \rightarrow R$  を  $\varphi(h_\lambda) = [M_\lambda]$  によって定めると  $\varphi$  は内積を保つ環の同型であり、

$$\varphi(s_\lambda) = [S_\lambda]$$

が成り立つ。ただし  $M_\lambda$  は例 2.2.1.17 の誘導表現、  $S_\lambda$  は  $\lambda$  で定まる対称群の既約表現である。

*Proof.*  $\{h_\lambda\}$  は  $\Lambda$  の基底だから  $\varphi$  は  $\mathbb{Q}$  線形写像として定義できることに注意する。また、Young の規則 (定理 2.2.1.18) より

$$[M_\lambda] = [S_\lambda] + \sum_{\mu > \lambda} k_{\lambda\mu} [S_\mu]$$

となるから、  $R_n$  の基底  $\{[S_\lambda]\}$  に関して  $\{[M_\lambda]\}$  を成分表示して並べたとき、対角成分がすべて 1 の上三角行列になる。すなわち  $\{[M_\lambda]\}$  は  $R_n$  の基底となることがわかる。したがって  $\varphi$  は少なくとも線形同型であることがわかる。

$\varphi$  が環準同型であることを示す。  $h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_r}$  だから、

$$[M_\lambda] = [M_{(\lambda_1)}] \circ \cdots \circ [M_{(\lambda_r)}]$$

となることを示せばよい。 $n = |\lambda|$  とおく。各  $M_{(\lambda_i)}$  について、 $(\lambda_i)$  は 1 行の Young 図形だから  $M_{(\lambda_i)}$  は  $\mathfrak{S}_{\lambda_i}$  の自明な表現である。よって  $M_{(\lambda_i)} \boxtimes M_{(\lambda_j)}$  は  $\mathfrak{S}_{\lambda_i} \times \mathfrak{S}_{\lambda_j}$  の自明な表現だから、

$$[M_{(\lambda_i)}] \circ [M_{(\lambda_j)}] = [\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{\lambda_i} \times \mathfrak{S}_{\lambda_j}}^{\mathfrak{S}_{\lambda_i + \lambda_j}} \mathbf{1}] = [M_{(\lambda_i, \lambda_j)}]$$

積は可換かつ結合的だから

$$[M_\lambda] = [M_{(\lambda_1)}] \circ \cdots \circ [M_{(\lambda_r)}]$$

次に  $\varphi$  が内積を保つことを示す。 $\varphi$  は同型なので  $\varphi$  の逆写像  $\psi$  が内積を保つことを示せばよい。 $\psi$  を求める。

命題 2.3.2.10 と命題 2.3.2.11 より、 $\lambda \in \mathcal{P}_n$  に対して  $h_\lambda$  を  $p_\lambda$  の線形結合で表すことができる：

$$h_\lambda = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_n} \frac{\chi_{M_\lambda}(g_\mu)}{z(\mu)} p_\mu$$

そこで

$$\psi([V]) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_n} \frac{\chi_V(g_\mu)}{z(\mu)} p_\mu$$

と定義すると  $\psi$  は  $\varphi$  の逆写像になっている。

ここで、 $z(\mu) = \prod m_i! \cdot i^{m_i}$ , ( $m_i$  は  $\mu$  に現れる  $i$  の個数) について、 $g_\mu$  の共役類の大きさ  $|C(g_\mu)|$  を考えると

$$|C(g_\mu)| = \frac{n!}{m_1! 1^{m_1} \cdots m_n! n^{m_n}} = \frac{n!}{z(\mu)}$$

である。これは、 $n$  の置換のうち、長さ  $i$  の巡回置換は  $i$  通りの同じ表示をもつ ( $(1, 2, 3) = (3, 1, 2) = (2, 3, 1)$ ) こと、 $m_i$  個の巡回置換の並べ替えの分重複があることを考えればわかる。よって

$$z(\mu) = \frac{n!}{|C(g_\mu)|}$$

これより、

$$\begin{aligned} \langle \psi([V]), \psi([W]) \rangle &= \left\langle \sum_{\nu_1 \in \mathcal{P}_k} \frac{\chi_V(g_{\nu_1})}{z(\nu_1)} p_{\nu_1}, \sum_{\nu_2 \in \mathcal{P}_k} \frac{\chi_W(g_{\nu_2})}{z(\nu_2)} p_{\nu_2} \right\rangle \\ &= \sum_{\nu \in \mathcal{P}_k} \frac{\chi_V(g_\nu) \chi_W(g_\nu)}{z(\nu)} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_k} |C(g_\nu)| \chi_V(g_\nu) \chi_W(g_\nu) \\ &= \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi_V(\sigma) \chi_W(\sigma) \\ &= \langle [V], [W] \rangle \end{aligned}$$

よって示せた。最後に  $\varphi(s_\lambda) = [S_\lambda]$  であることを示す。Young の規則 (系 1.2.2.11, 命題 2.2.1.18) より

$$\begin{aligned} \varphi(s_\lambda) &= \varphi(h_\lambda) - \sum_{\nu > \lambda} k_{\lambda\nu} \varphi(s_\nu) \\ &= [S_\lambda] + \sum_{\nu' > \lambda} k_{\lambda\nu'} [S'_{\nu'}] - \sum_{\nu > \lambda} k_{\lambda\nu} \varphi(s_\nu) \\ &= [S_\lambda] + \sum_{\nu > \lambda} m_{\lambda\nu} [S_\nu] \end{aligned}$$

となるような整数  $m_{\lambda\mu}$  が存在する。

$$1 = \langle \varphi(s_\lambda), \varphi(s_\lambda) \rangle = 1 + \sum_{\nu > \lambda} m_{\lambda\nu}^2$$

ゆえに  $m_{\lambda\nu} = 0$ 。よって示せた。  $\square$

この定理によって対称群の表現を対称関数の知識を使って調べることができる。

**系 2.3.2.15.**  $\mathfrak{S}_n$  の既約表現  $S_\lambda$ ,  $\mathfrak{S}_m$  の既約表現  $S_\mu$  について

$$\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} S_\lambda \boxtimes S_\mu = \bigoplus_{\nu} S_\nu^{\oplus \eta_{\lambda\mu}^\nu}$$

が成り立つ。ただし  $\eta_{\lambda\mu}^{nu}$  は Littlewood-Richardson 数である。

**系 2.3.2.16.**  $k_{\lambda\mu}$  を Kostka 数とする。

$$M_\lambda = S_\lambda \oplus \left( \bigoplus_{\mu > \lambda} S_\mu^{\oplus k_{\lambda\mu}} \right)$$

が成り立つ。

*Proof.* 系 1.2.2.11, 定理 2.2.1.18 よりただちに従う。  $\square$

**系 2.3.2.17** (Pieri の規則).  $\mathfrak{S}_n$  の既約表現  $S_\lambda$  に対して、

$$\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+m}} S_\lambda = \bigoplus_{\substack{|\mu|=|\lambda|+m \\ \mu/\lambda \text{ は水平帯}}} S_\mu$$

**系 2.3.2.18** (Frobenius の指標公式).  $\mathfrak{S}_n$  の既約指標  $\chi_\lambda$  について、 $\chi_\lambda(g_\mu)$  の値は  $s_\lambda$  を  $\{\frac{p_\mu}{z(\mu)}\}$  の線形結合で表したときの  $\frac{p_\mu}{z(\mu)}$  の係数に等しい

*Proof.*

$$s_\lambda = \psi([S_\lambda]) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_n} \frac{\chi_\lambda(g_\mu)}{z(\mu)} p_\mu$$

より従う。  $\square$

**例 2.3.2.19.**  $\lambda = (n-1, 1) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \cdots \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$  とする。  $S_\lambda$  が

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\}$$

に同値であることを示す。Pieri の規則より、

$$\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1} = S_{(n)} \oplus S_{(n-1,1)}$$

である。ここで、 $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_{n-1}$  の完全代表系を求めると

$$X = \{(1\ n), (2\ n), \dots, (n-1\ n), e\}$$



が取れる。 $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1}$  は  $X$  への置換表現に他ならない。 $v_i = (i\ n)$ ,  $v_n = e$  とおけば

$$(j\ n)v_i = \begin{cases} v_n & \text{if } i = j \\ v_j & \text{if } i = n \\ v_i & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。すなわち  $(j\ n)$  が引き起こす  $X$  上の置換は  $(j\ n)$  に他ならない。これは  $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1}$  が標準的な置換表現

$$V = \mathbb{C}^n, \quad \text{for } \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}$$

に同値であることを意味する。

$$V \simeq \mathbf{1} \oplus U$$

であり、

$$V \simeq \text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1} = S_{(n)} \oplus S_{(n-1,1)} = \mathbf{1} \oplus S_{(n-1,1)}$$

だから

$$S_{(n-1,1)} \simeq U$$

## 2.4 一般線形群の表現と Schur-Weyl 双対性

前節までで対称群の既約表現に関して解説してきたが、次に対称群と表現論的に関係の深い一般線形群の表現について解説する。とくに多項式表現と呼ばれる表現のクラスが、Schur-Weyl 双対性を通して対称群の表現と密接にかかわりあっている。

### 2.4.1 Schur-Weyl 双対性

次のような問題を考えることから始める。 $V$  を  $n$  次元ベクトル空間としたとき、テンソル空間  $V^{\otimes k}$  の部分空間として対称テンソル空間  $\text{Sym}^k(V)$ , 交代テンソル空間  $\text{Alt}^k(V)$  というものが

$$\begin{aligned}\text{Sym}^k(V) &= \{ v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \mid v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)} = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k, \text{ for all } \sigma \in \mathfrak{S}_k \} \\ \text{Alt}^k(V) &= \{ v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \mid v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)} = \text{sgn}(\sigma) v_1 \otimes \cdots \otimes v_k, \text{ for all } \sigma \in \mathfrak{S}_k \}\end{aligned}$$

によって定義された。

$$\dim \text{Sym}^k(V) = \binom{n+k-1}{k}, \quad \dim \text{Alt}^k(V) = \binom{n}{k}$$

より、 $k=2$  の場合

$$\dim \text{Sym}^2(V) + \dim \text{Alt}^2(V) = n^2 = \dim V \otimes V$$

だから、 $\text{Sym}^k(V) \cap \text{Alt}^k(V) = 0$  に注意すれば

$$V \otimes V = \text{Sym}^2(V) \oplus \text{Alt}^2(V)$$

が成り立つ。 $k > 2$  のときは次元が足りず、対称テンソルと交代テンソル以外の部分がでてくる。その分解を与える規則を考える。特に、表現を含めた分解を考えることが鍵になる。

$\sigma \in \mathfrak{S}_k$  に対して、

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}$$

によって  $V^{\otimes k}$  を  $\mathfrak{S}_k$  の表現とみなす。あるいは同じことだが

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)\sigma = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$$

によって右  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$  加群とみなす。

さらに、 $g \in \text{GL}(V)$  に対して

$$g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_k$$

とによって  $V^{\otimes k}$  は  $\text{GL}(V)$  の表現とみなすこともできる。 $V^{\otimes k}$  は  $\mathfrak{S}_k$ ,  $\text{GL}(V)$  両方の作用を同時に受けている。さらに次が成り立つ。

**命題 2.4.1.1.** 任意の  $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ ,  $g \in \text{GL}(V)$  に対して、

$$\sigma g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = g\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)$$

である。

*Proof.*  $u_i = gv_i$  とおく。

$$\begin{aligned}
\sigma g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) &= \sigma(gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_k) \\
&= \sigma(u_1 \otimes \cdots \otimes u_k) \\
&= u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma^{-1}(k)} \\
&= gv_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes gv_{\sigma^{-1}(k)} \\
&= g\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)
\end{aligned}$$

□

このとき、 $c_{(k)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ ,  $c_{1^k} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \sigma \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  とおくと

$$\text{Sym}^k(V) = V^{\otimes k} c_{(k)}, \quad \text{Alt}^k(V) = V^{\otimes k} c_{1^k}$$

となることがわかり、命題 2.4.1.1 よりこの 2 つは  $\text{GL}(V)$  の表現でもある。よって  $k > 2$  のときにも、 $\lambda \in \mathcal{P}_k$  に対する Young 対称子  $c_\lambda$  による像

$$W_\lambda(V) = V^{\otimes k} c_\lambda$$

を考察することは自然である。再び命題 2.4.1.1 より  $W_\lambda(V)$  は  $\text{GL}(V)$  の部分表現になるが、このとき次が成り立つ

**定理 2.4.1.2** (Schur-Weyl 双対性).  $W_\lambda(V)$  は  $\text{GL}(V)$  の既約表現であり、 $\mathfrak{S}_k \times \text{GL}(V)$  の表現として

$$V^{\otimes k} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_k} S_\lambda \boxtimes W_\lambda(V)$$

が成り立つ。

ポイントになるのは次の補題である。

**補題 2.4.1.3.**  $G$  を有限群,  $A = \mathbb{C}[G]$ ,  $U$  を右  $A$  加群,  $B = \text{End}_A(U)$  とおく。

- (i)  $c \in A$  に対して、左  $B$  加群として  $U \otimes_A Ac \simeq Uc$  が成り立つ。
- (ii)  $c \in A$  に対して、 $W = Ac$  が単純左  $A$  加群ならば  $U \otimes_A W = Uc$  は単純左  $B$  加群である。が成り立つ。

*Proof.* (i) 次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
U \otimes_A A & \xrightarrow{\cdot c} & U \otimes_A Ac & \longrightarrow & U \otimes_A A \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
U & \xrightarrow{\cdot c} & Uc & \longrightarrow & U
\end{array}$$

ここで  $\cdot c$  は  $c$  倍写像 (全射) であり、 $U \otimes_A Ac \rightarrow U \otimes_A A$ ,  $Uc \rightarrow U$  は埋め込み (単射), 両端の縦の写像は同型である。Diagram Chasing をすれば中央の縦の写像も同型になることがわかる。

- (ii)  $U$  が単純右  $A$  加群である場合を考える。このとき Schur の補題から  $B \simeq \mathbb{C}$  であることに注意する。 $\dim_{\mathbb{C}} U \otimes_A W \leq 1$  であることを示せばよい。Wedderburn の構造定理より、

$$A \simeq \prod_{i=1}^r M_{m_i}(\mathbb{C})$$

である。 $W$  は  $A$  の極小左イデアルなので、 $W$  は

$$W = \{ (M_1, \dots, M_i, \dots, M_r) \mid M_k = 0, (k \neq i), M_i \in I_\alpha \} = 0 \times \dots \times I_\alpha \times \dots \times 0$$

$$I_\alpha = \left\{ \left( \begin{pmatrix} 0 & \dots & a_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{m_i} & \dots & 0 \end{pmatrix} \right) \mid a_1, a_2, \dots, a_{m_i} \in \mathbb{C} \text{ は } \alpha \text{ 列} \right\}$$

このような形になる。同様に  $U$  を  $A$  の極小右イデアルと同一視すれば\*8、

$$U = \{ (M_1, \dots, M_j, \dots, M_r) \mid M_k = 0, (k \neq j), M_j \in J_\beta \} = 0 \times \dots \times J_\beta \times \dots \times 0$$

$$J_\beta = \left\{ \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{m_j} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right) \mid a_1, a_2, \dots, a_{m_j} \in \mathbb{C} \text{ は } \beta \text{ 行} \right\}$$

となるから、

$$U \otimes_A W = \begin{cases} J_\beta \otimes_{M_{m_i}(\mathbb{C})} I_\alpha = \mathbb{C} E_{\beta\alpha} & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

よって  $\dim_{\mathbb{C}}(U \otimes_A W) \leq 1$  だから単純である。

一般の  $U$  については、 $A$  の半単純性より  $U$  を単純右  $A$  加群の直和  $U \simeq \bigoplus_i U_k^{\oplus n_k}$  に分解しておいて、再び Schur の補題から

$$B = \text{End}_A(U) = \text{End}_A\left(\bigoplus_k U_k^{\oplus n_k}\right) = \bigoplus_k \text{End}_A(U_k^{\oplus n_k}) = \prod_k M_{n_k}(\mathbb{C})$$

また、前半に示したことにより

$$U \otimes_A W = \bigoplus_k (U_k \otimes_A W)^{\oplus n_k} \simeq \mathbb{C}^{\oplus n_i}$$

となる。実際、 $U_j \otimes_A W \simeq \mathbb{C}$  ならば  $U_j = 0 \times \dots \times J_\beta \times \dots \times 0$  と表した時、 $J_\beta$  は  $i$  番目の位置になければならないから、 $U_j \simeq U_i$  となる。 $\mathbb{C}^{\oplus n_i}$  は単純左  $M_{n_i}(\mathbb{C})$  加群だから、 $U \otimes_A W$  は単純左  $B$  加群である。

□

**補題 2.4.1.4.**  $V$  を  $n$  次元ベクトル空間とする。 $\text{Sym}^k(V)$  は  $\{v \otimes \dots \otimes v\}_{v \in V}$  によって生成される

*Proof.*  $n$  変数  $k$  次斉次多項式のなすベクトル空間を  $S$  とおく。主張は  $S$  が 1 次斉次多項式の  $k$  乗で生成されることと同値である。単項式

$$x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}, \quad i_1 + \dots + i_n = k$$

が生成されることを示せば十分である。 $f_0(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n)^k$  とおく。

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = f_0(2x_1, x_2, \dots, x_n) - 2^k f_0(x_1, \dots, x_n)$$

\*8  $G$  の正則表現はすべての既約表現を直和因子に含むことに注意

とすれば、 $f_1$  は  $x_1^k$  を含む項をもたない。次に

$$f_2(x_1, \dots, x_n) = f_1(2x_1, x_2, \dots, x_n) - 2^{k-1}f_1(x_1, \dots, x_n)$$

とすれば  $f_2$  は  $x_1^k, x_1^{k-1}$  を含む項をもたない。この操作を  $i_1$  以外に対して行えば、最終的に  $x_1^{i_1}$  を含む項以外をもたないような多項式  $g_0(x_1, \dots, x_n)$  を得る。そして  $g_0$  は作り方から、一次斉次多項式の  $k$  乗の線形結合で表される。同様に

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = g_0(x_1, 2x_2, x_3, \dots, x_n) - 2^k g_0(x_1, \dots, x_n)$$

とすれば  $g_1$  は  $x_2^k$  を含む項をもたない。再びこの操作を繰り返して  $x_1^{i_1}, x_2^{i_2}$  を含む項以外をもたないような多項式を得る。これを繰り返していけば、有限回のうちに  $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$  を作るができる。□

**補題 2.4.1.5.**  $A$  を  $\text{End}(V^{\otimes k})$  における  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$  の像とし、 $B$  を  $\text{End}(V^{\otimes k})$  における  $\mathbb{C}[\text{GL}(V)]$  の像とする。 $B = \text{End}_A(V^{\otimes k})$  が成り立つ。

*Proof.*  $\text{End}_A(V^{\otimes k}) = (\text{End}(V^{\otimes k}))^{\mathfrak{S}_n} = (\text{End}(V)^{\otimes k})^{\mathfrak{S}_n} = \text{Sym}^k(\text{End}(V))$  であるから補題 2.4.1.4 より、 $\text{End}_A(V^{\otimes k})$  は  $\{X \otimes \dots \otimes X\}_{X \in \text{End}(V)}$  によって生成される。 $\text{GL}(V) \subset \text{End}(V)$  なのだから、 $B \subset \text{End}_A(V^{\otimes k})$  は直ちに従う。 $g \in \text{GL}(V)$  に対して  $g \otimes \dots \otimes g$  が生成する  $\text{End}(V^{\otimes k})$  の部分代数を  $B'$  とする。任意の (正則とは限らない)  $X \in \text{End}(V)$  に対して  $X \otimes \dots \otimes X$  が  $B'$  に含まれることを示せばよい。 $X + tE$  は有限個の  $t$  を除いて正則である\*<sup>9</sup> から、 $X$  に収束する  $\text{GL}(V)$  の点列  $(X + t_i E)$  が存在する\*<sup>10</sup>。 $\text{End}(V^{\otimes k})$  は有限次元だから  $B'$  は閉部分空間であるので、

$$X^{\otimes k} = \lim_{i \rightarrow \infty} (X + t_i E)^{\otimes k} \in B'$$

が成り立つ\*<sup>11</sup> □

定理 2.4.1.2 を証明しよう

*Proof.* 補題 2.4.1.3 と補題 2.4.1.4, 補題 2.4.1.5 より、

$$W_\lambda(V) = V^{\otimes k} c_\lambda$$

は単純  $\text{GL}(V)$  加群であることが従う。ここで、 $V^{\otimes k}$  は左  $A = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$  加群とみなすこともできたことを思い出す。

$$\sigma \in \mathcal{H}_\lambda \implies \sigma^{-1} \in \mathcal{H}_\lambda$$

$$\tau \in \mathcal{V}_\lambda \implies \tau^{-1} \in \mathcal{V}_\lambda$$

が成り立つことに注意すると、

$$c_\lambda V^{\otimes k} = V^{\otimes k} c_\lambda$$

となることがわかる。

系 2.1.2.15 より、

$$V^{\otimes k} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_k} S_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} \text{Hom}_A(S_\lambda, V^{\otimes k})$$

\*<sup>9</sup> 行列式は  $t$  の多項式

\*<sup>10</sup> すなわち  $\text{GL}(V)$  は  $\text{End}(V)$  の稠密集合

\*<sup>11</sup> 表現は連続だからこのような極限操作が可能である。

となる。 $B = \text{GL}(V)$  加群として  $\text{Hom}_A(S_\lambda, V^{\otimes k}) \simeq W_\lambda(V)$  となることを示せばよい。 $S_\lambda = Ac_\lambda$  だから、 $\phi : \text{Hom}_A(S_\lambda, V^{\otimes k}) \rightarrow W_\lambda(V)$  を

$$\phi(f) = f(c_\lambda) = f(c_\lambda^2) = c_\lambda f(c_\lambda)$$

によって定める<sup>\*12</sup>。 $b \in \text{End}_A(V^{\otimes k}) = \text{GL}(V)$  に対して、

$$\phi(bf) = c_\lambda bf(c_\lambda) = b(c_\lambda f(c_\lambda)) = b\phi(f)$$

より  $\phi$  は左  $B$  加群の準同型である。 $S_\lambda = Ac_\lambda$ ,  $W_\lambda(V) = c_\lambda V^{\otimes k}$  より、 $\phi$  は全単射である。  $\square$

**系 2.4.1.6.**  $\lambda \in \mathcal{P}_k$  に対して、 $d_\lambda = \dim_{\mathbb{C}} S_\lambda$  とおく。 $\text{GL}(V)$  の表現として

$$V^{\otimes k} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_k} W_\lambda(V)^{\otimes d_\lambda}$$

が成り立つ。

**例 2.4.1.7.**  $\dim V = n$  とする。 $\lambda$  が  $n$  行よりも長い Young 図形るとき  $W_\lambda(V) = 0$  となる。 $\lambda$  の共役 Young 図形を  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_s^*)$ ,  $\lambda_1^* > n$  とおく。このとき、

$$b_\lambda = \left( \sum_{\sigma_s \in \mathfrak{S}_{\lambda_s^*}} \text{sgn}(\sigma_s) \sigma_s \right) \cdots \left( \sum_{\sigma_1 \in \mathfrak{S}_{\lambda_1^*}} \text{sgn}(\sigma_1) \sigma_1 \right)$$

と書くことができる。 $\tilde{b}_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\lambda_1^*}} \text{sgn}(\sigma) \sigma_1$  とする。

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}, \text{ のとき } b_\lambda = \left( \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_2} \text{sgn}(\tau) \tau \right) \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \text{sgn}(\sigma) \sigma \right), \tilde{b}_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \text{sgn}(\sigma) \sigma$$

$V^{\otimes k}$  を  $\lambda$  の各箱に  $V$  の元が書かれているものと同一視する。 $V$  の基底を  $e_1, \dots, e_n$  とすれば  $V^{\otimes k}$  の元は  $e_1, \dots, e_n$  を  $\lambda$  の各箱に配置した元で生成される。

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \text{ のとき } V^{\otimes k} = \left\langle \begin{array}{|c|c|} \hline e_{i_1} & e_{i_5} \\ \hline e_{i_2} & e_{i_6} \\ \hline e_{i_3} & \\ \hline e_{i_4} & \\ \hline \end{array} \right\rangle$$

このとき、 $\lambda_1^* > n$  より、 $e_{i_1}, \dots, e_{i_{\lambda_1^*}}$  には必ず重複がある。よって

$$\tilde{b}_\lambda(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\lambda_1^*}}) = 0$$

だから、 $b_\lambda V^{\otimes k} = 0$  である。

<sup>\*12</sup>  $c_\lambda$  は適当にスカラー倍することでべき等元であった

例 2.4.1.8.  $k = 3, n > k$  とする。  $\lambda =$ 


 として

$$V^{\otimes 3} = \text{Sym}^3(V) \oplus (S_\lambda \boxtimes W_\lambda(V)) \oplus \text{Alt}^3(V)$$

であり、 $\dim S_\lambda = 2$  であるので

$$\dim W_\lambda(V) = \frac{1}{2}(n^3 - \dim \text{Sym}^3(V) - \dim \text{Alt}^3(V)) = \frac{1}{12}(4n^3 - 3n^2 - 13n - 6)$$

## 2.4.2 一般線形群の表現に対する指標

前節で Weyl 表現という一般線形群の既約表現を構成したが、これらが互いに同型でないことは示していなかった。本節ではこれを示し、さらに表現の指標を導入する。指標は有限群の場合のようにある範囲での表現を特徴づけるものであり、一般線形群においても強力な道具となる。

**定義 2.4.2.1.**  $\rho : \text{GL}(V) \rightarrow \text{GL}(W)$  を表現とする。 $H$  を  $\text{GL}(V)$  の対角行列のなす部分群とする。 $\text{ch}_W : H \rightarrow \mathbb{C}$  を

$$\text{ch}_W(g) = \text{tr}(\rho(g))$$

によって定め、 $\rho$  の指標という。

例 2.4.2.2.  $\lambda = (k) \in \mathcal{P}_k, \dim_{\mathbb{C}} V = n > k$  とする。 $\text{ch}_\lambda = \text{ch}_{W_\lambda(V)}$  とすると、 $g \in H$  に対して、 $g$  の固有値を  $x_1, \dots, x_n$  とすると、

$$\text{ch}_\lambda(g) = h_k(x_1, \dots, x_n)$$

となる。実際  $g = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$  とおくと  $\text{Sym}^k(V)$  の基底  $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$  に対して

$$g^{\otimes k}(e_{i_1} \cdots e_{i_k}) = x_{i_1} \cdots x_{i_k} e_{i_1} \cdots e_{i_k}$$

である。

例 2.4.2.3. 同様に  $\lambda = (1^k)$  ならば、

$$\text{ch}_\lambda(g) = e_k(x_1, \dots, x_n)$$

である。

有限群の場合と同様、トレースの性質から次が従う。

**命題 2.4.2.4.**  $W, U$  を  $\text{GL}(V)$  の表現とする。

$$(i) \text{ch}_{W \oplus U} = \text{ch}_W + \text{ch}_U$$

$$(ii) \text{ch}_{W \otimes U} = \text{ch}_W \text{ch}_U$$

が成り立つ。

**定理 2.4.2.5.**  $\lambda \in \mathcal{P}_k, \dim_{\mathbb{C}} V = n$  とする。 $W_\lambda(V)$  の指標を  $\text{ch}_\lambda$  とおくと、 $g = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$  に対して

$$\text{ch}_\lambda(g) = s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$$

が成り立つ。

*Proof.*  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$  とする。補題 2.4.1.3 を  $M_\lambda = Aa_\lambda$  に用いて、

$$V^{\otimes k} a_\lambda \simeq V^{\otimes k} \otimes_A M_\lambda$$

$a_\lambda$  の定義から、

$$V^{\otimes k} a_\lambda = \text{Sym}^{\lambda_1}(V) \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} \text{Sym}^{\lambda_s}(V) = W_{(\lambda_1)}(V) \otimes \cdots \otimes W_{(\lambda_s)}(V)$$

となる。Young の規則 (系??) より

$$M_\lambda = S_\lambda \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} S_\mu^{\oplus k_{\lambda\mu}} = Ac_\lambda \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} Ac_\mu^{\oplus k_{\lambda\mu}}$$

したがって、

$$W_{(\lambda_1)}(V) \otimes \cdots \otimes W_{(\lambda_s)}(V) \simeq W_\lambda(V) \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} W_\mu(V)^{\oplus k_{\lambda\mu}}$$

両辺の指標をとれば

$$s_\lambda = \text{ch}_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} k_{\lambda\mu} \text{ch}_\mu$$

よって帰納法により従う。 □

**系 2.4.2.6.**  $W_\lambda(V) \simeq W_\mu(V)$  であることと  $\lambda = \mu$  は同値である。

*Proof.* 定理 2.4.2.5 より  $\lambda \neq \mu$  ならば指標が異なる。 □

**系 2.4.2.7.**  $W, U$  を  $\text{GL}(V)$  の表現で、ともに Weyl 表現の直和で表されるものとする。 $W \simeq U$  となるための必要十分条件はその指標が等しいことである。

*Proof.* Schur 多項式の一次独立性から従う。 □

定理 2.4.2.5 の証明中に現れた式を再掲しておく

**系 2.4.2.8** (Young の規則).

$$W_{(\lambda_1)}(V) \otimes \cdots \otimes W_{(\lambda_s)}(V) \simeq W_\lambda(V) \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} W_\mu(V)^{\oplus k_{\lambda\mu}}$$

が成り立つ。ただし  $k_{\lambda\mu}$  は Kostka 数である。

**系 2.4.2.9** (Littlewood-Richardson 規則). 2 つの Young 図形  $\lambda, \mu$  に対して、

$$W_\lambda(V) \otimes_{\mathbb{C}} W_\mu(V) \simeq \bigoplus_{\nu} W_\nu(V)^{\oplus \eta_{\lambda\mu}^\nu}$$

が成り立つ。ただし  $\eta_{\lambda\mu}^\nu$  は Littlewood-Richardson 数である。

*Proof.*  $W_\lambda(V) \otimes_{\mathbb{C}} W_\mu(V)$  が Weyl 表現の直和に表されることを示せばよい。 $\lambda \in \mathcal{P}_k, \mu \in \mathcal{P}_l$  とする。

$$\begin{aligned} W_\lambda(V) \otimes_{\mathbb{C}} W_\mu(V) &\simeq V^{\otimes k} c_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} V^{\otimes l} c_\mu \\ &\simeq V^{\otimes (k+l)}(c_\lambda \otimes c_\mu) \end{aligned}$$



ここで、 $c_\lambda \otimes c_\mu \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_k] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathfrak{S}_l] = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_l] \subset \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]$  である。 $c = c_\lambda \otimes c_\mu$  とおく。

$$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]c = \bigoplus_{\nu \in \mathcal{P}_{k+l}} S_\nu^{\oplus t_\nu}$$

とおけば<sup>\*13</sup>、補題 2.4.1.3 より

$$\begin{aligned} V^{\otimes(k+l)}c &\simeq V^{\otimes(k+l)} \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]} \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]c \\ &\simeq V^{\otimes(k+l)} \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]} \bigoplus_{\nu \in \mathcal{P}_{k+l}} S_\nu^{\oplus t_\nu} \\ &\simeq \bigoplus_{\nu \in \mathcal{P}_{k+l}} V^{\otimes(k+l)} \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]} \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]c_\nu^{\oplus t_\nu} \\ &\simeq \bigoplus_{\nu \in \mathcal{P}_{k+l}} W_\nu(V)^{\oplus t_\nu} \end{aligned}$$

□

---

<sup>\*13</sup> 実際は個の表現は  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]c = \text{Ind}_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k] \times \mathbb{C}[\mathfrak{S}_l]}^{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]} S_\lambda \boxtimes S_\mu = S_\lambda \circ S_\mu$  に他ならない。

## 第 3 章

# 数え上げ幾何学

数え上げ幾何学の古典的な問題として、次の問題を考える：

$$3 \text{ 次元空間中の与えられた } 4 \text{ 本直線すべてを通る直線は何本存在するか} \quad (3.1)$$

当然 4 本の直線の位置関係によって答えは変わるが、ある程度一般の状況においてはそれは一定の本数であることが知られており、その値を具体的に計算することができる。この計算方法は Schubert 計算と呼ばれており、現代的には Grassmann 多様体のコホモロジー環の構造を記述することと対応している。

### 3.1 射影空間

まずは、数え上げ問題の舞台となる射影空間について解説する。

**定義 3.1.0.1.**  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  上の同値関係  $\sim$  を

$$z \sim w \Leftrightarrow \text{ある } c \in \mathbb{C} \text{ が存在して } w = cz$$

と定義する。 $\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$  を  $n$  次元 (複素) 射影空間という。

射影空間を考える理由に次の 2 つがある。

- $\mathbb{P}^n$  における平行線は 1 点で交わる
- $\mathbb{P}^n$  における  $k$  次元平面は  $\mathbb{C}^{n+1}$  の  $k+1$  次元線形部分空間と 1 対 1 に対応する

これらのことを説明しよう。

## 付録 A

# Robinson-Schensted-Knuth 対応

Robinson-Schensted-Knuth 対応 (以下 RSK 対応と呼ぶ) とは、非負整数行列と、同じ形をもつ半標準タブローの組との間の 1 対 1 対応のことである。この付録では RSK 対応の証明はせず、主張の紹介と第 2 章で用いた Cauchy の等式 (補題 2.3.1.4) の証明を解説する。

**定義 A.0.0.1** (行挿入).  $T$  を形  $\lambda$  の半標準タブローとし、 $k$  を正の整数とする。次の帰納的な操作で得られる半標準タブローを  $T \leftarrow k$  と書く：

- (i)  $T$  の一行目の一番右の数が  $k$  以下なら、右端に  $k$  を追加したものを  $T \leftarrow k$  として操作を終了する。
- (ii)  $T$  の右端が  $k$  より真に大きいならば、 $T$  の一行目において  $k$  より大きいもののうち最も左にある箱を  $k$  で置き換える。またそのときもともと入っていた数を  $l$  とおく。
- (iii)  $T$  の二行目以降の部分タブローを  $T'$  とし、 $T' \leftarrow l$  と  $T$  の一行目を結合したものを  $T \leftarrow k$  として操作を終了する。

**定義 A.0.0.2.**  $A$  を非負整数行列とする。 $A = (a_{ij})$  において、次の操作で定まる  $2 \times n$  行列  $W$  を  $A$  の biword という。

- (i) 各成分  $a_{ij}$  に対して、 $a_{ij}$  個の列ベクトル  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$  を並べていった行列を  $W'$  とする
- (ii)  $W' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  において、 $v_1, v_2, \dots, v_n$  の第 1 成分を優先した辞書式順序に関して左から右に昇順に並び変えたものを  $W$  とする。

**例 A.0.0.3.**  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  のとき、

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である。

**定理 A.0.0.4** (RSK 対応). 非負整数行列  $A \in M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  に対して、次の操作で定まるタブローの組  $(P, Q)$  はどちらも半標準であり、 $P$  に書かれた数はたかだか  $n$ 、 $Q$  に書かれた数はたかだか  $m$  である。そしてこの対応は  $M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  から  $\mathcal{T}_n \times \mathcal{T}_m$  への全単射である。ここで  $\mathcal{T}_n$  はすべての Young 図形に対するたかだか  $n$  までの用いた半標準タブロー全体のなす集合である。

- (i)  $A$  の biword を  $W$  とする。  $P, Q = \emptyset$  として初期化する。
- (ii)  $W$  の各列ベクトル  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$  を左から右へ読んでいって、次の処理をする。
- $P$  を  $P \leftarrow j$  で置き換える。
  - $Q$  に対して、  $P \leftarrow j$  の行挿入で新しく追加された箱の場所に  $i$  を追加する。

また  $P, Q$  は同じ Young 図形を形にもつタブローである。

**例 A.0.0.5.** 上記の例において、  $A$  から定まる  $P, Q$  は

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & & & & \\ \hline \end{array}, \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 3 & & & & \\ \hline \end{array}$$

対応からわかるように、  $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$  とし  $P, Q$  のウェイトをそれぞれ  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $q = (q_1, \dots, q_m)$  とおくと

$$p_i = a_{1i} + \dots + a_{mi}, \quad q_j = a_{j1} + \dots + a_{jn} \quad (\text{A.1})$$

である。

**定理 A.0.0.6** (Cauchy の等式).

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) s_{\lambda}(y_1, \dots, y_m)$$

が成り立つ。ただし右辺の和はすべての Young 図形をわたる。

*Proof.*  $\mathcal{T}(\lambda)$  で形  $\lambda$  の半標準タブロー全体のなす集合とすれば、Schur 多項式はタブロー和に等しい (第 1 部参照) ので右辺の和は

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) s_{\lambda}(y_1, \dots, y_m) = \sum_{\lambda} \sum_{P \in \mathcal{T}_n(\lambda), Q \in \mathcal{T}_m(\lambda)} (x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}) (y_1^{q_1} \dots y_m^{q_m})$$

である。一方、左辺の式は

$$\begin{aligned} \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} &= \prod_{i,j} (1 + x_i y_j + (x_i y_j)^2 + \dots) \\ &= \sum_{A \in M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})} \prod_{i,j} (x_i y_j)^{a_{ji}} \\ &= \sum_{A \in M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})} \prod_i x_i^{a_{1i} + \dots + a_{mi}} \prod_j y_j^{a_{j1} + \dots + a_{jn}} \end{aligned}$$

と書くことができる。RSK 対応によって  $M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  と半標準タブローの組  $(P, Q)$  が 1 対 1 に対応し、このとき (A.1) がなりたつから、

$$\begin{aligned} \sum_{A \in M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})} \prod_i x_i^{a_{1i} + \dots + a_{mi}} \prod_j y_j^{a_{j1} + \dots + a_{jn}} &= \sum_{A \in M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})} \prod_i x_i^{p_i} \prod_j y_j^{q_j} \\ &= \sum_{\lambda} \sum_{P \in \mathcal{T}_n(\lambda), Q \in \mathcal{T}_m(\lambda)} (x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}) (y_1^{q_1} \dots y_m^{q_m}) \end{aligned}$$

よって示せた。 □

## 付録 B

# Wedderburn の構造定理

Wedderburn の構造定理は、半単純 Artin 環の分類に関する定理である。本節で環は乗法単位元をもつ必ずしも可換とは限らない環を指し、たんに環の上の加群といったら左加群を指しているとする。

**定義 B.0.0.1.** 環  $A$  が半単純であるとは任意の  $A$  加群  $M$  が半単純である、すなわち任意の  $M$  の部分加群が  $M$  の直和因子であることをいう。

**例 B.0.0.2.** 有限群  $G$  の体  $K$  上の群環  $K[G]$  は  $\text{ch}K$  と  $|G|$  が互いに素であるとき、またその時に限り半単純である (Maschke の定理)。

**定義 B.0.0.3.** 環  $A$  が左 Artin 環であるとは、任意の左イデアルの列

$$I_0 \supset I_1 \supset \cdots$$

に対して、ある番号  $n$  が存在して  $I_n = I_{n+1} = \cdots$  が成り立つことをいう。

**例 B.0.0.4.** 体  $K$  上の有限次元代数  $A$  は Artin 環である。特に有限群  $G$  の群環  $K[G]$  は Artin 環である。

**定理 B.0.0.5** (Wedderburn の構造定理). 次の条件は同値である。

- (i)  $A$  は半単純 Artin 環である
- (ii)  $A$  は左加群として半単純である
- (iii)  $A$  の左 Jacobson 根基が 0 である。
- (iv) 斜体  $D_i$  が存在して、

$$A \simeq \prod_i M_{n_i}(D_i)$$

が成り立つ。ただし  $M_{n_i}(D_i)$  は  $D_i$  を成分にもつ全行列環である。

## 参考文献

- [1] ヤング・タブロー
- [2] テンソル代数と表現論
- [3] 数え上げ幾何学講義
- [4] 代数学 2, 環と体とガロア理論
- [5] 代数入門
- [6] 有限群の線形表現
- [7] 環と加群のホモロジー代数的理論
- [8] Representation Theory: A First Course
- [9] Knapp, Anthony W. (2007), Advanced algebra
- [10] Symmetric Functions and Hall Polynomials
- [11] Enumerative Combinatorics
- [12] Permutations, matrices, and generalized Young tableaux.