6/3/24

Производящие ф-ции для сочетания

$$(1+t)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i t^i$$

$\parallel$

$f(t)$ - перечисляющая производ. ф-цией сочетания из n различных эл-в, или энумератор.

$$t=\cancel{1} \longrightarrow 2^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i$$

$$t=-1 \longrightarrow 0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i$$

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^{n-1}$$

$$(1+t)^n = (1+m)^{n-m}(1+t)^m$$

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i t^i = \sum_{i=0}^{n-m} C_{n-m}^i t^i \cdot \sum_{i=0}^{m} C_m^i t^i$$

$$C_n^0 + C_n^1 t + C_n^2 t^2 + \dots + C_n^n t^n = (C_{n-m}^0 + C_{n-m}^1 + \dots + C_{n-m}^{n-m} t^m)(C_m^0 + C_m^1 + \dots + C_m^m t^m)$$

$$C_n^0 = C_{n-m}^0 \, C_m^0$$

$$C_m^1 = C_{n-m}^0 \, C_m^1 + C_{n-m}^1 \, C_m^0$$

Если не $\forall$ эл-ы различны. (комбинируем)

Введем маркеры. (идентифицирующие множество)

Случай 3-х эл.

$$(1+x_1 t)(1+x_2 t)(1+x_3 t) = 1+(x_1+x_2+x_3)t+$$
$$+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)t^2+x_1x_2x_3t^3$$

— ч сочетаний.

Если i-й эл может брать k-раз и идентиф. мн-тель не важен

$$(1+x_it+x_i^2t^2+\dots+x_i^kt^k)$$

Пусть n-видов элементов и у нас выборка с неограниченным числом повторов.

$$f(t) = (\underbrace{1+t+t^2+\dots}_{\frac{1}{1-t}})^n = (1-t)^{-n} =$$

$$= \sum_{i=0}^{+n} C_{-n}^i (-t)^i = \longrightarrow$$

$$\mathcal{R} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C_{-n}^{r} t^r = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r (-1)^r C_{n+r-1}^{r} t^r$$

- искомое число сочетаний из r элем.

Пусть в каждое сочетание входит $1 \le x$.

- $f(t) = t^n (1 + t + t^2 + \dots)^n = t^n \sum_{r=0}^{n} C_{n+r-1}^{r} t^r$

$$= \sum_{r=0}^{n} C_{n+r-1}^{r} t^{n+r} = \quad n + r = j$$

$$= \sum_{n}^{2n} C_{j-1}^{j-n} + t^j$$

- Произв. ф-ции для перестановок

$$C_n^r = \frac{1}{r!} P_n^r$$

$$(1+t)^n = \sum_{r=0}^{n} P_n^r \frac{t^r}{r!}$$

- $\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{n_1}}{n_1!}\right)\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{n_2}}{n_2!}\right) \cdot$

$$\cdot \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{n_k}}{n_k!}\right) = 1 + \dots + \frac{t^{n_1+n_2+\dots+n_k}}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!} \quad \frac{t^n}{n!}$$

Размещения и занятость.

распредел. объектов по совокупности ячеек.

Когда изучается ? о числе размещ. объек. по ячейкам; говорят, что это задача о размещении.

? → Число объектов в заданных или произвол. ячейках — то это задачи занятости.

n - объекты $\quad m$ - ячейки.

$n \qquad m$

· Нет ограничений по размещению.

m^n.

$x_i^{n_i}$ - индикатор занятости.

$$\boxed{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^n}$$

$$(t, x_1 \ldots x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_1+\ldots+x_n)^n \frac{t^n}{n!} = e^{t(x_1+x_2 \ldots x_n)} =$$

$$= e^{tx_1} \cdot e^{tx_2} \cdot e^{tx_n}$$

- Для случая — нет пустых ячеек

$$(e^t-1)^m = e^{mt}(1-e^{-t})^m =$$

$$= e^{mt} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r C_m^r \cdot e^{-tr} =$$

$$= \sum_{r=0}^{m} (-1)^r C_m^r e^{(m-r)t} =$$

$$= \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \cdot C_m^r \sum_{k=0}^{\infty} (m-r)^k \frac{t^k}{k!}$$

- Найти число способов размещения n разл. объект. по m ячеек, при усл. что в i-й ячейке n_i различных элементов.

$$n_1+n_2+\ldots+n_k = n$$

$x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot x_k^{n_k}$ - индикатор

$$(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n = \sum_{n_1 \ldots n_k} \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdot x_k^{n_k}$$

Циклы перестановок.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$(125)(34)$ – цикл.

Циклы:

1) единичные
2) двойные
3) тройные

В общем случае перест. имеет $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ циклов. Класс перестановки

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + nk_n = n$$

$$0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 4\cdot 0 + 5\cdot 0 = 5$$

$(0 1 1 0 0)$

– Не все перестановки различны.

(125) (251) (512)

· Относительно расположения циклов несущественно.

$k_n!$

$k_1!\,k_2!\,k_n!$

$1^{k_1}\,2^{k_2}\cdot n^{k_n}$

$$P(k_1 \dots k_n) = \frac{n!}{1^{k_1}\cdot 2^{k_2}\cdot n^{k_n}\cdot k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!} = \frac{5!}{2\cdot 3\cdot 1!\,1!}$$

Принцип включение и исключения

N

$N(a),\ N(b),\ N(c)$

$N(\bar a) = N - N(a)$

$N(\bar a\,\bar b) = N - N(a) - N(b) + N(a,b)$

$N(\bar a\,\bar b\,\bar c) = N - N(a) - N(b) + N(ab) + N(ac) + N(bc) - N(a,b,b)$

- Староста класса дал сведения.

45 школьников в классе (2)

25 - мальчики, на 4 и 5 - 30 шк (мальчик

Спортом 28 учеников → 18 мальчико и 17 школьников на 4 и 5. 15 мальчико на 4,5 занимаются спортом.

Мальчик

• Решето Эратосфена.

Сколько чисел в 1-й сотне, которые не делятся ни на одно из чисел: 2, 3 и 5.