同変 Schubert 計算における組合せ論

京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻
学籍番号 0530-35-6268
赤松 輝海

はじめに

はじめに

目次

1　同変コホモロジー

1.1　Borel 構成

X を位相空間, G をコンパクト Lie 群とする.

事実 1.1.1. ある主 G 束 $\pi\colon EG \to BG$ が存在して, 任意の主 G 束 $E \to X$ に対してある連続写像 $f\colon X \to BG$ があって $E = f^*(EG)$ がなりたつ. さらに EG は弱可縮であり, G は EG に自由に (右から) 作用する.

例 1.1.2. $T = \mathbb{C}^*$ に対して $S^\infty \to \mathbb{CP}^\infty$ は事実 1.1.1 の主 G 束である。

定義 1.1.3. G が X に左から作用しているとき, G の $X \times EG$ への左作用を

$$g(x,e) := (gx, eg^{-1}) \quad \text{for } g \in G, x \in X, e \in EG$$

によって定める. $X \times_G EG\colon = (X \times EG)/G$ としこれを X の homotopy quotient という. このとき $H^*_G(X) := H^*(X \times_G EG)$ を X の G 同変コホモロジーという.

例 1.1.4. 1 点集合 pt の G 同変コホモロジーは

$$\mathrm{pt} \times_G EG = (\mathrm{pt} \times EG)/G \approx BG$$

より

$$H^*_G(\mathrm{pt}) \simeq H^*(BG)$$

である。よって

$$H^*_{\mathbb{C}^*}(\mathrm{pt}) \simeq H^*(\mathbb{CP}^\infty) \simeq \mathbb{Z}[y]$$

X の G 同変コホモロジーは主 G 束 $EG \to BG$ の取り方に拠らないことを示そう. 写像 $p\colon X \times EG \to X \times_G EG$ と $p_X\colon X \times_G EG \to BG$ を

$$p(x,e) := [x,e]$$
$$p_X([x,e]) := \pi(e)$$

によって定める.

命題 1.1.5.

(i) $p\colon X \times EG \to X \times_G EG$ は主 G 束である

(ii) $p_X\colon X \times_G EG \to BG$ は X をファイバーとするファイバー束である

Proof. (i) $EG \to BG$ は主 G 束であるので,

□

連続写像 $f\colon X \to Y$ がホモトピー群の同型

$$f_*\colon \pi_q(X,x) \to \pi_q(Y, f(x)) \quad \text{for } x \in X, q > 0$$

を誘導するとき、f を弱ホモトピー同値という。

補題 1.1.6. E を弱可縮な G 空間とし、$P \to B$ を主 G 束とする。このとき $(E \times P)/G \to B$ は弱ホモトピー同値である。

Proof. □

定理 1.1.7. M を G 空間, $E \to B$, $E' \to B'$ を主 G 束で E, E' はともに弱可縮であるとする。このとき弱ホモトピー同値 $E \times_G M \to E' \times_G M$ が存在する

Proof. □

[5] より、次が成り立つ

事実 1.1.8. 弱ホモトピー同値 $f\colon X \to Y$ は同型 $f^*\colon H^*(Y) \to H^*(X)$ を誘導する

定理 1.1.7 と事実 1.1.8 より, $EG \to BG$, $EG' \to BG'$ が事実 1.1.1 の主 G 束であるとき、

$$H^*(X \times_G EG) \simeq H^*(X \times_G EG')$$

であることがわかる。

1.2 $H_G^*(X)$ の代数的構造

X, Y を G 空間, $f\colon X \to Y$ を G 写像とする。$f_G\colon X \times_G EG \to Y \times_G EG$ を

$$f_G([x, e]) = [f(x), e]$$

によって定めると f_G は well-defined な連続写像となる。したがって f_G は同変コホモロジーの準同型

$$f_G^*\colon H_G^*(Y) \to H_G^*(X)$$

を誘導する。通常のコホモロジーの関手性と同様、同変コホモロジーも関手性をもつ

命題 1.2.1.

(i) $(\mathrm{id}_X)_G^* = \mathrm{id}_{H_G^*(X)}$
(ii) $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ に対して $(g \circ f)_G^* = (f_G^*) \circ (g_G^*)$

任意の G 空間 X に対して、1 点集合 pt への自明な G 写像は, 準同型 $H^*(BG) \simeq H_G^*(\mathrm{pt}) \to H_G^*(X)$ を誘導するから、$H_G^*(X)$ は $H^*(BG)$ 代数の構造を持つ.

1.3 Weil/Cartan モデル

1.4 localization theorem

2　GKM の定理

2.1　equivariantly formality

2.2　GKM の定理

3 同変 Schubert 計算

3.1 Grassmann 多様体の同変コホモロジー

$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)=\{\,V\subset\mathbb{C}^n\mid \dim V=k\,\}$ を Grassmann 多様体という．$T=\mathbb{C}^n$ とするとき，T は $\mathbb{C}^n$ に

$$(t_1,\cdots,t_n)\cdot(x_1,\cdots,x_n)=(t_1x_1,\cdots,t_nx_n)$$

によって左から作用する. この作用は自然に $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ への作用を誘導し，$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ は T 空間となる.$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ の T 同変コホモロジーの構造は組み合わせ的に決定することができる．$\binom{n}{k}$ を 0 と 1 からなる n 文字の文字列のうち，1 が k 個使われている文字列の集合とする．$\lambda=\lambda_1\cdots\lambda_n\in\binom{n}{k}$ に対して置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ の $\binom{n}{k}$ への作用を $\sigma\lambda=\lambda_{\sigma^{-1}(1)}\cdots\lambda_{\sigma^{-1}(n)}$ で定める．$\lambda=\lambda_1\cdots\lambda_n\in\binom{n}{k}$ に対して，

$$\Omega_\lambda^\circ=\left\{\,V\in\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)\;\middle|\;\dim(V\cap F_i)=\dim(\mathbb{C}^\lambda\cap F_i),\quad \forall i\in\{1,\cdots n\}\,\right\}$$

を Schubert cell という．ここで，$\mathbb{C}^\lambda=\langle\lambda_1e_1,\cdots,\lambda_ne_n\rangle$，$F_i=\langle e_1,\cdots,e_i\rangle$ である.

命題 3.1.1. $\mathrm{inv}(\lambda)=\{\,(i,j)\mid\lambda_i=1,\lambda_j=0,i<j\,\}$ とすると Ω_λ° は $\mathbb{C}^{\binom{n}{k}-|\mathrm{inv}(\lambda)|}$ に同相であり

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)=\bigsqcup_{\lambda\in\binom{n}{k}}\Omega_\lambda^\circ$$

となる．また $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ は CW-複体の構造をもつ.

Proof. $\mathrm{M}(k,n)$ をランク k の $k\times n$ 複素行列全体のなす集合とする．$\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ は自然に $\mathrm{M}(k,n)$ に左作用するが $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ は自然に $\mathrm{M}(k,n)/\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ と同一視される．λ を左から読んで $1\le i_1<\cdots<i_k\le n$ 番目に 1 が現れるとする．このとき Ω_λ° は

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & & i_1\text{-th column} & & & & i_2\text{-th column} & & & & & & & & i_k\text{-th column} & & & \\
 & & & \overbrace{} & & & & \overbrace{} & & & & & & & & \overbrace{} & & &
\end{array}\\
\left(\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
* & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
* & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
* & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & & * & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right)
\end{array}$$

この形の行列で代表される $\mathrm{M}(k,n)/\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ の点の集合と同一視できる. ここで $*$ は任意の複素数である． □

したがって $H^*(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}))$ は $\overline{\Omega_\lambda^\circ}$ の定めるホモロジー類の Poincare 双対 S_λ たちで $\mathbb{Z}$ 上生成される[*1]. $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C})$ は equivariantly formal であるから $H_T^*(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$ は $H_T^*(\mathrm{pt})=\mathbb{Z}[y_1,\cdots,y_n]$ 上 S_λ たちで生成される[*2]. S_λ を Schubert class という.

2 つの Schubert class の積 $S_\lambda S_\mu$ を $\{S_\nu\}_{\nu\in\binom{n}{k}}$ の $\mathbb{Z}[y_1,\cdots,y_n]$ 係数の線形結合で

$$S_\lambda S_\mu=\sum_{\nu\in\binom{n}{k}}C_{\lambda\mu}^\nu S_\nu$$

このように表したとき，この係数 $C_{\lambda\mu}^\nu$ を計算する組み合わせ的手法を紹介することが本論文の目的である.

[*1] CW 複体の構造について言及

[*2] equivariant formality ではカノニカルな同型ではない．ボレル構成の極限として S_λ を定義したほうが自然

3.2 GKM 条件による Schubert Class の特徴づけ

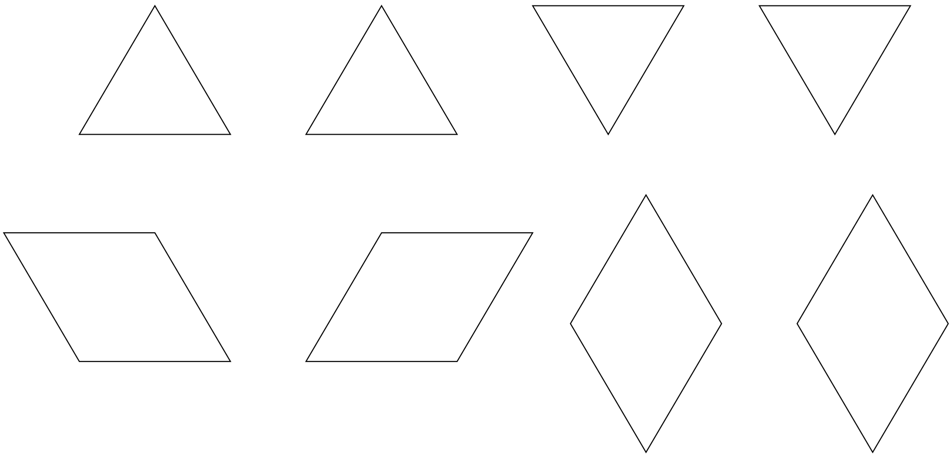
$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ の T 作用における固定点は $\{\mathbb{C}^\lambda\}_{\lambda\in\binom{n}{k}}$ であるから, [GKM] より $H_T^*(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$ は $\bigoplus_{\lambda\in\binom{n}{k}} H_T^*(\mathrm{pt})$ の部分代数である．GKM の定理を適用するために $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ の T 不変な $\mathbb{CP}^1$ を計算する．

命題 3.2.1. $\lambda,\mu\in\binom{n}{k}$ に対して $\mathbb{C}^\lambda$ と $\mathbb{C}^\mu$ を結ぶ T 不変な $\mathbb{CP}^1$ が存在するための必要十分条件は，ある $(i,j)\in\mathrm{inv}(\lambda)$ に対して $\mu=(i,j)\lambda$ となっていることである．

Proof. □

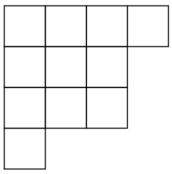
3.3 Schubert puzzle による方法

定義 3.3.1. 以下の 8 種類のラベル付きの図形を puzzle piece と呼ぶ.



3.4 edge labeled tableaux による方法

定義 3.4.1. n の分割 $\lambda=(\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_k>0)$ に対して，1 行目に λ_1 個の箱を，2 行目に λ_2 個の箱を，順に k 行目まで左寄せで書いた図を Young 図形という．以降分割と Young 図形を同一視して同じ記号で表す．λ の各箱に，各行について左から右に単調増大，各列について上から下に単調増大となるように相異なる数字を書き入れたものを standard tableaux という．



1	4	5	6
2	3	8	
7	9	10	
11			

定義 3.4.2. 分割 λ,μ に対して，$\lambda<\mu\Leftrightarrow\lambda_i<\mu_i\ (\forall i)$ によって順序を定める．$\lambda<\mu$ を満たす Young 図形に対して，μ の Young 図形から λ に相当する部分を取り除いた図形を歪 Young 図形といい.μ/λ で表す．整数 $n>0$ を固定する．歪 Young 図形の各箱に 1 から n までの数字を書き入れ，水平方向の各辺に $\{1,\cdots,n\}$ の部分集合 (空でもよい) を書き入れたものを，equivariant filling という．equivariant filling のうち，ラベル

に関して次の条件を満たすものを equivariant standard tableaux という．

- 1 から n までの各数字が，いずれかの箱のラベルに現れるか，またはいずれかの辺のラベルの要素になっている．また 1 から n までの各数字がちょうど 1 回しか現れない．
- 各箱のラベルについて，左隣の箱のラベルよりも大きい．
- 各箱のラベルについて，上辺のラベルが空でないなら，その最大値よりも大きい．空であるならば，すぐ上の箱のラベルより大きい．
- 各辺のラベルについて，そのすべての数字がすぐ上の箱に書かれたラベルよりも大きい．

形が μ/λ で 1 から n までの数字が書かれた equivariant standard tableaux の全体の集合を $\mathrm{EqSYT}(\mu/\lambda, n)$ とする．

定義 3.4.3. λ の箱 x が $T \in \mathrm{EqSYT}(\mu/\lambda, n)$ の内隅であるとは，x のすぐ右とすぐ下の箱が λ の箱でないことをいう．また μ/λ の箱 x が外隅であるとは，x のすぐ右とすぐ下の箱が存在しないことをいう．T の内隅 x に対して，次の操作を考える：

(i) x の下辺のラベル l が空でないなら，l の最小値を x のラベルに移す

(ii) x の下辺のラベルが空であるとし，x のすぐ右の箱を y，すぐ下の箱を z とする．y と z のうち，ラベルの小さい方の箱を x と交換する (このとき辺のラベルは交換しない).

(i) の操作が行われる，もしくは x が外隅になるまで (i),(ii) を繰り返してできる tableaux を T の x による equivariant jeu de taquin といい，$\mathrm{EqJdt}_x(T)$ と書く．

定義 3.4.4. λ の箱を各列に沿って下から上に，右から左に数えて $x_1, \cdots, x_m$ とする．$T \in \mathrm{EqSYT}(\mu/\lambda, n)$ に対して，T の equivariant rectification を x_1 から順に x_m まで equivariant jeu de taquin を行って得られる tableaux とする．すなわち

$$\mathrm{EqRect}(T) := \mathrm{EqJdt}_{x_m}(\mathrm{EqJdt}_{x_{m-1}}(\cdots(\mathrm{EqJdt}_{x_1}(T))\cdots))$$

を T の equivariant rectification という．

次に $T \in \mathrm{EdSYT}(\mu/\lambda, n)$ に対してそのウェイトを定義する．

定義 3.4.5. 正の整数 m, k を $m > k$ とする．$\Lambda = \overbrace{(m, \cdots, m)}^{k\text{-copies}}$ とする．Λ の箱 x に対して

$$\beta(x) = y_{i+1} - y_i \in \mathbb{Z}[y_1, \cdots, y_{m+k}]$$

とする．ここで i は Λ の右上の隅の箱から x までの Manhattan 距離である．図は $k = 3, m = 4$ における Λ の各箱の Manhattan 距離である．

4	3	2	1
5	4	3	2
6	5	4	3

定義 3.4.6. $T \in \mathrm{EqSYT}(\mu/\lambda, n), (\mu \leq \Lambda = \overbrace{(m, \cdots, m)}^{k\text{-copies}})$ を固定し，l を T の辺のラベルに含まれる要素とする．$\mathrm{factor}(l) \in \mathbb{Z}[y_1, \cdots, y_{m+k}]$ を次のように定義する．$\mathrm{EqSYT}(\mu/\lambda, n)$ を計算する過程において，

(i) l が含まれる列にある λ の箱をすべて equivariant jeu de taquin したあとも，l が辺のラベルであるなら $\mathrm{factor}(l) = 0$ とする．

(ii) l が含まれる列にある λ の箱をすべて equivariant jeu de taquin するとき，l が通った箱を下から順に $x_1, \cdots, x_s$ とする．x_s と同じ行で x_s の右側にある T の箱を左から順に $y_1, \cdots, y_t$ とする．このとき $\mathrm{factor}(l) = \beta(x_1) + \cdots + \beta(x_s) + \beta(y_1) + \cdots + \beta(y_t)$ とする．

定義 3.4.7. $T \in \mathrm{EqSYT}(\mu/\lambda, n)$ に対して

$$\mathrm{wt}(T) = \prod_{l:\text{edge label}} \mathrm{factor}(l)$$

とする．

定理 3.4.8. (Thomas-Yong [4])

$$C^{\nu}_{\lambda,\mu} = \sum_{T \in \mathrm{EqSYT}(\nu/\lambda, |\mu|)} \mathrm{wt}(T)$$

が成り立つ．

3.5 weight preserving bijection の構成

謝辞

参考文献

[1] W. Fulton, Young Tableaux: With Applications to Representation Theory and Geometry. Cambridge: Cambridge University Press, (1996).

[2] L. W. Tu and A. Arabia, Introductory Lectures on Equivariant Cohomology. Princeton University Press, (2020).

[3] A. Knutson and T. C. Tao, Puzzles and (equivariant) cohomology of Grassmannians, Duke Math. J. **119** (2003), no. 2, 221–260

[4] H. Thomas and A. T. F. Yong, Equivariant Schubert calculus and jeu de taquin, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **68** (2018), no. 1, 275–318

[5] Hatcher

[6] GKM