0.1 一般線形群の表現と Schur-Weyl 双対性

前節までで対称群の既約表現に関して解説してきたが、次に対称群と表現論的に関係の深い一般線形群の表現について解説する。とくに多項式表現と呼ばれる表現のクラスが、Schur-Weyl 双対性を通して対称群の表現と密接にかかわりあっている。

0.1.1 Double Centralizer Theorem

Schur-Weyl 双対性の証明で用いる定理を一つ解説しておく。

定理 0.1.1.1 (Double Centralizer Theorem)**.** V を有限次元ベクトル空間、A を $\mathrm{End}(V)$ の半単純部分環とし、$B = \mathrm{End}_A(V)$ とする。このとき、

(i) B は半単純環である

(ii) $A = \mathrm{End}_B(V)$ が成り立つ

(iii) $A \otimes_{\mathbb{C}} B$ 加群として分解

$$V \simeq \bigoplus_i U_i \otimes_{\mathbb{C}} W_i$$

が成り立つ。ここで U_i は単純 A 加群で $W_i = \mathrm{Hom}_A(U_i, V)$ は単純 B 加群である。

Proof. (i) から示す。A は有限次元半単純 $\mathbb{C}$ 代数だから、系**??**の証明において、「既約表現」を「単純 A 加群」,「G 線形」を「A 準同型」にそのまま変えて A 加群として

$$V \simeq \bigoplus_i U_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_A(U_i, V)$$

と分解されることがわかる。よって

$$\begin{aligned}
B &= \mathrm{End}_A(V) \\
&= \mathrm{Hom}_A\left(\bigoplus_i U_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_A(U_i, V), A\right) \\
&= \bigoplus_i \mathrm{Hom}_A(U_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_A(U_i, V), V) \\
&= \bigoplus_i \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_A(U_i, V), \mathrm{Hom}_A(U_i, V)), \qquad (\mathrm{Hom} \text{ と } \otimes \text{ の随伴性}) \\
&= \bigoplus_i \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W_i)
\end{aligned}$$

となる。したがって B は有限個の全行列環の直積に同型であるから Wedderburn の構造定理 (付録参照) により B は半単純環である。

次に (iii) を示す。まず W_i が単純 B 加群であることを示そう。そのためには、B が W_i に推移的に作用することを示せばよい。[*1] $f \in W_i = \mathrm{Hom}_A(U_i, V)$, $\phi \in B = \mathrm{End}_A(V)$ に対して ϕ は f に写像の合成

[*1] 一般に A 加群 M が単純であることと任意の 0 でない M の元 x に対して $M = Ax$ が成り立つことは同値である。

として作用する。U_i は単純 A 加群だから、0 でない U_i の元 u を 1 つ固定して $U_i = Au$ である。任意の $f, f' \in \mathrm{Hom}_A(U_i, V)$ に対して

$$v = f(u), \qquad v' = f'(u)$$

とおくと、A は半単純だから

$$V = Av \oplus M$$

をみたす V の部分 A 加群 M が存在する。そこで、$\phi \in B$ を

$$\phi(av) = av', \qquad \phi(w) = 0, \qquad (a \in A, w \in W)$$

によって定めれば、$f' = \phi \circ f$ である。

V は少なくとも A 加群として

$$V \simeq \bigoplus_i U_i \otimes_{\mathbb{C}} W_i$$

と分解されるが、この同型を与える写像

$$U_i \otimes_{\mathbb{C}} W_i \ni x \otimes f \mapsto f(x) \in V$$

を考えると、$\phi \otimes \psi \in A \otimes_{\mathbb{C}} B$ に対して

$$(\phi \otimes \psi)(x \otimes f) = \phi(x) \otimes \psi(f) \mapsto (\psi \circ f)(\phi(x)) = (\phi \circ \psi)(f(x))$$

ゆえにこの写像は $A \otimes_{\mathbb{C}} B$ 加群としての同型を与える。

最後に (ii) を示す。 □

0.1.2 Schur-Weyl 双対性

次のような問題を考えることから始める。V を n 次元ベクトル空間としたとき、テンソル空間 $V^{\otimes k}$ の部分空間として対称テンソル空間 $\mathrm{Sym}^k(V)$, 交代テンソル空間 $\mathrm{Alt}^k(V)$ というものが

$$\mathrm{Sym}^k(V) = \left\{ v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \,\middle|\, v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)} = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k, \quad \text{for all } \sigma \in \mathfrak{S}_k \right\}$$
$$\mathrm{Alt}^k(V) = \left\{ v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \,\middle|\, v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)} = \mathrm{sgn}(\sigma) v_1 \otimes \cdots \otimes v_k, \quad \text{for all } \sigma \in \mathfrak{S}_k \right\}$$

によって定義された。

$$\dim \mathrm{Sym}^k(V) = \binom{n+k-1}{k}, \qquad \dim \mathrm{Alt}^k(V) = \binom{n}{k}$$

より、$k = 2$ の場合

$$\dim \mathrm{Sym}^2(V) + \dim \mathrm{Alt}^2(V) = n^2 = \dim V \otimes V$$

だから、$\mathrm{Sym}^k(V) \cap \mathrm{Alt}^k(V) = 0$ に注意すれば

$$V \otimes V = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Alt}^2(V)$$

が成り立つ。$k > 2$ のときは次元が足りず、対称テンソルと交代テンソル以外の部分がでてくる。その分解を与える規則を考える。特に、表現を含めた分解を考えることが鍵になる。

$\sigma \in \mathfrak{S}_k$ に対して、

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}$$

によって $V^{\otimes k}$ を $\mathfrak{S}_n$ の表現とみなす。さらに、$g \in \mathrm{GL}\,(V)$ に対して

$$g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_k$$

とによって $V^{\otimes k}$ は $\mathrm{GL}\,(V)$ の表現とみなすこともできる。$V^{\otimes k}$ は $\mathfrak{S}_k$, $\mathrm{GL}\,(V)$ 両方の作用を同時に受けている。さらに次が成り立つ。

命題 0.1.2.1. 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, $g \in \mathrm{GL}\,(V)$ に対して、

$$\sigma g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = g\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)$$

である。

Proof. $u_i = gv_i$ とおく。

$$\begin{aligned}
\sigma g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) &= \sigma(gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_k) \\
&= \sigma(u_1 \otimes \cdots \otimes u_k) \\
&= u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma^{-1}(k)} \\
&= gv_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes gv_{\sigma^{-1}(k)} \\
&= g\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)
\end{aligned}$$

□

このとき、$c_{(k)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, $c_{1^k} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ とおくと

$$\mathrm{Sym}^k(V) = c_{(k)}V^{\otimes k}, \qquad \mathrm{Alt}^k(V) = c_{1^k}V^{\otimes k}$$

となることがわかり、命題 0.1.2.1 よりこの 2 つは $\mathrm{GL}\,(V)$ の表現でもある。よって $k > 2$ のときにも、$\lambda \in \mathcal{P}_k$ に対する Young 対称子 c_λ による像

$$W_\lambda = c_\lambda V^{\otimes k}$$

を考察することは自然である。再び 0.1.2.1 より W_λ は $\mathrm{GL}\,(V)$ の部分表現になるが、このとき次が成り立つ

定理 0.1.2.2 (Schur-Weyl 双対性)**.** W_λ は $\mathrm{GL}\,(V)$ の既約表現であり、$\mathfrak{S}_\lambda \times \mathrm{GL}\,(V)$ の表現として

$$V^{\otimes k} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_k} S_\lambda \boxtimes W_\lambda$$

が成り立つ。

定理 0.1.2.2 を示そう。

補題 0.1.2.3. V を n 次元ベクトル空間とする。$\mathrm{Sym}^k(V)$ は $\{v \otimes \cdots \otimes v\}_{v \in V}$ によって生成される

Proof. n 変数 k 次斉次多項式のなすベクトル空間を S とおく。主張は S が 1 次斉次多項式の k 乗で生成されることと同値である。単項式

$$x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, \quad i_1 + \cdots + i_n = k$$

が生成されることを示せば十分である。$f_0(x_1, \cdots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n)^k$ とおく。

$$f_1(x_1, \cdots, x_n) = f_0(2x_1, x_2, \cdots, x_n) - 2^k f_0(x_1, \cdots, x_n)$$

とすれば、f_1 は x_1^k を含む項をもたない。次に

$$f_2(x_1,\cdots,x_n)=f_1(2x_1,x_2,\cdots,x_n)-2^{k-1}f_1(x_1,\cdots,x_n)$$

とすれば f_2 は x_1^k, x_1^{k-1} を含む項をもたない。この操作を i_1 以外に対して行えば、最終的に $x_1^{i_1}$ を含む項以外をもたないような多項式 $g_0(x_1,\cdots,x_n)$ を得る。そして g_0 は作り方から、一次斉次多項式の k 乗の線形結合で表される。同様に

$$g_1(x_1,\cdots,x_n)=g_0(x_1,2x_2,x_3,\cdots,x_n)-2^kg_0(x_1,\cdots,x_n)$$

とすれば g_1 は x_2^k を含む項をもたない。再びこの操作を繰り返して $x_1^{i_1}$, $x_2^{i_2}$ を含む項以外をもたないような多項式を得る。これを繰り返していけば、有限回のうちに $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ を作ることができる。 □

補題 0.1.2.4. A を $\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ における $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$ の像とし、B を $\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ における $\mathbb{C}[\mathrm{GL}\,(V)]$ の像とする。A は半単純環であり、$B=\mathrm{End}_A(V^{\otimes k})$ が成り立つ。

Proof. Maschke の定理 (定理**??**) より $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ は半単純であり、A は $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ の剰余環であるが、半単純環の剰余環はまた半単純であるからよい。

$\mathrm{End}_A(V^{\otimes k})=(\mathrm{End}(V^{\otimes k}))^{\mathfrak{S}_n}=(\mathrm{End}(V)^{\otimes k})^{\mathfrak{S}_n}=\mathrm{Sym}^k(\mathrm{End}(V))$ であるから補題 0.1.2.3 より、$\mathrm{End}_A(V^{\otimes k})$ は $\{X\otimes\cdots\otimes X\}_{X\in\mathrm{End}(V)}$ によって生成される。$\mathrm{GL}(V)\subset\mathrm{End}(V)$ なのだから、$B\subset\mathrm{End}_A(V^{\otimes k})$ は直ちに従う。$g\in\mathrm{GL}\,(V)$ に対して $g\otimes\cdots\otimes g$ が生成する $\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ の部分代数を B' とする。任意の (正則とは限らない)$X\in\mathrm{End}(V)$ に対して $X\otimes\cdots\otimes X$ が B' に含まれることを示せばよい。$X+tE$ は有限個の t を除いて正則である[*2] から、X に収束する $\mathrm{GL}\,(V)$ の点列 $(X+t_iE)$ が存在する[*3]。$\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ は有限次元だから B' は閉部分空間であるので、

$$X^{\otimes k}=\lim_{i\to\infty}(X+t_iE)^{\otimes k}\in B'$$

が成り立つ[*4] □

定理 0.1.2.2 を示そう。

Proof. 補題 0.1.2.4 と定理 0.1.1.1 より $\mathfrak{S}_k\times\mathrm{GL}\,(V)$ の表現 (すなわち $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\mathrm{GL}\,(V)]$ 加群) として

$$V^{\otimes k}=\bigoplus_{\lambda\in\mathcal{P}_k}S_\lambda\boxtimes\mathrm{Hom}_A(S_\lambda,V^{\otimes k})$$

と分解される。

ここで S_λ の指標を χ_λ とすると、S_λ の反傾表現の指標を χ_λ^* とすると、

$$\chi_\lambda^*(g)=\overline{\chi_\lambda(g)}=\chi_\lambda(g^{-1})=\chi_\lambda(g)$$

である。実際 g は置換なので g と g^{-1} は同一の共役類に含まれる。よって表現として $S_\lambda\simeq S_\lambda^*$ が成り立つ。

[*2] 行列式は t の多項式

[*3] すなわち $\mathrm{GL}\,(V)$ は $\mathrm{End}(V)$ の稠密集合

[*4] 表現は連続だからこのような極限操作が可能である。

$S_\lambda = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]c_\lambda$ だから

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(S_\lambda, V^{\otimes k}) &= (S_\lambda)^* \otimes_A V^{\otimes k} \\ &= S_\lambda \otimes_A V^{\otimes k} \\ &= \mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]c_\lambda \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]} V^{\otimes k} \\ &= c_\lambda V^{\otimes k} \\ &= W_\lambda\end{aligned}$$

定理 0.1.1.1 より $\mathrm{Hom}_A(S_\lambda, V^{\otimes k})$ は既約 $\mathrm{GL}\,(V)$ 表現だから W_λ は既約である。 □

W_λ を $\mathrm{GL}\,(V)$ の Weyl 表現という。

例 0.1.2.5. $\dim V = n$ とする。λ が n 行よりも長い Young 図形のとき $W_\lambda = 0$ となる。Λ の共役 Young 図形を $\lambda^* = (\lambda_1^*, \cdots, \lambda_s^*)$, $\lambda_1^* > n$ とおく。このとき、

$$b_\lambda = \left(\sum_{\mathfrak{S}_{\lambda_s^*}} \mathrm{sgn}(\sigma_s)\sigma_s\right) \cdots \left(\sum_{\mathfrak{S}_{\lambda_1^*}} \mathrm{sgn}(\sigma_1)\sigma_1\right)$$

と書くことができる。$\tilde{b}_\lambda = \sum_{\mathfrak{S}_{\lambda_1^*}} \mathrm{sgn}(\sigma_1)\sigma_1$ とする。

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 5 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}, \text{ のとき } b_\lambda = \left(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_2} \mathrm{sgn}(\tau)\tau\right)\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma\right), \ \tilde{b}_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma$$

$V^{\otimes k}$ を λ の各箱に V の元が書かれているものと同一視する。V の基底を $e_1, \cdots, e_n$ とすれば $V^{\otimes k}$ の元は $e_1, \cdots, e_n$ を λ の各箱に配置した元で生成される。

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline \\ \cline{1-1} \\ \cline{1-1}\end{array} \text{ のとき } V^{\otimes k} = \left\langle \begin{array}{|c|c|}\hline e_{i_1} & e_{i_5} \\ \hline e_{i_2} & e_{i_6} \\ \hline e_{i_3} \\ \cline{1-1} e_{i_4} \\ \cline{1-1}\end{array} \right\rangle$$

このとき、$\lambda_1^* > n$ より、$e_{i_1}, \cdots, e_{i_{\lambda_1^*}}$ には必ず重複がある。よって

$$\tilde{b}_\lambda(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\lambda_1^*}}) = 0$$

だから、$b_\lambda V^{\otimes k} = 0$ である。

例 0.1.2.6. $k = 3$, $n > k$ とする。$\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array}$ として

$$V^{\otimes 3} = \mathrm{Sym}^3(V) \oplus (S_\lambda \boxtimes W_\lambda) \oplus \mathrm{Alt}^3(V)$$

であり、$\dim S_\lambda = 2$ であるので

$$\dim W_\lambda = \frac{1}{2}(n^3 - \dim \mathrm{Sym}^3(V) - \dim \mathrm{Alt}^3(V)) = \frac{1}{12}(4n^3 - 3n^2 - 13n - 6)$$