22/2/24

Комбинаторика и теория графов

Комбинаторика - обл. мат. в которой изучаются вопросы о том, сколько разл. комбинаций, подчинённых тем или иным условиям, можно составить.

$\exists$ 2 правила.

1) п. Суммы
2) п. Произведения

$A \to m$

$B \to n$ $\quad \overset{+}{}$ либо $\quad$! понять условие задачи.

Если есть k совпадений, то при использовании 1) правила $\underline{m+n-k}$

В случае общего положения: выводи взаимоисключающие.

(AB) - пары: m^n

Перестановки и сочетания

$\underbrace{\hspace{4cm}}_{n}$

① R-перест из n эл. наз-ся упорядоченная выборка R из этих элементов

② И R-сочет из n эл. — выборка R эл из n без учёта порядка.

123
132
312
321
231
213

3!

$n = K_1 + K_2 + \ldots + K_r$ r-групп

③ Элементы возобновляются из какого-то запаса → из всех ∞

• При решении комб. зд важна специфика элементов.

Перестановки при $\forall$ специфика-циях элементов.

Пусть $\exists\, n$ элем. различ.

$$P_n^r = \overbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}^{*}; \quad r \le n$$

$\boxed{P_n = P_n^n = n!}$

$\boxed{P_n^0 = 1}$ ← ничего не взять можно 1 способом.

Убывающий r!

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)\frac{(n-r)\dots 2\cdot 1}{(n-r)\dots 2\cdot 1} = \frac{P_r}{P_{n-r}} =$$

$$\boxed{= \frac{n!}{(n-r)!}}$$

! Главная задача комбинаторики — минимизировать перебор.

$\underbrace{(\text{устойчив})\ \overset{3}{\frown}}_{1000\ \text{элем}}$ ← система работает с ошибкой.

1 Рекуррентное соотношение вытекает из определения $P_n = P_n^r P_{n-r}$

2 Рекуррентное соотношение из * →

$$P_n^r = P_{n-1}^r + r P_{n-1}^{r-1}$$

Перестановки с повторами.

$n_1 + n_2 + \dots + n_l = n$

$P_n(n_1, n_2, \dots n_l)$ число перестановок, в которых участвуют все элементы

$P_n(n_1, n_2, \dots n_l) = n!$

$$\underbrace{aa\dots a}_{n_1} \quad \underbrace{bb\dots b}_{n_2} \quad \underbrace{cc\dots c}_{n_l}$$

$$n_1! \qquad n_2! \qquad \dots n_l!$$

Различные перестановки.

$P_n(n_1, n_2, \dots n_l) = n_1! \, n_2! \dots n_l! = n!$

$P_n(n_1, \dots n_l) = \frac{n!}{n_1! \, n_2! \dots n_l!}$ – это перестановок с повторами.

$P_n^r = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{r} = n^r$

Сочетание.

Сочетание — неупорядоченный выбор.

$P_n^r = r!\, C_n^r$, $\boxed{C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}}$

$C_n^0 = C_n^n = 1$

$C_n^r = 0$ $r > n$ не имеет комб. смысла

$$\boxed{\begin{aligned} C_{-n}^r &= (-1)^r C_{n+r-1}^r \\ C_n^{-r} &= C_{n+r-1}^r \end{aligned}}$$

$(1+t)^n$. Число сочетаний симметрично. $C_n^r = C_n^{n-r}$

Сочетания с повторами.

$r > n$ В магазине продаётся 4 пирог, нужно купить 7 пирожки.

Вроде повтор. элементы.

1110110101

$$C_4(4) = \frac{10!}{4!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{6} = 120$$

$$\boxed{C_k(n) = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-k)!}} = C_{n+k-1}^{k}$$

n – число типов предметов

k – число предметов

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$a = b = 1 \longrightarrow \sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n$$

$$a = 1;\ b = -1 \longrightarrow \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k = \sum_{k=1}^{n} = 2^{n-1}$$

чётн   нечёт

Полиномиальная теорема

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{\substack{r_1 \geq 0;\, r_2 \geq 0 \dots r_k \geq 0 \\ r_1 + r_2 + \dots + r_k = n}} \frac{n!}{r_1!\, r_2! \dots r_k!} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_k^{r_k}$$

Вычислить: $(x+y+z)^3$

r_1	r_2	r_3
3	0	0
0	3	0
0	0	3
2	1	0
2	0	1
1	2	0
0	2	1
1	0	2
0	1	2
1	1	1

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 + 6xyz$$