同変シューベルト計算における組合せ論

赤松輝海

京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻修士課程

令和７年２月３日

概要

2 つの Schubert 類の積を展開したときの係数は Littlewood-Richardson 数と呼ばれ，その計算アルゴリズムがいくつも知られている．同変コホモロジーにおいても Schubert 多様体は同変コホモロジー環の基底を定める．このときの構造定数，すなわち，

$$S_\lambda S_\mu = \sum_{\nu \in \binom{n}{k}} C^\nu_{\lambda\mu} S_\nu, \quad C^\nu_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}[y_1, \cdots, y_n]$$

としたときの多項式 $C^\nu_{\lambda\mu}$ を同変 Littlewood-Richardson 係数と呼ぶ．

概要

本発表では $C_{\lambda\mu}^{\nu}$ を計算する組合せ論的対象として

1. Knutson-Tao による puzzle
2. Thomas-Yong による edge labeled tableaux

を紹介し，その同値性について解説する．

目次

同変コホモロジーの復習

G を位相群，X を G 空間とする．G が自由に作用する空間であって弱可縮なもの EG を一つ固定し，$H^*((EG \times X)/G)$ を X の G 同変コホモロジーといい，$H_G^*(X)$ と書く．

例 1.1

$X = \mathrm{pt}$ の場合 $H_G^*(\mathrm{pt}) = H^*(EG/G) = H^*(BG)$．よって G が n 次元トーラスなら $H_G^*(\mathrm{pt}) \simeq \mathbb{Z}[y_1, \cdots, y_n]$ である．

同変コホモロジーの復習

$\binom{n}{k}$ を 0 と 1 からなる文字列で，k 個の 1 を含んでいるようなもの全体とする．$\lambda \in \binom{n}{k}$ に対して

$$\Omega_\lambda = \left\{ V \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \,\middle|\, \dim V \cap F^i \geq \dim C^\lambda \cap F^i \right\}$$

を Schubert 多様体という．ここで $F^i = \langle e_{n-i+1}, \cdots, e_n \rangle$,
$\mathbb{C}^\lambda = \langle \lambda_1 e_1, \cdots, \lambda_n e_n \rangle$.
$|\lambda| = \# \{ (i,j) \mid \lambda_i = 1, \lambda_j = 0, i < j \}$ とすると
codim $\Omega_\lambda = |\lambda|$ である．

同変コホモロジーの復習

$T = (\mathbb{C}^\times)^n$ は自然に $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ に作用し Ω_λ は T 不変．通常のコホモロジーと同様 Ω_λ は $|\lambda|$ 次の同変コホモロジー類を定める．これを S_λ と置き，同変 Schubert 類と呼ぶ．

命題 1.2

$\{S_\lambda\}_{\lambda\in\binom{n}{k}}$ は $H_T^*(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$ の $H_T^*(\mathrm{pt}) \simeq \mathbb{Z}[y_1,\cdots,y_n]$ 上の基底をなす．

命題 1.2 より，

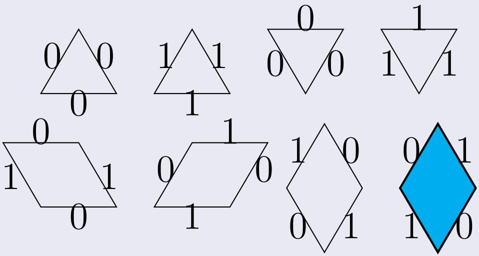
$$S_\lambda S_\mu = \sum_{\nu\in\binom{n}{k}} C_{\lambda\mu}^\nu S_\nu, \quad C_{\lambda\mu}^\nu \in \mathbb{Z}[y_1,\cdots,y_n]$$

と表した時の $C_{\lambda\mu}^\nu$ を同変 Littlewood-Richardson 係数と呼ぶ．

puzzle による方法

定義 2.1 (puzzle)

以下の 8 種類の図形を puzzle piece と言い，これらを組み合わせて得られる正三角形を puzzle と呼ぶ.

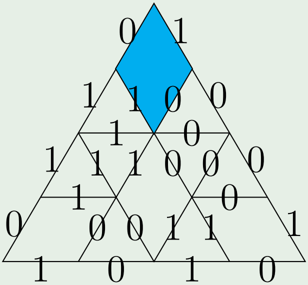


青塗された図形を equivariant piece という.

puzzle による方法

例 2.2

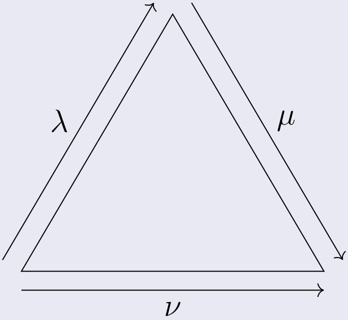
puzzle の例.



puzzle による方法

定義 2.3

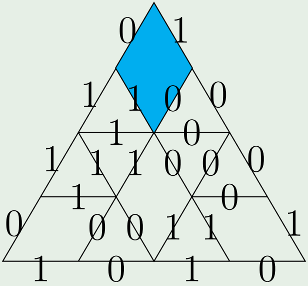
puzzle P に対して，P の周の各辺上の文字を図の方向に読んで得られる文字列をそれぞれ λ, μ, ν とするとき，$\partial P = \Delta_{\lambda\mu}^{\nu}$ と書く．



puzzle による方法

例 2.4

puzzle の例.

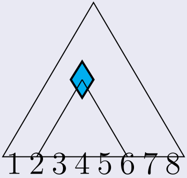


$$\partial P = \Delta^{1010}_{0110,1001}$$

puzzle による方法

定義 2.5 (puzzle の weight)

p を puzzle P の equivariant piece とする．図のように p から線分を引いたときの P の下辺との交点の位置によって $\mathrm{wt}(p) \in \mathbb{Z}[y_1, \cdots, y_n]$ を定義する．



$$\mathrm{wt}(p) = y_6 - y_2$$

また，$\mathrm{wt}(P) = \prod_p \mathrm{wt}(p)$ とする．

puzzle による方法

定理 2.6 (Knutson-Tao)

同変 Littlewood-Richardson 係数 $C_{\lambda\mu}^{\nu}$ について

$$C_{\lambda\mu}^{\nu} = \sum_{\partial P = \Delta_{\lambda\mu}^{\nu}} \mathrm{wt}(P)$$

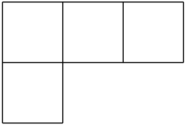
が成り立つ.

edge labeled tableaux による方法

$\lambda \in \binom{n}{k}$ を左から読んで $i_1 < \cdots < i_k$ 番目に 1 が現れるとする.

$$l_a = \#\{\, j \mid j > i_a, \lambda_j = 0 \,\}, \quad \text{for } a = 1, \cdots, k$$

によって分割 $l = (l_1, \cdots, l_k)$ が得られる. この対応によって $\binom{n}{k}$ は $((n-k)^k)$ に含まれる分割と同一視できる.

$\lambda = 10010 \quad \to \quad l =$ 

edge labeled tableaux による方法

定義 3.1 (equivariant filling)

分割 λ, ν に対して，$\lambda_i \leq \nu_i$ がすべての i で成り立つとき，$\lambda \leq \nu$ とする．このとき ν の箱であって λ の箱でないもの全体を歪 Young 図形といい ν/λ と書く．
ν/λ の各箱に 1 から m までの数字を 1 つ書き入れ，λ の水平方向の境界から下にある水平方向の各辺に $\{1, \cdots, m\}$ の空でもよい部分集合を書き入れたものを equivariant filling という．

edge labeled tableaux による方法

定義 3.2 (equivariant standard tableaux)

形が ν/λ の equivariant filling のうち，次の条件を満たすものを equivariant standard tableaux という．

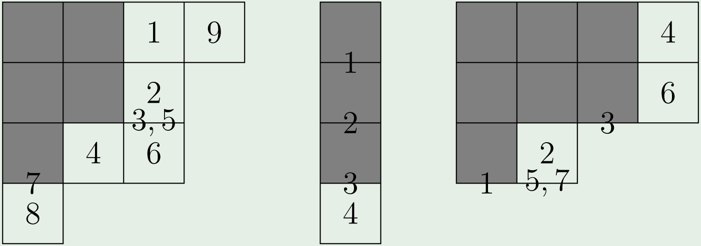
- 1 から m までの各数字が，いずれかの箱のラベルに現れるか，またはいずれかの辺のラベルの要素になっている．また 1 から m までの各数字がちょうど 1 回現れる．
- 各箱のラベルについて，左隣の箱のラベルよりも大きい．
- 各箱のラベルについて，上辺のラベルが空でないなら，その最大値よりも大きい．空であるならば，すぐ上の箱のラベルより大きい．
- 各辺のラベルについて，そのすべての数字がすぐ上の箱に書かれたラベルよりも大きい．

形が ν/λ で 1 から m までの数字が書かれた equivariant standard tableaux の全体の集合を $\mathrm{EqSYT}(\nu/\lambda, m)$ とする．

edge labeled tableaux による方法

例 3.3

equivariant standard tableaux とそうでないものの例．左図は $\{3,5\}$ が $\lambda=(2,2,1)$ の境界から下にないため equivariant filling でない．中央の図は 1 と 2 が $\lambda=(1,1,1)$ の境界から下にないため equivariant filling でない．右図は $(4,4,2)/(3,3,1)$ 上の equivariant standard tableaux の例である．

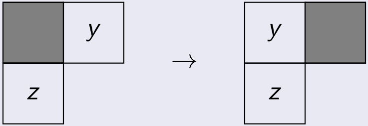


edge labeled tableaux による方法

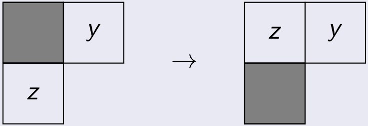
定義 3.4 (equivariant jeu de taquin)

$T \in \mathrm{EqSYT}(\nu/\lambda, m)$ の内隅 x に対して，x が外隅になるまで次の操作を繰り返して得られる tableaux を x による equivariant jeu de taquin といい $\mathrm{EqJdt}_x(T)$ と書く．

if $y < z$



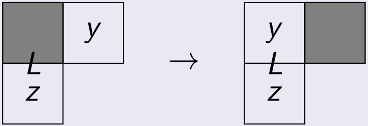
if $z < y$



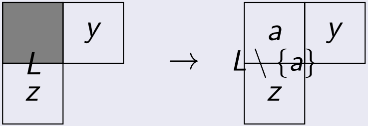
edge labeled tableaux による方法

定義 3.4 の続き

if $y < \min\ L$



if $a := \min\ L < y$



edge labeled tableaux による方法

定義 3.5

$T \in \mathrm{EqSYT}(\nu/\lambda, m)$ に対して，次のような順番で equivariant jeu de taquin を施した tableaux を equivariant rectification と呼び，$\mathrm{EqRect}(T)$ と書く．

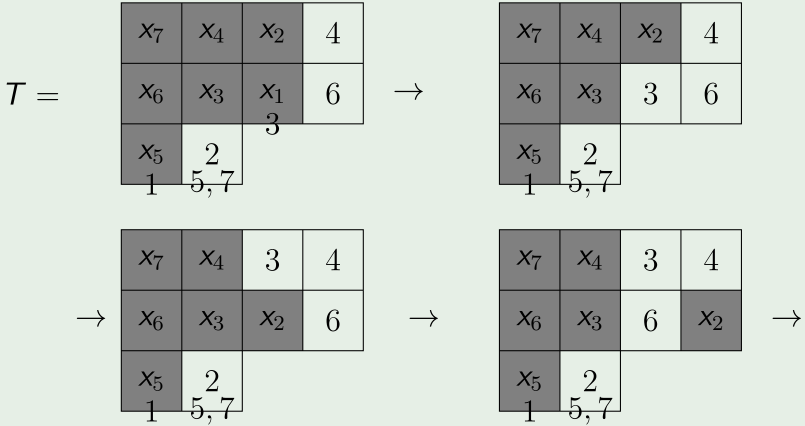
$$T := \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_7 & x_4 & x_2 & 4 \\ \hline x_6 & x_3 & x_1 & 6 \\ \hline x_5 & 2 & \multicolumn{1}{c}{3} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{5,7} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \end{array}$$

に対して，

$$\mathrm{EqRect}(T) := \mathrm{EqJdt}_{x_7}(\mathrm{EqJdt}_{x_6}(\cdots \mathrm{EqJdt}_{x_1}(T)))$$

edge labeled tableaux による方法

例 3.6



edge labeled tableaux による方法

$T \in \mathrm{EqSYT}(\nu/\lambda)$ に対して，次のような方法で weight を定義する．

定義 3.7 (Manhattan 距離)

$\Lambda = ((n-k)^k)$ の各箱 x に対して，$d(x)$ を図のように定める．すなわち $d(x)$ は Λ の右上の隅の箱と x との Manhattan 距離 (に 1 を加えたもの) に等しい．

4	3	2	1
5	4	3	2
6	5	4	3

edge labeled tableaux による方法

定義 3.8 (tableaux の weight)

$l \in \mathbb{Z}$ が T の辺のラベルに現れるとする．l を含む列に存在する λ の箱をすべて jeu de taquin する課程で l が通る箱を下から順に $z_1, \cdots, z_s$ とし，z_s と同じ行にある箱のうち最も右にある箱を w とする．$i = d(z_1) + 1, j = d(w)$ として

$$\text{factor}(l) = y_i - y_j$$

とする．l が箱のラベルに入らないときは $\text{factor}(l) = 0$ とする．T の weight を

$$\text{wt}(T) = \prod_{l\text{: edge label of } T} \text{factor}(l)$$

と定義する．

定理 3.9 (Knutson-Tao)

同変 Littlewood-Richardson 係数 $C_{\lambda\mu}^{\nu}$ について

$$C_{\lambda\mu}^{\nu} = \sum_{\substack{T \in \mathrm{EqSYT}(\nu/\lambda, |\mu|) \\ \mathrm{EqRect}(T) = T_\mu \\ \mathrm{wt}(T) \neq 0}} \mathrm{wt}(T)$$

が成り立つ．ここで T_μ は形が μ の standard tableaux で，1 行目から順に左から $1, 2, \cdots, |\mu|$ を書き入れたものである．

等価性

紹介した 2 つの数え上げは本質的に同じであることが示せる．すなわち，$\mathcal{P}^{\nu}_{\lambda\mu} = \left\{ P : \text{ puzzle} \,\middle|\, \partial P = \Delta^{\nu}_{\lambda\mu} \right\}$，$\mathcal{T}^{\nu}_{\lambda\mu} = \{ T \in \mathrm{EqSYT}(\nu/\lambda, |\mu|) \mid \mathrm{EqRect}(T) = T_{\mu}, \mathrm{wt}(T) \neq 0 \}$ としたとき，次が成り立つ．

定理 4.1

全単射 $\varphi : \mathcal{P}^{\nu}_{\lambda\mu} \to \mathcal{T}^{\nu}_{\lambda\mu}$ であって $\mathrm{wt}(\varphi(P)) = \mathrm{wt}(P)$ を満たすものが存在する．