0.1 対称群の表現論

0.1.1 対称群の既約表現

前節までに述べたことは有限群の表現論の一般論であり、具体的な群が与えられたときその表現を求める手法を提供しているわけではない。そこでこの節では対称群を例に取り上げ、既約表現の分類を行う。

$\mathcal{P}_n$ を大きさ n の Young 図形のなす集合とする。既約表現の種類は共役類の数だけあったが、$G = \mathfrak{S}_n$ の共役類は置換の型によって $\mathcal{P}_n$ と 1 対 1 に対応することが知られている。G の既約表現は $\mathcal{P}_n$ から自然に作ることができる。

定義 0.1.1.1. $\lambda \in \mathcal{P}_n$ の各箱に 1 から n の各数字を重複なく書き入れた図を形 λ の標準タブローという。T を標準タブローとし、T の i 行目の箱に書かれている数字の集合を $H_i(T)$, 同様に T の j 列目の箱に書かれている数字の集合を $V_j(T)$ とする。

定義 0.1.1.2. T を形 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_s)$ の標準タブローとする。$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して、σT を各数字を σ によって置換してできる標準タブローとする。

- 各 i に対して $H_i(\sigma T) = H_i(T)$ が成り立つなら σ を T の水平置換という。T の水平置換の全体は G の部分群をなす。これを $\mathcal{H}_T$ と書き、T の水平置換群という。$\mathcal{H}_T = \mathfrak{S}(H_1(T)) \times \cdots \times \mathfrak{S}(H_s(T))$ である。
- 各 j に対して $V_j(\sigma T) = V_j(T)$ が成り立つなら σ を T の垂直置換という。T の垂直置換の全体は G の部分群をなす。これを $\mathcal{V}_T$ と書き、T の垂直置換群という。$\mathcal{V}_T = \mathfrak{S}(V_1(T)) \times \cdots \times \mathfrak{S}(V_{\lambda_1}(T))$ である。

例 0.1.1.3. 形 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \\ \cline{1-2}\end{array}$ の標準タブロー $T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 5 & 1 \\ \hline 3 & 2 \\ \cline{1-2}\end{array}$ に対して、

$$\mathcal{H}_T = \mathfrak{S}(\{1,4,5\}) \times \mathfrak{S}(\{2,3\}), \qquad \mathcal{V}_T = \mathfrak{S}(\{3,4\}) \times \mathfrak{S}(\{2,5\})$$

である。

例 0.1.1.4. Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_s) \in \mathcal{P}_n$ に対して、λ の第 1 行に $1, 2, \cdots, \lambda_1$ を、λ の第 2 行に $\lambda_1 + 1, \lambda_1 + 2, \cdots, \lambda_1 + \lambda_2$ を、と続けてできる標準タブローを λ から定まる自然なタブローという。

例 0.1.1.3 の Young 図形の自然なタブローは $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$

水平置換 σ が垂直置換でもあるならば、σ の引き起こす各 $H_i(T)$ の置換は恒等置換でなければならない。したがって $\sigma = e$ である。よって $\mathcal{H}_T \cap \mathcal{V}_T = \{e\}$ が成り立つ。また $\mathcal{H}_{gT} = g\mathcal{H}_T g^{-1}$, $\mathcal{V}_{gT} = g\mathcal{V}_T g^{-1}$ が成り立つ。実際

$$\begin{aligned} \sigma \in \mathcal{H}_{gT} &\Leftrightarrow \sigma g T = gT \\ &\Leftrightarrow g^{-1}\sigma g T = T \\ &\Leftrightarrow \sigma \in g\mathcal{H}_T g^{-1} \end{aligned}$$

群環 $\mathbb{C}[G]$ の元 a_T, b_T, c_T を

$$a_T = \sum_{\sigma\in\mathcal{H}_T} \sigma, \qquad b_T = \sum_{\tau\in\mathcal{V}_T} \mathrm{sgn}(\tau)\tau, \qquad c_T = a_T b_T = \sum_{\sigma\in\mathcal{H}_T, \tau\in\mathcal{V}_T} \mathrm{sgn}(\tau)\sigma\tau$$

によって定める。c_T を Young 対称子という。ここで c_T は 0 でないことに注意しておく。実際 c_T の和に現れる $\sigma\tau$ はすべて異なる元である。なぜならもし $\sigma\tau = \sigma'\tau'$, ($\sigma, \sigma' \in \mathcal{H}_T$ $\tau, \tau' \in \mathcal{V}_T$) ならば、$\mathcal{H}_T \cap \mathcal{V}_T = e$ より $\sigma = \sigma'$, $\tau = \tau'$ である。

定理 0.1.1.5. $\mathbb{C}[G]$ の左イデアル $\mathbb{C}[G]c_T$ は極小である。

定理 0.1.1.5 を証明しよう。ポイントになるのは次の補題である。

補題 0.1.1.6. $\alpha \in \mathbb{C}[G]$ が

- 任意の $\sigma \in \mathcal{H}_T$ に対して $\sigma\alpha = \alpha$
- 任意の $\tau \in \mathcal{V}_T$ に対して $\alpha\tau = \mathrm{sgn}(\tau)\alpha$

を満たすならば、α は c_T のスカラー倍である。

Proof. $\alpha = \sum_{g\in G} a_g g$ を仮定を満たす元とする。仮定より $\sigma \in \mathcal{H}_T$ に対して

$$\alpha = \sigma^{-1}\alpha = \sum_{g\in G} a_g \sigma^{-1} g = \sum_{g\in G} a_{\sigma g} g$$

よって

$$a_{\sigma g} = a_g \tag{1}$$

が成り立つ。また $\tau \in \mathcal{V}_T$ に対しては

$$\alpha = \mathrm{sgn}(\tau)\alpha\tau^{-1} = \sum_{g\in G} \mathrm{sgn}(\tau) a_g g\tau^{-1} = \sum_{g\in G} \mathrm{sgn}(\tau) a_{g\tau} g$$

より

$$a_{g\tau} = \mathrm{sgn}(\tau) a_g \tag{2}$$

が成り立つ。(1),(2) より $\sigma\tau \in \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T$ に対して

$$a_{\sigma\tau} = \mathrm{sgn}(\tau) a_e$$

であることがわかる。よって

$$g \notin \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T \implies a_g = 0 \tag{3}$$

を示せば $\alpha = a_e c_T$ となって証明が完了する。g に関する条件 $g \notin \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T$ について次の補題を示す。

補題 0.1.1.7. $g \in G$ について、T の同じ行にある任意の数字 i, j(ただし $i \neq j$) が gT では異なる列にあるならば $g \in \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T$ が成り立つ。

Proof. T の Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ の高さ r に関する帰納法で示す。$r = 1$ ならば $\mathcal{H}_T = G$ なので明らか。$r > 1$ とする。T の第 1 行にある数字に注目する。仮定から、これらは gT でそれぞれ異なる列に入っ

ているので、適当に gT に垂直置換 $\nu \in \mathcal{V}_{gT}$ を施すことで νgT においても第 1 行に入っているようにできる。

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 7 & 8 & 2 \\ \hline 3 & 5 & 4 \\ \hline 1 & 6 \\ \cline{1-2} \end{array} \quad \to \quad gT = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 8 \\ \hline 6 & 7 \\ \cline{1-2} \end{array} \quad \to \quad \nu gT = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 7 & 8 \\ \hline 5 & 1 & 4 \\ \hline 6 & 3 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

すなわち

$$H_1(T) = H_1(\nu gT)$$

が成り立つようにできる。このとき νg は T の第 1 行への水平置換 σ_1 と、T の第 2 行以下を取り出したタブロー T' への置換 g' との積

$$\nu g = \sigma_1 g'$$

で表される。g' は T' への置換とみなせば主張の条件をみたすから、帰納法の仮定により

$$g' \in \mathcal{H}_{T'}\mathcal{V}_{T'}$$

である。$\mathcal{H}_{T'} \subset \mathcal{H}_T, \mathcal{V}_{T'} \subset \mathcal{V}_T$ だから

$$g' = \sigma_2\tau_2 \in \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T$$

と書ける。ここで $\nu \in \mathcal{V}_{gT} = g\mathcal{V}_T g^{-1}$ だから

$$\nu = g\tau_3 g^{-1}, \qquad \tau_3 \in \mathcal{V}_T$$

よって

$$g = \sigma_1 g'\tau_3^{-1} = \sigma_1\sigma_2\tau_2\tau_3^{-1}$$

となるので示せた。 □

補題 0.1.1.6 の証明に戻ろう。(3) を示せばよいのであった。$g \notin \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T$ であるのなら、上記の補題から T の同じ行にある異なる数字 i, j であって gT では同じ列にあるものが存在する。よって $\sigma = (i, j)$ とすれば $\sigma \in \mathcal{H}_T \cap \mathcal{V}_{gT}$ である。$\mathcal{V}_{gT} = g\mathcal{V}_T g^{-1}$ より $\sigma = g\tau g^{-1}$ とおけば (1), (2) より

$$a_g = a_{\sigma g} = a_{g\tau} = \mathrm{sgn}(\tau)a_g = -a_g$$

よって $a_g = 0$ □

命題 0.1.1.8.

$$c_T^2 = \frac{n!}{\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[G]c_T)}c_T$$

が成り立つ。

Proof. $\sigma \in \mathcal{H}_T, \tau \in \mathcal{V}_T$ に対して

$$\sigma a_T = \sigma \sum_{g \in \mathcal{H}_T} g = \sum_{g \in \mathcal{H}_T} \sigma g = a_T$$

であり、

$$b_T\tau = \sum_{g \in \mathcal{V}_T} \mathrm{sgn}(g)g\tau = \mathrm{sgn}(\tau)b_T$$

だから、補題 0.1.1.6 よりある $n_T \in \mathbb{C}$ で
$$c_T^2 = n_T c_T$$
となることはわかる。n_T を求めよう。左加群の準同型 $\phi : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ を
$$\phi(\alpha) = \alpha c_T$$
によって定める。任意の $g \in G$ に対して、
$$gc_T = g + \sum_{hk \in \mathcal{H}_T \mathcal{V}_T \setminus \{e\}} \mathrm{sgn}(k) ghk$$
となるから、ϕ の対角成分はすべて 1 である。よって
$$\mathrm{tr}(\phi) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G] = n!$$
である。$\mathbb{C}[G]$ は半単純だから、
$$\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}[G]c_T \oplus W$$
となる左イデアル W をとる。すると
$$\mathbb{C}[G]c_T = \mathbb{C}[G]c_T^2 \oplus Wc_T = \mathbb{C}[G]c_T \oplus Wc_T$$
より $Wc_T = 0$ である。したがって、
$$\phi(\mathbb{C}[G]c_T) \subset \mathbb{C}[G]c_T$$
$$\phi(W) = 0$$
となることがわかる。よって
$$\mathrm{tr}(\phi) = \mathrm{tr}(\phi|_{\mathbb{C}[G]c_T})$$
である。$\alpha \in \mathbb{C}[G]$ に対して
$$\phi(\alpha c_T) = \alpha\phi(c_T) = \alpha\phi(c_T^2) = n_T \alpha c_T$$
だから、$\mathbb{C}[G]c_T$ は ϕ の固有値 n_T の固有空間の部分空間である。
$$\mathrm{tr}(\phi|_{\mathbb{C}[G]c_T}) = n_T \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]c_T$$
$c_T \neq 0$ だから $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]c_T \neq 0$, よって
$$n_T = \frac{n!}{\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]c_T}$$
□

定理 0.1.1.5 の証明を述べる

Proof. 系**??**より
$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(\mathbb{C}[G]c_T, \mathbb{C}[G]c_T) = 1$$
を示せばよい。命題 0.1.1.6 より c_T は適当にスカラー倍してべき等元になる。よって命題**??**より
$$\mathrm{Hom}(\mathbb{C}[G]c_T, \mathbb{C}[G]c_T) = c_T\mathbb{C}[G]c_T$$
である。任意の $c_T\alpha c_T \in c_T\mathbb{C}[G]c_T$ は補題 0.1.1.6 の仮定をみたすので
$$c_T\alpha c_T = \mu c_T, \qquad \mu \in \mathbb{C}$$
と書ける。よって $\dim_{\mathbb{C}} c_T\mathbb{C}[G]c_T = 1$ である。 □

Young 対称子の定義において a_T, b_T の積の順序に本質的な違いはない。

命題 0.1.1.9. $b_Ta_T = \tilde{c_T}$ とおくと、$\mathbb{C}[G]\tilde{c_T} \simeq \mathbb{C}[G]c_T$ が成り立つ。

Proof. $\phi : \mathbb{C}[G]a_Tb_T \to \mathbb{C}[G]b_Ta_T$ を

$$\phi(xa_Tb_T) = xa_Tb_Ta_T$$

$\psi : \mathbb{C}[G]b_Ta_T \to \mathbb{C}[G]a_Tb_T$ を

$$\psi(xb_Ta_T) = xb_Ta_Tb_T$$

とすれば

$$\psi(\phi(xa_Tb_T)) = \psi(xa_Tb_Ta_T) = xa_Tb_Ta_Tb_T = n_Txa_Tb_T$$

よって $\psi \circ \phi$ は 0 でないスカラー倍写像なので ϕ は単射、ψ は全射である。命題 0.1.1.8 とまったく同様に $\tilde{c_T}^2 = \tilde{n_T}\tilde{c_T}$ となる 0 でないスカラー $\tilde{n_T}$ が存在することがわかる。よって $\phi \circ \psi$ もスカラー倍写像になるから、ϕ は同型である。 □

命題 0.1.1.10. $\lambda \in \mathcal{P}_n$ とする。T, U を λ に書かれた標準タブローとすると $\mathbb{C}[G]c_T \simeq \mathbb{C}[G]c_U$ である。

Proof. このときある $g \in G$ が存在して $U = gT$ となるから、

$$\mathcal{H}_U = g\mathcal{H}_Tg^{-1}, \qquad \mathcal{V}_U = g\mathcal{V}_Tg^{-1}$$

よって

$$c_U = a_Ub_U = ga_Tg^{-1}gb_Tg^{-1} = gc_Tg^{-1}$$

である。

$$\mathbb{C}[G]c_U = \mathbb{C}[G]gc_Tg^{-1} = \mathbb{C}[G]c_Tg^{-1}$$

だから、

$$\mathbb{C}[G]c_T \simeq \mathbb{C}[G]c_Tg^{-1}$$

を示せばよい。$\phi : \mathbb{C}[G]c_T \to \mathbb{C}[G]c_Tg^{-1}$ を

$$\phi(\alpha c_T) = \alpha c_Tg^{-1}$$

と置けば ϕ は左 $\mathbb{C}[G]$ 加群の準同型で、g を右から書ける準同型が逆写像を与えるので、同型である。 □

したがって、同じ Young 図形に対しては $\mathbb{C}[G]c_T$ は標準タブロー T の取り方によらず同型である。そこで $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対して、λ の自然なタブロー (例 0.1.1.4) から定まる Young 対称子を c_λ とし、$S_\lambda = \mathbb{C}[G]c_\lambda$ とおく。

次の定理を証明することで、既約表現の分類は完成する。

定理 0.1.1.11. $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$ とする。

$$S_\lambda \simeq S_\mu$$

となるための必要十分条件は $\lambda = \mu$ である

Proof. 十分性は明らか。必要性を示す。$\lambda \neq \mu$ であるとする。S_λ, S_μ は既約表現なので、Schur の補題 (補題 **??**) より、

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(S_\lambda, S_\mu) = 0$$

を証明すればよいが、命題**??**より、

$$\mathrm{Hom}(S_\lambda, S_\mu) = c_\lambda \mathbb{C}[G] c_\mu$$

ゆえに、すべての $g \in G$ に対して

$$c_\lambda g c_\mu = a_\lambda b_\lambda g a_\mu b_\mu = 0$$

が成り立つことを示す。次の補題を示す。

補題 0.1.1.12. $\mathcal{P}_n$ に辞書式順序を入れ、$\lambda < \mu$ であるとする。λ, μ でその自然なタブローを表すものとする。このとき任意の $g \in G$ に対して、μ の同じ行にある数字 i, j であって $g\lambda$ でも同じ列にあるものが存在する。

Proof. $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_s)$, $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_t)$ とおく。t についての帰納法で示す。

$t = 1$ の場合 $\lambda_1 < \mu_1$ となるから、λ の列数は μ_1 より少ない。よって鳩の巣原理を用いれば $1, 2, \cdots, \mu_1$ のうち、$g\lambda$ の同じ列にあるペアが必ず存在することがわかる。

$t > 1$ とする。$\lambda_1 < \mu_1$ である場合はまったく同様に鳩の巣原理から従う。$\lambda_1 = \mu_1$ かつ、$1, 2, \cdots, \mu_1$ が $g\lambda$ ではすべて異なる列に存在するとする。このとき垂直置換 $\tau \in \mathcal{V}_{g\lambda}$ を施して

$$H_1(\mu) = H_1(\tau g\lambda) = \{1, 2, \cdots, \mu_1\}$$

が成り立つようにできる。そこで、μ, $\tau g\lambda$ の 2 行目以降をとりだしたタブロー μ', $(\tau g\lambda)'$ を考える。すると $(\tau g\lambda)' < \mu'$ であるから帰納法の仮定により μ' の同じ行にある数字 i, j であって $(\tau g\lambda)'$ では同じ列にあるものが存在する。i, j が $(\tau g\lambda)'$ の第 m 列にあるとする。τ は垂直置換だから

$$V_m(\tau g\lambda) = V_m(g\lambda)$$

よって i, j は $g\lambda$ の同じ列に存在する。 □

定理 0.1.1.11 の証明に戻る。補題から、$\nu = (i, j)$ であって $\nu \in \mathcal{H}_\mu \cap \mathcal{V}_{g^{-1}\lambda}$ となるものが存在する。よって

$$\nu = g^{-1}\pi g, \qquad \pi \in \mathcal{V}_\lambda$$

とおけば

$$\begin{aligned}
c_\lambda g c_\mu &= a_\lambda b_\lambda g a_\mu b_\mu \\
&= a_\lambda b_\lambda \mathrm{sgn}(\pi) \pi g a_\mu b_\mu \\
&= a_\lambda b_\lambda \mathrm{sgn}(\pi) g \nu a_\mu b_\mu \\
&= \mathrm{sgn}(\pi) a_\lambda b_\lambda g a_\mu b_\mu \\
&= -c_\lambda g c_\mu
\end{aligned}$$

よって

$$c_\lambda g c_\mu = 0$$

□

例 0.1.1.13. $\lambda = (n), \mu = (1, 1, \cdots, 1) \in \mathcal{P}_n$ とする。このとき $\mathcal{H}_\lambda = \mathfrak{S}_n$, $\mathcal{V}_\lambda = e$ だから、

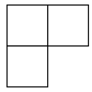
$$c_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma$$

また $\mathcal{H}_\mu = e$, $\mathcal{V}_\mu = \mathfrak{S}_n$ だから、

$$c_\mu = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma$$

したがって λ の定める既約表現は自明な表現 1 であり、μ の定める既約表現は置換の符号 sgn であるとわかる。

例 0.1.1.14. $G = \mathfrak{S}_3$ とする。

$\lambda =$ 

に対応する Young 対称子は

$$c_\lambda = (e + (1,2))(e - (1,3)) = e + (1,2) - (1,3) - (1,3,2)$$

である。c_λ の定める既約表現が、例**??**で求めた既約表現 U と一致することをたしかめる。

$$c_\lambda^2 = 3c_\lambda$$

となるから、命題 0.1.1.8 より

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]c_\lambda = 2$$

である。

$$v = c_\lambda, \qquad u = (1,2,3)c_\lambda = -e + (1,3) - (2,3) + (1,2,3)$$

とすれば、$\mathbb{C}[G]c_\lambda = \mathbb{C}v \oplus \mathbb{C}u$ であり、

$$\begin{aligned} (1,2)v &= v, \qquad (1,2)u = -v - u \\ (1,2,3)v &= u, \qquad (1,2,3)u = -v - u \end{aligned}$$

だから、指標を χ とすると

$$\begin{aligned} \chi(e) &= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]c_\lambda = 2 \\ \chi((1,2)) &= 0 \\ \chi((1,2,3)) &= -1 \end{aligned}$$

となり、指標が一致している。

補題 0.1.1.15. $\phi : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ を

$$\phi(g) = \mathrm{sgn}(g)g$$

を線形に拡張して定める。ϕ は環準同型であり、対合である。$\varepsilon \in \mathbb{C}[G]$ に対して

$$\mathbb{C}[G]\varepsilon \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}} \simeq \mathbb{C}[G]\phi(\varepsilon)$$

が成り立つ。ここで、$\mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}$ は $\mathbb{C}_{\mathrm{sgn}} = \mathbb{C}$ であり、

$$g \cdot \lambda = \mathrm{sgn}(g)\lambda, \qquad g \in G, \lambda \in \mathbb{C}$$

で定まる $\mathbb{C}[G]$ 加群である（すなわち sgn 表現）。

Proof. $f : \mathbb{C}[G]\phi(\varepsilon) \to \mathbb{C}[G]\varepsilon \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}$ を

$$f(x) = \phi(x) \otimes 1$$

で定めれば $g \in G$ として

$$\begin{aligned} gf(x) &= g(\phi(x) \otimes 1) \\ &= g\phi(x) \otimes \mathrm{sgn}(g) \\ &= \mathrm{sgn}(g)g\phi(x) \otimes 1 \\ &= \phi(gx) \otimes 1 \\ &= f(gx) \end{aligned}$$

より $\mathbb{C}[G]$ 加群の準同型である。任意の $y \otimes 1 \in \mathbb{C}[G]\varepsilon \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}$ に対して

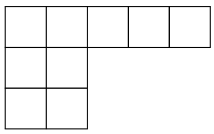
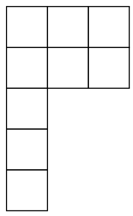
$$f(\phi(y)) = y \otimes 1$$

となり、$\mathbb{C}[G]\varepsilon \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}$ は $y \otimes 1$ の形の元で生成されるから、f は全射である。

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]\varepsilon \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]\varepsilon \cdot \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]\varepsilon$$

より f は同型。 □

例 0.1.1.16. $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対して、λ の行と列を反転させたものを共役 Young 図形といい λ^* と書く。

$\lambda =$  $\to$ $\lambda^* =$ 

このとき

$$\mathbb{C}[G]c_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}} \simeq \mathbb{C}[G]c_{\lambda^*}$$

となることを示す。定義より、

$$\mathcal{H}_{\lambda^*} = \mathcal{V}_\lambda, \qquad \mathcal{V}_{\lambda^*} = \mathcal{H}_\lambda$$

であるから、

$$a_{\lambda^*} = \phi(b_\lambda), \qquad b_{\lambda^*} = \phi(a_\lambda)$$

したがって

$$c_{\lambda^*} = \phi(b_\lambda)\phi(a_\lambda) = \phi(b_\lambda a_\lambda) = \phi(\tilde{c_\lambda})$$

である。命題 0.1.1.9 より、

$$\mathbb{C}[G]c_\lambda \simeq \mathbb{C}[G]\tilde{c_\lambda}$$

であるから、補題 0.1.1.15 より、

$$\mathbb{C}[G]c_{\lambda^*} \simeq \mathbb{C}[G]c_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}$$

例 0.1.1.17. $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対して

$$M_\lambda = \mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_\lambda}^G(\mathbf{1})$$

とする。ここで $\mathbf{1}$ は $\mathcal{H}_\lambda$ の自明な表現である。例**??**より、M_λ は $G/\mathcal{H}_\lambda$ の置換表現に他ならない。$M_\lambda = \mathbb{C}[G]a_\lambda$ となることを示す。$\phi : M_\lambda = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H_\lambda]} \mathbf{1} \to \mathbb{C}[G]a_\lambda$ を

$$\phi(g \otimes c) = cga_\lambda$$

を $\mathbb{C}[\mathcal{H}_\lambda]$ 双線形に拡張して定める。$h \in \mathcal{H}_\lambda$ に対して

$$\phi(gh \otimes c) = cgha_\lambda = cga_\lambda = \phi(g \otimes hc)$$

だから ϕ は well-defined であり $\mathbb{C}[G]$ 準同型である。逆に $\psi : \mathbb{C}[G]a_\lambda \to \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H_\lambda]} \mathbf{1}$ を

$$\psi(x) = \frac{1}{|\mathcal{H}_\lambda|} x \otimes 1$$

によって定めれば ϕ, ψ は互いに逆写像であるから、同型である。

λ が 1 行の Young 図形の場合、$\mathcal{H}_\lambda = G$ であるから、M_λ は自明な表現にほかならない。一方 λ が 1 列の Young 図形の場合は $\mathcal{H}_\lambda = 1$ であるから M_λ は正則表現である。

この表現が後に重要になるので、M_λ に関する性質を一つ示しておく。

定理 0.1.1.18 (Young の規則)**.** $\lambda \in \mathcal{P}_n$ と、辞書式順序で λ より大きい $\mu \in \mathcal{P}_n$ に対して正の整数 $a_{\lambda\mu}$ が存在して

$$M_\lambda = S_\lambda \oplus \left(\bigoplus_{\mu > \lambda} S_\mu^{\oplus a_{\lambda\mu}} \right)$$

Proof. 定理**??**より、

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(M_\lambda, S_\mu) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu = \lambda \\ 0 & \text{if } \mu < \lambda \end{cases}$$

を証明すればよい。例 0.1.1.17 より $M_\lambda = \mathbb{C}[G]a_\lambda$ であるから、**??**より

$$\mathrm{Hom}(M_\lambda, S_\mu) = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}[G]a_\lambda, \mathbb{C}[G]c_\mu) = a_\lambda \mathbb{C}[G]c_\mu$$

である。$\lambda = \mu$ の場合、任意の $\alpha \in \mathbb{C}[G]$ に対して $a_\lambda \alpha c_\lambda$ は補題 0.1.1.6 の条件をみたすから、

$$a_\lambda \mathbb{C}[G]c_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$$

よって

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(M_\lambda, S_\mu) = 1$$

次に $\mu < \lambda$ のとき、補題 0.1.1.12 より、任意の $g \in G$ に対して λ の同じ行にある文字 i, j であって $g\mu$ で同じ列にあるものが存在する。すなわち $\sigma = (i, j)$ とおけば $\sigma \in \mathcal{H}_\lambda$ かつ $\sigma \in \mathcal{V}_{g\mu} = g\mathcal{V}_\mu g^{-1}$ である。そこで $\sigma = g\tau g^{-1}$, $\tau \in \mathcal{V}_\mu$ とおけば、

$$\begin{aligned} a_\lambda g b_\mu &= a_\lambda \sigma g b_\mu \\ &= a_\lambda g \tau b_\mu \\ &= -a_\lambda g b_\mu \end{aligned}$$

ゆえに $a_\lambda \mathbb{C}[G]b_\mu = 0$ であるから、

$$a_\lambda \mathbb{C}[G]c_\lambda \subset a_\lambda \mathbb{C}[G]b_\mu = 0$$

よって示せた。 □

Young の規則は Schur 多項式の線形結合で表すときにも現れた (系??)。実際にこの二つの係数が等しいことは次節に示される。Young の規則から、対称群の既約指標について次がわかる

系 0.1.1.19. S_λ の指標を χ_λ とおく。すべての $g \in G$ に対して $\chi_\lambda(g) \in \mathbb{Z}$ である

Proof. $\lambda \in \mathcal{P}_n$ の辞書式順序に関する数学的帰納法で示す。$\mathcal{P}_n$ の最大元は 1 行 Young 図形 (n) であるが、このとき $S_{(n)}$ は自明な表現なので指標は当然整数値である。ある λ より大きいすべての Young 図形 μ に対して χ_μ が整数値であったとする。定理 0.1.1.18 より

$$\chi_{M_\lambda} = \chi_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} k_{\lambda\mu}\chi_\mu$$

であるが、M_λ は置換表現であるから χ_{M_λ} は整数値である。帰納法の仮定より χ_μ も整数値だから、χ_λ は整数値。 □

既約指標 S_λ の具体的な値は Frobenius の指標公式として知られている。M_λ の指標は比較的簡単に計算できる。

命題 0.1.1.20. $g \in \mathfrak{S}_n$ を巡回置換の積に表したとき、含まれている長さ q の巡回置換の数を m_q とする。このとき、$\chi_{M_\lambda}(g)$ は次の値に等しい

$$\chi_{M_\lambda}(g) = \sum \prod_{q=1}^{n} \frac{m_q!}{c_{1q}! \cdots c_{nq}!}$$

ただし和は

- $c_{p1} + 2c_{p2} + 3c_{p3} + \cdots + nc_{pn} = \lambda_p$, for all $p = 1, \cdots, n$
- $c_{1q} + c_{2q} + c_{3q} + \cdots + c_{nq} = m_q$, for all $q = 1, \cdots, n$

をみたす非負行列 $\{c_{pq}\} \in M_n(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ 全体をわたる。

Proof. M_λ は $G/\mathcal{H}_\lambda$ への置換表現であるから、

$$\chi_{M_\lambda}(g) = \sharp\{\, \sigma\mathcal{H}_\lambda \in G/\mathcal{H}_\lambda \mid g\sigma\mathcal{H}_\lambda = \sigma\mathcal{H}_\lambda \,\} = \frac{1}{|\mathcal{H}_\lambda|}\sharp\{\, \sigma \in G \mid g \in \mathcal{H}_{\sigma\lambda} \,\}$$

と書くことができる。$N = \sharp\{\, \sigma \in G \mid g \in \mathcal{H}_{\sigma\lambda} \,\}$ とおく。N は g を水平置換にもつ形 λ の標準タブローの個数である。

g がある標準タブロー $\sigma\lambda$ の水平置換であるための必要十分条件は、g を巡回置換の積で表したときその各巡回置換 $(i_1, \cdots, i_k)$ について、各文字 $i_1, \cdots, i_k$ が $\sigma\lambda$ の同一行に含まれていることである。よって、逆に g からそのような標準タブローを構成するには、g の長さ q の巡回置換が λ の p 行目に何個含まれているかを指定し、水平置換で動かせばよい。

g の長さ q の巡回置換が λ の p 行目に c_{pq} 個含まれているとする。このとき p 行目に含まれる巡回置換の長さの総和が、λ の p 行目の箱の数に等しくなければならない。また、長さ q の巡回置換は全部で m_q 個あることに注意すると、c_{pq} は

- $c_{p1} + 2c_{p2} + 3c_{p3} + \cdots + nc_{pn} = \lambda_p$, for all $p = 1, \cdots, n$
- $c_{1q} + c_{2q} + c_{3q} + \cdots + c_{nq} = m_q$, for all $q = 1, \cdots, n$

を満たすように動かなければならない。

　長さ q の巡回置換を各 p 行目に c_{pq} 個ずつ置く置き方は

$$\prod_{q=1}^{n} \frac{m_q!}{c_{1q}! \cdots c_{nq}!}$$

通りある。そこから λ の水平置換を作用させて異なる標準タブローが作れるので

$$N = \sum |\mathcal{H}_\lambda| \prod_{q=1}^{n} \frac{m_q!}{c_{1q}! \cdots c_{nq}!}$$

である。これより、

$$\chi_{M_\lambda} = \sum \prod_{q=1}^{n} \frac{m_q!}{c_{1q}! \cdots c_{nq}!}$$

□

例 0.1.1.21. $\lambda = (n)$ とすると $M_\lambda = 1$ であり、$\lambda = (1^n)$ とすると $M_\lambda = \mathbb{C}[G]$ である。