Seminarios de Mecánica Clásica

Profesor
Ph.D student Miguel Angel Cajahuanca Ricaldi
USACH

Semestre Primavera 2024

Índice general

Capítulo 1

Sistemas de Coordenadas

1.1. Sistema de Coordenadas Cartesianas

Consideremos el movimiento de un punto material en el espacio tridimensional. La posición de un punto material en el espacio con respecto a un sistema de coordenadas cualquiera puede especificarse mediante su radio-vector.

El radio-vector de un punto material es un vector trazado desde el origen de coordenadas hasta dicho punto (véase $\vec{r}$ en la Fig. 1).

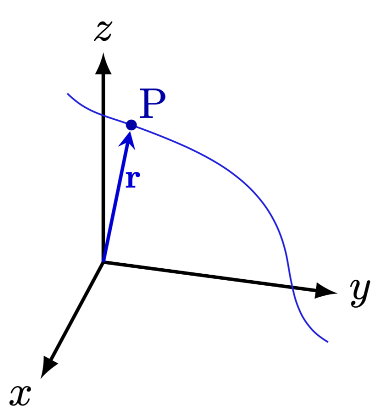

Figura 1.1: Punto material en el sistema de coordenadas cartesianas

Las coordenadas cartesianas del punto son las proyecciones del radio-vector del punto sobre los ejes del sistema de coordenadas cartesianas (x, y y z en la Fig. 1).

Introduzcamos los vectores unitarios $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$, alineados respectivamente con los ejes Ox, Oy y Oz del sistema de coordenadas cartesianas (véase Fig. 1). Entonces, el radio-vector del punto puede expresarse como:

$$\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z \tag{1.1}$$

La velocidad de la partícula, por definición, es:

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \tag{1.2}$$

A partir de la Fig. 2 y de la definición de velocidad (2), obtenemos:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}} \tag{1.3}$$

Cuando Δt tiende a cero, la dirección de $\Delta \vec{r}$ tiende a la dirección tangente a la trayectoria, y en el límite $\Delta \vec{r}$ coincide con la tangente, es decir, la velocidad del punto material está dirigida a lo largo de la tangente de la trayectoria.

Para obtener la expresión de la velocidad en coordenadas cartesianas, es necesario diferenciar la ecuación (1) con respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{e}_x \dot{x} + \vec{e}_y \dot{y} + \vec{e}_z \dot{z} \tag{1.4}$$

Para el cuadrado de la velocidad, obtenemos:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \tag{1.5}$$

De manera análoga, la aceleración se define como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \tag{1.6}$$

Por lo tanto, para la aceleración en coordenadas cartesianas obtenemos, a partir de (6) y (1):

$$\vec{a} = \vec{e}_x \ddot{x} + \vec{e}_y \ddot{y} + \vec{e}_z \ddot{z} \tag{1.7}$$

1.2. Sistema de coordenadas polares

Consideremos el movimiento de un punto material en un plano. La posición de un punto material en el plano puede especificarse mediante coordenadas cartesianas (x, y), o a través de la longitud del radio-vector del punto (ρ) y del ángulo que forma el radio-vector con el eje Ox (φ) (véase Fig. 3).

$$x = \rho \cos \varphi \tag{1.8}$$

$$y = \rho \sin \varphi \tag{1.9}$$

Diferenciando con respecto al tiempo la ecuación (10), obtenemos la expresión de la velocidad en coordenadas polares:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \tag{1.10}$$

Se introducen las siguientes definiciones:

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho \equiv \vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi, \\ \vec{e}_\varphi \equiv -\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi. \end{cases} \tag{1.11}$$

De esta manera, la expresión de la velocidad (11) toma la forma:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \tag{1.12}$$

Dado que los cuadrados de los vectores $\vec{e}_\rho$ y $\vec{e}_\varphi$ son iguales a la unidad y son mutuamente ortogonales, no es difícil calcular el cuadrado de la velocidad:

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 \tag{1.13}$$

Coordenadas cilíndricas

Consideremos el movimiento de un punto en el espacio tridimensional. Como coordenadas, tomamos la longitud de la proyección del vector de radio sobre el plano Oxy (ρ), el ángulo entre esta proyección y el eje Ox (φ) y la coordenada z (ver Fig. 8). Así, las coordenadas cilíndricas son: (ρ, φ, z). La relación entre las coordenadas cartesianas y cilíndricas es evidente:

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$z = z$$

También es claro cómo están orientados los vectores unitarios de la base local $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ en coordenadas cilíndricas. De la Fig. 8, es evidente que son mutuamente ortogonales.

En este sistema de coordenadas, el vector de posición puede escribirse como la suma del vector en coordenadas polares y el vector paralelo al eje Oz:

$$\vec{r} = \vec{e}_\rho \rho + \vec{e}_z z$$

De aquí, la velocidad se expresa como:

$$\vec{v} = \vec{e}_\rho \dot{\rho} + \vec{e}_\varphi \rho \dot{\varphi} + \vec{e}_z \dot{z}$$

y el cuadrado de la velocidad:

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$$

La aceleración toma la forma:

$$\vec{a} = \vec{e}_\rho(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) + \vec{e}_\varphi(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) + \vec{e}_z \ddot{z}$$

Coordenadas esféricas

Como coordenadas esféricas (ver Fig. 9) se utilizan el módulo del vector de radio (r), el ángulo entre el vector de radio y el eje Oz (θ), y el ángulo φ, como en coordenadas cilíndricas. La relación entre las coordenadas esféricas (r, θ, φ) y las cartesianas es evidente:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

Las direcciones de los vectores de la base local del sistema esférico de coordenadas son evidentes: $\vec{e}_r$ es paralelo al vector de radio; $\vec{e}_\theta$ es tangente al meridiano de la esfera de radio r con centro en O; $\vec{e}_\varphi$ es tangente a la paralela de la esfera (ver Fig. 9). De la Fig. 9 es claro que estos vectores son mutuamente ortogonales.

El vector de radio en el sistema esférico de coordenadas toma la forma:

$$\vec{r} = \vec{e}_r r$$

Aplicando la regla de la derivada de funciones compuestas y considerando que $\vec{r}$ depende de (r, θ, φ), encontramos la velocidad:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(r,\theta,\varphi)}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\dot{\varphi}$$

Utilizando las ecuaciones previas, obtenemos:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \vec{e}_r$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r\vec{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = r\sin\theta \vec{e}_\varphi$$

Sustituyendo en la ecuación de velocidad:

$$\vec{v} = \vec{e}_r\dot{r} + \vec{e}_\theta r\dot{\theta} + \vec{e}_\varphi r\sin\theta\dot{\varphi}$$

Dado que los vectores de la base son unitarios y mutuamente ortogonales, el cuadrado de la velocidad es:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2$$

Coordenadas parabólicas

(ξ, η, φ) son las coordenadas parabólicas. Por definición, están relacionadas con las coordenadas cilíndricas de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{\xi\eta}, \\ z = \frac{\xi-\eta}{2}, \\ \varphi = \varphi. \end{cases}$$

Ejemplo 3

Un cosmonauta aterriza en un planeta de radio R y camina sobre él con un ángulo α (constante) con respecto al meridiano (ver Fig. 10). Determinemos su trayectoria. Resolveremos en coordenadas esféricas (r, θ, φ). Entonces,

$$r = R = \text{const}$$

La trayectoria representa la dependencia del ángulo θ con respecto a φ. Aplicando la ecuación de velocidad obtenida previamente:

$$\vec{v} = \vec{e}_\theta R\dot{\theta} + \vec{e}_\varphi R\sin\theta\dot{\varphi}$$

Dado que la velocidad del cosmonauta está orientada con un ángulo α con respecto al meridiano, se cumple que:

$$\frac{v_\varphi}{v_\theta} = -\tan\alpha$$

Sustituyendo en la ecuación de velocidad:

$$-\tan\alpha = \frac{\sin\theta}{\frac{d\theta}{d\varphi}}$$

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$\frac{d\theta}{\sin\theta} = -\operatorname{cotg}\alpha\, d\varphi$$

Integrando:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin\theta} = -\operatorname{cotg}\alpha \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi$$

Evaluando el integral y reescribiendo el resultado:

$$\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta_0}{1+\cos\theta_0}\exp(2\operatorname{cotg}\alpha(\varphi-\varphi_0))$$

La ecuación anterior representa la ley del movimiento en cuadraturas.