同変 Schubert 計算における組合せ論

京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻
学籍番号 0530-35-6268
赤松 輝海

はじめに

はじめに

目次

1 同変コホモロジー

1.1 Borel 構成

X を位相空間, G をコンパクト Lie 群とする.

事実 1.1.1. ある主 G 束 $\pi\colon EG \to BG$ が存在して, 任意の主 G 束 $E \to X$ に対してある連続写像 $f\colon X \to BG$ があって $E = f^*(EG)$ がなりたつ. さらに EG は弱可縮であり,G は EG に自由に (右から) 作用する.

例 1.1.2. $T = \mathbb{C}^*$ に対して $S^\infty \to \mathbb{CP}^\infty$ は事実 1.1.1 の主 G 束である。

定義 1.1.3. G が X に左から作用しているとき,G の $X \times EG$ への左作用を

$$g(x,e) := (gx, eg^{-1}) \quad \text{for } g \in G, x \in X, e \in EG$$

によって定める.$X \times_G EG\colon = (X \times EG)/G$ とし, これを X の homotopy quotient という. このとき $H_G^*(X)\colon = H^*(X \times_G EG)$ を X の G 同変コホモロジーという.

例 1.1.4. 1 点集合 pt の G 同変コホモロジーは

$$\mathrm{pt} \times_G EG = (\mathrm{pt} \times EG)/G \approx BG$$

より

$$H_G^*(\mathrm{pt}) \simeq H^*(BG)$$

である。よって

$$H_{C^*}^*(\mathrm{pt}) \simeq H^*(\mathbb{CP}^\infty) \simeq \mathbb{Z}[y]$$

X の G 同変コホモロジーは主 G 束 $EG \to BG$ の取り方に拠らないことを示そう. 写像 $p\colon X \times EG \to X \times_G EG$ と $p_X\colon X \times_G EG \to BG$ を

$$p(x,e) := [x,e]$$
$$p_X([x,e]) := \pi(e)$$

によって定める.

命題 1.1.5. (i) $p\colon X \times EG \to X \times_G EG$ は主 G 束である

(ii) $p_X\colon X \times_G EG \to BG$ は X をファイバーとするファイバー束である

Proof. (i) $EG \to BG$ は主 G 束であるので,

□

連続写像 $f\colon X \to Y$ がホモトピー群の同型

$$f_*\colon \pi_q(X,x) \to \pi_q(Y, f(x)) \quad \mathrm{for} x \in X, q > 0$$

を誘導するとき、f を弱ホモトピー同値という。

補題 1.1.6. E を弱可縮な G 空間とし、$P \to B$ を主 G 束とする。このとき $(E \times P)/G \to B$ は弱ホモトピー同値である。

定理 1.1.7. M を G 空間, $E \to B$, $E' \to B'$ を主 G 束で E, E' はともに弱可縮であるとする。このとき弱ホモトピー同値 $E \times_G M \to E' \times_G M$ が存在する

[5] より、次が成り立つ

事実 1.1.8. 弱ホモトピー同値 $f\colon X \to Y$ は同型 $f^*\colon H^*(Y) \to H^*(X)$ を誘導する

定理 1.1.7 と事実 1.1.8 より, $EG \to BG$, $EG' \to BG'$ が事実 1.1.1 の主 G 束であるとき、

$$H^*(X \times_G EG) \simeq H^*(X \times_G EG')$$

であることがわかる。

1.2 $H_G^*(X)$ の代数的構造

X, Y を G 空間, $f\colon X \to Y$ を G 写像とする。$f_G\colon X \times_G EG \to Y \times_G EG$ を

$$f_G([x, e]) = [f(x), e]$$

によって定めると f_G は well-defined な連続写像となる。したがって f_G は同変コホモロジーの準同型

$$f_G^*\colon H_G^*(Y) \to H_G^*(X)$$

を誘導する。通常のコホモロジーの関手性と同様、同変コホモロジーも関手性をもつ

命題 1.2.1.

(i) $(\mathrm{id}_X)_G^* = \mathrm{id}_{H_G^*(X)}$
(ii) $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ に対して $(g \circ f)_G^* = (f_G^*) \circ (g_G^*)$

任意の G 空間 X に対して、1 点集合 pt への自明な G 写像は, 準同型 $H^*(BG) \simeq H_G^*(\mathrm{pt}) \to H_G^*(X)$ を誘導するから、$H_G^*(X)$ は $H^*(BG)$ 代数の構造を持つ.

1.3 Weil/Cartan モデル

1.4 localization theorem

2　GKM の定理

2.1　equivariantly formality

2.2　GKM の定理

3 同変 Schubert 計算

3.1 Grassmann 多様体の同変コホモロジー

$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n) = \{\, V \subset \mathbb{C}^n \mid \dim V = k \,\}$ を Grassmann 多様体という。$T = \mathbb{C}^n$ とするとき、T は $\mathbb{C}^n$ に

$$(t_1, \cdots, t_n) \cdot (x_1, \cdots, x_n) = (t_1 x_1, \cdots, t_n x_n)$$

によって左から作用する。この作用は自然に $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ への作用を誘導し、$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ は T 空間となる。$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ の T 同変コホモロジーの構造は組み合わせ的に決定することができる。$\binom{n}{k}$ を 0 と 1 からなる n 文字の文字列のうち、1 が k 個使われている文字列の集合とする。$\lambda = \lambda_1 \cdots \lambda_n \in \binom{n}{k}$ に対して、

$$\Omega_\lambda = \left\{\, V \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \;\middle|\; \dim(V \cap F_i) \geq \dim(\mathbb{C}^\lambda \cap F_i), \quad \forall i \in \{\, 1, \cdots n \mid \,\} \,\right\}$$

を Schubert cell という．ここで、$\mathbb{C}^\lambda = < e_{\lambda_1}, \cdots, e_{\lambda_n} >$, $F_i = < e_{n-i+1}, \cdots, e_n >$ である．

$\mathrm{inv}(\lambda) = \#\{\, (i,j) \mid \lambda_i = 1, \lambda_j = 0, i < j \,\}$ とすると Ω_λ は $\mathbb{C}^{\mathrm{inv}(\lambda)}$ に同相であり

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n) = \bigsqcup_{\lambda \in \binom{n}{k}} \Omega_\lambda$$

となる。したがって $H^*(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}))$ は Ω_λ の定めるホモロジー類の Poincare 双対 S_λ たちで $\mathbb{Z}$ 上生成される．$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C})$ は equivariantly formal であるから $H_T^*(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$ は $H_T^*(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}[y_1, \cdots, y_n]$ 上 S_λ たちで生成される.S_λ を Schubert class という。

3.2 GKM 条件による Schubert Class の特徴づけ

$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ の T 作用における固定点は $\{\mathbb{C}^\lambda\}_{\lambda \in \binom{n}{k}}$ であるから、[GKM] より $H_T^*(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$ は $\bigoplus_{\lambda \in \binom{n}{k}} H_T^*(\mathrm{pt})$ の部分代数である。GKM の定理を適用するために $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ の T 不変な $\mathbb{CP}^1$ を計算する.

3.3 Schubert puzzle による方法

3.4 edge labeled tableux による方法

3.5 weight preserving bijection の構成

謝辞

参考文献

[1] W. Fulton, Young Tableaux: With Applications to Representation Theory and Geometry. Cambridge: Cambridge University Press, (1996).

[2] L. W. Tu and A. Arabia, Introductory Lectures on Equivariant Cohomology. Princeton University Press, (2020).

[3] A. Knutson and T. C. Tao, Puzzles and (equivariant) cohomology of Grassmannians, Duke Math. J. **119** (2003), no. 2, 221–260

[4] H. Thomas and A. T. F. Yong, Equivariant Schubert calculus and jeu de taquin, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **68** (2018), no. 1, 275–318

[5] Hatcher