第 I 部
Schur 多項式

1 Schur 多項式

1.1 対称多項式と交代多項式

定義 1.1.1. n 変数多項式 $f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ が対称多項式であるとは、任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して $\sigma f := f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \cdots, x_n)$ が成り立つことをいう。対称多項式全体のなす $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ の部分集合を $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ と書く。f が交代多項式であるとは、任意の置換 σ に対して $\sigma f := f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) f(x_1, \cdots, x_n)$ が成り立つことをいう。ただし sgn は置換の符号である。

例 1.1.2. $xy, x+y, x^2+y^2$ はいずれも $\mathbb{C}[x,y]$ の対称多項式であり、$x-y$ は交代多項式である。xy^2, $x+2y$ などは対称でも交代でもない

命題 1.1.3. $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ は $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ の部分環をなす

Proof. $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\sigma(f+g) = \sigma f + \sigma g, \qquad \sigma(f \cdot g) = \sigma f \cdot \sigma g$$

が成り立つことから従う。 □

例 1.1.4. 整数 $n > 1$ を固定する。非負整数列 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ に対して、ある置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が存在して

$$\beta = \sigma\alpha = (\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, \alpha_{\sigma^{-1}(n)})$$

となるとき、$\beta \sim \alpha$ と書く。広義単調減少な $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ に対して

$$m_\alpha = \sum_{\beta \sim \alpha} x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$$

と定めると、m_α は対称式である。

$$m_{2,1}(x,y) = x^2y + xy^2$$
$$m_{2,2,0}(x,y,z) = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$$

例 1.1.5. 整数 $n > 1$ を固定する。$k = 1, 2, \cdots, n$ に対して p_k を

$$p_k = m_{k,0,\cdots,0} = x_1^k + \cdots + x_n^k$$

によって定義する。p_k はもちろん対称多項式である

例 1.1.6 (基本対称式・完全対称式). 整数 $n > 1$ を固定する。$k = 1, 2, \cdots, n$ に対して、$u_k = (1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ を最初の k 個が 1 で、残りが 0 の数列とする。また

$$\mathcal{P}_{k,n} = \left\{ (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \;\middle|\; \alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n, \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k \right\}$$

とする。

$$e_k = m_{u_k} = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$
$$h_k = \sum_{\alpha \in P_{k,n}} m_\alpha = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

として、e_k を k 次基本対称式, h_k を k 次完全対称式という。

$$\begin{aligned}
&e_1 = x_1 + \cdots + x_n, \quad e_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots, \quad e_n = x_1x_2\cdots x_n \\
&h_1 = x_1 + \cdots + x_n, \quad h_2 = x_1^2 + x_1x_2 + \cdots, \quad h_n = x_1^n + x_1^{n-1}x_2 + \cdots \\
&h_{n+1} = x_1^{n+1} + x_1^n x_2 + \cdots
\end{aligned}$$

n 変数の基本対称式は $e_1, \cdots, e_n$ だけだが、完全対称式は無限に存在することに注意。ここで定義したさまざまな対称多項式は、対称多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ における良い性質をもっている。

命題 1.1.7. $\{m_\alpha \mid \alpha = (\alpha_1 \ge \cdots \ge \alpha_n), \alpha_n \ge 0\}$ は $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ の基底をなす

Proof. $\{m_\alpha \mid \alpha = (\alpha_1 \ge \cdots \ge \alpha_n), \alpha_n \ge 0\}$ が一次独立であることは、$\alpha \ne \beta$ ならば m_α, m_β は異なる単項式を含むことからわかる。よって $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ を生成することを示す。対称多項式

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i_1, \cdots, i_n} c_{i_1, \cdots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

について、任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\begin{aligned}
f(x_1, \cdots, x_m) &= f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{i_1, \cdots, i_n} c_{i_1, \cdots, i_n} x_{\sigma(1)}^{i_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{i_n} \\
&= \sum_{i_1, \cdots, i_n} c_{i_1, \cdots, i_n} x_1^{i_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots x_n^{i_{\sigma^{-1}(n)}} \\
&= \sum_{i_1, \cdots, i_n} c_{i_{\sigma(1)}, \cdots, i_{\sigma(n)}} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}
\end{aligned}$$

よって

$$c_{i_1, \cdots, i_n} = c_{i_{\sigma(1)}, \cdots, i_{\sigma(n)}}$$

がなりたつ。したがって

$$f = \sum_\alpha c_\alpha m_\alpha$$

となることがわかる。 □

定理 1.1.8 (対称式の基本定理)**.** 任意の対称多項式は基本対称式の多項式で表される。すなわち

$$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{C}[e_1, \cdots, e_n]$$

が成り立つ。

Proof. 命題 1.1.7 より、m_α が $e_1, \cdots, e_n$ の多項式で表されることを示せばよい。$\mathcal{P}_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_{k,n}$ とおく。$\mathcal{P}_n$ には辞書式順序による全順序を入れておく。$\alpha \in \mathcal{P}_n$ に関する帰納法によって示そう。$\mathcal{P}_n$ の最小元は $(1, 0, \cdots, 0)$ であり、

$$m_{1,0,\cdots,0} = e_1$$

であるからよい。$\alpha = (\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n) \in \mathcal{P}_n$ を $\alpha > (1, 0, \cdots, 0)$ であるとする。

$$g(x_1, \cdots, x_n) = m_\alpha - e_n^{\alpha_n} e_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n} \cdots e_2^{\alpha_2-\alpha_3} e_1^{\alpha_1-\alpha_2}$$

とおく。g は対称多項式だが、

$$g = \sum_\beta m_\beta$$

と表した時、このときすべての β は α より真に小さいことを示そう。$h = e_n^{\alpha_n} e_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n} \cdots e_2^{\alpha_2-\alpha_3} e_1^{\alpha_1-\alpha_2}$ とおく。まず、

$$e_n^{\alpha_n} = x_1^{\alpha_n} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

より h を展開したときの単項式の指数はすべて $(\alpha_n, \cdots, \alpha_n)$ 以上であることがわかる。次に

$$e_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n} = \left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{n-1} \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_{n-1}} \right)^{\alpha_{n-1}-\alpha_n}$$

より h の単項式の指数で最も大きいものは

$$(\alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$$

以上であることがわかる。このことを繰り返していけば、h の指数最大の単項式は

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

になることがわかる。またその係数が 1 であることも従う。よって $\beta < \alpha$ であるから、帰納法の仮定により主張が成立する。 $\square$

例 1.1.9. 完全対称式は対称多項式なので定理 1.1.8 より基本対称式の多項式である。実際

$$\begin{aligned} h_1 &= e_1 \\ h_2 &= e_1^2 - e_2 \\ h_3 &= e_1^3 + e_3 - 2e_1e_2 \end{aligned}$$

一般に

$$h_k = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_k \\ 1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{k-1} \\ 0 & 1 & e_1 & \cdots & e_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e_1 \end{vmatrix}$$

が成り立つことがわかる。

定義 1.1.10. $\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$, $a_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して多項式 $A_\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ を

$$A_\alpha = \det((x_i^{a_j}))$$

によって定める。行列式の交代性から、A_α は交代多項式である。よって、α に重複があるなら $A_\alpha = 0$ となる。

例 1.1.11. $\delta = (n-1, n-2, \cdots, 1, 0)$ のとき

$$A_\delta = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

は Vandermonde 行列式に他ならない。したがって

$$A_\delta = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

命題 1.1.12. 任意の交代多項式は A_δ で割り切れる

Proof. $f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ を交代多項式とする。交代性から $i < j$ のとき f は x_i に x_j を代入すると 0 になる。よって f は $x_i - x_j$ で割り切れる。$x_i - x_j$ は既約多項式であり、(i, j), (k, l) が異なるならば $x_i - x_j$, $x_k - x_l$ は互いに素である。$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ は UFD であるので f は A_δ で割り切れる。 □

1.2 Schur 多項式

定義 1.2.1 (Schur 多項式)**.** $\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$, $a_1 > \cdots > a_n \geq 0$ に対して

$$s_\alpha = \frac{A_\alpha}{A_\delta}$$

を Schur 多項式という。

命題 1.1.12 より、A_α は A_δ で割り切れるので s_α は多項式である。また任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\sigma s_\alpha = \frac{\sigma A_\alpha}{\sigma A_\delta} = \frac{\mathrm{sgn}(\sigma) A_\alpha}{\mathrm{sgn}(\sigma) A_\delta} = s_\alpha$$

となるから Schur 多項式は対称多項式である。

例 1.2.2. $\alpha = (4, 2, 0)$ とする。

$$\begin{aligned} s_\alpha = \frac{\begin{vmatrix} x_1^4 & x_1^2 & 1 \\ x_2^4 & x_2^2 & 1 \\ x_3^4 & x_3^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^1 & 1 \\ x_2^2 & x_2^1 & 1 \\ x_3^2 & x_3^1 & 1 \end{vmatrix}} &= \frac{(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 - x_3^2)(x_2^2 - x_3^2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} \\ &= (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3) = e_1 e_2 \end{aligned}$$

Schur 多項式について重要な命題が次の定理である。

定理 1.2.3. $n>0$ を整数とする。Schur 多項式の集合 $\{s_\alpha \mid \alpha=(a_1,\cdots,a_n), a_1>\cdots>a_n\geq 0\}$ は対称多項式のなす環 $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ の基底をなす

Proof. 次の補題を示す。

補題 1.2.4. $\mathcal{S}=\{(a_1,\cdots,a_n) \mid a_1>\cdots>a_n\geq 0\}$ とする。交代多項式全体のなすベクトル空間は $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}}$ を基底にもつ

Proof. $f(x_1,\cdots,x_n)$ を交代多項式とする。

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i_1,\cdots,i_n} c_{i_1,\cdots,i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$$

とおく。任意の置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対して

$$\begin{aligned}
f(x_1,\cdots,x_n) &= \mathrm{sgn}(\sigma) f(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{i_1,\cdots,i_n} \mathrm{sgn}(\sigma) c_{i_1,\cdots,i_n} x_{\sigma(1)}^{i_1}\cdots x_{\sigma(n)}^{i_n} \\
&= \sum_{i_1,\cdots,i_n} \mathrm{sgn}(\sigma) c_{i_{\sigma(1)},\cdots,i_{\sigma(n)}} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}
\end{aligned}$$

がなりたつ。よって

$$\mathrm{sgn}(\sigma) c_{i_{\sigma(1)},\cdots,i_{\sigma(n)}} = c_{i_1,\cdots,i_n} \tag{1}$$

これにより、$(i_1,\cdots,i_n)$ に重複がある場合

$$c_{i_1,\cdots,i_n}=0$$

であることがわかる。よって

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in\mathcal{S}}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} c_{i_{\sigma(1)},\cdots,i_{\sigma(n)}} x_1^{i_{\sigma(1)}}\cdots x_n^{i_\sigma(n)}$$

と書くことができる。再び (2) より

$$\begin{aligned}
f(x_1,\cdots,x_n) &= \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in\mathcal{S}}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} c_{i_{\sigma(1)},\cdots,i_{\sigma(n)}} x_1^{i_{\sigma(1)}}\cdots x_n^{i_\sigma(n)} \\
&= \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in\mathcal{S}}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) c_{i_1,\cdots,i_n} x_1^{i_{\sigma(1)}}\cdots x_n^{i_\sigma(n)} \\
&= \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in\mathcal{S}} c_{i_1,\cdots,i_n} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) x_1^{i_{\sigma(1)}}\cdots x_n^{i_\sigma(n)} \\
&= \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in\mathcal{S}} c_{i_1,\cdots,i_n} A_{(i_1,\cdots,i_n)}
\end{aligned}$$

$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}}$ が一次独立であることは $\alpha\neq\beta$ ならば A_α と A_β は異なる単項式を含むことからわかる。 □

定理の証明に戻る。f が対称多項式ならば fA_δ は交代多項式であるから、補題により

$$fA_\delta=\sum_{\alpha\in\mathcal{S}} c_\alpha A_\alpha$$

両辺を A_δ で割って

$$f = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}} c_\alpha \frac{A_\alpha}{A_\delta} = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}} c_\alpha s_\alpha$$

一意的に表せることは $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{S}}$ が一次独立であることからわかる。 □

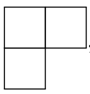
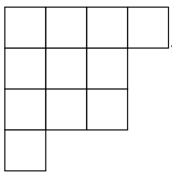
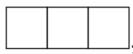
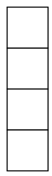
定理 1.2.3 より、2 つの Schur 多項式の積は Schur 多項式の線形結合であることがわかる。次節ではその係数を記述する Littlewood-Richardson 規則について解説する。

2 Littlewood-Richardson 規則

2.1 Young 図形

定義 2.1.1. 整数列 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots)$, $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ に対して、1 行目に λ_1 個の箱を書き、2 行目に λ_2 個の箱を書き... と続けてできる図形を Young 図形といい、λ で表す。ある n 以降 $\lambda_n = \lambda_{n+1} = \cdots = 0$ となる場合は、0 を省略して $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1})$ と書くこともある。箱が 1 つもないものも Young 図形であるとし、これを $\varnothing$ で表す。また $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$ とし、これを λ の大きさという。

例 2.1.2.

$(2,1) =$ , $(4,3,3,1) =$ , $(3) =$ , $(1,1,1,1) =$ 

定義 2.1.3. 2 つの Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots)$, $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n, \cdots)$ に対して、

$$\lambda \leq \mu \Leftrightarrow \lambda_1 \leq \mu_1, \cdots, \lambda_n \leq \mu_n, \cdots$$

と定義する。このとき λ は μ の部分 Young 図形であるという。

定義 2.1.4. n 行からなる Young 図形の全体を $\mathcal{Y}_n$ とする。すなわち

$$\mathcal{Y}_n = \{\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n, 0) \mid \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0\}$$

である。また、$(m-n, m-n, \cdots, m-n)$, ($m-n$ が n 個、つまり $n \times (m-n)$ 長方形) の部分 Young 図形の全体を $\mathcal{Y}_n(m)$ とする。

定義より

$$\mathcal{Y}_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} \mathcal{Y}_n(k)$$

が成り立つ。

Young 図形と Schur 多項式との関係は次の命題で表される

命題 2.1.5. $\mathcal{S} = \{(a_1, \cdots, a_n) \mid a_1 > \cdots > a_n \geq 0\}$ と $\mathcal{Y}_n$ には次の全単射が存在する。

$$\mathcal{Y}_n \ni \lambda \mapsto \alpha = \lambda + \delta \in \mathcal{S}$$

ただし $\delta = (n-1, n-2, \cdots, 1, 0)$ である

Proof. $\lambda \in \mathcal{Y}_n$ は単調減少であるから、実際に $\lambda + \delta \in \mathcal{S}$ であることはわかる。逆に任意の $\alpha \in \mathcal{S}$ に対して、δ が $\mathcal{S}$ の辞書式順序に関する最小元であることから $\alpha - \delta \in \mathcal{Y}_n$ であることもわかり、全単射であることが従う。 □

よって Young 図形 λ に対応する Schur 多項式を $s_\lambda = \frac{A_{\lambda+\delta}}{A_\delta}$ と書くことにする。

定義 2.1.6. $\lambda \in \mathcal{Y}_n$ に対して、λ の各箱に次の条件が満たされるように数字を書き入れたものを形 λ の半標準タブローという。

- 各数字は 1 以上 n 以下
- 各行は左から右に広義単調増加
- 各列は上から下に狭義単調増加

形 λ の半標準タブロー全体のなす集合を $\mathcal{T}(\lambda)$ と書く。半標準タブロー $T \in \mathcal{T}(\lambda)$ について、T に数字 $k \in \{1, \cdots, n\}$ が t_k 個書かれているとき $\omega_k(T) = t_k$ のように書き、

$$\omega(T) = (t_1, \cdots, t_n)$$

とし、これを T のウェイトと呼ぶ。

例 2.1.7. 形 $(2,1) = \ydiagram{2,1} \in \mathcal{Y}_3$ の半標準タブローは次の通りである

$$\mathcal{T}((2,1)) = \{ \quad \begin{ytableau} 1 & 1 \\ 2 \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} 1 & 2 \\ 2 \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} 1 & 1 \\ 3 \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} 1 & 3 \\ 3 \end{ytableau}$$
$$\begin{ytableau} 1 & 2 \\ 3 \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} 1 & 3 \\ 2 \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} 2 & 2 \\ 3 \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} 2 & 3 \\ 3 \end{ytableau} \quad \}$$

しかし次などは半標準タブローではない

$$\begin{ytableau} 1 & 1 \\ 1 \end{ytableau}, \qquad \begin{ytableau} 2 & 1 \\ 3 \end{ytableau}$$

定義 2.1.8. Young 図形 $\lambda \in \mathcal{Y}_n$ に対して次で定まる多項式を λ のタブロー和という。

$$T_\lambda = \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} x_1^{\omega_1(T)} \cdots x_n^{\omega_n(T)}$$

例 2.1.9. 例 2.1.7 より、

$$T_{(2,1)} = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + 2x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 = e_1 e_2 = s_{(2,1)}$$

2.2 Littlewood-Richardson 規則

定理 2.2.1 (Littlewood-Richardson 規則)**.** Young 図形 $\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_n$ について

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu \in \mathcal{Y}_n} \eta_{\lambda\mu}^{\nu} s_\nu$$

とおいたとき、

$$\eta^{\nu}_{\lambda\mu} = \#\{T \in \mathcal{T}(\mu) \mid T\text{は }\lambda\text{-good であり、}\omega(T) = \nu - \lambda\}$$

が成り立つ。係数 $\eta^{\nu}_{\lambda\mu}$ を Littlewood-Richardson 数と呼ぶ。

ここで $T \in \mathcal{T}(\mu)$ が λ-good であるとは、次の条件を満たすことをいう。T に書かれている数字を上から下、右から左へ読んでいったときにできる数字の並びを $c(T)$ とする。

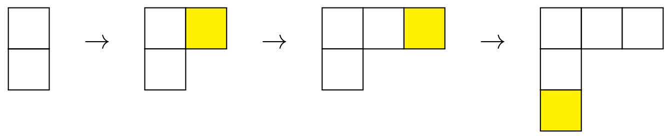
$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&1&2&2\\\hline 3&3&3&4\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array} \qquad \to \qquad c(T) = 2423135134$$

$c(T)_j$ を $c(T)$ の左から j 番目までの部分列とするとき

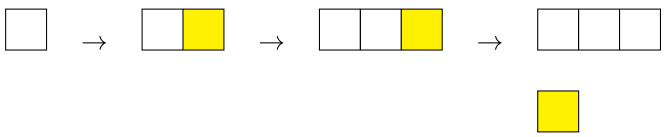
$$\lambda + \omega(c(T)_j) \in \mathcal{Y}_n, \qquad \forall j = 1, \cdots, |\mu|$$

が成り立つとき、T は λ-good であるという。すなわち、「T の右上から左下へ数字を読んでいくとき、読まれた数に対応する λ の行に箱を追加する」という操作を続けて各ステップで Young 図形であることが保たれるということである。

例 2.2.2. $T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$ は $\begin{array}{|c|}\hline \\\hline \\\hline\end{array}$ -good である。実際 $c(T) = 113$ であり



一方で T は $\begin{array}{|c|}\hline \\\hline\end{array}$ -good ではない。


は Young 図形でない

例 2.2.3. $\varnothing$-good であるような形 μ の半標準タブローは 1 行目がすべて 1, 2 行目がすべて 2, ... というものただ一つである。この半標準タブローを μ^{st} と書く。

T が $\varnothing$-good であるとする。$\varnothing$ に箱を 1 つ追加して Young 図形になるためには第 1 行目に追加しなければならない。よって T の一番右上には 1 が入っており、半標準タブローの行単調性から 1 行目はすべて 1 である。半標準タブローの列単調性から 2 行目の一番右は 2 以上が入っているはずであり、3 より大きければ Young 図形ができないので 2 である。よって行単調性から 2 行目はすべて 2 である。以下同様にして k 行目に入っている数字はすべて k であることがわかる。

例 2.2.4. $\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline &\\\hline \\\cline{1-1}\end{array} \in \mathcal{Y}_2$ とし、s^2_λ を Schur 多項式の線形結合として表そう。λ-good な形 λ の半標準タブローは

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}, \qquad T_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$$

ですべてである。それぞれのウェイトは

$$\omega(T_1)=(2,1),\quad \omega(T_2)=(1,2)$$

定理 2.2.1 より

$$s_\lambda^2 = s_{4,2}+s_{3,3}$$

である。実際、定義より

$$s_\lambda=\frac{\begin{vmatrix}x^3 & x\\ y^3 & y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x & 1\\ y & 1\end{vmatrix}}=\frac{x^3y-xy^3}{x-y}=xy(x+y),\qquad s_\lambda^2=x^4y^2+2x^3y^3+x^2y^4$$

$$s_{4,2}=\frac{\begin{vmatrix}x^5 & x^2\\ y^5 & y^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x & 1\\ y & 1\end{vmatrix}}=\frac{x^5y^2-x^2y^5}{x-y}=x^2y^2(x^2+xy+y^2)=x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4$$

$$s_{3,3}=\frac{\begin{vmatrix}x^4 & x^3\\ y^4 & y^3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x & 1\\ y & 1\end{vmatrix}}=\frac{x^4y^3-x^3y^4}{x-y}=x^3y^3$$

で確かに正しい。

定理 2.2.1 の証明のあらすじを述べよう。ポイントになるのが次の等式 (補題 2.2.6) である：

$$A_{\lambda+\delta}T_\mu=\sum_{T\in\mathcal{T}(\mu)}A_{\lambda+\omega(T)+\delta}$$

この等式はタブロー和 T_μ が対称多項式であること (命題 2.2.5) から示される。右辺に関して、T が λ-good でない項たちは互いにキャンセルされることが示され (補題 2.2.7)、結局

$$A_{\lambda+\delta}T_\mu=\sum_{T:\lambda\text{-good}}A_{\lambda+\omega(T)+\delta} \tag{2}$$

ここで、$\lambda=\varnothing$ の場合を考えると例 2.2.3 より

$$A_\delta T_\mu = A_{\omega(\mu^{st})+\delta}$$

両辺を A_δ で割れば

$$T_\mu=\frac{A_{\omega(\mu^{st})+\delta}}{A_\delta}=\frac{A_{\mu+\delta}}{A_\delta}=s_\mu$$

すなわち、タブロー和は Schur 多項式と等しいということが導かれる。再び一般の λ に対し式 (3) の両辺を A_δ で割って

$$s_\lambda s_\mu=\sum_{T:\lambda\text{-good}}s_{\lambda+\omega(T)}$$

これより主張が従う。

あらすじで用いた命題・等式を示そう。

命題 2.2.5. タブロー和 T_λ は対称多項式である。

Proof. 対称群は隣り合う数字の互換 $\sigma = (k-1, k)$, $k = 2, \cdots, n$ によって生成されるから、

$$\sigma T_\lambda = T_\lambda$$

を証明すればよい。ポイントになるのは半標準タブローの集合 $\mathcal{T}(\lambda)$ 上の対合[*1] ι であって

$$\omega(\iota(T)) = \sigma(\omega(T)) \tag{3}$$

をみたすものの存在である。ここで、

$$\sigma(\omega(T)) = (\omega_{\sigma^{-1}(1)}(T), \cdots, \omega_{\sigma^{-1}(n)}(T))$$

である。このような ι が構成できれば、

$$\begin{aligned}
\sigma T_\lambda &= \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} x_{\sigma(1)}^{\omega_1(T)} \cdots x_{\sigma(n)}^{\omega_n(T)} \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} x_1^{\omega_{\sigma^{-1}(1)}(T)} \cdots x_n^{\omega_{\sigma^{-1}(n)}(T)} \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} x_1^{\omega_1(\iota(T))} \cdots x_n^{\omega_n(\iota(T))} \\
&= T_\lambda
\end{aligned}$$

となり対称性が従う。最後の等式は ι が全単射であることによる。

このような ι は次のように構成される。まず条件 (4) は、半標準タブロー T と $\iota(T)$ は書かれている $k-1$ と k の数が逆転した関係にある、ということを意味している。最初に T が一行の Young 図形からなる場合を考えよう。半標準タブローの単調性から $k-1$ か k の書かれている部分はひとつながりの帯領域をなしており、その長さは $\omega_{k-1}(T) + \omega_k(T)$ である。よってこの帯領域の数字を、左 $\omega_k(T)$ 個の箱に $k-1$, 残りの $\omega_{k-1}(T)$ 個の箱に k を入れるように変更したものを $\iota(T)$ とすれば、これは条件 (4) を満たす半標準タブローになる。

$$T = \cdots \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline k-2 & k-1 & k-1 & k & k & k & k+1 \\ \hline\end{array} \cdots \quad \to \quad \iota(T) = \cdots \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline k-2 & k-1 & k-1 & k-1 & k & k & k+1 \\ \hline\end{array} \cdots$$

また、この場合に $\iota^2(T) = T$ が成立していることもわかる。

一般の半標準タブロー T に対しては一行の場合の操作を拡張することで得られる。まず、T の箱が自由であることを

- 箱に k が入っており、上の箱は $k-1$ より真に小さい
- 箱に $k-1$ が入っており、下の箱は k より真に大きいか下に箱がない

のどちらかを満たしていることと定義する。例えば $k = 4$ において

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 5 \\ \cline{1-4} 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

黄色の箱は自由であり、緑の箱は自由でない。不自由な箱は数字を入れ替えると単調性が崩れるので、入れ替えることができないという意味で不自由である。したがって数字の入れ替えをするには、自由な箱のみを考えればよい。重要なこととして、

[*1] 集合 X 上の対合とは写像 $\iota : X \to X$ であって $\iota^2 = \mathrm{id}_X$ をみたすものをいう

自由な箱の全体はいくつかの帯領域をなし、さらに帯は各行にたかだか 1 つである。

実際

- $k-1$ が書かれている箱が自由なら、その右にある $k-1$ の書かれた箱はすべて自由である。なぜなら半標準タブローの行単調性から、その下にある箱はすべて k より真に大きいからである。
- k が書かれている箱が自由なら、その左にある k の書かれた箱はすべて自由である。なぜなら半標準タブローの行単調性から、その上にある箱はすべて $k-1$ より真に小さいからである。

より、各行に帯領域はたかだか一つである。そこで各帯領域に対して、1 行の場合の入れ替え操作を行った半標準タブローを $\iota(T)$ と置けば、$\iota(T)$ は条件 (4) を満たす。なぜなら、不自由な箱は $k-1$ が書かれているものと k が書かれているもので同数あり、1 行の場合に条件 (4) は満たされているからである。また半標準タブローの列単調性から $\iota(T)$ と T で箱の自由性は保たれるので $\iota^2(T)=T$ であることもわかる。また、もし T に自由な箱が存在しない場合は $\iota(T)=T$ とする。これで構成できた。

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 5 \\ \cline{1-4} 5 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \to \quad \iota(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 5 \\ \cline{1-4} 5 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

□

補題 2.2.6. $\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_n$ に対して
$$A_{\lambda+\delta} T_\mu = \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)} A_{\lambda+\omega(T)+\delta}$$
が成り立つ。

Proof. $\mathrm{Alt}_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma$ とおく (これは交代化作用素と呼ばれる)。交代化作用素と対称多項式をかけることは可換である。実際、$f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$, $g \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ に対し
$$\begin{aligned} \mathrm{Alt}_n(fg) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma(fg) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma f \cdot \sigma g \\ &= f \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma g \\ &= f \cdot \mathrm{Alt}_n(g) \end{aligned}$$
である。
$$A_{\lambda+\delta} = \mathrm{Alt}_n(x_1^{\lambda_1+\delta_1} \cdots x_n^{\lambda_n+\delta_n})$$

だから命題 2.2.5 より

$$
\begin{aligned}
A_{\lambda+\delta}T_\mu &= \mathrm{Alt}_n(T_\mu \cdot x_1^{\lambda_1+\delta_1}\cdots x_n^{\lambda_n+\delta_n}) \\
&= \mathrm{Alt}_n\left(\sum_{T\in\mathcal{T}(\mu)} x_1^{\lambda_1+\omega_1(T)+\delta_1}\cdots x_n^{\lambda_n+\omega_n(T)+\delta_n}\right) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sum_{T\in\mathcal{T}(\mu)} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)}^{\lambda_1+\omega_1(T)+\delta_1}\cdots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n+\omega_n(T)+\delta_n} \\
&= \sum_{T\in\mathcal{T}(\mu)}\sum_{\sigma\in(S)_n} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)}^{\lambda_1+\omega_1(T)+\delta_1}\cdots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n+\omega_n(T)+\delta_n} \\
&= \sum_{T\in\mathcal{T}(\mu)} A_{\lambda+\omega(T)+\delta}
\end{aligned}
$$

□

補題 2.2.7. $\lambda,\mu\in\mathcal{Y}_n$ に対して、形 μ の半標準タブローで λ-good でないものを λ-bad と呼び、その全体を $\mathcal{T}(\mu)^{\lambda-bad}$ とおく。このとき

$$\sum_{T\in\mathcal{T}(\mu)^{\lambda-bad}} A_{\lambda+\omega(T)+\delta} = 0$$

が成り立つ。

Proof. この証明においてもポイントになるのが $\mathcal{T}(\mu)^{\lambda-bad}$ 上の対合 ι であって各 $T\in\mathcal{T}(\mu)^{\lambda-bad}$ に対してある k が存在して $\sigma=(k-1,k)$ に対して

$$\lambda+\omega(\iota(T))+\delta = \sigma(\lambda+\omega(T)+\delta) \tag{4}$$

をみたすものの存在である。このような ι が構成されれば、$A_{\lambda+\omega(T)+\delta}$ たちはペアごとに打ち消される。実際、

$$
\begin{aligned}
\sum_{T\in\mathcal{T}(\mu)^{\lambda-bad}} A_{\lambda+\omega(T)+\delta} &= \frac{1}{2}\sum_{T\in\mathcal{T}(\mu)^{\lambda-bad}}(A_{\lambda+\omega(T)+\delta}+A_{\lambda+\omega(\iota(T))+\delta}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{T\in\mathcal{T}(\mu)^{\lambda-bad}}(A_{\lambda+\omega(T)+\delta}+A_{\sigma(\lambda+\omega(T)+\delta)}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{T\in\mathcal{T}(\mu)^{\lambda-bad}}(A_{\lambda+\omega(T)+\delta}-A_{\lambda+\omega(T)+\delta}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(5) をみたす ι を構成するために、条件 (5) が成り立つための必要条件から考察していく。(5) が成り立つには

$$\lambda_k+\omega_k(\iota(T))+\delta_k = \lambda_{k-1}+\omega_{k-1}(T)+\delta_{k-1}$$

したがって

$$\omega_k(\iota(T)) = \omega_{k-1}(T)+(\lambda_{k-1}-\lambda_k)+1 \tag{5}$$

となることが必要である。この右辺の値は、λ の k 行目にいくつ箱を追加すると Young 図形でなくなるか、ということを表していることに注意する。このような k と $\iota(T)$ をみつけたいのである。

そこで、

$$\lambda+\omega(c(T)_j)\notin\mathcal{Y}_n$$

を満たす最小の j をとってこよう。これは λ-bad の定義から必ず存在する。そして j に対応する箱に入っている数字を k とおく。すなわち、j ステップ目で k 行目に箱を追加すると初めて Young 図形でなくなるとする。またこの箱を悪い箱と呼ぶことにする。このとき

$$\omega_k(c(T)_j) = \omega_{k-1}(c(T)_j) + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) + 1 \tag{6}$$

が成り立つ。ここで、T を悪い箱よりも左側にある部分 T_1 と悪い箱を含む右側の部分 T_2 に分割する。例えば

$$T = \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & *(yellow) 4 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \end{ytableau} \quad \text{は} \quad \begin{ytableau} \ & \ \end{ytableau} \quad \text{-bad}$$

においては、黄色い箱が悪い箱で

$$T_1 = \begin{ytableau} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{ytableau}, \qquad T_2 = \begin{ytableau} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ *(yellow) 4 & 4 \\ 5 \end{ytableau}$$

である。すると、半標準タブローの列単調性から悪い箱の下にある箱には $k+1$ 以上しか存在しないから、

$$\omega_k(c(T)_j) = \omega_k(T_2), \quad \omega_{k-1}(c(T)_j) = \omega_{k-1}(T_2)$$

よって (7) は

$$\omega_k(T_2) = \omega_{k-1}(T_2) + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) + 1$$

と書き換えることができる。$\iota(T)$ の満たすべき必要条件 (6) は

$$\begin{aligned} \omega_k(\iota(T)) &= \omega_{k-1}(T) + (\lambda_{k-1} + \lambda_k) + 1 \\ \omega_k(\iota(T_1)) + \omega_k(\iota(T_2)) &= \omega_{k-1}(T_1) + \omega_{k-1}(T_2) + (\lambda_{k-1} + \lambda_k) + 1 \end{aligned}$$

となるが、$\iota(T_2) = T_2$ であると仮定すれば

$$\begin{aligned} \omega_k(\iota(T_1)) + \omega_k(T_2) &= \omega_{k-1}(T_1) + \omega_{k-1}(T_2) + (\lambda_{k-1} + \lambda_k) + 1 \\ \omega_k(\iota(T_1)) &= \omega_{k-1}(T_1) \end{aligned}$$

結局、$\iota(T)$ は次のように定義すればよいであろうことがわかる。

$\iota(T)$ は T_1 に命題 2.2.5 で定義した対合を施し、T_2 には何もしない

$$T = \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & *(yellow) 4 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \end{ytableau} \quad \to \quad \iota(T) = \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & *(yellow) 4 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \end{ytableau}$$

示すべきことは

1. 実際に $\iota(T)$ が λ-bad な半標準タブローであること
2. $\iota(T)$ が (5) をみたすこと

である。

1. ι が T_2 には何もしないことから、λ-bad であることは直ちに従う。よって $\iota(T)$ が半標準タブローであることさえ示せばよい。$\iota(T_1)$ は命題 2.2.5 から半標準タブローであり、T_2 も半標準タブローだから、問題になるのは $\iota(T_1)$ と T_2 の境界部分である。悪い箱は命題 2.2.5 の証明中の意味で自由である。すなわちその上にある箱は $k-1$ より真に小さい。

   なぜならもし悪い箱の上に $k-1$ があったとすると、$j-1$ ステップ目で $k-1$ 行目に箱を追加しても Young 図形であることは保たれている。よってそのとき k 行目の箱の数は $k-1$ 行目の箱の数と同じかそれ以下である。もし同じなら $j-2$ ステップの時点では $k-1$ 行目の箱の数が k 行目の箱の数より小さいこととなり、これは Young 図形になっていない。$k-1$ 行目の箱の数以下であるなら j ステップ目に k 行目に箱を追加しても Young 図形であることは保たれるから、悪い箱であることに矛盾する。

   よって T の悪い箱よりも上部分は考えなくてよい。悪い箱の下部分は半標準タブローの列単調性から k より真に大きいのでここも考えなくてよい。したがって問題になるのは悪い箱の左に入っている数が ι によってどうなるかということだけであるが、ι は $k-1$ と k を適当に入れ替える操作なので単調性は崩れない。
2. ι は結局のところ $k-1$ と k を (6) が成り立つように入れ替える操作であるから、

$$\begin{aligned} &\lambda_k + \omega_k(\iota(T)) + \delta_k = \lambda_{k-1} + \omega_{k-1}(T) + \delta_{k-1} \\ &l \neq k,\ k-1 \implies \lambda_l + \omega_l(\iota(T)) + \delta_l = \lambda_l + \omega_l(T) + \delta_l \end{aligned}$$

   が成り立つ。命題 2.2.5 の対合を用いているので ι もまた対合であるから

$$\begin{aligned} \lambda_{k-1} + \omega_{k-1}(\iota(T)) + \delta_{k-1} &= \lambda_k + \omega_k(\iota^2(T)) + \delta_k \\ &= \lambda_k + \omega_k(T) + \delta_k \end{aligned}$$

   よって $\sigma = (k, k-1)$ として

$$\lambda + \omega(\iota(T)) + \delta = \sigma(\lambda + \omega(T) + \delta)$$

   が成り立つ。

□

Littlewood-Richardson 規則の特別な場合として、λ が一行の Young 図形の場合は Pieri の規則と呼ばれ、比較的簡単に計算できる。

定義 2.2.8. Young 図形 $\mu \leq \nu$, $|\nu| = |\mu| + k$ に対して、ν/μ が水平帯であるとは

$$\nu \text{ に含まれ、} \mu \text{ に含まれない箱が各列にたかだか一つ}$$

を満たすことをいう。このことは

$$\nu_l \leq \mu_{l-1}$$

がすべての $l = 2, 3, \cdots$ について成り立つことと同値である。

定理 2.2.9 (Pieri の規則)**.** $\lambda = (k)$, $\mu \in \mathcal{Y}_n$ に対して

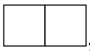
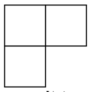
$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\substack{|\nu|=|\mu|+k \\ \nu/\mu\text{は水平帯}}} s_\nu$$

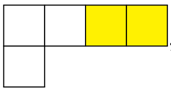
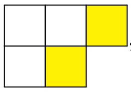
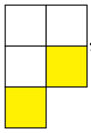
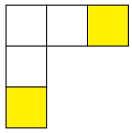
が成り立つ

Proof. 定理 2.2.1 より、μ-good な形 λ の半標準タブローを考える。T が形 λ の μ-good な半標準タブローであるとする。いま λ は一行の Young 図形だから、T が μ-good であることは

$$\omega_l(T) + \mu_l \leq \mu_{l-1}$$

がすべての $l = 2, 3, \cdots, n$ に対して成り立つことと同値である。$\nu = \mu + \omega(T)$ とすれば、これは ν/μ が水平帯であることに他ならない。 $\square$

例 2.2.10. $\lambda =$ , $\mu =$  $\in \mathcal{Y}_3$ として $s_\lambda s_\mu$ を計算する。定理 2.2.9 より大きさ 5 の Young 図形で水平帯となっているものを探せばよい。それらは

$\nu_1 =$ , $\nu_2 =$ , $\nu_3 =$ , $\nu_4 =$ 

だから

$$s_\lambda s_\mu = s_{\nu_1} + s_{\nu_2} + s_{\nu_3} + s_{\nu_4}$$