

# Schur 多項式からみる表現論と幾何学

慶應義塾大学総合政策学部 金沢研究会  
学籍番号：71900121 赤松輝海

# はじめに

Schur 多項式は数学の様々な分野に現れる対称多項式で、その組み合わせ論的性質がまったく関係のないように思える問題の解を与えることがしばしばある。本稿では、表現論と幾何学で Schur 多項式がどのように用いられるかを紹介する。

第 1 章ではまず Schur 多項式の定義と基本性質について述べる。特に重要なのが Schur 多項式が対称多項式環の基底をなすという事実である。これにより、2 つの Schur 多項式の積は Schur 多項式の線形結合で表されることがわかるが、その係数は Littlewood-Richardson 規則という組み合わせ論的ルールによって記述される。その系として、完全対称多項式を Schur 多項式の線形結合で表す Young の規則を解説する。

第 2 章では有限群の表現論の一般論と、その具体例として対称群の表現論、および Schur-Weyl 双対性について紹介する。表現論とは群や多元環などの抽象的な代数系を、ベクトル空間への作用（これを表現という）を通して研究する分野である。第 2 章では有限群の表現論の一般論を解説し、その後最も基本的な対称群の表現論と一般線形群の表現論について解説する。表現論の目標の一つは代数系が与えられたとき、その既約表現（ある意味で最も小さい表現）を分類することである。特に有限群の複素有限次元表現の場合、既約表現の同値類と群の共役類の個数は等しいことが知られている。一般に共役類と既約表現に標準的な全単射を構成することは期待できないが、対称群の場合は Young 対称子によってパラメータ付けることができる。対称群の表現の同値類をすべてあつめたものは表現環という環の構造をもつ。表現環は対称関数環という、対称多項式の無限変数への一般化にあたるものと同型であることが示される。これによって表現の研究に対称多項式の組み合わせ論的知識を用いることができ、第 1 章で導入した Littlewood-Richardson 規則などが活かされる。一般線形群の表現においては、Weyl 表現について解説する。Weyl 表現とは、テンソル積空間  $V^{\otimes k}$  の分解という素朴な問題の解として現れる表現である。その  $V^{\otimes k}$  における重複度は、対称群の既約表現と双対的な関係になっており、これは Schur-Weyl 双対性と呼ばれる。この双対性から、Weyl 表現の分析にも対称関数の知識が役立たれる様子を見る。

第 3 章では数え上げ幾何学を紹介する。数え上げ幾何の古典的な問題として、幾何学的な条件を満たす直線の本数を数えることがある。そのような条件を満たす直線の集合は Schubert 多様体と呼ばれる空間をなし、数え上げ問題を解くことは Schubert 多様体の交叉を調べることに対応する。交叉を調べる際にまたしても Littlewood-Richardson 規則が現れ、これを用いて数え上げ問題に解答を与えることが目標である。

本稿で用いる記号を整理しておく。 $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  でそれぞれ、整数, 有理数, 実数, 複素数全体のなす集合を表すものとする。

# 目次

第 1 章	Schur 多項式	3
1.1	Schur 多項式 . . . . .	3
1.2	Littlewood-Richardson 規則 . . . . .	8
第 2 章	対称群と一般線形群の表現	23
2.1	有限群の表現論 . . . . .	23
2.2	対称群の表現論 . . . . .	42
2.3	表現環と対称関数環 . . . . .	53
2.4	一般線形群の表現と Schur-Weyl 双対性 . . . . .	68
第 3 章	数え上げ幾何学	76
3.1	基本的な代数幾何学 . . . . .	76
3.2	Grassmann 多様体と Schubert 多様体 . . . . .	87
3.3	Grassmann 多様体の交叉理論 . . . . .	99
付録 A	Robinson-Schensted-Knuth 対応	111
付録 B	Wedderburn の構造定理	113
参考文献		114

# 第 1 章

## Schur 多項式

第 1 章と第 2 章第 3 節では Schur 多項式を定義し、その組み合わせ的性質を論じる。とくに基本対称多項式・完全対称多項式・べき和対称多項式といったほかの重要な対称多項式との関係を詳しく解説する。本章および第 2 章第 3 節では [2], [6], [11], [12] をまとめている。とくに Littlewood-Riachardson 規則についてはさまざまな定式化が知られているが、[2] で紹介されている方法による。

### 1.1 Schur 多項式

#### 1.1.1 対称多項式と交代多項式

**定義 1.1.1.1.**  $n$  変数多項式  $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  が対称多項式であるとは、任意の置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して  $\sigma f := f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$  が成り立つことをいう。対称多項式全体のなす  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  の部分集合を  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  と書く。 $f$  が交代多項式であるとは、任意の置換  $\sigma$  に対して  $\sigma f := f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \text{sgn}(\sigma)f(x_1, \dots, x_n)$  が成り立つことをいう。ただし  $\text{sgn}$  は置換の符号である。

**例 1.1.1.2.**  $xy, x + y, x^2 + y^2$  はいずれも  $\mathbb{Z}[x, y]$  の対称多項式であり、 $x - y$  は交代多項式である。 $xy^2, x + 2y$  などは対称でも交代でもない。

**命題 1.1.1.3.**  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  は  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  の部分環をなす。

*Proof.*  $f, g \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n], \sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して

$$\sigma(f + g) = \sigma f + \sigma g, \quad \sigma(f \cdot g) = \sigma f \cdot \sigma g$$

が成り立つことから従う。 □

**例 1.1.1.4** (単項対称式). 整数  $n > 1$  を固定する。非負整数列  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  に対して、ある置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  が存在して

$$\beta = \sigma\alpha = (\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{\sigma^{-1}(n)})$$

となるとき、 $\beta \sim \alpha$  と書く。広義単調減少な  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  に対して

$$m_\alpha = \sum_{\beta \sim \alpha} x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$$

と定めると、 $m_\alpha$  は対称式である。

$$\begin{aligned} m_{2,1}(x, y) &= x^2y + xy^2 \\ m_{2,2,0}(x, y, z) &= x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \end{aligned}$$

**例 1.1.1.5** (べき和対称式). 整数  $n > 1$  を固定する。  $k = 1, 2, \dots, n$  に対して  $(k) = (k, 0, \dots, 0)$  とする。 $p_k$  を

$$p_k = m_{(k)} = x_1^k + \dots + x_n^k$$

によって定義する。 $p_k$  はもちろん対称多項式である。

**例 1.1.1.6** (基本対称式・完全対称式). 整数  $n > 1$  を固定する。  $k = 1, 2, \dots, n$  に対して、 $1^k = (1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  を最初の  $k$  個が 1 で、残りが 0 の数列とする。また

$$\mathcal{Y}_{k,n} = \{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \mid \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k \}$$

とする。

$$\begin{aligned} e_k &= m_{1^k} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \\ h_k &= \sum_{\alpha \in \mathcal{Y}_{k,n}} m_\alpha = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \end{aligned}$$

として、 $e_k$  を  $k$  次基本対称式、 $h_k$  を  $k$  次完全対称式という。

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 + \dots + x_n, \quad e_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots, \quad e_n = x_1x_2 \dots x_n \\ h_1 &= x_1 + \dots + x_n, \quad h_2 = x_1^2 + x_1x_2 + \dots, \quad h_n = x_1^n + x_1^{n-1}x_2 + \dots \\ h_{n+1} &= x_1^{n+1} + x_1^n x_2 + \dots \end{aligned}$$

$n$  変数の基本対称式は  $e_1, \dots, e_n$  だけだが、完全対称式は無限に存在することに注意。ここで定義したさまざまな対称多項式は、対称多項式環  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  における良い性質をもっている。

**命題 1.1.1.7.**  $\{ m_\alpha \mid \alpha = (\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n), \alpha_n \geq 0 \}$  は  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  の基底をなす。

*Proof.*  $\{ m_\alpha \mid \alpha = (\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n), \alpha_n \geq 0 \}$  が一次独立であることは、 $\alpha \neq \beta$  ならば  $m_\alpha, m_\beta$  は異なる単項式を含むことからわかる。よって  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  を生成することを示す。対称多項式

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

について、任意の置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_1, \dots, i_n} x_{\sigma(1)}^{i_1} \dots x_{\sigma(n)}^{i_n} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_{\sigma^{-1}(1)}} \dots x_n^{i_{\sigma^{-1}(n)}} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \end{aligned}$$

よって

$$c_{i_1, \dots, i_n} = c_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}}$$

がなりたつ。したがって

$$f = \sum_{\alpha} c_{\alpha} m_{\alpha}$$

となることがわかる。 □

**定理 1.1.1.8** (対称式の基本定理). 任意の対称多項式は基本対称式の多項式で表される。すなわち

$$\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{Z}[e_1, \dots, e_n]$$

が成り立つ。

*Proof.* 命題 1.1.1.7 より、 $m_{\alpha}$  が  $e_1, \dots, e_n$  の多項式で表されることを示せばよい。  $\mathcal{Y}_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{Y}_{k,n}$  とおく。  $\mathcal{Y}_n$  には辞書式順序による全順序を入れておく。  $\alpha \in \mathcal{Y}_n$  に関する帰納法によって示そう。  $\mathcal{Y}_n$  の最小元は  $(1, 0, \dots, 0)$  であり、

$$m_{1,0,\dots,0} = e_1$$

であるからよい。  $\alpha = (\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n) \in \mathcal{Y}_n$  を  $\alpha > (1, 0, \dots, 0)$  であるとする。

$$g(x_1, \dots, x_n) = m_{\alpha} - e_n^{\alpha_n} e_{n-1}^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} \dots e_2^{\alpha_2 - \alpha_3} e_1^{\alpha_1 - \alpha_2}$$

とおく。  $g$  は対称多項式だが、

$$g = \sum_{\beta} m_{\beta}$$

と表した時、このときすべての  $\beta$  は  $\alpha$  より真に小さいことを示そう。  $h = e_n^{\alpha_n} e_{n-1}^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} \dots e_2^{\alpha_2 - \alpha_3} e_1^{\alpha_1 - \alpha_2}$  とおく。まず、

$$e_n^{\alpha_n} = x_1^{\alpha_n} \dots x_n^{\alpha_n}$$

より  $h$  を展開したときの単項式の指数はすべて  $(\alpha_n, \dots, \alpha_n)$  以上であることがわかる。次に

$$e_{n-1}^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} = \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-1} \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_{n-1}} \right)^{\alpha_{n-1} - \alpha_n}$$

より  $h$  の単項式の指数で最も大きいものは

$$(\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$$

以上であることがわかる。このことを繰り返していけば、 $h$  の指数最大の単項式は

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

になることがわかる。またその係数が 1 であることも従う。よって  $\beta < \alpha$  であるから、帰納法の仮定により主張が成立する。 □

例 1.1.1.9. 完全対称式は対称多項式なので定理 1.1.1.8 より基本対称式の多項式である。実際

$$\begin{aligned}h_1 &= e_1 \\h_2 &= e_1^2 - e_2 \\h_3 &= e_1^3 + e_3 - 2e_1e_2\end{aligned}$$

一般に

$$h_k = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_k \\ 1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{k-1} \\ 0 & 1 & e_1 & \cdots & e_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e_1 \end{vmatrix}$$

が成り立つことがわかる (第 2 章参照)。

次に交代多項式についてみていこう。

定義 1.1.1.10.  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $a_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対して多項式  $A_\alpha \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  を

$$A_\alpha = \det((x_i^{a_j}))$$

によって定める。行列式の交代性から、 $A_\alpha$  は交代多項式である。よって、 $\alpha$  に重複があるなら  $A_\alpha = 0$  となる。

例 1.1.1.11.  $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$  のとき

$$A_\delta = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

は Vandermonde 行列式に他ならない。したがって

$$A_\delta = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

命題 1.1.1.12. 任意の交代多項式は  $A_\delta$  で割り切れる。

*Proof.*  $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  を交代多項式とする。交代性から  $i < j$  のとき  $f$  は  $x_i$  に  $x_j$  を代入すると 0 になる。よって  $f$  は  $x_i - x_j$  で割り切れる。 $x_i - x_j$  は既約多項式であり、 $(i, j)$ ,  $(k, l)$  が異なるならば  $x_i - x_j$ ,  $x_k - x_l$  は互いに素である。 $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  は UFD であるので  $f$  は  $A_\delta$  で割り切れる。□

## 1.1.2 Schur 多項式

定義 1.1.2.1 (Schur 多項式).  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $a_1 > \dots > a_n \geq 0$  に対して

$$s_\alpha = \frac{A_\alpha}{A_\delta}$$

を Schur 多項式という。

命題 1.1.1.12 より、 $A_\alpha$  は  $A_\delta$  で割り切れるので  $s_\alpha$  は多項式である。また任意の置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して

$$\sigma s_\alpha = \frac{\sigma A_\alpha}{\sigma A_\delta} = \frac{\text{sgn}(\sigma) A_\alpha}{\text{sgn}(\sigma) A_\delta} = s_\alpha$$

となるから Schur 多項式は対称多項式である。

**例 1.1.2.2.**  $\alpha = (4, 2, 0)$  とする。

$$\begin{aligned} s_\alpha &= \frac{\begin{vmatrix} x_1^4 & x_1^2 & 1 \\ x_2^4 & x_2^2 & 1 \\ x_3^4 & x_3^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^1 & 1 \\ x_2^2 & x_2^1 & 1 \\ x_3^2 & x_3^1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 - x_3^2)(x_2^2 - x_3^2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} \\ &= (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3) = e_1 e_2 \end{aligned}$$

Schur 多項式について重要な命題が次の定理である。

**定理 1.1.2.3.**  $n > 0$  を整数とする。Schur 多項式の集合  $\{s_\alpha \mid \alpha = (a_1, \dots, a_n), a_1 > \dots > a_n \geq 0\}$  は対称多項式のなす環  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  の基底をなす。

*Proof.* 次の補題を示す。

**補題 1.1.2.4.**  $\mathcal{S} = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 > \dots > a_n \geq 0\}$  とする。交代多項式全体のなす  $\mathbb{Z}$  加群は  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{S}}$  を基底にもつ。

*Proof.*  $f(x_1, \dots, x_n)$  を交代多項式とする。

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

とおく。任意の置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \text{sgn}(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} \text{sgn}(\sigma) c_{i_1, \dots, i_n} x_{\sigma(1)}^{i_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{i_n} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} \text{sgn}(\sigma) c_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \end{aligned}$$

がなりたつ。よって

$$\text{sgn}(\sigma) c_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} = c_{i_1, \dots, i_n} \quad (1.1)$$

これにより、 $(i_1, \dots, i_n)$  に重複がある場合

$$c_{i_1, \dots, i_n} = 0$$

であることがわかる。よって

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{S}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} x_1^{i_{\sigma(1)}} \cdots x_n^{i_{\sigma(n)}}$$



と書くことができる。再び (2) より

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{S}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}} x_1^{i_{\sigma(1)}} \dots x_n^{i_{\sigma(n)}} \\
&= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{S}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) c_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_{\sigma(1)}} \dots x_n^{i_{\sigma(n)}} \\
&= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{S}} c_{i_1, \dots, i_n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_1^{i_{\sigma(1)}} \dots x_n^{i_{\sigma(n)}} \\
&= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{S}} c_{i_1, \dots, i_n} A_{(i_1, \dots, i_n)}
\end{aligned}$$

$\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{S}}$  が一次独立であることは  $\alpha \neq \beta$  ならば  $A_\alpha$  と  $A_\beta$  は異なる単項式を含むことからわかる。  $\square$

定理の証明に戻る。 $f$  が対称多項式ならば  $fA_\delta$  は交代多項式であるから、補題により

$$fA_\delta = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}} c_\alpha A_\alpha$$

両辺を  $A_\delta$  で割って

$$f = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}} c_\alpha \frac{A_\alpha}{A_\delta} = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}} c_\alpha s_\alpha$$

一意的に表せることは  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{S}}$  が一次独立であることからわかる。  $\square$

定理 1.1.2.3 より、2 つの Schur 多項式の積は Schur 多項式の線形結合であることがわかる。次節ではその係数を記述する Littlewood-Richardson 規則について解説する。

## 1.2 Littlewood-Richardson 規則

### 1.2.1 Young 図形

**定義 1.2.1.1.** 非負整数列  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = 0$  に対して、1 行目に  $\lambda_1$  個の箱を書き、2 行目に  $\lambda_2$  個の箱を書き... と続けてできる図形を Young 図形といい、同じく  $\lambda$  で表す。箱が 1 つもない Young 図形、すなわち  $(0, 0, \dots)$  は  $\emptyset$  で表す。 $\lambda_{n+1} = 0$  のときたんに  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  と書くこともある。また  $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$  とし、これを  $\lambda$  の大きさという。

**例 1.2.1.2.**

$$(2, 1) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}, \quad (4, 3, 3, 1) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array}, \quad (3) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad (1, 1, 1, 1) = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

**定義 1.2.1.3.** 2 つの Young 図形  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots)$ ,  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n, \dots)$  に対して、

$$\lambda \subset \mu \Leftrightarrow \lambda_1 \leq \mu_1, \dots, \lambda_n \leq \mu_n, \dots$$

と定義する。このとき  $\lambda$  は  $\mu$  の部分 Young 図形であるという。

**定義 1.2.1.4.**  $n$  行からなる Young 図形の全体を第 1 節と同じ記号  $\mathcal{Y}_n$  で表す。すなわち

$$\mathcal{Y}_n = \{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0 \}$$

である。

Young 図形と Schur 多項式との関係は次の命題で表される。

**命題 1.2.1.5.**  $\mathcal{S} = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_1 > \dots > a_n \geq 0 \}$  と  $\mathcal{Y}_n$  には次の全単射が存在する。

$$\mathcal{Y}_n \ni \lambda \mapsto \alpha = \lambda + \delta \in \mathcal{S}$$

ただし  $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$  である。

*Proof.*  $\lambda \in \mathcal{Y}_n$  は単調減少であるから、実際に  $\lambda + \delta \in \mathcal{S}$  であることはわかる。逆に任意の  $\alpha \in \mathcal{S}$  に対して、 $\delta$  が  $\mathcal{S}$  の辞書式順序に関する最小元であることから  $\alpha - \delta \in \mathcal{Y}_n$  であることもわかり、全単射であることが従う。  $\square$

よって Young 図形  $\lambda$  に対応する Schur 多項式を  $s_\lambda = \frac{A_{\lambda+\delta}}{A_\delta}$  と書くことにする。

**定義 1.2.1.6.**  $\lambda \in \mathcal{Y}_n$  に対して、 $\lambda$  の各箱に次の条件が満たされるように数字を書き入れたものを形  $\lambda$  の半標準タブローという。

- 各数字は 1 以上  $n$  以下
- 各行は左から右に広義単調増加
- 各列は上から下に狭義単調増加

形  $\lambda$  の半標準タブロー全体のなす集合を  $\mathcal{T}(\lambda)$  と書く。半標準タブロー  $T \in \mathcal{T}(\lambda)$  について、 $T$  に数字  $k \in \{1, \dots, n\}$  が  $t_k$  個書かれているとき  $\omega_k(T) = t_k$  のように書き、

$$\omega(T) = (t_1, \dots, t_n)$$

とし、これを  $T$  のウェイトと呼ぶ。

**例 1.2.1.7.** 形  $(2, 1) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \in \mathcal{Y}_3$  の半標準タブローは次の通りである：

$$\mathcal{T}((2, 1)) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \right. \\ \left. \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right\}$$

しかし次などは半標準タブローではない：

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

**定義 1.2.1.8.** Young 図形  $\lambda \in \mathcal{Y}_n$  に対して次で定まる多項式を  $\lambda$  のタブロー和という。

$$T_\lambda = \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} x_1^{\omega_1(T)} \dots x_n^{\omega_n(T)}$$

例 1.2.1.9. 例 1.2.1.7 より、

$$T_{(2,1)} = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + 2x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 = e_1 e_2 = s_{(2,1)}$$

例 1.2.1.10.  $\lambda$  が 1 行からなる Young 図形  $\lambda = (k) \in \mathcal{Y}_n$  の場合、 $T_\lambda = h_k$  である。なぜなら、形  $(k)$  の半標準タブローは左端に 1 をいくつか書き (0 個でもよい), 続けて 2 をいくつか書き, 3 をいくつか書き... と続けて得られるから、

$$1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$$

をみたま  $i_1, \dots, i_k$  の組み合わせと 1 対 1 に対応するからである。

例 1.2.1.11.  $\lambda$  が 1 列からなる Young 図形  $\lambda = 1^k \in \mathcal{Y}_n$  ( $k \leq n$ ) の場合、 $T_\lambda = e_k$  である。なぜなら、形  $1^k$  の半標準タブローは

$$1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$$

をみたま  $i_1, \dots, i_k$  の組み合わせと 1 対 1 に対応するからである。

## 1.2.2 Littlewood-Richardson 規則

定理 1.2.2.1 (Littlewood-Richardson 規則). Young 図形  $\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_n$  について

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu \in \mathcal{Y}_n} \eta_{\lambda\mu}^\nu s_\nu$$

とおいたとき、

$$\eta_{\lambda\mu}^\nu = \#\{ T \in \mathcal{T}(\mu) \mid T \text{ は } \lambda\text{-good であり、} \omega(T) = \nu - \lambda \}$$

が成り立つ。係数  $\eta_{\lambda\mu}^\nu$  を Littlewood-Richardson 数と呼ぶ。

ここで  $T \in \mathcal{T}(\mu)$  が  $\lambda$ -good であるとは、次の条件を満たすことをいう。 $T$  に書かれている数字を上から下、右から左へ読んでいったときにできる数字の並びを  $c(T)$  とする。

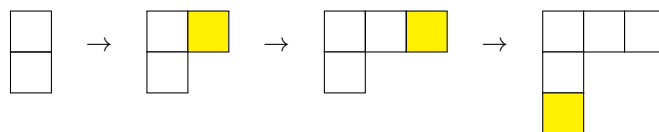
$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 5 & & \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad c(T) = 2423135134$$

$c(T)_j$  を  $c(T)$  の左から  $j$  番目までの部分列とすると

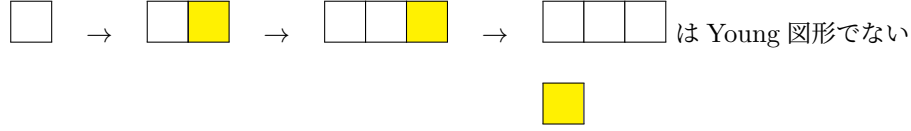
$$\lambda + \omega(c(T)_j) \in \mathcal{Y}_n, \quad \forall j = 1, \dots, |\mu|$$

が成り立つとき、 $T$  は  $\lambda$ -good であるという。すなわち、「 $T$  の右上から左下へ数字を読んでいくとき、読まれた数に対応する  $\lambda$  の行に箱を追加する」という操作を続けて各ステップで Young 図形であることが保たれるということである。

例 1.2.2.2.  $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$  は  $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$  -good である。実際  $c(T) = 113$  であり



一方で  $T$  は  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$  -good ではない。



**例 1.2.2.3.**  $\emptyset$ -good であるような形  $\mu$  の半標準タブローは 1 行目がすべて 1, 2 行目がすべて 2, ... というものただ一つである。この半標準タブローを  $\mu^{st}$  と書く。

$T$  が  $\emptyset$ -good であるとする。 $\emptyset$  に箱を 1 つ追加して Young 図形になるためには第 1 行目に追加しなければならない。よって  $T$  の一番右上には 1 が入っており、半標準タブローの行単調性から 1 行目はすべて 1 である。半標準タブローの列単調性から 2 行目の一番右は 2 以上が入っているはずであり、3 より大きければ Young 図形ができないので 2 である。よって行単調性から 2 行目はすべて 2 である。以下同様にして  $k$  行目に入っている数字はすべて  $k$  であることがわかる。

**例 1.2.2.4.**  $\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \in \mathcal{Y}_2$  とし、 $s_\lambda^2$  を Schur 多項式の線形結合として表そう。 $\lambda$ -good な形  $\lambda$  の半標準タブローは

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

ですべてである。それぞれのウェイトは

$$\omega(T_1) = (2, 1), \quad \omega(T_2) = (1, 2)$$

定理 1.2.2.1 より

$$s_\lambda^2 = s_{4,2} + s_{3,3}$$

である。実際、定義より

$$\begin{aligned} s_\lambda &= \frac{\begin{vmatrix} x^3 & x \\ y^3 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x^3y - xy^3}{x - y} = xy(x + y), & s_\lambda^2 &= x^4y^2 + 2x^3y^3 + x^2y^4 \\ s_{4,2} &= \frac{\begin{vmatrix} x^5 & x^2 \\ y^5 & y^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x^5y^2 - x^2y^5}{x - y} = x^2y^2(x^2 + xy + y^2) = x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 \\ s_{3,3} &= \frac{\begin{vmatrix} x^4 & x^3 \\ y^4 & y^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x^4y^3 - x^3y^4}{x - y} = x^3y^3 \end{aligned}$$

で確かに正しい。

定理 1.2.2.1 の証明のあらすじを述べよう。ポイントになるのが次の等式 (補題 1.2.2.6) である：

$$A_{\lambda+\delta}T_\mu = \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)} A_{\lambda+\omega(T)+\delta}$$

この等式はタブロー和  $T_\mu$  が対称多項式であること (命題 1.2.2.5) から示される。右辺に関して、 $T$  が  $\lambda$ -good でない項たちは互いにキャンセルされることが示され (補題 1.2.2.7)、結局

$$A_{\lambda+\delta}T_\mu = \sum_{T:\lambda\text{-good}} A_{\lambda+\omega(T)+\delta} \quad (1.2)$$

ここで、 $\lambda = \emptyset$  の場合を考えると例 1.2.2.3 より

$$A_\delta T_\mu = A_{\omega(\mu^{st})+\delta}$$

両辺を  $A_\delta$  で割れば

$$T_\mu = \frac{A_{\omega(\mu^{st})+\delta}}{A_\delta} = \frac{A_{\mu+\delta}}{A_\delta} = s_\mu$$

すなわち、タブロー和は Schur 多項式と等しいということが導かれる。再び一般の  $\lambda$  に対し式 (3) の両辺を  $A_\delta$  で割って

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{T:\lambda\text{-good}} s_{\lambda+\omega(T)}$$

これより主張が従う。

あらすじで用いた命題・等式を示そう。

**命題 1.2.2.5.** タブロー和  $T_\lambda$  は対称多項式である。

*Proof.* 対称群は隣り合う数字の互換  $\sigma = (k-1, k)$ ,  $k = 2, \dots, n$  によって生成されるから、

$$\sigma T_\lambda = T_\lambda$$

を証明すればよい。ポイントになるのは半標準タブローの集合  $\mathcal{T}(\lambda)$  上の対合<sup>\*1</sup> $\iota$ であって

$$\omega(\iota(T)) = \sigma(\omega(T)) \quad (1.3)$$

をみたすものの存在である。ここで、

$$\sigma(\omega(T)) = (\omega_{\sigma^{-1}(1)}(T), \dots, \omega_{\sigma^{-1}(n)}(T))$$

である。このような  $\iota$  が構成できれば、

$$\begin{aligned} \sigma T_\lambda &= \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} x_{\sigma(1)}^{\omega_1(T)} \cdots x_{\sigma(n)}^{\omega_n(T)} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} x_1^{\omega_{\sigma^{-1}(1)}(T)} \cdots x_n^{\omega_{\sigma^{-1}(n)}(T)} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} x_1^{\omega_1(\iota(T))} \cdots x_n^{\omega_n(\iota(T))} \\ &= T_\lambda \end{aligned}$$

となり対称性が従う。最後の等式は  $\iota$  が全単射であることによる。

このような  $\iota$  は次のように構成される。まず条件 (4) は、半標準タブロー  $T$  と  $\iota(T)$  は書かれている  $k-1$  と  $k$  の数が逆転した関係にある、ということを意味している。最初に  $T$  が一行の Young 図形からなる場合を考

---

<sup>\*1</sup> 集合  $X$  上の対合とは写像  $\iota: X \rightarrow X$  であって  $\iota^2 = \text{id}_X$  をみたすものをいう

えよう。半標準タブローの単調性から  $k-1$  か  $k$  の書かれている部分はひとつながりの帯領域をなしており、その長さは  $\omega_{k-1}(T) + \omega_k(T)$  である。よってこの帯領域の数字を、左  $\omega_k(T)$  個の箱に  $k-1$ 、残りの  $\omega_{k-1}(T)$  個の箱に  $k$  を入れるように変更したものを  $\iota(T)$  とすれば、これは条件 (4) を満たす半標準タブローになる。

$$T = \cdots \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline k-2 & k-1 & k-1 & k & k & k \\ \hline \end{array} \cdots \rightarrow \iota(T) = \cdots \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline k-2 & k-1 & k-1 & k-1 & k & k \\ \hline \end{array} \cdots$$

また、この場合に  $\iota^2(T) = T$  が成立していることもわかる。

一般の半標準タブロー  $T$  に対しては一行の場合の操作を拡張することで得られる。まず、 $T$  の箱が自由であることを

- 箱に  $k$  が入っており、上の箱は  $k-1$  より真に小さい
- 箱に  $k-1$  が入っており、下の箱は  $k$  より真に大きいか下に箱がない

のどちらかを満たしていることと定義する。例えば  $k=4$  において

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 5 & & \\ \hline 5 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

黄色の箱は自由であり、緑の箱は自由でない。不自由な箱は数字を入れ替えると単調性が崩れるので、入れ替えることができないという意味で不自由である。したがって数字の入れ替えをするには、自由な箱のみを考えればよい。重要なこととして、

自由な箱の全体はいくつかの帯領域をなし、さらに帯は各行にたかだか 1 つである。

実際

- $k-1$  が書かれている箱が自由なら、その右にある  $k-1$  の書かれた箱はすべて自由である。なぜなら半標準タブローの行単調性から、その下にある箱はすべて  $k$  より真に大きいからである。
- $k$  が書かれている箱が自由なら、その左にある  $k$  の書かれた箱はすべて自由である。なぜなら半標準タブローの行単調性から、その上にある箱はすべて  $k-1$  より真に小さいからである。

より、各行に帯領域はたかだか一つである。そこで各帯領域に対して、1 行の場合の入れ替え操作を行った半標準タブローを  $\iota(T)$  と置けば、 $\iota(T)$  は条件 (4) を満たす。なぜなら、不自由な箱は  $k-1$  が書かれているものと  $k$  が書かれているもので同数あり、1 行の場合に条件 (4) は満たされているからである。また半標準タブローの列単調性から  $\iota(T)$  と  $T$  で箱の自由性は保たれるので  $\iota^2(T) = T$  であることもわかる。また、もし  $T$  に自由な箱が存在しない場合は  $\iota(T) = T$  とする。これで構成できた。

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 5 & & \\ \hline 5 & & & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \iota(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 5 & & \\ \hline 5 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

□

**補題 1.2.2.6.**  $\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_n$  に対して

$$A_{\lambda+\delta}T_\mu = \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)} A_{\lambda+\omega(T)+\delta}$$

が成り立つ。

*Proof.*  $\text{Alt}_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma)\sigma$  とおく (これは交代化作用素と呼ばれる)。交代化作用素と対称多項式をかけることは可換である。実際、 $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ ,  $g \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  に対し

$$\begin{aligned} \text{Alt}_n(fg) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma)\sigma(fg) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma)\sigma f \cdot \sigma g \\ &= f \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma)\sigma g \\ &= f \cdot \text{Alt}_n(g) \end{aligned}$$

である。

$$A_{\lambda+\delta} = \text{Alt}_n(x_1^{\lambda_1+\delta_1} \dots x_n^{\lambda_n+\delta_n})$$

であるから命題 1.2.2.5 より

$$\begin{aligned} A_{\lambda+\delta}T_\mu &= \text{Alt}_n(T_\mu \cdot x_1^{\lambda_1+\delta_1} \dots x_n^{\lambda_n+\delta_n}) \\ &= \text{Alt}_n \left( \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)} x_1^{\lambda_1+\omega_1(T)+\delta_1} \dots x_n^{\lambda_n+\omega_n(T)+\delta_n} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)}^{\lambda_1+\omega_1(T)+\delta_1} \dots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n+\omega_n(T)+\delta_n} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)} \sum_{\sigma \in (S)_n} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)}^{\lambda_1+\omega_1(T)+\delta_1} \dots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n+\omega_n(T)+\delta_n} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)} A_{\lambda+\omega(T)+\delta} \end{aligned}$$

□

**補題 1.2.2.7.**  $\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_n$  に対して、形  $\mu$  の半標準タブローで  $\lambda$ -good でないものを  $\lambda$ -bad と呼び、その全体を  $\mathcal{T}(\mu)^{\lambda\text{-bad}}$  とおく。このとき

$$\sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)^{\lambda\text{-bad}}} A_{\lambda+\omega(T)+\delta} = 0$$

が成り立つ。

*Proof.* この証明においてもポイントになるのが  $\mathcal{T}(\mu)^{\lambda\text{-bad}}$  上の対合  $\iota$  であって各  $T \in \mathcal{T}(\mu)^{\lambda\text{-bad}}$  に対してある  $k$  が存在して  $\sigma = (k-1, k)$  に対して

$$\lambda + \omega(\iota(T)) + \delta = \sigma(\lambda + \omega(T) + \delta) \quad (1.4)$$

をみたすものの存在である。このような  $\iota$  が構成されれば、 $A_{\lambda+\omega(T)+\delta}$  たちはペアごとに打ち消される。実際、

$$\begin{aligned}
\sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)^{\lambda-bad}} A_{\lambda+\omega(T)+\delta} &= \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)^{\lambda-bad}} (A_{\lambda+\omega(T)+\delta} + A_{\lambda+\omega(\iota(T))+\delta}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)^{\lambda-bad}} (A_{\lambda+\omega(T)+\delta} + A_{\sigma(\lambda+\omega(T)+\delta)}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}(\mu)^{\lambda-bad}} (A_{\lambda+\omega(T)+\delta} - A_{\lambda+\omega(T)+\delta}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(5) をみたす  $\iota$  を構成するために、条件 (5) が成り立つための必要条件から考察していく。(5) が成り立つには

$$\lambda_k + \omega_k(\iota(T)) + \delta_k = \lambda_{k-1} + \omega_{k-1}(T) + \delta_{k-1}$$

したがって

$$\omega_k(\iota(T)) = \omega_{k-1}(T) + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) + 1 \quad (1.5)$$

となることが必要である。この右辺の値は、 $\lambda$  の  $k$  行目にいくつ箱を追加すると Young 図形でなくなるか、ということを表していることに注意する。このような  $k$  と  $\iota(T)$  をみつきたいのである。

そこで、

$$\lambda + \omega(c(T)_j) \notin \mathcal{Y}_n$$

を満たす最小の  $j$  をとてこよう。これは  $\lambda$ -bad の定義から必ず存在する。そして  $j$  に対応する箱に入っている数字を  $k$  とおく。すなわち、 $j$  ステップ目で  $k$  行目に箱を追加すると初めて Young 図形でなくなるとする。またこの箱を悪い箱と呼ぶことにする。このとき

$$\omega_k(c(T)_j) = \omega_{k-1}(c(T)_j) + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) + 1 \quad (1.6)$$

が成り立つ。ここで、 $T$  を悪い箱よりも左側にある部分  $T_1$  と悪い箱を含む右側の部分  $T_2$  に分割する。例えば

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 & \\ \hline 4 & 5 & 5 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{は} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \text{-bad}$$

においては、黄色い箱が悪い箱で

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array}, \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 4 & 4 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$$

である。すると、半標準タブローの列単調性から悪い箱の下にある箱には  $k+1$  以上しか存在しないから、

$$\omega_k(c(T)_j) = \omega_k(T_2), \quad \omega_{k-1}(c(T)_j) = \omega_{k-1}(T_2)$$

よって (7) は

$$\omega_k(T_2) = \omega_{k-1}(T_2) + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) + 1$$



と書き換えることができる。 $\iota(T)$  の満たすべき必要条件 (6) は

$$\begin{aligned}\omega_k(\iota(T)) &= \omega_{k-1}(T) + (\lambda_{k-1} + \lambda_k) + 1 \\ \omega_k(\iota(T_1)) + \omega_k(\iota(T_2)) &= \omega_{k-1}(T_1) + \omega_{k-1}(T_2) + (\lambda_{k-1} + \lambda_k) + 1\end{aligned}$$

となるが、 $\iota(T_2) = T_2$  であると仮定すれば

$$\begin{aligned}\omega_k(\iota(T_1)) + \omega_k(T_2) &= \omega_{k-1}(T_1) + \omega_{k-1}(T_2) + (\lambda_{k-1} + \lambda_k) + 1 \\ \omega_k(\iota(T_1)) &= \omega_{k-1}(T_1)\end{aligned}$$

結局、 $\iota(T)$  は次のように定義すればよいであろうことがわかる。

$\iota(T)$  は  $T_1$  に命題 1.2.2.5 で定義した対合を施し、 $T_2$  には何もしない

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 & \\ \hline 4 & 5 & 5 & & \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \iota(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & \\ \hline 3 & 4 & 4 & 4 & \\ \hline 4 & 5 & 5 & & \\ \hline \end{array}$$

示すべきことは

- (i) 実際に  $\iota(T)$  が  $\lambda$ -bad な半標準タブローであること
- (ii)  $\iota(T)$  が (5) をみたすこと

である。

- (i)  $\iota$  が  $T_2$  には何もしないことから、 $\lambda$ -bad であることは直ちに従う。よって  $\iota(T)$  が半標準タブローであることさえ示せばよい。 $\iota(T_1)$  は命題 1.2.2.5 から半標準タブローであり、 $T_2$  も半標準タブローであるから、問題になるのは  $\iota(T_1)$  と  $T_2$  の境界部分である。悪い箱は命題 1.2.2.5 の証明中の意味で自由である。すなわちその上にある箱は  $k-1$  より真に小さい。

なぜならもし悪い箱の上に  $k-1$  があったとすると、 $j-1$  ステップ目で  $k-1$  行目に箱を追加しても Young 図形であることは保たれている。よってそのとき  $k$  行目の箱の数は  $k-1$  行目の箱の数と同じかそれ以下である。もし同じなら  $j-2$  ステップの時点では  $k-1$  行目の箱の数が  $k$  行目の箱の数より小さいこととなり、これは Young 図形になっていない。 $k-1$  行目の箱の数以下であるなら  $j$  ステップ目に  $k$  行目に箱を追加しても Young 図形であることは保たれるから、悪い箱であることに矛盾する。

よって  $T$  の悪い箱よりも上部分は考えなくてよい。悪い箱の下部分は半標準タブローの列単調性から  $k$  より真に大きいのでここも考えなくてよい。したがって問題になるのは悪い箱の左に入っている数が  $\iota$  によってどうなるかということだけであるが、 $\iota$  は  $k-1$  と  $k$  を適当に入れ替える操作なので単調性は崩れない。

- (ii)  $\iota$  は結局のところ  $k-1$  と  $k$  を (6) が成り立つように入れ替える操作であるから、

$$\begin{aligned}\lambda_k + \omega_k(\iota(T)) + \delta_k &= \lambda_{k-1} + \omega_{k-1}(T) + \delta_{k-1} \\ l \neq k, k-1 &\implies \lambda_l + \omega_l(\iota(T)) + \delta_l = \lambda_l + \omega_l(T) + \delta_l\end{aligned}$$

が成り立つ。命題 1.2.2.5 の対合を用いているので  $\iota$  もまた対合であるから

$$\begin{aligned}\lambda_{k-1} + \omega_{k-1}(\iota(T)) + \delta_{k-1} &= \lambda_k + \omega_k(\iota^2(T)) + \delta_k \\ &= \lambda_k + \omega_k(T) + \delta_k\end{aligned}$$

よって  $\sigma = (k, k-1)$  として

$$\lambda + \omega(\iota(T)) + \delta = \sigma(\lambda + \omega(T) + \delta)$$

が成り立つ。

□

Littlewood-Richardson 規則の特別な場合として、 $\lambda$  が一行の Young 図形の場合は Pieri の規則と呼ばれ、比較的簡単に計算できる。

**定義 1.2.2.8.** Young 図形  $\mu \subset \nu$ ,  $|\nu| = |\mu| + k$  に対して、 $\nu/\mu$  が水平帯であるとは

$\nu$  に含まれ、 $\mu$  に含まれない箱が各列にたかだか一つ

を満たすことをいう。このことは

$$\mu_l \leq \nu_l \leq \mu_{l-1}$$

がすべての  $l = 2, 3, \dots$  について成り立つことと同値である。

**系 1.2.2.9** (Pieri の規則).  $\lambda = (k)$ ,  $\mu \in \mathcal{Y}_n$  に対して

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\substack{|\nu|=|\mu|+k \\ \nu/\mu \text{ は水平帯}}} s_\nu$$

が成り立つ。例 1.2.1.10 より、

$$h_k s_\mu = \sum_{\substack{|\nu|=|\mu|+k \\ \nu/\mu \text{ は水平帯}}} s_\nu$$

と書くこともできる。

*Proof.* 定理 1.2.2.1 より、 $\mu$ -good な形  $\lambda$  の半標準タブローを考える。 $T$  が形  $\lambda$  の  $\mu$ -good な半標準タブローであるとする。いま  $\lambda$  は一行の Young 図形であるから、 $T$  が  $\mu$ -good であることは

$$\omega_l(T) + \mu_l \leq \mu_{l-1}$$

がすべての  $l = 2, 3, \dots, n$  に対して成り立つことと同値である。 $\nu = \mu + \omega(T)$  とすれば、これは  $\nu/\mu$  が水平帯であることに他ならない。 □

**例 1.2.2.10.**  $\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ ,  $\mu = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \in \mathcal{Y}_3$  として  $s_\lambda s_\mu$  を計算する。系 1.2.2.9 より大きさ 5 の Young 図形で水平帯となっているものを探せばよい。それらは

$$\nu_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \textcolor{yellow}{\square} & \textcolor{yellow}{\square} \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array}, \quad \nu_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \textcolor{yellow}{\square} \\ \hline \square & \textcolor{yellow}{\square} & \\ \hline \end{array}, \quad \nu_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \textcolor{yellow}{\square} \\ \hline \textcolor{yellow}{\square} & \\ \hline \end{array}, \quad \nu_4 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \textcolor{yellow}{\square} \\ \hline \square & & \\ \hline \textcolor{yellow}{\square} & & \\ \hline \end{array}$$

であるから

$$s_\lambda s_\mu = s_{\nu_1} + s_{\nu_2} + s_{\nu_3} + s_{\nu_4}$$

系 1.2.2.11 (Young の規則).  $\lambda \in \mathcal{Y}_n$  に対して

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_n} = s_{(\lambda_1)} \cdots s_{(\lambda_n)}$$

とおく。  $h_\lambda$  は対称多項式であるが、その Schur 多項式への分解について次が成り立つ：

$$h_\lambda = s_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} k_{\lambda\mu} s_\mu$$

係数  $k_{\lambda\mu}$  を Kostka 数という。

*Proof.*  $\lambda$  の行数  $n$  に関する帰納法で示す。  $n = 1$  のときは  $h_\lambda = s_\lambda$  ゆえに明らか。  $n > 1$  とする。  
  $\lambda' = (\lambda_2, \dots, \lambda_n)$  として帰納法の仮定より

$$h_{\lambda_2} \cdots h_{\lambda_n} = s_{\lambda'} + \sum_{\mu > \lambda'} k_{\lambda'\mu} s_\mu$$

と書けるから

$$h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots h_{\lambda_n} = s_{(\lambda_1)} \left( s_{\lambda'} + \sum_{\mu > \lambda'} k_{\lambda'\mu} s_\mu \right)$$

となる。  $s_{(\lambda_1)} s_{\lambda'}$  について考えると、Pieri の規則より、

$$s_{(\lambda_1)} s_{\lambda'} = \sum_{\substack{|\nu|=|\lambda'|+\lambda_1 \\ \nu/\lambda' \text{ は水平帯}}} s_\nu \quad (1.7)$$

となるが、  $l = 2, 3, \dots, n$  に対して

$$\lambda_l = \lambda'_{l-1}$$

であるから  $\lambda/\lambda'$  は水平帯である。また、  $\nu/\lambda'$  が水平帯であるような  $|\nu| = |\lambda'| + \lambda_1$  をみたす任意の  $\nu$  について、

$$\nu_l \leq \lambda'_{l-1} = \lambda_l, \quad l = 2, 3, \dots, n$$

であるから、

$$\nu_1 = |\nu| - (\nu_2 + \cdots + \nu_n) \geq |\lambda| - (\lambda_2 + \cdots + \lambda_n) = \lambda_1$$

よって  $\lambda \leq \nu$  である。したがって式 (1.7) は

$$s_{(\lambda_1)} s_{\lambda'} = s_\lambda + \sum_{\nu > \lambda} \varepsilon_\nu s_\nu, \quad \varepsilon_\nu = 1 \text{ or } 0$$

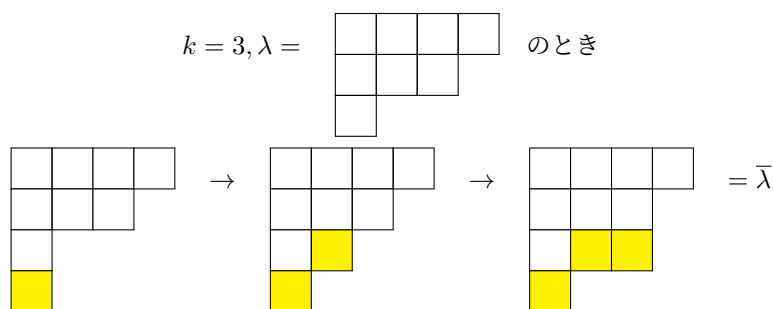
と書くことができる。一方で、  $\mu > \lambda'$  に対して  $s_{(\lambda_1)} s_\mu$  を考えると、再び Pieri の規則から

$$s_{(\lambda_1)} s_\mu = \sum_{\substack{|\nu|=|\mu|+\lambda_1 \\ \nu/\mu \text{ は水平帯}}} s_\nu \quad (1.8)$$

であるが、右辺の和に関して  $\nu > \lambda$  となることを示れば証明が完了する。次の補題を示す。

**補題 1.2.2.12.** Young 図形  $\lambda, \mu$  について、 $\mu > \lambda$  であるとする。 $\mu$  に  $k$  個の箱を、水平帯条件が成り立つように追加してできる最小の Young 図形を  $\bar{\mu}$  とおき、同様に  $\lambda$  に  $k$  個の箱を、水平帯条件が成り立つように追加してできる最小の Young 図形を  $\bar{\lambda}$  とおく。このとき  $\bar{\mu} > \bar{\lambda}$  である。

*Proof.* 辞書式順序の定義から、 $\lambda$  や  $\mu$  に箱を追加する際、最も小さくなるようにするには各列に左から箱を足していけばよい。



また、 $\lambda < \mu$  であることは「 $\lambda$  の列数と  $\mu$  の列数を右から辞書式順序で比べたとき、 $\mu$  のほうが大きい」ということと同値であるから、 $\lambda, \mu$  の列に左から 1 つずつ箱を足しても大小は保たれる。  $\square$

式 (1.8) において  $\nu/\mu$  は水平帯であり、 $\mu > \lambda'$  だったが、 $\lambda'$  に  $\lambda_1$  個の箱を水平帯となるように追加した最小の Young 図形は  $\lambda$  に他ならなかったから、補題により  $\nu > \lambda$  である。  $\square$

Pieri の規則は Littlewood-Richardson 規則に比べ少ない結合係数しか記述できないと思われるかもしれない。しかし実際は Pieri の規則を繰り返し使うことによってすべての Littlewood-Richardson 数を求めることができる。

**例 1.2.2.13.** Pieri の規則より  $s_{\square}s_{\square\square} = s_{\square\square\square} + s_{\square\square}$  が成り立つから、

$$s_{\square\square} = s_{\square}s_{\square\square} - s_{\square\square\square} = \begin{vmatrix} s_{\square} & s_{\square\square\square} \\ 1 & s_{\square\square} \end{vmatrix}$$

これより、たとえば

$$\begin{aligned} s_{\square\square}s_{\square} &= (s_{\square}s_{\square\square} - s_{\square\square\square})s_{\square} \\ &= s_{\square}s_{\square\square}s_{\square} - s_{\square\square\square}s_{\square} \\ &= s_{\square}(s_{\square\square\square} + s_{\square\square}) - s_{\square\square\square\square} - s_{\square\square\square} \\ &= (s_{\square\square\square\square} + s_{\square\square\square} + s_{\square\square\square}) + (s_{\square\square\square} + s_{\square\square\square} + s_{\square\square\square}) - s_{\square\square\square\square} - s_{\square\square\square} \\ &= s_{\square\square\square} + s_{\square\square\square} + s_{\square\square\square} + s_{\square\square} \end{aligned}$$

このように一般に Young 図形  $\lambda$  に対して  $s_{\lambda}$  を 1 行 Young 図形に対する Schur 多項式 (それはすなわち  $h_k$ ) の多項式で表すことができればよい。

**定理 1.2.2.14** (Jacobi-Trudi の公式).  $n$  行 Young 図形  $\lambda \in \mathcal{Y}_n$  に対して

$$s_{\lambda} = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq n} = \det(s_{(\lambda_i - i + j)})_{1 \leq i, j \leq n}$$

が成り立つ。ただし  $\lambda_i + i - j < 0$  なら  $h_{\lambda_i - i + j} = 0$  とする。

*Proof.* 次の補題が成り立つ。

**補題 1.2.2.15.**  $n > 1$  とする。  $\lambda \in \mathcal{Y}_n$  に対して、

$$s_\lambda = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} s_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}-1, \dots, \lambda_n-1} \cdot h_{\lambda_k+d-k}$$

が成り立つ。

この補題を認めると  $n$  に関する数学的帰納法により公式が従う。 $n = 1$  なら  $s_\lambda = h_\lambda$  ゆえに成り立つ。右辺の行列式を第  $n$  列に関して余因子展開して、

$$\det(h_{\lambda_i-i+j})_{1 \leq i, j \leq n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} s_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}-1, \dots, \lambda_n-1)} \cdot h_{\lambda_k+d-k} = s_\lambda$$

となる。補題 1.2.2.15 を示そう。

*Proof.* 右辺の和に関して、  $s_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}-1, \dots, \lambda_n-1)} \cdot h_{\lambda_k+d-k}$  に Pieri の規則を適用して現れる Young 図形の集合を  $J_k$  とおく。すなわち

$$s_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}-1, \dots, \lambda_n-1)} \cdot h_{\lambda_k+d-k} = \sum_{\mu \in J_k} s_\mu$$

とする。 $J_k$  は、 $\lambda$  の第  $k$  行目の箱と  $k+1$  行以降の一番右にある箱をすべて取り除いてできる Young 図形

$$\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}-1, \dots, \lambda_n-1)$$

に、取り除いた箱の数だけ水平帯を追加してできる Young 図形のなす集合である。

- (i)  $J_k(m) = \{ \mu \in J_k \mid \lambda_m > \mu_m \text{ かつ } j < m \implies \lambda_j \leq \mu_j \}$  とすると  $J_k = J_k(k) \sqcup J_k(k+1)$  である。

$\mu \in J_k$  であるならば、定義から  $\lambda_1 \leq \mu_1, \dots, \lambda_{k-1} \leq \mu_{k-1}$  である。したがって  $J_k(1), \dots, J_k(k-1) = \emptyset$  であることがわかる。 $m > k+1$  として、もし  $\mu \in J_k(m)$  が存在したならば

$$\lambda_{k+1} \leq \mu_{k+1}$$

である。 $\mu/\lambda'$  は水平帯であるから

$$\mu_{k+1} \leq \lambda'_k = \lambda_{k+1} - 1$$

これは矛盾である。したがって  $J_k = J_k(k) \sqcup J_k(k+1)$  となる。

- (ii)  $J_1(1) = \emptyset$ ,  $J_k(k+1) = J_{k+1}(k+1)$ ,  $(1 \leq k \leq n-1)$ ,  $J_n(n+1) = \{\lambda\}$  である。

もし  $\mu \in J_1(1)$  が存在したとする。 $\mu$  は

$$\lambda' = (\lambda_2 - 1, \dots, \lambda_n - 1)$$

に  $\lambda_1 + n - 1$  個の箱を水平帯条件を満たすように追加した Young 図形である。よって第  $i$  行に追加した箱の数を  $\alpha_i$  とすれば

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \lambda_1 + n - 1$$

$$\alpha_1 + \lambda_2 - 1 < \lambda_1 \quad (J_1(1) \text{ の定義})$$

$$\alpha_i + \lambda_{i+1} - 1 \leq \lambda_i - 1, \quad 2 \leq i \leq n, \text{ (水平帯条件)}$$

下 2 つの不等式の両辺を足すと、

$$n < 1$$

が従うが、これは矛盾である。

次に  $J_n(n+1) = \{\lambda\}$  を示そう。 $\mu \in J_n(n+1)$  は

$$\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$$

に  $\lambda_n$  個の箱を、水平帯条件が成り立つように追加してできる。 $J_n(n+1)$  の定義から  $\mu_n \geq \lambda_n$  でなければならないから、 $\mu_n = \lambda_n$  にするしかなく、これは  $\mu = \lambda$  に他ならない。

$J_k(k+1) = J_{k+1}(k+1)$ ,  $1 \leq k \leq n-1$  を示す。 $\mu \in J_k(k+1)$  である条件をすべて書き出すと

$$\mu_1 \geq \lambda_1, \dots, \mu_k \geq \lambda_k, \mu_{k+1} < \lambda_{k+1}, \quad (J_k(k+1) \text{ の定義})$$

$$\mu_2 \leq \lambda_1, \dots, \mu_k \leq \lambda_{k-1},$$

$$\mu_{k+1} \leq \lambda_{k+1} - 1, \dots, \mu_n \leq \lambda_n - 1 \quad (\text{水平帯条件})$$

である。 $\mu \in J_{k+1}(k+1)$  である条件も書き出せば

$$\mu_1 \geq \lambda_1, \dots, \mu_k \geq \lambda_k, \mu_{k+1} < \lambda_{k+1}, \quad (J_{k+1}(k+1) \text{ の定義})$$

$$\mu_2 \leq \lambda_1, \dots, \mu_k \leq \lambda_{k-1},$$

$$\mu_{k+1} \leq \lambda_{k+1}, \mu_{k+2} \leq \lambda_{k+2} - 1, \dots, \mu_n \leq \lambda_n - 1 \quad (\text{水平帯条件})$$

となるが、 $\mu_{k+1} < \lambda_{k+1}$  が  $\mu_{k+1} \leq \lambda_{k+1} - 1$  であることに注意すればこれらは同値である。

(i),(ii) より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \sum_{\mu \in J_k} s_\mu &= \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \left( \sum_{\mu \in J_k(k)} s_\mu + \sum_{\mu \in J_k(k+1)} s_\mu \right) \\ &= (-1)^{n-1} \left( \sum_{\mu \in J_1(1)} s_\mu + \sum_{\mu \in J_1(2)} s_\mu \right. \\ &\quad - \sum_{\mu \in J_2(2)} s_\mu - \sum_{\mu \in J_2(3)} s_\mu \\ &\quad + \sum_{\mu \in J_3(3)} s_\mu + \sum_{\mu \in J_3(4)} s_\mu \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^{n-2} \sum_{\mu \in J_{n-1}(n-1)} s_\mu + (-1)^{n-2} \sum_{\mu \in J_{n-1}(n)} s_\mu \\ &\quad \left. + (-1)^{n-1} \sum_{\mu \in J_n(n)} s_\mu + (-1)^{n-1} \sum_{\mu \in J_n(n+1)} s_\mu \right) \\ &= s_\lambda \end{aligned}$$

よって示せた。 □

□

Jacobi-Trudi 公式より、 $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  は  $\{h_k\}_{k=1,2,\dots}$  によって ( $\mathbb{Z}$  代数として) 生成されることがわかる。

また、証明からわかるように Jacobi-Trudi の公式は Pieri の規則からのみ導かれている。したがって一般に  $\mathcal{Y}_n$  を基底に持つ環  $R$  において、Pieri の規則：

$$\lambda \cdot (k) = \sum_{\substack{|\nu|=|\mu|+k \\ \nu/\mu \text{ は水平帯}}} \nu$$

が成り立つとき、 $R$  でも Jacobi-Trudi の公式が成り立つから、 $R$  は対称多項式環  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  に同型である。とくにその同型は

$$R \ni \lambda \mapsto s_\lambda \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

によって得られる。

## 第 2 章

# 対称群と一般線形群の表現

表現論とは群や多元環をベクトル空間への作用を通して研究する分野である。第 2 章では最も古典的な有限群の表現論の一般論 (Maschke の定理と指標理論, 群環) と対称群と一般線形群の表現について述べる。とくに対称群・一般線形群の表現は対称多項式と深いかわりを持っている。

なお第 2 章で環は、乗法単位元をもつ必ずしも可換とは限らない環を指すとする。また、単に加群といったら環上の左加群を指しているとする。

本章は [1],[3],[5],[6],[7],[9],[10],[11],[12] をまとめた内容になっている。

## 2.1 有限群の表現論

### 2.1.1 既約表現と Maschke の定理

**定義 2.1.1.1.**  $G$  を群、 $V$  をベクトル空間とする。群準同型  $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  が与えられたとき、 $(\rho, V)$  を  $G$  の表現といい  $V$  を表現空間という。 $\rho$  や  $V$  のことを表現ということもある。

以下、本節ではベクトル空間と言ったら複素数体  $\mathbb{C}$  上の有限次元ベクトル空間を指すものとし、群と言ったら有限群を指すものとする。

**例 2.1.1.2.**  $G$  を群、 $V = \mathbb{C}$  とする。 $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V) = \mathbb{C}^\times$  を、すべての  $g \in G$  に対して  $\rho(g) = 1$  とすると  $\rho$  は表現になる。これを自明な表現という。

**例 2.1.1.3.**  $G = \mathfrak{S}_n$ ,  $V = \mathbb{C}^n$  とする。 $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  を  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して

$$\rho(\sigma)(a_1, \dots, a_n) = (a_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(n)})$$

とすると  $\rho$  は表現になる。

**例 2.1.1.4.**  $G$  を群、 $\mathbb{C}[G]$  を  $G$  の元を基底にもつ自由ベクトル空間とする。 $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}[G])$  を  $g \in G$  に対して

$$\rho(g) \left( \sum_{x \in G} a_x x \right) = \sum_{x \in G} a_x gx$$

によって定めるとこれは表現になる。これを  $G$  の正則表現という。

文脈から明らかな場合や特に明示する必要がないとき、 $\rho(g)x$  のことをたんに  $gx$  と書く。表現論の基本的



な問題は、 $G$  の考えうるあらゆる作用を分類することである。表現の分類の基準となるのは、次の定義である。

**定義 2.1.1.5.**  $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$  を  $G$  の表現とする。線形写像  $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$  が

$$\rho_2(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho_1(g), \quad \text{for all } g \in G$$

をみたすとき、 $\varphi$  を  $G$  線形写像という。 $G$  線形写像の全体を  $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$  と書く。

**定義 2.1.1.6.**  $G$  の表現  $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$  の間に同型な  $G$  線形写像があるとき、 $(\rho_1, V_1)$  と  $(\rho_2, V_2)$  同値な表現であるといい、

$$\rho_1 \simeq \rho_2$$

と書く。

表現の同値は同値関係になる。したがって表現の分類はその同値類を求めることと言い換えられる。いきなりすべての表現を考えるのは難しいのでまずは「小さい表現」を考えたい。そのために、与えられた表現よりも小さい表現とは何かを定義する。

**定義 2.1.1.7.**  $(\rho, V)$  を  $G$  の表現とする。 $V$  の部分空間  $W$  が  $G$  不変であるとは

$$\rho(g)W \subset W, \quad \text{for all } g \in G$$

が成り立つことをいう。このとき  $\rho': G \rightarrow \text{GL}(W)$  を

$$\rho'(g) = \rho(g)|_W$$

によって定義することができ、表現になる。 $(\rho', W)$  を  $(\rho, V)$  の部分表現という。定義より、すべての表現  $(\rho, V)$  は  $0$  と  $V$  を部分表現に持っていることに注意。これらを自明な部分表現という。

**定義 2.1.1.8.**  $G$  の表現  $(\rho, V)$  が既約であるとは、 $V$  が非自明な部分表現を持たないことをいう。

**例 2.1.1.9.**  $f: V \rightarrow W$  が  $G$  線形写像であるなら  $\ker f \subset V, \text{Im } f \subset W$  はともに  $G$  不変部分空間である。

**例 2.1.1.10.** すべての  $1$  次元表現は既約である。実際  $1$  次元のベクトル空間  $V$  の部分空間は  $0$  と  $V$  のみである。

**例 2.1.1.11.** 例 2.1.1.3 の表現を考える。

$$W = \{ (a_1, \dots, a_n) \in V \mid a_1 + \dots + a_n = 0 \}$$

とすると、 $W$  は  $G$  不変である。

$$v = (1, 1, \dots, 1) \in V$$

とし  $U = \langle v \rangle$  とおくと

$$\rho(g)v = v$$

であるから  $U$  も  $G$  不変部分空間で、自明な表現と同値である。例 2.1.1.10 より  $U$  は既約である。

与えられた表現から新しい表現を作る方法について解説する。

**定義 2.1.1.12.**  $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$  を  $G$  の表現とする。

- $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(V_1 \oplus V_2)$  を

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(x, y) = (\rho_1(x), \rho_2(y))$$

で定義する。これを  $\rho_1$  と  $\rho_2$  の直和という。

- $\rho_1 \otimes \rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(V_1 \otimes V_2)$  を

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(x \otimes y) = \rho_1(x) \otimes \rho_2(y)$$

で定義する。これを  $\rho_1$  と  $\rho_2$  の (内部) テンソル積という。

- $\rho_1^* : G \rightarrow \text{GL}(V^*)$  を

$$\rho_1^*(g)(f) = f \circ (\rho_1(g^{-1}))$$

で定義する。これを  $\rho_1$  の反傾表現という。

- $(\rho_G, V)$  を群  $G$  の表現、 $(\rho_H, W)$  を群  $H$  の表現とする。このとき  $\rho_G \boxtimes \rho_H : G \times H \rightarrow \text{GL}(V \otimes W)$  を

$$\rho_G \boxtimes \rho_H(g, h)(x \otimes y) = \rho_G(g)(x) \otimes \rho_H(h)(y)$$

で定義する。これを  $\rho_G$  と  $\rho_H$  の外部テンソル積という。

これらが実際に表現になっていることは容易にわかる。実は、有限群の複素数体上の有限次元表現は既約表現の有限個の直和に同値であることがわかる (系 2.1.1.14)。すなわち、表現の分類を考える上では本質的に最も小さい表現、既約表現のみを考えれば良いことがわかる。

**定理 2.1.1.13** (Maschke の定理).  $V$  を  $G$  の表現とする。任意の  $V$  の  $G$  不変部分空間  $W$  に対して、 $V$  の  $G$  不変部分空間  $U$  が存在し

$$V = W \oplus U$$

がなりたつ。

*Proof.* 証明のポイントは  $W$  への  $G$  不変な射影を構成することである。  $p : V \rightarrow W$  を  $G$  不変とは限らない何らかの射影とする。

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} hp(h^{-1}x)$$

と定めると、 $f$  は  $G$  線形な  $W$  への射影となる。実際任意の  $g \in G$  に対して

$$\begin{aligned} f(gx) &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} hp(h^{-1}gx) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} gkp(k^{-1}x) \quad \text{where } k = g^{-1}h \\ &= gf(x) \end{aligned}$$

より  $G$  線形性は示された。また

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gp(g^{-1}x)\right) \\ &= \frac{1}{|G|^2} \sum_{g, h \in G} gh p(h^{-1}p(g^{-1}x)) \end{aligned}$$

ここで、 $p: V \rightarrow W$  は射影で  $W$  は  $G$  不変であるから  $p(h^{-1}p(g^{-1}x)) = h^{-1}p(g^{-1}x)$  ゆえに

$$f^2(x) = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g,h \in G} gp(g^{-1}x) = f(x)$$

$f(W) \subset W$  であり、任意の  $W$  の元  $x$  に対して

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gp(g^{-1}x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gg^{-1}x = x$$

であるから  $f$  は  $W$  への射影である。したがって

$$V = \text{Im } f \oplus \ker f = W \oplus \ker f$$

が成り立つが、 $f$  は  $G$  線形なので  $\ker f$  は  $G$  不変部分空間である (例 2.1.1.9)。 □

**系 2.1.1.14.**  $V$  を  $G$  の表現とすると、既約表現  $W_1, \dots, W_r$  が存在して

$$V \simeq W_1 \oplus \dots \oplus W_r$$

が表現の同値として成り立つ。このことを  $G$  の表現の完全可約性という。

*Proof.*  $\dim_{\mathbb{C}} V$  に関する帰納法で示す。 $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$  なら  $V$  は既約であるからよい。 $\dim_{\mathbb{C}} V > 1$  で  $V$  は可約であるとする。このとき  $V$  は非自明な部分表現  $V_1$  をもつが、定理 2.1.1.13 より部分表現  $U_1$  で

$$V = V_1 \oplus U_1$$

となるものが存在する。 $\dim_{\mathbb{C}} V_1, \dim_{\mathbb{C}} U_1 < \dim_{\mathbb{C}} V$  であるから帰納法の仮定により、

$$\begin{aligned} V_1 &= W_1 \oplus \dots \oplus W_{s_1}, \\ U_1 &= W_{s_1+1} \oplus \dots \oplus W_r, \quad \text{各 } W_i \text{ は既約} \end{aligned}$$

と既約分解できる。したがって  $V$  も既約分解される。 □

**注意 2.1.1.15.** 定理 2.1.1.13 は標数が群の位数と互いに素な任意の体上で成立する。実際証明中で  $|G|$  で割る操作があるが、それ以外体に依存する議論はしていない。しかし  $G$  の位数が無限の場合は成り立たない。例えば無限巡回群  $\mathbb{Z}$  の表現として

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える。 $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  の固有空間  $V(1)$  は  $\mathbb{Z}$  不変だが、 $\mathbb{Z}$  不変な補空間をもたない。

ただし定理 2.1.1.13 の証明は  $V$  が無限次元であっても通用する<sup>\*1</sup>。しかし系 2.1.1.14 の証明は次元に関する帰納法を用いているので無限次元では通用しない。「有限個」の既約表現に分解できるということがポイントである。

---

<sup>\*1</sup> 選択公理により、無限次元ベクトル空間においても任意の部分空間に対する補空間が存在し、それにより射影が得られる。

## 2.1.2 有限群の表現に対する指標

次に既約表現の分類をする上で鍵となる指標の概念を導入する。

**定義 2.1.2.1.**  $(\rho, V)$  を  $G$  の表現とする。  $\chi_V : G \rightarrow \mathbb{C}$  を

$$\chi_V(g) = \text{tr} \rho(g)$$

で定め、これを  $V$  の指標という。

本節では指標の直交関係 (定理 2.1.2.16) を示すことが目標である。指標は類関数と呼ばれる群上の関数になっており、類関数のなすベクトル空間に特別な内積を入れるとこの内積に関して指標が正規直交基底をなす、というのが主張である。この系として、

- 既約表現の個数は共役類の個数に等しい
- 既約表現の分類は既約指標の分類に帰着される
- 既約表現の次元に関する公式

といったさまざまな有用な事実が導かれる。

表現の各種の演算と指標との関係を見ておく

**命題 2.1.2.2.**  $V_1, V_2$  を  $G$  の表現とする。

- (i)  $\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_1 + \chi_2$
- (ii)  $\chi_{V_1 \otimes V_2} = \chi_1 \chi_2$
- (iii)  $\chi_{V_1^*} = \overline{\chi_1}$

が成り立つ。

*Proof.* (i)  $\text{tr}(A \oplus B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$  より従う。

(ii)  $\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$  より従う。

(iii)  $\rho^*(g) = {}^t \rho(g^{-1})$  であるから、 $\text{tr}(\rho^*(g)) = \text{tr}({}^t \rho(g^{-1})) = \text{tr}(\rho(g^{-1}))$  となる。ここで、 $G$  は有限群であるから  $\rho(g)$  は有限位数、したがってユニタリ行列である。よって  $\rho(g)$  の固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  はすべて絶対値が 1 なので

$$\text{tr}(\rho(g^{-1})) = \frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_n} = \overline{\lambda_1} + \dots + \overline{\lambda_n} = \overline{\text{tr}(\rho(g))}$$

である。

□

**例 2.1.2.3.** 自明な表現の指標は 1 である。

**例 2.1.2.4.**  $G = \mathfrak{S}_n$  として  $V = \mathbb{C}^n$  を

$$\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}$$

によって表現とする (例 2.1.1.3)。すなわち  $e_1, \dots, e_n$  を標準基底として

$$\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

である。よって指標を  $\chi_V$  とすれば

$$\chi_V(\sigma) = \# \{ i \in \{1, \dots, n\} \mid \sigma(i) = i \}$$

となる。  $V$  は

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 + \dots + x_n = 0 \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

として  $V = U \oplus W$  と分解されたから、

$$\chi_U = \chi_V - 1$$

となる。

**例 2.1.2.5.** 有限群  $G$  に対してその正則表現 (例 2.1.1.4)  $\mathbb{C}[G]$  を考える。任意の  $g \in G$  に対して、ある  $x \in G$  があって  $gx = x$  ならば  $g = e$  であるから、 $g$  を基底  $G$  に関して行列表示したとき  $g \neq e$  ならば対角成分はすべて 0 である。よって指標を  $R$  とすると

$$R(g) = \begin{cases} 0 & \text{if } g \neq e \\ |G| & \text{if } g = e \end{cases}$$

が成り立つ。

**例 2.1.2.6.**  $V$  を  $G$  の表現,  $\chi$  を  $V$  の指標とすると

$$\dim V = \chi(e)$$

である。実際、 $e$  の作用を行列表示すれば単位行列になるから、そのトレースは次元に等しい。

指標の直交関係を示そう。まず、いくつか必要な補題を示す。

**補題 2.1.2.7** (Schur の補題).  $V, W$  を  $G$  の既約表現とする。このとき

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} 1 & \text{if } V \simeq W \text{ as } G\text{-representation} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。とくに  $V = W$  なら  $f \in \text{Hom}_G(V, V)$  はスカラー写像である。

*Proof.* 先に後半の主張を示す。  $f : V \rightarrow V$  を  $G$  線形写像とする。  $f$  の固有空間を  $V(\lambda)$  とすると、  $V(\lambda)$  は  $G$  不変である。実際、  $x \in V(\lambda)$ ,  $g \in G$  に対して

$$f(gx) = gf(x) = g(\lambda x) = \lambda gx$$

である。  $V$  は既約であり  $V(\lambda) \neq 0$  なので  $V(\lambda) = V$  よって

$$f = \lambda \text{id}_V$$

である。

前半を示そう。 $V \simeq W$  とし  $\varphi \in \text{Hom}_G(V, W)$  を  $G$  同型として固定する。任意の  $f \in \text{Hom}_G(V, W)$  について、 $\varphi^{-1} \circ f : V \rightarrow V$  は  $G$  線形写像であるから前半の結果より

$$\varphi^{-1} \circ f = \lambda \text{id}_V$$

と表される。すなわち

$$f = \lambda \varphi$$

である。したがって  $\text{Hom}_G(V, W) = \langle \varphi \rangle$  となる。

$V \not\simeq W$  の場合、 $f \in \text{Hom}_G(V, W)$  について  $V, W$  の既約性から

$$\ker f = 0 \text{ または } V, \quad \text{Im } f = 0 \text{ または } W$$

を得るが、 $V \neq W$  より  $\ker f = V, \text{Im } f = 0$  すなわち  $f = 0$  である。これで示せた。  $\square$

**注意 2.1.2.8.** 補題 2.1.2.7 の証明より  $f \in \text{Hom}_G(V, W)$  は  $V \simeq W$  なら 0 または同型、 $V \not\simeq W$  なら  $f = 0$  であることがわかる。こちらを Schur の補題と呼ぶ場合もある。

**補題 2.1.2.9.**  $(\rho, V), (\theta, W)$  を  $G$  の表現とする。 $\text{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$  より、 $\psi : G \rightarrow \text{GL}(\text{Hom}(V, W))$  を

$$\psi(g)(f) = \theta(g) \circ f \circ \rho(g^{-1})$$

とするとこれは表現となり、

$$\chi_{\text{Hom}(V, W)} = \overline{\chi_V} \chi_W$$

が成り立つ。

*Proof.* 命題 2.1.2.2 より従う。  $\square$

**補題 2.1.2.10.**  $V$  を  $G$  の表現とし、 $V^G$  を  $G$  の固定点の集合とする。すなわち

$$V^G = \{ v \in V \mid \forall g \in G, \quad gv = v \}$$

とする。このとき  $V^G$  は  $V$  の部分表現であり

$$\dim V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)$$

が成り立つ。とくに  $V^G$  は  $G$  の自明な表現の直和である。

*Proof.*  $f : V \rightarrow V$  を

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gx$$

で定義すると  $f$  は射影になる。実際、

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g, h \in G} ghx \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} kx \\ &= f(x) \end{aligned}$$

である。 $h \in G$  に対して

$$hf(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hgx = \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} kx = f(x)$$

より  $\text{Im } f \subset V^G$  である。逆に任意の  $x \in V^G$  に対して

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gx = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x = x$$

となるから  $\text{Im } f \subset V^G$  である。射影のトレースは像の次元に等しい\*2ので

$$\text{tr}(f) = \dim \text{Im } f = |V^G|$$

だが、

$$\text{tr}(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)$$

よって示せた。 $V^G$  が  $G$  の自明な表現の直和であることは、 $V^G$  の定義そのものである。  $\square$

**例 2.1.2.11.**  $\text{Hom}(V, W)^G = \text{Hom}_G(V, W)$  である。実際  $f \in \text{Hom}(V, W)$  に対して

$$\theta(g) \circ f \circ \rho(g^{-1}) = f \Leftrightarrow \theta(g) \circ f = f \circ \rho(g)$$

である。

**定義 2.1.2.12.** 関数  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  が

$$f(g^{-1}xg) = f(x), \quad \text{for all } g \in G$$

を満たすとき、 $f$  を類関数という。類関数全体を  $C(G)$  と置くと  $C(G)$  には点ごとに和とスカラー倍を定めて  $\mathbb{C}$  ベクトル空間の構造が入る。

**例 2.1.2.13.** トレースの性質  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  より表現の指標は類関数である。

**例 2.1.2.14.**  $G$  の共役類を  $C_1, \dots, C_s$  とし、 $G$  上の関数  $\omega_i$  を

$$\omega_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in C_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定めると  $\omega_i$  は類関数であり  $\omega_1, \dots, \omega_s$  は  $C(G)$  の基底である。よって  $\dim C(G) = s$  である。

**定義 2.1.2.15.**  $\phi, \psi \in C(G)$  に対して

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\phi(g)} \psi(g)$$

によって  $\langle \cdot, \cdot \rangle : C(G) \times C(G) \rightarrow \mathbb{C}$  を定めると、これは  $C(G)$  上の Hermite 内積となる。 $C(G)$  にはいつもこの内積が入っているものとする。

---

\*2 射影は  $f^2 = f$  をみたすので固有値は 0 か 1 のどちらかであることから従う。

**定理 2.1.2.16** (指標の直交関係).  $V, W$  を  $G$  の既約表現とする。このとき

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } V \simeq W \text{ as } G\text{-representation} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。

*Proof.* 補題 2.1.2.9 と補題 2.1.2.10 および Schur の補題 (補題 2.1.2.7) から

$$\begin{aligned} \langle \chi_V, \chi_W \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{Hom}(V, W)}(g) \\ &= \dim \text{Hom}(V, W)^G \\ &= \dim \text{Hom}_G(V, W) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{if } V \simeq W \text{ as } G\text{-representation} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

□

この定理から直ちに、 $G$  の既約指標は有限個であることがわかる。とくに次が成り立つ。

**系 2.1.2.17.**  $G$  の既約指標  $\chi_1, \dots, \chi_r$  は  $C(G)$  の正規直交基底をなす。したがって  $r$  は  $G$  の共役類の数に等しい。

*Proof.* 正規直交であることは定理 2.1.2.16 で示されたので、基底であること、すなわち次を示せばよい：

$$f \in C(G) \text{ が } \langle \chi_i, f \rangle = 0 \text{ を各 } i = 1, \dots, r \text{ に対して満たせば } f = 0 \text{ である}^{*3}$$

$f$  が仮定をみたす類関数であるとする。各  $i$  について  $\chi_i$  を指標に持つ既約表現を  $(\rho_i, V_i)$  とおく。

$$0 = \langle f, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \text{tr}(\rho_i(g))$$

より、写像  $F_i : V_i \rightarrow V_i$  を

$$F_i = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \rho_i(g)$$

---

<sup>\*3</sup> 一般に内積空間  $V$  の正規直交系  $v_1, \dots, v_n$  が、性質「 $w \in V$  がすべての  $i$  に対して  $\langle w, v_i \rangle = 0$  をみたすならば  $w = 0$ 」をもてば  $v_1, \dots, v_n$  は  $V$  の基底になる。実際、任意の  $x \in V$  に対して  $w = x - (\langle x, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle x, v_n \rangle v_n)$  と置けば  $\langle w, v_i \rangle = 0$  をみたすから  $w = 0$  である。



とおけば  $\text{tr}(F_i) = 0$  である。 $F_i$  は  $G$  線形写像である。実際  $h \in G, x \in V_i$  として

$$\begin{aligned}
F_i(\rho_i(h)x) &= \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \rho_i(gh)x \\
&= \sum_{k \in G} \overline{f(kh^{-1})} \rho_i(k)x, \quad \text{where } k = gh \\
&= \sum_{k \in G} \overline{f(h^{-1}k)} \rho_i(k)x, \quad (f \text{ は類関数}) \\
&= \sum_{l \in G} \overline{f(l)} \rho_i(hl)x, \quad \text{where } l = h^{-1}k \\
&= \rho_i(h)F_i(x)
\end{aligned}$$

よって Schur の補題 (補題 2.1.2.7) よりある  $\lambda \in \mathbb{C}$  で

$$F_i = \lambda \text{id}_V$$

となるが、 $\text{tr}(F_i) = 0$  だったから  $\lambda = 0$  でなければならない。よって  $F_i = 0$  であることがわかる。

次に、 $\theta : G \rightarrow \mathbb{C}[G]$  を  $G$  の正則表現とする。ただし  $\mathbb{C}[G]$  は  $G$  を基底に持つ自由ベクトル空間である。定理 2.1.1.13 より  $\theta$  はいくつかの既約表現の直和に同値である。よって

$$\theta = \rho_1^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus \rho_r^{\oplus m_r} \quad (2.1)$$

とおく。写像  $F : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[G]$  を

$$F = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \theta(g)$$

とすれば (2.1) より

$$F = \left( \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \rho_1(g) \right)^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus \left( \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \rho_r(g) \right)^{\oplus m_r} = F_1^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus F_r^{\oplus m_r} = 0$$

よって  $e$  を  $G$  の単位元として

$$0 = F(e) = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} g$$

$G$  は一次独立であるからすべての  $g$  について  $f(g) = 0$  が成り立つ。 □

**系 2.1.2.18.**  $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$  を  $G$  の表現、対応する指標を  $\chi_1, \chi_2$  とする。 $\rho_1 \simeq \rho_2$  であるための必要十分条件は  $\chi_1 = \chi_2$  が成り立つことである。とくに既約表現の同値類も、共役類と同じ数だけ存在する。

*Proof.* 必要性は明らか。十分性を示す。 $V_1, V_2$  が既約である場合だけを考えれば、既約指標の一次独立性から従う。もし  $\chi_1 = \chi_2$  かつ  $V_1 \not\simeq V_2$  であったとする。Schur の補題より

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \dim \text{Hom}_G(V_1, V_2) = 0$$

となるが  $\chi_1, \chi_2 \neq 0$  なので矛盾である。 □

**系 2.1.2.19.**  $V$  を  $G$  の表現、 $W_1, \dots, W_r$  を  $G$  の既約表現の同値類の完全代表系とし、それぞれの対応する指標を  $\chi, \chi_1, \dots, \chi_r$  とおく。

$$V \simeq W_1^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus W_r^{\oplus m_r}$$

とすると、

$$m_i = \langle \chi, \chi_i \rangle = \dim \operatorname{Hom}_G(W_i, V)$$

が成り立つ。 $m_i$  を  $V$  の  $W_i$  に関する重複度という。とくに表現の既約表現への分解は同値の違いを除いて一意である。

**系 2.1.2.20.** 指標  $\chi$  が既約指標であるための必要十分条件は  $\langle \chi, \chi \rangle = 1$  が成り立つことである

*Proof.* 必要性は明らか。十分性を示す。 $\chi = m_1\chi_1 + \cdots + m_r\chi_r$  とおくと

$$\langle \chi, \chi \rangle = 1$$

であるならば

$$m_1^2 + \cdots + m_r^2 = 1$$

ゆえにある  $i$  で  $\chi = \chi_i$  である。 □

**系 2.1.2.21** (Schur の補題の逆).  $V$  を  $G$  の表現とする。 $\dim \operatorname{Hom}_G(V, V) = 1$  であるならば  $V$  は既約表現である。

*Proof.*  $\chi$  を  $V$  の指標とすると、補題 2.1.2.9, 補題 2.1.2.10 より条件は

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = 1$$

すなわち  $\langle \chi, \chi \rangle = 1$  に他ならない。 □

**命題 2.1.2.22.**  $W_1, \dots, W_r$  を  $G$  の既約表現の同値類の完全代表系とする。

$$|G| = (\dim W_1)^2 + \cdots + (\dim W_r)^2$$

が成り立つ。

*Proof.*  $\theta$  を  $G$  の正則表現とする。 $\theta$  の指標を  $R$ ,  $W_i$  の指標を  $\chi_i$  とおく。系 2.1.2.19 より  $\theta$  の  $W_i$  に関する重複度を  $m_i$  とおくと

$$m_i = \langle R, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{R(g)} \chi_i(g)$$

ここで、

$$R(g) = \operatorname{tr}(\theta(g)) = \begin{cases} 0 & \text{if } g \neq e \\ |G| & \text{if } g = e \end{cases}$$

であるから

$$m_i = \chi_i(e) = \dim W_i$$

よって

$$R = (\dim W_1)\chi_1 + \cdots + (\dim W_r)\chi_r$$

であるから

$$|G| = R(e) = (\dim W_1)^2 + \cdots + (\dim W_r)^2$$

が成り立つ。 □

**命題 2.1.2.23.**  $V$  を  $G$  の表現とする。

$$V \simeq \bigoplus_{i=1}^r W_i \otimes_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(W_i, V)$$

が成り立つ。

*Proof.*  $\phi_i : W_i \otimes_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(W_i, V) \rightarrow V$  を

$$\phi_i(x \otimes f) = f(x)$$

を双線形に拡張して定める。

$$\phi(gx \otimes f) = f(gx) = g(f(x)) = \phi(x \otimes gf)$$

より  $\phi$  は  $G$  線形である。 $\phi = \bigoplus_i \phi_i$  とする。

$V$  の既約分解

$$V = \bigoplus_i^r (U_1^{(i)} \oplus \cdots \oplus U_{m_i}^{(i)}), \quad U_j^{(i)} \simeq W_i$$

を固定し、 $\theta_j^{(i)} : U_j^{(i)} \rightarrow W_i$  を  $G$  同型とする。 $\psi_j^{(i)} : U_j^{(i)} \rightarrow W_i \otimes_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(W_i, V)$  を

$$\psi_j^{(i)}(x) = \theta_j^{(i)}(x) \otimes \theta_j^{(i)-1}$$

として  $\psi = \bigoplus_{i,j} \psi_j^{(i)}$  とする。 $\psi$  も  $G$  線形で  $\phi \circ \psi = \text{id}$  がわかるから、次元を比べて同型であることがわかる。  $\square$

**例 2.1.2.24.**  $G = \mathfrak{S}_3$  の既約指標を全て求めよう。 $G$  の共役類は

$$e, (1, 2), (1, 2, 3)$$

で代表される 3 つであるから既約表現も 3 つある。またそれぞれの共役類の濃度は順に

$$1, 3, 2$$

である。

1 を自明な表現とし、 $\text{sgn}$  を置換の符号とすると、 $\text{sgn}$  は 1 次元の既約表現である。例 2.1.2.4 の指標を考えよう。

$$\chi_U(g) = \chi_V(g) - 1 = |\{x \in \{1, 2, 3\} \mid gx = x\}| - 1$$

であるから

$$\langle \chi_U, \chi_U \rangle = \frac{1}{6}(1 \cdot 2^2 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot (-1)^2) = \frac{6}{6} = 1$$

よって既約である。まとめると  $G$  の既約指標は次の 3 つである

	$e$	$(1, 2)$	$(1, 2, 3)$
1	1	1	1
$\text{sgn}$	1	-1	1
$\chi_U$	2	0	-1

例 2.1.2.25.  $G = \mathfrak{S}_4$  の既約指標を全て求めよう。  $G$  の共役類は

$$e, (1, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 3, 4), (1, 2)(3, 4)$$

で代表される 5 つであるから既約指標も 5 つある。またそれぞれの共役類の濃度は順に

$$1, 6, 8, 6, 3$$

である。

$\mathfrak{S}_3$  と同様、1 次元の既約表現として 1 と  $\text{sgn}$  がある。再び例 2.1.2.4 の指標を考える。

$$\chi_U(g) = |\{x \in \{1, 2, 3, 4\} \mid gx = x\}| - 1$$

であるから

$$\langle \chi_U, \chi_U \rangle = \frac{1}{24}(1 \cdot 3^2 + 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 0^2 + 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2) = \frac{24}{24} = 1$$

よって既約である。さらに  $\text{sgn}^2 = 1$  より

$$\langle \chi_U \text{sgn}, \chi_U \text{sgn} \rangle = 1$$

であることがわかるので  $\chi_U \text{sgn}$  も既約指標である。ここまですべてをまとめると次の表を得る。

	$e$	$(1, 2)$	$(1, 2, 3)$	$(1, 2, 3, 4)$	$(1, 2)(3, 4)$
1	1	1	1	1	1
$\text{sgn}$	1	-1	1	-1	1
$\chi_U$	3	1	0	-1	-1
$\chi_U \text{sgn}$	3	-1	0	1	-1
$\psi$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$

あと 1 つの指標  $\psi$  は直交関係や次元公式を用いることで具体的な作用の考察なしに求めることができる。次元公式より

$$\psi(e) = 24 - (1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2) = 4$$

ゆえに  $\psi(e) = 2$  である。直交関係より

$$\begin{cases} 6x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= -2 \\ -6x_2 + 8x_3 - 6x_4 + 3x_5 &= -2 \\ 6x_2 - 6x_4 - 3x_5 &= -6 \\ 4 + 6x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_4^2 + 3x_5^2 &= 24 \end{cases}$$

これを解くと

	$e$	$(1, 2)$	$(1, 2, 3)$	$(1, 2, 3, 4)$	$(1, 2)(3, 4)$
1	1	1	1	1	1
$\text{sgn}$	1	-1	1	-1	1
$\chi_U$	3	1	0	-1	-1
$\chi_U \text{sgn}$	3	-1	0	1	-1
$\psi$	2	0	-1	0	2

$\psi$  を指標に持つ既約表現は  $\mathfrak{S}_3$  の既約表現からつくることができる。  $\mathfrak{S}_3$  の既約表現

$$U' = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

を考える。 $\mathfrak{S}_4$  の正規部分群  $N = \{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$  を考えると、

$$\mathfrak{S}_4/N \simeq \mathfrak{S}_3$$

となる<sup>\*4</sup>。

$$\mathfrak{S}_4 \rightarrow \mathfrak{S}_4/N \simeq \mathfrak{S}_3 \rightarrow \mathrm{GL}(U')$$

は既約表現になる<sup>\*5</sup>が、その指標を  $\psi'$  とおくと  $\psi' = \psi$  となることが確認できる。

### 2.1.3 群環

本節では群環という代数を導入し、環上の加群論を用いた表現論に関するいくつかの命題を証明する。

**定義 2.1.3.1.**  $G$  を群,  $K$  を体とする。 $K[G]$  を  $G$  を基底にもつ  $K$  上の自由ベクトル空間とし、 $G$  の積から自然に定まる演算で  $K[G]$  に積を入れる。すなわち

$$\left( \sum_{g \in G} a_g g \right) \cdot \left( \sum_{h \in G} b_h h \right) = \sum_{k \in G} \left( \sum_{gh=k} a_g b_h \right) k$$

である。これによって  $K[G]$  は  $K$  上の多元環の構造をもつ。これを  $G$  の  $K$  上の群環という。

$V$  を  $G$  の体  $K$  上の表現とする。 $V$  は自然に  $K[G]$  加群の構造が入り、逆に  $K[G]$  加群は自然に  $G$  の表現とみなすことができる。

このとき、

- 部分表現は部分加群
- 表現の直和は加群の直和
- 既約表現は単純加群
- $G$  線形写像は  $K[G]$  加群の準同型
- 表現の同値は加群の同型

にそれぞれ対応することがわかる。ここで、 $A$  加群  $M$  が単純であるとは、 $M$  が非自明な部分加群をもたないことをいう。また、表現のテンソル積は  $K[G]$  加群としてのテンソル積ではないことに注意。 $V, W$  を  $K[G]$  加群とすると、 $V$  と  $W$  の表現のテンソル積は  $V \otimes_K W$  に  $g(x \otimes y) = gx \otimes gy$  による作用を入れたものである。

である。環  $A$  を  $A$  加群とみなしたとき、 $A$  の部分加群とは  $A$  の左イデアルにほかならず、 $A$  に含まれる単純  $A$  加群は  $A$  の極小左イデアルである。したがって、 $G$  の有限次元既約表現を求めることは環  $\mathbb{C}[G]$  の極小左イデアルを求めることと同等である。単純性に関連して次の定義をする。

**定義 2.1.3.2.**  $A$  加群  $M$  が半単純であるとは、任意の  $M$  の部分加群が  $M$  の直和因子であることをいう。また、任意の  $A$  加群が半単純であるとき、 $A$  を半単純環という。

**定理 2.1.3.3** (Maschke の定理).  $K[G]$  が半単純環であるための必要十分条件は、 $|G|$  が  $p = \mathrm{ch} K$  で割り切れないことである。

<sup>\*4</sup>  $\mathfrak{S}_4$  の  $X = \{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$  への共役作用を考えればよい。

<sup>\*5</sup> 一般に全射群準同型と既約表現の合成は、再び既約表現になる。

*Proof.* 十分性は定理 2.1.1.13 の証明とまったく同様である。必要性を示す。 $|G|$  が  $p$  が倍数であるとする。Wedderburn の構造定理 (付録参照) より  $K[G]$  の Jacobson 根基が 0 でないことを示せばよい。 $K[G]$  の元  $m$  を

$$m = \sum_{g \in G} g$$

とおくと、任意の  $x \in K[G]$  に対して  $xm = mx$  であり、さらに

$$m^2 = \sum_{g, h \in G} gh = |G|m = 0$$

であるから

$$(1 - xm)(1 + xm) = 1 - x^2 m^2 = 1$$

よって  $1 - xm$  は単元であるから  $m \in \text{Jac}(K[G])$  である。□

$\mathbb{C}$  の標数は 0 であるから定理 2.1.1.13 は定理 2.1.3.3 の特別な場合である。しかし系 2.1.1.14 は一般には成り立たない。考えている表現が有限次元の場合において成り立つことに注意せよ。

以下、 $K = \mathbb{C}$  の場合を考える。命題 2.1.2.22 の証明より、 $G$  の正則表現は  $G$  のすべての有限次元既約表現をその次元の数だけ直和因子にもっている。このことを群環のことで述べると、 $\mathbb{C}[G]$  は  $\mathbb{C}[G]$  加群として極小左イデアルの直和

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[G] &= L_1 \oplus \cdots \oplus L_s, \quad s = m_1 + \cdots + m_r \\ L_1, \cdots, L_{m_1} &\simeq W_1 \\ L_{m_1+1}, \cdots, L_{m_1+m_2} &\simeq W_2 \\ &\vdots \\ L_{m_1+\cdots+m_{r-1}+1}, \cdots, L_{m_1+\cdots+m_{r-1}+m_r} &\simeq W_r \end{aligned}$$

と分解できるということである。ここで  $W_1, \cdots, W_r$  は  $G$  の既約表現から定まる  $\mathbb{C}[G]$  加群であり、 $m_i = \dim_{\mathbb{C}} W_i$  である。

**定義 2.1.3.4.**  $A$  を環とする。べき等元  $e \in A$  ( $e^2 = e$ ) が原始的であるとは、

$$e = e_1 + e_2, \quad e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_1 e_2 = 0 \implies e_1 = 0 \text{ または } e_2 = 0$$

を満たすことをいう。

**命題 2.1.3.5.**  $A$  を半単純環、 $e \in A$  を単元でないとする。 $Ae$  が極小左イデアルとなるための必要十分条件は  $e$  が原始的べき等元となることである。

*Proof.*  $Ae$  が極小左イデアルであるとする。

$$e = e_1 + e_2, \quad e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_1 e_2 = 0$$

となる  $e_1, e_2 \in A$  が存在したとすると、

$$e_1 = e_1^2 = e_1^2 + e_1 e_2 = e_1 e \in Ae$$

同様に  $e_2 \in Ae$  である。よって  $Ae$  の極小性から  $Ae_1 = Ae$  or  $0$ ,  $Ae_2 = Ae$  or  $0$  である。 $Ae_1 = Ae$  であったとしよう。このとき

$$e = ce_1, \quad c \in A$$

とおくことができるから

$$e_2 = e - e_1 = (c - 1)e_1$$

よって

$$e_2 = e_2^2 = (c - 1)e_1e_2 = 0$$

$Ae_2 = A_e$  ならば同様の議論で  $e_1 = 0$  となる。

逆に  $e$  が原始的べき等元であるとする。  $I \subsetneq Ae$  を左イデアルとする。  $A$  は半単純であるから

$$Ae = I \oplus J$$

となる左イデアル  $J$  が存在する。 よって

$$e = x + y$$

となる  $x \in I, y \in J$  をとることができる。  $x \in Ae$  より

$$x = ce, \quad c \in A$$

とおくと  $xe = ce^2 = ce = x$ 。 よって

$$x = xe = x^2 + xy$$

だが、  $xy \in J$  かつ  $I \cap J = 0$  より  $xy = 0$ 。 同様に  $yx = 0$  である。 したがって  $x^2 = x, y^2 = y$  も導かれる。  $e$  は原始的なので  $x = 0$  または  $y = 0$  が成り立つが、これより  $I = 0$  または  $J = 0$  が従う。

実際、  $x = 0$  であったとして  $m \in I$  を  $m = ae$  とおけば

$$m = a(x + y) = ay \in J$$

$I \cap J = 0$  より  $m = 0$  である。 □

したがって  $G$  の既約表現を求める問題は  $\mathbb{C}[G]$  の原始的べき等元を求める問題に帰着された。 具体的に原始的べき等元を見つけるのは難しいが、対称群の場合は Young 図形とのきれいな対応により構成することができる。 次節にそのことを解説する。

最後にべき等元  $e$  を用いて  $Ae$  の形に書ける加群の間の準同型について考察する。

**命題 2.1.3.6.**  $A$  を環とする。  $e, f \in A$  をべき等元とすると、Abel 群の同型として

$$\text{Hom}_A(Ae, Af) \simeq eAf$$

が成り立つ。

*Proof.*  $\phi \in \text{Hom}_A(Ae, Af)$  に対して、

$$\phi(e) = af$$

とおくと、  $e$  はべき等元であるから

$$\phi(e) = \phi(e^2) = e\phi(e) = eaf$$

よって  $\phi \mapsto eaf$  を考えればこれが同型を与える。 □

**注意 2.1.3.7.** 証明からわかる通り、  $A$  が体  $K$  上の多元環である場合  $e$  はべき等元である必要はなく、スカラー倍のずれが許容される。 すなわち

$$e^2 = \lambda e, \quad \lambda \in K$$

となる  $e$  に対しても同様のことが成り立つ。

### 2.1.4 誘導表現

部分群の表現が与えられたとき、それを元の群に拡張する方法について解説する。

**定義 2.1.4.1.**  $G$  を群、 $H$  を  $G$  の部分群とする。 $W$  を  $H$  の表現とすると、

$$V = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$$

は左  $\mathbb{C}[G]$  加群の構造をもつ<sup>\*6</sup>。 $V$  を  $W$  が誘導する  $G$  の表現といい

$$V = \text{Ind}_H^G W$$

と書く。

誘導表現は次の普遍性で特徴づけることができる。

**定理 2.1.4.2** (誘導表現の普遍性).  $H$  を群  $G$  の部分群、 $W$  を  $H$  の表現とする。このとき  $G$  の表現  $V$  と  $H$  線形写像  $\iota: W \rightarrow V$  が一意的存在して、次の性質をもつ：

任意の  $G$  の表現  $U$  と  $H$  線形写像  $f: W \rightarrow U$  が与えられたとき、 $G$  線形写像  $\bar{f}: V \rightarrow U$  が一意的存在して

$$f = \bar{f} \circ \iota$$

が成り立つ

*Proof.* 定義 2.1.4.1 の  $V$  がこの性質を持つことを示す。 $\iota: W \rightarrow V$  を

$$\iota(x) = 1 \otimes x$$

で定めれば、 $(\mathbb{C}[H]$  上のテンソル積なので) $\iota$  は  $H$  線形写像である。 $f: W \rightarrow U$  を  $H$  線形写像とする。 $\bar{f}: V \rightarrow U$  を

$$\bar{f}(g \otimes x) = gf(x)$$

を双線形に拡張して得られる写像とすれば、より、

$$\bar{f}(g(\alpha \otimes x)) = \bar{f}(g\alpha \otimes x) = g\alpha f(x) = g\bar{f}(\alpha \otimes x)$$

$\bar{f}$  は  $G$  線形写像であり  $f = \bar{f} \circ \iota$  を満たす。 $\bar{f}$  の一意性を示す。 $G$  線形写像  $f': W \rightarrow U$  も  $f = f' \circ \iota$  を満たしたとする。 $G$  線形性から

$$f'(g \otimes x) = gf'(1 \otimes x) = gf'(\iota(x)) = gf(x) = \bar{f}(g \otimes x)$$

である。

最後にこの性質をもつ  $V$  が一意であることを示す。 $G$  の表現  $V'$  と  $H$  線形写像  $\iota': W \rightarrow V'$  がこの性質を満たしたとする。 $\iota$  の普遍性を用いれば、 $\bar{\iota}: V \rightarrow V'$  が存在して  $\iota' = \bar{\iota} \circ \iota$  が成り立つ。また、 $\iota'$  の普遍性を

---

<sup>\*6</sup> ここで  $\mathbb{C}[G]$  は右からの積で右  $\mathbb{C}[H]$  加群とみなしていることに注意。



用いれば  $\bar{\iota}': V' \rightarrow V$  が存在して  $\iota = \bar{\iota}' \circ \iota'$  が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\iota} & V \\ \downarrow \iota' & \nearrow \bar{\iota}' & \nearrow \bar{\iota} \\ V' & & \end{array}$$

$\bar{\iota}, \bar{\iota}'$  が互いに逆の写像であることを示そう。 $\bar{\iota}' \circ \bar{\iota}: V \rightarrow V$  は  $G$  線形写像であり、

$$(\bar{\iota}' \circ \bar{\iota}) \circ \iota = \bar{\iota}' \circ (\bar{\iota} \circ \iota) = \bar{\iota}' \circ \iota' = \iota$$

を満たす。しかし、 $\text{id}_V \circ \iota = \iota$  であるから、 $\iota$  の普遍性から

$$\bar{\iota}' \circ \bar{\iota} = \text{id}_V$$

でなければならない。同様に  $\bar{\iota} \circ \bar{\iota}' = \text{id}_{V'}$  である。 □

定義 2.1.4.1 は加群論的で簡単だが、どのような作用を考えているのかがわかりにくい。そこで線形代数的な誘導表現の定義もみておく。

**定義 2.1.4.3.**  $V$  を  $G$  の表現、 $W$  を  $V$  の部分空間で  $H$  の表現であるとする。 $R$  を  $G/H$  の完全代表系とする。このとき  $V$  が  $W$  から誘導されているとは

$$V = \bigoplus_{\sigma \in R} \sigma W$$

が成り立つことをいう。

$\sigma^{-1}\tau \in H$  ならば  $\sigma W = \tau W$  が成り立つのでこの定義は  $R$  の取り方によらない。 $W$  の基底を  $e_1, \dots, e_n$  として、 $R = \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$  とすれば

$$V = \mathbb{C}\sigma_1 e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\sigma_1 e_n \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\sigma_r e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\sigma_r e_n$$

$G$  の元  $g$  は  $G/H$  に左からの積で置換作用する。すなわち、各  $\sigma_i$  に対して、

$$g\sigma_i = \sigma_j h$$

となる  $\sigma_j \in R$  と  $h \in H$  が存在する。よってこのとき、 $g\sigma_i W = \sigma_j W$ 、とくに

$$g\sigma_i e_k = \sigma_j h e_k \in \sigma_j W, \quad \text{for all } k = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

となる。 $g$  の  $V$  への作用は  $G/H$  への置換作用と  $H$  の  $W$  への作用を組み合わせたようなものである。また式 (2.2) から次が従う。

**命題 2.1.4.4** (誘導表現の指標).  $V = \text{Ind}_H^G W$  のとき、

$$\chi_V(g) = \sum_{\substack{\sigma_i \in R \\ \sigma_i^{-1} g \sigma_i \in H}} \chi_W(\sigma_i^{-1} g \sigma_i) = \frac{1}{H} \sum_{\substack{\sigma \in G \\ \sigma^{-1} g \sigma \in H}} \chi_W(\sigma^{-1} g \sigma) \quad (2.3)$$

が成り立つ。

*Proof.* 式 (2.2) より、 $g$  の作用の対角成分を考えるうえで  $\sigma_i = \sigma_j$  すなわち  $i = j$  となる部分だけ考えればよいことがわかる。このとき  $\sigma_i^{-1}g\sigma_i \in H$  であり、

$$h = \sigma_i^{-1}g\sigma_i$$

であるから、あとは  $h$  の  $W$  への作用の対角成分の和をとればよいので前半の式がでる。後半については指標が類関数であること、 $|\sigma H| = |H|$  であることから従う。  $\square$

定義 2.1.4.3 が定義 2.1.4.1 と一致することを確認しておく。定義 2.1.4.3 の  $V$  が普遍性 (定理 2.1.4.2) を満たすことを示せば、一意性から従う。

$V = \bigoplus_{\sigma \in R} \sigma W$  において、 $R$  として単位元  $e$  を含むものを取り、 $W$  を  $eW$  と同一視する。この同一視を  $\iota$  とすれば  $\iota$  は  $H$  線形写像である。 $U$  を任意の  $G$  の表現とし、 $f: W \rightarrow U$  を  $H$  線形写像とする。このとき  $\bar{f}: V \rightarrow U$  を

$$\bar{f}(\sigma_i x) = \sigma_i f(x)$$

によって定義すると、 $\bar{f}$  は  $G$  線形である。実際  $g \in G$  に対して、 $g\sigma_i = \tau_j h$  となる  $\sigma_j \in R, h \in H$  をとれば

$$\bar{f}(g\sigma_i x) = \bar{f}(\sigma_j h x) = \sigma_j f(h x) = \sigma_j h f(x) = g\sigma_i f(x)$$

また、

$$\bar{f} \circ \iota(x) = \bar{f}(ex) = ef(x) = f(x)$$

**例 2.1.4.5.**  $H$  を  $G$  の部分群とする。 $X = G/H = \{H, g_1 H, \dots, g_n H\}$  とする。 $G$  の  $X$  への左からの積による置換表現を考える。すなわち  $V$  を  $X$  を基底に持つ自由ベクトル空間として、 $G$  の左からの積を線形に拡張して  $V$  を  $G$  の表現とみなす。 $V$  の部分空間  $W$  を

$$W = \mathbb{C}H \subset V$$

とすれば  $W$  は  $H$  の自明な表現であり、 $R = \{e, g_1, \dots, g_n\}$  とすれば

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}g_1 H \oplus \dots \oplus \mathbb{C}g_n H \\ &= \bigoplus_{\sigma \in R} \sigma \mathbb{C}H \\ &= \bigoplus_{\sigma \in R} \sigma W \end{aligned}$$

であるから  $V = \text{Ind}_H^G W$  である。すなわち、 $H$  の自明な表現から誘導される  $G$  の表現は  $G/H$  への置換表現である。

## 2.2 対称群の表現論

### 2.2.1 対称群の既約表現

前節までに述べたことは有限群の表現論の一般論であり、具体的な群が与えられたときその表現を求める手法を提供しているわけではない。そこでこの節では対称群を例に取り上げ、既約表現の分類を行う。

$\mathcal{P}_n$  を大きさ  $n$  の Young 図形のなす集合とする。既約表現の同値類は共役類の数だけあったが、 $G = \mathfrak{S}_n$  の共役類は置換の型によって  $\mathcal{P}_n$  と 1 対 1 に対応することが知られている。さらに  $G$  の既約表現は  $\mathcal{P}_n$  から自然に作ることができる。

**定義 2.2.1.1.**  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  の各箱に 1 から  $n$  の各数字を重複なく書き入れた図を形  $\lambda$  の標準タブローという。 $T$  を標準タブローとし、 $T$  の  $i$  行目の箱に書かれている数字の集合を  $H_i(T)$ , 同様に  $T$  の  $j$  列目の箱に書かれている数字の集合を  $V_j(T)$  とする。

**定義 2.2.1.2.**  $T$  を形  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$  の標準タブローとする。 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して、 $\sigma T$  を各数字を  $\sigma$  によって置換してできる標準タブローとする。

- 各  $i$  に対して  $H_i(\sigma T) = H_i(T)$  が成り立つなら  $\sigma$  を  $T$  の水平置換という。 $T$  の水平置換の全体は  $G$  の部分群をなす。これを  $\mathcal{H}_T$  と書き、 $T$  の水平置換群という。 $\mathcal{H}_T = \mathfrak{S}(H_1(T)) \times \dots \times \mathfrak{S}(H_s(T))$  である。
- 各  $j$  に対して  $V_j(\sigma T) = V_j(T)$  が成り立つなら  $\sigma$  を  $T$  の垂直置換という。 $T$  の垂直置換の全体は  $G$  の部分群をなす。これを  $\mathcal{V}_T$  と書き、 $T$  の垂直置換群という。 $\mathcal{V}_T = \mathfrak{S}(V_1(T)) \times \dots \times \mathfrak{S}(V_{\lambda_1}(T))$  である。

**例 2.2.1.3.** 形 


 の標準タブロー  $T =$ 

4	5	1
3	2	

 に対して、

$$\mathcal{H}_T = \mathfrak{S}(\{1, 4, 5\}) \times \mathfrak{S}(\{2, 3\}), \quad \mathcal{V}_T = \mathfrak{S}(\{3, 4\}) \times \mathfrak{S}(\{2, 5\})$$

である。

**例 2.2.1.4.** Young 図形  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathcal{P}_n$  に対して、 $\lambda$  の第 1 行に  $1, 2, \dots, \lambda_1$  を、 $\lambda$  の第 2 行に  $\lambda_1 + 1, \lambda_1 + 2, \dots, \lambda_1 + \lambda_2$  を、と続けてできる標準タブローを  $\lambda$  から定まる自然なタブローという。

例 2.2.1.3 の Young 図形の自然なタブローは 

1	2	3
4	5	

水平置換  $\sigma$  が垂直置換でもあるならば、 $\sigma$  の引き起こす各  $H_i(T)$  上の置換は恒等置換でなければならない。したがって  $\sigma = e$  である。よって  $\mathcal{H}_T \cap \mathcal{V}_T = \{e\}$  が成り立つ。また  $\mathcal{H}_{gT} = g\mathcal{H}_Tg^{-1}$ ,  $\mathcal{V}_{gT} = g\mathcal{V}_Tg^{-1}$  が成り立つ。実際

$$\begin{aligned} \sigma \in \mathcal{H}_{gT} &\Leftrightarrow \sigma gT = gT \\ &\Leftrightarrow g^{-1}\sigma gT = T \\ &\Leftrightarrow \sigma \in g\mathcal{H}_Tg^{-1} \end{aligned}$$

群環  $\mathbb{C}[G]$  の元  $a_T, b_T, c_T$  を

$$a_T = \sum_{\sigma \in \mathcal{H}_T} \sigma, \quad b_T = \sum_{\tau \in \mathcal{V}_T} \text{sgn}(\tau)\tau, \quad c_T = a_T b_T = \sum_{\sigma \in \mathcal{H}_T, \tau \in \mathcal{V}_T} \text{sgn}(\tau)\sigma\tau$$

によって定める。 $c_T$  を Young 対称子という。 $c_T$  は 0 でない。実際  $c_T$  の和に現れる  $\sigma\tau$  はすべて異なる元である。なぜならもし  $\sigma\tau = \sigma'\tau', (\sigma, \sigma' \in \mathcal{H}_T, \tau, \tau' \in \mathcal{V}_T)$  ならば、 $\mathcal{H}_T \cap \mathcal{V}_T = e$  より  $\sigma = \sigma', \tau = \tau'$  である。

**定理 2.2.1.5.**  $\mathbb{C}[G]$  の左イデアル  $\mathbb{C}[G]c_T$  は極小である。

定理 2.2.1.5 を証明しよう。ポイントになるのは次の補題である。

**補題 2.2.1.6.**  $\alpha \in \mathbb{C}[G]$  が

- 任意の  $\sigma \in \mathcal{H}_T$  に対して  $\sigma\alpha = \alpha$
- 任意の  $\tau \in \mathcal{V}_T$  に対して  $\alpha\tau = \text{sgn}(\tau)\alpha$

を満たすならば、 $\alpha$  は  $c_T$  のスカラー倍である。

*Proof.*  $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$  を仮定を満たす元とする。仮定より  $\sigma \in \mathcal{H}_T$  に対して

$$\alpha = \sigma^{-1}\alpha = \sum_{g \in G} a_g \sigma^{-1}g = \sum_{g \in G} a_{\sigma g} g$$

よって

$$a_{\sigma g} = a_g \tag{2.4}$$

が成り立つ。また  $\tau \in \mathcal{V}_T$  に対しては

$$\alpha = \text{sgn}(\tau)\alpha\tau^{-1} = \sum_{g \in G} \text{sgn}(\tau)a_g g\tau^{-1} = \sum_{g \in G} \text{sgn}(\tau)a_{g\tau} g$$

より

$$a_{g\tau} = \text{sgn}(\tau)a_g \tag{2.5}$$

が成り立つ。(2.4),(2.5) より  $\sigma\tau \in \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T$  に対して

$$a_{\sigma\tau} = \text{sgn}(\tau)a_e$$

であることがわかる。よって

$$g \notin \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T \implies a_g = 0 \tag{2.6}$$

を示せば  $\alpha = a_e c_T$  となって証明が完了する。 $g$  に関する条件  $g \notin \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T$  について次の補題を示す。

**補題 2.2.1.7.**  $g \in G$  について、 $T$  の同じ行にある任意の数字  $i, j$  (ただし  $i \neq j$ ) が  $gT$  では異なる列にあるならば  $g \in \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T$  が成り立つ。

*Proof.*  $T$  の Young 図形  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  の高さ  $r$  に関する帰納法で示す。 $r = 1$  ならば  $\mathcal{H}_T = G$  なので明らか。 $r > 1$  とする。 $T$  の第 1 行にある数字に注目する。仮定から、これらは  $gT$  でそれぞれ異なる列に入っ

ているので、適当に  $gT$  に垂直置換  $\nu \in \mathcal{V}_{gT}$  を施すことで  $\nu gT$  においても第 1 行に入っているようにできる。

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & 8 & 2 \\ \hline 3 & 5 & 4 \\ \hline 1 & 6 & \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad gT = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 8 \\ \hline 6 & 7 & \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \nu gT = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 7 & 8 \\ \hline 5 & 1 & 4 \\ \hline 6 & 3 & \\ \hline \end{array}$$

すなわち

$$H_1(T) = H_1(\nu gT)$$

が成り立つようにできる。このとき  $\nu g$  は  $T$  の第 1 行への水平置換  $\sigma_1$  と、 $T$  の第 2 行以下を取り出したタブラロー  $T'$  への置換  $g'$  との積

$$\nu g = \sigma_1 g'$$

で表される。 $g'$  は  $T'$  への置換とみなせば主張の条件をみたすから、帰納法の仮定により

$$g' \in \mathcal{H}_{T'} \mathcal{V}_{T'}$$

である。 $\mathcal{H}_{T'} \subset \mathcal{H}_T$ ,  $\mathcal{V}_{T'} \subset \mathcal{V}_T$  であるから

$$g' = \sigma_2 \tau_2, \quad \sigma_2 \in \mathcal{H}_T, \tau_2 \in \mathcal{V}_T$$

と書ける。ここで  $\nu \in \mathcal{V}_{gT} = g\mathcal{V}_T g^{-1}$  であるから

$$\nu = g\tau_3 g^{-1}, \quad \tau_3 \in \mathcal{V}_T$$

と表せる。よって

$$g = \sigma_1 g' \tau_3^{-1} = \sigma_1 \sigma_2 \tau_2 \tau_3^{-1}$$

となるので示せた。 □

補題 2.2.1.6 の証明に戻ろう。(2.6) を示せばよいのであった。 $g \notin \mathcal{H}_T \mathcal{V}_T$  であるのなら、上記の補題から  $T$  の同じ行にある異なる数字  $i, j$  であって  $gT$  では同じ列にあるものが存在する。よって  $\sigma = (i, j)$  とすれば  $\sigma \in \mathcal{H}_T \cap \mathcal{V}_{gT}$  である。 $\mathcal{V}_{gT} = g\mathcal{V}_T g^{-1}$  より  $\sigma = g\tau g^{-1}$  とおけば (2.4), (2.5) より

$$a_g = a_{\sigma g} = a_{g\tau} = \text{sgn}(\tau) a_g = -a_g$$

よって  $a_g = 0$  となる。 □

**命題 2.2.1.8.**

$$c_T^2 = \frac{n!}{\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[G]c_T)} c_T$$

が成り立つ。

*Proof.*  $\sigma \in \mathcal{H}_T$ ,  $\tau \in \mathcal{V}_T$  に対して

$$\sigma a_T = \sigma \sum_{g \in \mathcal{H}_T} g = \sum_{g \in \mathcal{H}_T} \sigma g = a_T$$

であり、

$$b_T \tau = \sum_{g \in \mathcal{V}_T} \text{sgn}(g) g \tau = \text{sgn}(\tau) b_T$$

であるから、補題 2.2.1.6 よりある  $n_T \in \mathbb{C}$  で

$$c_T^2 = n_T c_T$$

となることはわかる。 $n_T$  を求めよう。 $\mathbb{C}[G]$  加群の準同型  $\phi: \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[G]$  を

$$\phi(\alpha) = \alpha c_T$$

によって定める。任意の  $g \in G$  に対して、

$$g c_T = g + \sum_{\sigma \tau \in \mathcal{H}_T \mathcal{V}_T \setminus \{e\}} \text{sgn}(\tau) g \sigma \tau$$

となるから、 $\phi$  の対角成分はすべて 1 である。よって

$$\text{tr}(\phi) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G] = n!$$

である。 $\mathbb{C}[G]$  は半単純であるから、

$$\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}[G] c_T \oplus W$$

となる左イデアル  $W$  をとる。すると

$$\mathbb{C}[G] c_T = \mathbb{C}[G] c_T^2 \oplus W c_T = \mathbb{C}[G] c_T \oplus W c_T$$

より  $W c_T = 0$  である。したがって、

$$\begin{aligned} \phi(\mathbb{C}[G] c_T) &\subset \mathbb{C}[G] c_T \\ \phi(W) &= 0 \end{aligned}$$

となることがわかる。よって

$$\text{tr}(\phi) = \text{tr}(\phi|_{\mathbb{C}[G] c_T})$$

である。 $\alpha \in \mathbb{C}[G]$  に対して

$$\phi(\alpha c_T) = \alpha \phi(c_T) = \alpha \phi(c_T^2) = n_T \alpha c_T$$

であるから、 $\mathbb{C}[G] c_T$  は  $\phi$  の固有値  $n_T$  の固有空間の部分空間である。したがって

$$\text{tr}(\phi|_{\mathbb{C}[G] c_T}) = n_T \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G] c_T$$

$c_T \neq 0$  であるから  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G] c_T \neq 0$ , よって

$$n_T = \frac{n!}{\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G] c_T}.$$

□

定理 2.2.1.5 の証明を述べる。

*Proof.* 系 2.1.2.21 より

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}(\mathbb{C}[G] c_T, \mathbb{C}[G] c_T) = 1$$

を示せばよい。命題 2.2.1.6 より  $c_T$  は適当にスカラー倍してべき等元になる。よって命題 2.1.3.6 より

$$\text{Hom}(\mathbb{C}[G] c_T, \mathbb{C}[G] c_T) = c_T \mathbb{C}[G] c_T$$

である。任意の  $c_T \alpha c_T \in c_T \mathbb{C}[G] c_T$  は補題 2.2.1.6 の仮定をみたすので

$$c_T \alpha c_T = \mu c_T, \quad \mu \in \mathbb{C}$$

と書ける。よって  $\dim_{\mathbb{C}} c_T \mathbb{C}[G] c_T = 1$  である。  $\square$

Young 対称子の定義において  $a_T, b_T$  の積の順序に本質的な違いはない。

**命題 2.2.1.9.**  $b_T a_T = \tilde{c}_T$  とおくと、 $\mathbb{C}[G] \tilde{c}_T \simeq \mathbb{C}[G] c_T$  が成り立つ。

*Proof.*  $\phi : \mathbb{C}[G] a_T b_T \rightarrow \mathbb{C}[G] b_T a_T$  を

$$\phi(x a_T b_T) = x a_T b_T a_T$$

$\psi : \mathbb{C}[G] b_T a_T \rightarrow \mathbb{C}[G] a_T b_T$  を

$$\psi(x b_T a_T) = x b_T a_T b_T$$

とすれば

$$\psi(\phi(x a_T b_T)) = \psi(x a_T b_T a_T) = x a_T b_T a_T b_T = n_T x a_T b_T$$

よって  $\psi \circ \phi$  は 0 でないスカラー倍写像なので  $\phi$  は単射、 $\psi$  は全射である。命題 2.2.1.8 とまったく同様に  $\tilde{c}_T^2 = \tilde{n}_T \tilde{c}_T$  となる 0 でないスカラー  $\tilde{n}_T$  が存在することがわかる。よって  $\phi \circ \psi$  もスカラー倍写像になるから、 $\phi$  は同型である。  $\square$

**命題 2.2.1.10.**  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  とする。 $T, U$  を  $\lambda$  に書かれた標準タブローとすると  $\mathbb{C}[G] c_T \simeq \mathbb{C}[G] c_U$  である。

*Proof.* このときある  $g \in G$  が存在して  $U = gT$  となるから、

$$\mathcal{H}_U = g \mathcal{H}_T g^{-1}, \quad \mathcal{V}_U = g \mathcal{V}_T g^{-1}$$

よって

$$c_U = a_U b_U = g a_T g^{-1} g b_T g^{-1} = g c_T g^{-1}$$

である。

$$\mathbb{C}[G] c_U = \mathbb{C}[G] g c_T g^{-1} = \mathbb{C}[G] c_T g^{-1}$$

であるから、

$$\mathbb{C}[G] c_T \simeq \mathbb{C}[G] c_T g^{-1}$$

を示せばよい。 $\phi : \mathbb{C}[G] c_T \rightarrow \mathbb{C}[G] c_T g^{-1}$  を

$$\phi(\alpha c_T) = \alpha c_T g^{-1}$$

と置けば  $\phi$  は左  $\mathbb{C}[G]$  加群の準同型で、 $g$  を右から書ける準同型が逆写像を与えるので、同型である。  $\square$

したがって、同じ Young 図形に対しては  $\mathbb{C}[G] c_T$  は標準タブロー  $T$  の取り方によらず同型である。そこで  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  に対して、 $\lambda$  の自然なタブロー (例 2.2.1.4) から定まる Young 対称子を  $c_\lambda$  とし、 $S_\lambda = \mathbb{C}[G] c_\lambda$  とおく。

次の定理を証明することで、既約表現の分類は完成する。

**定理 2.2.1.11.**  $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$  とする。

$$S_\lambda \simeq S_\mu$$

となるための必要十分条件は  $\lambda = \mu$  である。

*Proof.* 十分性は明らか。必要性を示す。 $\lambda \neq \mu$  であるとする。 $S_\lambda, S_\mu$  は既約表現なので、Schur の補題 (補題 2.1.2.7) より、

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}(S_\lambda, S_\mu) = 0$$

を証明すればよいが、命題 2.1.3.6 より、

$$\text{Hom}(S_\lambda, S_\mu) = c_\lambda \mathbb{C}[G] c_\mu$$

ゆえに、すべての  $g \in G$  に対して

$$c_\lambda g c_\mu = a_\lambda b_\lambda g a_\mu b_\mu = 0$$

が成り立つことを示せばよい。次の補題を用いる。

**補題 2.2.1.12.**  $\mathcal{P}_n$  に辞書式順序を入れ、 $\lambda < \mu$  であるとする。 $\lambda, \mu$  でその自然なタブローを表すものとする。このとき任意の  $g \in G$  に対して、 $\mu$  の同じ行にある数字  $i, j$  であって  $g\lambda$  でも同じ列にあるものが存在する。

*Proof.*  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s), \mu = (\mu_1, \dots, \mu_t)$  とおく。 $t$  についての帰納法で示す。

$t = 1$  の場合  $\lambda_1 < \mu_1$  となるから、 $\lambda$  の列数は  $\mu_1$  より少ない。よって鳩の巣原理を用いれば  $1, 2, \dots, \mu_1$  のうち、 $g\lambda$  の同じ列にあるペアが必ず存在することがわかる。

$t > 1$  とする。 $\lambda_1 < \mu_1$  である場合はまったく同様に鳩の巣原理から従う。 $\lambda_1 = \mu_1$  かつ、 $1, 2, \dots, \mu_1$  が  $g\lambda$  ではすべて異なる列に存在するとする。このとき垂直置換  $\tau \in \mathcal{V}_{g\lambda}$  を施して

$$H_1(\mu) = H_1(\tau g \lambda) = \{1, 2, \dots, \mu_1\}$$

が成り立つようにできる。そこで、 $\mu, \tau g \lambda$  の 2 行目以降をとりだしたタブロー  $\mu', (\tau g \lambda)'$  を考える。すると  $(\tau g \lambda)' < \mu'$  であるから帰納法の仮定により  $\mu'$  の同じ行にある数字  $i, j$  であって  $(\tau g \lambda)'$  では同じ列にあるものが存在する。 $i, j$  が  $(\tau g \lambda)'$  の第  $m$  列にあるとする。 $\tau$  は垂直置換であるから

$$V_m(\tau g \lambda) = V_m(g \lambda)$$

よって  $i, j$  は  $g\lambda$  の同じ列に存在する。 □

定理 2.2.1.11 の証明に戻る。補題から、 $\nu = (i, j)$  であって  $\nu \in \mathcal{H}_\mu \cap \mathcal{V}_{g^{-1}\lambda}$  となるものが存在する。よって

$$\nu = g^{-1} \pi g, \quad \pi \in \mathcal{V}_\lambda$$

とおけば

$$\begin{aligned} c_\lambda g c_\mu &= a_\lambda b_\lambda g a_\mu b_\mu \\ &= a_\lambda b_\lambda \text{sgn}(\pi) \pi g a_\mu b_\mu \\ &= a_\lambda b_\lambda \text{sgn}(\pi) g \nu a_\mu b_\mu \\ &= \text{sgn}(\pi) a_\lambda b_\lambda g a_\mu b_\mu \\ &= -c_\lambda g c_\mu \end{aligned}$$

よって

$$c_\lambda g c_\mu = 0$$

で示せた。 □



**例 2.2.1.13.**  $\lambda = (n), \mu = (1, 1, \dots, 1) \in \mathcal{P}_n$  とする。このとき  $\mathcal{H}_\lambda = \mathfrak{S}_n, \mathcal{V}_\lambda = e$  であるから、

$$c_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma$$

また  $\mathcal{H}_\mu = e, \mathcal{V}_\mu = \mathfrak{S}_n$  であるから、

$$c_\mu = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \sigma$$

したがって  $\lambda$  の定める既約表現は自明な表現 1 であり、 $\mu$  の定める既約表現は置換の符号  $\text{sgn}$  であるといわれる。

**例 2.2.1.14.**  $G = \mathfrak{S}_3$  とする。

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$$

に対応する Young 対称子は

$$c_\lambda = (e + (1, 2))(e - (1, 3)) = e + (1, 2) - (1, 3) - (1, 3, 2)$$

である。 $c_\lambda$  の定める既約表現が、例 2.1.2.24 で求めた既約表現  $U$  と一致することをたしかめる。

$$c_\lambda^2 = 3c_\lambda$$

となるから、命題 2.2.1.8 より

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]c_\lambda = 2$$

である。

$$v = c_\lambda, \quad u = (1, 2, 3)c_\lambda = -e + (1, 3) - (2, 3) + (1, 2, 3)$$

とすれば、 $\mathbb{C}[G]c_\lambda = \mathbb{C}v \oplus \mathbb{C}u$  であり、

$$\begin{aligned} (1, 2)v &= v, & (1, 2)u &= -v - u \\ (1, 2, 3)v &= u, & (1, 2, 3)u &= -v - u \end{aligned}$$

であるから、指標を  $\chi$  とすると

$$\begin{aligned} \chi(e) &= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]c_\lambda = 2 \\ \chi((1, 2)) &= 0 \\ \chi((1, 2, 3)) &= -1 \end{aligned}$$

となり、指標が一致している。

**補題 2.2.1.15.**  $\phi : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[G]$  を

$$\phi(g) = \text{sgn}(g)g$$

を線形に拡張して定める。 $\phi$  は環準同型であり、対合である。 $\alpha \in \mathbb{C}[G]$  に対して

$$\mathbb{C}[G]\alpha \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\text{sgn}} \simeq \mathbb{C}[G]\phi(\alpha)$$

が成り立つ。ここで、 $\mathbb{C}_{\text{sgn}}$  は  $\mathbb{C}_{\text{sgn}} = \mathbb{C}$  であり、

$$g \cdot \lambda = \text{sgn}(g)\lambda, \quad g \in G, \lambda \in \mathbb{C}$$

で定まる  $\mathbb{C}[G]$  加群である（すなわち  $\text{sgn}$  表現）。

*Proof.*  $f : \mathbb{C}[G]\phi(\alpha) \rightarrow \mathbb{C}[G]\alpha \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\text{sgn}}$  を

$$f(x) = \phi(x) \otimes 1$$

で定めれば  $g \in G$  として

$$\begin{aligned} gf(x) &= g(\phi(x) \otimes 1) \\ &= g\phi(x) \otimes \text{sgn}(g) \\ &= \text{sgn}(g)g\phi(x) \otimes 1 \\ &= \phi(gx) \otimes 1 \\ &= f(gx) \end{aligned}$$

より  $\mathbb{C}[G]$  加群の準同型である。任意の  $y \otimes 1 \in \mathbb{C}[G]\alpha \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\text{sgn}}$  に対して

$$f(\phi(y)) = y \otimes 1$$

となり、 $\mathbb{C}[G]\alpha \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\text{sgn}}$  は  $y \otimes 1$  の形の元で生成されるから、 $f$  は全射である。

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]\alpha \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\text{sgn}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]\alpha \cdot \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\text{sgn}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]\alpha$$

より  $f$  は同型。 □

**例 2.2.1.16.**  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  に対して、 $\lambda$  の行と列を反転させたものを共役 Young 図形といい  $\lambda^*$  と書く。

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \lambda^* = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

このとき

$$\mathbb{C}[G]c_{\lambda} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\text{sgn}} \simeq \mathbb{C}[G]c_{\lambda^*}$$

となることを示す。定義より、

$$\mathcal{H}_{\lambda^*} = \mathcal{V}_{\lambda}, \quad \mathcal{V}_{\lambda^*} = \mathcal{H}_{\lambda}$$

であるから、

$$a_{\lambda^*} = \phi(b_{\lambda}), \quad b_{\lambda^*} = \phi(a_{\lambda})$$

したがって

$$c_{\lambda^*} = \phi(b_{\lambda})\phi(a_{\lambda}) = \phi(b_{\lambda}a_{\lambda}) = \phi(\tilde{c}_{\lambda})$$

である。命題 2.2.1.9 より、

$$\mathbb{C}[G]c_{\lambda} \simeq \mathbb{C}[G]\tilde{c}_{\lambda}$$

であるから、補題 2.2.1.15 より、

$$\mathbb{C}[G]c_{\lambda^*} \simeq \mathbb{C}[G]c_{\lambda} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\text{sgn}}$$

## 2.2.2 水平置換群からの誘導表現

$\lambda \in \mathcal{P}_n$  に対して

$$M_\lambda = \text{Ind}_{\mathcal{H}_\lambda}^G(\mathbf{1})$$

とする。ここで  $\mathbf{1}$  は  $\mathcal{H}_\lambda$  の自明な表現である。例 2.1.4.5 より、 $M_\lambda$  は  $G/\mathcal{H}_\lambda$  の置換表現に他ならない (例 2.1.4.5)。  $M_\lambda = \mathbb{C}[G]a_\lambda$  となることを示す。  $\phi : M_\lambda = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[\mathcal{H}_\lambda]} \mathbf{1} \rightarrow \mathbb{C}[G]a_\lambda$  を

$$\phi(g \otimes c) = cga_\lambda$$

を  $\mathbb{C}[\mathcal{H}_\lambda]$  双線形に拡張して定める。  $h \in \mathcal{H}_\lambda$  に対して

$$\phi(gh \otimes c) = cgha_\lambda = cga_\lambda = \phi(g \otimes hc)$$

であるから  $\phi$  は well-defined であり  $\mathbb{C}[G]$  準同型である。逆に  $\psi : \mathbb{C}[G]a_\lambda \rightarrow \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[\mathcal{H}_\lambda]} \mathbf{1}$  を

$$\psi(x) = \frac{1}{|\mathcal{H}_\lambda|} x \otimes 1$$

によって定めれば  $\phi, \psi$  は互いに逆写像であるから、同型である。

$\lambda$  が 1 行の Young 図形の場合、 $\mathcal{H}_\lambda = G$  であるから、 $M_\lambda$  は自明な表現にほかならない。一方  $\lambda$  が 1 列の Young 図形の場合は  $\mathcal{H}_\lambda = 1$  であるから  $M_\lambda$  は正則表現である。

**定理 2.2.2.1** (Young の規則).  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  と、辞書式順序で  $\lambda$  より大きい  $\mu \in \mathcal{P}_n$  に対して正の整数  $k'_{\lambda\mu}$  が存在して

$$M_\lambda = S_\lambda \oplus \left( \bigoplus_{\mu > \lambda} S_\mu^{\oplus k'_{\lambda\mu}} \right)$$

*Proof.* 定理 2.1.2.16 より、

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}(M_\lambda, S_\mu) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu = \lambda \\ 0 & \text{if } \mu < \lambda \end{cases}$$

を証明すればよい。例 2.2.2 より  $M_\lambda = \mathbb{C}[G]a_\lambda$  であるから、2.1.3.6 より

$$\text{Hom}(M_\lambda, S_\mu) = \text{Hom}(\mathbb{C}[G]a_\lambda, \mathbb{C}[G]c_\mu) = a_\lambda \mathbb{C}[G]c_\mu$$

である。 $\lambda = \mu$  の場合、任意の  $\alpha \in \mathbb{C}[G]$  に対して  $a_\lambda \alpha c_\lambda$  は補題 2.2.1.6 の条件をみたすから、

$$a_\lambda \mathbb{C}[G]c_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$$

よって

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}(M_\lambda, S_\mu) = 1$$

次に  $\mu < \lambda$  のとき、補題 2.2.1.12 より、任意の  $g \in G$  に対して  $\lambda$  の同じ行にある文字  $i, j$  であって  $g\mu$  で同じ列にあるものが存在する。すなわち  $\sigma = (i, j)$  とおけば  $\sigma \in \mathcal{H}_\lambda$  かつ  $\sigma \in \mathcal{V}_{g\mu} = g\mathcal{V}_\mu g^{-1}$  である。そこで  $\sigma = g\tau g^{-1}$ ,  $\tau \in \mathcal{V}_\mu$  とおけば、

$$\begin{aligned} a_\lambda g b_\mu &= a_\lambda \sigma g b_\mu \\ &= a_\lambda g \tau b_\mu \\ &= -a_\lambda g b_\mu \end{aligned}$$

ゆえに  $a_\lambda \mathbb{C}[G]b_\mu = 0$  であるから、

$$a_\lambda \mathbb{C}[G]c_\lambda \subset a_\lambda \mathbb{C}[G]b_\mu = 0$$

よって示せた。  $\square$

Young の規則は Schur 多項式の線形結合で表すときにも現れた (系 1.2.2.11)。実際にこの二つの係数が等しいことは次節に示される。Young の規則から、対称群の既約指標の整数性が従う。

**系 2.2.2.2.**  $S_\lambda$  の指標を  $\chi_\lambda$  とおく。すべての  $g \in G$  に対して  $\chi_\lambda(g) \in \mathbb{Z}$  である

*Proof.*  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  の辞書式順序に関する数学的帰納法で示す。 $\mathcal{P}_n$  の最大元は 1 行 Young 図形  $(n)$  であるが、このとき  $S_{(n)}$  は自明な表現なので指標は当然整数値である。ある  $\lambda$  より大きいすべての Young 図形  $\mu$  に対して  $\chi_\mu$  が整数値であったとする。定理 2.2.2.1 より

$$\chi_{M_\lambda} = \chi_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} k_{\lambda\mu} \chi_\mu$$

であるが、 $M_\lambda$  は置換表現であるから  $\chi_{M_\lambda}$  は整数値である。帰納法の仮定より  $\chi_\mu$  も整数値であるから、 $\chi_\lambda$  は整数値でなければならない。  $\square$

既約指標  $S_\lambda$  の具体的な値は Frobenius の指標公式として知られている。公式を明示的に与えるのは難しいが、Schur 多項式との関連を次節 (2.3.3.7) で述べる。また、 $M_\lambda$  の指標なら比較的簡単に計算できる。

**命題 2.2.2.3.**  $g \in \mathfrak{S}_n$  を巡回置換の積に表したとき、含まれている長さ  $q$  の巡回置換の数を  $m_q$  とする。このとき、 $\chi_{M_\lambda}(g)$  は次の値に等しい

$$\chi_{M_\lambda}(g) = \sum_{q=1}^n \prod_{q=1}^n \frac{m_q!}{c_{1q}! \cdots c_{nq}!}$$

ただし和は

- $c_{p1} + 2c_{p2} + 3c_{p3} + \cdots + nc_{pn} = \lambda_p$ , for all  $p = 1, \dots, n$
- $c_{1q} + c_{2q} + c_{3q} + \cdots + c_{nq} = m_q$ , for all  $q = 1, \dots, n$

をみたす非負行列  $\{c_{pq}\} \in M_n(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  全体をわたる。

*Proof.*  $M_\lambda$  は  $G/\mathcal{H}_\lambda$  への置換表現であるから、

$$\chi_{M_\lambda}(g) = \# \{ \sigma \mathcal{H}_\lambda \in G/\mathcal{H}_\lambda \mid g\sigma \mathcal{H}_\lambda = \sigma \mathcal{H}_\lambda \} = \frac{1}{|\mathcal{H}_\lambda|} \# \{ \sigma \in G \mid g \in \mathcal{H}_{\sigma\lambda} \}$$

と書くことができる。 $N = \# \{ \sigma \in G \mid g \in \mathcal{H}_{\sigma\lambda} \}$  とおく。 $N$  は  $g$  を水平置換にもつ形  $\lambda$  の標準タブローの個数である。

$g$  がある標準タブロー  $\sigma\lambda$  の水平置換であるための必要十分条件は、 $g$  を巡回置換の積で表したときその各巡回置換  $(i_1, \dots, i_k)$  について、各文字  $i_1, \dots, i_k$  が  $\sigma\lambda$  の同一行に含まれていることである。よって、逆に  $g$  からそのような標準タブローを構成するには、 $g$  の長さ  $q$  の巡回置換が  $\lambda$  の  $p$  行目に何個含まれているかを指定し、水平置換で動かせばよい。

$g$  の長さ  $q$  の巡回置換が  $\lambda$  の  $p$  行目に  $c_{pq}$  個含まれているとする。このとき  $p$  行目に含まれる巡回置換の長さの総和が、 $\lambda$  の  $p$  行目の箱の数に等しくなければならない。また、長さ  $q$  の巡回置換は全部で  $m_q$  個ある。この 2 つの条件を式で表せば  $c_{pq}$  は

- $c_{p1} + 2c_{p2} + 3c_{p3} + \cdots + nc_{pn} = \lambda_p$ , for all  $p = 1, \dots, n$
- $c_{1q} + c_{2q} + c_{3q} + \cdots + c_{nq} = m_q$ , for all  $q = 1, \dots, n$

を満たすように動かさなければならないことがわかる。

長さ  $q$  の巡回置換を各  $p$  行目に  $c_{pq}$  個ずつ置く置き方は

$$\prod_{q=1}^n \frac{m_q!}{c_{1q}! \cdots c_{nq}!}$$

通りある。そこから  $\lambda$  の水平置換を作用させて異なる標準タブローが作れるので

$$N = \sum |\mathcal{H}_\lambda| \prod_{q=1}^n \frac{m_q!}{c_{1q}! \cdots c_{nq}!}$$

である。これより、

$$\chi_{M_\lambda} = \sum \prod_{q=1}^n \frac{m_q!}{c_{1q}! \cdots c_{nq}!}$$

□

**例 2.2.2.4.**  $\lambda = (n)$  とすると  $M_\lambda = 1$  であり、 $\lambda = (1^n)$  とすると  $M_\lambda = \mathbb{C}[G]$  である。

## 2.3 表現環と対称関数環

対称群の表現と対称多項式の間には深い関係がある。すべての対称群のすべての表現 (その同値類) をあつめたものは次数付き環の構造をもつ。また、対称多項式を無限変数に一般化した対称関数を考えると、対称関数の全体も次数付き環となる。これら 2 つの環には適切な内積を入れることができ、その内積を含め同型となることを示すのが本節の目標である。これによって表現間における結合係数を対称多項式の組み合わせ論によって記述することができるようになる。

### 2.3.1 続・対称多項式

準備として対称多項式に関してより詳しく解説する。以下正の整数  $n$  を固定し、 $\Lambda_n^k$  を  $n$  変数の  $k$  次斉次対称多項式のなす  $\mathbb{Z}$  加群とする。第 1 章の記号を復習すると、 $n$  行の Young 図形  $\lambda$  に対して

$$m_\lambda = \sum_{\alpha \sim \lambda} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

とし

$$\begin{aligned} e_k &= m_{1^k} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}, \quad (k = 1, \dots, n) \\ h_k &= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} m_\lambda = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \\ p_k &= m_{(k)} = x_1^k + \cdots + x_n^k \end{aligned}$$

とするのであった。 $e_k$  や  $h_k$  に対しては、その母関数を考えることは有用である。すなわち

$$E(t) = 1 + e_1 t + e_2 t^2 + \cdots + e_n t^n = \prod_{i=1}^n (1 + x_i t) \quad (2.7)$$

$$H(t) = 1 + h_1 t + h_2 t^2 + \cdots + (-1)^n h_n t^n + \cdots = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + x_i t} \quad (2.8)$$

である。とくに  $E(t)H(t) = 1$  であるので、 $k = 1, \dots, n$  のとき

$$e_k - h_1 e_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1} e_1 h_{k-1} + (-1)^k h_k = 0 \quad (2.9)$$

を得る。

**命題 2.3.1.1.**  $k = 1, \dots, n$  に対して

$$h_k = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_k \\ 1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{k-1} \\ 0 & 1 & e_1 & \cdots & e_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e_1 \end{vmatrix}, \quad e_k = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_k \\ 1 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{k-1} \\ 0 & 1 & h_1 & \cdots & h_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_1 \end{vmatrix}$$

*Proof.* まったく同様なので  $h_k$  の場合だけ示す。  $e_1 = h_1$  であり、  $k-1$  までこの公式が成り立っていたとすると、

$$\begin{aligned}
e_k &= h_1 e_{k-1} - h_2 e_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1} h_k \\
&= h_1 \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_{k-1} \\ 1 & h_1 & \cdots & h_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_1 \end{vmatrix} - h_2 \begin{vmatrix} h_1 & \cdots & h_{k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_1 \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{k-1} h_k \\
&= \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_k \\ 1 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{k-1} \\ 0 & 1 & h_1 & \cdots & h_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

□

次に、  $\lambda \in \mathcal{P}_k$  に対して

$$\begin{aligned}
e_\lambda &= e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_n} \\
h_\lambda &= h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_n} \\
p_\lambda &= p_{\lambda_1} \cdots p_{\lambda_n}
\end{aligned}$$

とする。

**命題 2.3.1.2.**  $\Lambda_n^k$  の部分集合

- (i)  $\{m_\lambda\}_\lambda$  ただし  $\lambda$  は大きさが  $k$  で  $n$  行
- (ii)  $\{e_\lambda\}_\lambda$  ただし  $\lambda$  は大きさが  $k$  で  $n$  列
- (iii)  $\{h_\lambda\}_\lambda$  ただし  $\lambda$  は大きさが  $k$  で  $n$  列
- (iv)  $\{s_\lambda\}_\lambda$  ただし  $\lambda$  は大きさが  $k$  で  $n$  行
- (v)  $\{p_\lambda\}_\lambda$  ただし  $\lambda$  は大きさが  $k$  で  $n$  列

について、(i)~(iv) は  $\Lambda_n^k$  の  $\mathbb{Z}$  上の基底をなし、(v) は  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda_n^k$  の基底をなす。

*Proof.* (i) は命題 1.1.1.7 の証明を斉次部分で考えればまったく同様である。(ii) については定理 1.1.1.8 の証明において、任意の対称多項式  $f$  が

$$e_1^{a_1} \cdots e_n^{a_n}$$

で生成されていることを示したことからわかる。(iv) は 1.1.2.3 の証明を斉次部分で行えばよい。(iii) については、命題 2.3.1.1 より  $\{h_\lambda\}$  が  $\{e_\lambda\}$  を生成することがわかるが、ともに集合の濃度が等しいことから基底を

なすことがわかる。(v) が基底をなすことを示そう。(v) が (iii) を生成することを示せばよい。

$$\begin{aligned}
& 1 + h_1 t + h_2 t^2 + \cdots \\
&= H(-t) \\
&= \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - x_i t} \\
&= \exp \left( \sum_{i=1}^n -\log(1 - x_i t) \right) \\
&= \exp \left( \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x_i^r t^r}{r} \right) \\
&= \exp \left( \sum_{r=1}^{\infty} \frac{p_r}{r} t^r \right) \\
&= \prod_{r=1}^{\infty} \exp \left( \frac{p_r}{r} t^r \right) \\
&= \prod_{r=1}^{\infty} \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{p_r^{m_r}}{m_r! \cdot r^{m_r}} t^{r \cdot m_r} \\
&= \left( \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{p_1^{m_1}}{m_1! \cdot 1^{m_1}} t^{m_1} \right) \cdot \left( \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{p_2^{m_2}}{m_2! \cdot 2^{m_2}} t^{2 \cdot m_2} \right) \cdot \left( \sum_{m_3=0}^{\infty} \frac{p_3^{m_3}}{m_3! \cdot 3^{m_3}} t^{3 \cdot m_3} \right) \cdots
\end{aligned}$$

となるから、Young 図形  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  に対して

$$z(\lambda) = \prod_i m_i! \cdot i^{m_i}, \quad \text{ただし } m_i \text{ は } \lambda \text{ に現れる } i \text{ の個数}$$

とおけば、最後の式は

$$\begin{aligned}
& \sum_{m_1, m_2, m_3, \dots} \frac{p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \cdots}{(m_1! \cdot 1^{m_1})(m_2! \cdot 2^{m_2})(m_3! \cdot 3^{m_3}) \cdots} t^{m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + \cdots} \\
&= \sum_{\lambda} \frac{p_{\lambda}}{z(\lambda)} t^{|\lambda|} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} \frac{p_{\lambda}}{z(\lambda)} t^k
\end{aligned}$$

となる。よって

$$h_k = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} \frac{p_{\lambda}}{z(\lambda)}$$

が成り立つ。 $n$  列の Young 図形  $\lambda$  に対して

$$h_{\lambda} = h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_s}, \quad \lambda_i \leq n$$

とおくと、

$$h_{\lambda_i} = \sum_{\mu_i \in \mathcal{P}_{\lambda_i}} \frac{p_{\mu_i}}{z(\mu_i)}$$

であるから

$$h_{\lambda} = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_s} \frac{p_{\mu_1} \cdots p_{\mu_s}}{z(\mu_1) \cdots z(\mu_s)}$$



各  $\mu_i$  は  $\lambda_i \leq n$  の分割を与えているから、 $p_{\mu_1} \cdots p_{\mu_s}$  はただか  $n$  列の Young 図形に対応するべき和対称式である。よって (v) も基底を与える。  $\square$

証明中に現れた等式は重要なので再掲しておく。

**命題 2.3.1.3.** 正の整数  $k, n$  に対して

$$h_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} \frac{p_\lambda(x_1, \dots, x_n)}{z(\lambda)}$$

が成り立つ。

後に必要になる公式を用意しておく

**補題 2.3.1.4** (Cauchy の等式). 形式的べき級数  $\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \frac{1}{1-x_i y_j}$  は次と等しい。

- (i):  $\sum_{\lambda, \lambda_{n+1}=0} h_\lambda(x_1, \dots, x_m) m_\lambda(y_1, \dots, y_n),$     ただし和は  $n$  行 Young 図形全体をわたる
- (ii):  $\sum_{\lambda} \frac{1}{z(\lambda)} p_\lambda(x_1, \dots, x_m) p_\lambda(y_1, \dots, y_n),$     ただし和はすべての Young 図形全体をわたる
- (iii):  $\sum_{\lambda} s_\lambda(x_1, \dots, x_m) s_\lambda(y_1, \dots, y_n),$     ただし和はすべての Young 図形全体をわたる

*Proof.* (i) を示す。

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \frac{1}{1-x_i y_j} \\ &= \prod_{j=1}^n H(y_j) \\ &= \prod_{j=1}^n \left( \sum_{k_j=0}^{\infty} h_{k_j}(x_1, \dots, x_m) y_j^{k_j} \right) \\ &= \left( \sum_{k_1=0}^{\infty} h_{k_1}(x_1, \dots, x_m) y_1^{k_1} \right) \cdot \left( \sum_{k_2=0}^{\infty} h_{k_2}(x_1, \dots, x_m) y_2^{k_2} \right) \cdots \left( \sum_{k_n=0}^{\infty} h_{k_n}(x_1, \dots, x_m) y_n^{k_n} \right) \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n} h_{k_1} \cdots h_{k_n} y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n} \\ &= \sum_{\lambda, \lambda_{n+1}=0} h_\lambda(x_1, \dots, x_m) m_\lambda(y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

(ii) を示す。命題 2.3.1.3 より

$$\begin{aligned}
\prod_{i,j} \frac{1}{1-x_i y_j} &= 1 + h_1(\{x_i y_j\}) + h_2(\{x_i y_j\}) + \cdots \\
&= 1 + \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_1} \frac{1}{z(\lambda)} p_\lambda(\{x_i y_j\}) + \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_2} \frac{1}{z(\lambda)} p_\lambda(\{x_i y_j\}) + \cdots \\
&= \sum_{\lambda} \frac{1}{z(\lambda)} p_\lambda(\{x_i y_j\}) \\
&= \sum_{\lambda} \frac{1}{z(\lambda)} p_\lambda(x_1, \dots, x_m) p_\lambda(y_1, \dots, y_n)
\end{aligned}$$

(iii) については、Robinson-Schensted-Knuth 対応と呼ばれる対応を用いて証明される。詳細は付録を参照。  $\square$

**補題 2.3.1.5.**  $\mu \in \mathcal{P}_k$  とし、変数の数  $n$  は  $n \geq k$  とする。

$$p_\mu = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} \xi_{\lambda\mu} m_\lambda$$

とおいたとき、

$$\xi_{\lambda\mu} = \sum \prod_{q=1}^n \frac{m_q!}{c_{1q}! \cdots c_{nq}!} = \chi_{M_\lambda}(g_\mu)$$

ただし、 $g_\mu$  は  $\mu$  を置換の型にもつ元であり、 $\mu = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n})$  であり、また和は命題 2.2.2.3 と同様

- $c_{p1} + 2c_{p2} + 3c_{p3} + \cdots + nc_{pn} = \lambda_p$ , for all  $p = 1, \dots, n$
- $c_{1q} + c_{2q} + c_{3q} + \cdots + c_{nq} = m_q$ , for all  $q = 1, \dots, n$

をみたす非負行列  $\{c_{pq}\} \in M_n(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  全体をわたる。

*Proof.*  $p_\mu = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_n^{m_n}$  であるが、

$$p_q^{m_q} = (x_1^q + x_2^q + \cdots + x_n^q)^{m_q} = \sum_{c_{1q}, c_{2q}, \dots, c_{nq} \geq 0} \frac{m_q!}{c_{1q}! c_{2q}! \cdots c_{nq}!} x_1^{qc_{1q}} x_2^{qc_{2q}} \cdots x_n^{qc_{nq}}$$

であるので、

$$\begin{aligned}
p_\mu &= \prod_{q=1}^n \sum_{c_{1q}, c_{2q}, \dots, c_{nq} \geq 0} \frac{m_q!}{c_{1q}! c_{2q}! \cdots c_{nq}!} x_1^{qc_{1q}} x_2^{qc_{2q}} \cdots x_n^{qc_{nq}} \\
&= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} \sum \prod_{q=1}^n \frac{m_q!}{c_{1q}! c_{2q}! \cdots c_{nq}!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}
\end{aligned}$$

$\square$

## 2.3.2 対称関数環

**定義 2.3.2.1.** 可算無限個の変数をもつ形式的べき級数環  $\mathbb{Z}[[x_1, x_2, \dots]]$  を考える。

$$\mathfrak{S} = \{ \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ は全単射で } f(n) \neq n \text{ なる } n \text{ が有限個} \}$$

とする\*7。

$$\Lambda = \{ f \in \mathbb{Z}[[x_1, x_2, \dots]] \mid \sigma f = f, (\text{for all } \sigma \in \mathfrak{S}), f \text{ の単項式の次数は有界} \}$$

$\Lambda$  は  $\mathbb{Z}[[x_1, x_2, \dots]]$  の部分環で対称関数環と呼ばれる。 $\Lambda^k$  を

$$\Lambda^k = \{ f \in \Lambda \mid f \text{ の単項式の次数はすべて } k \}$$

で定め、 $\Lambda^k$  の元を  $k$  次斉次対称関数という。

$$\Lambda = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k$$

より  $\Lambda$  は次数付き環の構造をもつ。

ここで、 $\Lambda$  の定義において単項式の次数が有界であることを要請するのは自然である。実際、もし仮定しなければ  $\Lambda$  は  $\Lambda^k$  の直和にはならない。

**例 2.3.2.2** (単項対称関数). 任意の Young 図形  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  に対して

$$m_\lambda = \sum_{\alpha \sim \lambda} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

とする。ここで指数  $\alpha$  は、 $\lambda$  の置換になっているもの全体をわたる。すなわちある  $\sigma \in \mathfrak{S}$  が存在して  $\alpha = \sigma \lambda$  をみたすもの全体である。 $m_\lambda$  は対称関数である。対称多項式の場合と同様の議論で、 $\Lambda^k$  は  $\{m_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}_k}$  を基底に持つことがわかる。

**例 2.3.2.3** (基本対称関数・完全対称関数).

$$e_k = m_{1^k} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

$$h_k = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} m_\lambda = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

をそれぞれ、基本対称関数、完全対称関数という。また、任意の Young 図形  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  に対して

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_n}$$

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_n}$$

とする。

$$e_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$$

$$e_2 = \sum_{i < j} x_i x_j$$

である。

**例 2.3.2.4** (べき和対称関数).  $(k) = (k, 0, \dots, 0)$  に対して

$$p_k = m_{(k)} = x_1^k + x_2^k + \cdots$$

とする。

---

\*7  $\mathfrak{S}$  は対称群  $\mathfrak{S}_n$  と自然な包含  $\iota: \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_{n+1}$  のなす帰納系の帰納極限である。

このように、対称関数はいままでみてきた対称多項式を自然に無限変数に拡張した概念であり、対称多項式で成り立っていた関係式が対称関数においても成立することが多い。このことは対称関数の  $k$  次斉次部分  $\Lambda^k$  が  $k$  次斉次対称多項式からの射影極限と考えることができることによる。 $\Lambda_n^k$  を  $n$  変数  $k$  次斉次対称多項式のなす  $\mathbb{Z}$  加群とする。 $m \leq n$  に対して準同型  $\rho_{m,n} : \Lambda_n^k \rightarrow \Lambda_m^k$  を

$$\rho_{m,n}(f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)) = f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

によって定める。ここで  $\rho_{m,n}(f)$  は実際に  $m$  変数の  $k$  次斉次対称多項式である\*8。 $l \leq m \leq n$  に対して

$$\rho_{l,m} \circ \rho_{m,n} = \rho_{l,n}$$

が成り立つから、 $\{\Lambda_n^k, \rho_{m,n}\}$  は射影系をなす。

**命題 2.3.2.5.** 上の状況において、

$$\Lambda^k = \varprojlim \Lambda_n^k$$

がなりたつ。

*Proof.*  $\theta_n : \Lambda_n^k \rightarrow \Lambda_n^k$  を  $n+1$  番目以降の変数を 0 にする写像とすれば、

$$\rho_{m,n} \circ \theta_n = \theta_m$$

が成り立つから、射影極限の普遍性から準同型

$$\theta : \Lambda^k \rightarrow \varprojlim \Lambda_n^k$$

が誘導される。 $\varprojlim \Lambda_n^k$  から  $\Lambda^k$  への写像  $\varphi$  は次のように定義する。 $\varprojlim \Lambda_n^k$  の元  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ ,  $(f_n \in \Lambda_n^k)$  に対して、 $k$  変数の部分に注目すると

$$f_k = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda m_\lambda(x_1, \dots, x_k)$$

と一意的に表せるので

$$\varphi((f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda m_\lambda$$

と定める。ただし右辺の  $m_\lambda$  は例 2.3.2.2 の対称関数である。 $\varphi$  が  $\theta$  の逆写像であることを示そう。

$$\theta_n(m_\lambda) = \begin{cases} m_\lambda(x_1, \dots, x_n) & \text{if } \lambda_{n+1} = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.10)$$

であるが、 $\lambda$  は  $k$  の分割であるので  $n \geq k$  において  $\lambda_{n+1} = 0$  である。よって  $n \geq k$  ならば

$$\theta_n(\varphi((f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}})) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda m_\lambda(x_1, \dots, x_n) \quad (2.11)$$

が成り立つ。一方、

$$f_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k(n)} d_\lambda m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$$

---

\*8 変数の置換と 0 を代入する操作が可換であることによる

とおくと  $n \geq k$  より  $\mathcal{P}_k(n) = \mathcal{P}_k$  であるから

$$f_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} d_\lambda m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$$

となる。よって  $\rho_{k,n}(f_n) = f_k$  と (2.11) より

$$f_n = \theta_n(\varphi((f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}))$$

次に  $n < k$  の場合、(2.10) より

$$\theta_n(\varphi((f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}})) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(k)} c_\lambda m_\lambda$$

となるが、

$$f_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} d_\lambda m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$$

とおけば  $\rho_{n,k}(f_k) = f_n$  より

$$f_n = \theta_n(\varphi((f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}))$$

以上より

$$\theta \circ \varphi = \text{id}$$

がわかる。逆に任意の  $f \in \Lambda^k$  に対して

$$f = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda m_\lambda$$

とおけば (2.10) より

$$\theta_k(f) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda m_\lambda(x_1, \dots, x_k)$$

であるから

$$\varphi(\theta(f)) = f$$

がわかる。 □

**注意 2.3.2.6.** 対称多項式環全体の射影極限をとっても対称関数環にはならないことに注意せよ。例えば対称多項式の列

$$f = ((1 + x_1), (1 + x_1)(1 + x_2), (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3), \dots)$$

を考えると、 $f$  は対称多項式の射影極限の元であるが、次数の有界性を満たさない所以对称関数ではない。斉次部分にわけて極限をとらなければならない。

**例 2.3.2.7.**  $n$  行の Young 図形  $\lambda$  に対して

$$\rho_{n,n+1}(m_\lambda(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})) = m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$$

が成り立つ。実際

$$\begin{aligned} \rho_{n,n+1}(m_\lambda(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})) &= \rho_{n,n+1} \left( \sum_{\alpha \sim \lambda} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \right) \\ &= \sum_{\substack{\alpha \sim \lambda \\ \alpha_{n+1}=0}} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \\ &= m_\lambda(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

よって  $k = |\lambda|$  次対称多項式の列  $(m_\lambda(x_1, \dots, x_l))_{l \in \mathbb{Z}_{\geq n}}$  は一つの対称関数を定めるが、これは単項対称関数  $m_\lambda$  に他ならない。

**例 2.3.2.8.** 例 2.3.2.7 と命題 2.3.1.2 より  $e_\lambda, h_\lambda, p_\lambda, s_\lambda$  もすべて一つの対称関数を定める。 $e_\lambda, h_\lambda, p_\lambda$  の定める対称関数は、例 2.3.2.3 と例 2.3.2.4 に他ならない。また  $s_\lambda$  の定める対称関数を Schur 関数という。

命題 2.3.1.2 より、次が成り立つ。

**命題 2.3.2.9.**  $\Lambda^k$  の部分集合

- (i)  $\{m_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}_k}$
- (ii)  $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}_k}$
- (iii)  $\{h_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}_k}$
- (iv)  $\{s_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}_k}$
- (v)  $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}_k}$

について、(i)~(iv) は  $\Lambda^k$  の  $\mathbb{Z}$  上の基底をなし、(v) は  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^k$  上の基底をなす。特に  $\lambda$  の範囲をすべての Young 図形全体に変えれば、これらは  $\Lambda$  または  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$  の基底を与える。

また、命題 2.3.1.1 や命題 2.3.1.3, 補題 2.3.1.4, Littlewood-Richardson 規則などの関係式は、そのまま対称関数においても成立することがわかる。(変数の制限  $\rho_{m,n}$  は和や積と可換である)

**命題 2.3.2.10.** 次の関係式が成り立つ\*9

$$\begin{aligned}
 \text{(i): } h_k &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_k \\ 1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{k-1} \\ 0 & 1 & e_1 & \cdots & e_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e_1 \end{vmatrix}, & e_k &= \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_k \\ 1 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{k-1} \\ 0 & 1 & h_1 & \cdots & h_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_1 \end{vmatrix} \\
 \text{(ii): } h_k &= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} \frac{p_\lambda}{z(\lambda)} \\
 \text{(iii): } \sum_{\lambda} h_\lambda(x) m_\lambda(y) &= \sum_{\lambda} \frac{1}{z(\lambda)} p_\lambda(x) p_\lambda(y) = \sum_{\lambda} s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} \\
 \text{(iv): } s_\lambda s_\mu &= \sum_{\nu} \eta_{\lambda\mu}^\nu s_\nu, \quad \text{ただし } \eta_{\lambda\mu}^\nu \text{ は Littlewood-Richardson 数} \\
 \text{(vi): } p_\mu &= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} \xi_{\lambda\mu} m_\lambda \quad \text{ここで } \xi_{\lambda\mu} = \sum_{q=1}^n \prod \frac{m_q!}{c_{1q}! \cdots c_{nq}!} = \chi_{M_\lambda}(g_\mu) \quad \text{であり } k = |\mu|
 \end{aligned}$$

以下、 $\Lambda$  の係数を  $\mathbb{Q}$  に拡大して考える。命題 2.3.2.9 より、 $\{s_\lambda\}_\lambda$  は  $\Lambda$  の基底をなすので、 $\Lambda$  に

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$$

となるような内積を入れて考える。ただし  $\delta_{\lambda\mu}$  は Kronecker のデルタである。

**命題 2.3.2.11.** 次が成り立つ：

\*9  $e_k$  の母関数  $E(t) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x_i t)$  や  $h_k$  の母関数  $H(t) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x_i t}$  を用いて補題 2.3.1.4 と同じ計算で直接示してもよい。

- (i)  $\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$
- (ii)  $\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} z(\lambda)$

*Proof.* 一般に  $\Lambda$  の基底  $\{u_\lambda\}, \{v_\lambda\}$  について

- (i)  $\langle u_\lambda, v_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$
- (ii)  $\sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y) = \prod_{i,j} \frac{1}{1-x_i y_j}$

が同値であることを示せば命題 2.3.2.10 より従う。

$u_\lambda(x) = \sum_{\nu_1} a_{\lambda\nu_1} s_{\nu_1}, v_\mu = \sum_{\nu_2} b_{\mu\nu_2} s_{\nu_2}$  とおく。(a) は

$$\sum_{\nu} a_{\lambda\nu} b_{\mu\nu} = \delta_{\lambda\mu} \quad (2.12)$$

と同値である。命題 2.3.2.10 より

$$\prod_{i,j} \frac{1}{1-x_i y_j} = \sum_{\lambda} s_\lambda(x) s_\lambda(y)$$

であり、

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} u_\lambda(x) v_\lambda(y) &= \sum_{\lambda} \sum_{\nu_1, \nu_2} a_{\lambda\nu_1} b_{\lambda\nu_2} s_{\nu_1}(x) s_{\nu_2}(y) \\ &= \sum_{\nu_1, \nu_2} \left( \sum_{\lambda} a_{\lambda\nu_1} b_{\lambda\nu_2} \right) s_{\nu_1} s_{\nu_2} \\ &= \sum_{\nu} \left( \sum_{\lambda} a_{\lambda\nu} b_{\lambda\nu} \right) s_{\nu}(x) s_{\nu}(y) + \sum_{\nu_1 \neq \nu_2} \left( \sum_{\lambda} a_{\lambda\nu_1} b_{\lambda\nu_2} \right) s_{\nu_1}(x) s_{\nu_2}(y) \end{aligned}$$

であるから、 $\{s_\lambda(x) s_\mu(y)\}_{\lambda, \mu}$  は一次独立であることに注意すれば、(b) は

$$\sum_{\lambda} a_{\lambda\nu_1} b_{\lambda\nu_2} = \delta_{\nu_1\nu_2} \quad (2.13)$$

と同値である。(2.12) と (2.13) は同値 (行列の行ベクトルが正規直交であることと列ベクトルが正規直交であることは同値) であるので、(a) と (b) も同値である。□

**系 2.3.2.12.**  $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_k$  に対して

$$h_\lambda = \sum_{\mu} \frac{\chi_{M_\lambda}(g_\mu)}{z(\mu)} p_\mu$$

が成り立つ。

*Proof.* 命題 2.3.2.11, 命題 2.3.2.10 より

$$\langle h_\lambda, p_\mu \rangle = \langle h_\lambda, \sum_{\nu \in \mathcal{P}_k} \chi_{M_\nu}(g_\mu) m_\nu \rangle = \chi_{M_\lambda}(g_\mu)$$

したがって、

$$h_\lambda = \sum_{\mu} \frac{\chi_{M_\lambda}(g_\mu)}{z(\mu)} p_\mu$$

となる。□

### 2.3.3 表現環

次に対称群の表現全体から作られる環を導入する。

**定義 2.3.3.1.**  $\mathfrak{S}_n$  の表現の同値類全体で生成される自由 Abel 群を  $\tilde{R}_n$  とする。  $D$  を

$$\{ [V \oplus W] - [V] - [W] \in R \mid V, W \text{ はそれぞれ } \mathfrak{S}_n \text{ の表現} \}$$

で生成される  $\tilde{R}_n$  の部分加群とし、  $R_n = \tilde{R}_n / D$  とする。  $R_0 = \mathbb{Z}$  として  $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$  とおく。

$\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_m$  の表現  $V, W$  に対して、

$$[V] \circ [W] = [\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} V \boxtimes W]$$

と定める。ここで、  $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$  は  $\mathfrak{S}_n$  の元を  $n+1$  から  $n+m$  を固定する置換と同一視し、  $\mathfrak{S}_m$  の元を  $1$  から  $n$  を固定する置換と同一視することで  $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$  の部分群とみなしている。  $\circ$  を双線形に拡張することによって  $R$  は可換環の構造を持つ。  $R$  を対称群の表現環という。

**命題 2.3.3.2.**  $\circ$  は実際に乗法を定め、  $R$  は次数付き可換環となる。

*Proof.* テンソル積と直和の可換性から、  $\mathfrak{S}_n$  の表現  $V, V'$  に対して

$$\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} (V \oplus V') \boxtimes W = (\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} V \boxtimes W) \oplus (\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} V' \boxtimes W)$$

よって

$$([V] + [V']) \circ [W] = [V \oplus V'] \circ [W] = [V] \circ [W] + [V'] \circ [W]$$

より  $\circ$  は双線形である。  $\circ$  が可換であることは  $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m \simeq \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$  であることからわかる。

乗法が結合的であることを示そう。すなわち

$$([V] \circ [W]) \circ [U] = [V] \circ ([W] \circ [U])$$

を示す。そのためには  $\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_m, \mathfrak{S}_l$  それぞれの表現  $V, W, U$  に対して、2つの表現

$$\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n+m} \times \mathfrak{S}_l}^{\mathfrak{S}_{n+m+l}} \left\{ (\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} V \boxtimes W) \boxtimes U \right\}, \quad \text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_{m+l}}^{\mathfrak{S}_{n+m+l}} \left\{ V \boxtimes (\text{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_l}^{\mathfrak{S}_{m+l}} W \boxtimes U) \right\}$$

の指標が等しいことをみればよい。  $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n+m} \times \mathfrak{S}_l}^{\mathfrak{S}_{n+m+l}} \left\{ (\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} V \boxtimes W) \boxtimes U \right\}$  の指標を  $\chi_A$  とおき、  $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} V \boxtimes W$  の指標を  $\chi_{A'}$  とおく。誘導指標の公式 (命題 2.1.4.4) より、

$$\chi_A(g) = \frac{1}{(n+m)! l!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+m+l} \\ \sigma^{-1} g \sigma \in \mathfrak{S}_{n+m} \times \mathfrak{S}_l}} \chi_{A'}((\sigma^{-1} g \sigma)|_{n+m}) \chi_U((\sigma^{-1} g \sigma)|_l)$$

ここで、  $(\sigma^{-1} g \sigma)|_{n+m}$  は  $\sigma^{-1} g \sigma$  の最初の  $n+m$  文字の置換への制限である。  $g$  と  $\sigma^{-1} g \sigma$  の置換の型は同じであるから、  $\sigma^{-1} g \sigma \in \mathfrak{S}_{n+m} \times \mathfrak{S}_l$  と、  $g \in \mathfrak{S}_{n+m} \times \mathfrak{S}_l$  は同値である。よって、

$$\chi_A(g) = \begin{cases} \frac{(n+m+l)!}{(n+m)! l!} \chi_{A'}(g|_{n+m}) \chi_U(g|_l) & \text{if } g \in \mathfrak{S}_{n+m} \times \mathfrak{S}_l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



となる。同様の議論で、

$$\begin{aligned}\chi_{A'}(g|_{n+m}) &= \frac{1}{n! m!} \sum_{\substack{t \in \mathfrak{S}_{n+m} \\ t^{-1}g|_{n+m} t \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}} \chi_V((t^{-1}gt)_n) \chi_W((t^{-1}gt)_m) \\ &= \begin{cases} \frac{(n+m)!}{n! m!} \chi_V(g|_n) \chi_W(g|_m) & \text{if } g \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}\end{aligned}$$

となる。結局、

$$\chi_A(g) = \begin{cases} \frac{(n+m+l)!}{n! m! l!} \chi_V(g|_n) \chi_W(g|_m) \chi_U(g|_l) & \text{if } g \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.14)$$

で、 $n, m, l$  について対称な形となった。同様に  $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_{m+l}}^{\mathfrak{S}_{n+m+l}} \{V \boxtimes (\text{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_l}^{\mathfrak{S}_{m+l}} W \boxtimes U)\}$  の指標を計算すると、(2.14) となることがわかる。  $\square$

$R$  の係数を  $\mathbb{Q}$  に拡大して考える。  $[V], [W] \in R_n$  に対して

$$\langle [V], [W] \rangle = \langle \chi_V, \chi_W \rangle$$

と定義し、 $\langle, \rangle$  を  $R$  に双線形に拡張し内積を入れる。本節の主定理が次の定理である。

**定理 2.3.3.3.**  $\varphi: \Lambda \rightarrow R$  を  $\varphi(h_\lambda) = [M_\lambda]$  によって定めると  $\varphi$  は内積を保つ環の同型であり、

$$\varphi(s_\lambda) = [S_\lambda]$$

が成り立つ。ただし  $M_\lambda$  は 2.2.2 節の誘導表現、 $S_\lambda$  は  $\lambda$  で定まる対称群の既約表現である。

*Proof.*  $\{h_\lambda\}$  は  $\Lambda$  の基底であるから  $\varphi$  は  $\mathbb{Q}$  線形写像として定義できることに注意する。また、Young の規則 (定理 2.2.2.1) より

$$[M_\lambda] = [S_\lambda] + \sum_{\mu > \lambda} k_{\lambda\mu} [S_\mu]$$

となるから、 $R_n$  の基底  $\{[S_\lambda]\}_\lambda$  に関して  $\{[M_\lambda]\}_\lambda$  を成分表示して並べたとき、対角成分がすべて 1 の上三角行列になる。すなわち  $\{[M_\lambda]\}_\lambda$  は  $R_n$  の基底となることがわかる。したがって  $\varphi$  は少なくとも線形同型であることがわかる。

$\varphi$  が環準同型であることを示す。  $h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_r}$  であるから、

$$[M_\lambda] = [M_{(\lambda_1)}] \circ \cdots \circ [M_{(\lambda_r)}]$$

となることを示せばよい。  $n = |\lambda|$  とおく。各  $M_{(\lambda_i)}$  について、 $(\lambda_i)$  は 1 行の Young 図形であるから  $M_{(\lambda_i)}$  は  $\mathfrak{S}_{\lambda_i}$  の自明な表現である。よって  $M_{(\lambda_i)} \boxtimes M_{(\lambda_j)}$  は  $\mathfrak{S}_{\lambda_i} \times \mathfrak{S}_{\lambda_j}$  の自明な表現であるから、

$$[M_{(\lambda_i)}] \circ [M_{(\lambda_j)}] = [\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{\lambda_i} \times \mathfrak{S}_{\lambda_j}}^{\mathfrak{S}_{\lambda_i + \lambda_j}} \mathbf{1}] = [M_{(\lambda_i, \lambda_j)}]$$

積は可換かつ結合的であるから

$$[M_\lambda] = [M_{(\lambda_1)}] \circ \cdots \circ [M_{(\lambda_r)}]$$

次に  $\varphi$  が内積を保つことを示す。  $\varphi$  は同型なので  $\varphi$  の逆写像  $\psi$  が内積を保つことを示せばよい。  $\psi$  を求める。

系 2.3.2.12 より

$$h_\lambda = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_n} \frac{\chi_{M_\lambda}(g_\mu)}{z(\mu)} p_\mu$$

そこで

$$\psi([V]) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_n} \frac{\chi_V(g_\mu)}{z(\mu)} p_\mu$$

と定義すると  $\psi$  は  $\varphi$  の逆写像になっている。

ここで、 $z(\mu) = \prod m_i! \cdot i^{m_i}$ , ( $m_i$  は  $\mu$  に現れる  $i$  の個数) について、 $g_\mu$  の共役類の大きさ  $|C(g_\mu)|$  を考えると

$$|C(g_\mu)| = \frac{n!}{m_1! 1^{m_1} \cdots m_n! n^{m_n}} = \frac{n!}{z(\mu)}$$

である。これは、 $n$  の置換のうち、長さ  $i$  の巡回置換は  $i$  通りの表示をもつ (例えば  $(1, 2, 3) = (3, 1, 2) = (2, 3, 1)$  である。) こと、 $m_i$  個の巡回置換の並べ替えの分重複があることを考えればわかる。よって

$$z(\mu) = \frac{n!}{|C(g_\mu)|}$$

これより、

$$\begin{aligned} \langle \psi([V]), \psi([W]) \rangle &= \left\langle \sum_{\nu_1 \in \mathcal{P}_k} \frac{\chi_V(g_{\nu_1})}{z(\nu_1)} p_{\nu_1}, \sum_{\nu_2 \in \mathcal{P}_k} \frac{\chi_W(g_{\nu_2})}{z(\nu_2)} p_{\nu_2} \right\rangle \\ &= \sum_{\nu \in \mathcal{P}_k} \frac{\chi_V(g_\nu) \chi_W(g_\nu)}{z(\nu)} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_k} |C(g_\nu)| \chi_V(g_\nu) \chi_W(g_\nu) \\ &= \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi_V(\sigma) \chi_W(\sigma) \\ &= \langle [V], [W] \rangle \end{aligned}$$

よって示せた。最後に  $\varphi(s_\lambda) = [S_\lambda]$  であることを示す。Young の規則 (系 1.2.2.11, 命題 2.2.2.1) より

$$\begin{aligned} \varphi(s_\lambda) &= \varphi(h_\lambda) - \sum_{\nu > \lambda} k_{\lambda\nu} \varphi(s_\nu) \\ &= [S_\lambda] + \sum_{\nu' > \lambda} k_{\lambda\nu'} [S'_{\nu'}] - \sum_{\nu > \lambda} k_{\lambda\nu} \varphi(s_\nu) \\ &= [S_\lambda] + \sum_{\nu > \lambda} m_{\lambda\nu} [S_\nu] \end{aligned}$$

となるような整数  $m_{\lambda\mu}$  が存在する。

$$1 = \langle \varphi(s_\lambda), \varphi(s_\lambda) \rangle = 1 + \sum_{\nu > \lambda} m_{\lambda\nu}^2$$

ゆえに  $m_{\lambda\nu} = 0$ 。よって示せた。 □

**系 2.3.3.4** (Littlewood-Richardson 規則).  $\mathfrak{S}_n$  の既約表現  $S_\lambda$ ,  $\mathfrak{S}_m$  の既約表現  $S_\mu$  について

$$\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} S_\lambda \boxtimes S_\mu = \bigoplus_{\nu} S_\nu^{\oplus \eta_{\lambda\mu}^\nu}$$

が成り立つ。ただし  $\eta_{\lambda\mu}^\nu$  は Littlewood-Richardson 数である。

**系 2.3.3.5** (Young の規則).  $k_{\lambda\mu}$  を Kostka 数とする。

$$M_\lambda = S_\lambda \oplus \left( \bigoplus_{\mu > \lambda} S_\mu^{\oplus k_{\lambda\mu}} \right)$$

が成り立つ。

*Proof.* 系 1.2.2.11, 定理 2.2.2.1 よりただちに従う。 □

**系 2.3.3.6** (Pieri の規則).  $\mathfrak{S}_n$  の既約表現  $S_\lambda$  に対して、

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+m}} S_\lambda = \bigoplus_{\substack{|\mu|=|\lambda|+m \\ \mu/\lambda \text{ は水平帯}}} S_\mu$$

**系 2.3.3.7** (Frobenius の指標公式).  $\mathfrak{S}_n$  の既約指標  $\chi_\lambda$  について、 $\chi_\lambda(g_\mu)$  の値は  $s_\lambda$  を  $\{\frac{p_\mu}{z(\mu)}\}_\lambda$  の線形結合で表したときの  $\frac{p_\mu}{z(\mu)}_\lambda$  の係数に等しい

*Proof.*

$$s_\lambda = \psi([S_\lambda]) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_n} \frac{\chi_\lambda(g_\mu)}{z(\mu)} p_\mu$$

より従う。 □

定理の応用例を紹介しよう。

**例 2.3.3.8.**  $\lambda = (n-1, 1) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \cdots \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$  とする。  $S_\lambda$  が

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\}$$

に同値であることを示す。Pieri の規則より、

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1} = S_{(n)} \oplus S_{(n-1,1)}$$

である。ここで、 $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_{n-1}$  の完全代表系を求めると

$$X = \{(1\ n), (2\ n), \dots, (n-1\ n), e\}$$

が取れる。 $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1}$  は  $X$  への置換表現に他ならない。 $v_i = (i\ n)$ ,  $v_n = e$  とおけば

$$(j\ n)v_i = \begin{cases} v_n & \text{if } i = j \\ v_j & \text{if } i = n \\ v_i & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。すなわち  $(j\ n)$  が引き起こす  $X$  上の置換は  $(j\ n)$  に他ならない。これは  $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1}$  が標準的な置換表現

$$V = \mathbb{C}^n, \quad \text{for } \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}$$

に同値であることを意味する。

$$V \simeq \mathbf{1} \oplus U$$

であり、

$$V \simeq \text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1} = S_{(n)} \oplus S_{(n-1,1)} = \mathbf{1} \oplus S_{(n-1,1)}$$

であるから

$$S_{(n-1,1)} \simeq U$$

## 2.4 一般線形群の表現と Schur-Weyl 双対性

前節までで対称群の既約表現に関して解説してきたが、次に対称群と表現論的に関係の深い一般線形群の表現について解説する。とくに多項式表現と呼ばれる表現のクラスが、Schur-Weyl 双対性を通して対称群の表現と密接にかかわりあっている。

### 2.4.1 Schur-Weyl 双対性

次の問題を考察することから始める。 $V$  を  $n$  次元ベクトル空間としたとき、テンソル空間  $V^{\otimes k}$  の部分空間として対称テンソル空間  $\text{Sym}^k(V)$ , 交代テンソル空間  $\text{Alt}^k(V)$  が

$$\begin{aligned}\text{Sym}^k(V) &= \{ v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \mid v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)} = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k, \text{ for all } \sigma \in \mathfrak{S}_k \} \\ \text{Alt}^k(V) &= \{ v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \mid v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)} = \text{sgn}(\sigma) v_1 \otimes \cdots \otimes v_k, \text{ for all } \sigma \in \mathfrak{S}_k \}\end{aligned}$$

によって定義された。

$$\dim \text{Sym}^k(V) = \binom{n+k-1}{k}, \quad \dim \text{Alt}^k(V) = \binom{n}{k}$$

より、 $k=2$  の場合

$$\dim \text{Sym}^2(V) + \dim \text{Alt}^2(V) = n^2 = \dim V \otimes V$$

であるから、 $\text{Sym}^k(V) \cap \text{Alt}^k(V) = 0$  に注意すれば

$$V \otimes V = \text{Sym}^2(V) \oplus \text{Alt}^2(V)$$

が成り立つ。 $k > 2$  のときは次元が足りず、対称テンソルと交代テンソル以外の部分が現れる。その分解を与える規則は何であろうか。特に、表現を含めた分解を考える。

$\sigma \in \mathfrak{S}_k$  に対して、

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}$$

によって  $V^{\otimes k}$  を  $\mathfrak{S}_k$  の表現とみなす。あるいは同じことだが

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)\sigma = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$$

によって右  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$  加群とみなす。

さらに、 $g \in \text{GL}(V)$  に対して

$$g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_k$$

によって  $V^{\otimes k}$  は  $\text{GL}(V)$  の表現とみなすこともできる。 $V^{\otimes k}$  は  $\mathfrak{S}_k, \text{GL}(V)$  両方の作用を同時に受けている。

**命題 2.4.1.1.** 任意の  $\sigma \in \mathfrak{S}_k, g \in \text{GL}(V)$  に対して、

$$(g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k))\sigma = g((v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)\sigma)$$

である。

*Proof.*  $u_i = gv_i$  とおく。

$$\begin{aligned}
(g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k))\sigma &= (gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_k)\sigma \\
&= (gv_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes gv_{\sigma(k)}) \\
&= g(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}) \\
&= g((v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)\sigma)
\end{aligned}$$

よって示せた。 □

$$c_{(k)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n], \quad c_{1^k} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \sigma \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \text{ とおく}$$

$$\text{Sym}^k(V) = V^{\otimes k} c_{(k)}, \quad \text{Alt}^k(V) = V^{\otimes k} c_{1^k}$$

となるが、命題 2.4.1.1 よりこの 2 つは  $\text{GL}(V)$  の表現でもある。よって  $k > 2$  のときにも、 $\lambda \in \mathcal{P}_k$  に対する Young 対称子  $c_\lambda$  による像

$$W_\lambda(V) = V^{\otimes k} c_\lambda$$

を考察することは自然である。再び命題 2.4.1.1 より  $W_\lambda(V)$  は  $\text{GL}(V)$  の部分表現になるが、このとき次が成り立つ。

**定理 2.4.1.2** (Schur-Weyl 双対性).  $W_\lambda(V)$  は  $\text{GL}(V)$  の既約表現であり、 $\mathfrak{S}_k \times \text{GL}(V)$  の表現として

$$V^{\otimes k} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_k} S_\lambda \boxtimes W_\lambda(V)$$

が成り立つ。

ポイントになるのは次の補題である。

**補題 2.4.1.3.**  $G$  を有限群,  $A = \mathbb{C}[G]$ ,  $U$  を右  $A$  加群,  $B = \text{End}_A(U)$  とおく。

- (i)  $c \in A$  に対して、左  $B$  加群として  $U \otimes_A Ac \simeq Uc$  が成り立つ。
- (ii)  $c \in A$  に対して、 $W = Ac$  が単純左  $A$  加群ならば  $U \otimes_A W = Uc$  は単純左  $B$  加群である。が成り立つ。

*Proof.* (i) 次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
U \otimes_A A & \xrightarrow{\cdot c} & U \otimes_A Ac & \longrightarrow & U \otimes_A A \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
U & \xrightarrow{\cdot c} & Uc & \longrightarrow & U
\end{array}$$

ここで  $\cdot c$  は  $c$  倍写像 (全射) であり、 $U \otimes_A Ac \rightarrow U \otimes_A A$ ,  $Uc \rightarrow U$  は埋め込み (単射), 両端の縦の写像は自然な同型である。このとき Diagram Chasing をすれば中央の縦の写像も同型になることがわかる。

- (ii)  $U$  が単純右  $A$  加群である場合を考える。このとき Schur の補題から  $B \simeq \mathbb{C}$  であることに注意する。 $\dim_{\mathbb{C}} U \otimes_A W \leq 1$  であることを示せばよい。Wedderburn の構造定理より、

$$A \simeq \prod_{i=1}^r M_{m_i}(\mathbb{C})$$

である。 $W$  は  $A$  の極小左イデアルなので、 $W$  は

$$W = \{ (M_1, \dots, M_i, \dots, M_r) \mid M_k = 0, (k \neq i), M_i \in I_\alpha \} = 0 \times \dots \times I_\alpha \times \dots \times 0$$

$$I_\alpha = \left\{ \left( \begin{pmatrix} 0 & \dots & a_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{m_i} & \dots & 0 \end{pmatrix} \right) \mid a_1, a_2, \dots, a_{m_i} \in \mathbb{C} \text{ は第 } \alpha \text{ 列} \right\}$$

このような形になる。同様に  $U$  を  $A$  の極小右イデアルと同一視すれば<sup>\*10</sup>、

$$U = \{ (M_1, \dots, M_j, \dots, M_r) \mid M_k = 0, (k \neq j), M_j \in J_\beta \} = 0 \times \dots \times J_\beta \times \dots \times 0$$

$$J_\beta = \left\{ \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{m_j} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right) \mid a_1, a_2, \dots, a_{m_j} \in \mathbb{C} \text{ は } \beta \text{ 行} \right\}$$

となるから、

$$U \otimes_A W = \begin{cases} J_\beta \otimes_{M_{m_i}(\mathbb{C})} I_\alpha = \mathbb{C} E_{\beta\alpha} & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となることがわかる。よって  $\dim_{\mathbb{C}}(U \otimes_A W) \leq 1$  であるから単純である。

一般の  $U$  については、 $A$  の半単純性より  $U$  を単純右  $A$  加群の直和  $U \simeq \bigoplus_i U_k^{\oplus n_k}$  に分解しておいて、再び Schur の補題から

$$B = \text{End}_A(U) = \text{End}_A\left(\bigoplus_k U_k^{\oplus n_k}\right) = \bigoplus_k \text{End}_A(U_k^{\oplus n_k}) = \prod_k M_{n_k}(\mathbb{C})$$

また、前半に示したことにより

$$U \otimes_A W = \bigoplus_k (U_k \otimes_A W)^{\oplus n_k} \simeq \mathbb{C}^{\oplus n_i}$$

となる。実際、 $U_j \otimes_A W \simeq \mathbb{C}$  ならば  $U_j = 0 \times \dots \times J_\beta \times \dots \times 0$  と表した時、 $J_\beta$  は  $i$  番目の位置になければならないから、 $U_j \simeq U_i$  となる。 $\mathbb{C}^{\oplus n_i}$  は単純左  $M_{n_i}(\mathbb{C})$  加群であるから、 $U \otimes_A W$  は単純左  $B$  加群である。

□

**補題 2.4.1.4.**  $V$  を  $n$  次元ベクトル空間とする。 $\text{Sym}^k(V)$  は  $\{v \otimes \dots \otimes v\}_{v \in V}$  によって生成される

*Proof.*  $n$  変数  $k$  次斉次多項式のなすベクトル空間を  $S$  とおく。主張は  $S$  が 1 次斉次多項式の  $k$  乗で生成されることと同値である。単項式

$$x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}, \quad i_1 + \dots + i_n = k$$

が生成されることを示せば十分である。 $f_0(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n)^k$  とおく。

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = f_0(2x_1, x_2, \dots, x_n) - 2^k f_0(x_1, \dots, x_n)$$

<sup>\*10</sup>  $G$  の正則表現はすべての既約表現を直和因子に含むことに注意すればわかる。

とすれば、 $f_1$  は  $x_1^k$  を含む項をもたない。次に

$$f_2(x_1, \dots, x_n) = f_1(2x_1, x_2, \dots, x_n) - 2^{k-1}f_1(x_1, \dots, x_n)$$

とすれば  $f_2$  は  $x_1^k, x_1^{k-1}$  を含む項をもたない。この操作を  $i_1$  以外に対して行えば、最終的に  $x_1^{i_1}$  を含む項以外をもたないような多項式  $g_0(x_1, \dots, x_n)$  を得る。そして  $g_0$  は作り方から、一次斉次多項式の  $k$  乗の線形結合で表される。同様に

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = g_0(x_1, 2x_2, x_3, \dots, x_n) - 2^k g_0(x_1, \dots, x_n)$$

とすれば  $g_1$  は  $x_2^k$  を含む項をもたない。再びこの操作を繰り返して  $x_1^{i_1}, x_2^{i_2}$  を含む項以外をもたないような多項式を得る。これを繰り返していけば、有限回のうちに  $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$  を作るができる。□

**補題 2.4.1.5.**  $A$  を  $\text{End}(V^{\otimes k})$  における  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$  の像とし、 $B$  を  $\text{End}(V^{\otimes k})$  における  $\mathbb{C}[\text{GL}(V)]$  の像とする。 $B = \text{End}_A(V^{\otimes k})$  が成り立つ。

*Proof.*  $\text{End}_A(V^{\otimes k}) = (\text{End}(V^{\otimes k}))^{\mathfrak{S}_n} = (\text{End}(V)^{\otimes k})^{\mathfrak{S}_n} = \text{Sym}^k(\text{End}(V))$  であるから補題 2.4.1.4 より、 $\text{End}_A(V^{\otimes k})$  は  $\{X \otimes \dots \otimes X\}_{X \in \text{End}(V)}$  によって生成される。 $\text{GL}(V) \subset \text{End}(V)$  なのであるから、 $B \subset \text{End}_A(V^{\otimes k})$  は直ちに従う。 $g \in \text{GL}(V)$  に対して  $g \otimes \dots \otimes g$  が生成する  $\text{End}(V^{\otimes k})$  の部分代数を  $B'$  とする。任意の (正則とは限らない)  $X \in \text{End}(V)$  に対して  $X \otimes \dots \otimes X$  が  $B'$  に含まれることを示せばよい。 $X + tE$  は有限個の  $t$  を除いて正則である<sup>\*11</sup> から、 $X$  に収束する  $\text{GL}(V)$  の点列  $(X + t_i E)$  が存在する<sup>\*12</sup>。 $\text{End}(V^{\otimes k})$  は有限次元であるから  $B'$  は閉部分空間であるので、

$$X^{\otimes k} = \lim_{i \rightarrow \infty} (X + t_i E)^{\otimes k} \in B'$$

が成り立つ<sup>\*13</sup> □

定理 2.4.1.2 を証明しよう

*Proof.* 補題 2.4.1.3 と補題 2.4.1.4, 補題 2.4.1.5 より、

$$W_\lambda(V) = V^{\otimes k} c_\lambda = V^{\otimes k} \otimes_{\mathbb{C}[G]} \mathbb{C}[G] c_\lambda$$

は単純  $\text{GL}(V)$  加群であることが従う。ここで、 $V^{\otimes k}$  は左  $A = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$  加群とみなすこともできたことを思い出す。

$$\begin{aligned} \sigma \in \mathcal{H}_\lambda &\implies \sigma^{-1} \in \mathcal{H}_\lambda \\ \tau \in \mathcal{V}_\lambda &\implies \tau^{-1} \in \mathcal{V}_\lambda \end{aligned}$$

が成り立つことに注意すると、

$$c_\lambda V^{\otimes k} = V^{\otimes k} c_\lambda$$

となることがわかる。

命題 2.1.2.23 より、

$$V^{\otimes k} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_k} S_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} \text{Hom}_A(S_\lambda, V^{\otimes k})$$

<sup>\*11</sup> 行列式は  $t$  の多項式

<sup>\*12</sup> すなわち  $\text{GL}(V)$  は  $\text{End}(V)$  の稠密集合

<sup>\*13</sup> 表現は連続であるからこのような極限操作が可能である。



となる。 $B = \text{GL}(V)$  加群として  $\text{Hom}_A(S_\lambda, V^{\otimes k}) \simeq W_\lambda(V)$  となることを示せばよい。 $S_\lambda = Ac_\lambda$  であるから、 $\phi: \text{Hom}_A(S_\lambda, V^{\otimes k}) \rightarrow W_\lambda(V)$  を

$$\phi(f) = f(c_\lambda) = f(c_\lambda^2) = c_\lambda f(c_\lambda)$$

によって定める<sup>\*14</sup>。 $b \in \text{End}_A(V^{\otimes k}) = \text{GL}(V)$  に対して、

$$\phi(bf) = c_\lambda bf(c_\lambda) = b(c_\lambda f(c_\lambda)) = b\phi(f)$$

より  $\phi$  は左  $B$  加群の準同型である。 $S_\lambda = Ac_\lambda$ ,  $W_\lambda(V) = c_\lambda V^{\otimes k}$  より、 $\phi$  は全単射である。□

**系 2.4.1.6.**  $\lambda \in \mathcal{P}_k$  に対して、 $d_\lambda = \dim_{\mathbb{C}} S_\lambda$  とおく。 $\text{GL}(V)$  の表現として

$$V^{\otimes k} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_k} W_\lambda(V)^{\otimes d_\lambda}$$

が成り立つ。

**例 2.4.1.7.**  $\dim V = n$  とする。 $\lambda$  が  $n$  行よりも長い Young 図形るとき  $W_\lambda(V) = 0$  となることを示す。 $\lambda$  の共役 Young 図形を  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_s^*)$ ,  $\lambda_1^* > n$  とおく。このとき、

$$b_\lambda = \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\lambda_s^*}} \text{sgn}(\sigma_s) \sigma_s \right) \cdots \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\lambda_1^*}} \text{sgn}(\sigma_1) \sigma_1 \right)$$

と書くことができる。 $\tilde{b}_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\lambda_1^*}} \text{sgn}(\sigma_1) \sigma_1$  とする。

例:  $\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}$ , のとき  $b_\lambda = \left( \sum_{\tau \in \mathfrak{S}(\{5,6\})} \text{sgn}(\tau) \tau \right) \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(\{1,2,3,4\})} \text{sgn}(\sigma) \sigma \right)$ ,  $\tilde{b}_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(\{1,2,3,4\})} \text{sgn}(\sigma) \sigma$

$V^{\otimes k}$  を  $\lambda$  の各箱に  $V$  の元が書かれているものと同一視する。 $V$  の基底を  $e_1, \dots, e_n$  とすれば  $V^{\otimes k}$  の元は  $e_1, \dots, e_n$  を  $\lambda$  の各箱に配置した元で生成される。

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \text{ のとき } V^{\otimes k} = \langle \{ \begin{array}{|c|c|} \hline e_{i_1} & e_{i_5} \\ \hline e_{i_2} & e_{i_6} \\ \hline e_{i_3} & \\ \hline e_{i_4} & \\ \hline \end{array} \}_{i_1, \dots, i_6} \rangle$$

このとき、 $\lambda_1^* > n$  より、 $e_{i_1}, \dots, e_{i_{\lambda_1^*}}$  には必ず重複がある。よって

$$\tilde{b}_\lambda(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\lambda_1^*}}) = 0$$

であるから、 $b_\lambda V^{\otimes k} = 0$  である。

<sup>\*14</sup>  $c_\lambda$  は適当にスカラー倍することでべき等元であった

例 2.4.1.8.  $k = 3, n > k$  とする。  $\lambda =$ 


 として

$$V^{\otimes 3} = \text{Sym}^3(V) \oplus (S_\lambda \boxtimes W_\lambda(V)) \oplus \text{Alt}^3(V)$$

であり、 $\dim S_\lambda = 2$  であるので

$$\dim W_\lambda(V) = \frac{1}{2}(n^3 - \dim \text{Sym}^3(V) - \dim \text{Alt}^3(V)) = \frac{1}{12}(4n^3 - 3n^2 - 13n - 6)$$

## 2.4.2 一般線形群の表現に対する指標

前節で Weyl 表現という一般線形群の既約表現を構成したが、これらが互いに同型でないことは示していなかった。本節ではこれを示し、さらに表現の指標を導入する。指標は有限群の場合のように、ある意味で表現を特徴づけるものであり、一般線形群においても強力な道具となる。

**定義 2.4.2.1.**  $\rho : \text{GL}(V) \rightarrow \text{GL}(W)$  を表現とする。 $H$  を  $\text{GL}(V)$  の対角行列のなす部分群とする。 $\text{ch}_W : H \rightarrow \mathbb{C}$  を

$$\text{ch}_W(g) = \text{tr}(\rho(g))$$

によって定め、 $\rho$  の指標という。

例 2.4.2.2.  $\lambda = (k) \in \mathcal{P}_k, \dim_{\mathbb{C}} V = n > k$  とする。 $\text{ch}_\lambda = \text{ch}_{W_\lambda(V)}$  とすると、 $g \in H$  に対して、 $g$  の固有値を  $x_1, \dots, x_n$  とすると、

$$\text{ch}_\lambda(g) = h_k(x_1, \dots, x_n)$$

となる。実際  $g = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$  とおくと  $\text{Sym}^k(V)$  の基底  $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$  に対して

$$g^{\otimes k}(e_{i_1} \cdots e_{i_k}) = x_{i_1} \cdots x_{i_k} e_{i_1} \cdots e_{i_k}$$

である。

例 2.4.2.3. 同様に  $\lambda = (1^k)$  ならば、

$$\text{ch}_\lambda(g) = e_k(x_1, \dots, x_n)$$

である。

有限群の場合と同様、トレースの性質から次が従う。

**命題 2.4.2.4.**  $W, U$  を  $\text{GL}(V)$  の表現とする。

$$(i) \text{ch}_{W \oplus U} = \text{ch}_W + \text{ch}_U$$

$$(ii) \text{ch}_{W \otimes U} = \text{ch}_W \text{ch}_U$$

が成り立つ。

**定理 2.4.2.5.**  $\lambda \in \mathcal{P}_k, \dim_{\mathbb{C}} V = n$  とする。 $W_\lambda(V)$  の指標を  $\text{ch}_\lambda$  とおくと、 $g = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$  に対して

$$\text{ch}_\lambda(g) = s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$$

が成り立つ。

*Proof.*  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$  とする。補題 2.4.1.3 を  $M_\lambda = Aa_\lambda$  に用いて、

$$V^{\otimes k} a_\lambda \simeq V^{\otimes k} \otimes_A M_\lambda$$

$a_\lambda$  の定義から、

$$V^{\otimes k} a_\lambda = \text{Sym}^{\lambda_1}(V) \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} \text{Sym}^{\lambda_s}(V) = W_{(\lambda_1)}(V) \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} W_{(\lambda_s)}(V)$$

となる。Young の規則 (系??) より

$$M_\lambda = S_\lambda \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} S_\mu^{\oplus k_{\lambda\mu}} = Ac_\lambda \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} Ac_\mu^{\oplus k_{\lambda\mu}}$$

したがって、

$$W_{(\lambda_1)}(V) \otimes \cdots \otimes W_{(\lambda_s)}(V) \simeq W_\lambda(V) \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} W_\mu(V)^{\oplus k_{\lambda\mu}}$$

両辺の指標をとれば

$$h_\lambda = \text{ch}_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} k_{\lambda\mu} \text{ch}_\mu$$

よって帰納法により従う。 □

**系 2.4.2.6.**  $W_\lambda(V) \simeq W_\mu(V)$  であることと  $\lambda = \mu$  は同値である。

*Proof.* 定理 2.4.2.5 より  $\lambda \neq \mu$  ならば指標が異なる。 □

**系 2.4.2.7.**  $W, U$  を  $\text{GL}(V)$  の表現で、ともに Weyl 表現の直和で表されるものとする。 $W \simeq U$  となるための必要十分条件はその指標が等しいことである。

*Proof.* Schur 多項式の一次独立性から従う。 □

定理 2.4.2.5 の証明中に現れた式を再掲しておく

**系 2.4.2.8** (Young の規則).

$$W_{(\lambda_1)}(V) \otimes \cdots \otimes W_{(\lambda_s)}(V) \simeq W_\lambda(V) \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} W_\mu(V)^{\oplus k_{\lambda\mu}}$$

が成り立つ。ただし  $k_{\lambda\mu}$  は Kostka 数である。

**系 2.4.2.9** (Littlewood-Richardson 規則). 2 つの Young 図形  $\lambda, \mu$  に対して、

$$W_\lambda(V) \otimes_{\mathbb{C}} W_\mu(V) \simeq \bigoplus_{\nu} W_\nu(V)^{\oplus \eta_{\lambda\mu}^\nu}$$

が成り立つ。ただし  $\eta_{\lambda\mu}^\nu$  は Littlewood-Richardson 数である。

*Proof.*  $W_\lambda(V) \otimes_{\mathbb{C}} W_\mu(V)$  が Weyl 表現の直和に表されることを示せばよい。 $\lambda \in \mathcal{P}_k, \mu \in \mathcal{P}_l$  とする。

$$\begin{aligned} W_\lambda(V) \otimes_{\mathbb{C}} W_\mu(V) &\simeq V^{\otimes k} c_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} V^{\otimes l} c_\mu \\ &\simeq V^{\otimes (k+l)}(c_\lambda \otimes c_\mu) \end{aligned}$$

ここで、 $c_\lambda \otimes c_\mu \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_k] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathfrak{S}_l] = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_l] \subset \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]$  である。 $c = c_\lambda \otimes c_\mu$  とおく。

$$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]c = \bigoplus_{\nu \in \mathcal{P}_{k+l}} S_\nu^{\oplus t_\nu}$$

とおけば<sup>\*15</sup>、補題 2.4.1.3 より

$$\begin{aligned} V^{\otimes(k+l)}c &\simeq V^{\otimes(k+l)} \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]} \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]c \\ &\simeq V^{\otimes(k+l)} \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]} \bigoplus_{\nu \in \mathcal{P}_{k+l}} S_\nu^{\oplus t_\nu} \\ &\simeq \bigoplus_{\nu \in \mathcal{P}_{k+l}} V^{\otimes(k+l)} \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]} \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]c_\nu^{\oplus t_\nu} \\ &\simeq \bigoplus_{\nu \in \mathcal{P}_{k+l}} W_\nu(V)^{\oplus t_\nu} \end{aligned}$$

よって示せた。 □

---

<sup>\*15</sup> 実際はこの表現は  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]c = \text{Ind}_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k] \times \mathbb{C}[\mathfrak{S}_l]}^{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{k+l}]} S_\lambda \boxtimes S_\mu = S_\lambda \circ S_\mu$  に他ならない。

## 第 3 章

# 数え上げ幾何学

数え上げ幾何学の古典的な問題として、次の問題を考える：

3 次元空間中の与えられた 4 本直線すべてを通る直線は何本存在するか

当然 4 本の直線の位置関係によって答えは変わるが、ある程度一般の状況においてはそれは一定の本数であることが知られており、その値を具体的に計算することができる。この計算方法は Schubert 計算と呼ばれており、現代的には Grassmann 多様体のコホモロジー環の構造を記述することと対応している。

第 3 章では代数幾何学の言葉を使うが、いくつかの結果は証明せず認めることにする。また、本章で環はすべて可換環を指しているものとする。

本章は [2],[6],[8],[13],[14],[15],[16] をまとめた内容になっている。

### 3.1 基本的な代数幾何学

数え上げ幾何学について述べる前に、いくつか代数幾何学の言葉を用いるのでその定義をしておく。

#### 3.1.1 代数的集合と Zariski 位相

**定義 3.1.1.1.**  $k$  を体とする。直積集合  $k^n$  を  $\mathbb{A}^n(k)$  や  $\mathbb{A}^n$  と書き、 $n$  次元アフィン空間という。

**定義 3.1.1.2.**  $S$  を  $k[X_1, \dots, X_n]$  の部分集合とする。

$$V(S) = \{ p \in \mathbb{A}^n \mid F(p) = 0 \text{ for all } F \in S \}$$

とする。 $V(S)$  の形の集合を  $\mathbb{A}^n$  の代数的集合という。

$S$  の生成するイデアルを  $\mathfrak{a}$  とすれば  $V(S) = V(\mathfrak{a})$  である。Hilbert の基底定理により体上の多項式環  $k[X_1, \dots, X_n]$  は Noether 環であるからイデアル  $\mathfrak{a}$  は有限生成である。したがって  $V(S) = V(F_1, \dots, F_r)$  となる多項式  $F_1, \dots, F_r \in k[X_1, \dots, X_n]$  が存在する。

**例 3.1.1.3.**  $V(0) = \mathbb{A}^n$ ,  $V(1) = \emptyset$  である。 $k$  が無限体である場合、逆にイデアル  $\mathfrak{a}$  に対して  $V(\mathfrak{a}) = \mathbb{A}^n$  ならば  $\mathfrak{a} = 0$  である。

実際、 $\mathfrak{a} \neq 0$  であるとして  $F \in \mathfrak{a}$  を 0 でも定数でもない多項式とする。 $F$  はある変数  $X_i$  に関して 1 次以上であるからとくに  $X_1$  を含むとしてよい。 $F_* = F(X_1, 1, \dots, 1) \in k[X_1]$  を考えると、 $F_*$  の根は高々有限かつ、 $k$  は無限体であるから、 $F_*$  の根でない  $X_1$ 、したがって  $V(\mathfrak{a})$  に含まれない点が存在する。

$V(\mathfrak{a}) = \emptyset$  ならば  $\mathfrak{a} = (1)$  となることは  $k$  が代数閉ならば成り立つが、それは Hilbert の零点定理 (事実 3.1.2.7) の帰結である。

**例 3.1.1.4.**  $k = \mathbb{R}$  とする。 $V(Y - X^2) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  は放物線  $y = x^2$  である。 $V(X^n) = V(X) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$  は直線  $x = 0$  である。

**例 3.1.1.5.**  $\mathbb{A}^1$  の代数的集合は  $\mathbb{A}^1, \emptyset$  と有限集合のいずれかである。実際  $V(F) = \{F \text{ の根}\}$  であるが、 $F$  の根はたかだか有限である。

**命題 3.1.1.6.**  $S \subset T$  ならば  $V(S) \supset V(T)$  である。

*Proof.*  $P \in V(T)$  ならば任意の  $F \in S$  について、 $F \in S \subset T$  であるから  $F(P) = 0$ 。したがって  $P \in V(S)$  となる。  $\square$

**命題 3.1.1.7.**  $\mathbb{A}^n$  の代数的集合について

- (i)  $V(0) = \mathbb{A}^n, V(1) = \emptyset$
- (ii)  $V(S) \cup V(T) = V(ST)$ , ただし  $ST = \{FG \mid F \in S, G \in T\}$
- (iii)  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(S_\lambda) = V(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda)$

が成り立つ。

*Proof.* (i) はよい。

(ii)  $p \in V(S) \cup V(T)$  ならば任意の  $F \in S, G \in T$  について  $F(p) = 0$  または  $G(p) = 0$  が成り立つから、 $FG(p) = F(p)G(p) = 0$  となる。よって  $p \in V(ST)$  である。逆に  $p \in V(ST)$  かつ、 $p \notin V(T)$  であるとする。ある  $G \in T$  があって  $G(p) \neq 0$  であるから任意の  $F \in S$  について  $0 = FG(p) = F(p)G(p)$  より  $F(p) = 0$  となる。すなわち  $p \in V(S)$  となる。

(iii)  $S_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$  であるから、 $V(S_\lambda) \supset V(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda)$  となり、よって  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(S_\lambda) \supset V(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda)$  である。 $p \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(S_\lambda)$  ならば、任意の  $F \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$  に対して  $F(p) = 0$  すなわち  $p \in V(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda)$  である。  $\square$

命題 3.1.1.7 より、 $\mathbb{A}^n$  には代数的集合  $V(S)$  を閉集合とする位相が定まる。これを  $\mathbb{A}^n$  の Zariski 位相といい、以降  $\mathbb{A}^n = k^n$  にはいつもこの位相が入っているとする。

**例 3.1.1.8.**  $\mathbb{A}^1$  における閉集合は  $\emptyset, \mathbb{A}^1$ , (有限集合) であるから、Zariski 位相はいわゆる補有限位相である。

**例 3.1.1.9.**  $\mathbb{A}^{n^2}$  の座標を  $x_{ij}$ ,  $(i, j = 1, \dots, n)$  で表す。

$V = V(\det(X_{ij})) = \{(x_{ij}) \in \mathbb{A}^2 \mid \det(x_{ij}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)} = 0\}$  とする。 $\text{GL}_n(k) \subset \mathbb{A}^{n^2}$  を  $k$  に成分をもつ  $n$  次正則行列のなす集合とすると

$$\text{GL}_n(k) = \mathbb{A}^{n^2} \setminus V$$

であるから  $\text{GL}_n(k)$  は  $\mathbb{A}^{n^2}$  の Zariski 開集合である。

**例 3.1.1.10.**  $\mathbb{A}^{nd}$  の座標を  $x_{ij}$ ,  $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d)$  で表す。 $\mathcal{M}(d, n) \subset \mathbb{A}^{nd}$  をランク  $d$  の  $n \times d$  行列全

体のなす集合とする。  $A \in \mathbb{A}^{nd}$  に対して、  $A$  の  $i_1, \dots, i_d$  行を取り出した小正方形行列を  $A_{i_1, \dots, i_d}$  とする。

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^{nd} \setminus \mathcal{M}(d, n) &= \{ A \in \mathbb{A}^{nd} \mid \det A_{i_1, \dots, i_d} = 0, \text{ for all } 1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n \} \\ &= V(\{\det X_{i_1, \dots, i_d}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n})\end{aligned}$$

よって  $\mathcal{M}(d, n)$  は  $\mathbb{A}^{nd}$  の Zariski 開集合である。

**命題 3.1.1.11.**  $k$  を無限体とすると  $\mathbb{A}^n$  は Hausdorff でない。

*Proof.* 実際、空でない任意の2つの開集合  $U, W$  に対して、  $\mathbb{A}^n \setminus U = V(F_1 \cdots, F_r)$ ,  $\mathbb{A}^n \setminus W = V(G_1, \dots, G_s)$  と置けば、

$$U \cap W = (\mathbb{A}^n \setminus V(F_1, \dots, f_r)) \cap (\mathbb{A}^n \setminus V(G_1, \dots, G_s)) = \mathbb{A}^n \setminus (V(F_1, \dots, f_r) \cup V(G_1, \dots, G_s))$$

だが、

$$V(F_1, \dots, F_r) \cup V(G_1, \dots, G_s) = V(\{F_i G_j\}_{ij})$$

となる。  $U, W$  は空でないので  $\{F_1, \dots, F_r\}, \{G_1, \dots, G_s\} \neq \{0\}$  ゆえに、  $\{F_i G_j\}_{ij} \neq \{0\}$ 。 したがって例 3.1.1.3 より  $V(\{F_i G_j\}_{ij}) \subsetneq \mathbb{A}^n$ 。 よって

$$U \cap W \neq \emptyset$$

□

**命題 3.1.1.12.**  $\phi: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$  が、ある多項式  $F_1, \dots, F_m \in k[X_1, \dots, X_n]$  に対して

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n))$$

となる (これを多項式写像という) なら、  $\phi$  は Zariski 位相に関して連続である。

*Proof.*  $\mathbb{A}^m$  の閉集合  $V(G_1, \dots, G_r)$  に対して、

$$\phi^{-1}(V(G_1, \dots, G_r)) = V(G_1(F_1, \dots, F_m), \dots, G_r(F_1, \dots, F_m))$$

が成り立つことから、  $\phi^{-1}(V(G_1, \dots, G_r))$  は閉集合である。

□

**例 3.1.1.13.**  $V \subset \mathbb{A}^{n^2+1}$  を  $V = V(T \det(X_{ij}) - 1) = \{((x_{ij}), t) \in \mathbb{A}^{n^2+1} \mid t \det(x_{ij}) = 1\}$  とする。  
 $\phi: V \rightarrow \text{GL}_n(k)$  を

$$\phi((x_{ij}), t) = (x_{ij})$$

によって定め、  $\psi: \text{GL}_n(k) \rightarrow V$  を  $\psi((x_{ij})) = ((x_{ij}), \det(x_{ij})^{-1})$  によって定める。  $\phi, \psi$  は互いに逆の写像であるが、  $\phi$  は多項式写像なので連続である。  $\psi$  の連続性を示す。  $\mathbb{A}^{n^2+1}$  の閉集合  $V(F((X_{ij}), T))$  に対して、

$$V \cap V(F) = \{((x_{ij}), \det(x_{ij})^{-1}) \mid F((x_{ij}), \det(x_{ij})^{-1}) = 0\}$$

であるから、十分大きい整数  $r \geq 0$  をとって

$$\psi^{-1}(V \cap V(F)) = \{(x_{ij}) \in \text{GL}_n(k) \mid \det(x_{ij})^r F((x_{ij}), \det(x_{ij})^{-1}) = 0\}$$

において  $\det(x_{ij})^r F((x_{ij}), \det(x_{ij})^{-1})$  を多項式にすることができる。 よって  $\psi^{-1}(V \cap V(F))$  も閉集合である。 一般の  $\mathbb{A}^{n^2+1}$  の閉集合に対しても同様である。 よって  $\text{GL}_n(k) \approx V$  である。

すなわち  $\text{GL}_n(k)$  は  $\mathbb{A}^{n^2}$  の Zariski 開集合とみなしてもよいし、  $\mathbb{A}^{n^2+1}$  の Zariski 閉集合どちらとみなしてもよい。 状況によって扱いやすいほうを選ぶ。

多項式環のイデアルが与えられたときにアフィン空間の部分集合を定めたが、逆にアフィン空間の部分集合からイデアルを作ることを考える。

**定義 3.1.1.14.**  $A$  を  $\mathbb{A}^n$  の部分集合とする。

$$I(A) = \{ F \in k[X_1, \dots, X_n] \mid F(p) = 0 \text{ for all } p \in A \}$$

を  $A$  のイデアルという。

**例 3.1.1.15.**  $\mathbb{A}^1$  において、 $V(X^2) = \{0\}$  であるから、 $I(V(X^2)) = (X) \subsetneq (X^2)$  である。

**命題 3.1.1.16.**  $A \subset B$  ならば  $I(A) \supset I(B)$  である。

*Proof.*  $F \in I(B)$  ならば、すべての  $p \in A \subset B$  に対して  $F(p) = 0$ . すなわち  $F \in I(A)$  □

**命題 3.1.1.17.** 次が成り立つ。

- (i)  $A \subset \mathbb{A}^n$  に対して  $A \subset V(I(A))$ , また  $I(V(I(A))) = I(A)$
- (ii)  $S \subset k[X_1, \dots, X_n]$  に対して  $S \subset I(V(S))$ , また  $V(I(V(S))) = V(S)$

*Proof.* (i)  $p \in A$  として任意の  $F \in I(A)$  に対して定義より  $F(p) = 0$ . すなわち  $p \in V(I(A))$ . 3.1.1.16 より  $I(V(I(A))) \subset I(A)$ .  $F \in I(A)$  ならば任意の  $p \in V(I(A))$  に対して定義より  $F(p) = 0$ . すなわち  $I(A) \subset I(V(I(A)))$

(ii) (i) と同様。 □

**命題 3.1.1.18.**  $V, W$  を  $\mathbb{A}^n$  の代数的集合とする。  $V = W$  であるための必要十分条件は  $I(V) = I(W)$  が成り立つことである。

*Proof.* 必要性は明らか。十分性を示す。  $V = V(S), W = V(T)$  とする。命題 3.1.1.17 より

$$V(S) = V(I(V(S))) = V(I(V(T))) = V(T)$$

□

## 3.1.2 アフィン多様体

**定義 3.1.2.1.** 位相空間  $X$  の部分集合  $V$  について、

$$X \text{ の閉集合 } V_1, V_2 \text{ が } V = V_1 \cup V_2 \text{ をみたすなら } V_1 = V \text{ または } V_2 = V$$

をみたすとき、 $V$  を既約という。既約でない集合は可約であるという。空集合は既約ではないとする。

**定義 3.1.2.2.**  $\mathbb{A}^n$  の既約な代数的集合をアフィン多様体という。アフィン多様体の Zariski 開集合を準アフィン多様体という。

**例 3.1.2.3.**  $V(X, Y) \subset \mathbb{A}^2$  はアフィン多様体である。実際  $V(X, Y) = \{(0, 0)\}$  で 1 点集合は既約である。

**例 3.1.2.4.**  $V(Y^2 - X^2) \subset \mathbb{A}^2$  はアフィン多様体でない。実際

$$V(Y^2 - X^2) = V((Y - X)(Y + X)) = V(Y - X) \cup V(Y + X)$$



**命題 3.1.2.5.** 代数的集合  $V$  がアフィン多様体となるための必要十分条件は  $I(V)$  が素イデアルとなることである。

*Proof.*  $V$  が可約であるとし、 $V = V_1 \cup V_2$ ,  $\emptyset \subsetneq V_1, V_2 \subsetneq V$  とする。このとき

$$I(V) = I(V_1 \cup V_2) = I(V_1) \cap I(V_2)$$

である。 $\emptyset \subsetneq V_1, V_2 \subsetneq V$  より、 $F \in I(V_1) \setminus I(V), G \in I(V_2) \setminus I(V)$  が存在するが、 $FG \in I(V_1) \cap I(V_2) = I(V)$  であるから、 $I(V)$  は素イデアルでない。

逆に  $I(V)$  が素イデアルでないとする。このとき  $F, G \notin I(V)$  で  $FG \in I(V)$  をみたすものが存在する。したがって

$$V \subset V(I(V)) \subset V(FG)$$

が成り立つ。よって

$$V = V \cap V(FG) = V \cap (V(F) \cup V(G)) = (V \cap V(F)) \cup (V \cap V(G))$$

$F \notin I(V), G \notin I(V)$  より  $V \cap V(F), V \cap V(G) \subsetneq V$ . よって  $V$  は可約である。  $\square$

**例 3.1.2.6.**  $\mathrm{GL}_n(k)$  は  $\mathbb{A}^{n^2}$  の準アフィン多様体であり、 $\mathbb{A}^{n^2+1}$  のアフィン多様体としての構造ももつ。実際  $\mathrm{GL}_n(k) = V(T \det(X_{ij}) - 1)$  であるが、 $T \det(X_{ij}) - 1$  は既約多項式である。 $k[(X_{ij}), T]$  は UFD なので  $T \det(X_{ij}) - 1$  は素元。したがって  $V(T \det(X_{ij}) - 1)$  は既約である。

以降  $k$  は  $\mathbb{C}$  などの代数閉体とする。代数閉体で考える理由の一つは次の事実である。

**事実 3.1.2.7** (Hilbert の零点定理 [8]).  $k$  を代数閉体、 $\mathfrak{a}$  を  $k[X_1, \dots, X_n]$  のイデアルとする。 $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$  が成り立つ。

ここで、 $\sqrt{\mathfrak{a}}$  は  $\mathfrak{a}$  の根基と呼ばれるイデアルで、

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{ F \in k[X_1, \dots, X_n] \mid \text{ある整数 } n \geq 0 \text{ で } F^n \in \mathfrak{a} \}$$

で定義される。イデアルの根基に関しては、次の特徴づけがある。

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}} \mathfrak{p}$$

よってとくに、 $\mathfrak{a}$  が素イデアルならば  $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$  が成り立つ (逆は一般に成り立たない<sup>\*1</sup>)。

$\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$  が成り立つとき、 $\mathfrak{a}$  を根基イデアルという。 $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$  に注意すると、事実 3.1.2.7 と命題 3.1.2.5 より、 $\mathbb{A}^n$  の代数的集合は  $k[X_1, \dots, X_n]$  の根基イデアルと 1 対 1 に対応し、アフィン多様体は素イデアルと 1 対 1 に対応することがわかる。例 3.1.1.3 で述べたことを示そう。すなわち  $V(\mathfrak{a}) = \emptyset$  であるとする  $\mathfrak{a} = (1)$  となるのである。実際、このとき  $\sqrt{\mathfrak{a}} = I(V(\mathfrak{a})) = I(\emptyset) = (1)$  ゆえに  $\mathfrak{a} = (1)$  が従う。

**定義 3.1.2.8.**  $X$  を位相空間とする。 $X$  の既約な閉集合の列

$$Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq Z_2 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n \subset X$$

の長さ  $n$  の上限値を  $X$  の次元といい、 $\dim X = n$  と書く。

<sup>\*1</sup> 例えば  $\mathfrak{a} = 6\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$  は根基イデアルであるが素イデアルではない。

**例 3.1.2.9.**  $\dim \mathbb{A}^n = n$  である。例えば、 $\mathbb{A}^1$  の既約閉集合は  $\mathbb{A}^1$  と 1 点集合のみであるから、たしかに  $\dim \mathbb{A}^1 = 1$  である。一般の場合の証明は省略する ([13])。

**例 3.1.2.10.**  $V = V(Y - X^2) \subset \mathbb{A}^2$  について、 $\dim V = 1$  であることを示す。 $\phi : \mathbb{A}^1 \rightarrow V$  を  $\phi(t) = (t, t^2)$  とすると  $\phi$  は多項式写像なので、命題 3.1.1.12 (Zariski 位相に関して) 連続である。逆に  $\psi : V \rightarrow \mathbb{A}^1$  を  $\psi(x, y) = x$  とすると  $\psi$  も多項式写像であるから連続である。 $\phi, \psi$  は互いに逆の写像であるから、 $\mathbb{A}^1 \approx V$ 。よって  $\dim V = 1$ 。

**事実 3.1.2.11** ([13]).  $\mathbb{A}^n$  の任意の代数的集合は有限個のアフィン多様体の和集合で書ける

### 3.1.3 射影空間と射影多様体

次に 4 直線問題の舞台となる射影空間について解説し、射影空間においてもアフィン空間と同様に代数的集合が定義され、既約性や次元などの概念を定義する。

**定義 3.1.3.1.**  $k^{n+1} \setminus \{0\}$  上の同値関係  $\sim$  を

$$z \sim w \Leftrightarrow \text{ある } c \in k \text{ が存在して } w = cz$$

と定義する。 $\mathbb{P}^n = (k^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$  を  $n$  次元射影空間という。 $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in k^{n+1}$  の同値類を  $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$  と書いて、これを斉次座標という。自然な全射  $p : k^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$  を射影化と呼ぶ。また、 $S \subset k^{n+1} \setminus \{0\}$  が任意の  $\lambda \in k^\times$  に対して  $\lambda S \subset S$  を満たすとき、 $p(S)$  を  $S$  の射影化と呼び、 $\mathbb{P}(S)$  と書いたりする。

射影空間においても、多項式の零点集合を定義したいが、アフィン空間と同じ方法ではうまくいかない。例えば、 $k = \mathbb{C}$ ,  $F = Y - X^2$  として  $V = \{ [x : y] \in \mathbb{P}^1 \mid F(x, y) = 0 \}$  を考えてみる。このとき  $F(1, 1) = 0$  であるから、 $[1 : 1] \in V$  となるはずだが、 $[1 : 1] = [2 : 2]$  かつ  $F(2, 2) \neq 0$  であるから  $[1 : 1] \notin V$  にもなってしまふ。これを回避するには、多項式に少し制限を設けなければならない。

**定義 3.1.3.2.**  $S \subset k[X_0, \dots, X_n]$  を斉次多項式の集合とする。

$$V(S) = \{ [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mid F(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ for all } F \in S \}$$

を  $\mathbb{P}^n$  の代数的集合という。

$F$  が  $d$  次斉次多項式であるならば、 $\lambda \in k$  に対して  $F(\lambda X_0, \dots, \lambda X_n) = \lambda^d F(X_0, \dots, X_n)$  が成り立つから、 $p = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n$  に対して  $p \in V(F)$  となることは  $p$  の代表元  $(x_0, \dots, x_n)$  の取り方によらない。また、アフィン空間の場合と同様、 $k[X_0, X_1, \dots, X_n]$  は Noether 環であるから、 $S$  の有限個の元  $F_1, \dots, F_r$  をとることで  $V(S) = V(F_1, \dots, F_r)$  とすることができる。

**命題 3.1.3.3.**  $\mathbb{P}^n$  の代数的集合について次が成り立つ

- (i)  $V(0) = \mathbb{P}^n$ ,  $V(1) = \emptyset$
- (ii)  $S, T$  を斉次多項式の集合とする。  $V(S) \cup V(T) = V(ST)$
- (iii)  $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を斉次多項式の集合の族とする。  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(S_\lambda) = V(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda)$

*Proof.* 命題 3.1.1.7 と同様である。 □

命題 3.1.3.3 より、アフィン空間と同様射影空間にも、代数的集合を閉集合とする位相が定まる。これを Zariski 位相と呼び、以下射影空間にはいつもこの位相が入っているとする。

$k^{n+1} \setminus \{0\}$  の部分集合  $\tilde{U}_i$  を

$$\tilde{U}_i = \{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\} \mid x_i \neq 0 \}$$

とする。 $\tilde{U}_i$  の射影化を  $U_i = p(\tilde{U}_i)$  とする。

$$U_i = \{ [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0 \} = \{ [x_0 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_j \in k \}$$

また、写像  $\tilde{\varphi}_i : \tilde{U}_i \rightarrow \mathbb{A}^n$  を

$$\tilde{\varphi}_i(x_0, x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

によって定めると  $\tilde{U}_i$  の射影化  $U_i$  に写像  $\varphi : U_i \rightarrow \mathbb{A}^n$  を誘導する。

$$\varphi([x_0 : x_1 : \dots : x_n]) = \left[ \frac{x_0}{x_i} : \frac{x_1}{x_i} : \dots : 1 : \dots : \frac{x_n}{x_i} \right]$$

$\varphi$  は全単射であり

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$$

がわかるが、さらに次が成り立つ。

**命題 3.1.3.4.**  $U_i$  は Zariski 開集合であり、 $\varphi : U_i \rightarrow \mathbb{A}^n$  は Zariski 位相に関して同相である。

*Proof.* 簡単のため、 $i = 0$  の場合についてのみ示す。

$$\mathbb{P}^n \setminus U_0 = \{ [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mid x_0 = 0 \} = V(X_0)$$

であるから  $U_0$  は開集合である。 $\varphi$  が連続であることを示す。斉次とはかぎらない多項式  $F \in k[X_1, \dots, X_n]$  に対して  $\mathbb{A}^n$  の閉集合  $V(F)$  を考える。ポイントになるのは  $F$  を「斉次化」する操作である。 $F$  の単項式の最大次数を  $d$  とする。 $F^* \in k[X_0, X_1, \dots, X_n]$  を

$$F^*(X_0, X_1, \dots, X_n) = X_0^d F\left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right)$$

とおくと、 $F^*$  は斉次多項式であり、 $\varphi^{-1}(V(F)) = V(F^*) \cap U_0$  が成り立つことを示す。 $F$  に含まれる単項式  $X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$  について考えると、

$$X_0^d \left(\frac{X_1}{X_0}\right)^{i_1} \dots \left(\frac{X_n}{X_0}\right)^{i_n} = X_0^{d-(i_1+\dots+i_n)} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$$

となるから、 $F^*$  の単項式の次数はすべて  $d$  である。よって  $F^*$  は斉次多項式。 $p = [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in V(F^*) \cap U_0$  であるならば、

$$0 = F^*(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0^d F\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

$x_0 \neq 0$  であるから

$$0 = F\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) = F(\varphi(p))$$

したがって  $p = [x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \varphi^{-1}(V(F))$ . 逆に  $p = [x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in U_0$  が  $p \in \varphi^{-1}(V(F))$  ならば

$$F\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) = 0$$

したがって

$$F^*(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0^d F\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) = 0$$

よって  $p \in V(F^*)$ . したがって  $\varphi^{-1}(V(F))$  は閉集合である。一般の  $\mathbb{A}^n$  の閉集合  $V(F_1, \dots, F_r)$  については、今の議論と同様  $\varphi^{-1}(V(F_1, \dots, F_r)) = V(F_1^*, \dots, F_r^*)$  となることが示せるので、 $\varphi$  は連続である。

次に  $\psi : \mathbb{A}^n \rightarrow U_0$  を

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = [1 : x_1 : \cdots : x_n]$$

によって定める。 $\psi$  は  $\varphi$  の逆写像であるので  $\psi$  が連続であることを示せばよい。 $\mathbb{P}^n$  の閉集合  $V(F)$  (ただし  $F \in k[X_0, X_1, \dots, X_n]$  は斉次多項式) に対して、 $F_* \in k[X_1, \dots, X_n]$  を

$$F_*(X_1, \dots, X_n) = F(1, X_1, \dots, X_n)$$

とすると  $\psi^{-1}(V(F) \cap U_0) = V(F_*)$  となる。実際、 $q = (x_1, \dots, x_n) \in V(F_*)$  であるならば

$$0 = F(1, x_1, \dots, x_n)$$

ゆえに  $\psi(q) = [1 : x_1 : \cdots : x_n] \in V(F) \cap U_0$ . 逆に  $q = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n$  が  $\psi(q) \in V(F) \cap U_0$  ならば  $F(1, x_1, \dots, x_n) = 0$  であるので  $q \in V(F_*)$ . よって  $\psi^{-1}(V(F) \cap U_0)$  は  $\mathbb{A}^n$  の閉集合である。一般の  $\mathbb{P}^n$  の閉集合  $V(F_1, \dots, F_r)$  に対しても同様に  $\psi^{-1}(V(F_1, \dots, F_r) \cap U_0) = V(F_{1*}, \dots, F_{r*})$  となることが示せるので  $\psi$  も連続である。  $\square$

**事実 3.1.3.5** ([13]).  $X$  を位相空間,  $U$  を  $X$  の空でない開集合とする。このとき  $\dim X = \dim U$  である。

**例 3.1.3.6.**  $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$ ,  $U_i \simeq \mathbb{A}^n$  より、 $\dim \mathbb{P}^n = n$  である。 $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  の場合、上で与えた射影空間の開被覆は  $C^\infty$  多様体や複素多様体の構造も与える。

**例 3.1.3.7.**  $\mathrm{GL}_n(k) \subset \mathbb{A}^{n^2}$  は Zariski 開集合であったから、 $\dim \mathrm{GL}_n(k) = n^2$  である。

**定義 3.1.3.8.**  $\mathbb{P}^n$  の既約閉集合を射影多様体という。

$V = V(F_1, \dots, F_r) \subset \mathbb{P}^n$  を射影多様体とする。 $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$  より、

$$V = \bigcup_{i=0}^n (V \cap U_i)$$

となるが、 $\varphi : U_i \rightarrow \mathbb{A}^n$  による同一視を思い出せば、例えば  $i = 0$  の場合

$$\begin{aligned} V \cap U_0 &= \{ [x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in U_0 \mid F_j(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ for all } j = 1, \dots, r \} \\ &\approx \left\{ \left( \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \in \mathbb{A}^n \mid F_j(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ for all } j = 1, \dots, r \right\} \\ &= \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n \mid F_j(1, x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ for all } j = 1, \dots, r \} \\ &= V(F_{1*}, \dots, F_{r*}) \end{aligned}$$

$V(F_{1*}, \dots, F_{r*}) \subset \mathbb{A}^n$  は有限個のアフィン多様体の和集合で表せた (事実 3.1.2.11) から、すべての射影多様体 (さらに  $\mathbb{P}^n$  の代数的集合) はアフィン多様体の有限個の和集合で書ける。このようにアフィン多様体の貼り合わせになっているものや、その Zariski 開集合を総称して代数多様体という (より厳密な定義は存在するがここでは省略する)。また、それに付随して代数多様射の間の射や同型<sup>\*2</sup>も定義されるが、ここでは扱わないことにする。

**例 3.1.3.9.**  $\mathbb{P}^1$  の代数的集合は  $\emptyset, \mathbb{P}^1$ , 有限集合のいずれかである。実際  $\mathbb{P}^1$  は 2 枚の  $\mathbb{A}^1$  の貼り合わせであり  $\mathbb{A}^1$  の真の代数的集合は有限集合のみである。

冒頭で述べた数え上げ問題において、「3 次元空間」というのは実は「3 次元複素射影空間」を指している。射影空間で考える理由として次 2 つがある。

- $\mathbb{P}^n$  における  $k$  次元平面は  $k^{n+1}$  の  $k+1$  次元線形部分空間と 1 対 1 に対応する。
- $\mathbb{A}^n$  における平行線は  $\mathbb{P}^n$  において交わる

この性質によって  $\mathbb{P}^n$  では問題が簡単になるのである。これらのことを説明しよう。

**定義 3.1.3.10.**  $F \in k[X_0, X_1, \dots, X_n]$  を  $d$  次斉次多項式とする。 $V(F) \subset \mathbb{P}^n$  を  $\mathbb{P}^n$  の  $d$  次超曲面という。とくに  $d=1$  のときは超平面という。 $F_1, \dots, F_r (r \leq n)$  を 1 次斉次多項式で、

$$F_i = a_{i0}X_0 + \dots + a_{in}X_n$$

とおいたとき、行列

$$\begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r0} & a_{r1} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

のランクが  $r$  であるとする。このとき  $V(F_1, \dots, F_r)$  を  $\mathbb{P}^n$  の  $n-r$  次元平面、または線形部分多様体という。とくに  $r=n-1$  のときは直線という。

$V(F_1, \dots, F_r)$  はベクトル空間  $k^{n+1}$  の  $r+1$  次元部分空間の射影化として得られる。実際、

$$\tilde{V} = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \left| \begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r0} & a_{r1} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right. \right\} \subset k^{n+1}$$

とおくと、 $V = p(\tilde{V} \setminus \{0\})$  である。したがって、とくに  $\mathbb{P}^n$  中の直線全体を考えるときには、 $k^{n+1}$  中の平面全体を考えればよい。これは次節に Grassmann 多様体として定式化される。

**例 3.1.3.11.** 直線

$$L = \{ [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \mid x_0 - x_1 - x_2 = 0 \}$$

<sup>\*2</sup> 代数多様体  $V$  上の関数  $f$  が、各点  $p$  の近傍において多項式  $F, G$  を用いて  $f = \frac{G}{F}$  と表されるとき、 $f$  を正則関数という。代数多様体の間の写像  $\varphi: W \rightarrow V$  は  $V$  の正則関数の引き戻しが  $W$  の正則関数になるとき、代数多様体の射という。 $V, W$  が代数的集合の場合、多項式写像は代数多様体の射である。

を考えてみる。

$$\begin{aligned} L \cap U_0 &= \{ [1 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \mid 1 - x_1 - x_2 = 0 \} \approx \{ (x, y) \in k^2 \mid 1 - x - y = 0 \} \subset \mathbb{A}^2 \\ L \cap U_1 &= \{ [x_0 : 1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \mid x_0 - 1 - x_2 = 0 \} \approx \{ (x, y) \in k^2 \mid -1 + x - y = 0 \} \subset \mathbb{A}^2 \\ L \cap U_2 &= \{ [x_0 : x_1 : 1] \in \mathbb{P}^2 \mid x_0 - x_1 - 1 = 0 \} \approx \{ (x, y) \in k^2 \mid x - y - 1 = 0 \} \subset \mathbb{A}^2 \end{aligned}$$

となって、 $L$  は各  $U_i \approx \mathbb{A}^2$  上で直線のようにふるまっていることがわかる。

**例 3.1.3.12.**  $\mathbb{P}^2$  中の 2 直線

$$\begin{aligned} L_1 &= \{ [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \mid x_0 - x_1 - x_2 = 0 \} \\ L_2 &= \{ [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \mid x_0 + x_1 + x_2 = 0 \} \end{aligned}$$

を考える。

$$\begin{aligned} L_1 \cap U_0 &\approx \{ (x, y) \in k^2 \mid -1 + x + y = 0 \} \subset \mathbb{A}^2 \\ L_2 \cap U_0 &\approx \{ (x, y) \in k^2 \mid 1 + x + y = 0 \} \subset \mathbb{A}^2 \end{aligned}$$

ゆえに  $L_1 \cap U_0, L_2 \cap U_0$  は平行である。一方で、

$$L_1 \cap L_2 = \left\{ [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \mid \begin{array}{l} x_0 - x_1 - x_2 = 0 \\ x_0 + x_1 + x_2 = 0 \end{array} \right\} = \{ [0 : 1 : -1] \} \notin U_0$$

であるから、 $\mathbb{A}^2$  の平行線が  $\mathbb{P}^2$  にまで拡張することで無限遠で交わっていると考えることができる。

**例 3.1.3.13.**  $k$  を代数閉体とする。 $\mathbb{P}^n$  の  $d$  次超曲面  $S = V(F)$  と直線  $L = V(G_1, \dots, G_{n-1})$  の交点は重複もこめてちょうど  $d$  個である。 $\tilde{V}(F), \tilde{V}(G_1, \dots, G_{n-1})$  を  $\mathbb{A}^{n+1}$  における代数的集合とすれば、

$$V(F) \cap V(G_1, \dots, G_{n-1}) = p(\tilde{V}(F) \cap \tilde{V}(G_1, \dots, G_{n-1}) \setminus \{0\})$$

である。

$$G_i = a_{i0}X_0 + \dots + a_{in}X_n$$

とおけば

$$\begin{aligned} \tilde{V}(G_1, \dots, G_{n-1}) &= \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1} \mid \begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \{ (\alpha_0 x + \beta_0 y, \dots, \alpha_n x + \beta_n y) \mid x, y \in k \} \end{aligned}$$

となる  $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_n$  が存在し、 $(\alpha_0, \dots, \alpha_n), (\beta_0, \dots, \beta_n)$  は 1 次独立。よって

$$\begin{aligned} (\alpha_0 x + \beta_0 y, \dots, \alpha_n x + \beta_n y) &\in \tilde{V}(F) \\ \Leftrightarrow F(\alpha_0 x + \beta_0 y, \alpha_1 x + \beta_1 y, \dots, \alpha_n x + \beta_n y) &= 0 \end{aligned}$$

$H(X, Y) = F(\alpha_0 X + \beta_0 Y, \alpha_1 X + \beta_1 Y, \dots, \alpha_n X + \beta_n Y)$  とおくと  $H$  は  $X, Y$  の  $d$  次斉次多項式であるから、 $k$  が代数閉より、次に述べる補題により

$$H(X, Y) = \prod_{i=1}^d (t_i X + s_i Y)$$

と書くことができる。よって  $H(X, Y)$  の零点集合はたかだか  $d$  本の原点を通る直線であるから、それらに対応して  $\tilde{V}(F) \cap \tilde{V}(G_1, \dots, G_{n-1})$  もたかだか  $d$  本の原点を通る直線からなる。したがってその射影化  $V(F) \cap V(G_1, \dots, G_{n-1}) = p(\tilde{V}(F) \cap \tilde{V}(G_1, \dots, G_{n-1}) \setminus \{0\})$  もたかだか  $d$  個の点からなる。

**補題 3.1.3.14.**  $k$  を代数閉体,  $H(X, Y)$  を  $d$  次斉次多項式とする。

$$H(X, Y) = \prod_{i=1}^d (t_i X + s_i Y)$$

となる  $t_i, s_i \in k$  が存在する。

*Proof.* ここでも多項式の「斉次化」, 「非斉次化」がポイントになる。 $k$  は代数閉なので

$$H(X, 1) = \prod_{i=1}^d (t_i X + s_i)$$

と書くことができる。一方、

$$H(X, Y) = \sum_{i=0}^d c_i X^i Y^{d-i}$$

とおくと、

$$Y^d H\left(\frac{X}{Y}, 1\right) = Y^d \sum_{i=0}^d c_i \frac{X^i}{Y^i} = \sum_{i=0}^d c_i X^i Y^{d-i} = H(X, Y)$$

となることがわかる。したがって、

$$H(X, Y) = Y^d H\left(\frac{X}{Y}, 1\right) = Y^d \prod_{i=1}^d \left(t_i \frac{X}{Y} + s_i\right) = \prod_{i=1}^d (t_i X + s_i Y)$$

□

最後に射影空間の Zariski 位相に関して、後に必要になる命題を 1 つ示しておく。

**命題 3.1.3.15.**  $k$  を無限体とする。 $\mathbb{P}^n$  の Zariski 位相は、 $p: \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$  によって誘導される位相に一致する。

*Proof.*  $V \subset \mathbb{P}^n$  は Zariski 閉集合であるとする。このとき  $V = V(F_1, \dots, F_r)$  となる斉次多項式  $F_1, \dots, F_r$  が存在するが、

$$p^{-1}(V) = \{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \mid F_i(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ for all } i \}$$

である\*3。右辺は  $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$  の閉集合であるから、 $V$  は  $p$  の誘導位相で閉である。逆に  $V \subset \mathbb{P}^n$  について、 $p^{-1}(V) \subset \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$  が閉集合であったとする。

$$p^{-1}(V) = V(F_1, \dots, F_r)$$

とおけば各  $F_i$  は次の性質をもつ：

$$F_i(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ ならば任意の } \lambda \in k \text{ に対して } F_i(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = 0$$

\*3 すなわち射影化  $p: \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$  は Zariski 位相に関して連続である。

そこで  $F_i$  を斉次成分に分解して  $F_i = f_0^{(i)} + f_1^{(i)} + \cdots + f_m^{(i)}$  とすると、 $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in V(F_1, \dots, F_r)$  ならばすべての  $\lambda \in k$  に対して

$$f_0^{(i)}(x_0, x_1, \dots, x_n) + f_1^{(i)}(x_0, x_1, \dots, x_n)\lambda + \cdots + f_m^{(i)}(x_0, x_1, \dots, x_n)\lambda^m = 0$$

$k$  は無限体なので

$$f_j^{(i)}(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$$

でなければならない。したがって

$$V(F_1, \dots, F_r) = V(\{f_j^{(i)}\}_{i,j})$$

が成り立つから、

$$V = p(p^{-1}(V)) = p(V(\{f_j^{(i)}\}_{i,j})) = \left\{ [x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid f_j^{(i)}(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0, \text{ for all } i, j \right\}$$

ゆえに  $V$  は Zariski 位相に関して閉集合である。  $\square$

## 3.2 Grassmann 多様体と Schubert 多様体

### 3.2.1 Grassmann 多様体

前節の準備をもとに数え上げ問題を定式化しよう。以下では係数体はすべて  $\mathbb{C}$  で考えているとする。

**定義 3.2.1.1.**  $\mathbb{C}^n$  の  $d$  次元部分空間全体のなす集合を  $\mathcal{G}(d, n)$  と書き、これを Grassmann 多様体という。

$d = 1$  のとき Grassmann 多様体は射影空間に他ならない。この意味で Grassmann 多様体は射影空間の一般化である。第 3 章冒頭で述べた数え上げ問題においては  $\mathcal{G}(2, 4)$  を考えることになる。

Grassmann 多様体が代数多様体の構造をもつことを示しておく。

まず、 $\mathcal{M}(d, n)$  をランク  $d$  の  $n \times d$  行列全体のなす集合とする。 $\mathcal{M}(d, n)$  は  $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$  が右からの積で作用するが、この商  $\mathcal{M}(d, n)/\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$  は  $\mathcal{G}(d, n)$  と同一視される。実際、 $\mathbb{C}^n$  の  $d$  次元部分空間に対して、その基底を並べた行列を考えればそれは  $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$  軌道の違いを除いて一意的である。逆に  $A \in \mathcal{M}(d, n)$  に対して、 $[A]$  を  $A$  の列ベクトル (それは 1 次独立) が生成する部分空間とすれば  $[A] \in \mathcal{G}(d, n)$  である。また、 $\mathcal{M}(d, n)$  は  $\mathbb{A}^{nd}$  の Zariski 開集合であった (例 3.1.1.10) が、 $\mathcal{G}(d, n)$  には  $\mathcal{M}(d, n)$  から誘導される商位相を入れておく。

次に  $\mathbb{C}^n$  の  $d$  階交代テンソル空間  $\bigwedge^d \mathbb{C}^n$  を考える。 $\bigwedge^d \mathbb{C}^n$  は  ${}_nC_d$  次元ベクトル空間であるから、その射影化  $\mathbb{P}(\bigwedge^d \mathbb{C}^n)$  は  $\mathbb{P}^{nC_d-1}$  と同一視することができる。また、 $e_1, \dots, e_n$  を  $\mathbb{C}^n$  の標準基底とすれば  $\omega \in \bigwedge^d \mathbb{C}^n$  は

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n} x_{i_1, \dots, i_d} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d}$$

と表せるので、 $p(\omega)$  の斉次座標は

$$p(\omega) = [x_{i_1, \dots, i_d}]_{1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n}$$

のように書くことができる。ただし  $p$  は射影化  $p: \bigwedge^d \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^d \mathbb{C}^n)$  である。

$A \in \mathcal{M}(d, n)$  に対して、 $A$  の列ベクトルを  $v_1, \dots, v_d \in \mathbb{C}^n$  とし写像  $\tilde{\pi}: \mathcal{M}(d, n) \rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^d \mathbb{C}^n)$  を

$$\tilde{\pi}(A) = p(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d) = [\det(A_{i_1, \dots, i_d})]_{1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n}$$



とする。 $\tilde{\pi}$  は多項式写像なので連続である。また、 $P = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$  に対して、

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(AP) &= p((a_{11}v_1 + \cdots + a_{d1}v_d) \wedge \cdots \wedge (a_{d1}v_1 + \cdots + a_{dd}v_d)) \\ &= p(\det P(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d)) \\ &= p(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d) \\ &= \tilde{\pi}(A)\end{aligned}$$

となるから、 $\tilde{\pi}$  は連続写像  $\pi: \mathcal{G}(d, n) \rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^d \mathbb{C}^n)$  を誘導する。

**命題 3.2.1.2** (Plucker 埋め込み).  $\pi: \mathcal{G}(d, n) \rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^d \mathbb{C}^n) = \mathbb{P}^{nC_d-1}$  は単射である。

*Proof.* 次の補題を用いる。

**補題 3.2.1.3.**  $V \in \mathcal{G}(d, n)$  に対してその基底  $v_1, \dots, v_d$  を固定して、 $\omega = v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \in \bigwedge^d \mathbb{C}^n$  とする。 $\Gamma_\omega: \mathbb{C}^n \rightarrow \bigwedge^{d+1} \mathbb{C}^n$  を

$$\Gamma_\omega(u) = \omega \wedge u$$

によって定めると、

$$\ker \Gamma_\omega = V$$

が成り立つ。

*Proof.*  $V$  の元が  $\ker \Gamma_\omega$  に含まれることは明らか。 $u \in \ker \Gamma_\omega$  であるとする。 $v_1, \dots, v_d$  を延長して  $\mathbb{C}^n$  の基底  $v_1, \dots, v_d, v_{d+1}, \dots, v_n$  をとる。

$$u = a_1v_1 + \cdots + a_dv_d + a_{d+1}v_{d+1} + \cdots + a_nv_n$$

とおく。

$$\begin{aligned}0 = \omega \wedge u &= v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \wedge (a_1v_1 + \cdots + a_dv_d + a_{d+1}v_{d+1} + \cdots + a_nv_n) \\ &= a_{d+1}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \wedge v_{d+1}) + \cdots + a_n(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \wedge v_n)\end{aligned}$$

となるが、 $\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_{d+1}}\}_{i_1 < \cdots < i_{d+1}}$  は 1 次独立であるので、 $a_{d+1} = \cdots = a_n = 0$ 。よって  $u \in V$  □

命題の証明に戻る。 $\pi(V) = \pi(U)$  であるとする。 $U$  の基底を  $u_1, \dots, u_d$  とすると仮定より

$$cu_1 \wedge \cdots \wedge u_d = v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = \omega$$

となる定数  $c$  が存在する。したがって  $\Gamma_\omega(u_i) = \omega \wedge u_i = 0$  であるから補題により、 $U = \ker \Gamma_\omega = V$  □

$\pi(\mathcal{G}(d, n)) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^d \mathbb{C}^n)$  が代数的集合であることを示す。

**定義 3.2.1.4.**  $\omega \in \bigwedge^d \mathbb{C}^n$  が totally decomposable であるとは、1 次独立な  $v_1, \dots, v_d \in V$  が存在して  $\omega = v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$  となることをいう。

**補題 3.2.1.5.**  $\omega \in \bigwedge^d \mathbb{C}^n$  が totally decomposable であることと  $\Gamma_\omega: \mathbb{C}^n \rightarrow \bigwedge^{d+1} \mathbb{C}^n$  のランクが  $n - d$  となることは同値である。

*Proof.*  $\omega = v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$  とおく。このとき補題 3.2.1.3 の証明より  $\dim \ker \Gamma_\omega = \dim \langle v_1, \dots, v_d \rangle = d$  であるから  $\text{rank } \Gamma_\omega = n - d$  である。逆に  $\text{rank } \Gamma_\omega = n - d$  であるとする。 $\dim \ker \Gamma_\omega = d$  であるから  $\ker \Gamma_\omega$  の基底  $v_1, \dots, v_d$  をとり、これを延長して  $\mathbb{C}^n$  の基底  $v_1, \dots, v_d, v_{d+1}, \dots, v_n$  をとって

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n} c_{i_1, \dots, i_d} v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d}$$

とおく。すると  $\Gamma_\omega(v_j) = 0, j = 1, \dots, d$  より

$$v_1 \wedge \omega = 0 \text{ すなわち } c_{i_1, \dots, i_d} = 0 \text{ for } i_1 > 1$$

$$v_2 \wedge \omega = 0 \text{ すなわち } c_{i_1, \dots, i_d} = 0 \text{ for } i_2 > 2$$

$$\vdots$$

$$v_d \wedge \omega = 0 \text{ すなわち } c_{i_1, \dots, i_d} = 0 \text{ for } i_d > d$$

よって  $\omega = c_{1,2,\dots,d} v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$  □

$T \subset \bigwedge^d \mathbb{C}^n$  を totally decomposable な元の集合とする。 $\pi(\mathcal{G}(d, n)) = \mathbb{P}(T)$  である。 $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{C}^n$  を標準基底とし、 $\omega \in \bigwedge^d \mathbb{C}^n$  を

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n} x_{i_1, \dots, i_d} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d}$$

とおく。補題より、 $p(\omega) \in \pi(\mathcal{G}(d, n))$  であるための必要十分条件は  $\text{rank } \Gamma_\omega = n - d$  となることである。この条件は  $\Gamma_\omega : \mathbb{C}^n \rightarrow \bigwedge^d \mathbb{C}^n$  を行列表示したとき、その  $(n - d + 1) \times (n - d + 1)$  小行列式がすべて 0 になることと同値である<sup>\*4</sup>。そして  $\Gamma_\omega$  の小行列式は  $x_{i_1, \dots, i_d}$  の多項式で表されるから、 $\pi(\mathcal{G}(d, n))$  は  $\mathbb{P}(\bigwedge^d \mathbb{C}^n)$  の代数的集合である。

Grassmann 多様体が既約であることを示そう。

**補題 3.2.1.6.**  $X, Y$  を位相空間、 $f : X \rightarrow Y$  を連続写像とする。 $A \subset X$  が既約であるならば  $f(A)$  も既約である。

*Proof.*  $f(A)$  が可約であったとして  $f(A) = Z_1 \cup Z_2, \emptyset \subsetneq Z_1, Z_2 \subsetneq f(A)$  となる閉集合  $Z_1, Z_2$  をとる。

$$A \subset f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(Z_1 \cup Z_2) = f^{-1}(Z_1) \cup f^{-1}(Z_2)$$

$f$  は連続であるから  $f^{-1}(Z_1), f^{-1}(Z_2)$  は閉集合である。

$$A = (A \cap f^{-1}(Z_1)) \cup (A \cap f^{-1}(Z_2))$$

より  $A$  は可約である。 □

**命題 3.2.1.7.**  $\mathcal{G}(d, n)$  は既約である。

*Proof.*  $V \in \mathcal{G}(d, n)$  を固定して、 $\alpha : \text{GL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{G}(d, n)$  を

$$\alpha(P) = PV$$

---

<sup>\*4</sup>  $\Gamma_\omega$  のランクは必ず  $n - d$  以上であることに注意。実際、もし  $\dim \ker \Gamma_\omega \geq d + 1$  であるなら、補題 3.2.1.5 の証明と同様の議論をすると、 $\omega = 0$  となってしまう。

によって定める。ただし  $PV$  は  $V$  の基底を  $v_1, \dots, v_d$  とするとき  $Pv_1, \dots, Pv_d$  によって生成される  $d$  次元部分空間を表す。 $\alpha$  は全射である。実際任意の  $d$  次元部分空間  $W = \langle w_1, \dots, w_d \rangle$  に対して、各  $v_i$  を  $w_i$  に写すような  $n$  次正則行列  $P$  をとればよい。また  $\alpha$  は多項式写像であるから連続である。 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  は既約であるから、補題 3.2.1.6 より  $\mathcal{G}(d, n)$  も既約である。□

なお、Plucker 埋め込み  $\pi$  は実際に埋め込み、すなわち像への同相であることが知られている。

最後に Grassmann 多様体の次元について考える。 $1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$  とする。

$$\tilde{U}_{i_1, \dots, i_d} = \{ A \in \mathcal{M}(d, n) \mid \det A_{i_1, \dots, i_d} \neq 0 \}$$

とする。ただし  $A_{i_1, \dots, i_d}$  は  $A$  の第  $i_1, \dots, i_d$  行をとりだした小正方行列であり、 $E_d$  は  $d$  次単位行列である。 $\tilde{U}_{i_1, \dots, i_d}$  は Zariski 開集合であり

$$\mathcal{M}(d, n) = \bigcup_{i_1, \dots, i_d} \tilde{U}_{i_1, \dots, i_d}$$

である。 $\phi: \mathcal{M}(d, n) \rightarrow \mathcal{M}(d, n)/\mathrm{GL}_d(\mathbb{C}) = \mathcal{G}(d, n)$  を自然な写像とすると、 $\phi$  は開写像である\*5。したがって  $U_{i_1, \dots, i_d} = \phi(\tilde{U}_{i_1, \dots, i_d})$  は  $\mathcal{G}(d, n)$  の開集合であり  $\mathcal{G}(d, n) = \bigcup_{i_1, \dots, i_d} U_{i_1, \dots, i_d}$  である。 $A \in \tilde{U}_{i_1, \dots, i_d}$  は適当に右から  $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$  を書けることによって  $A_{i_1, \dots, i_d} = E_d$  となるようにできるから

$$U_{i_1, \dots, i_d} = \{ [A] \in \mathcal{G}(d, n) \mid A_{i_1, \dots, i_d} = E_d \}$$

したがって  $U_{i_1, \dots, i_d}$  は  $\mathbb{A}^{d(n-d)}$  と同相であるから、事実 3.1.3.5 より

$$\dim \mathcal{G}(d, n) = \dim U_{i_1, \dots, i_d} = d(n-d)$$

### 3.2.2 Shubert 胞体と Schubert 多様体

第 3 章冒頭で述べた数え上げ問題においては  $\mathbb{P}^3$  中の直線全体を考えたいから、 $\mathcal{G}(2, 4)$  を考察していくことになる。重要な考え方として、ある条件をみたす直線の集合を  $\mathcal{G}(2, 4)$  の部分多様体としてとらえることで、「複数の条件を満たす直線の数え上げ  $\Leftrightarrow$  いくつかの  $\mathcal{G}(2, 4)$  の部分多様体の交点を数える」という問題の変換を行う。このように幾何学的な条件をみたす線形部分多様体をパラメトライズする空間を Schubert 多様体という。

正則行列を右からかけることはいくつかの列基本変形を施すことと同値であるから、 $[A] \in \mathcal{G}(d, n)$  に対して、 $A$  の第 1 列から順に列基本変形を行えば、 $[A] = [(a_{ij})]$  はある  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq n$  があって  $A$  の第  $i_1, \dots, i_d$  行を取り出した小正方行列が単位行列であり、 $(i_1, 1), (i_2, 2), \dots, (i_d, d)$  成分よりも右上の成分がすべて 0 になる。式で表すと

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \leq i_j - 1 \text{ or } i = i_k, j \leq k - 1 \text{ for some } 1 \leq k \leq d \\ 1 & \text{if } i = i_k, j = k \text{ for some } 1 \leq k \leq d \end{cases} \quad (3.1)$$

をみたすということである。

\*5 一般に位相空間  $X$  に群  $G$  が作用しているとき、その軌道空間  $X/G$  への自然な写像  $\phi: X \rightarrow X/G$  は開写像である。実際、開集合  $U \subset X$  に対して

$$\phi^{-1}(\phi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$$

であり  $g$  は  $X$  上の同相であるから右辺の各  $gU$  は開集合である。

例 3.2.2.1.  $[A] \in \mathcal{G}(2, 4)$  は次のいずれかの形になる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & 0 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ただし  $*$  の部分には任意の複素数が入る。

定義 3.2.2.2.  $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leq n$  に対して

$$\Omega_{i_1, \dots, i_d}^\circ = \{ [(a_{ij})] \in \mathcal{G}(d, n) \mid a_{ij} \text{ satisfies (3.1)} \}$$

を Schubert 胞体という。

上の議論から、

$$\mathcal{G}(d, n) = \bigcup_{1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n} \Omega_{i_1, \dots, i_d}^\circ$$

が成り立つ。

例 3.2.2.3.  $\mathcal{G}(1, n+1) = \mathbb{P}^n$  の場合 Schubert 胞体は

$$\Omega_1^\circ = \begin{bmatrix} 1 \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}, \quad \Omega_2^\circ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \Omega_{n+1}^\circ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

例 3.2.2.4.  $\mathcal{G}(2, 4)$  の場合 Schubert 胞体は

$$\Omega_{1,2}^\circ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}, \quad \Omega_{1,3}^\circ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}, \quad \Omega_{1,4}^\circ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & 0 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{2,3}^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}, \quad \Omega_{2,4}^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega_{3,4}^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

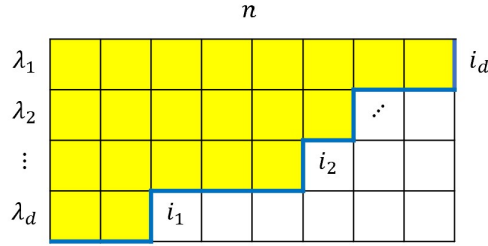
$\Omega_{i_1, \dots, i_d}^\circ$  に含まれる  $*$  の数を  $k$  とすれば  $\Omega_{i_1, \dots, i_d}^\circ$  は  $\mathbb{A}^k$  に同相であるから  $\dim \Omega_{i_1, \dots, i_d}^\circ = k$  である。

Schubert 胞体と Young 図形の関係について述べておく。 $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n$  に対して、

$$\lambda_k = i_{d+1-k} - d - 1 + k \quad (3.2)$$

とおくと、 $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$  は  $d \times (n-d)$  の部分 Young 図形になる。逆に式 (3.2) によって  $d \times (n-d)$  の部分 Young 図形から Schubert 胞体を得ることができる。そこで  $\mathcal{Y}_d(n)$  を  $d \times (n-d)$  の部分 Young 図形全体のなす集合とし、 $\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)$  に対応する Schubert 胞体を  $\Omega_\lambda^\circ$  と表すことにする。

式 (3.2) の対応関係をもう少し詳しく説明する。 $d \times (n - d)$  の Young 図形を用意し、各辺に沿って一番左下の頂点から一番右上の頂点に行く最短経路を考える。そのパターンは、各ステップごとに上に行くか右に行くかを選べば決まる。右上にたどり着くためには  $d$  回上に行く選択をしなければならないから、 $i_1, \dots, i_d$  ステップ目で上に行き、それ以外では右に行くとするれば、1 つ最短経路が定まる。この最短経路によって分けられる  $d \times (n - d)$  Young 図形の左上の部分、対応する Young 図形  $\lambda$  とするのである。



またこのとき対応する  $\lambda$  は、 $A$  から  $i_1, \dots, i_d$  行と  $*$  の入っている部分を取り除いてできる形 (を  $90^\circ$  左に開店したもの) と同じである。

**例 3.2.2.5.**  $\mathcal{G}(1, n+1)$  の場合

$$\Omega_\emptyset^\circ = \begin{bmatrix} 1 \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}, \Omega_{\square}^\circ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}, \dots, \Omega_{(n)}^\circ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

**例 3.2.2.6.**  $\mathcal{G}(2, 4)$  の場合

$$\begin{aligned} \Omega_\emptyset^\circ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}, & \Omega_{\square}^\circ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}, & \Omega_{\square\square}^\circ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & 0 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Omega_{\square}^\circ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}, & \Omega_{\square\square}^\circ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \Omega_{\square\square\square}^\circ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\square$  で囲った成分のなす形と Young 図形とが対応している。

**命題 3.2.2.7.**  $I = (1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n)$ ,  $J = (1 \leq j_1 < \dots < j_d \leq n)$  に対応する Young 図形をそれぞれ  $\lambda, \mu$  とする。このとき

$$\lambda \subset \mu \Leftrightarrow i_k \leq j_k \text{ for all } k$$

である。

*Proof.*  $\lambda \subset \mu$  の定義は  $\lambda_k \leq \mu_k$ , for all  $k$  であるから、式 (3.2) より直ちに従う。 □

**定義 3.2.2.8** (標準的な旗に付随する Shubert 多様体).  $\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)$  に対して、

$$\Omega_\lambda = \bigcup_{\mu \supset \lambda} \Omega_\mu^\circ$$

を Schubert 多様体という。

**例 3.2.2.9.**  $\mathcal{G}(1, n+1) = \mathbb{P}^n$  において

$$\Omega_{\square} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} \cup \cdots \cup \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \{ [0 : x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \in \mathbb{C} \} = \mathbb{P}^{n-1}$$

同様に

$$\Omega_{(k)} = \mathbb{P}^{n-k}$$

である。

ここで定義した Schubert 多様体は、正確には標準的な旗に付随する Schubert 多様体と呼ぶべきものである。旗の概念は後で定義するが、一般の Schubert 多様体はこの標準的な Schubert 多様体のもつ、次の幾何学的な性質を一般化する形で定める。

**命題 3.2.2.10.**  $\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)$  とする。  $e_1, \dots, e_n$  を  $\mathbb{C}^n$  の標準基底とし  $F^k = \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$  とおく。

$$\Omega_{\lambda} = \{ V \in \mathcal{G}(d, n) \mid \dim(V \cap F^{\lambda_k + d - k}) \geq k \}$$

が成り立つ。

*Proof.*  $\mu \supset \lambda$  とする。式 (3.2) によって  $\lambda, \mu$  に対応する整数列をそれぞれ  $(i_1, \dots, i_d), (j_1, \dots, j_d)$  とする。すなわち

$$i_k = \lambda_{d+1-k} + k, \quad j_k = \mu_{d+1-k} + k$$

である。  $\mu \supset \lambda$  より  $j_k \geq i_k$  である。

$V \in \Omega_{\mu}^{\circ}$  はベクトル

$$v_1 = e_{j_1} + f_1, \quad f_1 \in \langle e_{j_1+1}, \dots, e_n \rangle = F^{j_1}$$

$$v_2 = e_{j_2} + f_2, \quad f_2 \in \langle e_{j_2+1}, \dots, e_n \rangle = F^{j_2}$$

$$\vdots$$

$$v_d = e_{j_d} + f_d, \quad f_d \in \langle e_{j_d+1}, \dots, e_n \rangle = F^{j_d}$$

を適当にとって  $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_d \rangle$  とできる。  $\lambda_k + d - k = (i_{d+1-k} - d - 1 + k) + d - k = i_{d+1-k} - 1$  であるが、  $\dim(V \cap F^{i_{d+1-k}-1}) \geq k$  を示そう。  $v_{d+1-k}, v_{d+2-k}, \dots, v_d \in F^{j_{d+1-k}-1}$  である。  $j_k \geq i_k$  であるから  $F^{j_{d+1-k}-1} \subset F^{i_{d+1-k}-1}$ 。 したがって

$$\dim(V \cap F^{i_{d+1-k}-1}) \geq k$$

である。

逆に  $V \in \mathcal{G}(d, n)$  が  $\dim(V \cap F^{i_{d+1-k}-1}) \geq k$  を満たしているとする。このとき  $V$  の基底  $v_1, \dots, v_d$  とし

て次の条件を満たすものがとれる。

$$\begin{aligned} v_d &\in V \cap F^{i_d-1} \\ v_{d-1} &\in V \cap F^{i_{d-1}-1} \setminus F^{i_d-1} \\ &\vdots \\ v_1 &\in V \cap F^{i_1-1} \setminus F^{i_2-1} \end{aligned}$$

よって標準基底に関して成分表示すると

$$\begin{aligned} v_d &= c_{i_d}^{(d)} e_{i_d} + \cdots + c_n^{(1)} e_n \\ v_{d-1} &= c_{i_{d-1}}^{(d-1)} e_{i_{d-1}} + \cdots + c_{i_d-1}^{(d-1)} e_{i_d-1} + c_{i_d}^{(d-1)} e_{i_d} + \cdots + c_n^{(d-1)} e_n \\ &\vdots \\ v_1 &= c_{i_1}^{(1)} e_{i_1} + \cdots + c_{i_2-1}^{(1)} e_{i_2-1} + \cdots + c_{i_d}^{(1)} e_{i_d} + \cdots + c_n^{(1)} e_n \end{aligned}$$

となるが、上の条件より

$$\begin{aligned} c_{i_d}^{(d)}, \dots, c_n^{(d)} &\text{ は同時に 0 にならない} \\ c_{i_{d-1}}^{(d-1)}, \dots, c_{i_d-1}^{(d-1)} &\text{ は同時に 0 にならない} \\ &\vdots \\ c_{i_1}^{(1)}, \dots, c_{i_2-1}^{(1)} &\text{ は同時に 0 にならない} \end{aligned}$$

が成り立つ。各  $k$  において 0 でない  $c_{i_k}^{(k)}, \dots, c_n^{(k)}$  のうち最も左にあるものを  $c_{j_k}^{(k)}$  とおいて、 $v_k$  を  $\frac{1}{c_{j_k}^{(k)}} v_k$  で置き換えれば、

$$\begin{aligned} v_d &= e_{j_1} + f_1, \quad f_1 \in \langle e_{j_1+1}, \dots, e_n \rangle = F^{j_1} \\ v_{d-1} &= e_{j_2} + f_2, \quad f_2 \in \langle e_{j_2+1}, \dots, e_n \rangle = F^{j_2} \\ &\vdots \\ v_1 &= e_{j_d} + f_d, \quad f_d \in \langle e_{j_d+1}, \dots, e_n \rangle = F^{j_d} \end{aligned}$$

の形にすることができる。これは  $V = \langle v_1, \dots, v_d \rangle$  が  $V \in \Omega_{j_1, \dots, j_d}^0$  であることに他ならないが、 $j_k \geq i_k$  があるので、 $j_1, \dots, j_d$  の対応する Young 図形を  $\mu$  とすれば  $\mu \supset \lambda$  である。□

**定義 3.2.2.11.**  $\mathbb{C}^n$  の部分空間の列

$$\mathbb{C}^n = F^0 \supset F^1 \supset \cdots \supset F^{n-1} \supset F^n = 0, \quad \dim F^k = n - k$$

を旗といい、 $F^\bullet$  と表す。とくに  $e_1, \dots, e_n$  を標準基底として  $F^k = \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$  なる旗を標準旗といい  $F_{st}^\bullet$  と表す。 $\mathbb{P}^{n-1}$  の線形部分多様体は  $\mathbb{C}^n$  の部分空間と 1 対 1 に対応することを思い出せば、旗の各部分空間を射影化することで  $\mathbb{P}^{n-1}$  の線形部分多様体の列を得る。このような  $\mathbb{P}^{n-1}$  の部分集合の列も旗と呼ぶことにする。

**例 3.2.2.12.**  $\mathbb{C}^4$  において旗

$$\mathbb{C}^4 = F^0 \supset F^1 \supset F^2 \supset F^3 \supset F^4 = 0$$

の射影化は

$$\mathbb{P}^3 \supset e_0 \supset l_0 \ni p_0 \supset \emptyset$$

である。ここで  $e_0, l_0, p_0$  はそれぞれ  $\mathbb{P}^3$  の平面, 直線, 点である。

命題 3.2.2.10 を一般化して次の定義を得る。

**定義 3.2.2.13.**  $F^\bullet$  を  $\mathbb{C}^n$  の旗とする。  $\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)$  に対して、

$$\Omega_\lambda(F^\bullet) = \{ V \in \mathcal{G}(d, n) \mid \dim(V \cap F^{\lambda_i + d - i}) \geq i \}$$

を  $F^\bullet$  に付随する Schubert 多様体という

**例 3.2.2.14.**  $\mathcal{G}(2, 4)$  において、  $F^\bullet$  を任意の  $\mathbb{C}^4$  の旗としてその射影化を  $\mathbb{P}^3 \supset e_0 \supset l_0 \ni p_0 \supset \emptyset$  とする。このとき

$$\Omega_\emptyset = \mathcal{G}(2, 4)$$

$$\Omega_{\square} = \{ V \in \mathcal{G}(2, 4) \mid \dim(V \cap F^2) \geq 1 \} \approx \{ l \subset \mathbb{P}^3 : \text{直線} \mid l \cap l_0 \neq \emptyset \}$$

$$\Omega_{\square\square} = \{ V \in \mathcal{G}(2, 4) \mid \dim(V \cap F^3) \geq 1 \} \approx \{ l \subset \mathbb{P}^3 : \text{直線} \mid l \ni p_0 \}$$

$$\Omega_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}} = \{ V \in \mathcal{G}(2, 4) \mid \dim(V \cap F^2) \geq 1, \dim(V \cap F^1) \geq 2 \} \approx \{ l \subset \mathbb{P}^3 : \text{直線} \mid l \subset e_0 \}$$

$$\Omega_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}} = \{ V \in \mathcal{G}(2, 4) \mid \dim(V \cap F^3) \geq 1, \dim(V \cap F^1) \geq 2 \} \approx \{ l \subset \mathbb{P}^3 : \text{直線} \mid p_0 \in l \subset e_0 \}$$

$$\Omega_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} \approx \{ l = l_0 \}$$

となり、Schubert 多様体が幾何学的な線形部分多様体をパラメトライズしていることがわかる。

### 3.2.3 Schubert 多様体の基本性質

Schubert 胞体・Schubert 多様体の基本的な性質をいくつか示しておく。まず、Schubert 多様体が Schubert 胞体の直和であることを示す。

**命題 3.2.3.1.**  $\lambda \neq \mu$  ならば、  $\Omega_\lambda^\circ \cap \Omega_\mu^\circ = \emptyset$  である。

*Proof.*  $\lambda, \mu$  に対応する整数列をそれぞれ  $(i_1, \dots, i_d), (j_1, \dots, j_d)$  とおく。  $V \in \Omega_\lambda^\circ$  とすると、  $V$  の基底  $v_1, \dots, v_d$  を

$$v_1 = e_{i_1} + f_1, \quad f_1 \in \langle e_{i_1+1}, \dots, e_n \rangle = F^{i_1}$$

$$v_2 = e_{i_2} + f_2, \quad f_2 \in \langle e_{i_2+1}, \dots, e_n \rangle = F^{i_2}$$

$$\vdots$$

$$v_d = e_{i_d} + f_d, \quad f_d \in \langle e_{i_d+1}, \dots, e_n \rangle = F^{i_d}$$

となるように取れる。さらにもし  $V \in \Omega_\mu^\circ$  でもあるなら  $V$  の別の基底  $w_1, \dots, w_d$  で

$$w_1 = e_{j_1} + s_1, \quad s_1 \in \langle e_{j_1+1}, \dots, e_n \rangle = F^{j_1}$$

$$w_2 = e_{j_2} + s_2, \quad s_2 \in \langle e_{j_2+1}, \dots, e_n \rangle = F^{j_2}$$

$$\vdots$$

$$w_d = e_{j_d} + s_d, \quad s_d \in \langle e_{j_d+1}, \dots, e_n \rangle = F^{j_d}$$



となるものが存在する。ここで  $j_k \notin \{i_1, \dots, i_d\}$  なる  $j_k$  に対して、 $w_k \notin \langle v_1, \dots, v_d \rangle$  であることを示す。  
もし

$$w_k = c_1 v_1 + \dots + c_d v_d$$

となったとする。このとき

$$e_{j_k} + s_k = c_1 e_{i_1} + \dots + c_d e_{i_d} + c_1 f_1 + \dots + c_d f_d$$

だが、 $i_1 < \dots < i_t < j_k < i_{t+1} < \dots < i_d$  として両辺  $F^{j_k}$  の剰余類を取れば

$$\overline{e_{j_k}} = c_1 \overline{e_{i_1}} + \dots + c_t \overline{e_{i_t}} + c_1 \overline{f_1} + \dots + c_t \overline{f_t}$$

となる。 $\overline{e_{i_1}} \in (F^{i_1-1}/F^{j_k}) \setminus (F^{i_1}/F^{j_k})$  かつ、それ以外のすべての元は  $F^{i_1}/F^{j_k}$  に含まれている。したがって  $c_1 = 0$  でなければならない。 $e_{i_2}$  に同様の議論をして  $c_2 = 0$ 。結局  $c_t = 0$  までが言えるので、 $\overline{e_{j_k}} = 0$  すなわち  $e_{j_k} \in F^{j_k}$  となるがこれは矛盾である。□

**系 3.2.3.2.** 次が成り立つ。

- (i)  $\mathcal{G}(d, n) = \bigsqcup_{\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)} \Omega_\lambda^\circ$
- (ii)  $\Omega_\lambda(F^\bullet) = \bigsqcup_{\mu \supset \lambda} \Omega_\mu^\circ(F^\bullet)$

つぎに  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  の作用について解説する。

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  は  $\mathcal{G}(d, n)$  に左からの積によって自然に作用する。 $g : \mathcal{G}(d, n) \rightarrow \mathcal{G}(d, n)$  は多項式写像であるので連続であり、 $g^{-1}$  が逆写像を与えるので同相である。

旗  $F^\bullet$  と  $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  に対して  $gF^\bullet$  を

$$gF^\bullet : \mathbb{C}^n = gF^0 \supset gF^1 \supset \dots \supset gF^n = 0$$

によって定めれば  $gF^\bullet$  は新しい旗になる。逆に任意の旗  $F^\bullet, E^\bullet$  に対して、 $F^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$ ,  $E^k = \langle w_{k+1}, \dots, w_n \rangle$  となる  $\mathbb{C}^n$  の基底  $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n$  をとって変換行列  $g$  を考えれば、 $gF^\bullet = E^\bullet$  となる。言い換えれば  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  は  $\mathbb{C}^n$  の旗全体のなす集合に推移的に作用する。

$B \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  を対角成分が 1 の下三角行列全体のなす部分群とし、 $1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$  に対して

$$E_{i_1, \dots, i_d} = \langle e_{i_1}, \dots, e_{i_d} \rangle \in \Omega_{i_1, \dots, i_d}^\circ(F^\bullet)$$

とする。このとき

$$B e_{i_k} = e_{i_k} + f_k, \quad f_k \in F^{i_k}$$

と書くことができるから、 $\Omega_{i_1, \dots, i_d}^\circ(F^\bullet) = B E_{i_1, \dots, i_d}$  である。また  $i_1, \dots, i_d$  に対応する Young 図形  $\lambda$  に対して

$$E_\lambda = E_{i_1, \dots, i_d}$$

とする。

**命題 3.2.3.3.**  $F^\bullet$  を旗、 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  とする。 $g\Omega_\lambda(F^\bullet) = \Omega_\lambda(gF^\bullet)$  である。

*Proof.*

$$\begin{aligned}
V \in \Omega_\lambda(gF^\bullet) &\Leftrightarrow \dim(V \cap gF^{\lambda_k+d-k}) \geq k, \text{ for all } k \\
&\Leftrightarrow \dim(g^{-1}V \cap F^{\lambda_k+d-k}) \geq k, \text{ for all } k \\
&\Leftrightarrow g^{-1}V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \\
&\Leftrightarrow V \in g\Omega_\lambda(F^\bullet)
\end{aligned}$$

□

任意の旗  $F^\bullet$  に対して、 $F^\bullet$  はある  $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  で  $F^\bullet = gF_{st}^\bullet$  と書けるが、

$$\Omega_\lambda(F_{st}^\bullet) = \bigsqcup_{\mu \supset \lambda} \Omega_\mu^\circ$$

であったから、

$$\Omega_\lambda(F) = \bigsqcup_{\mu \supset \lambda} g\Omega_\mu^\circ$$

そこで、 $g\Omega_\mu^\circ$  を旗  $F^\bullet$  に付随する Schubert 胞体といい  $\Omega_\mu^\circ(F^\bullet)$  とかく。

このように一般の Schubert 多様体は  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  の作用によって得られる。

次に Schubert 多様体が既約な代数多様体であることを示す。

**命題 3.2.3.4.**  $\Omega_\lambda(F^\bullet) \subset \mathcal{G}(d, n) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^d \mathbb{C}^n)$  は Zariski 閉集合である。

*Proof.* 命題 3.2.3.3 より  $\Omega_\lambda(F_{st}^\bullet)$  に対して示せば十分である。また、命題 3.1.3.15 より、 $\mathcal{M}(d, n)$  によって誘導される位相に関して閉集合であることを示せばよい。 $\Omega_\lambda(F_{st}^\bullet) = \{ V \in \mathcal{G}(d, n) \mid \dim V \cap F^{\lambda_i+d-i} \geq i \}$  において、線形写像  $\eta_i(V)$  を

$$\eta_i(V) : V \rightarrow \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n / F^{\lambda_i+d-i}$$

なる自然な写像とすれば、 $\dim V \cap F^{\lambda_i+d-i} \geq i$  は  $\mathrm{rank} \eta_i(V) \geq d-i$  と同値である。 $\phi : \mathcal{M}(d, n) \rightarrow \mathcal{M}(d, n)/\mathrm{GL}_d(\mathbb{C}) = \mathcal{G}(d, n)$  を自然な写像とすれば

$$\phi^{-1}(\Omega_\lambda(F_{st}^\bullet)) = \{ A \in \mathcal{M}(d, n) \mid \mathrm{rank} \eta_i([A]) \geq d-i \}$$

となる。したがって  $\mathrm{rank} \eta_i([A]) \geq d-i$  が ( $A$  の成分の多項式) $=0$  の形で記述できることがわかればよい。 $V = [A]$  とする。 $V$  の基底を  $A$  の列ベクトル、 $\mathbb{C}^n$  の基底を標準基底とすれば、

$$V \rightarrow \mathbb{C}^n$$

の表現行列は  $A$  に他ならない。また、 $\mathbb{C}^n / F^{\lambda_i+d-i}$  の基底として  $e_1, \dots, e_{\lambda_i+d-i}$  がとれるから

$$\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n / F^{\lambda_i+d-i}$$

の表現行列は

$$(E_{\lambda_i+d-i} \ 0), \quad \text{ただし } E_{\lambda_i+d-i} \text{ は } \lambda_i + d - i \text{ 次単位行列}$$

となる。したがって  $\eta_i([A])$  の表現行列は

$$(E_{\lambda_i+d-i} \ 0) A = (A_{\lambda_i+d-i} \ 0)$$

となる。ただし  $A_{\lambda_i+d-i}$  は  $A$  の第 1 行から  $\lambda_i + d - i$  行までを取り出した小正行行列である。よって  $\mathrm{rank} \eta_i(V) \geq d-i$  は  $(A_{\lambda_i+d-i} \ 0)$  の  $d-i+1$  小行列式がすべて 0 になることと同値であるから、これは ( $A$  の成分の多項式) $=0$  の形である。 □

**命題 3.2.3.5.** Schubert 多様体  $\Omega_\lambda(F^\bullet)$  は Schubert 胞体  $\Omega_\lambda^\circ(F^\bullet)$  の閉包である：

$$\Omega_\lambda(F^\bullet) = \overline{\Omega_\lambda^\circ(F^\bullet)}$$

*Proof.*  $\Omega_\lambda(F_{st}^\bullet)$  に対して示せば十分である。次の補題を用いる。

**補題 3.2.3.6.**  $\lambda \subset \mu$  ならば  $\Omega_\mu^\circ(F_{st}^\bullet) \subset \overline{\Omega_\lambda^\circ(F_{st}^\bullet)}$

*Proof.*  $\lambda, \mu$  に  $I = (1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n), J = (1 \leq j_1 < \cdots < j_d \leq n)$  がそれぞれ対応しているとする。 $i_k \leq j_k$  for all  $k$  である。次の操作を考える。

$$\alpha \notin I \setminus J, \beta \in J \text{ なる } \alpha < \beta \text{ をとり、} J \text{ から } \beta \text{ を取り除き } \alpha \text{ を加える。} \quad (3.3)$$

$J$  に操作 (3.3) を有限回施すことで  $I$  を得ることができる。そこで、 $J$  が操作 (3.3) を 1 回施すことで  $I$  を得ることができる場合を考えればよい。実際、もしこの場合に証明できれば、 $J$  に  $k$  回操作 (3.3) を施したものを  $J_k$  とおけば、

$$\Omega_J^\circ(F_{st}^\bullet) \subset \overline{\Omega_{J_1}^\circ(F_{st}^\bullet)} \subset \overline{\Omega_{J_2}^\circ(F_{st}^\bullet)} = \overline{\Omega_{J_2}^\circ(F_{st}^\bullet)} \subset \cdots$$

となるから示せる。

$$\text{例：} I = (1, 3, 6), J = (1, 4, 6) \quad \rightarrow \quad (\alpha = 3, \beta = 4)$$

$E_J \in \overline{\Omega_I^\circ(F_{st}^\bullet)}$  を示せば  $\Omega_J^\circ(F_{st}^\bullet) = BE_J \subset B\overline{\Omega_I^\circ(F_{st}^\bullet)} \subset \overline{\Omega_I^\circ(F_{st}^\bullet)}$  より主張が従う。 $\phi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{G}(d, n)$  を

$$\phi([s : t]) = \langle \{e_k \mid k \in I \cap J\} \cup \{se_\alpha + te_\beta\} \rangle$$

によって定める。 $\phi$  は多項式写像であるので連続である。 $\phi([1 : 0]) = E_I, \phi([0 : 1]) = E_J$  であるから、 $\phi$  は  $E_I$  と  $E_J$  を結ぶ曲線だと思えることができる。しかも  $\phi([1 : t]) \in \Omega_I^\circ(F_{st}^\bullet)$  である。よって

$$E_J = \phi([0 : 1]) \in \phi(\overline{\mathbb{P}^1 \setminus \{[0 : 1]\}}) \subset \overline{\phi(\mathbb{P}^1 \setminus \{[0 : 1]\})} \subset \overline{\Omega_I^\circ(F_{st}^\bullet)}$$

となり示せた。 □

命題 3.2.3.5 の証明に戻ろう。補題より

$$\Omega_\lambda(F_{st}^\bullet) = \bigsqcup_{\mu \supset \lambda} \Omega_\mu^\circ(F_{st}^\bullet) \subset \overline{\Omega_\lambda^\circ(F_{st}^\bullet)}$$

であり、 $\Omega_\lambda^\circ(F_{st}^\bullet) \subset \Omega_\lambda(F_{st}^\bullet)$  かつ  $\Omega_\lambda(F_{st}^\bullet)$  は閉集合であるから、

$$\overline{\Omega_\lambda^\circ(F_{st}^\bullet)} \subset \Omega_\lambda(F_{st}^\bullet)$$

□

**系 3.2.3.7.** Schubert 多様体は既約である。

*Proof.* 一般に位相空間  $X$  の部分集合  $A$  が既約であるならその閉包  $\overline{A}$  も既約である。実際、 $\overline{A} = Y_1 \cup Y_2$  となる閉集合  $Y_1, Y_2$  が存在したら、 $A = (\overline{A} \cap Y_1) \cup (\overline{A} \cap Y_2)$  となるから  $A$  は可約になる。

Schubert 胞体はアフィン空間と同相であるから既約であるので、その閉包である Schubert 多様体も既約である。 □

一般に代数多様体  $X$  の部分多様体  $Z$  について、 $\dim X - \dim Z$  を  $Z$  の余次元といい  $\text{codim } Z$  と書く。

**事実 3.2.3.8** ([2]).  $\text{codim } \Omega_\lambda(F^\bullet) = |\lambda|$  である。

### 3.3 Grassmann 多様体の交叉理論

#### 3.3.1 一般の位置

前節で導入したように、 $\mathbb{P}^n$  の固定された旗に対して、その旗と特定の位置にある線形部分多様体をパラメータづける空間が Schubert 多様体であった。今度は複数の旗に対してそれぞれの Schubert 多様体がどのように交わるかを記述することを考える。ここで重要になるのが2つの旗が一般の位置にあるという条件である。これが第3章冒頭に述べた「ある程度一般の状況」という言葉の意味である。一般の位置にある2つの旗の Schubert 多様体の交叉に対してはその次元がうまくふるまうことが知られており、それによって交点の数え上げに整った代数的・組み合わせ的計算が現れる。

**定義 3.3.1.1.**  $F^\bullet, E^\bullet$  を  $\mathbb{C}^n$  の旗とする。各  $k$  において

$$F^k \cap E^{n-k} = 0$$

が成り立つとき、 $F^\bullet, E^\bullet$  は一般の位置にあるという。

**例 3.3.1.2.** 旗  $F^\bullet$  に対して  $F^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$  となる基底  $v_1, \dots, v_n$  をとる。 $F_{op}^k$  を

$$F_{op}^k = \langle v_1, \dots, v_{n-k} \rangle$$

とすれば

$$F_{op}^{n-k} \cap F^k = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \cap \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle = 0$$

となるから、 $F^\bullet, F_{op}^\bullet$  は一般の位置にある。 $F_{op}^\bullet$  を  $F^\bullet$  の反対旗という。

**例 3.3.1.3.**  $F^\bullet$  を標準旗とする。 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  を  $g = (v_1, \dots, v_n) = (a_{ij})$  とすれば

$$gF^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$$

である。 $F^\bullet, gF^\bullet$  が一般の位置にあるための必要十分条件は、各  $k$  において

$$e_{k+1}, \dots, e_n, v_{n-k+1}, \dots, v_n$$

が一次独立となることである。すなわち  $\det(e_{k+1}, \dots, e_n, v_{n-k+1}, \dots, v_n) \neq 0$  である。よって  $F^\bullet, gF^\bullet$  が一般の位置にあるような  $g$  のなす  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  の部分集合は Zariski 開集合である。Zariski 開集合は稠密であるから、ほとんどすべての旗は一般の位置にあるといってよい。

**命題 3.3.1.4.**  $F^\bullet, E^\bullet$  を一般の位置にある旗とする。 $\mathbb{C}^n$  の基底  $v_1, \dots, v_n$  を適当にとつて、

$$F^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle, \quad E^{n-k} = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

となるようにできる。

*Proof.*  $\dim(E^{n-k} \cap F^{k-1}) = 1$  を示す。まず  $E^{n-k} \cap F^k = 0$  より

$$\dim(E^{n-k} + F^k) = \dim E^{n-k} + \dim F^k - \dim(E^{n-k} \cap F^k) = n$$

よって  $\dim(E^{n-k} + F^{k-1}) = n$  であるから

$$\begin{aligned}\dim(E^{n-k} \cap F^{k-1}) &= \dim E^{n-k} + \dim F^{k-1} - \dim(E^{n-k} + F^{k-1}) \\ &= k + (n - k + 1) - n \\ &= 1\end{aligned}$$

そこで  $v_k$  を  $E^{n-k} \cap F^{k-1}$  の生成元とする。  $E^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$  となることが帰納法により従う。

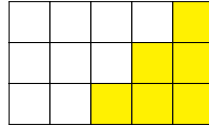
$\dim E^{n-1} = 1$  であるから  $E^{n-1} = \langle v_1 \rangle$  である。  $E^{n-k} = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$  であるとする。

$$v_{k+1} \in E^{n-k-1} \cap F^k$$

であり  $F^k \cap E^{n-k} = 0$  であるから  $v_{k+1} \notin E^{n-k}$  となる。 よって  $E^{n-k-1} = \langle v_1, \dots, v_k, v_{k+1} \rangle$ 。 同様に  $F^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$  も示せる。  $\square$

### 3.3.2 双対定理と交叉条件

**定義 3.3.2.1.**  $\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)$  に対して、  $d \times (n-d)$  長方形から  $\lambda$  を取り除いてできる図形を、  $180^\circ$  回転させて得られる Young 図形を  $\lambda$  の双対といい  $\lambda^\vee$  と書く。



式で書けば  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$  に対し

$$\lambda_i^\vee = n - d - \lambda_{d+1-i}$$

である。

**例 3.3.2.2.**  $d = 2, n = 4$  として

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad \text{なら} \quad \lambda^\vee = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

**定理 3.3.2.3** (双対定理).  $\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_d(n)$  を  $|\lambda| + |\mu| = d(n-d)$  であるとする。  $F^\bullet$  を旗とする。 このとき

$$|\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet)| = \delta_{\lambda\mu^\vee}$$

が成り立つ。

*Proof.*  $F^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$ ,  $F_{op}^k = \langle v_1, \dots, v_{n-k} \rangle$  となる基底  $v_1, \dots, v_n$  をとる。  $i^* = d + 1 - i$  とおく。 すなわち  $i$  が  $1$  から  $d$  まで動くとき  $i^*$  は  $d$  から  $1$  へ動く。

$\mu = \lambda^\vee$  であるとする。  $A_i = F^{\lambda_i + d - i}$ ,  $B_i = F_{op}^{\lambda_{i^*}^\vee + d - i^*}$  とおく。 すると  $V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_{\lambda^\vee}(F_{op}^\bullet)$  ならば

$$\dim(V \cap A_i) \geq i, \quad \dim(V \cap B_i) \geq i^*$$

である。 よって

$$\begin{aligned}d &\geq \dim(V \cap A_i + V \cap B_i) \\ &= \dim(V \cap A_i) + \dim(V \cap B_i) - \dim(V \cap A_i \cap B_i) \\ &\geq i + i^* - \dim(V \cap A_i \cap B_i) \\ &= d + 1 - \dim(V \cap A_i \cap B_i)\end{aligned}$$

より

$$\dim(V \cap A_i \cap B_i) \geq 1$$

一方

$$\begin{aligned} A_i &= F^{\lambda_i+d-i} = \langle v_{\lambda_i+d-i+1}, \dots, v_n \rangle \\ B_i &= F_{op}^{\lambda_{i^*}^\vee+d-i^*} \\ &= F_{op}^{n-d-\lambda_{d+1-i^*}+d-i^*} \\ &= F^{n-d-\lambda_i+d-d-1+i} \\ &= F^{(n-(\lambda_i+d-i+1))} \\ &= \langle v_1, \dots, v_{\lambda_i+d-i+1} \rangle \end{aligned}$$

より

$$A_i \cap B_i = \langle v_{\lambda_i+d-i+1} \rangle$$

となるから、

$$v_{\lambda_i+d-i+1} \in V$$

$v_1, \dots, v_n$  は一次独立であるから

$$V = \langle v_{\lambda_1+d}, v_{\lambda_2+d-1}, \dots, v_{\lambda_d+1} \rangle$$

したがって  $\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_{\lambda^\vee}(F_{op}^\bullet)$  は 1 点からなる。

次に  $\mu \neq \lambda^\vee$  であるとする。  $|\lambda| + |\mu| = d(n-d)$  より、ある  $i$  で  $\lambda_i + \mu_{i^*} > n-d$  となる。前半と同様  $A_i = F^{\lambda_i+d-i}$ ,  $B_i = F_{op}^{\mu_{i^*}+d-i^*}$  とおけば

$$\begin{aligned} A_i &= \langle v_{\lambda_i+d-i+1}, \dots, v_n \rangle \\ B_i &= \langle v_1, \dots, v_{n-\mu_{i^*}-d+i^*} \rangle \\ &= \langle v_1, \dots, v_{n-\mu_{i^*}+1-i} \rangle \\ &\subsetneq \langle v_1, \dots, v_{\lambda_i+d-i+1} \rangle \end{aligned}$$

より  $A_i \cap B_i = 0$  であるから、前半と同様の議論をすれば  $V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet)$  とはなりえないことがわかる。  $\square$

**例 3.3.2.4.** 双対定理を例 3.2.2.14 の場合で考えてみる。例えば  $|\Omega_{\square\square}(F^\bullet) \cap \Omega_{\square\square}(F_{op}^\bullet)| = 1$  は、「直線  $l_0$  と交わり、点  $p_0$  を通り平面  $e_0$  に含まれるような直線はただ 1 つ」と解釈できる。また  $|\Omega_{\square\square}(F^\bullet) \cap \Omega_{\square\square}(F_{op}^\bullet)| = 1$  は、「与えられた 2 点を通る直線はただ 1 つ」と解釈でき、これも確かにもっともらしい主張である。さらに  $|\Omega_{\square\square}(F^\bullet) \cap \Omega_{\square\square}(F_{op}^\bullet)| = 1$  は、「与えられた 2 平面両方に含まれる直線はただ 1 つ」となる。

**系 3.3.2.5** (交叉条件).  $\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_d(n)$  に対して、 $\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet) \neq \emptyset$  となるための必要十分条件はすべての  $i$  に対して  $\lambda_i + \mu_{i^*} \leq n-d$  が成り立つことである。

*Proof.* 必要性から示す。  $V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet)$  ならば、定理 3.3.2.3 の証明と同様にして

$$\dim(V \cap A_i \cap B_i) \geq 1$$

したがって  $A_i \cap B_i \neq 0$  が成り立つ。

$$A_i = \langle v_{\lambda_i+d-i+1}, \dots, v_n \rangle, \quad B_i = \langle v_1, \dots, v_{n-\mu_{i^*}+1-i} \rangle$$

より

$$\begin{aligned}\lambda_i + d - i + 1 &\leq n - \mu_{i^*} + 1 - i \\ \lambda_i + \mu_{i^*} &\leq n - d\end{aligned}$$

逆にすべての  $i$  に対して  $\lambda_i + \mu_{i^*} \leq n - d$  であるならば  $\mu \in \lambda^\vee$  であるから、双対定理により

$$\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet) \supset \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_{\lambda^\vee}(F_{op}^\bullet) \neq \emptyset$$

となる。 □

命題 3.3.1.4 より双対定理・交叉条件は任意の一般の位置にある旗に対しても成り立つことがわかる。実際の証明において

$$F^k = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle, \quad E^{n-k} = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

なる基底の存在が本質的である。

交叉条件は視覚的には、 $\mu$  を  $180^\circ$  回転させて  $d \times (n - d)$  長方形の右下隅に置いたとき、 $\lambda$  と重なることがないということと同値である。それがちょうど  $\lambda^\vee$  になるときが双対定理の主張である。

### 3.3.3 Schubert 計算

いくつかの代数幾何学的事実を認めて、Schubert 多様体の交点を計算する Schubert 計算について説明する。

**事実 3.3.3.1** (Kleiman の横断性定理 [2],[16]).  $X \subset \mathcal{G}(d, n)$  を部分多様体,  $F^\bullet$  を標準旗とする。このとき  $|\lambda| = k$  なる Young 図形  $\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)$  に対して  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  の稠密<sup>\*6</sup>な開集合  $U$  が存在して、 $X \cap \Omega_{\lambda^\vee}(gF^\bullet)$  は空であるか、横断的に交わる<sup>\*7</sup>。とくに  $\mathrm{codim} X = k$  であるなら  $|X \cap \Omega_{\lambda^\vee}(gF^\bullet)|$  は 0 であるか  $g$  によらない一定の値である。

文字の集合  $\{\sigma_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{Y}_d(n), |\lambda|=k}$  で生成される自由  $\mathbb{Z}$  加群を  $A^k(\mathcal{G}(d, n))$  とする。 $X \subset \mathcal{G}(d, n)$  を余次元が  $k$  の部分多様体とすると、事実 3.3.3.1 の値が定まるような十分一般の旗  $F^\bullet$  に対して

$$[X] = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_d(n), |\lambda|=k} |X \cap \Omega_{\lambda^\vee}(F^\bullet)| \sigma_\lambda$$

とする。これを  $X$  のシンボルという。 $\Omega_{\lambda^\vee}(F^\bullet)$  の次元は  $|\lambda| = k$  であるから、 $|X \cap \Omega_{\lambda^\vee}(F^\bullet)|$  は 0 次元、すなわち有限集合となるので係数は自然数として定まる。

**例 3.3.3.2.**  $\Omega_\lambda(F^\bullet)$  は余次元が  $|\lambda|$  であるから、双対定理より

$$[\Omega_\lambda(F^\bullet)] = \sigma_\lambda$$

これを Schubert 類という。

<sup>\*6</sup> 位相空間  $X$  の部分集合  $D$  が  $X$  で稠密であるとは、 $D$  の閉包  $\overline{D}$  について  $\overline{D} = X$  になりたつことをいう。

<sup>\*7</sup> 多様体  $X$  の部分多様体  $Y, Z$  が点  $p \in Y \cap Z$  で横断的に交わるとは、 $T_p Y + T_p Z = T_p X$  が成り立つことをいう。例えば、平面内の直線  $x = 0$  と  $y = 0$  は  $(x, y) = (0, 0)$  で横断的に交わるが、放物線  $y = x^2$  と  $y = 0$  は  $(x, y) = (0, 0)$  で横断的に交わらない。

**事実 3.3.3.3** ([2]).  $F^\bullet, E^\bullet$  を一般の位置にある旗とする。  $\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(E^\bullet)$  は余次元が  $|\lambda| + |\mu|$  の既約部分多様体になる。

そこで、  $A^*(\mathcal{G}(d, n)) = \bigoplus_{k=0}^{d(n-d)} A^k(\mathcal{G}(d, n))$  とし、  $\sigma_\lambda \in A^k(\mathcal{G}(d, n)), \sigma_\mu \in A^l(\mathcal{G}(d, n))$  に対して、事実 3.3.3.1 の値が定まるような十分一般の  $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  に対して

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = [\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet)] = \sum_{\nu \in \mathcal{Y}_d(n), |\nu|=k+l} |\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet) \cap \Omega_{\nu^\vee}(gF^\bullet)| \sigma_\nu$$

と定め、  $A^*(\mathcal{G}(d, n))$  に積を定義する。これによって  $A^*(\mathcal{G}(d, n))$  は次数付き可換環の構造をもつ ([16])。  $A^*(\mathcal{G}(d, n))$  を Chow 環という。係数  $|\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet) \cap \Omega_{\nu^\vee}(gF^\bullet)|$  を  $\eta_{\lambda\mu}^\nu$  と置く。

次の事実が重要である。

**事実 3.3.3.4** ([16]).  $X, Y \subset \mathcal{G}(d, n)$  を一般の点で横断的に交わる部分多様体とする。このとき

$$[X][Y] = [X \cap Y]$$

が成り立つ。

交叉をとるという幾何学的な操作がそのシンボルの積という代数的な操作に置き換わっているのである。

**例 3.3.3.5.** 第 3 章冒頭で述べた 4 直線問題について考えよう。例 3.2.2.14 を再掲すると

$$\begin{aligned} \Omega_\emptyset &= \mathcal{G}(2, 4) \\ \Omega_\square &= \{ V \in \mathcal{G}(2, 4) \mid \dim(V \cap F^2) \geq 1 \} \approx \{ l \subset \mathbb{P}^3 : \text{直線} \mid l \cap l_0 \neq \emptyset \} \\ \Omega_{\square\square} &= \{ V \in \mathcal{G}(2, 4) \mid \dim(V \cap F^3) \geq 1 \} \approx \{ l \subset \mathbb{P}^3 : \text{直線} \mid l \ni p_0 \} \\ \Omega_{\square\square} &= \{ V \in \mathcal{G}(2, 4) \mid \dim(V \cap F^2) \geq 1, \dim(V \cap F^1) \geq 2 \} \approx \{ l \subset \mathbb{P}^3 : \text{直線} \mid l \subset e_0 \} \\ \Omega_{\square\square} &= \{ V \in \mathcal{G}(2, 4) \mid \dim(V \cap F^3) \geq 1, \dim(V \cap F^1) \geq 2 \} \approx \{ l \subset \mathbb{P}^3 : \text{直線} \mid p_0 \in l \subset e_0 \} \\ \Omega_{\square\square} &\approx \{ l = l_0 \} \end{aligned}$$

である。

$$|\Omega_\square(F_1^\bullet) \cap \Omega_\square(F_2^\bullet) \cap \Omega_\square(F_3^\bullet) \cap \Omega_\square(F_4^\bullet)|$$

を計算したい。ここで  $F_1^\bullet, F_2^\bullet, F_3^\bullet, F_4^\bullet$  は十分一般にとった旗である。

この値を計算するには、事実 3.3.3.4 より

$$|\Omega_\square(F_1^\bullet) \cap \Omega_\square(F_2^\bullet) \cap \Omega_\square(F_3^\bullet) \cap \Omega_\square(F_4^\bullet)| \sigma_{\square\square} = \sigma_{\square\square}^4$$

となるから、  $\sigma_{\square\square}^4$  を計算すればよい。

$\sigma_{\square\square}^2$  を計算する。大きさ 2 の Young 図形は  $\square\square$  と  $\square\square$  の 2 つで、どちらも自己双対的であるから、

$$\sigma_{\square\square}^2 = \alpha \sigma_{\square\square} + \beta \sigma_{\square\square}$$

である。ここで

$$\alpha = |\Omega_\square(F^\bullet) \cap \Omega_\square(F_{op}^\bullet) \cap \Omega_{\square\square}(gF^\bullet)|, \quad \beta = |\Omega_\square(F^\bullet) \cap \Omega_\square(F_{op}^\bullet) \cap \Omega_{\square\square}(gF^\bullet)|$$

である。



$\alpha$  を求める。 $\Omega_{\square}(F^{\bullet}) \cap \Omega_{\square}(F_{op}^{\bullet}) \cap \Omega_{\square\square}(gF^{\bullet})$  は「2つの直線  $l_0, l_1$  と交わり、1点  $p_0$  を通る直線」の全体である。 $p$  を通り  $l_0$  と交わる直線全体の軌跡を考えると、これは1つの平面となる。この平面ともう1本の直線  $l_1$  は必ず1点で交わる (射影空間で考えている!) から、 $\alpha = 1$  である。

次に  $\beta$  を求める。 $\Omega_{\square}(F^{\bullet}) \cap \Omega_{\square}(F_{op}^{\bullet}) \cap \Omega_{\square\square}(gF^{\bullet})$  は「2つの直線  $l_0, l_1$  と交わり、1つの平面  $e_0$  に含まれる直線」の全体である。 $e_0$  と  $l_0$  は1点  $p_0$  で交わり、 $e_0$  と  $l_1$  も1点  $p_1$  で交わる。よって  $l \cap l_0 \neq \emptyset, l \cap l_1 \neq \emptyset$   $l \subset e_0$  ならば  $p_0, p_1 \in l$  である。2点を結ぶ直線は一般にただ1つであるから  $\beta = 1$  である。

よって  $\sigma_{\square\square}^2 = \sigma_{\square\square} + \sigma_{\square\square}$  である。同様の考察を行うと、

$$\sigma_{\square\square}\sigma_{\square\square} = \sigma_{\square\square}\sigma_{\square\square} = \sigma_{\square\square}$$

がわかる。したがって、

$$\sigma_{\square\square}^4 = 2\sigma_{\square\square}$$

であるから、一般の位置にある4本の直線と交わる直線の数はいくつである。

### 3.3.4 Schur 多項式との関係

前小節で4直線問題の解を与えたが、Schubert 類の積を計算するために、易しい問題に帰着されたとはいえ幾何学的な考察が必要であった。しかし、実は Grassmann 多様体の Chow 環は対称多項式環の剰余環として表されることが、さらには Schubert 類は Schur 多項式に対応することが示され、これによって Schubert 計算は Schur 多項式の展開に帰着される。

**定理 3.3.4.1** (Pieri の規則).  $\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)$  とする。

$$\sigma_{(k)}\sigma_{\lambda} = \sum_{\substack{|\nu| = |\lambda| + k \\ \nu/\lambda \text{ は水平帯}, \nu \in \mathcal{Y}_d(n)}} \sigma_{\nu}$$

が成り立つ。

証明のためにいくつか補題を示そう。まず、一般の旗  $F^{\bullet}, F_{op}^{\bullet}, E^{\bullet}$  に対して、

$$\Omega_{(k)}(E^{\bullet}) \cap \Omega_{\lambda}(F^{\bullet}) \cap \Omega_{\nu^{\vee}}(F_{op}^{\bullet})$$

を考える。双対定理の証明と同様、

$$A_i = F^{\lambda_i + d - i}, \quad B_i = F_{op}^{\mu_{i^*} + d - i^*}$$

とおく。ここで  $i^* = d + 1 - i$  である。 $a(i) = \lambda_i + d - i + 1, b(i) = n - \mu_{i^*} - d + i^*$  とおけば、

$$A_i = \langle e_{a(i)}, \dots, e_n \rangle, \quad B_i = \langle e_1, \dots, e_{b(i)} \rangle$$

である。

さらに

$$W_i = A_i \cap B_i = \langle e_{a(i)}, \dots, e_{b(i)} \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, d$$

とおいて、 $W = \sum_{i=1}^d W_i$  とする。

この状況において、 $\lambda, \mu$  が交叉条件をみたすならば、 $a(i) \leq b(i)$  である。すなわち  $W_i \neq 0$  が成り立つ。また、 $\nu/\lambda$  が水平帯であるならば、 $\lambda, \mu$  は交叉条件をみたす。

実際、 $\lambda, \mu$  が交叉条件をみたすならば、系 3.3.2.5 より  $\lambda_i + \mu_{i^*} \leq n - d$  である。このとき、

$$\begin{aligned} a(i) - b(i) &= (\lambda_i + d - i + 1) - (n - \mu_{i^*} - d + i^*) \\ &= \lambda_i + \mu_{i^*} + (d - i + 1) - (n - i + 1) \\ &= \lambda_i + \mu_{i^*} + d - n \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

よって  $a(i) \leq b(i)$  である。

また、 $\nu/\lambda$  が水平帯であるならば、系 1.2.2.9 より  $\mu_{i^*} = \nu_{i^*}^\vee = n - d - \nu_i$  だから、

$$\lambda_i + \mu_{i^*} = \lambda_i - \nu_i + n - d \leq n - d$$

である。よって、 $\nu/\lambda$  が水平帯であるならば  $\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet)$  は空でなく、 $W \neq 0$  である。

以下、 $\nu/\lambda$  は水平帯であるとする。

**補題 3.3.4.2.**  $A_0 = 0, B_{d+1} = 0$  とする。

$$W = \bigcap_{i=0}^d (A_i + B_{i+1}) = \bigcap_{i=0}^d \langle e_1, \dots, e_{b(i+1)}, e_{a(i)}, \dots, e_n \rangle$$

が成り立つ。

*Proof.*  $e_j \in W_i$  とする。定義より  $a(i) \leq j \leq b(i)$  であるが、任意の  $l = 0, 1, \dots, d$  に対して、 $l \geq i$  であるならば、 $a(l) \leq a(i)$  であるから、 $e_j \in A_l \subset A_l + B_{l+1}$ 、一方  $l+1 \leq i$  であるならば、 $b(l+1) \geq b(i)$  であるから、 $e_j \in B_{l+1} \subset A_l + B_{l+1}$  である。

次に  $e_j \in \bigcap_{i=0}^d (A_i + B_{i+1})$  とする。 $i = 0$  として  $1 \leq j \leq b(1)$  が成り立つ。ここで、もし  $a(1) \leq j$  がなりたつなら  $e_j \in A_1 \cap B_1$  となるから  $a(1) > j$  としよう。すると  $i = 1$  として  $1 \leq j \leq b(2)$  が成り立つ。 $a(2) \leq j$  ならば  $e_j \in A_2 \cap B_2$  となるから  $a(2) > j$  としよう。すると  $i = 2$  として  $1 \leq j \leq b(3)$  が成り立つ。この議論を繰り返して行って、最後には  $a(d) \leq j \leq n$  かつ  $1 \leq j \leq b(d)$  となるが、これは  $e_j \in A_d \cap B_d$  を意味する。□

**補題 3.3.4.3.**  $V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet)$  ならば  $V \subset W$  である。

*Proof.* 補題 3.3.4.2 より、すべての  $i$  に対して  $V \subset A_i + B_{i+1}$  が成り立つことを示せばよい。 $b(i+1) \geq a(i)$  ならば、 $A_i + B_{i+1} = \mathbb{C}^n$  だから  $b(i+1) < a(i)$  としてよい。 $V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet)$  より

$$\dim V \cap A_i \geq i, \quad \dim V \cap B_{i+1} \leq i + 1^* = d - i$$

が成り立つ。また  $A_i \cap B_{i+1} = 0$  である。これより

$$\begin{aligned} d &\leq \dim V \cap A_i + \dim V \cap B_{i+1} \\ &= \dim(V \cap A_i + V \cap B_{i+1}) + \dim(V \cap A_i \cap B_{i+1}) \\ &\leq \dim V \cap (A_i + B_{i+1}) \end{aligned}$$

となる。 $\dim V = d$  であるのでこれは  $V \subset A_i + B_{i+1}$  を意味する。□

**補題 3.3.4.4.**  $W = \bigoplus_{i=1}^d W_i$  が成り立つ。

*Proof.* まず、 $\nu/\lambda$  が水平帯であることから

$$\lambda_i + \mu_{(i+1)^*} = \lambda_i + n - d - \nu_{i+1} \geq n - d$$

が成り立つ。これより

$$\begin{aligned} a(i) - b(i+1) &= (\lambda_i + d - i + 1) - (n - \mu_{(i+1)^*} - d + (i+1)^*) \\ &= \lambda_i + \mu_{(i+1)^*} + (d - i - 1) - (n - i) \\ &= \lambda_i + \mu_{(i+1)^*} d - n + 1 \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

すなわち  $a(i) \geq b(i+1)$  となるから  $A_i \cap B_{i+1} = 0$  である。したがって、

$$W_i \cap W_{i+1} = (A_i \cap B_i) \cap (A_{i+1} \cap B_{i+1}) = 0$$

これより

$$W = \bigoplus_{i=1}^d W_i$$

となる。 □

**補題 3.3.4.5.** 一般の旗  $E^\bullet$  に対して  $L = E^{k+d-1}$  とおくと  $\dim W \cap L = 1$  である。

*Proof.* 補題 3.3.4.4 より

$$\dim W = \sum_{i=1}^d \dim A_i \cap B_i = \sum_{i=1}^d (b(i) - a(i) + 1) = k + d$$

である。一方、

$$\dim L = n + 1 - (k + d)$$

である。よって  $\dim W \cap L = (k + d) + (n + 1 - k - d) - \dim(W + L) \geq 1$  となるが、一般の  $L$  に対しては  $\dim W \cap L = 1$  である\*<sup>8</sup>。 □

**補題 3.3.4.6.**  $V = \bigoplus_{i=1}^d V \cap W_i$  が成り立つ。

*Proof.*  $\dim V \cap A_i \geq i$ ,  $\dim V \cap B_i \geq d + 1 - i$  より

$$\begin{aligned} \dim V \cap W_i &= \dim V \cap A_i \cap B_{i+1} \\ &= \dim V \cap A_i + \dim V \cap B_{i+1} - \dim(V \cap A_i + V \cap B_{i+1}) \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

となる。補題 3.3.4.4 より

$$d \geq \dim \sum_{i=1}^d V \cap W_i = \sum_{i=1}^d \dim V \cap W_i \geq d$$

---

\*<sup>8</sup> 一般に部分空間  $V, W \subset \mathbb{C}^n$  が、線形写像  $f, g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  に対して  $V = \ker f$ ,  $W = \ker g$  で与えられているとする。このとき  $V \cap W = \ker(f \diamond g : \mathbb{C}^n \ni x \mapsto (f(x), g(x)) \in \mathbb{C}^{2n})$  である。よって  $\dim V \cap W = 2n - \text{rank}(f \diamond g)$  となるから、 $\dim V \cap W = 1$  となる条件は  $f \diamond g$  を行列表示したときの成分の多項式で与えられる。

ゆえに

$$V = \bigoplus_{i=1}^d V \cap W_i$$

□

以上の準備をもとに定理 3.3.4.1 を証明しよう。示した補題をもう一度述べると

$$V \subset W, \quad \text{補題 3.3.4.3}$$

$$W = \bigoplus_{i=1}^d W_i, \quad \text{補題 3.3.4.4}$$

$$\dim W \cap L = 1, \quad \text{補題 3.3.4.5}$$

$$V = \bigoplus_{i=1}^d V \cap W_i, \quad \text{補題 3.3.4.6}$$

である。

*Proof.*  $V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet) \cap \Omega_{(k)}(E^\bullet)$  とする。補題 3.3.4.5 より  $W \cap L = \langle w \rangle$  となる  $w$  をとる。  
 $V \in \Omega_{(k)}(E^\bullet)$  より  $\dim V \cap L \geq 1$  であるから、補題 3.3.4.3 より

$$0 \neq V \cap L \subset W \cap L = \langle w \rangle$$

ゆえに  $w \in V$  である。補題 3.3.4.6 より、

$$w = w_1 + \cdots + w_d, \quad w_i \in V \cap W_i$$

と分解する。ここで、必要なら  $L$  を少し動かして  $w_i \neq 0$  としてよい<sup>\*9</sup>。すると、補題 3.3.4.4 より  $w_1, \dots, w_d$  は一次独立であるので、 $V = \langle w_1, \dots, w_d \rangle$  である。これで、 $\nu/\lambda$  が水平帯であるならば、

$$\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet) \cap \Omega_{(k)}(E^\bullet) = \{ \langle w_1, \dots, w_d \rangle \}$$

となることが示せた。

次に  $\nu/\lambda$  が水平帯でないとする。このとき一連の補題のうち補題 3.3.4.4 が成り立たない。したがって  $\dim W < k + d$  となるから、一般の  $L$  (その次元は  $n + 1 - (k + d)$ ) に対して  $L \cap W = 0$  である。  
 $V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet)$  ならば  $V \subset W$  であるから、 $\dim V \cap L \geq 1$  とならない。したがって  $\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F_{op}^\bullet) \cap \Omega_{(k)}(E^\bullet) = \emptyset$  である。 □

**系 3.3.4.7** (Giambelli の公式).  $\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)$  に対して

$$\sigma_\lambda = \det(\sigma_{(\lambda_i - i + j)})_{1 \leq i, j \leq d}$$

が成り立つ。ただし  $\lambda_i + i - j < 0$  または  $\lambda_i + i - j > n - d$  なら  $\sigma_{\lambda_i - i + j} = 0$

*Proof.* Jacobi-Trudi 公式 (定理 1.2.2.14) の証明とまったく同様である。 □

---

<sup>\*9</sup>  $L$  は  $\dim W \cap L = 1$  となる次元の和が  $n + 1$  の部分空間であった。例えば、 $W = \langle e_1, e_2 \rangle \subset \mathbb{C}^3$ ,  $L = \langle e_2, e_3 \rangle$  のとき  $W \cap L = \langle e_2 \rangle$  であるが、 $L$  の基底を動かして  $L' = \langle e_1 + e_2, e_3 \rangle$  などにすれば、 $W \cap L = \langle e_1 + e_2 \rangle$  となる。

加法群の準同型  $\varphi : \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}(n)} \rightarrow A^*(\mathcal{G}(d, n))$  を

$$\varphi(s_\lambda) = \begin{cases} \sigma_\lambda & \text{if } \lambda \in \mathcal{Y}_d(n) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

によって定めると、Jacobi-Trudi 公式および Giambelli の公式から  $\varphi$  は全射環準同型である。また

$$\ker \varphi = \bigoplus_{\lambda \notin \mathcal{Y}_d(n)} s_\lambda$$

である。したがって

$$A^*(\mathcal{G}(d, n)) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)} s_\lambda$$

**系 3.3.4.8** (Littlewood-Richardson 規則).  $\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_d(n)$  に対して、

$$\sigma_\lambda \sigma_\mu = \sum_{\nu \in \mathcal{Y}_d(n)} \eta_{\lambda\mu}^\nu \sigma_\nu$$

が成り立つ。すなわち

$$|\Omega_\lambda(F_1) \cap \Omega_\mu(F_2) \cap \Omega_{\nu^*}(F_3)| = \eta_{\lambda\mu}^\nu$$

ただし  $\eta_{\lambda\mu}^\nu$  は Littlewood-Richardson 数である。

これまでの議論を用いて様々な数え上げ問題を解いてみる。

**例 3.3.4.9.**  $\mathbb{P}^4$  内の 3 つの直線と交わる直線を数える。条件「 $\mathbb{P}^4$  の 1 つの直線と交わる」に対応する  $\mathcal{G}(2, 5)$  の Schubert 多様体は

$$\{ V \in \mathcal{G}(2, 5) \mid \dim V \cap F^3 \geq 1 \} = \Omega_{\square\square}$$

である。よって  $\sigma_{\square\square}^3$  を計算すればよい。 $\mathcal{Y}_2(5)$  は  $2 \times 3$  長方形の部分 Young 図形であることに注意すれば、

$$\begin{aligned} \sigma_{\square\square}^2 &= \sigma_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} + \sigma_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix}} \\ \sigma_{\square\square}^3 &= \sigma_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \end{smallmatrix}} \end{aligned}$$

したがってそのような直線は 1 本である。

**例 3.3.4.10.** 条件「 $\mathbb{P}^n$  の 1 つの直線と交わる」に対応する  $\mathcal{G}(2, n)$  の Schubert 多様体は

$$\{ V \in \mathcal{G}(2, n) \mid \dim V \cap F^{n-2} \geq 1 \} = \Omega_{(n-3)}$$

であるから、 $m$  本の直線と交わる直線の本数が有限の値として定まるためには、 $n-3$  が  $2(n-2) = 2n-4$  を割り切ることが必要十分である。それは  $n = 1, 2, 4, 5$  の場合のみである。

**例 3.3.4.11.**  $\mathbb{P}^4$  内の 6 つの直線と交わる平面を数える。条件「 $\mathbb{P}^4$  の 1 つの直線と交わる」に対応する  $\mathcal{G}(3, 5)$  の Schubert 多様体は

$$\{ V \in \mathcal{G}(3, 5) \mid \dim V \cap F^3 \geq 1 \} = \Omega_{\square}$$

である。よって  $\sigma_{\square}^6$  を計算すればよい。

$$\begin{aligned}\sigma_{\square}^2 &= \sigma_{\square\square} + \sigma_{\square} \\ \sigma_{\square}^3 &= 2\sigma_{\square\square} + \sigma_{\square} \\ \sigma_{\square}^4 &= 2\sigma_{\square\square} + 3\sigma_{\square} \\ \sigma_{\square}^5 &= 5\sigma_{\square} \\ \sigma_{\square}^6 &= 5\sigma_{\square}\end{aligned}$$

よってそのような平面は 5 枚である。

# 謝辞

本稿を執筆するにあたり、熱心なご指導を頂いた金沢篤先生に深い感謝の意を表します。また、金沢研究会のメンバーの方々にはいつも興味深い議論をしていただき、たいへん刺激を受けました。最後になりますが日頃から私の活動や勉強を支えてくださった家族に心から感謝いたします。

## 付録 A

# Robinson-Schensted-Knuth 対応

Robinson-Schensted-Knuth 対応 (以下 RSK 対応と呼ぶ) とは、非負整数行列と、同じ形をもつ半標準タブローの組との間の 1 対 1 対応のことである。この付録では RSK 対応の証明はせず、主張の紹介と第 2 章で用いた Cauchy の等式 (補題 2.3.1.4) の証明を解説する。詳しくは [6],[17] を参照されたい。

**定義 A.0.0.1** (行挿入).  $T$  を形  $\lambda$  の半標準タブローとし、 $k$  を正の整数とする。次の帰納的な操作で得られる半標準タブローを  $T \leftarrow k$  と書く：

- (i)  $T$  の一行目の一番右の数が  $k$  以下なら、右端に  $k$  を追加したものを  $T \leftarrow k$  として操作を終了する。
- (ii)  $T$  の右端が  $k$  より真に大きいならば、 $T$  の一行目において  $k$  より大きいもののうち最も左にある箱を  $k$  で置き換える。また置き換えた箱にもともと入っていた数を  $l$  とおく。
- (iii)  $T$  の二行目以降の部分タブローを  $T'$  とし、 $T' \leftarrow l$  と  $T$  の一行目を結合したものを  $T \leftarrow k$  として操作を終了する。

**定義 A.0.0.2.**  $A$  を非負整数行列とする。 $A = (a_{ij})$  において、次の操作で定まる  $2 \times n$  行列  $W$  を  $A$  の biword という。

- (i) 各成分  $a_{ij}$  に対して、 $a_{ij}$  個の列ベクトル  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$  を並べていった行列を  $W'$  とする
- (ii)  $W' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  において、 $v_1, v_2, \dots, v_n$  の第 1 成分を優先した辞書式順序に関して左から右に昇順に並び変えたものを  $W$  とする。

**例 A.0.0.3.**  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  のとき、

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である。

**定理 A.0.0.4** (RSK 対応). 非負整数行列  $A \in M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  に対して、次の操作で定まるタブローの組  $(P, Q)$  はどちらも半標準であり、 $P$  に書かれた数はたかだか  $n$ 、 $Q$  に書かれた数はたかだか  $m$  である。そしてこの対応は  $M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  から  $\mathcal{T}_n \times \mathcal{T}_m$  への全単射である。ここで  $\mathcal{T}_n$  はすべての Young 図形に対するたかだか  $n$  までの用いた半標準タブロー全体のなす集合である。



- (i)  $A$  の biword を  $W$  とする。  $P, Q = \emptyset$  として初期化する。
- (ii)  $W$  の各列ベクトル  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$  を左から右へ読んでいって、次の処理をする。
- $P$  を  $P \leftarrow j$  で置き換える。
  - $Q$  に対して、  $P \leftarrow j$  の行挿入で新しく追加された箱の場所に  $i$  を追加する。

また  $P, Q$  は同じ Young 図形を形にもつタブローである。

**例 A.0.0.5.** 上記の例において、  $A$  から定まる  $P, Q$  は

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & & & & \\ \hline \end{array}, \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 3 & & & & \\ \hline \end{array}$$

対応からわかるように、  $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$  とし  $P, Q$  のウェイトをそれぞれ  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $q = (q_1, \dots, q_m)$  とおくと

$$p_i = a_{1i} + \dots + a_{mi}, \quad q_j = a_{j1} + \dots + a_{jn} \quad (\text{A.1})$$

である。

**定理 A.0.0.6** (Cauchy の等式).

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) s_{\lambda}(y_1, \dots, y_m)$$

が成り立つ。ただし右辺の和はすべての Young 図形をわたる。

*Proof.*  $\mathcal{T}(\lambda)$  で形  $\lambda$  の半標準タブロー全体のなす集合とすれば、Schur 多項式はタブロー和に等しい (第 1 章 参照) ので右辺の和は

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) s_{\lambda}(y_1, \dots, y_m) = \sum_{\lambda} \sum_{P \in \mathcal{T}_n(\lambda), Q \in \mathcal{T}_m(\lambda)} (x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}) (y_1^{q_1} \dots y_m^{q_m})$$

である。一方、左辺の式は

$$\begin{aligned} \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} &= \prod_{i,j} (1 + x_i y_j + (x_i y_j)^2 + \dots) \\ &= \sum_{A \in M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})} \prod_{i,j} (x_i y_j)^{a_{ji}} \\ &= \sum_{A \in M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})} \prod_i x_i^{a_{1i} + \dots + a_{mi}} \prod_j y_j^{a_{j1} + \dots + a_{jn}} \end{aligned}$$

と書くことができる。RSK 対応によって  $M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  と半標準タブローの組  $(P, Q)$  が 1 対 1 に対応し、このとき (A.1) がなりたつから、

$$\begin{aligned} \sum_{A \in M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})} \prod_i x_i^{a_{1i} + \dots + a_{mi}} \prod_j y_j^{a_{j1} + \dots + a_{jn}} &= \sum_{A \in M_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})} \prod_i x_i^{p_i} \prod_j y_j^{q_j} \\ &= \sum_{\lambda} \sum_{P \in \mathcal{T}_n(\lambda), Q \in \mathcal{T}_m(\lambda)} (x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}) (y_1^{q_1} \dots y_m^{q_m}) \end{aligned}$$

よって示せた。 □

## 付録 B

# Wedderburn の構造定理

Wedderburn の構造定理は、半単純 Artin 環の分類に関する定理である。本節で環は乗法単位元をもつ必ずしも可換とは限らない環を指し、たんに環の上の加群といったら左加群を指しているとする。証明は [4] を参照。

**定義 B.0.0.1.** 環  $A$  が半単純であるとは任意の  $A$  加群  $M$  が半単純である、すなわち任意の  $M$  の部分加群が  $M$  の直和因子であることをいう。

**例 B.0.0.2.** 有限群  $G$  の体  $K$  上の群環  $K[G]$  は  $\text{ch}K$  と  $|G|$  が互いに素であるとき、またその時に限り半単純である (Maschke の定理)。

**定義 B.0.0.3.** 環  $A$  が左 Artin 環であるとは、任意の左イデアルの列

$$I_0 \supset I_1 \supset \cdots$$

に対して、ある番号  $n$  が存在して  $I_n = I_{n+1} = \cdots$  が成り立つことをいう。

**例 B.0.0.4.** 体  $K$  上の有限次元代数  $A$  は Artin 環である。特に有限群  $G$  の群環  $K[G]$  は Artin 環である。

**定理 B.0.0.5** (Wedderburn の構造定理). 次の条件は同値である。

- (i)  $A$  は半単純 Artin 環である
- (ii)  $A$  は左加群として半単純である
- (iii)  $A$  の左 Jacobson 根基が 0 である。
- (iv) 斜体  $D_i$  が存在して、

$$A \simeq \prod_i M_{n_i}(D_i)$$

が成り立つ。ただし  $M_{n_i}(D_i)$  は  $D_i$  を成分にもつ全行列環である。

## 参考文献

- [1] 池田 岳 (2022). テンソル代数と表現論: 線型代数続論 東京大学出版会.
- [2] 池田 岳 (2018). 数え上げ幾何学講義: シューベルト・カルキュラス入門 東京大学出版会.
- [3] 雪江 明彦 (2010). 代数学 2 環と体とガロア理論 (代数学シリーズ).
- [4] 堀田 良之 (2021). 代数入門 (新装版): 群と加群 (数学シリーズ) 裳華房.
- [5] 岩永 恭雄・佐藤 眞久 (2002). 環と加群のホモロジー代数的理論 日本評論社.
- [6] Fulton, W. (1996). *Young tableaux: with applications to representation theory and geometry*. Cambridge University Press. (W. フルトン 池田 岳・井上 玲・岩尾 慎介 (訳) (2019). ヤング・タブロー: 表現論と幾何への応用 丸善出版).
- [7] Serre, J.P. (1977). *Linear representation of finite group*. Springer. (J.P. セール 岩堀 長慶・横沼 健雄 (訳) (2019). 有限群の線形表現 岩波書店).
- [8] Atiyah, M.F., & MacDonald, I.G. (1969). *Introduction to commutative algebra*. Westview Press. (M.F. アティヤ・I.G. マクドナルド 新妻 弘 (訳) (2006). 可換代数入門 共立出版).
- [9] Fulton, W., & Harris, J. (2004). *Representation theory: a first course*. Springer.
- [10] Knapp, A.W. (2007). *Advanced algebra* Birkhauser Boston.
- [11] MacDonald, I.G. (1995). *Symmetric functions and hall polynomials second edition*. Oxford University Press Inc., New York.
- [12] Stanley, R.P. (2010). *Enumerative combinatorics volume 2*. Cambridge University Press
- [13] Hartshorn, R. (1977). *Algebraic geometry*. Springer.
- [14] Fulton, W. (1974). *Algebraic curves*. Addison Wesley Publishing Company.
- [15] Harris, J. (1992). *Algebraic geometry a first course*. Springer
- [16] Eisenbud, D., & Harris, J. (2016). *3264 and All That: A Second Course in Algebraic Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [17] Knuth, D. (1970). Permutations, matrices, and generalized young tableaux. *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 34, No. 3.