MA3171 – Matematika Numerik

EKSPLORASI ATRAKTOR LORENZ: STUDI TENTANG KEPEKAAN TERHADAP VARIASI PARAMETER DENGAN METODE RUNGE-KUTTA 4

LATAR BELAKANG

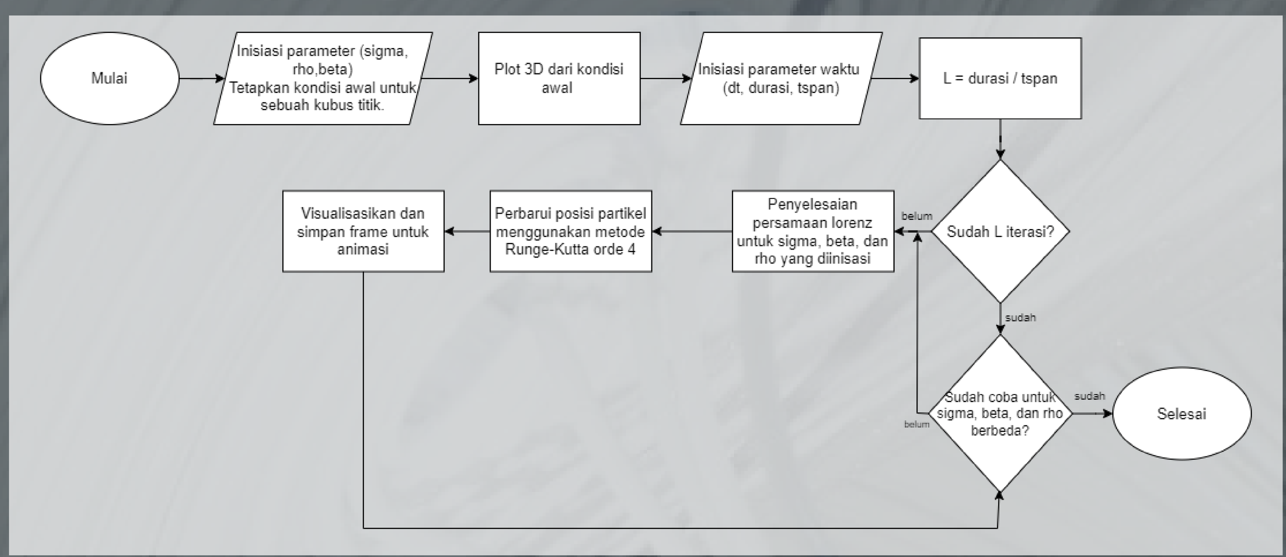
Atraktor Lorenz adalah suatu konsep dalam teori kekacauan yang digunakan untuk menggambarkan perilaku sistem dinamis non linier yang dihasilkan oleh seperangkat persamaan diferensial non linear orde tiga yang memodelkan sistem aliran konvektif. Edward Lorenz menunjukan bahwa sistem ini menunjukan **perilaku chaos** ketika parameter persamaan dipilih.

Perilaku chaos memiliki tingkat sensitivitas yang tinggi, saat parameter diubah sedikit saja maka akan memiliki pengaruh yang besar. Dengan perubahan parameter tersebut maka akan muncul efek kupu-kupu atau **Butterfly Effect** dalam sistem seiring bertambahnya waktu.

TUJUAN

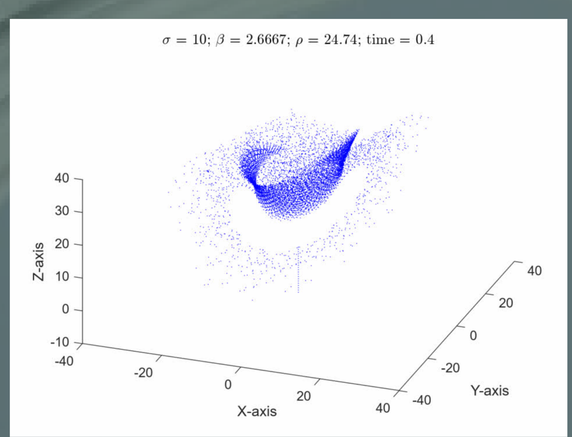
Tujuan yang diharapkan ialah **analisis perubahan parameter** terhadap **sensitivitas atraktor lorenz** menggunakan **metode runge kutta orde 4.**

FLOWCHART



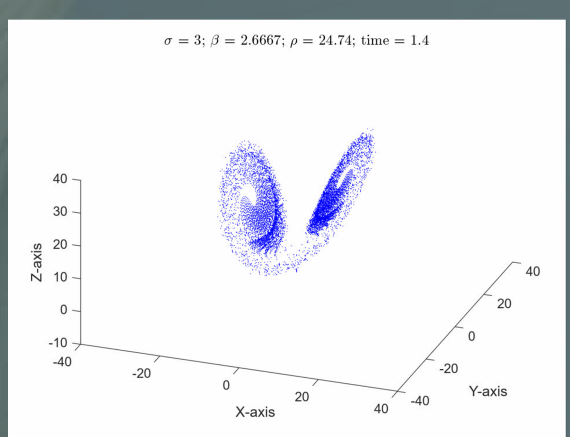
HASIL SIMULASI

KONDISI NORMAL

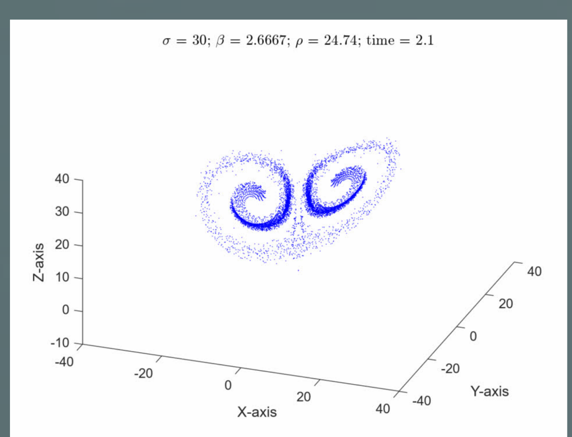


(1) σ = 10, β = 8/3, dan ρ = 24,7

VARIASI σ

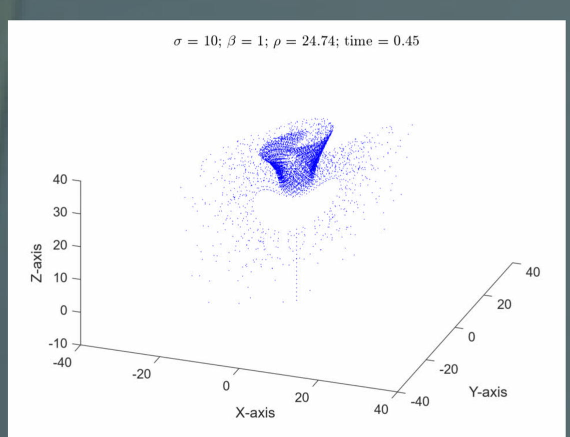


(2) σ = 3, β = 8/3, dan ρ = 24,7

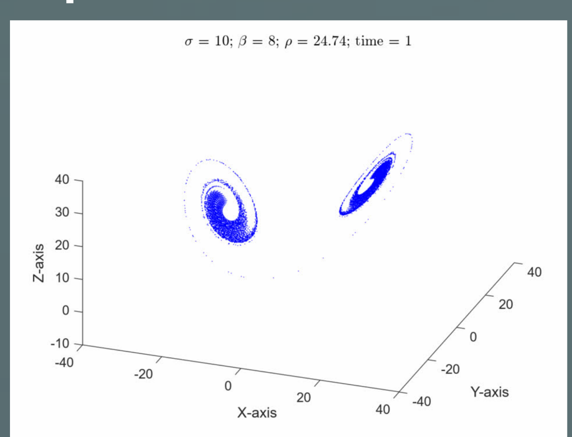


(3) σ = 30, β = 8/3, dan ρ = 24,7

VARIASI β

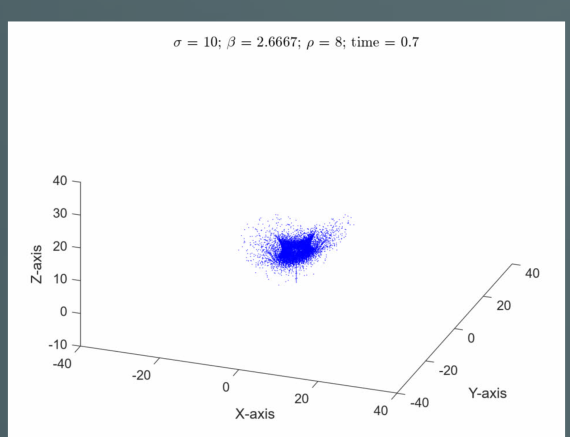


(4) σ = 10, β = 1, dan ρ = 24,7

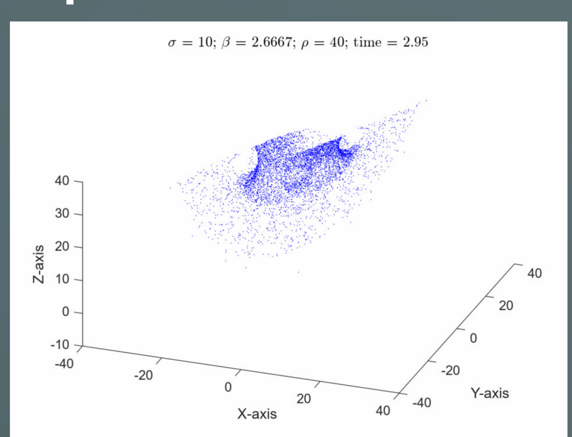


(5) σ = 10, β = 8, dan ρ = 24,7

VARIASI ρ



(6) σ = 10, β = 8/3, dan ρ = 8



(7) σ = 10, β = 8/3, dan ρ = 40

METODE PENYELESAIAN

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{d\tau} = \sigma(Y-X) \\ \dfrac{dY}{d\tau} = -Y + \rho X - XZ, & \rho = \dfrac{k^2 r}{\pi^4(1+k^2)^3} \\ \dfrac{dZ}{d\tau} = -\beta Z + XY, & \beta = \dfrac{4}{1+k^2} \end{cases}$$

where σ is the Prandtl number, ρ is the a rescalling of the Rayleigh number and β is an aspect ratio.

Diketahui bahwa persamaan lorenz merupakan persamaan diferensial non linear seperti di atas dengan beberapa variabel yang bermakna :
σ = Bilangan Prandtl ; β = Faktor Geometri ; ρ = Bilangan Rayleigh ;
x = aliran konveksi ; y = distribusi suhu horizontal ;
z = distribusi suhu vertikal.

Untuk mendapatkan solusi persamaan diferensial dapat digunakan beberapa metode dalam metode numerik. Namun untuk memudahkan penyelesaian akan digunakan metode runge kutta orde 4 dibanding metode lainnya karena memiliki ketelitian yang baik.

Dalam penerapannya, di setiap iterasi akan dicari nilai x,y,z yang bergantung terhadap waktu dengan metode runge kutta seperti di bawah ini. Lalu nilai x,y,z akan disimpan di suatu matriks lalu dipresentasikan menjadi suatu grafik yang dianimasikan.

1. $k_1 = h \cdot f(t_n, \mathbf{y}_n)$
2. $k_2 = h \cdot f(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{k_1}{2})$
3. $k_3 = h \cdot f(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{k_2}{2})$
4. $k_4 = h \cdot f(t_n + h, \mathbf{y}_n + k_3)$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan keterangan
t_n = waktu pada iterasi ke iterasi ke-n
y_n = vektor keadaan pada iterasi ke –n yang berisi $[x_n \; y_n \; z_n]^T$
h = langkah waktu
f(t,y) = fungsi yang menggambarkan sistem persamaan diferensial lorenz

HASIL DAN DISKUSI

Kondisi awal dari parameter ialah σ = 10, β=8/3, dan ρ = 24,7 atau kondisi pertama kali persamaan konveksi menunjukan perilaku non periodik yang dikenalkan oleh Saltzman (1962). Namun dalam beberapa literatur sering digunakan ρ = 28 untuk menunjukan kondisi super kritis dari attraktor lorenz. Namun untuk membandingkan perubahan sensitivitas pola dinamis attraktor lorenz digunakan beberapa **nilai parameter** sebagai berikut:

1. σ (Bilangan Prandtl) = 3 ; 10 ; 30
2. β (Faktor Geometri) = 1 ; 8/3 ; 8
3. ρ (Bilangan Rayleigh) = 8 ; 24.7 ; 40
4. Kondisi awal = -20 ≤ x, y, z ≤ 20 atau kubus berukuran 41x41
5. Durasi = 3
6. Timestep : 0.05

Apabila dilihat dari hasil di atas bahwa seiring bertambahnya nilai σ, β, dan ρ maka pola yang dihasilkan akan semakin menyebar atau akan semakin tidak teratur. Sedangkan apabila nilai σ, β, dan ρ diperkecil maka pola yang dihasilkan akan semakin rapat dan pola butterfly effect akan semakin terlihat. Singkatnya nilai σ, β, dan ρ akan mempengaruhi sensitivitas sistem attraktor lorentz

KESIMPULAN

Dengan demikian, **variasi dalam ketiga parameter ini dapat menyebabkan perubahan yang kompleks dalam evolusi atraktor Lorenz**. Terkadang, perubahan kecil dalam parameter-parameter ini dapat menyebabkan transisi ke bentuk atraktor yang berbeda atau bahkan menghasilkan kekacauan (chaos) dalam sistem. Bifurkasi dan transisi lainnya mungkin juga terjadi, bergantung pada nilai-nilai parameter yang digunakan.

REFERENSI
[1] Lorenz, E. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. Jurnal Ilmu Atmosfer. 20. 134.
[2] Record, N (2003). Introduction to Lorenz's System of Equations. DOI : 10.13140/RG.2.1.1623.1842

KELOMPOK 20:
10121012 - Khaznaya Shafaa Kaylasani
10121052 - Tesalonika Permatasari Hutapea
10121070 - Natashya Angeliqe Aurrelia
10121084 - Olyfia Pisthea Cahya Putri