

同変 Schubert 計算における組合せ論

京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻

学籍番号 0530-35-6268

赤松 輝海

はじめに

はじめに

目次

1	同変コホモロジー	3
1.1	Borel 構成	3
1.2	$H_G^*(X)$ の代数的構造	5
1.3	Weil/Cartan モデル	5
1.4	localization theorem	5
2	GKM の定理	6
2.1	equivariantly formality	6
2.2	GKM の定理	6
3	同変 Schubert 計算	7
3.1	Grassmann 多様体の同変コホモロジー	7
3.2	GKM 条件による Schubert Class の特徴づけ	8
3.3	Schubert puzzle による方法	9
3.4	edge labeled tableaux による方法	11
3.5	weight preserving bijection の構成	16

1 同変コホモロジー

1.1 Borel 構成

G をコンパクト Lie 群とする。以下考える位相空間はすべて CW 複体であるとする。

定義 1.1.1. 次の 2 つの条件を満たす主 G 束 $f: EG \rightarrow BG$ を universal G bundle という。

- (i) 任意の主 G 束 $h: E \rightarrow B$ に対して連続写像 $h: B \rightarrow EB$ が存在して $E \simeq h^*EG$ が成り立つ。
- (ii) $h_0, h_1: B \rightarrow EB$ に対して $h_0^*EG \simeq h_1^*EG$ ならば h_0, h_1 はホモトピックである。

定理 1.1.2. (Steenrod [9]) 主 G 束 $E \rightarrow B$ が universal G bundle であるための必要十分条件は E が弱可縮であることである。

例 1.1.3. $S^{\infty*1}$ は可縮であるので、 $T = \mathbb{C}^*$ に対して $S^{\infty} \rightarrow \mathbb{CP}^{\infty}$ は universal T bundle である。

G がコンパクト Lie 群の場合、universal G bundle は直交群 $O(k)$ の universal bundle から構成できる。

$V_k(\mathbb{R}^n)$ を \mathbb{R}^n の k 個の正規直交なベクトル (v_1, \dots, v_k) のなす空間とし、 $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ を \mathbb{R}^n の k 次元部分空間全体のなす空間とする。 $V_k(\mathbb{R}^n)$ を Stiefel 多様体、 $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ を Grassmann 多様体という。

命題 1.1.4. $V_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ は主 $O(k)$ 束であり、 $\pi_i(V_k(\mathbb{R}^n)) = 0$ for $i = 0, 1, \dots, n - k - 1$ である。

Proof. □

$V_k(\mathbb{R}^{\infty}) = \varinjlim V_k(\mathbb{R}^n)$, $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^{\infty}) = \varinjlim \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ とする。

命題 1.1.5. $V_k(\mathbb{R}^{\infty}) \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{R}^{\infty})$ は universal $O(k)$ bundle である。

Proof. □

定理 1.1.6. G を Lie 群、 H を G の閉部分群とする。 $EG \rightarrow EG/H$ は universal H bundle である。

Proof. □

任意のコンパクト Lie 群 G は十分大きい n に対して $O(n)$ に埋め込めることが知られている ()。従って定理 1.1.5 と定理 1.1.6 から、 $V_n(\mathbb{R}^{\infty}) \rightarrow V_n(\mathbb{R}^{\infty})/G$ は universal G bundle である。

定義 1.1.7. G が X に左から作用しているとき、 G の $X \times EG$ への左作用を

$$g(x, e) := (gx, eg^{-1}) \quad \text{for } g \in G, x \in X, e \in EG$$

によって定める。 $X \times_G EG := (X \times EG)/G$ としこれを X の homotopy quotient という。このとき $H_G^*(X) := H^*(X \times_G EG)$ を X の G 同変コホモロジーという。

例 1.1.8. 1 点集合 pt の G 同変コホモロジーは

$$\text{pt} \times_G EG = (\text{pt} \times EG)/G \approx BG$$

*1 入る位相について明記?

より

$$H_G^*(\text{pt}) \simeq H^*(BG)$$

である。よって

$$H_{\mathbb{C}^*}^*(\text{pt}) \simeq H^*(\mathbb{CP}^\infty) \simeq \mathbb{Z}[y]$$

X の G 同変コホモロジーは主 G 束 $EG \rightarrow BG$ の取り方に拠らないことを示そう。写像 $p: X \times EG \rightarrow X \times_G EG$ と $p_X: X \times_G EG \rightarrow BG$ を

$$\begin{aligned} p(x, e) &:= [x, e] \\ p_X([x, e]) &:= \pi(e) \end{aligned}$$

によって定める。

命題 1.1.9.

- (i) $p: X \times EG \rightarrow X \times_G EG$ は主 G 束である
- (ii) $p_X: X \times_G EG \rightarrow BG$ は X をファイバーとするファイバー束である

Proof. (i) $EG \rightarrow BG$ は主 G 束であるので、

□

連続写像 $f: X \rightarrow Y$ がホモトピー群の同型

$$f_*: \pi_q(X, x) \rightarrow \pi_q(Y, f(x)) \quad \text{for } x \in X, q > 0$$

を誘導するとき、 f を弱ホモトピー同値*2という。

補題 1.1.10. E を弱可縮な G 空間とし、 $P \rightarrow B$ を主 G 束とする。このとき $(E \times P)/G \rightarrow B$ は弱ホモトピー同値である。

Proof.

□

定理 1.1.11. M を G 空間、 $E \rightarrow B$, $E' \rightarrow B'$ を主 G 束で E, E' はともに弱可縮であるとする。このとき弱ホモトピー同値 $E \times_G M \rightarrow E' \times_G M$ が存在する

Proof.

□

定理 1.1.12. (Hatcher [?]) 弱ホモトピー同値 $f: X \rightarrow Y$ は同型 $f^*: H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$ を誘導する

定理 1.1.11 と定理 1.1.12 より、 $EG \rightarrow BG$, $EG' \rightarrow BG'$ が事実??の主 G 束であるとき、

$$H^*(X \times_G EG) \simeq H^*(X \times_G EG')$$

であることがわかる。

*2 弱可縮よりも先に書く？

1.2 $H_G^*(X)$ の代数的構造

X, Y を G 空間, $f: X \rightarrow Y$ を G 写像とする。 $f_G: X \times_G EG \rightarrow Y \times_G EG$ を

$$f_G([x, e]) = [f(x), e]$$

によって定めると f_G は well-defined な連続写像となる。したがって f_G は同変コホモロジーの準同型

$$f_G^*: H_G^*(Y) \rightarrow H_G^*(X)$$

を誘導する。通常のコホモロジーの関手性と同様、同変コホモロジーも関手性をもつ

命題 1.2.1.

- (i) $(\text{id}_X)_G^* = \text{id}_{H_G^*(X)}$
- (ii) $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ に対して $(g \circ f)_G^* = (f_G^*) \circ (g_G^*)$

任意の G 空間 X に対して、1 点集合 pt への自明な G 写像は、準同型 $H^*(BG) \simeq H_G^*(\text{pt}) \rightarrow H_G^*(X)$ を誘導するから、 $H_G^*(X)$ は $H^*(BG)$ 代数の構造を持つ。

1.3 Weil/Cartan モデル

1.4 localization theorem

2 GKM の定理

2.1 equivariantly formality

2.2 GKM の定理

3 同変 Schubert 計算

3.1 Grassmann 多様体の同変コホモロジー

$\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n) = \{ V \subset \mathbb{C}^n \mid \dim V = k \}$ を Grassmann 多様体という. $T = (\mathbb{C}^*)^n$ とするとき, T は \mathbb{C}^n に

$$(t_1, \dots, t_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) = (t_1 x_1, \dots, t_n x_n)$$

によって左から作用する. この作用は自然に $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ への作用を誘導し, $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ は T 空間となる. $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ の T 同変コホモロジーの構造は組み合わせ的に決定することができる. $\binom{n}{k}$ を 0 と 1 からなる n 文字の文字列のうち, 1 が k 個使われている文字列の集合とする. $\lambda = \lambda_1 \cdots \lambda_n \in \binom{n}{k}$ に対して置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ の作用を $\sigma\lambda = \lambda_{\sigma^{-1}(1)} \cdots \lambda_{\sigma^{-1}(n)}$ で定める. $\lambda = \lambda_1 \cdots \lambda_n \in \binom{n}{k}$ に対して,

$$\Omega_\lambda^\circ = \{ V \in \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \mid \dim(V \cap F_i) = \dim(\mathbb{C}^\lambda \cap F_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \}$$

を Schubert cell という. ここで, $\mathbb{C}^\lambda = \langle \lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n \rangle$, $F_i = \langle e_1, \dots, e_i \rangle$ である.

命題 3.1.1. $\text{inv}(\lambda) = \{ (i, j) \mid \lambda_i = 1, \lambda_j = 0, i < j \}$ とすると Ω_λ° は $\mathbb{C}^{\binom{n}{k} - |\text{inv}(\lambda)|}$ に同相であり

$$\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n) = \bigsqcup_{\lambda \in \binom{n}{k}} \Omega_\lambda^\circ \quad (1)$$

となる. またこれによって $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ は CW-複体の構造をもつ.

Proof. $M(k, n)$ をランク k の $k \times n$ 複素行列全体のなす集合とする. $\text{GL}_k(\mathbb{C})$ は自然に $M(k, n)$ に左作用するが $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ は自然に $M(k, n)/\text{GL}_k(\mathbb{C})$ と同一視される. λ を左から読んで $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ 番目に 1 が現れるとする. このとき Ω_λ° は次の形の行列で代表される $M(k, n)/\text{GL}_k(\mathbb{C})$ の点の集合と同一視できる.

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc} & & & \overbrace{1}^{i_1\text{-th column}} & & & \overbrace{0}^{i_2\text{-th column}} & & & & & & \overbrace{0}^{i_k\text{-th column}} & & & \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & * & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \quad (2)$$

ここで $*$ は任意の複素数である. また, 各 cell は T 不変であることもわかる.

次に (1) が $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ の CW 構造となることを示す. $E_\lambda \subset M(k, n)$ を次の形の行列のなす集合とする.

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc} & & & \overbrace{x_1}^{i_1\text{-th column}} & & & \overbrace{0}^{i_2\text{-th column}} & & & & & & \overbrace{0}^{i_k\text{-th column}} & & & \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & x_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & x_k & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \quad (3)$$

ここで, $x_i \geq 0$ であり, 行ベクトルは正規直交であるとする.

E_λ が closed ball に同相であることを示す. $H_a = \{ (z_1, \dots, z_a, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n \mid \sum |z_j|^2 = 1, z_a \geq 0 \}$

とする. $\pi: E_\lambda \rightarrow H_{i_1}$ を 1 行目を取り出す写像とし, $v = (0, \dots, 0, \overbrace{1}^{i_1\text{-th}}, 0, \dots, 0)$ とおく. このとき $E_\lambda \approx H_{i_1} \times \pi^{-1}(v)$ が成り立つ ([7]). さらに $\lambda' \in \binom{n-1}{k-1}$ を $i_2 - 1, \dots, i_k - 1$ 番目に 1 が現れる文字列とすると $\pi^{-1}(v) = E_{\lambda'}$ であるから

$$E_\lambda \approx H_{i_1} \times E_{\lambda'}$$

となる．よって帰納的に E_λ が closed ball に同相であるとわかる．

自然な写像 $\varphi: E_\lambda \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ によって E_λ° は Ω_λ° に写されるが、 $\varphi: E_\lambda^\circ \rightarrow \Omega_\lambda^\circ$ は全単射である．実際 2 の行ベクトルに Schmidt の直交化法を施せば 3 の形が得られ、逆の手順を施せば 3 から 2 が得られる．したがって φ は同相である．また $\varphi(\partial E_\lambda) \subset \bigcup_{\mu < \lambda} \Omega_\mu^\circ$ であることも明らか．ただし $\mu \leq \lambda \Leftrightarrow \sum_{i=1}^j \mu_i \leq \sum_{i=1}^j \lambda_i$ である． \square

したがって $H^*(\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$ は Schubert cell の定めるホモロジー類の Poincare 双対 σ_λ たちで \mathbb{Z} 上生成される．

T 空間 X に対して $H_T^*(X)$ は $ET \times_T X$ のコホモロジーであったが、 ET は有限次元近似 ET_r を持っている (§1.1). $\Omega_\lambda = \overline{\Omega_\lambda^\circ}$ は T 不変な既約代数多様体であるから、 $ET_r \times_T \overline{\Omega_\lambda^\circ}$ は $H^*(ET_r \times_T \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$ においてホモロジー類 $[\overline{\Omega}_\lambda]$ を定める ([1]). とくに S_λ の次数は $|\text{inv}(\lambda)|$ で一定である．よってこの Poincare 双対 σ_λ の極限によって $H_T^*(\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$ の元が定まる．これを Schubert class といい、 S_λ とおく．

*3

$\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ は equivariantly formal であるから同型 $\phi: H_T^*(\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)) \simeq H^*(\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)) \otimes H_T^*(\text{pt})$ が存在する． $S_\lambda \in H^*(ET \times_T \text{Gr}_k(\mathbb{C}))$ は各ファイバーに制限すると σ_λ に一致するから

$$\phi(S_\lambda) = \sigma_\lambda + \sum_I c_I y^I$$

と展開できる．ここで $c_I \in H^*(\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$ の次数は $|\lambda|$ より小さい．よって帰納的に σ_λ が $\{\phi(S_\lambda)\}_\lambda$ の線形結合で表せることがわかるので、 $\{S_\lambda\}_\lambda$ は $H_T^*(\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$ の基底となる．

2 つの Schubert class の積 $S_\lambda S_\mu$ を $\{S_\nu\}_{\nu \in \binom{n}{k}}$ の $\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n]$ 係数の線形結合で

$$S_\lambda S_\mu = \sum_{\nu \in \binom{n}{k}} C_{\lambda\mu}^\nu S_\nu \quad (4)$$

このように表したとき、係数 $C_{\lambda\mu}^\nu$ を計算する組み合わせの手法を紹介することが本論文の目的である．

3.2 GKM 条件による Schubert Class の特徴づけ

$\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ の T 作用における固定点は $\{\mathbb{C}^\lambda\}_{\lambda \in \binom{n}{k}}$ であるから、[GKM] より $H_T^*(\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$ は $\bigoplus_{\lambda \in \binom{n}{k}} H_T^*(\text{pt})$ の部分代数である．GKM の定理を適用するために $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ の T 不変な \mathbb{CP}^1 を計算する．

命題 3.2.1. $\lambda, \mu \in \binom{n}{k}$ に対して \mathbb{C}^λ と \mathbb{C}^μ を結ぶ T 不変な \mathbb{CP}^1 が存在するための必要十分条件は、ある $(i, j) \in \text{inv}(\lambda)$ に対して $\mu = (i, j)\lambda$ となっていることである．*4

Proof. $\lambda \in \binom{n}{k}$, $\mu = (i, j)\lambda$ (for $(i, j) \in \text{inv}(\lambda)$) に対して、 $\phi: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ を \square

$\lambda, \lambda' = (i, j)\lambda \in \binom{n}{k}$, $((i, j) \in \text{inv}(\lambda))$ に対して、 \mathbb{C}^λ と $\mathbb{C}^{\lambda'}$ を結ぶ T 不変な \mathbb{CP}^1 を Z とする． Z における \mathbb{C}^λ の接空間を $T_\lambda Z$ とする． T の $T_\lambda Z$ への作用のウェイトを w_λ とする．

例 3.2.2. $n = 4$, $k = 2$, $\lambda = 0110$, $\lambda' = 0101$ とする．このとき

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & v \end{pmatrix} \in \text{Gr}_2(\mathbb{C}^4) \mid [u : v] \in \mathbb{CP}^1 \right\}$$

*3 $\text{PD}[\Omega_\lambda] = S_{\lambda, r} \in H^{2|\text{inv}(\lambda)|}(ET_r \times_T \text{Gr}_r(\mathbb{C}^n))$ とおき、 $S_{\lambda, r+1}|_{ET_r \times_T \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)} = S_{\lambda, r}([\text{ref}])$ より極限 S_λ が定まる

*4 Grassmann の点を標準形で書いて、 T -orbit が 2 次元以上になってしまう条件をみる

である. $t = (t_1, t_2, t_3, t_4) \in T$ に対して,

$$t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & t_4 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_4 t_3^{-1} v \end{pmatrix}$$

$\text{Lie}(T)$ の基底 X_1, \dots, X_4 を $\text{Exp}(X_i) = (0, \dots, \overbrace{1}^{i\text{-th}}, \dots, 0)$ となるように取り, その双対基底を y_1, \dots, y_4 とする. このとき $w_\lambda = y_4 - y_3$ である.

[8] より

$$H_T^*(\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)) = \left\{ (f_\lambda)_{\lambda \in \binom{n}{k}} \in \bigoplus_{\lambda \in \binom{n}{k}} H_T^*(\text{pt}) \mid f_\lambda - f_{\lambda'} \text{ is divisible by } w_\lambda \text{ for } \lambda' = (i, j)\lambda, (i, j) \in \text{inv}(\lambda) \right\}$$

3.3 Schubert puzzle による方法

定義 3.3.1. 図 1 の 8 種類のラベル付きの図形を puzzle piece と呼ぶ.

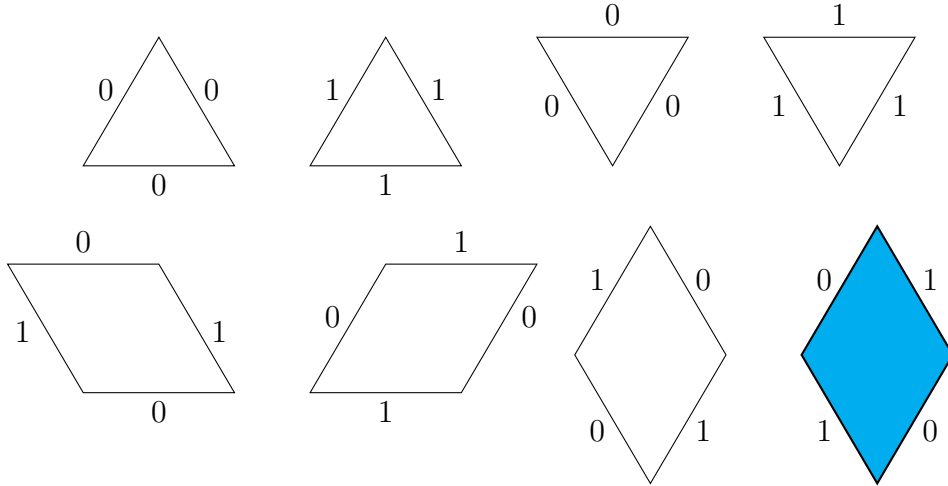



図 1 8 種類の puzzle piece.

ただし, puzzle piece のうち三角形のものは 1 辺の長さが 1 の正三角形であり, 平行四辺形のものは 1 辺の長さが 1 で鋭角は 60 度であるとする. また puzzle piece のうち  を equivariant piece という.

定義 3.3.2. いくつかの puzzle piece を (同一種の piece は何個用いてもよい) 同じラベルを持つ辺に沿って貼り合わせ, 一つの大きな正三角形を作ったものを puzzle と呼ぶ. puzzle P を上向きの正三角形となるように見たとき, P の左上の辺上に存在するラベルたちを下から上に読んで得られる文字列を λ , P の右上の辺上に存在するラベルたちを上から下に読んで得られる文字列を μ , 下の辺上に存在するラベルたちを左から右に読んで得られる文字列を ν とする. このとき $\partial P = \Delta_{\lambda\mu}^\nu$ と表す.

例 3.3.3. $\partial P = \Delta_{0110, 1001}^{1010}$ をみたす puzzle は図 2 の puzzle のみである.

定義 3.3.4. 1 辺の長さが n の puzzle P に含まれる equivariant piece p に対して, そのウェイト $\text{wt}(p) \in \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n]$ を次のように定義する. p の重心から, P の下辺に向かって P の左上の辺と平行な直線を引き,

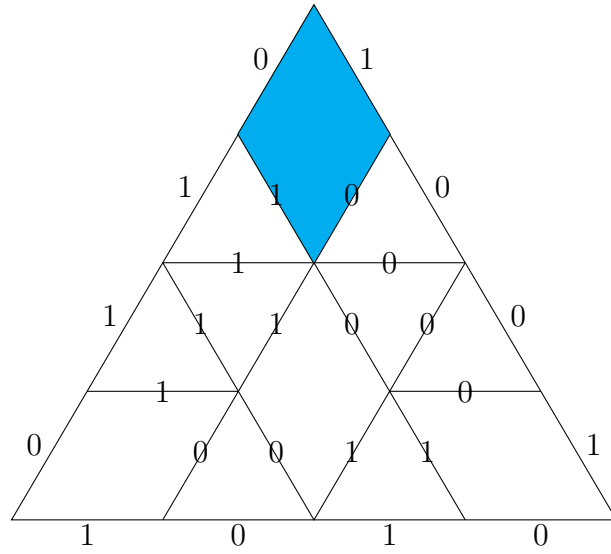


図2 $\partial P = \Delta_{0110,1001}^{1010}$ をみたすただ一つの puzzle

その交点が位置する puzzle piece の辺が左から数えて i 番目にあるとする．次に p の重心から， P の下辺に向かって P の右上の辺と平行な直線を引き，その交点が位置する puzzle piece の辺が左から数えて j 番目にあるとする．このとき

$$\text{wt}(p) = y_j - y_i$$

とする (図 3)．

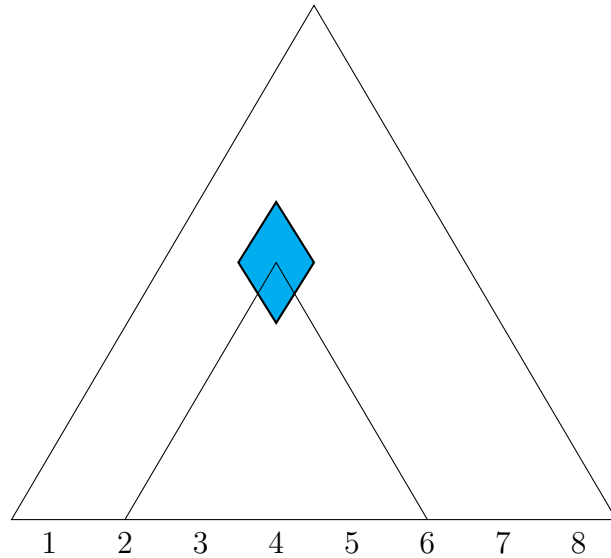


図3 equivariant piece のウェイトの定義．図の equivariant piece について $\text{wt}(p) = y_6 - y_2$ である．

定義 3.3.5. puzzle P に対してそのウェイト $\text{wt}(P)$ を

$$\text{wt}(P) := \prod_{p: \text{equivariant piece}} \text{wt}(p)$$

とする.

式 (4) の係数 $C_{\lambda\mu}^\nu$ に関して次が成り立つ.

定理 3.3.6. (Knutson-Tao [3])

$$C_{\lambda\mu}^\nu = \prod_{\substack{P: \text{puzzle} \\ \partial P = \Delta_{\lambda\mu}^\nu}} \text{wt}(P)$$

が成り立つ.

3.4 edge labeled tableaux による方法

定義 3.4.1. n の分割 $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0)$ に対して, 1 行目に λ_1 個の箱を, 2 行目に λ_2 個の箱を, 順に k 行目まで左寄せで書いた図を Young 図形という. 以降分割と Young 図形を同一視して同じ記号で表す. λ の各箱に, 各行について左から右に単調増大, 各列について上から下に単調増大となるように相異なる数字を 1 回ずつ書き入れたものを standard tableaux という.

例 3.4.2.

					1	3	5	6	12
					2	4	8		
					7	9	10		
					11				

図 4 $\lambda = (5, 3, 3, 1)$ の Young 図形とその上の standard tableaux の例

定義 3.4.3. 分割 λ, μ に対して, $\lambda \leq \mu \Leftrightarrow \lambda_i \leq \mu_i \ (\forall i)$ によって順序を定める. $\lambda < \mu$ を満たす Young 図形に対して, μ の Young 図形から λ に相当する部分を取り除いた図形を歪 Young 図形といい μ/λ で表す. 整数 $n > 0$ を固定する. 歪 Young 図形の各箱に 1 から n までの数字を書き入れ, 水平方向の各辺に $\{1, \dots, n\}$ の部分集合 (空でもよい) を書き入れたものを, equivariant filling という. equivariant filling のうち, 次の条件を満たすものを equivariant standard tableaux という.

- 1 から n までの各数字が, いずれかの箱のラベルに現れるか, またはいずれかの辺のラベルの要素になっている. また 1 から n までの各数字がちょうど 1 回現れる.
- 各箱のラベルについて, 左隣の箱のラベルよりも大きい.
- 各箱のラベルについて, 上辺のラベルが空でないなら, その最大値よりも大きい. 空であるならば, すぐ上の箱のラベルよりも大きい.
- 各辺のラベルについて, そのすべての数字がすぐ上の箱に書かれたラベルよりも大きい.

		1	9
		2	
		3, 5	
7	4	6	
8			

			4
			6
		3	
1	2		
	5, 7		

図5 $(4, 3, 3, 1)/(2, 2, 1)$ 上の equivariant standard tableaux の例 (左) と $(4, 4, 2)/(3, 3, 1)$ 上の equivariant standard tableaux の例 (右)

形が μ/λ で 1 から n までの数字が書かれた equivariant standard tableaux の全体の集合を $\text{EqSYT}(\mu/\lambda, n)$ とする.

例 3.4.4. 図5は $(4, 3, 3, 1)/(2, 2, 1)$ 上の equivariant standard tableaux の例と $(4, 4, 2)/(3, 3, 1)$ 上の equivariant standard tableaux の例である.

定義 3.4.5. λ の箱 x が $T \in \text{EqSYT}(\mu/\lambda, n)$ の内隅であるとは, x のすぐ右とすぐ下の箱が λ の箱でないことをいう. また μ/λ の箱 x が外隅であるとは, x のすぐ右とすぐ下の箱が存在しないことをいう. T の内隅 x に対して, 次の操作を考える:

- (i) x の下辺のラベル l が空でないなら, l の最小値を x のラベルに移す
- (ii) x の下辺のラベルが空であるとし, x のすぐ右の箱を y , すぐ下の箱を z とする. y と z のうち, ラベルの小さい方の箱を x と交換する (このとき辺のラベルは交換しない).

(i) の操作が行われる, もしくは x が外隅になるまで (i),(ii) を繰り返してできる tableaux を T の x による equivariant jeu de taquin といい, $\text{EqJdt}_x(T)$ と書く.

定義 3.4.6. λ の箱を各列に沿って下から上に, 右から左に数えて x_1, \dots, x_m とする. $T \in \text{EqSYT}(\mu/\lambda, n)$ に対して, T の equivariant rectification を x_1 から順に x_m まで equivariant jeu de taquin を行って得られる tableaux とする. すなわち

$$\text{EqRect}(T) := \text{EqJdt}_{x_m}(\text{EqJdt}_{x_{m-1}}(\dots(\text{EqJdt}_{x_1}(T))\dots))$$

を T の equivariant rectification という.

例 3.4.7. 図5左の tableaux の equivariant rectification を図示する (図6).

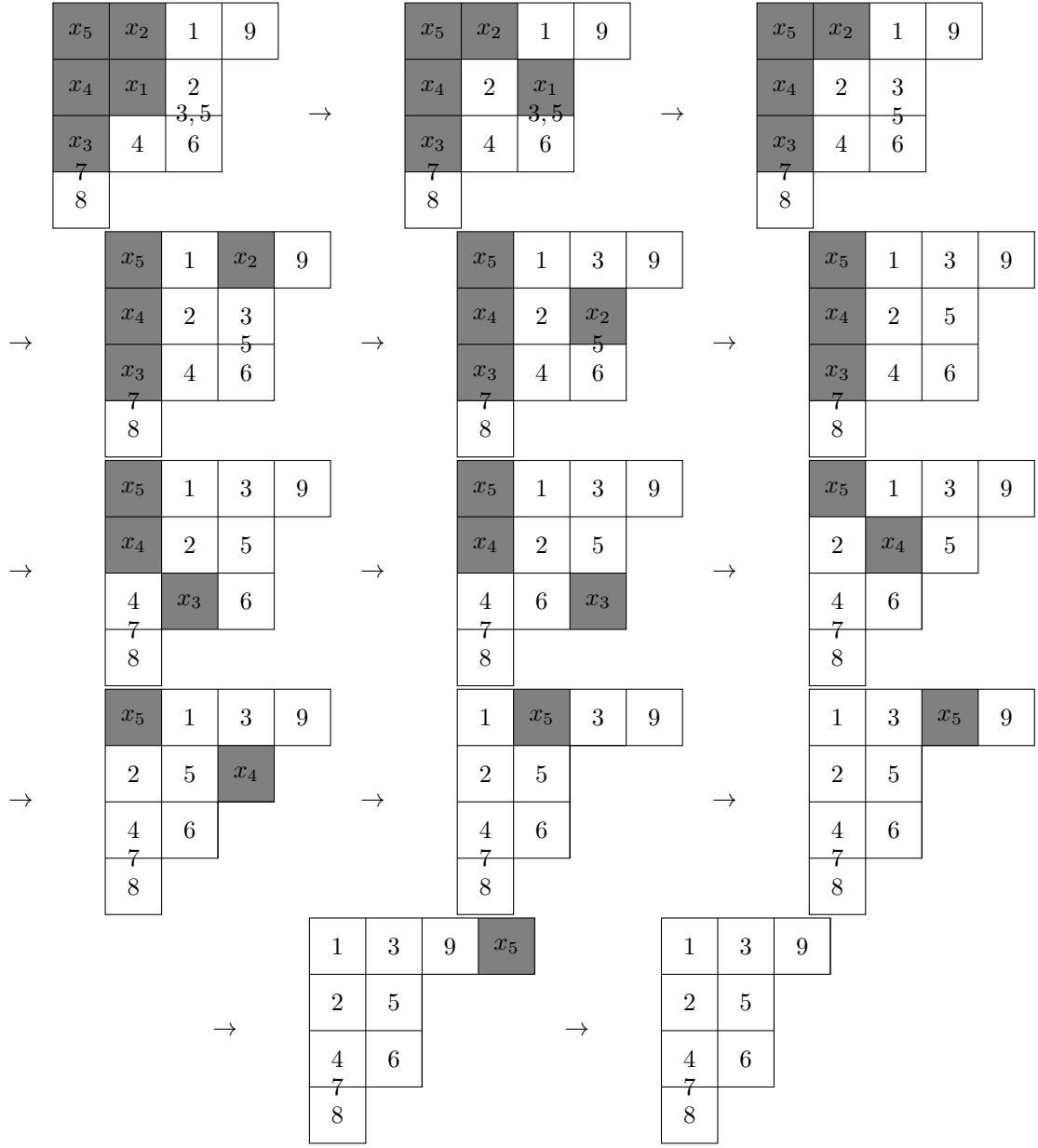


図6 図5左の tableaux の rectification.

次に $T \in \text{EdSYT}(\mu/\lambda, n)$ に対してそのウェイトを定義する.

定義 3.4.8. 正の整数 m, k を固定する. $\Lambda = \overbrace{(m, \dots, m)}^{k\text{-copies}}$ とする. Λ の箱 x に対して

$$\beta(x) = y_{i+1} - y_i \in \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_{m+k}]$$

とする. ここで i は Λ の右上の隅の箱から x までの Manhattan 距離である (図 7).

4	3	2	1
5	4	3	2
6	5	4	3

図7 $k = 3, m = 4$ における Λ の各箱の Manhattan 距離.

定義 3.4.9. $T \in \text{EqSYT}(\mu/\lambda, n)$, $(\mu \leq \Lambda = \overbrace{(m, \dots, m)}^{k\text{-copies}})$ を固定し, l を T の辺のラベルに含まれる要素とする. $\text{factor}(l) \in \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_{m+k}]$ を次のように定義する. $\text{EqRect}(T)$ を計算する過程において,

- (i) l が含まれる列にある λ の箱をすべて equivariant jeu de taquin したあとも, l が辺のラベルであるなら $\text{factor}(l) = 0$ とする. また l が含まれる列に λ の箱がない場合も $\text{factor}(l) = 0$ とする.
- (ii) l が含まれる列にある λ の箱をすべて equivariant jeu de taquin するとき, l が通った箱を下から順に x_1, \dots, x_s とする. x_s と同じ行で x_s の右側にある T の箱を左から順に y_1, \dots, y_t とする. このとき $\text{factor}(l) = \beta(x_1) + \dots + \beta(x_s) + \beta(y_1) + \dots + \beta(y_t)$ とする.

定義 3.4.10. $T \in \text{EqSYT}(\mu/\lambda, n)$ に対して

$$\text{wt}(T) = \prod_{l: \text{edge label}} \text{factor}(l)$$

とする.

例 3.4.11. 例 3.4.7 の計算より,

		1	9
		2	
		3, 5	
	4	6	
7			
8			

のウェイトは

$$\text{factor}(3) = \text{factor}(5) = \text{factor}(7) = 0$$

より 0 である.

例 3.4.12. 図 5 右の tableaux の equivariant rectification を図示する (図 8).

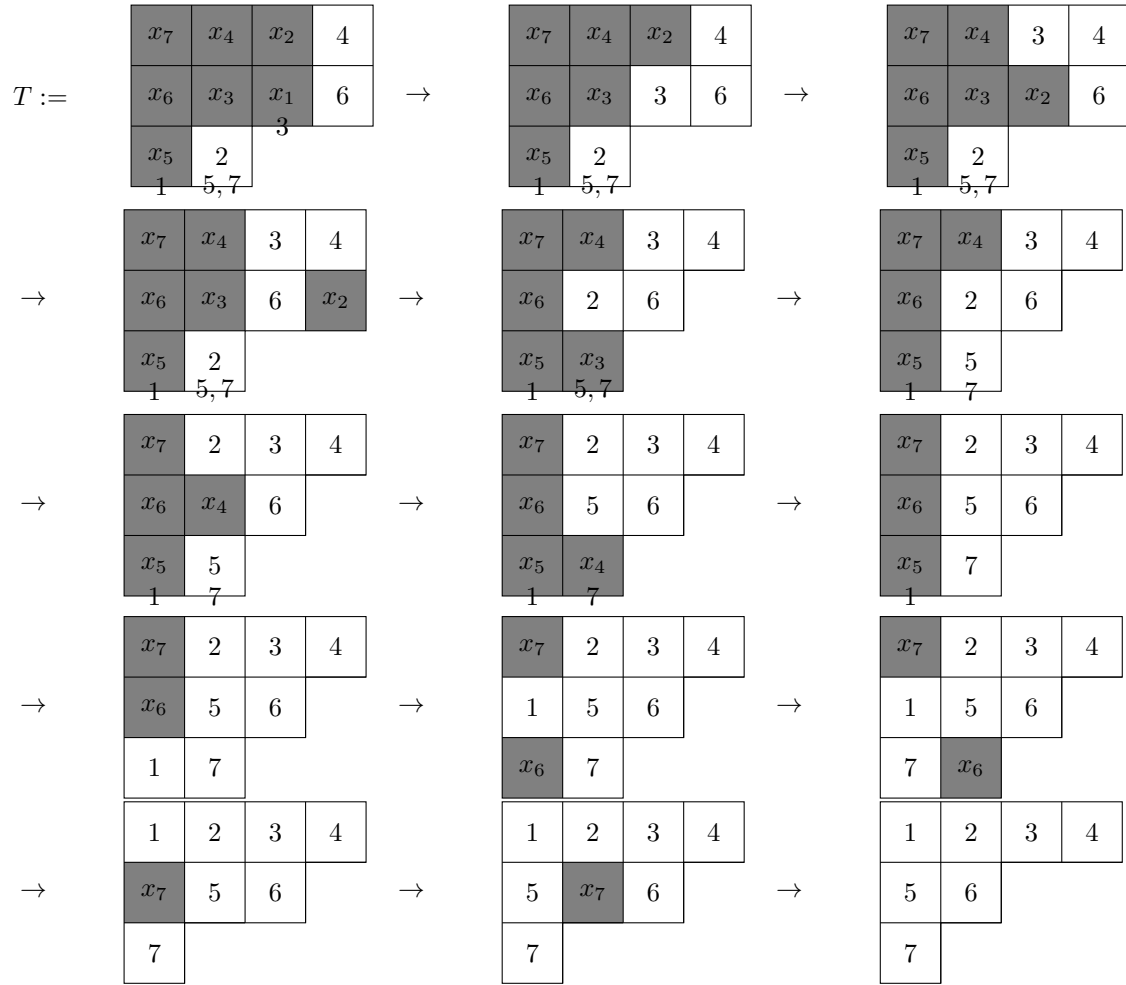


図8 図5右の tableaux の rectification.

$T \leq (4, 4, 4)$ とみなして $\text{wt}(T)$ を計算すると、上記の計算過程より

$$\text{factor}(3) = y_4 - y_1$$

$$\text{factor}(5) = y_6 - y_3$$

$$\text{factor}(7) = y_6 - y_5$$

$$\text{factor}(1) = y_7 - y_1$$

であるから

$$\text{wt}(T) = (y_4 - y_1)(y_6 - y_3)(y_6 - y_5)(y_7 - y_1)$$

分割 μ に対して、1 行目の箱に左から順に $1, 2, \dots, \mu_1$ を書き入れ、2 行目の箱に左から順に $\mu_1 + 1, \mu_1 + 2, \dots, \mu_1 + \mu_2$ を書き入れ、と続けて得られる standard tableaux を T_μ とする (図9).

正の整数 m, k を固定する. 分割 $\lambda \leq \Lambda = \overbrace{(m, \dots, m)}^{k\text{-copies}}$ に対して、

$$i_a = m - \lambda_a + a, \quad \text{for } a = 1, \dots, k$$

1	2	3	4
5	6	7	
8	9	10	
11			

図 9 $T_{(4,3,3,1)}$ の図示.

とすると $i_1 < \dots < i_k$ である. $l \in \binom{m+k}{k}$ を, 左から数えて i_1, \dots, i_k 番目に 1 が現れ, それ以外はすべて 0 であるような文字列とする. λ と l を対応させることで $\binom{m+k}{k}$ と $\lambda \leq \Lambda$ を満たす分割 λ の集合を同一視する.

式 (4) の係数 $C_{\lambda\mu}^\nu$ に関して次が成り立つ.

定理 3.4.13. (Thomas-Yong [4])

$$C_{\lambda,\mu}^\nu = \sum_{\substack{T \in \text{EqSYT}(\nu/\lambda, |\mu|) \\ \text{EqRect}(T) = T_\mu}} \text{wt}(T)$$










が成り立つ.

3.5 weight preserving bijection の構成

このセクションではセクション 3.3 と 3.4 で構成した計算方法が, 本質的に同じものであることを証明する. すなわち, $\mathcal{P}_{\lambda\mu}^\nu = \{ P : \text{puzzle} \mid \partial P = \Delta_{\lambda\mu}^\nu \}$, $\mathcal{T}_{\lambda\mu}^\nu = \{ T \in \text{EqSYT}(\nu/\lambda, |\mu|) \mid \text{EqRect}(T) = T_\mu \}$ とするとき, 全単射 $\varphi: \mathcal{P}_{\lambda\mu}^\nu \rightarrow \mathcal{T}_{\lambda\mu}^\nu$ であって次の性質を満たすものを構成する.

$$\text{wt}(\varphi(P)) = \text{wt}(P) \quad \text{for all } P \in \mathcal{P}_{\lambda\mu}^\nu \quad (5)$$

$\lambda, \mu, \nu \in \binom{n}{k}$ とする. puzzle $P \in \mathcal{P}_{\lambda\mu}^\nu$ は一般に図 10 の形をしている ([10]).

P の      の puzzle piece からなる連結領域を path と呼び,  で挟まれた部分を segment と呼ぶ. また segment に含まれる    の puzzle piece の個数をその segment の長さと呼ぶ (図 11). segment s に対してその長さを $|s|$ と書く.

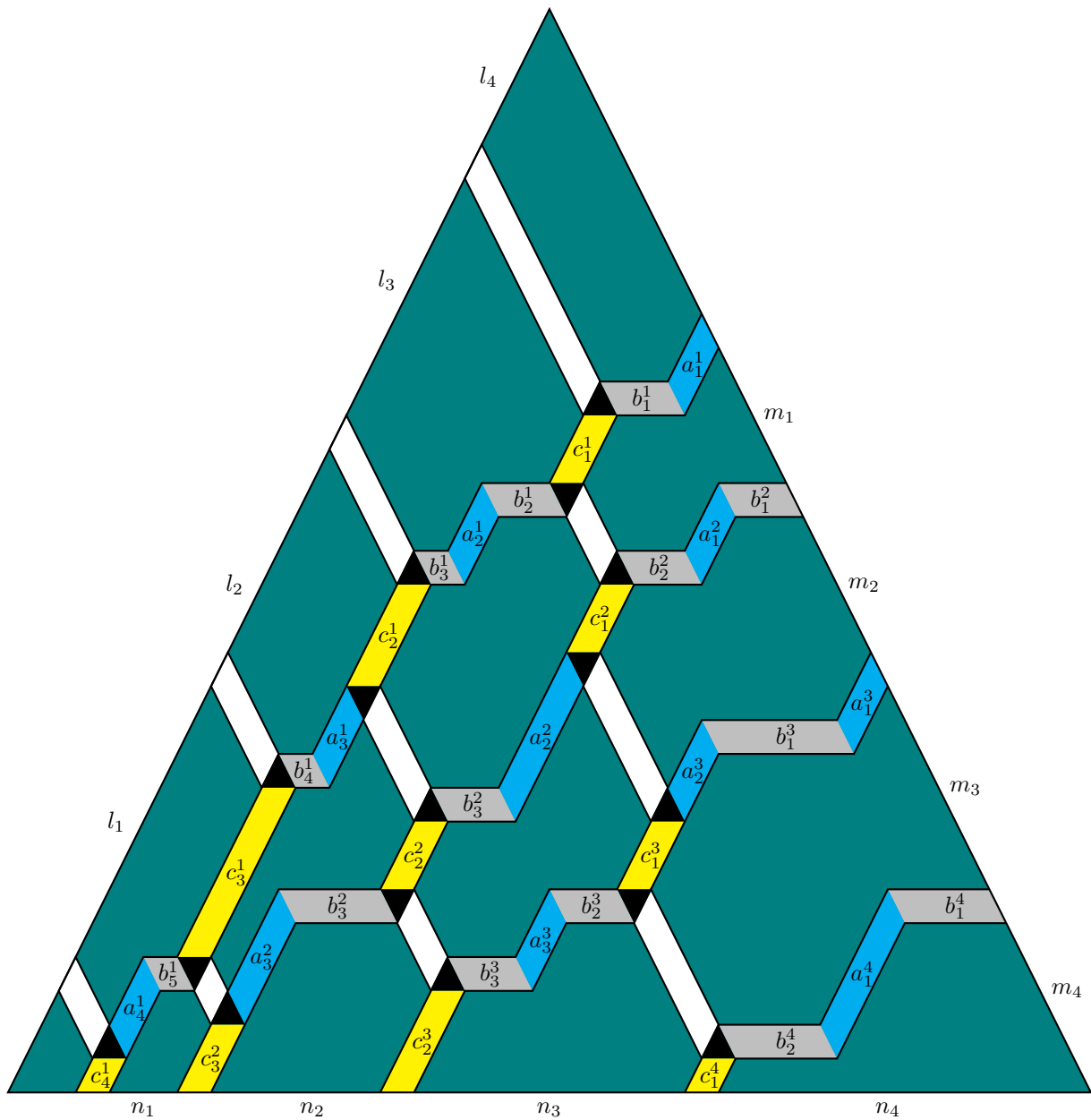


図 10 puzzle の一般形 [10]. ここで、水色の領域は $\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}$, 灰色の領域は $\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}$, 黄色の領域は $\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}$, 白色の領域は $\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}$, 黒色の領域は $\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}$, 緑色の領域は $\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$ のそれぞれ
 のからなり, a_j^i, b_j^i, c_j^i は各 puzzle piece の個数を表す. l_i, m_i, n_i はそれぞれの部分における 0 の個数である.

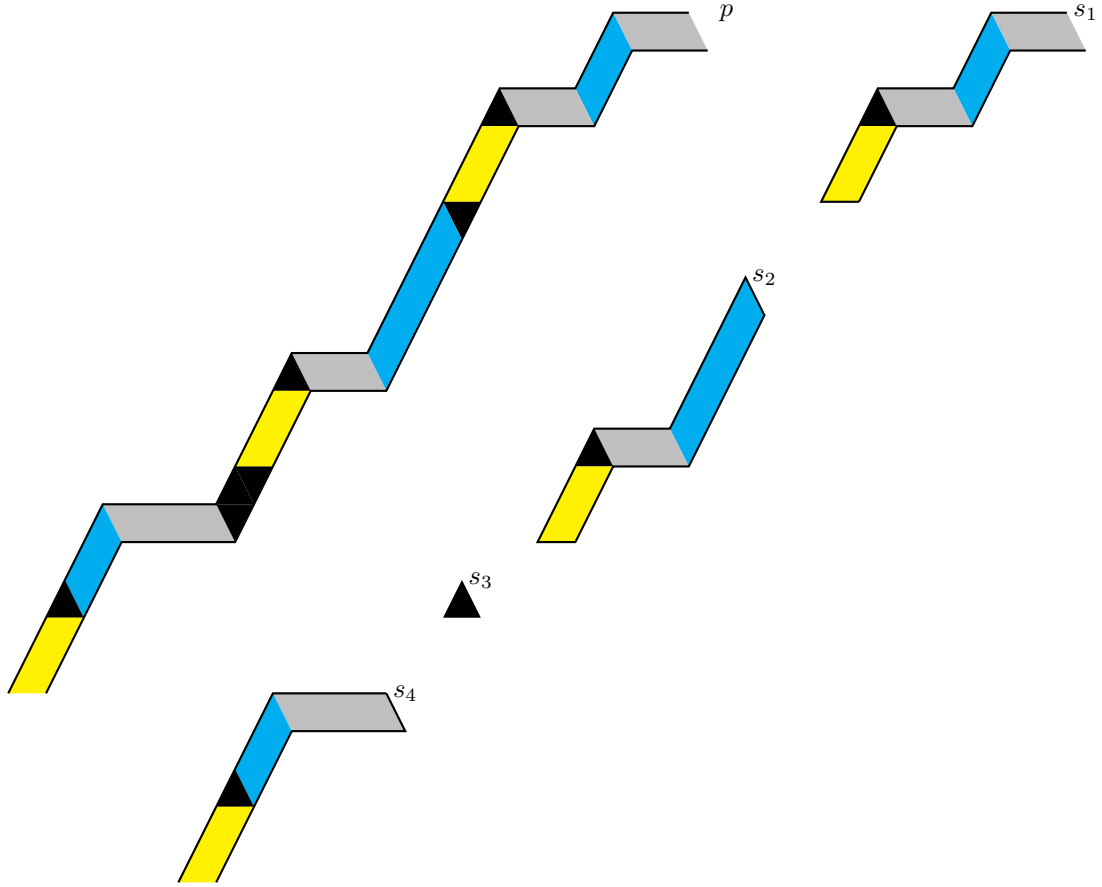





図 11 path p とその segment s_1, s_2, s_3, s_4 . s_3 の長さは 0 である.

puzzle P の path を左側から順に p_1, \dots, p_t とする. 次の操作を行って得られる edge labeled tableaux を $\varphi(P)$ とする.

p_1 の segment を上から順に s_1, \dots, s_a , ($a \leq k$) とする. s_1 に  と  がそれぞれ a_1, a_2, \dots, a_u 個, b_1, b_2, \dots, b_u 個交互に現れ,  が c 個現れるとする. ただし $a_i, b_j, c \geq 0$ であるとする.

$\Lambda = \overbrace{(n, \dots, n)}^{k\text{-copies}}$ の k 行目に次のように edge label と box label を書き入れていく. まず左から a_1 個の box の下辺の edge label に 1 から a_1 を 1 つずつ, 左から単調増大になるように入れる. 次の右隣りの b_1 個の box には何もせず, 次の a_2 個の box の edge label に $a_1 + 1$ から $a_1 + a_2$ を単調増大になるように入れていく. これを b_u まで行ったのち, c 個の box に $a_1 + \dots + a_u + 1$ から $a_1 + \dots + a_u + c$ までを左から単調増大になるように入れる (図 12).

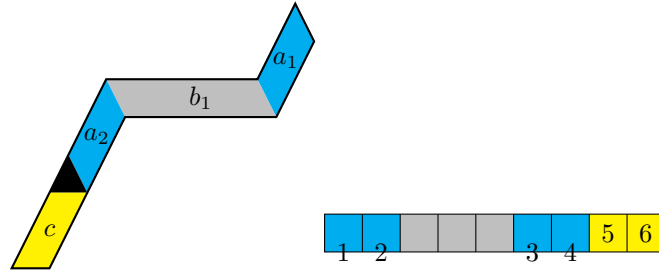


図 12 $a_1 = 2, b_1 = 3, a_2 = 2, c = 2$ の場合の segment に対する処理.

次の segment s_2 に対して, Λ の $k-1$ 行目の edge label と box label を同様の方法で書き入れていく. ただし k 行目で最後に処理を行った box のすぐ右上の box から処理を始める. また s_1 の長さが 0 であった場合は, $k-1$ 行目の最も左にある箱から処理を行う. 同様にしてすべての segment に対して edge label と box label を書き入れていく. s_i の長さが 0 であったなら, $k-i+1$ 行の処理はスキップして, s_{i+1} に対する処理は, 直前に処理を行った box のすぐ右の列にある $k-i$ 行目の box から始める (図 13).

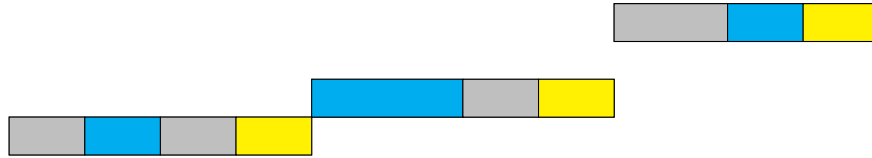


図 13 図 11 の path に対する処理. 青い領域の box の下辺に edge label が入り, 黄色い領域の box には box label が入っている. 灰色の領域の box には何も書かれていない. また, s_3 の長さが 0 であるから, 図のように下から 3 行目に対する処理をスキップする.

次に p_2 に対して同じ操作を行う. ただし p_1 に対する操作で最後に書き入れたラベルを l とすると, p_2 に対する操作で書き入れる label は $l+1$ から始める. すべての path に対して同様の操作を行い, box label の入った領域を含む左上の部分を $\varphi(P)$ とする.

例 3.5.1. 図 14 の puzzle P に対して $\varphi(P)$ を計算する.

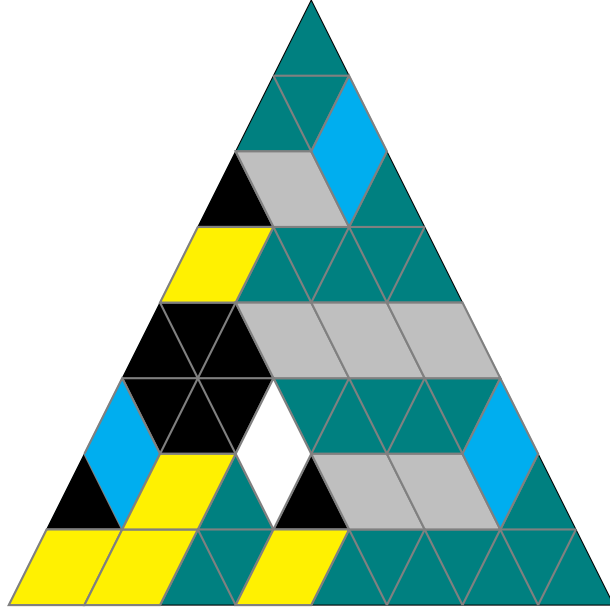


図 14 puzzle $P \in \mathcal{P}_{01010100,01001100}^{11010000}$

P の path は図 15 の p_1, p_2, p_3 の 3 つである.

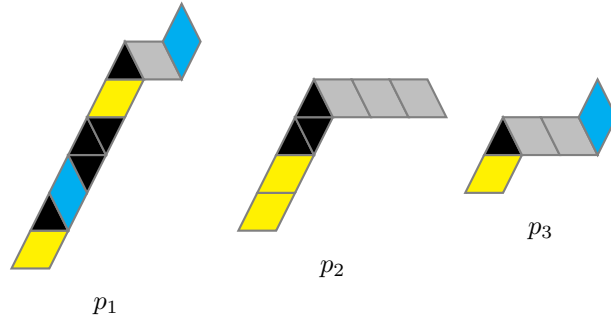


図 15 P の path p_1, p_2, p_3 .

p_1, p_2, p_3 に対して操作を行う (図 16) と $\varphi(P) \in \text{EqSYT}((5, 5, 4)/(4, 3, 2), 8)$ であることがわかる (図 17).

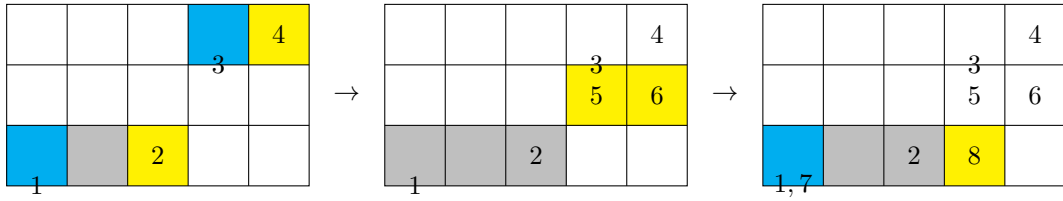


図 16 左から順に p_1, p_2, p_3 に対して操作を行った結果.

				4
			3 5	6
1, 7		2	8	




Figure 17: $\varphi(P) \in \text{EqSYT}((5, 5, 4)/(4, 3, 2), 8)$

命題 3.5.2. $\lambda, \mu, \nu \in \binom{n}{k}$ とする. $P \in \mathcal{P}_{\lambda\mu}^\nu$ に対して $\varphi(P) \in \text{EqSYT}(\nu/\lambda, |\mu|)$ である.

Proof. 文字列 λ は左から読んで i_1, \dots, i_k 番目に 1 が現れるとする. このとき

$$\begin{aligned} l_j &= i_{j+1} - i_j - 1, \quad (j = 1, \dots, k-1) \\ l_k &= n - i_k \end{aligned}$$

とおく. 同様に μ に対しても m_1, \dots, m_k , ν に対しても n_1, \dots, n_k を定義する.

puzzle $P \in \mathcal{P}_{\lambda\mu}^\nu$ の path を左から順に p_1, \dots, p_k , p_i の segment を上から順に $s_{i1}, \dots, s_{i,k-i+1}$, さらに s_{ij} の  の部分を s_{ij}^y ,  の部分を $s_{i,j}^b$,  の部分を $s_{i,j}^{\text{bg}}$ とおく. このとき

$$|s_{i,j}| = |s_{i+1,j}^{\text{bg}}| + |s_{i+1,j-1}^y| \quad \text{if } 1 < j < k - i + 1 \quad (6)$$

$$|s_{i,1}| = |s_{i+1,1}^{\text{bg}}| \quad \text{if } i < k \quad (7)$$

$$|s_{i,k-i+1}| = n_i + |s_{i+1,k-i}^y| \quad \text{if } i < k \quad (8)$$

$$|s_{k,1}| = n_k \quad (9)$$

$$|s_{1,i}^{\text{bg}}| + |s_{1,i-1}^y| = l_{k-i+1} \quad \text{if } i > 1 \quad (10)$$

$$|s_{1,1}^{\text{bg}}| = l_k \quad (11)$$

である (図 10).

式 (6), (7) より $\varphi(P)$ は図 18 のような形をしている.

図 18 図 10 の puzzle P に対する $\varphi(P)$. 黄色の box には box label が入っており, 白い box には box label は入っていない.

$\varphi(P)$ の形が ν/λ であることを示す. $\varphi(P)$ の box label が入った領域の k 行目の長さを計算すると

$$\begin{aligned}
|s_{11}^{\text{bg}}| + |s_{11}^y| + |s_{21}^y| + \cdots + |s_{k,1}^y| &= |s_{11}| + |s_{21}^y| + \cdots + |s_{k,1}^y| \\
&= |s_{21}^{\text{bg}}| + |s_{21}^y| + \cdots + |s_{k,1}^y| \\
&= |s_{21}| + |s_{31}^y| + \cdots + |s_{k,1}^y| \\
&\vdots \\
&= |s_{k,1}| \\
&= n_k
\end{aligned}$$

であり, $k-1$ 行目は

$$\begin{aligned}
&(|s_{12}^{\text{bg}}| + |s_{12}^y| + |s_{22}^y| + \cdots + |s_{k-1,2}^y|) - (|s_{21}^y| + |s_{31}^y| + \cdots + |s_{k1}^y|) \\
&= (|s_{22}^{\text{bg}}| + |s_{22}^y| + \cdots + |s_{k-1,2}^y|) - (|s_{31}^y| + \cdots + |s_{k1}^y|) \\
&\vdots \\
&= (|s_{k-1,2}^{\text{bg}}| + |s_{k-1,2}^y|) - (|s_{k,1}^y|) \\
&= |s_{k-1,2}| - |s_{k,1}^y| \\
&= n_{k-1}
\end{aligned}$$

同様に i 行目の長さは n_i になっていることがわかる. また式 (10) と (??) より $\varphi(P)$ の box label の入っていない領域の形が λ になっていることもわかる (図 19).

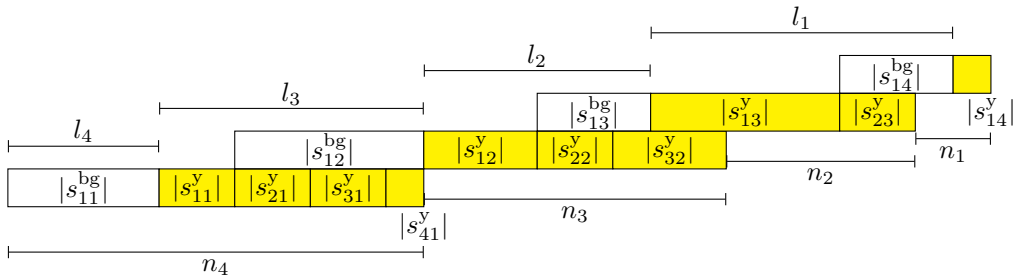




図 19

次に $\varphi(P)$ のラベルが 1 から $|\mu|$ までであることを示す. $\varphi(P)$ の構成方法から, P が  と  を $|\mu|$ 個含んでいることを示せばよい.

□

命題 3.5.3. $P \in \mathcal{P}_{\lambda\mu}^\nu$ に対して $\text{EqRect}(\varphi(P)) = T_\mu$ である.

命題 3.5.4. $\varphi: \mathcal{P}_{\lambda\mu}^\nu \rightarrow \mathcal{T}_{\lambda\mu}^\nu$ は全単射である.

命題 3.5.5. $\text{wt}(\varphi(P)) = \text{wt}(P)$ である.

謝辭

参考文献

- [1] W. Fulton, Young Tableaux: With Applications to Representation Theory and Geometry. Cambridge: Cambridge University Press, (1996).
- [2] L. W. Tu and A. Arabia, Introductory Lectures on Equivariant Cohomology. Princeton University Press, (2020).
- [3] A. Knutson and T. C. Tao, Puzzles and (equivariant) cohomology of Grassmannians, *Duke Math. J.* **119** (2003), no. 2, 221–260
- [4] H. Thomas and A. T. F. Yong, Equivariant Schubert calculus and jeu de taquin, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **68** (2018), no. 1, 275–318
- [5] J. Milnor. Construction of Universal Bundles, II. *Annals of Mathematics* 63, no. 3 (1956): 430 – 36.
- [6] Hatcher Topology
- [7] Hatcher Vector Bundle
- [8] GKM
- [9] N. Steenrod, The Topology of Fibre Bundles, Princeton Math. Series 14, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, (1951).
- [10] V. Kreiman, Equivariant Littlewood-Richardson skew tableaux