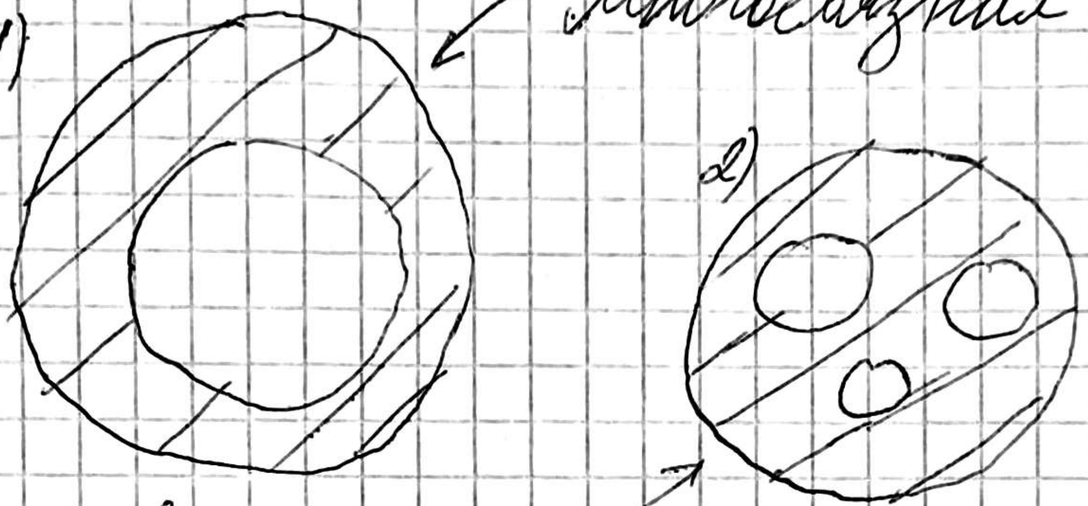
Множества. 6/3/24

Пример:

Многосвязная обл.

1)

2)



4-х связная

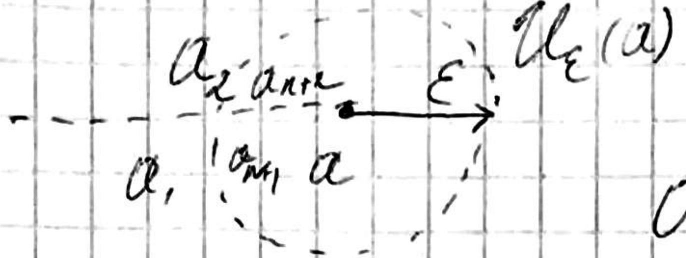
Последовательности

Последовательностью в $\mathbb{R}^n$ наз-ся функция натурального аргумента со значениями в $\mathbb{R}^n$

$$a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\{a_k = (a_k^1, a_k^2, \dots a_k^n)\}$$

Опр.: пределом последовательности $\{a_k\}$ наз-ся такое $a \in \mathbb{R}^n$, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall k > N \Rightarrow a_k \in U_\varepsilon(a)$



Обозн: $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a$,

$$a = \lim_{k\to\infty} a_k$$

Если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$, то посл $\{a_k\}$ наз-ся сходящейся, в противном случае — расходящейся

Зам. Все утверждения для числовых посл. верны и для посл в $\mathbb{R}^n$

Теорема Пусть $a=(a^1 \dots a^n)\in\mathbb{R}^n$
$(a_k^1 \dots a_k^n)\in\mathbb{R}^n$, $k\in\mathbb{N}$

$$\exists \lim_{k\to\infty} a_k = a \iff \exists \lim_{k\to\infty} a_k^i = a^i \quad \forall i=1,\dots n$$

③ Понятие ф-ции нескольких переменных.

Опр Пусть $D\subset\mathbb{R}^n$, Если $\forall M(x_1 \dots x_n)\in D$ по некоторому закону f поставлено в соответствие (·) $u=f(M)\in\mathbb{R}^m$, то говорят, что на D задана функция f от n переменных $x_1 \dots x_n$.

$f: D \to \mathbb{R}^m$, $D \in \mathbb{R}^n$

Мн-во D наз-ся об. определения, а мн-во $E = \{ u \in \mathbb{R}^m \mid u = f(M) \; \forall M \in D \}$ - об. значений ф-ции.

Если $m = 1$, то ф-ция f наз-ся скалярной, а если $m > 1$, то - вектор ф-ции.

В случае $m > 1$ ф-ция $u = f(M)$ может быть записана в след. виде.

$f(M) = (f_1(M), f_2(M) \dots f_m(M))$, где $M \in D \subset \mathbb{R}^n$; $f_i: D \to \mathbb{R}$ - скалярна ф

Функции $f_i(M)$ наз-ся координатными ф-циями.

Опр: графиком ф-ции $u = f(M)$ наз-ся множество
$\Gamma = \{ (M, u) = (x_1, \dots x_n, u) \in R^n \times R^m \mid u = f(M),\ M \in D \}$

Для $z = f(x, y)$ график $\Gamma = \{ (x, y, z) \in R^2 \times R^1 \mid z = f(x, y) \}$
график Γ явл-ся поверхностью в R^3

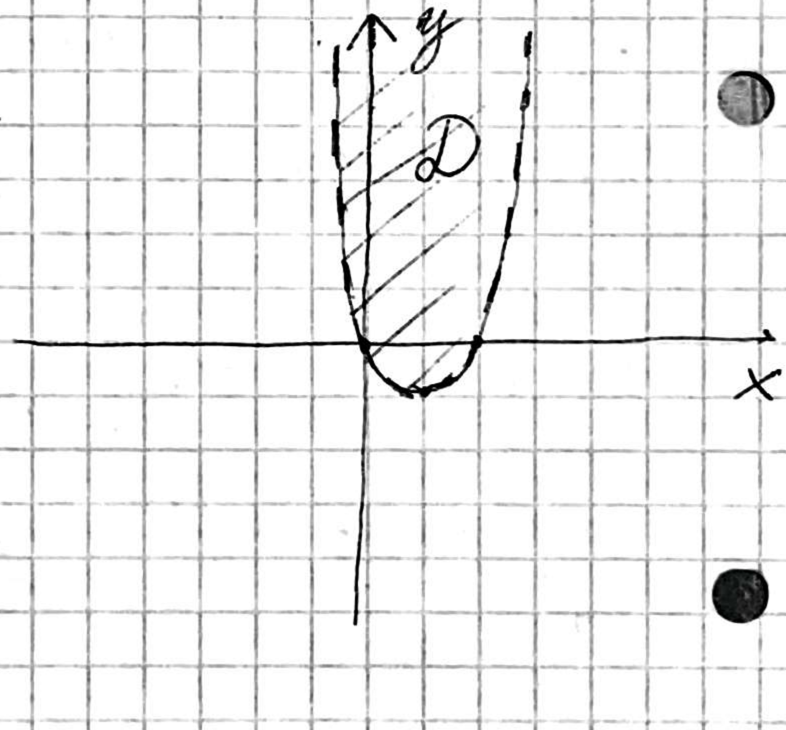
Пример: найти обл. опр D ф-ции а) $z = \ln(y - x^2 + 2x)$

$D = \{ (x, y) \mid y - x^2 + 2x > 0 \}$

$y > x^2 - 2x$

$y = x^2 - 2a$

$y = (x - 1)^2 + 1$



в) $z = \arcsin \frac{y}{x}$

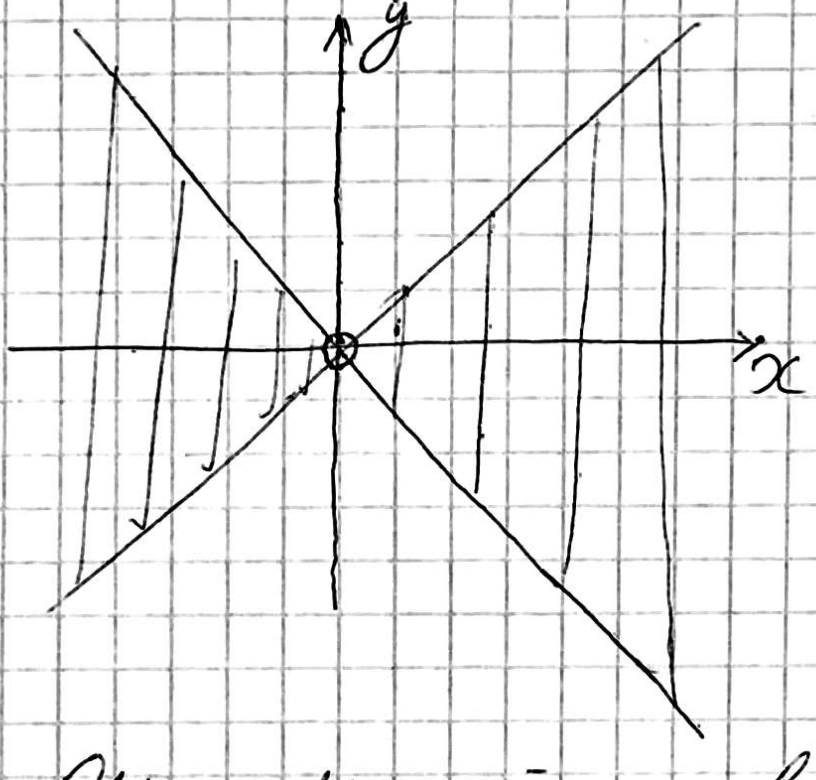
$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le \frac{y}{x} \le 1, x \ne 0 \}$

① $x > 0$ $\quad -x \le y \le x$

$$\begin{cases} y \le x \\ y \ge -x \end{cases}$$

② $x < 0$ $\quad -x \ge y \ge x$

$$\begin{cases} y \ge x \\ y \le -x \end{cases}$$



Опр: Линией уровня ф-ции $z = f(x,y)$ наз-ся линия, заданная уравнением $f(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Поверхности уровня функции $u = f(x, y, z)$ наз-ся поверхность, заданная уравн. $f(x, y, z) = C$, $C \in \mathbb{R}$

Пример: найти линии уровня функции $z = x^2 + y^2 - 2y$.

$$L_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2y = C; C = const\}$$

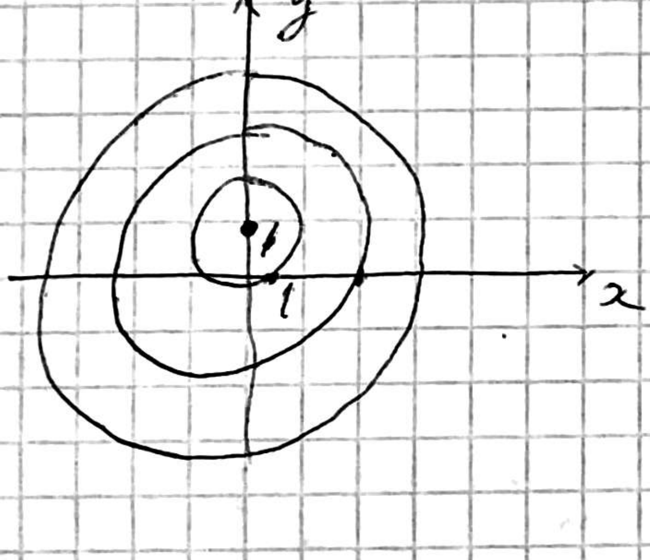
$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = C + 1$$

$$x^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{C+1})^2$$

$$C + 1 \geq 0 \Rightarrow C \geq -1$$

$C = -1$ $\quad L_{-1} = \{(0, 1)\}$

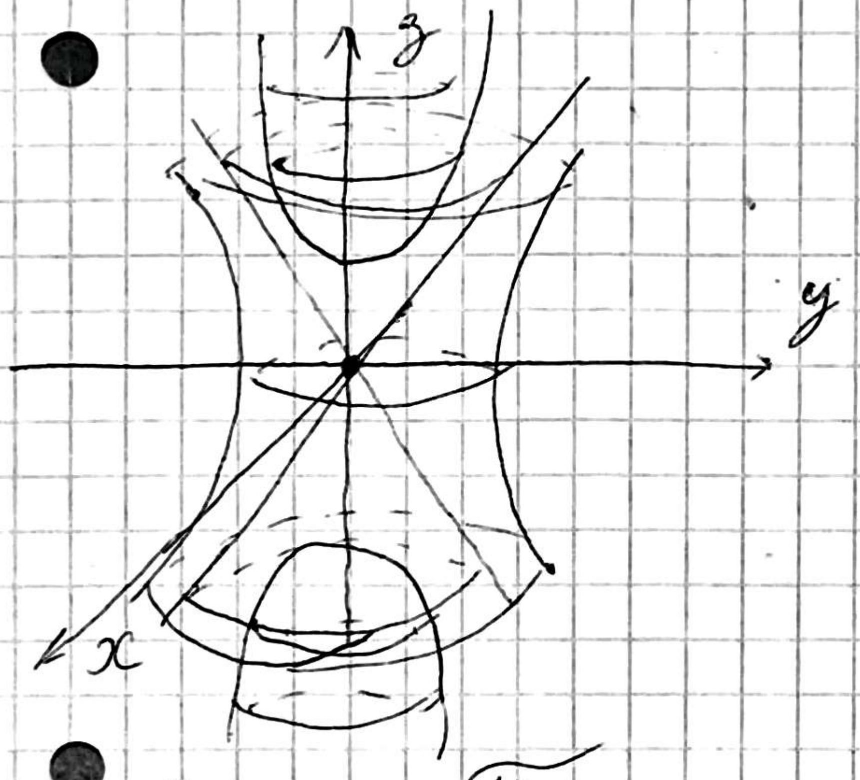
$C > -1$ $\quad L_C$ - окр-ть рад $\sqrt{C+1}$



Пример: найти поверхности уровня $z = x^2 + y^2 - z^2$

$\Pi_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = c\}$

$\Pi_0 = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = z^2\}$



$\Pi_c = \{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{c} - \frac{z^2}{c} = 1\}$ $c > 0$

Π_c — двуполостный гиперболоид.

④ Предел функции.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — обл. опр. ф-ции $z = f(x,y)$, $A \subset D$, $M_0 \in A$

(M_0 — предельная (·) для A)

Опр (по Гейне) Число $a \in \mathbb{R}$ наз-а пределом ф-ции $z = f(x, y)$ по множеству A в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для $\forall$ последовательности точек $\{M_n(x_n, y_n)\} \subset A$: $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} M_0$

$$\Rightarrow z_n = f(M_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

Опр (по Коши). Число $a \in \mathbb{R}$ наз-а пределом ф-ции $z = f(x, y)$ по мн-ву A в $(\cdot)$ $M_0(x_0, y_0)$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon, M_0) > 0$: $\forall M \in A$:

$$0 < \rho(M, M_0) < \delta \Rightarrow |f(M) - a| < \varepsilon$$

Обозн. $a = \lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ A}} f(M) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \xrightarrow[A]{} y_0}} f(x, y)$

Если $A = D$, то предел по мн-ву A наз-а просто пределом ф-ции.

Замечание Для $y = f(x)$

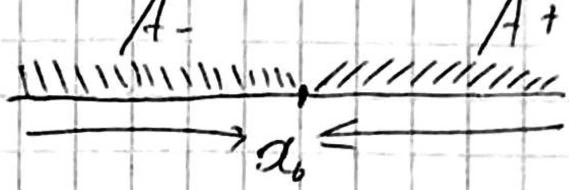
$$a_+ = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$a_- = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ A-}} f(x)$$

$A+ = (x_0, x_0 + \delta)$

$A- = (x_0 - \delta, x_0)$

$\delta > 0$



Замечания: Если $\exists \lim\limits_{M \to M_0} f(M) = a$, то

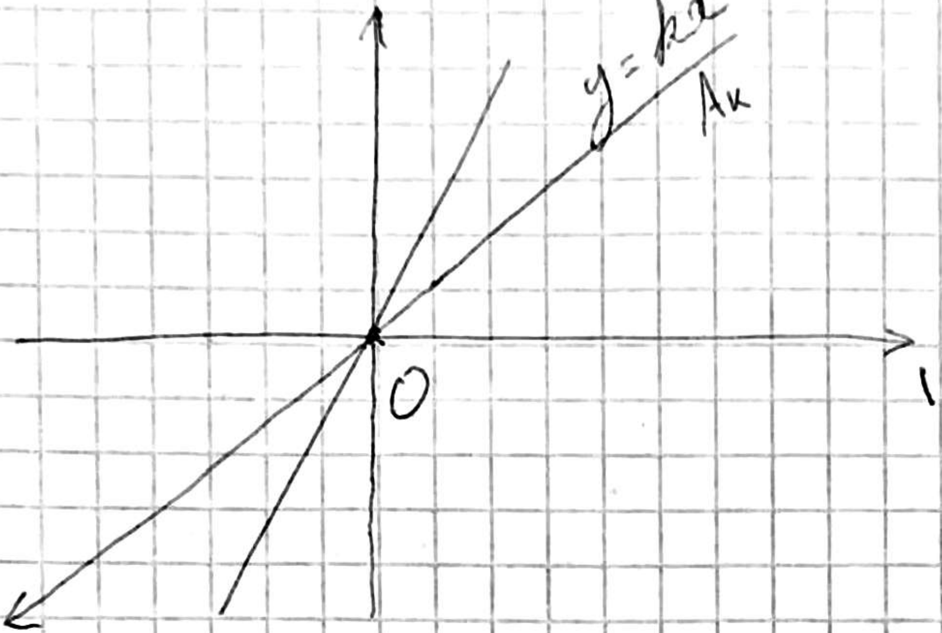
$$\exists \lim_{\substack{M \to M_0 \\ A}} f(M) = a$$

$\forall A \subset D$

2) Если $\exists A_1, A_2 \in D$: $\lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ A_1}} f(M) \neq \lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ A_2}} f(M)$, то $\nexists \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$

Пример: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$

Покажем, что $\nexists \lim\limits_{M \to 0} f(M)$



$A_k = \{(x,y) \mid y = kx\}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ A_k}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\bigg|_{y=kx} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-k^2}{1+k^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}$$

$$\lim_{\substack{M\to 0\\ A_1}} f(M) = 0 \neq \lim_{\substack{M\to 0\\ A_2}} f(M) = -\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{M\to 0} f(M)$$