第 1 章

対称群と一般線形群の表現

1.1 有限群の表現論

1.1.1 既約表現と Maschke の定理

定義 1.1.1.1. G を群、V をベクトル空間とする。群準同型 $\rho : G \to \mathrm{GL}(G)$ が与えられたとき、(ρ, V) を G の表現といい V を表現空間という。ρ や V のことを表現ということもある。

以下、本節ではベクトル空間と言ったら複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間を指すものとし、群と言ったら有限群を指すものとする。

例 1.1.1.2. G を群、$V = \mathbb{C}$ とする。すべての $g \in G$ に対して $\rho(g) = \mathrm{id}_V$ とするとこれは表現になる。これを自明な表現という

例 1.1.1.3. $G = \mathfrak{S}_n$, $V = \mathbb{C}^n$ として $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\rho(\sigma)(a_1, \cdots, a_n) = (a_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, a_{\sigma^{-1}(b)})$$

とするとこれは表現になる。

例 1.1.1.4. G を群、V を G の元を基底にもつ自由ベクトル空間とする。$g \in G$ に対して

$$\rho(g) \sum_{x \in G} a_x x = \sum_{x \in G} a_x g x$$

によって定めるとこれは表現になる。これを G の正則表現という

文脈から明らかな場合や特に明示する必要がないとき、$\rho(g)x$ のことをたんに gx と書く。表現論の基本的な問題は、G の考えうるあらゆる作用を分類することである。表現の分類の基準となるのは、次の定義である。

定義 1.1.1.5. (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) を G の表現とする。線形写像 $\varphi : V_1 \to V_2$ が

$$\rho_2(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho_1(g), \quad \text{for all } g \in G$$

をみたすとき、φ を G 線形写像という。G 線形写像の全体を $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ と書く。

定義 1.1.1.6. G の表現 (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) の間に同型な G 線形写像があるとき、(ρ_1, V_1) と (ρ_2, V_2) 同値な表現であるといい、

$$\rho_1 \simeq \rho_2$$

と書く。

表現の同値は同値関係になる。したがって表現の分類はその同値類を求めることと言い換えられる。いきなりすべての表現を考えるのは難しいのでまずは「小さい表現」を考えたい。そのために、与えられた表現よりも小さい表現とは何かを定義する。

定義 1.1.1.7. (ρ, V) を G の表現とする。V の部分空間 W が G 不変であるとは

$$\rho(g)W \subset W, \qquad \text{for all } g \in G$$

が成り立つことをいう。このとき $\rho' : G \to GL(W)$ を

$$\rho'(g) = \rho(g)|_W$$

によって定義することができ、表現になる。(ρ', W) を (ρ, V) の部分表現という。定義より、すべての表現 (ρ, V) は 0 と V を部分表現に持っていることに注意。これらを自明な部分表現という。

定義 1.1.1.8. G の表現 (ρ, V) が既約であるとは、V が非自明な部分表現を持たないことをいう。

例 1.1.1.9. $f : V \to W$ が G 線形写像であるなら $\ker f \subset V$, $\mathrm{Im}\, f \subset W$ はともに G 不変部分空間である。

例 1.1.1.10. すべての 1 次元表現は既約である。実際 1 次元のベクトル空間 V の部分空間は 0 と V のみである。

例 1.1.1.11. 例 1.1.1.3 の表現を考える。

$$W = \{(a_1, \cdots, a_n) \in V \mid a_1 + \cdots + a_n = 0\}$$

とすると、W は G 不変である。

$$v = (1, 1, \cdots, 1) \in V$$

とし $U = \langle\, v \,\rangle$ とおくと

$$\rho(g)v = v$$

だから U も G 不変部分空間で、自明な表現と同値である。例 1.1.1.10 より U は既約である。

与えられた表現から新しい表現を作る方法を導入しておく。

定義 1.1.1.12. (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) を G の表現とする。

- $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to GL(V_1 \oplus V_2)$ を

  $$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(x, y) = (\rho_1(x), \rho_2(y))$$

  で定義する。これを ρ_1 と ρ_2 の直和という。
- $\rho_1 \otimes \rho_2 : G \to GL(V_1 \otimes V_2)$ を

  $$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(x \otimes y) = \rho_1(x) \otimes \rho_2(y)$$

  で定義する。これを ρ_1 と ρ_2 のテンソル積という。

- $\rho_1^* : G \to GL(V^*)$ を
$$\rho_1^*(g)(f) = f \circ (\rho_1(g^{-1}))$$
で定義する。これを ρ_1 の反傾表現という。

これらが実際に表現になっていることは容易にわかる。実は、有限群の複素数体上の有限次元表現は既約表現の直和に同値であることがわかる (系 1.1.1.15)。すなわち、表現の分類を考える上では本質的に最も小さい表現、既約表現のみを考えれば良いことがわかる。

定理 1.1.1.13 (Maschke の定理)**.** V を G の表現とする。任意の V の G 不変部分空間 W に対して、V の G 不変部分空間 U が存在し
$$V = W \oplus U$$
がなりたつ。

Proof. 証明のポイントは W への G 不変な射影を構成することである。$p : V \to W$ を G 不変とは限らない何らかの射影とする。
$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} hp(h^{-1}x)$$
と定めると、f は G 線形な W への射影となる。実際任意の $g \in G$ に対して
$$\begin{aligned} f(gx) &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} hp(h^{-1}gx) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} gkp(k^{-1}x) \qquad \text{where } k = g^{-1}h \\ &= gf(x) \end{aligned}$$
より G 線形性は示された。また
$$\begin{aligned} f^2(x) &= f\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gp(g^{-1}x)\right) \\ &= \frac{1}{|G|^2} \sum_{g,h \in G} ghp(h^{-1}p(g^{-1}x)) \end{aligned}$$
ここで、$p : V \to W$ は射影で W は G 不変だから $p(h^{-1}p(g^{-1}x)) = h^{-1}p(g^{-1}x)$ ゆえに
$$f^2(x) = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g,h \in G} gp(g^{-1}x) = f(x)$$
$f(W) \subset W$ であり、任意の W の元 x に対して
$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gp(g^{-1}x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gg^{-1}x = x$$
だから f は W への射影である。したがって
$$V = \mathrm{Im}\ f \oplus \ker f = W \oplus \ker f$$
が成り立つが、f は G 線形なので $\ker f$ は G 不変部分空間である (例 1.1.1.9)。 □

注意 1.1.1.14. 定理 1.1.1.13 は標数が群の位数と互いに素な任意の体上で成立する。実際証明中で $|G|$ で割るシーンがあるが、それ以外体に依存する議論はしていない。

系 1.1.1.15. V を G の表現とすると、既約表現 $W_1, \cdots, W_r$ が存在して

$$V \simeq W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$$

が表現の同値として成り立つ。このことを G の表現の完全可約性という。

Proof. $\dim_{\mathbb{C}} V$ に関する帰納法で示す。$\dim_{\mathbb{C}} V = 1$ なら V は既約だからよい。$\dim_{\mathbb{C}} V > 1$ で V は可約であるとする。このとき V は非自明な部分表現 V_1 をもつが、定理 1.1.1.13 より部分表現 U_1 で

$$V = V_1 \oplus U_1$$

となるものが存在する。$\dim_{\mathbb{C}} V_1, \dim_{\mathbb{C}} U_1 < \dim_{\mathbb{C}} V$ だから帰納法の仮定により、

$$\begin{aligned} V_1 &= W_1 \oplus \cdots \oplus W_{s_1}, \\ U_1 &= W_{s+1} \oplus \cdots \oplus W_r, \qquad \text{各 } W_i \text{ は既約} \end{aligned}$$

と既約分解できる。したがって V も既約分解される。 □

1.1.2 指標理論

次に既約表現の分類をする上で鍵となる指標の概念を導入する。

定義 1.1.2.1. (ρ, V) を G の表現とする。$\chi_V : G \to \mathbb{C}$ を

$$\chi_V(g) = \operatorname{tr} \rho(g)$$

で定め、これを V の指標という。

本節では指標の直交関係 (定理 1.1.2.12) を示すことが目標である。指標は類関数と呼ばれる群上の関数になっており、類関数のなすベクトル空間に特別な内積を入れるとこの内積に関して指標が正規直交基底をなす、というのが主張である。この系として、

- 既約表現の個数は共役類の個数に等しい
- 既約表現の分類は既約指標の分類に帰着される
- 既約表現の次元に関する公式

といったさまざまな有用な事実が導かれる。

表現の各種の演算と指標との関係を見ておく

命題 1.1.2.2. V_1, V_2 を G の表現、対応する指標を χ_1, χ_2 とする。

1. $\chi_{1\oplus 2} = \chi_1 + \chi_2$
2. $\chi_{1\otimes 2} = \chi_1 \chi_2$
3. $\chi_{1^*} = \overline{\chi_1}$

が成り立つ

Proof. 1. $\mathrm{tr}\,(A \oplus B) = \mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,(B)$ より従う

2. $\mathrm{tr}\,(A \otimes B) = \mathrm{tr}\,(A)\mathrm{tr}\,(B)$ より従う

3. $\mathrm{Hom}(V, V) = V^* \otimes V$ であり[*1] $\mathrm{tr}\ : \mathrm{Hom}(V, V) \to \mathbb{C}$ は $f \otimes v \in V^* \otimes V$ に対して

$$\mathrm{tr}\,(f \otimes v) = f(v)$$

で与えられることに注意する。$e_1, \cdots, e_n$ を V の基底として $e_1^*, \cdots, e_n^*$ をその双対基底とする。このとき $\rho^*(g) \in \mathrm{Hom}(V^*, V^*) = V \otimes V^*$ は

$$\begin{aligned}\rho^*(g) &= e_1 \otimes (\rho^*(g)e_1^*) + \cdots + e_n \otimes (\rho^*(g)e_n^*)\\ &= e_1 \otimes (e_1^* \circ \rho(g^{-1})) + \cdots + e_n \otimes (e_n^* \circ \rho(g^{-1}))\end{aligned}$$

と表されるから

$$\mathrm{tr}\,(\rho^*(g)) = (e_1^* \circ \rho(g^{-1}))(e_1) + \cdots (e_n^* \circ \rho(g^{-1}))(e_n) = \mathrm{tr}\,(\rho(g^{-1})) = \mathrm{tr}\,(\rho(g)^{-1})$$

である。g は有限位数だから $\rho(g)$ はユニタリ行列である。よってその固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ はすべて絶対値が 1 なので

$$\mathrm{tr}\,(\rho(g)^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n} = \overline{\lambda_1} + \cdots + \overline{\lambda_n} = \overline{\mathrm{tr}\,(\rho(g))}$$

これで示せた

□

指標の直交関係を示そう。まず、いくつか必要な補題を示す。

補題 1.1.2.3 (Schur の補題)**.** V, W を G の既約表現とする。このとき

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} 1 & \text{if } V \simeq W \text{ as } G\text{-representation} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。とくに $V = W$ なら $f \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$ はスカラー写像である。

Proof. 先に後半の主張を示す。$f : V \to V$ を G 線形写像とする。f の固有空間を $V(\lambda)$ とすると、$V(\lambda)$ は G 不変である。実際、$x \in V(\lambda)$, $g \in G$ に対して

$$f(gx) = gf(x) = g(\lambda x) = \lambda gx$$

である。V は既約であり $V(\lambda) \neq 0$ なので $V(\lambda) = V$ よって

$$f = \lambda \mathrm{id}_V$$

である。

前半を示そう。$V \simeq W$ とし $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ を G 同型として固定する。任意の $f \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ について、$\varphi^{-1} \circ f$ は $V \to V$ の G 線形写像だから前半の結果より

$$\varphi^{-1} \circ f = \lambda \mathrm{id}_V$$

[*1] $f_1 \otimes v_1 + \cdots + f_n \otimes v_n \in V^* \otimes V$ に対して

$$\phi(x) = f_1(x)v_1 + \cdots + f_n(x)v_n$$

によって $\phi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ を定めればこれが同型を与える。

と表される。すなわち

$$f = \lambda\varphi$$

である。したがって $\mathrm{Hom}_G(V,W) = \langle\, \varphi \,\rangle$ となる。

$V \not\simeq W$ の場合、$f \in \mathrm{Hom}_G(V,W)$ について V, W の既約性から

$$\ker f = 0 \text{または} V, \quad \mathrm{Im}\ f = 0 \text{または} W$$

を得るが、$V \neq W$ より $\ker f = V$, $\mathrm{Im}\ f = 0$ すなわち $f = 0$ である。これで示せた。 □

注意 1.1.2.4. 定理 1.1.2.3 の証明より $f \in \mathrm{Hom}_G(V,W)$ は $V \simeq W$ なら 0 または同型、$V \not\simeq W$ なら $f = 0$ であることがわかる。こちらを Schur の補題と呼ぶ場合もある。

補題 1.1.2.5. $(\rho, V), (\theta, W)$ を G の表現とする。$\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathrm{Hom}(V,W))$ を

$$\rho(g)(f) = \theta(g) \circ f \circ \rho(g^{-1})$$

とするとこれは表現となり、

$$\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)} = \overline{\chi_V}\chi_W$$

が成り立つ

Proof. $\mathrm{Hom}(V,W) = V^* \otimes W$ であることから $\rho^*(g) \otimes \theta(g) = \rho(g)$ が成り立つことを示せばよい。$f = v^* \otimes w \in V^* \otimes W$ に対して、反傾表現およびテンソル表現の定義から

$$g(v^* \otimes w) = [v^* \circ (\rho(g^{-1}))] \otimes [\theta(g)w]$$

となるが、これの定める線形写像は、$x \in V$ として

$$([v^* \circ (\rho(g^{-1}))] \otimes [\theta(g)w])x = [v^* \circ (\rho(g^{-1}))]x \cdot \theta(g)w$$

である。ここで $[v^* \circ (\rho(g^{-1}))]x$ はスカラーなので

$$\begin{aligned}
[v^* \circ (\rho(g^{-1}))]x \cdot \theta(g)w &= \theta(g)(v^* \circ (\rho(g^{-1}))x)w \\
&= \theta(g)(v^* \otimes w(\rho(g^{-1}))) \\
&= (\theta(g) \circ f \circ \rho(g^{-1}))x \\
&= \rho(g)x
\end{aligned}$$

指標の公式は命題 1.1.2.2 より従う □

補題 1.1.2.6. V を G の表現とし、V^G を G の固定点の集合とする。すなわち

$$V^G = \{v \in V \mid \forall g \in G, \quad gv = v\}$$

とする。このとき V^G は V の部分空間であり

$$\dim V^G = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\chi_V(g)$$

が成り立つ。

Proof. $f: V \to V$ を

$$f(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gx$$

で定義すると f は射影になる。実際、$h \in G$ として

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g,h\in G} ghx \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{k\in G} kx \\ &= f(x) \end{aligned}$$

である。また

$$hf(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} hgx = \frac{1}{|G|}\sum_{k\in G} kx = f(x)$$

より $\mathrm{Im}\ f = V^G$ である。射影のトレースは像の次元に等しいので

$$\mathrm{tr}\,(f) = \dim \mathrm{Im}\ f = V^G$$

だが、

$$\mathrm{tr}\,(f) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_V(g)$$

よって示せた。 □

例 1.1.2.7. $\mathrm{Hom}(V,W)^G = \mathrm{Hom}_G(V,W)$ である。実際 $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ の条件について

$$\theta(g)\circ f \circ \rho(g^{-1}) = f \Leftrightarrow f\circ\rho(g) = \theta(g)\circ f$$

である。

定義 1.1.2.8. 関数 $f: G \to \mathbb{C}$ が

$$f(g^{-1}xg) = f(x), \qquad \text{for all } g \in G$$

を満たすとき、f を類関数という。類関数全体を $C(G)$ と置くと $C(G)$ には自然に $\mathbb{C}$ ベクトル空間の構造が入る

例 1.1.2.9. 一般に $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$ が成り立つので、表現の指標は類関数である。

例 1.1.2.10. G の共役類を $C_1, \cdots, C_s$ とし、G 上の関数 ω_i を

$$\omega_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in C_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定めると ω_i は類関数であり $\omega_1, \cdots, \omega_s$ は $C(G)$ の基底である。よって $\dim C(G) = s$ である。

定義 1.1.2.11. $\phi, \psi \in C(G)$ に対して

$$\langle\, \phi, \psi \,\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\phi(g)}\psi(g)$$

によって $\langle\, \cdot, \cdot \,\rangle : C(G) \times C(G) \to \mathbb{C}$ を定めると、これは $C(G)$ 上の Hermite 内積となる。$C(G)$ にはいつもこの内積が入っているものとする。

定理 1.1.2.12 (指標の直交関係)**.** V, W を G の既約表現とする。このとき

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } V \simeq W \text{ as } G\text{-representation} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。

Proof. 補題 1.1.2.5 と補題 1.1.2.6 および補題 1.1.2.3 から

$$\begin{aligned} \langle \chi_v, \chi_W \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) \\ &= \dim \mathrm{Hom}(V, W)^G \\ &= \dim \mathrm{Hom}_G(V, W) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{if } V \simeq W \text{ as } G\text{-representation} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

□

系 1.1.2.13. G の既約指標は有限個である。したがって G の既約表現は同値の違いを除いて有限個である。

Proof. 定理 1.1.2.12 より既約指標の集合は $C(G)$ で一次独立である。$C(G)$ は有限次元だから、既約指標は有限でなければならない □

系 1.1.2.14. G の既約指標 $\chi_1, \cdots, \chi_r$ は $C(G)$ の正規直交基底をなす。したがって r は G の共役類の数に等しい。

Proof. 正規直交であることは定理 1.1.2.12 で示されたので、基底であること、すなわち次を示せばよい：

$f \in C(G)$ が $\langle \chi_i, f \rangle = 0$ を各 $i = 1, \cdots, r$ に対して満たせば $f = 0$ である[*2]

f が仮定をみたす類関数であるとする。各 i について χ_i を指標に持つ既約表現を (ρ_i, V_i) とおく。

$$0 = \langle f, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \mathrm{tr}\,(\rho_i(g))$$

より、写像 $F_i : V_i \to V_i$ を

$$F_i = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \rho_i(g)$$

[*2] 一般に内積空間 V の正規直交系 $v_1, \cdots, v_n$ が、「$w \in V$ が $\langle w, v_i \rangle = 0$ ならば $w = 0$」を満たせば $v_1, \cdots, v_n$ は V の基底になる。実際、任意の $x \in V$ に対して $w = x - (\langle x, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle x, v_n \rangle v_n)$ と置けば $\langle w, v_i \rangle = 0$ をみたすから $w = 0$

とおけば $\mathrm{tr}\,(F_i) = 0$ である。F_i は G 線形写像である。実際 $h \in G, x \in V_i$ として

$$
\begin{aligned}
F_i(\rho_i(h)x) &= \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \rho_i(gh)x \\
&= \sum_{k \in G} \overline{f(kh^{-1})} \rho_i(k)x, \qquad \text{where } k = gh \\
&= \sum_{k \in G} \overline{f(h^{-1}k)} \rho_i(k)x, \qquad f \text{ は類関数} \\
&= \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \rho_i(hg)x, \qquad \text{where } g = h^{-1}k \\
&= \rho_i(h)F(x)
\end{aligned}
$$

よって補題 1.1.2.3 よりある $\lambda \in \mathbb{C}$ で

$$F_i = \lambda \mathrm{id}_V$$

となるが、$\mathrm{tr}\,(F_i) = 0$ だったから $\lambda = 0$ でなければならない。よって $F_i = 0$ であることがわかる。

次に、$\theta : G \to \mathbb{C}[G]$ を G の正則表現とする。ただし $\mathbb{C}[G]$ は G を基底に持つ自由ベクトル空間である。定理 1.1.1.13 より θ はいくつかの既約表現の直和に同値である。よって

$$\theta = \rho_1^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus \rho_r^{\oplus m_2} \tag{1.1}$$

とおく。写像 $F : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ を

$$F = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \theta(g)$$

とすれば (1.1) より

$$F = \left(\sum_{g \in G} \overline{f(g)} \rho_1(g) \right)^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus \left(\sum_{g \in G} \overline{f(g)} \rho_r(g) \right)^{\oplus m_r} = F_1^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus F_r^{\oplus m_r} = 0$$

よって e を G の単位元として

$$0 = Fe = \sum_{g \in G} \overline{f(g)} g$$

G は一次独立だからすべての g について $f(g) = 0$ □

系 1.1.2.15. ρ を G の表現, $\rho_1, \cdots, \rho_r$ を G の既約表現の同値類の完全代表系とし、それぞれの対応する指標を $\chi, \chi_1, \cdots, \chi_r$ とおく。

$$\rho = \rho_1^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus \rho_r^{\oplus m_r}$$

とすると、

$$m_i = \langle\, \chi, \chi_i \,\rangle$$

が成り立つ。m_i を ρ の ρ_i に関する重複度という

系 1.1.2.16. 表現の既約表現への直和分解は、同値の違いを除いて一意的である。

系 1.1.2.17. 指標 χ が既約指標であるための必要十分条件は $\langle\, \chi, \chi \,\rangle = 1$ が成り立つことである

Proof. 必要性は明らか。十分性を示す。$\chi = m_1\chi_1 + \cdots + m_r\chi_r$ とおくと

$$\langle \chi, \chi \rangle = 1$$

であるならば

$$m_1^2 + \cdots + m_r^2 = 1$$

ゆえにある i で $\chi = \chi_i$ である。 □

系 1.1.2.18 (Schur の補題の逆)**.** V を G の表現とする。$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V, V) = 1$ であるならば V は既約表現である。

Proof. χ を V の指標とするとき、補題 1.1.2.5, 補題 1.1.2.6 より条件は

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = 1$$

すなわち $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ に他ならない。 □

系 1.1.2.19. ρ_1, ρ_2 を G の表現、対応する指標を χ_1, χ_2 とする。$\rho_1 \simeq \rho_2$ であるための必要十分条件は $\chi_1 = \chi_2$ が成り立つことである。

Proof. 必要性は明らか。十分性を示す。$\theta_1, \cdots, \theta_r$ を G の既約表現の同値類の完全代表系とし、対応する指標を $\psi_1, \cdots, \psi_r$ とおく。定理 1.1.1.13 より

$$\rho_1 = \theta_1^{\oplus m_1^{(1)}} \oplus \cdots \oplus \theta_r^{\oplus m_r^{(1)}}$$
$$\rho_2 = \theta_1^{\oplus m_1^{(2)}} \oplus \cdots \oplus \theta_r^{\oplus m_r^{(2)}}$$

と分解すれば

$$\chi_1 = m_1^{(1)}\psi_1 + \cdots + m_r^{(1)}\psi_r$$
$$\chi_2 = m_1^{(2)}\psi_1 + \cdots + m_r^{(2)}\psi_r$$

仮定から $\chi_1 = \chi_2$ であり、系 1.1.2.14 より

$$m_1^{(1)} = m_1^{(2)}, \cdots, m_r^{(1)} = m_r^{(2)}$$

である。よって

$$\rho_1 \simeq \rho_2$$

□

命題 1.1.2.20. $W_1, \cdots, W_r$ を G の既約表現の同値類の完全代表系とする。

$$|G| = \dim W_1^2 + \cdots + \dim W_r^2$$

が成り立つ

Proof. θ を G の正則表現とする。θ の指標を R, W_i の指標を χ_i とおく。系 1.1.2.15 より θ の W_i に関する重複度を m_i とおくと

$$m_i = \langle\, R, \chi_i \,\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{R(g)}\chi_i(g)$$

ここで、

$$R(g) = \mathrm{tr}\,(\theta(g)) = \begin{cases} 0 & \text{if } g \neq e \\ |G| & \text{if } g = e \end{cases}$$

だから

$$m_i = \chi_i(e) = \dim W_i$$

よって

$$R = \dim W_1\chi_1 + \cdots + \dim W_r\chi_r$$

だから

$$|G| = R(e) = \dim W_1^2 + \cdots + \dim W_r^2$$

□

例 1.1.2.21. $G = \mathfrak{S}_3$ の既約指標を全て求めよう。G の共役類は

$$e,\ (1,2),\ (1,2,3)$$

で代表される 3 つだから既約表現も 3 つある。またそれぞれの共役類の濃度は順に

$$1, 3, 2$$

である。

1 を自明な表現とし、$\mathrm{sgn} : G \to \mathbb{C}$ を置換の符号とすると、sgn は 1 次元の既約表現である。例 1.1.1.3 の直和因子として現れた表現を考える。すなわち $V = \mathbb{C}^3$ として $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ を自然な置換による作用とする。このとき

$$U = \{(a_1, a_1, a_3) \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$$

が V の不変部分空間となり、

$$\rho \simeq \rho_U \oplus 1$$

となるのであった。ρ_U が既約であることを示そう。ρ_U の指標を χ_U とすると

$$\chi_U(g) = \chi_V(g) - 1 = |\,\{x \in \{1,2,3\} \mid gx = x\}\,| - 1$$

であるから

$$\langle\, \chi_U, \chi_U \,\rangle = \frac{1}{6}(1\cdot 2^2 + 3\cdot 0^2 + 2\cdot(-1)^2) = \frac{6}{6} = 1$$

よって既約である。まとめると G の既約指標は次の 3 つである

	e	$(1,2)$	$(1,2,3)$
1	1	1	1
sgn	1	-1	1
χ_U	2	0	-1

例 1.1.2.22. $G = \mathfrak{S}_4$ の既約指標を全て求めよう。G の共役類は

$$e,\ (1,2),\ (1,2,3),\ (1,2,3,4),\ (1,2)(3,4)$$

で代表される 5 つだから既約指標も 5 つある。またそれぞれの共役類の濃度は順に

$$1, 6, 8, 6, 3$$

である。

$\mathfrak{S}_3$ と同様、1 次元の既約表現として 1 と sgn がある。再び例 1.1.1.3 の直和因子として現れた表現を考える。すなわち

$$U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0\}$$

への置換による作用 ρ_U を考える。ρ_U が既約であることを示そう。ρ_U の指標を χ_U とすると

$$\chi_U(g) = |\ \{x \in \{1,2,3,4\} \mid gx = x\}\ | - 1$$

であるから

$$\langle\ \chi_U, \chi_U\ \rangle = \frac{1}{24}(1 \cdot 3^2 + 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 0^2 + 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2) = \frac{24}{24} = 1$$

よって既約である。さらに $\mathrm{sgn}^2 = 1$ より

$$\langle\ \chi_U \mathrm{sgn}, \chi_U \mathrm{sgn}\ \rangle = 1$$

であることがわかるので $\chi_U \mathrm{sgn}$ も既約指標である。ここまでをまとめると次の表を得る。

	e	$(1,2)$	$(1,2,3)$	$(1,2,3,4)$	$(1,2)(3,4)$
1	1	1	1	1	1
sgn	1	-1	1	-1	1
χ_U	3	1	0	-1	-1
$\chi_U$sgn	3	-1	0	1	-1
ψ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

あと 1 つの指標 ψ は直交関係や次元公式を用いることで具体的な作用の考察なしに求めることができる。次元公式より

$$\psi(e) = 24 - (1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2) = 4$$

ゆえに $\psi(e) = 2$ である。直交関係より

$$\begin{cases} 6x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= -2 \\ -6x_2 + 8x_3 - 6x_4 + 3x_5 &= -2 \\ 6x_2 - 6x_4 - 3x_5 &= -6 \\ 4 + 6x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_4^2 + 3x_5^2 &= 24 \end{cases}$$

これを解くと

	e	$(1,2)$	$(1,2,3)$	$(1,2,3,4)$	$(1,2)(3,4)$
1	1	1	1	1	1
sgn	1	-1	1	-1	1
χ_U	3	1	0	-1	-1
$\chi_U$sgn	3	-1	0	1	-1
ψ	2	0	-1	0	2

1.1.3 群環

本節では群環という代数を導入し、環上の加群論を用いた表現論に関するいくつかの命題を証明する。この節では群は依然有限群のみを考えるが、表現はかならずしも有限次元でないとする。

なおここで環は、乗法単位元をもつ必ずしも可換とは限らない環を指すとする。また加群といったら考えている環上の左加群を指しているとする。

定義 1.1.3.1. G を群, K を体とする。$K[G]$ を G を基底にもつ K 上の自由ベクトル空間とし、G の積から自然に定まる演算で $K[G]$ に積を入れる。すなわち

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) \cdot \left(\sum_{h\in G} b_h h\right) = \sum_{k\in G}\left(\sum_{gh=k} a_g b_h\right) k$$

である。これによって $K[G]$ は K 上の多元環の構造をもつ。これを G の K 上の群環という。

V を G の体 K 上の表現とする。V は自然に $K[G]$ 加群の構造が入り、逆に $K[G]$ 加群は自然に G の表現とみなすことができる。

実際、V を G の表現とするとき、G の作用 gx を線形に拡張することで V は $K[G]$ 加群となる。逆に $K[G]$ 加群 V は V への $K[G]$ の作用から定まる G の作用によって表現となる。

またこのとき、

- 部分表現は部分加群
- 表現の直和は加群の直和
- 既約表現は単純加群
- G 線形写像は加群の準同型
- 表現の同値は加群の同型

にそれぞれ対応することがわかる。ただし表現のテンソル積は $K[G]$ 加群としてのテンソル積ではないことに注意。V, W を $K[G]$ 加群とするとき、V と W の表現のテンソル積は $V \otimes_K W$ に $g(x\otimes y) = gx \otimes gy$ による作用を入れたものである。

ここで、

定義 1.1.3.2. A を環とする。A 加群 M が単純であるとは、M が非自明な部分加群をもたないことをいう。

である。環 A を A 加群とみなしたとき、A の部分加群とは A の左イデアルにほかならず、A に含まれる単純 A 加群は A の極小左イデアルである。単純性に関連して次の定義をする。

定義 1.1.3.3. A 加群 M が半単純であるとは、任意の M の部分加群が M の直和因子であることをいう。また、任意の A 加群が半単純であるとき、A を半単純環という。

定理 1.1.3.4 (Maschke の定理)**.** $K[G]$ が半単純環であるための必要十分条件は、$|G|$ が $p = \mathrm{ch}\, K$ で割り切れないことである。

Proof. 十分性は定理 1.1.1.13 の証明とまったく同様である。必要性を示す。$|G|$ が p がの倍数であるとする。

Wedderburn の構造定理より $K[G]$ の Jacobson 根基が 0 でないことを示せばよい。$K[G]$ の元 m を

$$m = \sum_{g \in G} g$$

とおくと、任意の $x \in K[G]$ に対して $xm = mx$ であり、さらに

$$m^2 = \sum_{g,h \in G} gh = |G|m = 0$$

だから

$$(1 - xm)(1 + xm) = 1 - x^2 m^2 = 1$$

よって $1 - xm$ は単元であるから $m \in \mathrm{Jac}(K[G])$ である。 □

$\mathbb{C}$ の標数は 0 だから定理 1.1.1.13 は定理 1.1.3.4 の特別な場合である。しかし系 1.1.1.15 は一般には成り立たない。考えている表現が有限次元の場合において成り立つことに注意せよ。

以下、$K = \mathbb{C}$ の場合を考える。命題 1.1.2.20 の証明より、G の正則表現は G のすべての有限次元既約表現をその次元の数だけ直和因子にもっている。このことを群環のことばで述べると、$\mathbb{C}[G]$ は $\mathbb{C}[G]$ 加群として極小左イデアルの直和

$$\mathbb{C}[G] = L_1 \oplus \cdots \oplus L_s, \quad s = m_1 + \cdots + m_r$$

に分解でき、適当に $L_1, \cdots, L_s$ を並べ替えて

$$\begin{aligned}
&L_1, \cdots, L_{m_1} \simeq W_1 \\
&L_{m_1+1}, \cdots, L_{m_1+m_2} \simeq W_2 \\
&\qquad \vdots \\
&L_{m_1+\cdots+m_{r-1}+1}, \cdots, L_{m_1+\cdots+m_{r-1}+m_r} \simeq W_r
\end{aligned}$$

とできるということである。ここで $W_1, \cdots, W_r$ は G の既約表現から定まる $\mathbb{C}[G]$ 加群であり、$m_i = \dim_{\mathbb{C}} W_i$ である。したがって、G の有限次元既約表現を求めることは環 $\mathbb{C}[G]$ の極小左イデアルを求めることと同等である。

定義 1.1.3.5. A を環とする。べき等元 $e \in A$ $(e^2 = e)$ が原始的であるとは、

$$e = e_1 + e_2, \quad e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_1 e_2 = 0 \implies e_1 = 0 \text{または} e_2 = 0$$

を満たすことをいう。

命題 1.1.3.6. A を半単純環, $e \in A$ を単元でないとする。Ae が極小左イデアルとなるための必要十分条件は e が原始的べき等元であることである。

Proof. Ae が極小左イデアルとする。

$$e = e_1 + e_2, \quad e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_1 e_2 = 0$$

となる $e_1, e_2 \in A$ が存在したとすると、

$$e_1 = e_1^2 = e_1^2 + e_1 e_2 = e_1 e \in Ae$$

同様に $e_2 \in Ae$ である。よって Ae の極小性から $Ae_1 = Ae$ or 0, $Ae_2 = Ae$ or 0 である。$Ae_1 = Ae$ であったとしよう。このとき

$$e = ce_1, \quad c \in A$$

とおくことができるから

$$e_2 = e - e_1 = (c-1)e_1$$

よって

$$e_2 = e_2^2 = (c-1)e_1e_2 = 0$$

また e はべき等元なので

$$e_1 + e_2 = e = (e_1 + e_2)^2 = e_1 + -e_2e_1 + e_2$$

ゆえに $e_2e_1 = 0$ である。したがって $Ae_2 = Ae$ ならば同様の議論で $e_1 = 0$ となる。

逆に e が原始的べき等元であるとする。$I \subsetneq Ae$ を左イデアルとする。A は半単純だから

$$Ae = I \oplus J$$

となる左イデアル J が存在する。よって

$$e = x + y$$

となる $x \in I, y \in J$ をとることができる。$x \in Ae$ より

$$x = ce, \quad c \in A$$

とおくと $xe = ce^2 = ce = x$。これより、

$$x = xe = x^2 + xy$$

だが、$xy \in J$ かつ $I \cap J = 0$ より $xy = 0$。同様に $yx = 0$ である。したがって $x^2 = x$, $y^2 = y$ も導かれる。e は原始的なので $x = 0$ または $y = 0$ が成り立つが、これより $I = 0$ または $J = 0$ が従う。

実際、$x = 0$ であったとして $m \in I$ を $m = ae$ とおけば

$$m = a(x+y) = ay \in J$$

$I \cap J = 0$ より $m = 0$ □

したがって G の既約表現を求める問題は $\mathbb{C}[G]$ の原始的べき等元を求める問題に帰着された。具体的に原始的べき等元を見つけるのは難しいが、対称群の場合は Young 図形とのきれいな対応により構成することができる。次節にそのことを解説する。

最後にべき等元 e で Ae の形の加群の間の準同型について考察する。

命題 1.1.3.7. A を環とする。$e, f \in A$ をべき等元とするとき、Abel 群の同型として

$$\mathrm{Hom}_A(Ae, Af) \simeq eAf$$

が成り立つ。

Proof. $\phi \in \mathrm{Hom}_A(Ae, Af)$ に対して、

$$\phi(e) = af$$

とおくと、e はべき等元だから

$$\phi(e) = \phi(e^2) = e\phi(e) = eaf$$

よって $\phi \mapsto eaf$ を考えればこれが同型を与える。 □

注意 1.1.3.8. 証明からわかる通り、A が体 K 上の多元環である場合 e はべき等元である必要はなく、スカラー倍のずれが許容される。すなわち

$$e^2 = \lambda e, \qquad \lambda \in K$$

となる e に対しても同様のことが成り立つ。

1.1.4 誘導表現

部分群の表現が与えられたとき、それを元の群に拡張する方法について解説する。

定義 1.1.4.1. G を群、H を G の部分群とする。W を H の表現とするとき、

$$V = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$$

は左 $\mathbb{C}[G]$ 加群の構造をもつ[*3]。V を W が誘導する G の表現といい

$$V = \mathrm{Ind}\,_H^G W$$

と書く。

誘導表現は次の普遍性で特徴づけることができる。

定理 1.1.4.2 (誘導表現の普遍性)**.** H を群 G の部分群、W を H の表現とする。このとき G の表現 V と H 線形写像 $\iota : W \to V$ が一意的に存在して、次の性質をもつ：

> 任意の G の表現 U と H 線形写像 $f : W \to U$ が与えられたとき、G 線形写像 $\overline{f} : V \to U$ が一意的に存在して
>
> $$f = \overline{f} \circ \iota$$
>
> が成り立つ

Proof. 定義 1.1.4.1 の V がこの性質を持つことを示す。$\iota : W \to V$ を

$$\iota(x) = 1 \otimes x$$

で定めれば、($\mathbb{C}[H]$ 上のテンソル積なので)ι は H 線形写像である。$f : W \to U$ を H 線形写像とする。$\overline{f} : V \to U$ を

$$\overline{f}(g \otimes x) = gf(x)$$

*3 ここで $\mathbb{C}[G]$ は右からの積で右 $\mathbb{C}[H]$ 加群とみなしていることに注意。

を双線形に拡張して得られる写像とすれば、より、

$$\overline{f}(g(\alpha\otimes x)) = \overline{f}(g\alpha\otimes x) = g\alpha f(x) = g\overline{f}(\alpha\otimes x)$$

$\overline{f}$ は G 線形写像であり $f = \overline{f}\circ\iota$ を満たす。$\overline{f}$ の一意性を示す。G 線形写像 $f' : W\to U$ も $f = f'\circ\iota$ を満たしたとする。G 線形性から

$$f'(g\otimes x) = gf'(1\otimes x) = gf'(\iota(x)) = gf(x) = \overline{f}(g\otimes x)$$

である。

最後にこの性質をもつ V が一意的であることを示す。G の表現 V' と H 線形写像 $\iota' : W\to V'$ がこの性質を満たしたとする。ι の普遍性を用いれば、$\overline{\iota} : V\to V'$ が存在して $\iota' = \overline{\iota}\circ\iota$ が成り立つ。また、ι' の普遍性を用いれば $\overline{\iota'} : V'\to V$ が存在して $\iota = \overline{\iota'}\circ\iota'$ が成り立つ。

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\iota'"'] & V \arrow[dl, dotted, shift left, "\overline{\iota'}"] \\
V' \arrow[ur, dotted, shift left, "\overline{\iota}"] &
\end{tikzcd}$$

$\overline{\iota}, \overline{\iota'}$ が互いに逆の写像であることを示そう。$\overline{\iota'}\circ\overline{\iota} : V\to V$ は G 線形写像であり、

$$(\overline{\iota'}\circ\overline{\iota})\circ\iota = \overline{\iota'}\circ(\overline{\iota}\circ\iota) = \overline{\iota'}\circ\iota' = \iota$$

を満たす。しかし、$\mathrm{id}_V\circ\iota = \iota$ であるから、ι の普遍性から

$$\overline{\iota'}\circ\overline{\iota} = \mathrm{id}_V$$

でなければならない。同様に $\overline{\iota}\circ\overline{\iota'} = \mathrm{id}_{V'}$ である。 □

定義 1.1.4.1 は加群論的で簡単だが、どのような作用を考えているのかがわかりにくい。そこで線形代数的な誘導表現の定義もみておく。

定義 1.1.4.3. V を G の表現、W を V の部分空間で H の表現であるとする。R を G/H の完全代表系とする。このとき V が W から誘導されているとは

$$V = \bigoplus_{\sigma\in R}\sigma W$$

が成り立つことをいう。

$\sigma^{-1}\tau\in H$ ならば $\sigma W = \tau W$ が成り立つのでこの定義は R の取り方によらない。W の基底を $e_1,\cdots,e_n$ として、$R = \{\sigma_1,\cdots,\sigma_r\}$ とすれば

$$V = \mathbb{C}\sigma_1 e_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}\sigma_1 e_n\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}\sigma_r e_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}\sigma_r e_n$$

G の元 g は G/H に左からの積で置換作用する。すなわち、各 σ_i に対して、

$$g\sigma_i = \sigma_j h$$

となる $\sigma_j\in R$ と $h\in H$ が存在する。よってこのとき、$g\sigma_i W = \sigma_j W$、とくに

$$g\sigma_i e_k = \sigma_j h e_k \quad \in\sigma_j W, \qquad \text{for all } k = 1,\cdots,n \tag{1.2}$$

となる。g の V への作用は G/H への置換作用と H の W への作用を組み合わせたようなものである。また式 (1.2) から次がでる。

命題 1.1.4.4 (誘導表現の指標)**.** V が W から誘導されているとき、

$$\chi_V(g) = \sum_{\sigma_i^{-1} g\sigma_i \in H} \chi_W(\sigma_i^{-1} g\sigma_i) \tag{1.3}$$

が成り立つ。

Proof. 式 (1.2) より、g の作用の対角成分を考えるうえで $\sigma_i = \sigma_j$ すなわち $i = j$ となる部分だけ考えればよいことがわかる。このとき $\sigma_i^{-1} g\sigma_i \in H$ であり、

$$h = \sigma_i^{-1} g\sigma_i$$

であるから、あとは h の W への作用の対角成分の和をとればよいので主張が従う。 □

定義 1.1.4.3 が定義 1.1.4.1 と一致することを確かめておく。定義 1.1.4.3 の V が普遍性 (定理 1.1.4.2) を満たすことを示せば、一意性から従う。

$V = \bigoplus_{\sigma \in R} \sigma W$ において、R として単位元 e を含むものをとり、W を eW と同一視する。この同一視を ι とすれば ι は H 線形写像である。U を任意の G の表現とし、$f : W \to U$ を H 線形写像とする。このとき $\overline{f} : V \to U$ を

$$\overline{f}(\sigma_i x) = \sigma_i f(x)$$

によって定義すると、$\overline{f}$ は G 線形である。実際 $g \in G$ に対して、$g\sigma_i = \tau_j h$ となる $\sigma_j \in R, h \in H$ をとれば

$$\overline{f}(g\sigma_i x) = \overline{f}(\sigma_j hx) = \sigma_j f(hx) = \sigma_j hf(x) = g\sigma_i f(x)$$

また、

$$\overline{f} \circ \iota(x) = \overline{f}(ex) = ef(x) = f(x)$$

例 1.1.4.5. H を G の部分群とする。$X = G/H$ とし、V を X を基底に持つ自由ベクトル空間とする。G は V に置換によって作用する。

$$W = \mathbb{C}H \subset V$$

とすれば W は H の自明な表現であり、

$$V = \bigoplus_{g \in G/H} gW$$

だから $V = \mathrm{Ind}\,_H^G W$ である。すなわち、H の自明な表現から誘導される G の表現は G/H への置換表現である。

1.2 対称群の表現論

1.2.1 対称群の既約表現

前節までに述べたことは有限群の表現論の一般論であり、具体的な群が与えられたときその表現を求める手法を提供しているわけではない。そこでこの節では対称群を例に取り上げ、既約表現の分類を行う。

$\mathcal{P}_n$ を大きさ n の Young 図形のなす集合とする。既約表現の種類は共役類の数だけあったが、$G = \mathfrak{S}_n$ の共役類と $\mathcal{P}_n$ の元は 1 対 1 に対応することが知られている。G の既約表現は $\mathcal{P}_n$ から自然に作ることができる。

定義 1.2.1.1. $\lambda \in \mathcal{P}_n$ の各箱に 1 から n の各数字を重複なく書き入れた図を形 λ のタブローという。T をタブローとし、T の i 行目の箱に書かれている数字の集合を $H_i(T)$, 同様に T の j 列目の箱に書かれている数字の集合を $V_j(T)$ とする。

定義 1.2.1.2. T を形 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_s)$ のタブローとする。$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して、σT を各数字を σ によって置換してできるタブローとする。

- 各 i に対して $H_i(\sigma T) = H_i(T)$ が成り立つなら σ を T の水平置換という。T の水平置換の全体は G の部分群をなす。これを $\mathcal{H}_T$ と書き、T の水平置換群という。$\mathcal{H}_T = \mathfrak{S}(H_1(T)) \times \cdots \times \mathfrak{S}(H_s(T))$ である。
- 各 j に対して $V_j(\sigma T) = V_j(T)$ が成り立つなら σ を T の垂直置換という。T の垂直置換の全体は G の部分群をなす。これを $\mathcal{V}_T$ と書き、T の垂直置換群という。$\mathcal{V}_T = \mathfrak{S}(V_1(T)) \times \cdots \times \mathfrak{S}(V_{\lambda_1}(T))$ である。

例 1.2.1.3. 形 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \\ \cline{1-2}\end{array}$ のタブロー $T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 5 & 1 \\ \hline 3 & 2 \\ \cline{1-2}\end{array}$ に対して、

$$\mathcal{H}_T = \mathfrak{S}(\{1,4,5\}) \times \mathfrak{S}(\{2,3\}), \qquad \mathcal{V}_T = \mathfrak{S}(\{3,4\}) \times \mathfrak{S}(\{2,5\})$$

である。

例 1.2.1.4. Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_s) \in \mathcal{P}_n$ に対して、λ の第 1 行に $1, 2, \cdots, \lambda_1$ を、λ の第 2 行に $\lambda_1 + 1, \lambda_1 + 2, \cdots, \lambda_1 + \lambda_2$ を、と続けてできるタブローを λ から定まる自然なタブローという。

$$\text{例 1.2.1.3 の Young 図形の自然なタブローは } \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

水平置換 σ が垂直置換でもあるならば、σ の引き起こす各 $H_i(T)$ の置換は恒等置換でなければならない。したがって $\sigma = e$ である。よって $\mathcal{H}_T \cap \mathcal{V}_T = \{e\}$ が成り立つ。また $\mathcal{H}_{gT} = g\mathcal{H}_T g^{-1}$, $\mathcal{V}_{gT} = g\mathcal{V}_T g^{-1}$ が成り立つ。実際

$$\begin{aligned} \sigma \in \mathcal{H}_{gT} &\Leftrightarrow \sigma g T = gT \\ &\Leftrightarrow g^{-1}\sigma g T = T \\ &\Leftrightarrow \sigma \in g\mathcal{H}_T g^{-1} \end{aligned}$$

群環 $\mathbb{C}[G]$ の元 a_T, b_T, c_T を

$$a_T = \sum_{\sigma \in \mathcal{H}_T} \sigma, \qquad b_T = \sum_{\tau \in \mathcal{V}_T} \mathrm{sgn}(\tau)\tau, \qquad c_T = a_T b_T = \sum_{\sigma \in \mathcal{H}_T, \tau \in \mathcal{V}_T} \mathrm{sgn}(\tau)\sigma\tau$$

によって定める。c_T を Young 対称子という。ここで c_T は 0 でないことに注意しておく。実際 c_T の和に現れる $\sigma\tau$ はすべて異なる元である。なぜならもし $\sigma\tau = \sigma'\tau'$, $\sigma, \sigma' \in \mathcal{H}_T$, $\tau, \tau' \in \mathcal{V}_T$ ならば、$\mathcal{H}_T \cap \mathcal{V}_T = e$ より $\sigma = \sigma'$, $\tau = \tau'$ である。

定理 1.2.1.5. $\mathbb{C}[G]$ の左イデアル $\mathbb{C}[G]c_T$ は極小である。

定理 1.2.1.5 を証明しよう。ポイントになるのは次の補題である。

補題 1.2.1.6. $\alpha \in \mathbb{C}[G]$ が

- 任意の $\sigma \in \mathcal{H}_T$ に対して $\sigma\alpha = \alpha$
- 任意の $\tau \in \mathcal{V}_T$ に対して $\alpha\tau = \mathrm{sgn}(\tau)\alpha$

を満たすならば、α は c_T のスカラー倍である。

Proof. $\alpha = \sum_{g\in G} a_g g$ を仮定を満たす元とする。仮定より $\sigma \in \mathcal{H}_T$ に対して

$$\alpha = \sigma^{-1}\alpha = \sum_{g\in G} a_g \sigma^{-1} g = \sum_{g\in G} a_{\sigma g} g$$

よって

$$a_{\sigma g} = a_g \tag{1.4}$$

が成り立つ。また $\tau \in \mathcal{V}_T$ に対しては

$$\alpha = \mathrm{sgn}(\tau)\alpha\tau^{-1} = \sum_{g\in G} \mathrm{sgn}(\tau) a_g g\tau^{-1} = \sum_{g\in G} \mathrm{sgn}(\tau) a_{g\tau} g$$

より

$$a_{g\tau} = \mathrm{sgn}(\tau) a_g \tag{1.5}$$

が成り立つ。(1.4),(1.5) より $\sigma\tau \in \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T$ に対して

$$a_{\sigma\tau} = \mathrm{sgn}(\tau) a_e$$

であることがわかる。よって

$$g \notin \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T \implies a_g = 0 \tag{1.6}$$

を示せば $\alpha = a_e c_T$ となって証明が完了する。g に関する条件 $g \notin \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T$ について次の補題を示す。

補題 1.2.1.7. $g \in \mathfrak{S}_n$ について、T の同じ行にある任意の数字 i, j(ただし $i \neq j$) が gT では異なる列にあるならば $g \in \mathcal{H}_T\mathcal{V}_T$ が成り立つ。

Proof. T の Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ の高さ r に関する帰納法で示す。$r = 1$ ならば $\mathcal{H}_T = \mathfrak{S}_n$ なので明らか。$r > 1$ とする。T の第 1 行にある数字に注目する。仮定から、これらは gT でそれぞれ異なる列に入っているので、適当に gT に垂直置換 $\nu \in \mathcal{V}_{gT}$ を施すことで νgT においても第 1 行に入っているようにできる。

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 7 & 8 & 2 \\ \hline 3 & 5 & 4 \\ \hline 1 & 6 & \\ \cline{1-2}\end{array} \quad \to \quad gT = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 8 \\ \hline 6 & 7 & \\ \cline{1-2}\end{array} \quad \to \quad \nu gT = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 7 & 8 \\ \hline 5 & 1 & 4 \\ \hline 6 & 3 & \\ \cline{1-2}\end{array}$$

すなわち

$$H_1(T) = H_1(\nu g T)$$

が成り立つようにできる。このとき νg は T の第 1 行への水平置換 σ_1 と、T の第 2 行以下を取り出したタブロー T' への置換 g' との積

$$\nu g = \sigma_1 g'$$

で表される。g' は T' への置換とみなせば主張の条件をみたすから、帰納法の仮定により

$$g' \in \mathcal{H}_{T'} \mathcal{V}_{T'}$$

である。$\mathcal{H}_{T'} \subset \mathcal{H}_T, \mathcal{V}_{T'} \subset \mathcal{V}_T$ だから

$$g' = \sigma_2 \tau_2 \in \mathcal{H}_T \mathcal{V}_T$$

と書ける。ここで $\nu \in \mathcal{V}_{gT} = g \mathcal{V}_T g^{-1}$ だから

$$\nu = g \tau_3 g^{-1}, \qquad \tau_3 \in \mathcal{V}_T$$

よって

$$g = \sigma_1 g' \tau_3^{-1} = \sigma_1 \sigma_2 \tau_2 \tau_3^{-1}$$

となるので示せた。 □

補題 1.2.1.6 の証明に戻ろう。(1.6) を示せばよいのであった。$g \notin \mathcal{H}_T \mathcal{V}_T$ であるのなら、上記の補題から T の同じ行になる異なる数字 i, j であって gT では同じ列にあるものが存在する。よって $\sigma = (i, j)$ とすれば $\sigma \in \mathcal{H}_T \cap \mathcal{V}_{gT}$ である。$\mathcal{V}_{gT} = g \mathcal{V}_T g^{-1}$ より $\sigma = g \tau g^{-1}$ とおけば (1.4), (1.5) より

$$a_g = a_{\sigma g} = a_{g\tau} = \operatorname{sgn}(\tau) a_g = -a_g$$

よって $a_g = 0$ □

命題 1.2.1.8.

$$c_T^2 = \frac{n!}{\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[G] c_T)} c_T$$

が成り立つ。

Proof. $\sigma \in \mathcal{H}_T, \tau \in \mathcal{V}_T$ に対して

$$\sigma a_T = \sigma \sum_{g \in \mathcal{H}_T} g = \sum_{g \in \mathcal{H}_T} \sigma g = a_T$$

であり、

$$b_T \tau = \sum_{g \in \mathcal{V}_T} \operatorname{sgn}(g) g \tau = \operatorname{sgn} \tau b_T$$

だから、補題 1.2.1.6 よりある $n_T \in \mathbb{C}$ で

$$c_T^2 = n_T c_T$$

となることはわかる。n_T を求めよう。準同型 $\phi : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ を

$$\phi(\alpha) = \alpha c_T$$

によって定める。任意の $g \in G$ に対して、

$$gc_T = g + \sum_{hk \in \mathcal{H}_T \mathcal{V}_T \setminus \{e\}} \mathrm{sgn}(k) ghk$$

となるから、ϕ の対角成分はすべて 1 である。よって

$$\mathrm{tr}\,\phi = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G] = n!$$

である。$\mathbb{C}[G]$ は半単純だから、

$$\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}[G]c_T \oplus W$$

となる左イデアル W をとる。すると

$$\mathbb{C}[G]c_T = \mathbb{C}[G]c_T^2 \oplus Wc_T = \mathbb{C}[G]c_T \oplus Wc_T$$

より $Wc_T = 0$ である。したがって、

$$\begin{aligned} &\phi(\mathbb{C}[G]c_T) \subset \mathbb{C}[G]c_T \\ &\phi(W) = 0 \end{aligned}$$

となることがわかる。よって

$$\mathrm{tr}\,\phi = \mathrm{tr}\,\phi|_{\mathbb{C}[G]c_T}$$

である。$\alpha \in \mathbb{C}[G]$ に対して

$$\phi(\alpha c_T) = \alpha\phi(c_T) = n_T \alpha c_T$$

だから、$\mathbb{C}[G]c_T$ は ϕ の固有値 n_T の固有空間の部分空間である。

$$\mathrm{tr}\,\phi|_{\mathbb{C}[G]c_T} = n_T \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]c_T$$

$c_T \neq 0$ だから $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]c_T \neq 0$, よって

$$n_T = \frac{n!}{\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]c_T}$$

□

定理 1.2.1.5 の証明を述べる

Proof. 定理 1.1.2.18 より

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(\mathbb{C}[G]c_T, \mathbb{C}[G]c_T) = 1$$

を示せばよい。命題 1.2.1.6 より c_T は適当にスカラー倍してべき等元になる。よって命題 1.1.3.7 より

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{C}[G]c_T, \mathbb{C}[G]c_T) = c_T\mathbb{C}[G]c_T$$

である。任意の $c_T\alpha c_T \in c_T\mathbb{C}[G]c_T$ は補題 1.2.1.6 の仮定をみたすので

$$c_T\alpha c_T = \mu c_T, \qquad \mu \in \mathbb{C}$$

と書ける。よって $\dim_{\mathbb{C}} c_T\mathbb{C}[G]c_T = 1$ である。 □

Young 対称子の定義において a_T, b_T の積の順序に本質的な違いはない。

命題 1.2.1.9. $b_T a_T = \tilde{c_T}$ とおくと、$\mathbb{C}[G]\tilde{c_T} \simeq \mathbb{C}[G]c_T$ が成り立つ。

Proof. $\phi : \mathbb{C}[G]a_T b_T \to \mathbb{C}[G]b_T a_T$ を

$$\phi(xa_T b_T) = xa_T b_T a_T$$

$\psi : \mathbb{C}[G]b_T a_T \to \mathbb{C}[G]a_T b_T$ を

$$\psi(xb_T a_T) = xb_T a_T b_T$$

とすれば

$$\psi(\phi(xa_T b_T)) = \psi(xa_T b_T a_T) = xa_T b_T a_T b_T = n_T x a_T b_T$$

よって $\psi \circ \phi$ は 0 でないスカラー倍写像なので ϕ は単射、ψ は全射である。命題 1.2.1.8 とまったく同様に $\tilde{c_T}^2 = \tilde{n_T}\tilde{c_T}$ となる 0 でないスカラー $\tilde{n_T}$ が存在することがわかる。よって ϕ は同型である。 □

命題 1.2.1.10. $\lambda \in \mathcal{P}_n$ とする。T, U を λ に書かれたタブローとすると $\mathbb{C}[G]c_T \simeq \mathbb{C}[G]c_U$ である。

Proof. このときある $g \in G$ が存在して $U = gT$ となるから、

$$\mathcal{H}_U = g\mathcal{H}_T g^{-1}, \qquad \mathcal{V}_U = g\mathcal{V}_T g^{-1}$$

よって

$$c_U = a_U b_U = ga_T g^{-1} g b_T g^{-1} = gc_T g^{-1}$$

である。

$$\mathbb{C}[G]c_U = \mathbb{C}[G]gc_T g^{-1} = \mathbb{C}[G]c_T g^{-1}$$

だから、

$$\mathbb{C}[G]c_T \simeq \mathbb{C}[G]c_T g^{-1}$$

を示せばよい。$\phi : \mathbb{C}[G]c_T \to \mathbb{C}[G]c_T g^{-1}$ を

$$\phi(\alpha c_T) = \alpha c_T g^{-1}$$

と置けば ϕ は左 $\mathbb{C}[G]$ 加群の準同型で、g を右から書ける準同型が逆写像を与えるので、同型である。 □

したがって、同じ Young 図形に対しては $\mathbb{C}[G]c_T$ はタブロー T の取り方によらず同型である。そこで $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対して、λ の自然なタブロー (例 1.2.1.4) から定まる Young 対称子を c_λ とし、$V_\lambda = \mathbb{C}[G]c_\lambda$ とおく。

次の定理を証明することで、既約表現の分類は完成する。

定理 1.2.1.11. $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$ とする。

$$V_\lambda \simeq V_\mu$$

となるための必要十分条件は $\lambda = \mu$ である

Proof. 十分性は明らか。必要性を示す。$\lambda \neq \mu$ であるとする。V_λ, V_μ は既約表現なので、Schur の補題 (補題 1.1.2.3) より、

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(V_\lambda, V_\mu) = 0$$

を証明すればよいが、命題 1.1.3.7 より、

$$\mathrm{Hom}(V_\lambda, V_\mu) = c_\lambda \mathbb{C}[G] c_\mu$$

ゆえに、すべての $g \in G$ に対して

$$c_\lambda g c_\mu = a_\lambda b_\lambda g a_\mu b_\mu = 0$$

が成り立つことを示す。次の補題を示す。

補題 1.2.1.12. $\mathcal{P}_n$ に辞書式順序を入れ、$\lambda < \mu$ であるとする。λ, μ でその自然なタブローを表すものとする。このとき任意の $g \in G$ に対して、μ の同じ行にある数字 i, j であって $g\lambda$ でも同じ列にあるものが存在する。

Proof. $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_s)$, $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_t)$ とおく。t についての帰納法で示す。

$t = 1$ の場合 $\lambda_1 < \mu_1$ となるから、λ の列数は μ_1 より少ない。よって鳩の巣原理を用いれば $1, 2, \cdots, \mu_1$ のうち、$g\lambda$ の同じ列にあるペアが必ず存在することがわかる。

$t > 1$ とする。$\lambda_1 < \mu_1$ である場合はまったく同様に鳩の巣原理から従う。$\lambda_1 = \mu_1$ かつ、$1, 2, \cdots, \mu_1$ が $g\lambda$ ではすべて異なる列に存在するとする。このとき垂直置換 $\tau \in \mathcal{V}_{g\lambda}$ を施して

$$H_1(\mu) = H_1(\tau g\lambda) = \{1, 2, \cdots, \mu_1\}$$

が成り立つようにできる。そこで、$\mu, \tau g\lambda$ の 2 行目以降をとりだしたタブロー μ', $(\tau g\lambda)'$ を考える。すると $(\tau g\lambda)' < \mu'$ であるから帰納法の仮定により μ' の同じ行にある数字 i, j であって $(\tau g\lambda)'$ では同じ列にあるものが存在する。i, j が $(\tau g\lambda)'$ の第 m 列にあるとする。τ は垂直置換だから

$$V_m(\tau g\lambda) = V_m(g\lambda)$$

よって i, j は $g\lambda$ の同じ列に存在する。 □

定理 1.2.1.11 の証明に戻る。補題から、$\nu = (i, j)$ であって $\nu \in \mathcal{H}_\mu \cap \mathcal{V}_{g^{-1}\lambda}$ となるものが存在する。よって

$$\nu = g^{-1}\pi g, \qquad \pi \in \mathcal{V}_\lambda$$

とおけば

$$\begin{aligned}
c_\lambda g c_\mu &= a_\lambda b_\lambda g a_\mu b_\mu \\
&= a_\lambda b_\lambda \mathrm{sgn}(\pi) \pi g a_\mu b_\mu \\
&= a_\lambda b_\lambda \mathrm{sgn}(\pi) g \nu a_\mu b_\mu \\
&= \mathrm{sgn}(\pi) a_\lambda b_\lambda g a_\mu b_\mu \\
&= -c_\lambda g c_\mu
\end{aligned}$$

よって

$$c_\lambda g c_\mu = 0$$

□

例 1.2.1.13. $\lambda = (n), \mu = (1, 1, \cdots, 1) \in \mathcal{P}_n$ とする。このとき $\mathcal{H}_\lambda = \mathfrak{S}_n$, $\mathcal{V}_\lambda = e$ だから、

$$c_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma$$

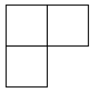
また $\mathcal{H}_\mu = e$, $\mathcal{V}_\mu = \mathfrak{S}_n$ だから、

$$c_\mu = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma$$

したがって λ の定める既約表現は自明な表現 1 であり、μ の定める既約表現は置換の符号 sgn であるとわかる。

例 1.2.1.14. $G = \mathfrak{S}_3$ とする。

$$\lambda =$$



に対応する Young 対称子は

$$c_\lambda = (e + (1,2))(e - (1,3)) = e + (1,2) - (1,3) - (1,3,2)$$

である。c_λ の定める既約表現が、例 1.1.2.21 で求めた既約表現 U と一致することをたしかめる。

$$c_\lambda^2 = 3c_\lambda$$

となるから、命題 1.2.1.8 より

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]c_\lambda = 2$$

である。

$$v = c_\lambda, \qquad u = (1,2,3)c_\lambda = -e + (1,3) - (2,3) + (1,2,3)$$

とすれば、$\mathbb{C}[G]c_\lambda = \mathbb{C}v \oplus \mathbb{C}v$ であり、

$$\begin{aligned} (1,2)v &= v, \qquad (1,2)u = -v - u \\ (1,2,3)v &= u, \qquad (1,2,3)u = -v - u \end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}\, e = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]c_\lambda = 2 \\ &\mathrm{tr}\, (1,2) = 0 \\ &\mathrm{tr}\, (1,2,3) = -1 \end{aligned}$$

となり、指標が一致している。

補題 1.2.1.15. $\phi : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ を

$$\phi(g) = \mathrm{sgn}(g)g$$

を線形に拡張して定める。ϕ は環準同型であり、対合である。$\varepsilon \in \mathbb{C}[G]$ に対して

$$\mathbb{C}[G]\varepsilon \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}} \simeq \mathbb{C}[G]\phi(\varepsilon)$$

が成り立つ。ここで、$\mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}$ は $\mathbb{C}_{\mathrm{sgn}} = \mathbb{C}$ であり、

$$g \cdot \lambda = \mathrm{sgn}(g)\lambda, \qquad g \in G, \lambda \in \mathbb{C}$$

で定まる $\mathbb{C}[G]$ 加群である（すなわち sgn 表現)。

Proof. $f : \mathbb{C}[G]\phi(\varepsilon) \to \mathbb{C}[G]\varepsilon \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}$ を

$$f(x) = \phi(x) \otimes 1$$

で定めれば $g \in G$ として

$$\begin{aligned} gf(x) &= g(\phi(x) \otimes 1) \\ &= g\phi(x) \otimes \mathrm{sgn}(g) \\ &= \mathrm{sgn}(g)g\phi(x) \otimes 1 \\ &= \phi(gx) \otimes 1 \\ &= f(gx) \end{aligned}$$

より $\mathbb{C}[G]$ 加群の準同型である。任意の $y \otimes 1 \in \mathbb{C}[G]\varepsilon \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}$ に対して

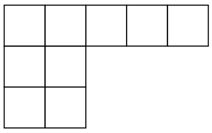
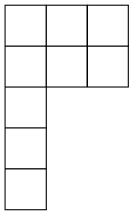
$$f(\phi(y)) = y \otimes 1$$

となり、$\mathbb{C}[G]\varepsilon \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}$ は $y \otimes 1$ の形の元で生成されるから、f は全射である。

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]\varepsilon \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]\varepsilon \cdot \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]\varepsilon$$

より f は同型。 □

例 1.2.1.16. $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対して、λ の行と列を反転させたものを双対 Young 図形といい λ^* と書く。

$\lambda =$  $\to$ $\lambda^* =$ 

このとき

$$\mathbb{C}[G]_{c_\lambda} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}} \simeq \mathbb{C}[G]_{c_{\lambda^*}}$$

となることを示す。定義より、

$$\mathcal{H}_{\lambda^*} = \mathcal{V}_\lambda, \qquad \mathcal{V}_{\lambda^*} = \mathcal{H}_\lambda$$

であるから、

$$a_{\lambda^*} = \phi(b_\lambda), \qquad b_{\lambda^*} = \phi(a_\lambda)$$

したがって

$$c_{\lambda^*} = \phi(b_\lambda)\phi(a_\lambda) = \phi(b_\lambda a_\lambda) = \phi(\tilde{c_\lambda})$$

である。命題 1.2.1.9 より、

$$\mathbb{C}[G]c_\lambda \simeq \mathbb{C}[G]\tilde{c_\lambda}$$

であるから、補題 1.2.1.15 より、

$$\mathbb{C}[G]c_{\lambda^*} \simeq \mathbb{C}[G]c_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}$$

1.2.2 続・対称多項式

1.2.3 表現環と対称関数環

定義 1.2.3.1. 可算無限個の変数をもつ形式的べき級数環 $R = \mathbb{C}[[x_1, x_2, \cdots]]$ を考える。

$$\mathfrak{S} = \bigl\{\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ は全単射で } f(n) \neq n \text{ なる } n \text{ が有限個}\bigr\}$$

とする[*4]。

$$\Lambda = \bigl\{f \in R \mid \sigma f = f, \ (\text{for all } \sigma \in \mathfrak{S}), \ f \text{ の単項式の次数は有界}\bigr\}$$

Λ は R の部分環で対称関数環と呼ばれる。Λ^k を

$$\Lambda^k = \bigl\{f \in \Lambda \mid f \text{ の単項式の次数はすべて } k\bigr\}$$

で定め、Λ^k の元を k 次斉次対称関数という。

$$\Lambda = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k$$

より Λ は次数付き環の構造をもつ。

例 1.2.3.2. 任意の Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ に対して

$$m_\lambda = \sum_{\alpha \sim \lambda} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

とする。ここで指数 α は、λ の置換になっているもの全体をわたる。すなわちある $\sigma \in \mathfrak{S}$ が存在して $\alpha = \sigma\lambda$ をみたすもの全体である。m_λ は対称関数である。対称多項式の場合と同様の議論で、Λ^k は $\{m_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}_k}$ を基底に持つことがわかる。

例 1.2.3.3.

$$e_k = m_{1^k} = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$
$$h_k = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} m_\lambda = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

をそれぞれ、基本対称関数, 完全対称関数という。また、任意の Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ に対して

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_n}$$
$$h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_n}$$

とする。

$$e_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$$
$$e_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$$

である。

[*4] $\mathfrak{S}$ は対称群 $\mathfrak{S}_n$ と自然な包含 $\iota : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_{n+1}$ のなす帰納系の帰納極限である。

例 1.2.3.4. $(k) = (k, 0, \cdots, 0)$ に対して

$$p_k = m_{(k)} = x_1^k + x_2^k + \cdots$$

とする。

このように、対称関数はいままでみてきた対称多項式を自然に無限変数に拡張した概念であり、対称多項式で成り立っていた関係式が対称関数においても成立することが多い。このことは対称関数の k 次斉次部分 Λ^k が k 次斉次対称多項式からの射影極限と考えることができることによる。Λ_n^k を n 変数 k 次斉次対称多項式のなすベクトル空間とする。$m \leq n$ に対して線形写像 $\rho_{m,n} : \Lambda_n^k \to \Lambda_m^k$ を

$$\rho_{m,n}(f(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n)) = f(x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)$$

によって定める。ここで $\rho_{m,n}(f)$ は実際に m 変数の k 次斉次対称多項式である[*5]。$l \leq m \leq n$ に対して

$$\rho_{l,m} \circ \rho_{m,n} = \rho_{l,n}$$

が成り立つから、$\{\Lambda_n^k, \rho_{m,n}\}$ は射影系をなす。

命題 1.2.3.5. 上の状況において、

$$\Lambda^k = \varprojlim \Lambda_n^k$$

がなりたつ。

Proof. $\theta_n : \Lambda^k \to \Lambda_n^k$ を $n+1$ 番目以降の変数を 0 にする写像とすれば、

$$\rho_{m,n} \circ \theta_n = \theta_m$$

が成り立つから、射影極限の普遍性から線形写像

$$\theta : \Lambda^k \to \varprojlim \Lambda_n^k$$

が誘導される。$\varprojlim \Lambda_n^k$ から Λ^k への写像 φ は次のように定義する。$\varprojlim \Lambda_n^k$ の元 $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$, $(f_n \in \Lambda_n^k)$ に対して、k 変数の部分に注目すると

$$f_k = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda m_\lambda(x_1, \cdots, x_k)$$

と一意的に表せるので

$$\varphi((f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda m_\lambda$$

と定める。ただし右辺の m_λ は例 1.2.3.2 の対称関数である。φ が θ の逆写像であることを示そう。

$$\theta_n(m_\lambda) = \begin{cases} m_\lambda(x_1, \cdots, x_n) & \text{if } \lambda_{n+1} = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1.7}$$

であるが、λ は k の分割であるので $n \geq k$ において $\lambda_{n+1} = 0$ である。よって $n \geq k$ ならば

$$\theta_n(\varphi((f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}})) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda m_\lambda(x_1, \cdots, x_n) \tag{1.8}$$

[*5] 変数の置換と 0 を代入する操作が可換であることによる

が成り立つ。一方、

$$f_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k(n)} d_\lambda m_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$$

とおくと $n \geq k$ より $\mathcal{P}_k(n) = \mathcal{P}_k$ だから

$$f_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} d_\lambda m_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$$

となる。よって $\rho_{k,n}(f_n) = f_k$ と (1.8) より

$$f_n = \theta_n(\varphi((f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}))$$

次に $n < k$ の場合、(1.7) より

$$\theta_n(\varphi((f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}})) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(k)} c_\lambda m_\lambda$$

となるが、

$$f_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} d_\lambda m_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$$

とおけば $\rho_{n,k}(f_k) = f_n$ より

$$f_n = \theta_n(\varphi((f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}))$$

以上より

$$\theta \circ \varphi = \mathrm{id}$$

がわかる。逆に任意の $f \in \Lambda^k$ に対して

$$f = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda m_\lambda$$

とおけば (1.7) より

$$\theta_k(f) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda m_\lambda(x_1, \cdots, x_k)$$

だから

$$\varphi(\theta(f)) = f$$

がわかる。 □

1.3 一般線形群の表現と Schur-Weyl 双対性

1.4　テンソル積の分解