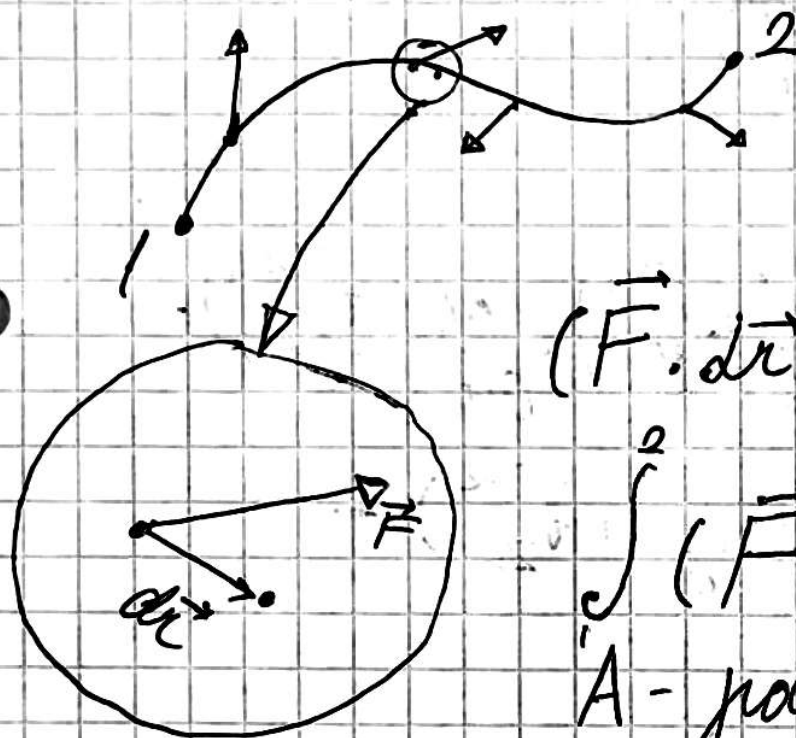


PS тупее - сурее, возмел.

24/2/2024



⑥ Работа и энергия.



$(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = dA$; элементная работа

$$\int_1^2 (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \int_1^2 dA = A$$

A - работа.

$$(\vec{F} \cdot d\vec{r}) \longleftrightarrow (\vec{F} \cdot \vec{v}) dt$$

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt$$

$$\int_1^2 (\vec{F} \cdot \vec{v}) dt = \int_1^2 dA = A$$

$$[A] = \text{Дж}$$

$$(\vec{F} \cdot \vec{v}) = P \text{ мощность}$$

$$[P] = \text{Ватт}$$

Дуназия

$$\vec{F} \uparrow \vec{v} \Rightarrow A < 0$$

$$\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow A = 0$$

$$(\vec{F} \cdot \vec{v}) = (m \vec{a} \cdot \vec{v}) = m \left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt} \right) \Leftrightarrow$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \vec{v}(v_x, v_y, v_z)$$

$$\vec{a} \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v_x^2}{2} \right) = \frac{2v_x \cdot v_x'}{2}$$

$$\Leftrightarrow m \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{v_x^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{v_y^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{v_z^2}{2} \right) \right) =$$

$$= \frac{m}{2} \left(\frac{d}{dt} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right) =$$

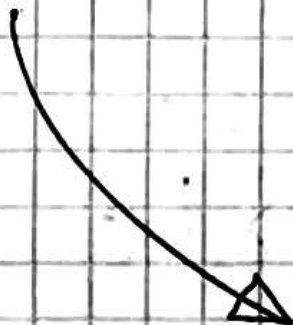
$$= \frac{m}{2} \left(\frac{d}{dt} (v^2) \right)$$

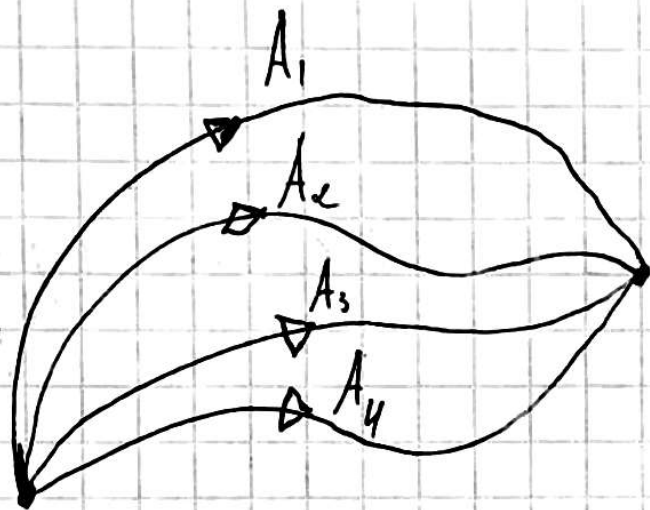
$$A = \int_1^2 \frac{m}{2} \left(\frac{d}{dt} (v^2) \right) dt = \frac{m}{2} \cdot v^2 \Big|_1^2 = \left(\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \right)$$

$$\boxed{\frac{mv^2}{2} - \text{кинет. энергия}}$$

$$\boxed{E_k = \frac{mv^2}{2}}$$

⑦ Потенциальная энергия.



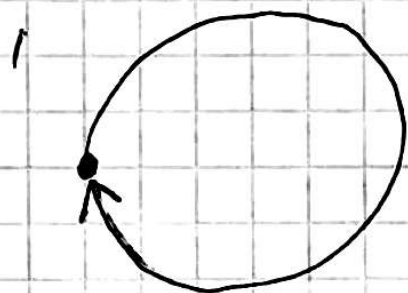


$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \dots$$

потенциальная
сила



$$A = 0 = \oint \vec{F} d\vec{r}$$

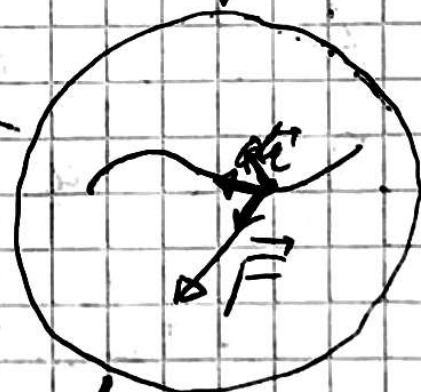
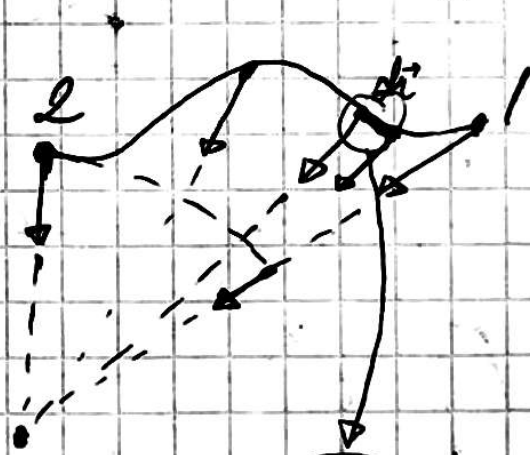


гравитационные силы \rightarrow потенциальная



гравитация

$$\vec{F}(r)$$

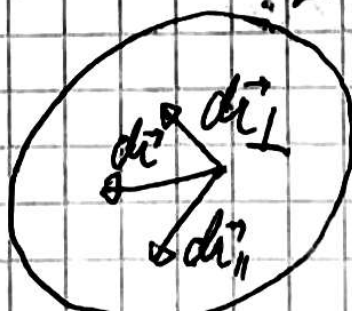


$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) \quad \text{---}$$

$$d\vec{r} = d\vec{r}_\perp + d\vec{r}_\parallel$$

$$\Rightarrow (\vec{F} \cdot d\vec{r}_\perp) + (\vec{F} \cdot d\vec{r}_\parallel) =$$

$$= F \cdot dr_\parallel$$

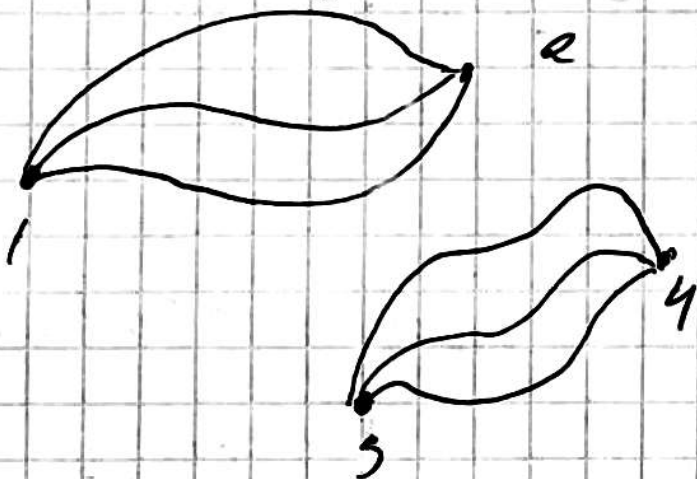


$$A = \int F(x) dx$$

A не зависит от формы пути.

(см. график)

\vec{F} - потенциальная.



E_n - потенциальная энергия

$E_n(\vec{r})$

$$A = E_{n_1} - E_{n_2}$$

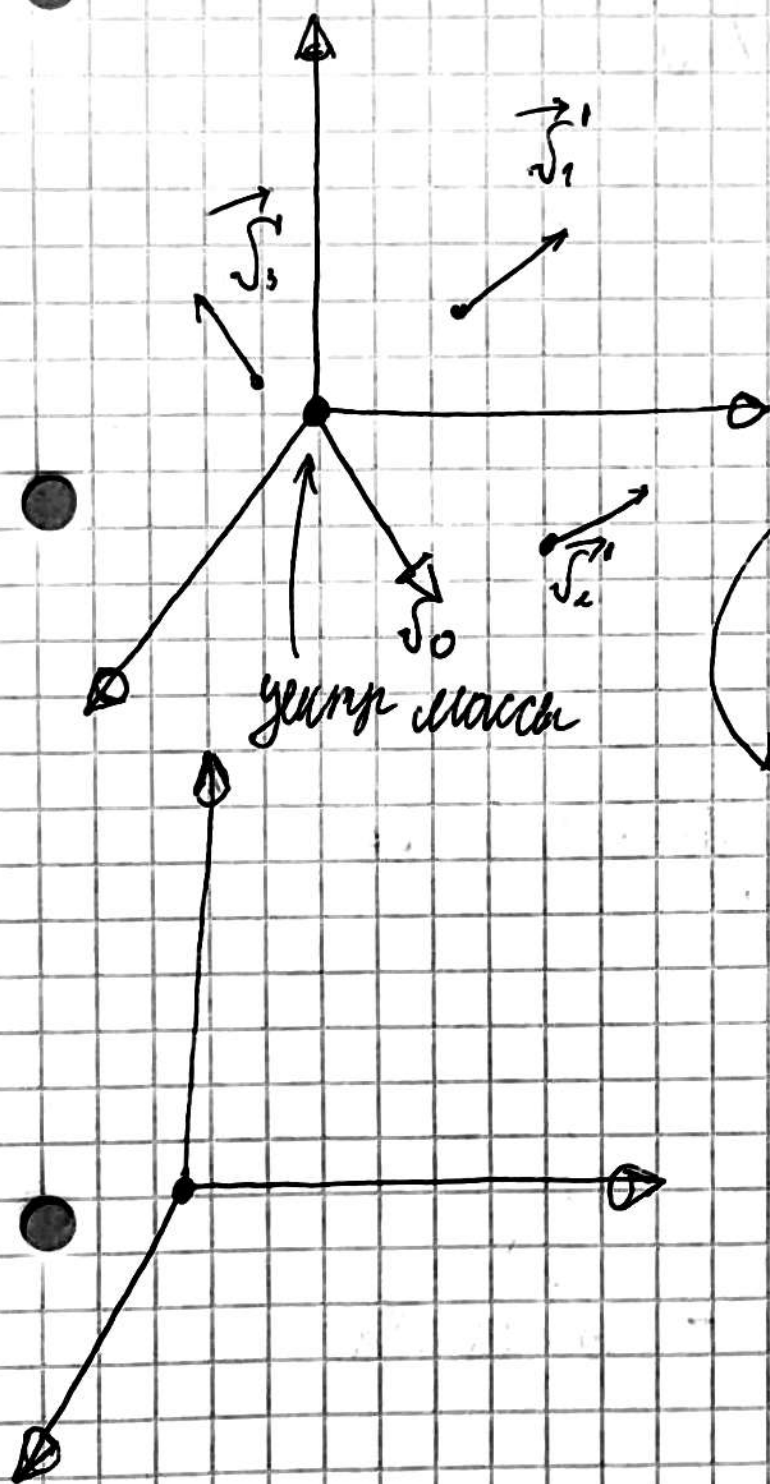
$$A = E_{k_2} - E_{k_1}$$

Закон сохранения $E_n + \text{const}$

$$E_{n_1} + E_{k_1} = E_{k_2} + E_{n_2} \quad \text{З.С.Э}$$

$$E_n = - \int F(x) dx$$

8) Теорема Кетмана.



$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_0$$

$$E_k \neq E_{k_1} + E_{k_2} + \dots + E_{k_N}$$

$$E_{k_1} = \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 (\vec{v}_1 + \vec{v}_0)^2}{2}$$

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = a^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + b^2$$

$$\frac{m_1}{2} (\vec{v}_1^2 + 2(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_0) + \vec{v}_0^2) =$$

$$E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots +$$

$$+ \frac{m_n v_n^2}{2} + \frac{m_1 v_0^2}{2} + \frac{m_2 v_0^2}{2} + \dots +$$

$$+ \frac{m_n v_0^2}{2} + m_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_0) +$$

$$+ m_2 (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_0) + \dots +$$

$$+ m_n (\vec{v}_n \cdot \vec{v}_0)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots + \frac{m_n v_n^2}{2} = E_k$$

$$\frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_n) v_0^2}{2} = \frac{\mathcal{M} v_0^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
 & (m_1 \vec{v}_1' \cdot \vec{v}_0) + (m_2 \vec{v}_2' \cdot \vec{v}_0) + \dots + (m_n \vec{v}_n' \cdot \vec{v}_0) = \\
 & = (\vec{p}_1' \cdot \vec{v}_0) + (\vec{p}_2' \cdot \vec{v}_0) + \dots + (\vec{p}_n' \cdot \vec{v}_0) = \\
 & = ((\vec{p}_1' + \vec{p}_2' + \dots + \vec{p}_n') \cdot \vec{v}_0)
 \end{aligned}$$

$$\vec{P}' = M \vec{v}_{y.u.} \quad \vec{P}' = 0$$

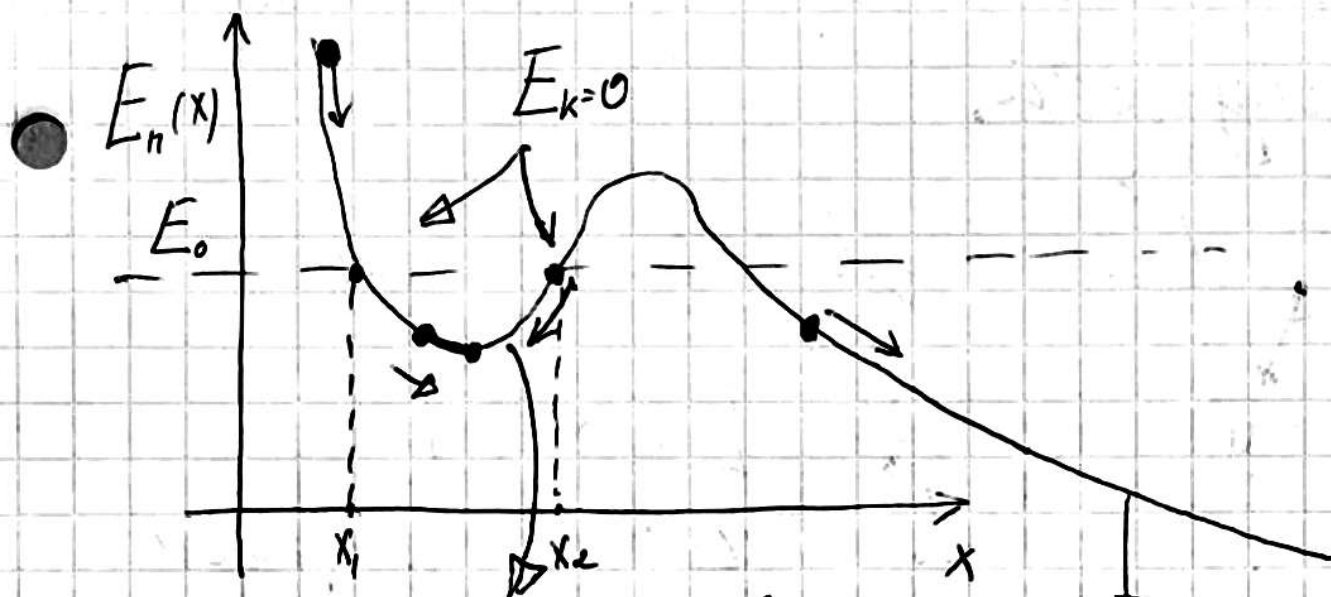
$$E_k = E_k' + \frac{M v_0^2}{2}$$

③ Симметричное движение.

$$F(x) \Rightarrow E_n(x) = - \int \mathcal{L}(x) dx$$

$$E_k = \frac{m v^2}{2}$$

$$E_n + E_k = \text{const} \cdot E_0$$



сривитное движение
 $x_1 \leq x \leq x_2$

лирическое
 (неограниченное)

$$E_n(x) + \frac{mv^2}{2} = E_0$$

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \frac{mv^2}{2} = E_0 - E_n(x) =$$

$$v^2 = \frac{2}{m} (E_0 - E_n(x))$$

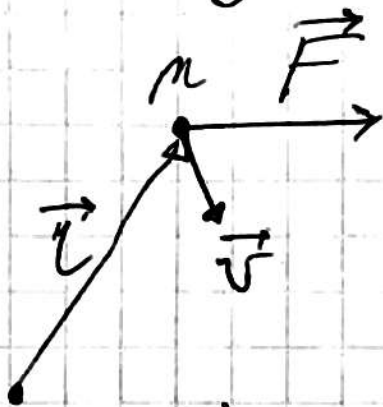
$$v = \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - E_n(x))} = \frac{dx}{dt}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - E_n(x))}} = \int dt$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - E_n(x))}} = t}$$

$$t(x) \rightarrow x(t)$$

⑩ Момент сил и момент импульса.



\vec{M} - момент сил

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$$

\vec{L} - момент импульса

$$\vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{v}] = [\vec{r} \times \vec{p}] \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right] \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt} [\vec{a} \times \vec{b}] = \left[\frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} \right] + \left[\vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right] + \left[\vec{r} \times \vec{F} \right] =$$

\vec{M}

$$= \underbrace{[\vec{v} \times m\vec{v}]}_0 + \underbrace{[\vec{r} \times \vec{F}]}_{\vec{M}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}} - \text{уравнение моментов.}$$

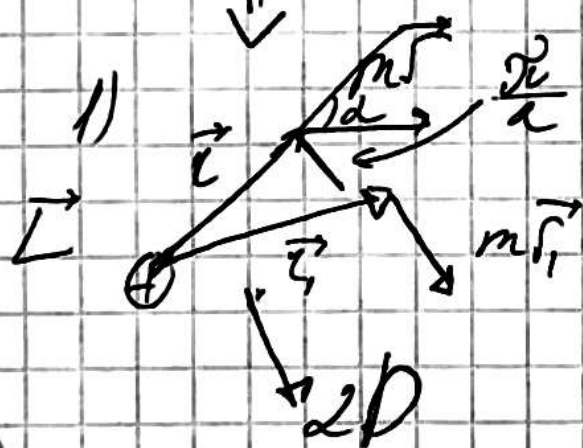
\vec{F} - результирующая.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} \uparrow \vec{F} \\ \vec{v} \downarrow \vec{F} \end{array} \right| \Rightarrow [\vec{v} \times \vec{F}] = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{L} = \text{const}$$



$$|\vec{L}| = r \cdot m v \cdot \sin \alpha = r \cdot m v \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$$

$$\vec{v}_\perp \perp \vec{r}, \vec{v}_\parallel \parallel \vec{r}$$

$$|\vec{L}| = r \cdot m v_\perp$$

2-й закон Кеплера.