Матрица перехода

2/12/24

(0) Пусть V - n-мерное вект. пр-во.

$e = (e_1, e_2 \dots, e_n)$

$e' = (e_1', e_2', \dots e_n')$ - базисы V

$$\begin{cases} e_1' = t_{11} e_1 + t_{21} e_2 + \dots + t_{n1} e_n \\ e_2' = t_{12} e_1 + t_{22} e_2 + \dots + t_{n2} e_n \\ e_n' = t_{1n} e_1 + t_{2n} e_2 + \dots + t_{nn} e_n \end{cases} \quad (1)$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & & t_{nn} \end{pmatrix}$$ матрица перехода от e к e'

$e \xrightarrow{T} e'$

св-ва М. перехода

$\boxed{e' = e \cdot T}$

1° $|T| \neq 0$ (не вырожденна)

Док-во Если бы $|T| = 0$, то столбцы T были бы линейно зависимы, но $e' = (e_1', \dots, e_n')$ - базис. противоречие.

2° Если $e \xrightarrow{T} e'$, $e' \xrightarrow{S} e$, то $S = T^{-1}$

Лемма. Если $e = (e_1, \dots e_n)$ - базис, $e \cdot A = e \cdot B$, то $A = B$

Док-во: $e \cdot A = e \cdot B \Rightarrow a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \dots + a_{n1} e_n =$

$= b_{11} e_1 + b_{21} e_2 + \dots + b_{n1} e_n$

$\Rightarrow a_{11} = b_{11} \dots a_{n1} = b_{n1}$ (т.к коор-ы вектора в базисе определены)

$A = B$

Док-во 2°

$e' = e \cdot T$, $e = e' \cdot S$

$e' = e \cdot T = (e' \cdot S) T = e'(S \cdot T)$

$e = e' \cdot S = (e \cdot T) S = e(T \cdot S) \Rightarrow$

$S \cdot T = E$, $T \cdot S = E \Rightarrow S = T^{-1}$

Закон преобразования координат вектора при замене базиса.

Пусть $e = (e_1, \dots e_n)$, $e' = (e_1', \dots e_n')$ — два базиса V, $\dim V = n$; $e \xrightarrow{T} e'$

$e' = e \cdot T$, $\forall x \in V \Rightarrow$

$X = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x_1' e_1' + \dots + x_n' e_n'$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ (! Тензор)

$x = e \cdot X = e' \cdot X' = (e \cdot T) X' = e (T X')$

лемма $\Rightarrow$ $\boxed{X = T X'} \Rightarrow X' = T^{-1} \cdot X$

(контрвариантный закон)

② Операции над подпространствами

Опр: подмнож-во L в вект пр-ве V наз-а вект-ным подпр-вом, если

1) $x + y \in L \quad \forall x, y \in L$

2) $\alpha x \in L \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in L$

I Пересечение

$L_1, L_2 \subset V$ - вект. подпр

$L_1 \cap L_2 = \{ x \in V \mid x \in L_1, x \in L_2 \}$

Предложение

$L_1 \cap L_2$ - вект. подпр

Док-во $\forall x, y \in L_1 \cap L_2$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in L_1, x \in L_2, y \in L_1, y \in L_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y \in L_1, \; x + y \in L_2$

$\alpha x \in L_1, \; \alpha x \in L_2 \Rightarrow x + y \in L_1 \cap L_2,$

$\alpha x \in L_1 \cap L_2$

Св-ва:

1° $L_1 \cap L_2 = L_2 \cap L_1$

2° $= L_1 \cap (L_2 \cap L_3) = (L_1 \cap L_2) \cap L_3$

Замечание: $\cap$ $\forall$ числа вект подпр-в является вект подпр-вом.

$\boxed{2}$ Сумма: $L_1 + L_2 = \left\{ x+y \;\middle|\; \begin{matrix} x \in L_1 \\ y \in L_2 \end{matrix} \right\}$

Утвержд: $L_1 + L_2$ – вект подпр-во в V

Док-во:

$\forall z_1 = x_1 + y_1, \; z_2 = x_2 + y_2 \in L_1 + L_2,$

$x_1 x_2 \in L_1; \; y_1 y_2 \in L_2, \quad \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$

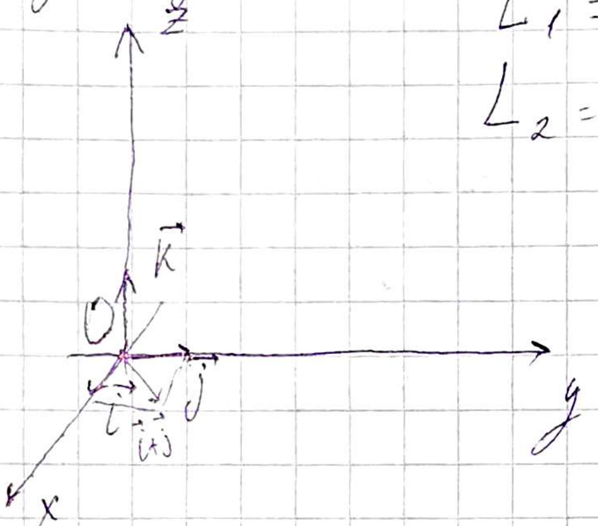
$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\in L_1} + \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\in L_2} \in$

$\in L_1 + L_2$

$\alpha z_1 = \alpha(x_1 + y_1) = \underbrace{\alpha x_1}_{\in L_1} + \underbrace{\alpha y_1}_{L_2} \in L_1 + L_2$

Замечание: объединение вект-подпр-в вообще говоря не является вект. подпр-вом.

Пример:



$L_1 = \langle \vec{i}, \vec{k} \rangle$ - пл. Oxz

$L_2 = \langle \vec{j}; \vec{k} \rangle$ - пл Oyz

$L_1 \cap L_2 = \langle \vec{k} \rangle - Oz$

$L_1 \cup L_2$ — не вект. подпр-во.

$\vec{i} \in L_1$, $\vec{j} \in L_2$

$\vec{i} + \vec{j} \notin L_1 \cup L_2$

$L_1 + L_2 = V$

Предлож.: $L_1 + L_2$

- наименьшее вект. подпр-во, содержащее L_1 и L_2

Д-во: Пусть $\exists W \in V : L_1 \subset W$, $L_2 \subset W$

$\forall x \in L_1$, $\forall y \in L_2$

W - вект. подпр.

$x, y \in W \Rightarrow x + y \in W \Rightarrow L_1 + L_2 \subset W$

Предложение: $L_1 + L_2 = \langle L_1 \cup L_2 \rangle$

Св-ва:

1° $L_1 + L_2 = L_2 + L_1$

2° $L_1 + (L_2 + L_3) = (L_1 + L_2) + L_3$

3° Если $L_1 \subset L_2$, то $L_1 + L_2 = L_2$

Если $L_1 + L_2 = L_2$, то $L_1 \subset L_2$

4° $L_1 + L_1 = L_1$

Теорема $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$

Док-во $\dim L_1 = n$, $\dim L_2 = m$, $\dim L_1 \cap L_2 = k$

Пусть $e = (e_1 \dots e_k)$ — базис $L_1 \cap L_2$

Дополним e до базисов в L_1 и L_2: $(e_1 \dots e_k, f_1 \dots f_{n-k})$ — базис L_1

$(e_1 \dots e_k, g_1 \dots g_{m-k})$ — базис L_2

Покажем, что $(e_1 \dots e_k, f_1 \dots f_{n-k}, g_1 \dots g_{m-k})$ — базис $L_1 + L_2$

Рассмотрим лин. комб.

$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_k + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_{n-k} f_{n-k} + \gamma_1 g_1 + \dots +$
$+ \gamma_{m-n} g_{m-k} = 0$

Предположим, что $\exists \gamma_i \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \beta_1 f_1 + \dots \beta_{n-k} f_{n-k} =$

(*)

$= -\gamma_1 g_1 - \dots - \gamma_{m-k} g_{m-k} = x$

$x \in L_1 \cap L_2$

$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k$ (**)

вычтем (**) из (*)

$(\alpha_1 - \lambda_1) e_1 + \dots + (\alpha_k - \lambda_k) e_k + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_{n-k}$

$f_{n-k} = 0$

Так как $(e_1, \dots e_k, f_1 \dots f_{n-k})$ - базис L_1

то $\alpha_1 = \lambda_1, \dots \alpha_n = \lambda_k, \beta_1 = 0 \dots \beta_{n-k} = 0 \Rightarrow$

$x = \alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_k = -\gamma_1 g_1 - \dots - \gamma_{m-k} g_{m-k}$

$x \in L_1 \cap L_2 \Rightarrow$ В силу единств

разложения век-ра x по базису $\Rightarrow$

$x = 0, \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0, \gamma_1 = \dots = \gamma_{m-k} = 0 \Rightarrow$

система $(e_1, \dots e_k, f_1 \dots f_{n-k}, g_1 \dots g_{n-k})$

линейно независима.

$\forall z \in L_1 + L_2 \Rightarrow z = x + y, \ x \in L_1, \ y \in L_2$

$x = x_1 e_1 + \dots + x_k e_k + x_{k+1} f_1 + \dots + x_n f_{n-k}$

$+$

$y = y_1 e_1 + \dots + y_k e_k + y_{k+1} g_1 + \dots + y_m g_{m-k}$

$$z = x + y = (x_1 + y_1)e_1 + \ldots + (x_k + y_k)e_k + x_{k+1}f_1 + \ldots$$

$\ldots y_m y_{m-k} \Rightarrow$ система максимально $\Rightarrow$ базис

Таким образом $(e_1 \ldots e_k, f_1 \ldots f_{n-k}, g_1 \ldots g_{m-k})$ - базис $L_1 + L_2$ $\dim L_1 + L_2 = k + (n-k) + (m-k) = n + m - k = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$

③ Прямая сумма подпр-в

<u>Опр</u> Сумма $L_1 + L_2$ наз-ся прямой, если $\forall z \in L_1 + L_2 \ \exists! x \in L_1, y \in L_2$:

$z = x + y$

<u>Обозн</u>: $L_1 \oplus L_2$

<u>Пример</u>: $L_1 = \langle \vec{i}, \vec{k} \rangle$; $L_2 = \langle \vec{j}, \vec{k} \rangle$

$L_1 + L_2$ не явл прямой суммой.

$$\forall (1,1,1) = \underset{\substack{\vec{i}+\vec{k} \\ \in L_1}}{(1,0,1)} + \underset{\substack{\vec{j} \\ \in L_2}}{(0,1,0)}$$

$$(1,1,1) = \underset{\vec{i} \in L_1}{(1,0,0)} + \underset{\vec{j}+\vec{k} \in L_2}{(0,1,1)}$$

<u>Предложение</u> (Критерий прямой суммы)

$L_1 + L_2$ - прямая $\Leftrightarrow L_1 \cap L_2 = \{0\}$

<u>Д-во</u> ($\Rightarrow$) Пусть $z \in L_1 \cap L_2 \Rightarrow$

$$z \in L_1,\ z \in L_2 \Rightarrow z = \underset{\in L_1}{z} + \underset{\in L_2}{0} = \underset{\in L_1}{0} + \underset{\in L_2}{z}$$

Так как сумма прямая, то $z=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow L_1 \cap L_2 = \{0\}$

$\Leftarrow$ Пусть $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, пусть $z = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, $x_1, x_2 \in L_1$; $y_1, y_2 \in L_2$

$\underbrace{x_1 - x_2}_{\in L_1} = \underbrace{y_2 - y_1}_{\in L_2} \Rightarrow x_1 = x_2,\ y_2 = y_1 \Rightarrow$

Сумма $L_1 + L_2$ прямая.

Следствие: $\dim(L_1 \oplus L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$