

Лабораторная работа № 3

Тема: Градиентные методы многомерной минимизации.

Цель работы: Приобретение практических навыков для решения задач многомерной минимизации градиентными методами и методами второго порядка.

Постановка задачи

Требуется найти безусловный минимум функции многих переменных $y = f(x_1, \dots, x_n)$, то есть такую точку $x^* \in \mathbb{R}^n$, что $f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.

Градиентные методы многомерной минимизации

К основным градиентным методам многомерной минимизации относят:

1. метод градиентного спуска с постоянным шагом;
2. метод наискорейшего градиентного спуска;
3. овражный метод.

Основными численными методами многомерной минимизации второго порядка являются:

1. метод Ньютона;
2. метод Метод Ньютона с регулировкой шага;
3. метод Левенберга-Марквардта.

Задание

1. Составить программы поиска минимума функции методами, указанными в задании (язык программирования выбрать самостоятельно).
2. Найти координаты и значение функции в точке минимума заданными методами. Для градиентных методов используйте функции из первой таблицы. Для методов второго порядка возьмите функцию из второй таблицы.
3. Для градиентных методов найти точное значение координаты точки минимума аналитическими методами, то есть используя необходимые и достаточные условия экстремума.
4. Для градиентных методов исследовать сходимость алгоритма, фиксируя точность определения минимума, количество итераций метода и количество вычислений функции в зависимости от задаваемой точности поиска.
5. Для метода второго порядка исследовать сходимость алгоритма по числу итераций при выборе различных начальных точек (не менее трёх).
6. Проанализировать полученные результаты.

Содержание отчёта

1. Титульный лист, который должен включать:
 - название учреждения, где выполнена работа;

- номер лабораторной работы;
 - название лабораторной работы;
 - номер варианта;
 - Ф.И.О. студента, выполнившего работу;
 - изображение подписи рядом с фамилией;
 - номер учебной группы;
 - Ф.И.О. преподавателя;
 - год и место выполнения.
2. Цель работы.
 3. Формулировка задачи с указанием номера варианта.
 4. Листинги программ в виде текста (скриншоты программного кода вставлять не допускается).
 5. Результаты вычислений.
 6. Найденное точное значение минимума функции и координаты точки где он достигается.
 7. Графическое представление траекторий движения к экстремуму, полученных соответствующими методами (выполнение этого пункта не обязательно, даёт дополнительные +2 балла).
 8. Сравнительная характеристика методов.
 9. Выводы.

Варианты заданий для поиска минимума градиентным методом

№	Град. метод	Функция
1.	1,2	$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2$
2.	1,3	$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$
3.	1,2	$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$
4.	1,3	$f(x_1, x_2) = 1 - 2x_1 - 2x_2 - 4x_1x_2 + 10x_1^2 + 2x_2^2$
5.	1,2	$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2 + 2$
6.	1,3	$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 5x_2^2 - 8x_1x_2$
7.	1,2	$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2 - 4$
8.	1,3	$f(x_1, x_2) = [(x_2 + 1)^2 + x_1^2] \times [x_1^2 + (x_2 - 1)^2]$
9.	1,2	$f(x_1, x_2) = (x_2^2 + x_1^2 - 1)^2 + (x_1 + x_2 - 1)^2$
10.	1,3	$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2$
11.	1,2	$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 - 34x_1 + 5x_2^2 + 42x_2 + 7$
12.	1,3	$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 + 3$
13.	1,2	$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 - 2x_2 + 1$
14.	1,3	$f(x_1, x_2) = 4 - 3x_1 - 9x_2 + x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$
15.	1,2	$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - x_2$
16.	1,3	$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_1x_2 + 0.5x_2^2 + 5$
17.	1,2	$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$
18.	1,3	$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 7x_1 - 8x_2 + 2$
19.	1,2	$f(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2(x_2 - 4)^2 + (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 4)^2 + 1$
20.	1,3	$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1$
21.	1,2	$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - 4x_2$
22.	1,3	$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2$
23.	1,2	$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$
24.	1,3	$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$
25.	1,2	$f(x_1, x_2) = 1 - 2x_1 - 2x_2 - 4x_1x_2 + 10x_1^2 + 2x_2^2$
26.	1,3	$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2 + 2$
27.	1,2	$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 5x_2^2 - 8x_1x_2$
28.	1,3	$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2 - 4$
29.	1,2	$f(x_1, x_2) = [(x_2 + 1)^2 + x_1^2] \times [x_1^2 + (x_2 - 1)^2]$
30.	1,3	$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^3)^2 + x_2^2 + x_1^2$
31.	1,2	$f(x_1, x_2) = (x_2^2 + x_1^2 - 1)^2 + (x_1 + x_2 - 1)^2$
32.	1,3	$f(x_1, x_2) = 100(1 - x_1^2 - x_2^2)^2 + (x_1 - 1)^2 + x_2^2$

Варианты заданий для поиска минимума методами второго порядка

№	Метод 2-го порядка	Функция
1.	1	$f(x_1, x_2) = x_1^4 - x_1x_2 + x_2^4 + 3x_1 - 2x_2 + 1$
2.	2	$f(x_1, x_2) = [(x_2 + 1)^2 + x_1^2] \times [x_1^2 + (x_2 - 1)^2]$
3.	3	$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 + 3$
4.	1	$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_1x_2 + 0.5x_2^2 + 5$
5.	2	$f(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2(x_2 - 4)^2 + (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 4)^2 + 1$
6.	3	$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_1x_2 + x_2^4 - 3x_1 - 6x_2$
7.	1	$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - \sin(x_1))^2 + x_2^2 + x_1^2$
8.	2	$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + x_2^2 + x_1^2$
9.	3	$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - \cos(x_1))^2 + (x_2 - 1)^2 + x_1^2$
10.	1	$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^3)^2 + x_2^2 + x_1^2$
11.	2	$f(x_1, x_2) = 10(1 - x_1^2 - x_2^2)^2 + x_2^2$
12.	3	$f(x_1, x_2) = 10(1 - x_1^2 - x_2^2)^2 + x_1^2$
13.	1	$f(x_1, x_2) = 100(1 - x_1^2 - x_2^2)^2 + (x_1 - 1)^2 + x_2^2$
14.	2	$f(x_1, x_2) = 100(1 - x_1^2 - x_2^2)^2 + (x_2 - 1)^2 + x_1^2$
15.	3	$f(x_1, x_2) = 100(1 + x_1^2 - 2x_2^2)^2 + (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$
16.	1	$f(x_1, x_2) = 100(x_2^2 - 3x_1^2 - 1)^2 + (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$
17.	2	$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - \sin(x_1))^2 + (x_1 - x_2^2)^2 + x_2^2$
18.	3	$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$
19.	1	$f(x_1, x_2) = 100(x_1 - x_2^2)^2 + (1 - x_2)^2$
20.	2	$f(x_1, x_2) = 100(x_1 - x_2^2)^2 + (2 - x_2 - x_1^2)^2$
21.	3	$f(x_1, x_2) = 100(x_1 - x_2^2)^2 + (x_1^2 - x_2)^2$
22.	1	$f(x_1, x_2) = 3x_1^4 + 2x_2^4 - 2x_1x_2$
23.	2	$f(x_1, x_2) = 3x_1^4 - x_1x_2 + x_2^4 - 7x_1 - 8x_2 + 2$
24.	3	$f(x_1, x_2) = 4x_1^4 + 3x_2^4 - 4x_1x_2 + x_1$
25.	1	$f(x_1, x_2) = 3x_1^4 + x_1x_2 + 2x_2^4 - x_1 - 4x_2$
26.	2	$f(x_1, x_2) = 4x_1^4 - 6x_1x_2 - 34x_1 + 5x_2^4 + 42x_2 + 7$
27.	3	$f(x_1, x_2) = 4 - 3x_1 - 9x_2 + x_1^4 + x_1x_2 + x_2^4$
28.	2	$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 + \sin^2(x_1 + 2) + x_2^2$
29.	1	$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + x_2^2 + x_1^2$
30.	3	$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - \cos(x_1))^2 + (x_2 - 1)^2 + x_1^2$
31.	1	$f(x_1, x_2) = 100(1 - x_1^2 - x_2^2)^2 + (x_1 - 1)^2 + x_2^2$
32.	2	$f(x_1, x_2) = 100(1 - x_1^2 - x_2^2)^2 + (x_2 - 1)^2 + x_1^2$