Практика. 19/2/24

ДЗ ①

$$\begin{cases} f_1 = e_2 = 0e_1+1e_2+0e_3 \\ f_2 = e_3 = 0e_1+0\cdot e_2+1\cdot e_3 \\ f_3 = e_1 = 1\cdot e_1+0 e_2+0e_3 \end{cases} \quad x = 2e_1 - e_2 + e_3$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_e = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_f \quad TX_f = X_e$$

② $e = (e_1, e_2) \longrightarrow e' = (e_1', e_2')$

$$\begin{cases} e_1' = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 \\ e_2' = t_{12}e_1 + t_{22}e_2 \end{cases} \quad T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

a) $T_a = \begin{pmatrix} t_{21} & t_{22} \\ t_{11} & t_{12} \end{pmatrix}$ строки поменялись

$e_1 \longleftrightarrow e_2$

b) $e_1' \leftrightarrow e_2'$ $T_b = \begin{pmatrix} t_{12} & t_{11} \\ t_{22} & t_{21} \end{pmatrix}$ столбцы поменялись

c) $T_c = \begin{pmatrix} t_{22} & t_{21} \\ t_{12} & t_{11} \end{pmatrix}$

① Лин. опер φ в баз. $e = (e_1, e_2, e_3)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Найти образ вектора $X = -e_1 + 2e_3$

$$\boxed{y = AX} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

образ

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}. \quad y = (3, 3, -4)$$

Зад для контрольной.

② $\varphi : V \to V$; $V = \mathbb{R}^3$; $e = (e_1, e_2, e_3)$

$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + 8x_2 + 9x_3)$

1) $\varphi(e_1) = \varphi(1, 0, 0) = (1, 4, 7)$

$\varphi(e_2) = \varphi(0, 1, 0) = (2, 5, 8)$

$\varphi(e_3) = \varphi(0, 0, 1) = (3, 6, 9)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$ – м. оператора φ в базисе e.

2) $\ker\varphi = \{x \in V \mid \varphi(x) = 0\}$

$\boxed{AX = 0}$ $\quad A \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0; \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right) \underset{(3)-7(1)}{\overset{(2)-4(1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ \cancel{0} & \cancel{-6} & \cancel{-12} \end{pmatrix} \overset{(2):(-3)}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(1)-2(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{rank} = 2}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \qquad n - r = 1$$

$B = (1) \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases} \qquad l = (1; -2; 1)$

$\ker\varphi = \langle l \rangle =$

$= \{\alpha \cdot l \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in V\} = \{x_1\varphi(e_1) + x_2\varphi(e_2) + x_3\varphi(e_3) \mid x_i \in \mathbb{R}\} = \langle \varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3) \rangle =$

$= \langle \varphi(e_1) = (1, 4, 7), \varphi(e_2) = (2, 5, 8) \rangle$ $\dim \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rank}(A) = 2$

$\dim \ker\varphi = 1 = d(\varphi)$ дефект оператора.

$\dim \ker\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V$

they are $\exists$
$$\begin{pmatrix} 1 & + & 2 & = & 3 \\ 2 & + & 1 & = & 3 \\ 3 & + & 0 & = & 3 \\ 0 & + & 3 & = & 3 \end{pmatrix}$$

Зад на контр и экз

(5) e, e' – два базиса.

$e \xrightarrow{T} e'$, $e' = e \cdot T$

$\varphi(e) = e \cdot A$

$\varphi(e') = e' \cdot A'$

$\boxed{A' = T^{-1} \cdot A \cdot T}$ З. преобразовани матриц оператора при замене базиса.

$\boxed{T A' = \underbrace{A \cdot T}}$ – B

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -5 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$ в баз. $e = (e_1, e_2, e_3)$.

Найти матр. опер φ в базисе $f = (f_1, f_2, f_3)$

$$\begin{cases} f_1 = e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f_2 = e_1 + 2e_3 \\ f_3 = 2e_2 + e_3 \end{cases}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $B = A \cdot T$

3) $(T \mid B) \xrightarrow{\text{строк}} (E \mid A')$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -5 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1-2 & 4-2 & \\ -5+4 & -5+4 & \\ 6-2+2 & \ldots & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

3) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-2(1)]{(2)+(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{(1)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)-2(3)]{(1)+2(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

④ $\varphi(a_i) = b_i$

$i = 1, 2, 3$

$a_1 = (1, 0, 1) \longrightarrow b_1 \ (5, -1, 2)$

$a_2 = (1, 1, 0) \longrightarrow b_2 \ (3, -2, 4)$

$a_3 = (1, 0, 2) \longrightarrow b_3 \ (1, -3, 6)$

Найти матр φ в том же самом базисе

Матр. опер. X

$$\begin{cases} X \cdot a_1 = b_1, \\ X \cdot a_2 = b_2, \\ X \cdot a_3 = b_3 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$A = (a_1, a_2, a_3)$

$B = (b_1, b_2, b_3)$

$\Longleftrightarrow \boxed{X \cdot A = B}$

$$\left(\frac{A}{B}\right) \xrightarrow[\text{столб}]{\text{пр.}} \left(\frac{E}{X}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} (2)-(1) \\ (3)-(1) \end{matrix}$$

! Можно менять местами столб.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ \hline 5 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} (1)-(3) \\ (2)+(3) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 9 & -6 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$