Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)"

Институт №8 "Информационные технологии и прикладная математика"

Кафедра №806 "Математическая кибернетика"

КУРСОВАЯ РАБОТА

По курсу "Объектно-ориентированное программирование"

Вариант 15

Тема задания №8:
"Перечисление контуров графа методом латинской композиции."

Выполнил: студент группы М8О-104Б-22
Тесля Данила Сергеевич
Руководитель:
Смерчинская Светлана Олеговна
Дата: 30.05.2023
Оценка:..........

Москва - 2023 г.

Содержание

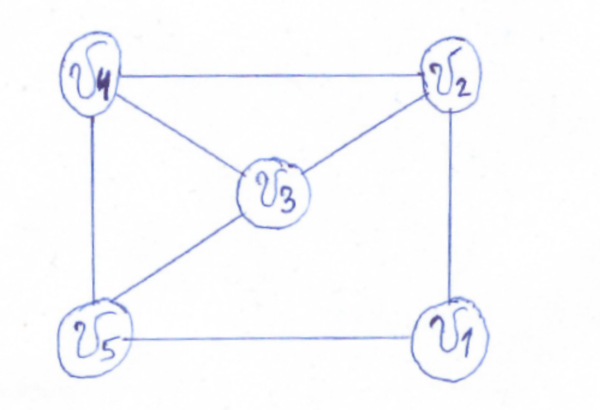
Задание.Вариант 15.

1. Определить для орграфа, заданного матрицей смежности:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

а) матрицу односторонней связности;
б) матрицу сильной связности;
в) компоненты сильной связности;
г) матрицу контуров;
д) изобразить граф и компоненты сильной связности

2.Используя алгоритм Терри, определить замкнутый маршрут, проходящий ровно по два раза (по одному в каждом направлении) через каждое ребро графа.



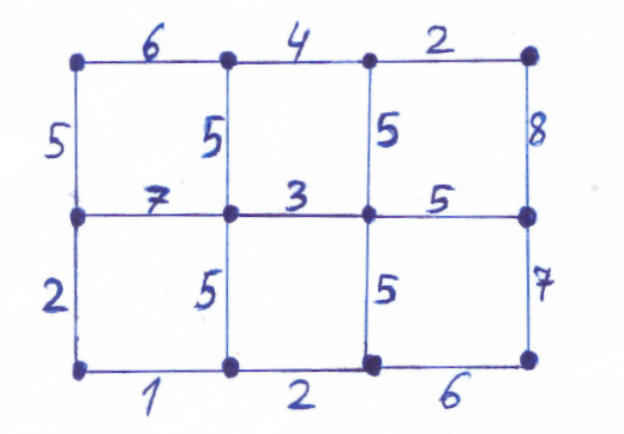
3.Используя алгоритм "фронта волны", найти все минимальные пути из первой вершины в последнюю орграфа, заданного матрицей смежности.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

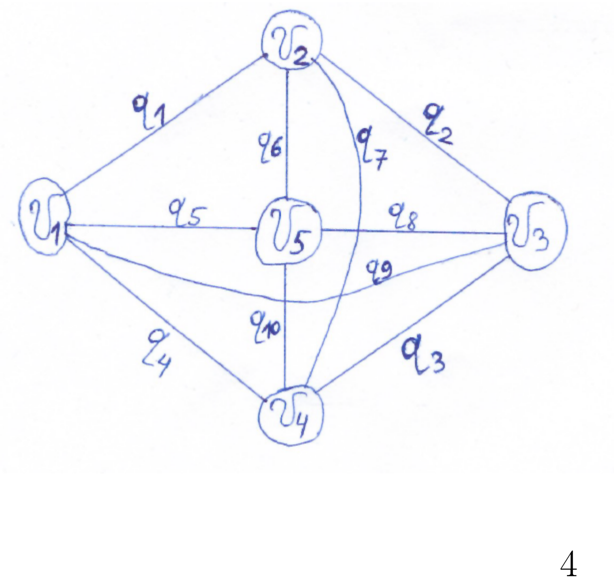
4. Используя алгоритм Форда, найти минимальные пути из первой вершины во все достижимые вершины в нагруженном графе, заданном матрицей длин дуг.

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 10 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ 6 & 3 & \infty & \infty & 11 & \infty & 7 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 5 \\ 5 & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 2 & \infty & \infty \\ 8 & \infty & \infty & 17 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

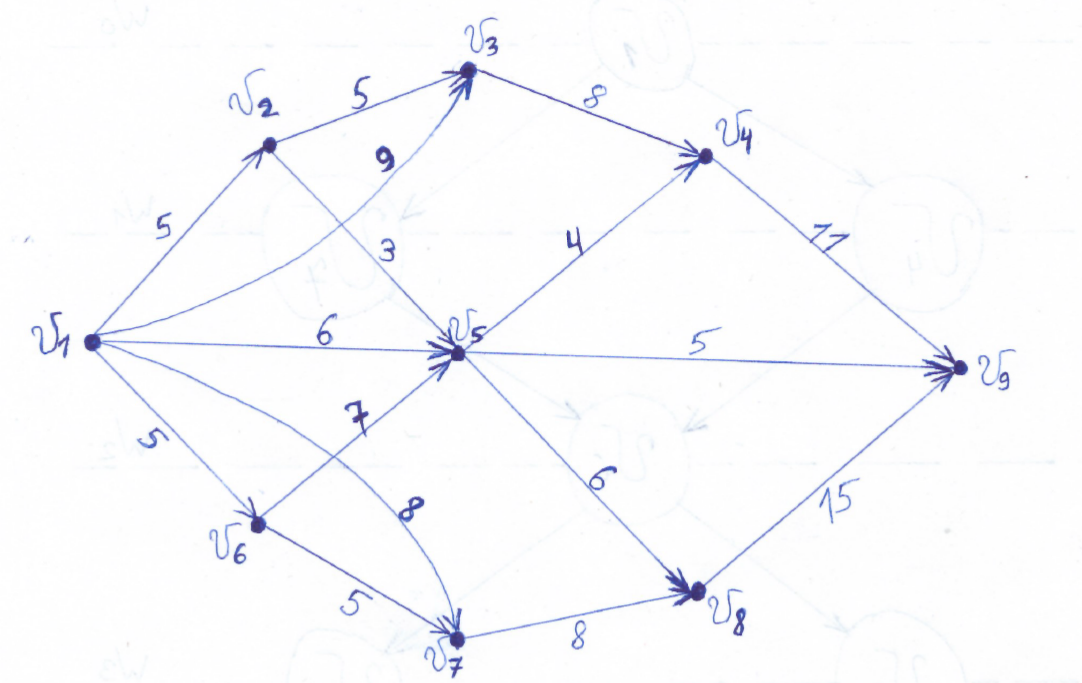
5.Найти остовное дерево с минимальной суммой длин входящих в него ребер.



6.Пусть каждому ребру неориентированного графа соответствует некоторый элемент электрической цепи. Составить линейно независимые системы уравнений Кирхгофа для токов и напряжений. Пусть первому и пятому ребру соответствуют источники тока с ЭДС E1 и E2, а остальные элементы являются сопротивлениями. Используя закон Ома, и, предполагая внутренние сопротивления источников тока равными нулю, получить систему уравнений для токов.



7. Построить максимальный поток по транспортной сети.



8. Перечисление контуров графа методом латинской композиции.

Задание №1

Орграф задан матрицей смежности А:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

а) Матрица односторонней связности

Первый алгоритм Уоршалла

Найдем матрицу односторонней связности Т по первому алгоритму Уоршалла: $T = E \vee A \vee A^2 \vee A^3$, при n = 4(кол-во вершин графа).

Вычислим A^2:

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим A^3:

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычислим $T = E \vee A \vee A^2 \vee A^3$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Второй (итерационный) алгоритм Уоршалла

Найдем матрицу односторонней связности Т по второму (итерационному) алгоритму Уоршалла. Найдем $T^{(0)}$,$T^{(1)}$,$T^{(2)}$,$T^{(3)}$,$T^{(4)} = T$, при n = 4(кол-во вершин графа), где $T^{(k)} = ||t_{ij}^k||, t_{ij}^k = t_{ij}^{k-1} \vee \left(t_{ik}^{k-1} \& t_{kj}^{k-1}\right)$:

1)k = 0:

$$T^{(0)} = E \vee A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1)k = 1:

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1)k = 2:

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) k = 3:

$$T^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) k = n = 4:

$$T^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

б)Матрица сильной связности

Найдем матрицу сильной связности $\overline{S} = T\&T^T$:

$$\overline{S} = T\&T^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в)Компоненты сильной связности

Найдем компоненты связности

1) Номера вершин, принадлежащих первой компоненте связности соответствуют номерам столбцов матрицы сильной связности $\overline{S}$, в которых стоят единицы:

Первая компонента сильной связности: $\{V_1,V_2,V_4\}$

Обнуляем столбцы 1,2,4 и получаем $\overline{S}_1$:

$$\overline{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

2)Рассматриваем оставшиеся ненулевые строки - такая только одна, в третьем столбце третьей строки матрицы $\overline{S}_1$ единица, тогда:

Вторая компонента сильной связности: $\{V_3\}$

Обнуляем столбец 3 и получаем $\overline{S}_2$:

$$\overline{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv 0$$

У матрицы $\overline{S}_2 =$ нет ненулевых строк, тогда:

Больше компонент сильной связности нет.

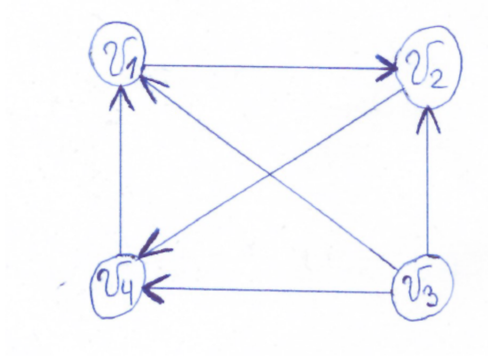
г)Матрица контуров

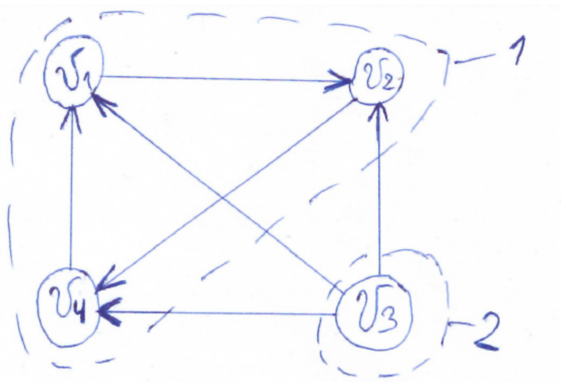
Найдем матрицу контуров $K = \overline{S}\&A$:

$$K = \overline{S}\&A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

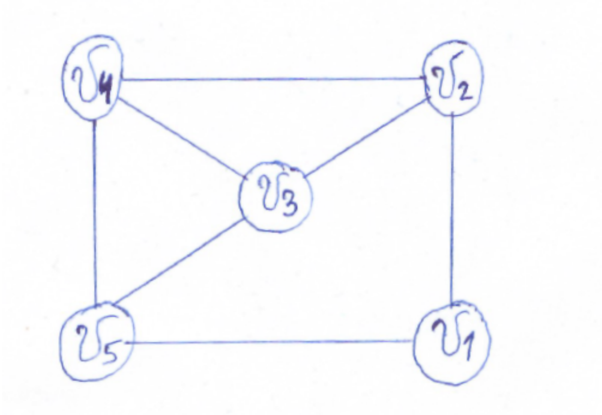
Следовательно дуги $< V_1,V_2 >,< V_2,V_4 >,< V_4,V_1 >$ принадлежат какому-либо контуру исходного орграфа.

д)Изображение графа и компонент сильной связности





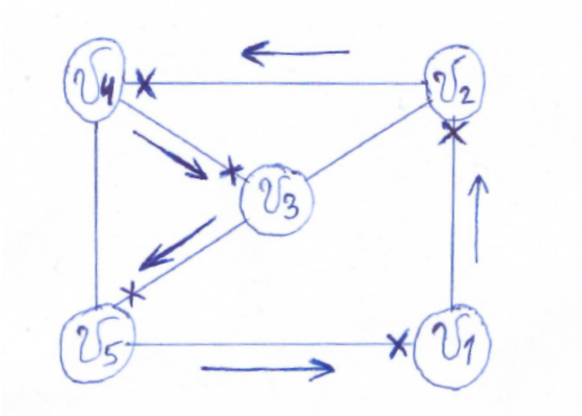
Задание №2



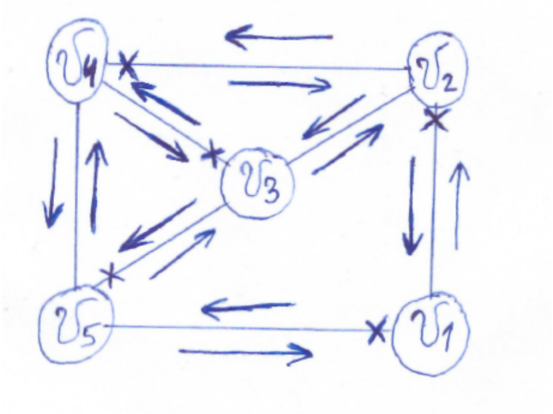
Составим маршрут обхода графа с помощью алгоритма Терри:

Начинаем из вершины 1, $'\times'$ - отмечаем ребра q_k, по которым будем в первый раз входить в каждую из вершин V_i, $\rightleftharpoons$ - отмечаем направления, опишем два "этапа"прохождения для наглядности:

1)$1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 5 \to 1$. В каждую вершину вошли по одному разу, отметили ребра, далее из вершины 1 есть только один путь в вершину 5.



2)$1 \to 5 \to 4 \to 5 \to 3 \to 2 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$. При нескольких переходах остается лишь один путь - по отмеченному ребру - путь построен.



Итоговый путь, согласно алгоритму Терри:

$1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 5 \to 1 \to 5 \to 4 \to 5 \to 3 \to 2 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$

Задание №3

Орграф задан матрицей смежности A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A_{8\times8}$ матрица смежности, тогда n = 8 (кол-во вершин графа), следовательно ищем кратчайшие пути из V_1 в V_8.

Построение волн

Помечаем стартовую вершину V_1 индексом 0, она принадлежит фронту волны нулевого уровня:

1)$W_0 = V_1$ - фронт волны нулевого уровня

2)$W_1 = \Gamma(W_0) = \Gamma(V_1) = \{V_4, V_7\}$ - фронт волны первого уровня

3)$W_2 = \Gamma(W_1)\backslash\{W_{0,1}\} = \{V_6\}$ - фронт волны второго уровня

4)$W_3 = \Gamma(W_2)\backslash\{W_{0,1,2}\} = \{V_2, V_5\}$ - фронт волны третьего уровня

5)$W_4 = \Gamma(W_3)\backslash\{W_{0,1,2,3}\} = \{V_3\}$ - фронт волны четвертого уровня

5)$W_5 = \Gamma(W_4)\backslash\{W_{0,1,2,3,4}\} = \{V_8\}$ - фронт волны пятого уровня

Вершина V_8 достигнута, она принадлежит фронту волны пятого уровня - W_5, следовательно длина кратчайшего пути в нее равна 5.

Нахождение путей

Найдем сами кратчайшие пути, т.е. промежуточные вершины, начнем с V_8

1)$W_5 = \{V_8\}$

2)$W_4 \cap \Gamma^{-1}_{V_8} = \{V_3\} \cap \{V_3\} = \{V_3\}$

3)$W_3 \cap \Gamma^{-1}_{V_3} = \{V_2, V_5\} \cap \{V_2,V_5,V_8\} = \{V_2,V_5\}$

4.1)$W_2 \cap \Gamma^{-1}_{V_2} = \{V_6\} \cap \{V_3, V_6, V_8\} = \{V_6\}$ - через V_2

4.2)$W_2 \cap \Gamma^{-1}_{V_5} = \{V_6\} \cap \{V_2, V_6\} = \{V_6\}$ - через V_5

5.1)$W_1 \cap \Gamma^{-1}_{V_6} = \{V_4, V_7\} \cap \{V_3, V_4, V_7\} = \{V_4,V_7\}$ - через V_2

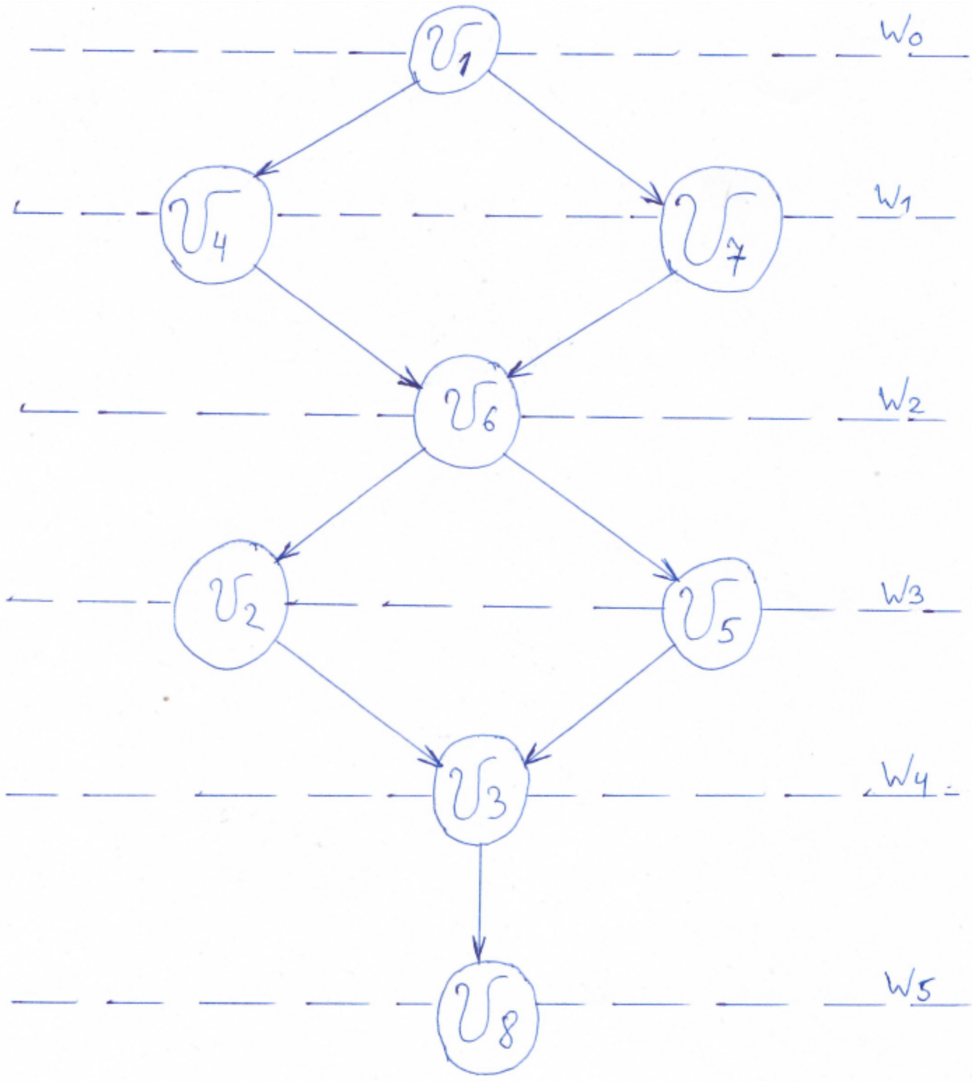
5.2)$W_1 \cap \Gamma^{-1}_{V_6} = \{V_4, V_7\} \cap \{V_3, V_4, V_7\} = \{V_4, V_7\}$ - через V_5

6.1)$W_0 \cap \Gamma_{V_4}^{-1} = \{V_1\} \cap \{V_1, V_3, V_5, V_6, V_7, V_8\} = \{V_1\}$ - через V_2 и V_4
6.2)$W_0 \cap \Gamma_{V_4}^{-1} = \{V_1\} \cap \{V_1, V_3, V_5, V_6, V_7, V_8\} = \{V_1\}$ - через V_5 и V_4
6.3)$W_0 \cap \Gamma_{V_7}^{-1} = \{V_1\} \cap \{V_1, V_2, V_4, V_5, V_6\} = \{V_1\}$ - через V_2 и V_7
6.4)$W_0 \cap \Gamma_{V_7}^{-1} = \{V_1\} \cap \{V_1, V_2, V_4, V_5, V_6\} = \{V_1\}$ - через V_5 и V_7

Имеем 4 кратчайших пути:

1) $V_1 \to V_4 \to V_6 \to V_2 \to V_3 \to V_8$
2) $V_1 \to V_4 \to V_6 \to V_5 \to V_3 \to V_8$
3) $V_1 \to V_7 \to V_6 \to V_2 \to V_3 \to V_8$
4) $V_1 \to V_7 \to V_6 \to V_5 \to V_3 \to V_8$

Изобразим орграф с отмеченными фронтами волн:



Задание №4

Нагруженный орграф задан матрицей весов C:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 10 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ 6 & 3 & \infty & \infty & 11 & \infty & 7 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 5 \\ 5 & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 2 & \infty & \infty \\ 8 & \infty & \infty & 17 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Длины минимальных путей

Опираясь на алгоритм Форда для нахождения минимального пути в нагруженном графе, где λ_i^{n-1} - длина минимального пути из V_1 в V_i, составим таблицу итераций, исходя из того, что λ_i^k - длина минимального пути из V_1 в V_i, содержащего не более k дуг, и $\lambda_i^k = min(\lambda_j^{k-1} + C_{ij})$, при $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$; $k = 0, \ldots, n-1$:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	λ_i^0	λ_i^1	λ_i^2	λ_i^3	λ_i^4	λ_i^5	λ_i^6	λ_i^7
V_1	∞	5	3	∞	∞	∞	∞	∞	0	0	0	0	0	0	0	0
V_2	2	∞	3	10	∞	2	∞	∞	∞	5	5	5	5	5	5	5
V_3	6	3	∞	∞	11	∞	7	∞	∞	3	3	3	3	3	3	3
V_4	7	∞	∞	∞	2	∞	∞	4	∞	∞	15	14	14	14	14	14
V_5	∞	∞	∞	2	∞	∞	∞	5	∞	∞	14	13	12	12	12	12
V_6	5	∞	∞	7	∞	∞	2	∞	∞	∞	7	7	7	7	7	7
V_7	∞	∞	∞	∞	3	2	∞	∞	∞	∞	10	9	9	9	9	9
V_8	8	∞	∞	17	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	19	18	17	17	17

Так как λ_i^{n-1} - длина минимального пути из V_1 в V_i, то при n = 8, длины минимальных путей в соответствующие вершины записаны в последнем столбце таблицы.

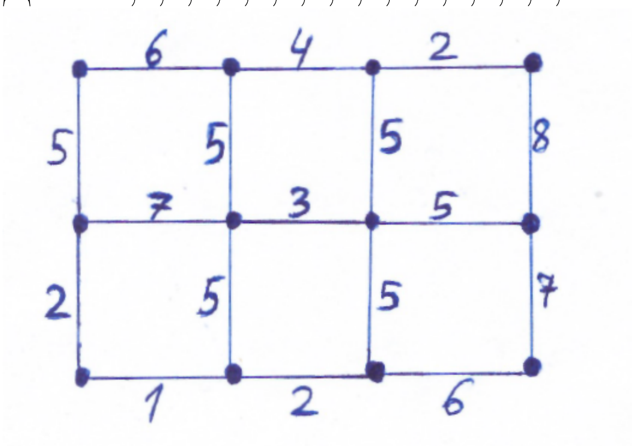
Нахождение путей

Найдем промежуточные вершины путей в каждую из вершин V_i:
1)Минимальный путь из V_1 в $V_2 = V_1 \to V_2$:
$\lambda_2^1 = \lambda_1^0 + C_{12} = 0 + 5 = 5$
2)Минимальный путь из V_1 в $V_3 = V_1 \to V_3$:
$\lambda_3^1 = \lambda_1^0 + C_{13} = 0 + 3 = 3$
3)Минимальный путь из V_1 в $V_4 = V_1 \to V_2 \to V_6 \to V_4$:
$\lambda_4^3 = \lambda_6^2 + C_{64} = 7 + 7 = 14$

$\lambda_6^2 = \lambda_2^1 + C_{26} = 5 + 2 = 7$
$\lambda_2^1 = \lambda_1^0 + C_{12} = 0 + 5 = 5$
4)Минимальный путь из V_1 в $V_5 = V_1 \to V_2 \to V_6 \to V_7 \to V_5$:
$\lambda_5^4 = \lambda_7^3 + C_{75} = 9 + 3 = 12$
$\lambda_7^3 = \lambda_6^2 + C_{67} = 7 + 2 = 9$
$\lambda_6^2 = \lambda_2^1 + C_{26} = 5 + 2 = 7$
$\lambda_2^1 = \lambda_1^0 + C_{12} = 0 + 5 = 5$
5)Минимальный путь из V_1 в $V_6 = V_1 \to V_2 \to V_6$:
$\lambda_6^2 = \lambda_2^1 + C_{26} = 5 + 2 = 7$
$\lambda_2^1 = \lambda_1^0 + C_{12} = 0 + 5 = 5$
6)Минимальный путь из V_1 в $V_7 = V_1 \to V_2 \to V_6 \to V_7 \to V_5$:
$\lambda_7^3 = \lambda_6^2 + C_{67} = 7 + 2 = 9$
$\lambda_6^2 = \lambda_2^1 + C_{26} = 5 + 2 = 7$
$\lambda_2^1 = \lambda_1^0 + C_{12} = 0 + 5 = 5$
7)Минимальный путь из V_1 в $V_8 = V_1 \to V_2 \to V_6 \to V_7 \to V_5 \to V_8$:
$\lambda_8^5 = \lambda_5^4 + C_{58} = 12 + 5 = 12$
$\lambda_5^4 = \lambda_7^3 + C_{75} = 9 + 3 = 12$
$\lambda_7^3 = \lambda_6^2 + C_{67} = 7 + 2 = 9$
$\lambda_6^2 = \lambda_2^1 + C_{26} = 5 + 2 = 7$
$\lambda_2^1 = \lambda_1^0 + C_{12} = 0 + 5 = 5$

Задание №5

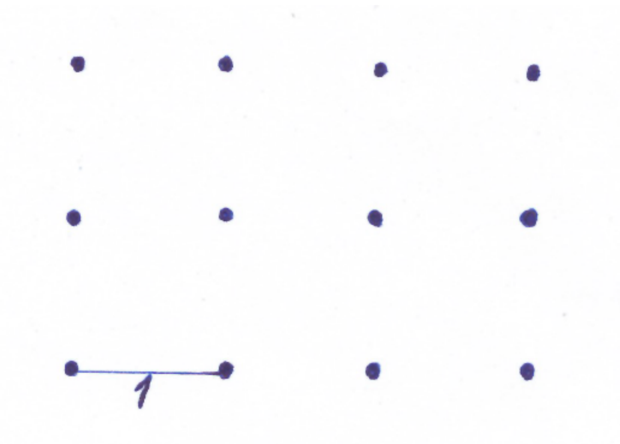
Дано: 2,5,6,7,1,2,3,4,2,5,6,7,8,5,5,5,5.



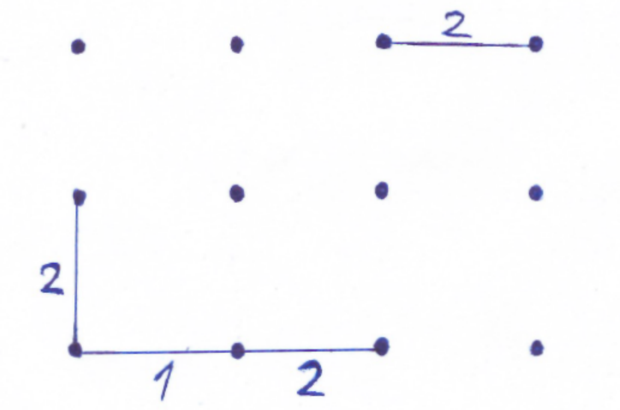
Пользуемся алгоритмом Краскала построения остовного дерева минимального веса - будем брать все ребра минимального веса, пока граф не станет связным, и при этом в нем не будет циклов:

1)Берем все вершины графа

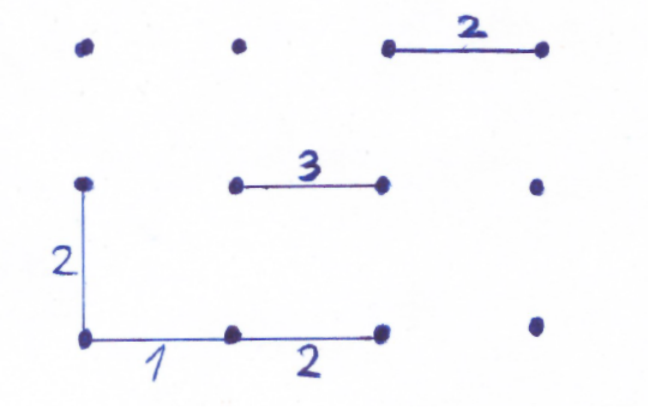
2)Берем все дуги весом 1, граф несвязный, циклов нет:



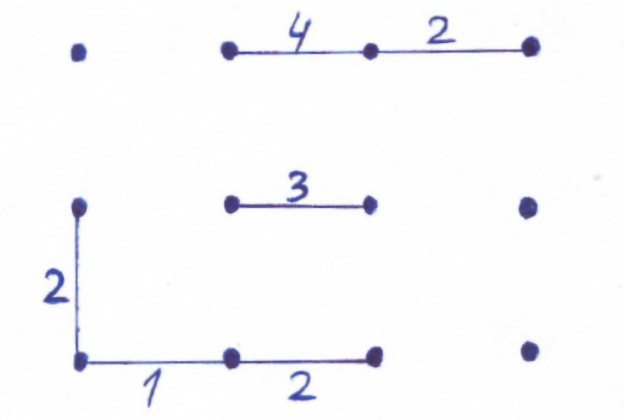
3)Берем все дуги весом 2, граф несвязный, циклов нет:



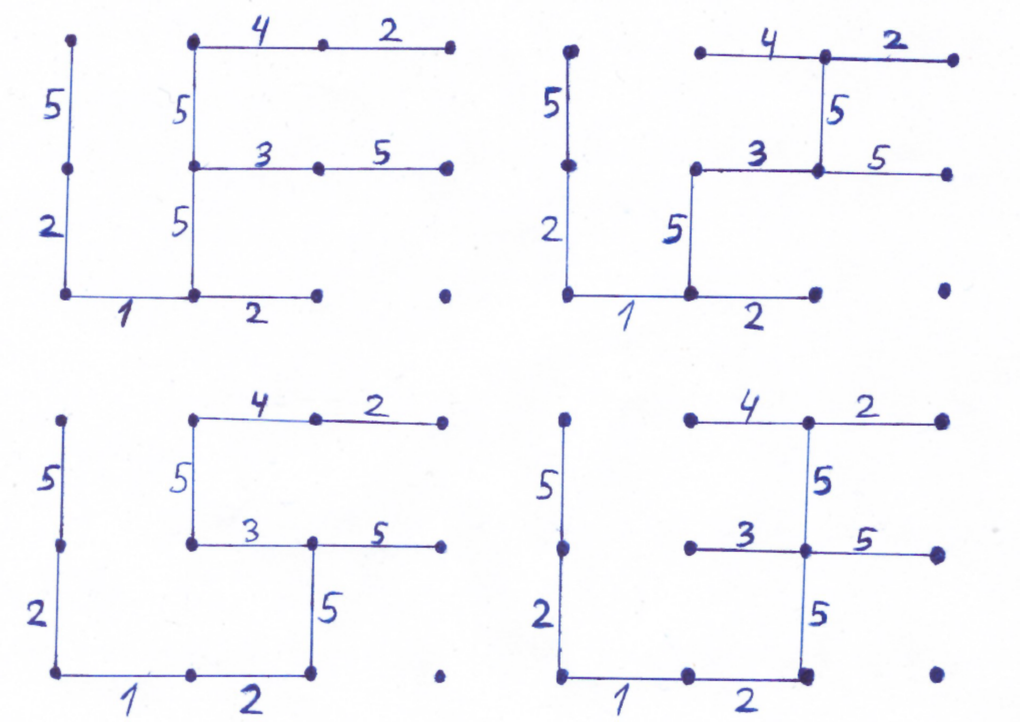
4)Берем все дуги весом 3, граф несвязный, циклов нет:



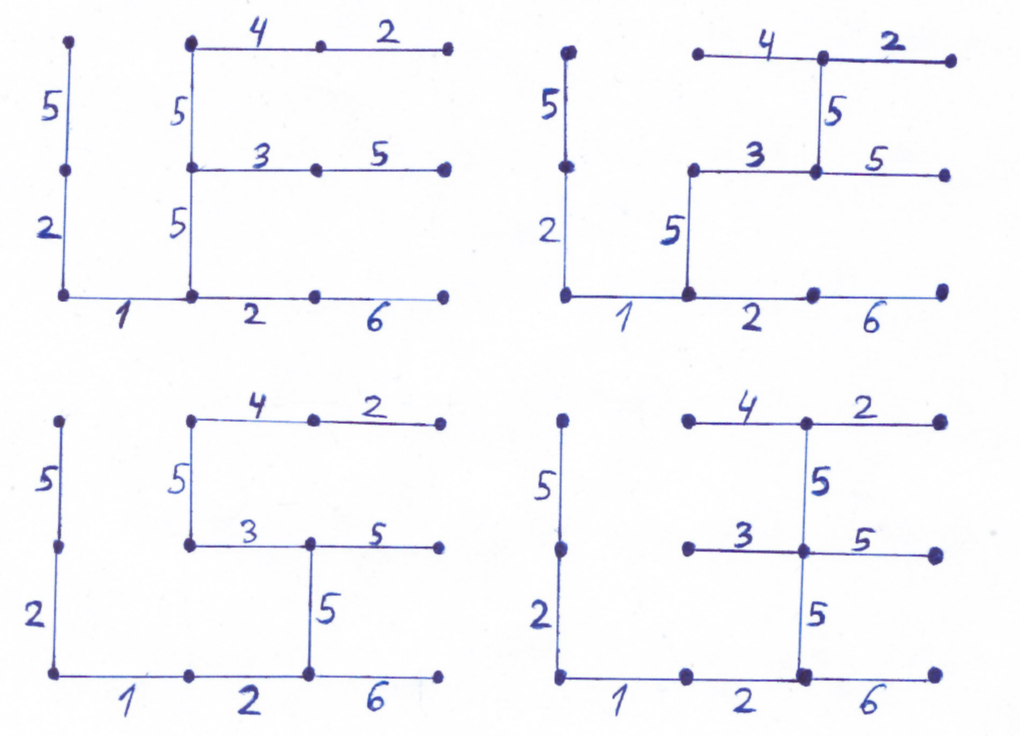
5)Берем все дуги весом 4, граф несвязный, циклов нет:



6)Берем все дуги весом 5, граф в любом случае будет несвязным, есть 4 различных способа сделать это так, чтобы в графе не было циклов:



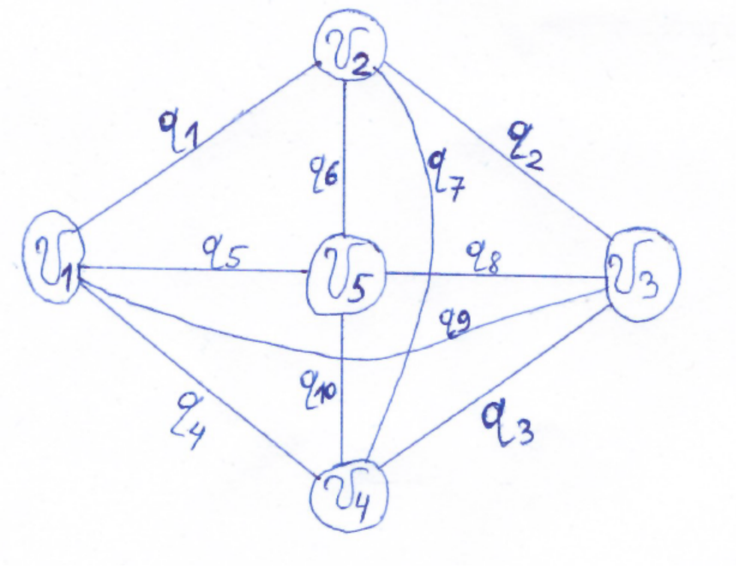
6)Берем все дуги весом 6, очевидно, получится 4 варианта связного графа без циклов - 4 остовных дерева с минимальным:



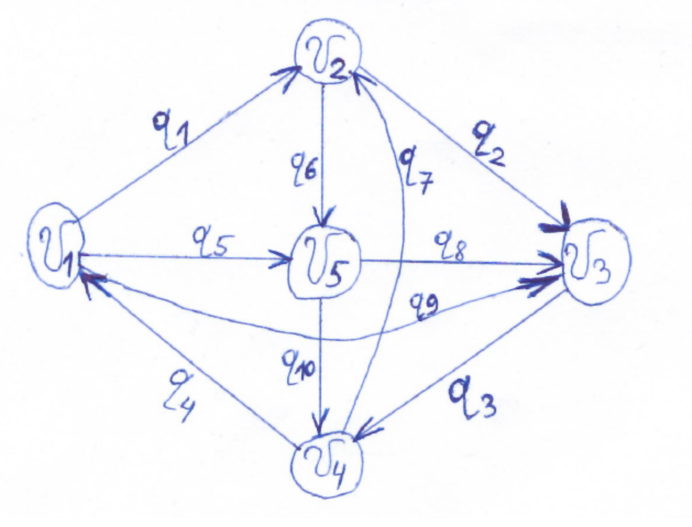
Найдем минимальный вес остовного дерева:

$$L(D) = 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 5 + 5 + 5 + 6 = 40$$

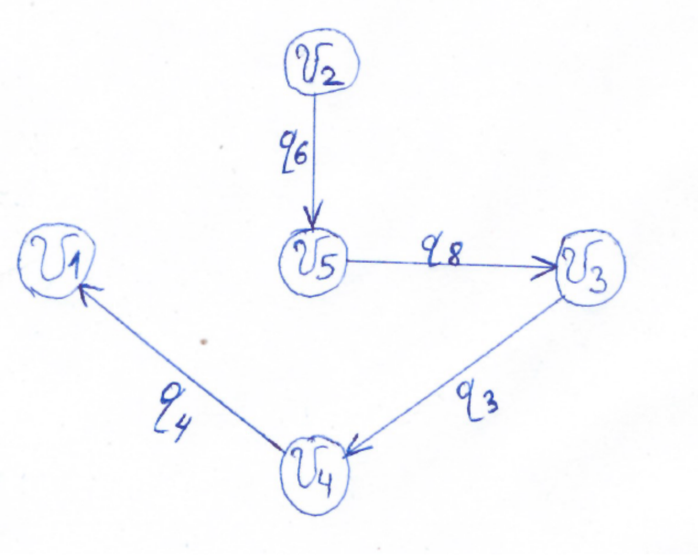
Задание №6



Ребрам q_1 и q_5 соответствуют источники тока E_1 и E_2.
1)Зададим на графе произвольную ориентацию:



2)Построим произвольное остовное дерево D:



3)Найдем базис циклов, добавляя к остовному дереву по одному не вошедшему в него ребру, затем найдем соотвествующие каждому из циклов вектор-цикл:

$(D+q_1): \mu_1 = V_1 \to V_2 \to V_5 \to V_3 \to V_4 \to V_1$
$(D+q_2): \mu_2 = V_2 \to V_5 \to V_3 \to V_2$
$(D+q_5): \mu_3 = V_1 \to V_5 \to V_3 \to V_4 \to V_1$
$(D+q_7): \mu_4 = V_2 \to V_5 \to V_3 \to V_4 \to V_2$
$(D+q_9): \mu_5 = V_1 \to V_3 \to V_4 \to V_1$
$(D+q_{10}): \mu_6 = V_5 \to V_3 \to V_4 \to V_5$

Циклы μ_{1-6} образуют базис циклов, найдем соотв. им вектор циклы:

$C(\mu_1) =$ (1,0,1,1,0,1,0,1,0,0)
$C(\mu_2) =$ (0,-1,0,0,0,1,0,1,0,0)
$C(\mu_3) =$ (0,0,1,1,1,0,0,1,0,0)
$C(\mu_4) =$ (0,0,1,0,0,1,1,1,0,0)
$C(\mu_5) =$ (0,0,1,1,0,0,0,0,1,0)
$C(\mu_6) =$ (0,0,1,0,0,0,0,1,0,-1)

4)Тогда цикломатическая матрица C имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5) Воспользуемся законом Киргхофа для напряжений $C \times U = 0$:

$$C \times U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} U_1 + U_3 + U_4 + U_6 + U_8 = 0 \\ -U_2 + U_6 + U_8 = 0 \\ U_3 + U_4 + U_5 + U_8 = 0 \\ U_3 + U_6 + U_7 + U_8 = 0 \\ U_3 + U_4 + U_9 = 0 \\ U_3 + U_8 - U_{10} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_1 = -U_3 - U_4 - U_6 - U_8 \\ U_2 = U_6 + U_8 \\ U_5 = -U_3 - U_4 - U_8 \\ U_7 = -U_3 - U_6 - U_8 \\ U_9 = -U_3 - U_4 \\ U_{10} = U_3 + U_8 \end{cases}$$

6)Найдем матрицу инцидентности орграфа B:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}
V_1	-1	0	0	1	-1	0	0	0	-1	0
V_2	1	-1	0	0	0	-1	1	0	0	0
V_3	0	1	-1	0	0	0	0	1	1	0
V_4	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	1
V_5	0	0	0	0	1	1	0	-1	0	-1

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7)Воспользуемся законом Кирхгофа для токов $B \times I = 0$:

$$B \times I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -I_1 + I_4 - I_5 - I_9 = 0 \\ I_1 + I_2 - I_6 + I_7 = 0 \\ I_2 - I_3 + I_8 + I_9 = 0 \\ I_3 - I_4 - I_7 + I_{10} = 0 \\ I_5 + I_6 - I_8 - I_{10} = 0 \end{cases}$$

Так как по свойству матрицы инцидентности $RgB = n - 1, RgB = 4$, тогда одно из уравнений системы не имеет смысла:

$$\begin{cases} -I_1 + I_4 - I_5 - I_9 = 0 \\ I_1 + I_2 - I_6 + I_7 = 0 \\ I_2 - I_3 + I_8 + I_9 = 0 \\ I_3 - I_4 - I_7 + I_{10} = 0 \end{cases}$$

8)Подставим закон Ома в уравнение Кирхгофа для напряжений:

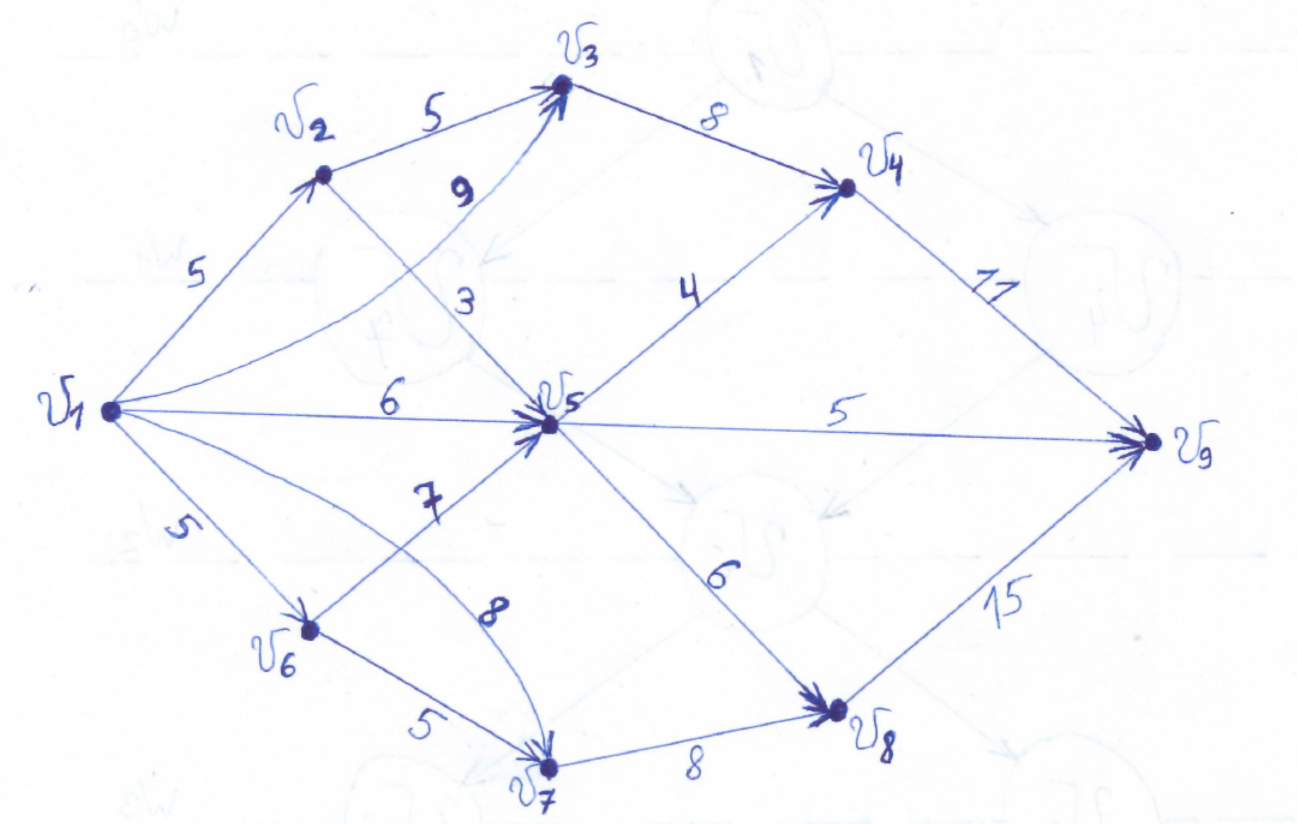
$$\begin{cases} E_1 = -I_3R_3 - I_4R_4 - I_6R_6 - I_8R_8 \\ 0 = I_6R_6 + I_8R_8 \\ E_2 = -I_3R_3 - I_4R_4 - I_8R_8 \\ 0 = -I_3R_3 - I_6R_6 - I_8R_8 \\ 0 = -I_3R_3 - I_4R_4 \\ 0 = I_3R_3 + I_8R_8 \end{cases}$$

9)Совместная система будет иметь вид:

$$\begin{cases} -I_1 + I_4 - I_5 - I_9 = 0 \\ I_1 + I_2 - I_6 + I_7 = 0 \\ I_2 - I_3 + I_8 + I_9 = 0 \\ I_3 - I_4 - I_7 + I_{10} = 0 \\ E_1 = -I_3R_3 - I_4R_4 - I_6R_6 - I_8R_8 \\ 0 = I_6R_6 + I_8R_8 \\ E_2 = -I_3R_3 - I_4R_4 - I_8R_8 \\ 0 = -I_3R_3 - I_6R_6 - I_8R_8 \\ 0 = -I_3R_3 - I_4R_4 \\ 0 = I_3R_3 + I_8R_8 \end{cases}$$

Десять уравнений и десять неизвестных - I_{1-10}, ЭДС E_{1-2} и сопротивления R_{1-10} по условию известны.

Задание №7



Полный поток

Построим полный поток в транспортной сети, в качестве начального потока выберем $\varphi_{ij} = 0, \forall i,j$. Будем искать пути, не содержащие насыщенных дуг, пока они существуют, когда таковых путей не остнется - поток станет полным:

1) $V_1 \to V_2 \to V_3 \to V_4 \to V_9$; $\Delta_1 = min\{5{,}5{,}8{,}11\} = 5$

2) $V_1 \to V_6 \to V_7 \to V_8 \to V_9$; $\Delta_2 = min\{5{,}5{,}8{,}15\} = 5$

3) $V_1 \to V_5 \to V_9$; $\Delta_3 = min\{6{,}5\} = 5$

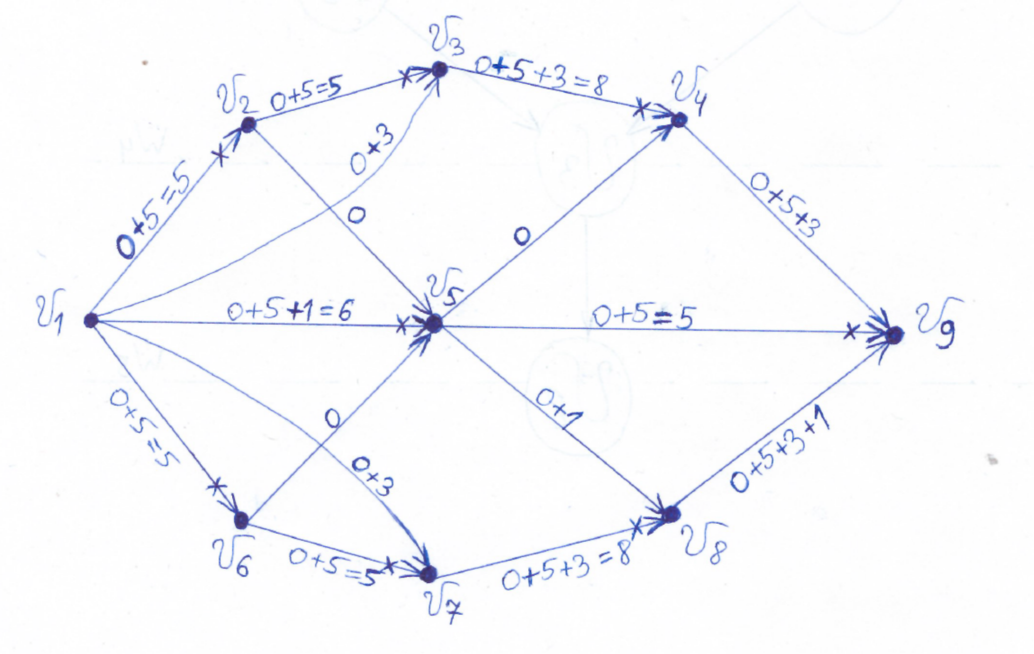
4) $V_1 \to V_3 \to V_4 \to V_9$; $\Delta_4 = min\{9{,}8\text{-}5{,}11 - 5\} = 3$

5) $V_1 \to V_7 \to V_8 \to V_9$; $\Delta_5 = min\{8{,}8\text{-}5{,}15\text{-}5\} = 3$

6) $V_1 \to V_5 \to V_8 \to V_9$; $\Delta_6 = min\{6\text{-}5{,}6{,}15\text{-}8\} = 1$

Больше не существует путей, не содержащих хотя бы одну насыщенную дугу, следовательно - полный поток построен.

$$\Phi_{full} = \Sigma\Delta_i = 5 + 5 + 5 + 3 + 3 + 1 = 22$$



Максимальный поток

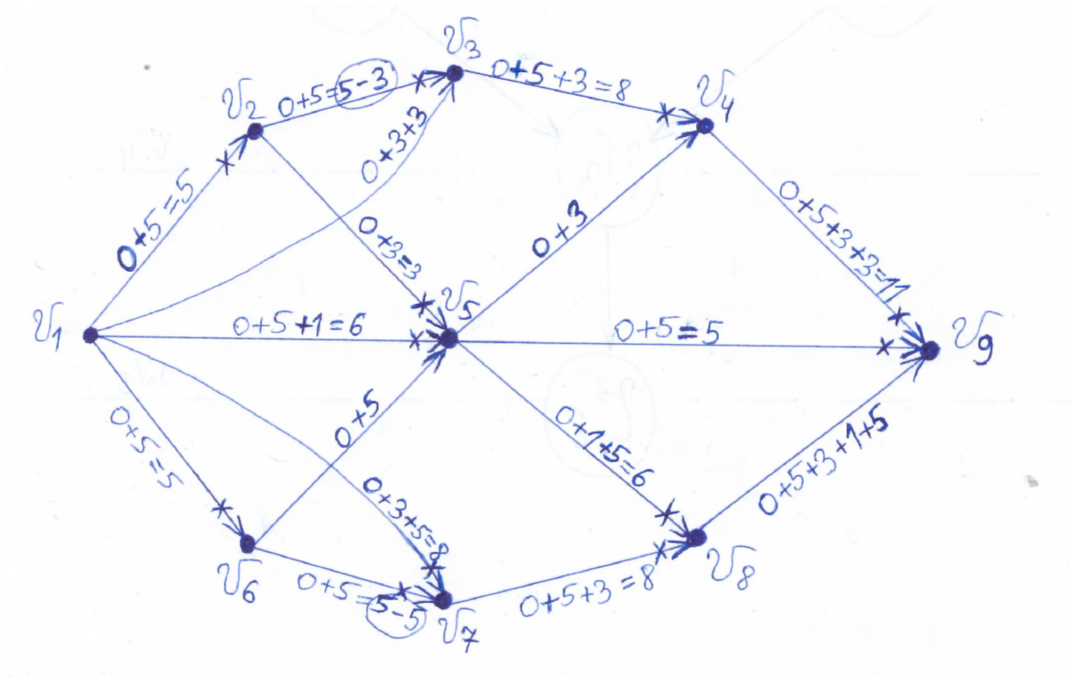
Построим максимальный поток, в качестве начального возьмем полный поток, будем искать существующие увеличивающие цепи, когда таковых не останется, поток станет максимальным:

1) $V_1 \to V_3 \to V_2 \to V_5 \to V_4 \to V_9$; $\Delta_1 = min\{$9-3,$\overline{5}$,3,4,11-8$\} = 3$

1) $V_1 \to V_7 \to V_6 \to V_5 \to V_8 \to V_9$; $\Delta_2 = min\{$8-3,$\overline{5}$,7,6-1,15-9$\} = 5$

Больше увеличивающих цепей не существует, следовательно - максимальный поток построен.

$$\Phi_{max} = \Phi_{full} + 3 + 5 = 30$$



Задание №8

Перечисление контуров графа методом латинской композиции

Теоретические сведения. Описание алгоритма.

Определение 1. Ориентированным графом $G =< V, X >$ называется упорядоченная пара, где $V = V_1, \ldots, V_n$ конечное непустое множество вершин графа, множество $X = X_1, \ldots, X_m$ множество дуг графа.

Каждая дуга X_k - упорядоченная пара вершин $X_k =< V_i, V_j >$; V_i-начало дуги, V_j - конец дуги $< V_i, V_j >$. Дуга X_k исходитиз V_i, заходит в V_j. Вершины V_i, V_j смежны. Дуга X_k инцидентна вершинам X_i и X_j, а вершины инцидентны дуге. Вершина, которая не имеет инцидентных ей дуг - изолированная. Дуга $< V_i, V_i >$ - петля.

Определение 2. Последовательность дуг графа, такая что начало следующей дуги совпадает с концом предыдущей, называется путем.

Контур - путь, у которого начало первой дуги совпадает с концом последней (замкнутый путь).

Путь (контур) - простой, если все его дуги различны. Путь (контур) - элементарный, если все его вершины различны (в контуре - кроме первой и последней).

Определение 3. Матрица смежности ориентированного графа – квадратная матрица порядка n (n - число вершин графа): $A = ||a_{ij}||$ с элементами a_{ij}:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } \exists < V_i, V_j > \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

Определение 4. Конечная последовательность $(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n})$ вершин графа G называется **латинской последовательностью со свойством** ϕ, если:

1)Она является путем

2)Она обладает свойством ϕ

3)Любой ее отрезок длины ≥ 2 также обладает этим свойством.

Пусть $S_1 = (X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_p}, X_k)$ и $S_2 = (X_l, X_{i_1}, \ldots, X_{i_q})$ - латинские последовательности со свойством ϕ.

Введем бинарную операцию:

$$S_1 * S_2 = \begin{cases} (X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_p}, X_k, X_{i_1}, \ldots, X_{i_q}), \text{ если } X_k = X_l. \\ \oslash, \text{ если по крайней мере одно из условий не выполняется.} \end{cases}$$

Если $S_1 * S_2 = \oslash$, то $S_1 * S_2 = S_1 \bullet S_2'$, где S_2' - последовательность S_2 без первой вершины.

Обозначим через

$$C^p_{X_iX_k} = \{S_1, S_2, \ldots, S_\alpha\}$$

подмножество ϕ латинских последовательностей с p + 1 вершинами от X_i до X_k. Аналогично

$$C^q_{X_kX_j} = \{T_1, T_2, \ldots, T_\beta\}$$

Определим произведение:

$$C^p_{X_iX_k} * C^q_{X_kX_j} = \{(S_1 * T_1), (S_1 * T_2), \ldots (S_2 * T_1), (S_2 * T_2), \ldots (S * T_\beta)\}$$

Тогда

$$C^p_{X_iX_k} * C^q_{X_kX_j} = C^p_{X_iX_k} \bullet C'^q_{X_kX_j},$$

где $C'^q_{X_kX_j} = \{T'_1, T'_2, \ldots, T'_\beta\}$

Выпишем последовательно для графа с n вершинами:

$$C^2_{X_iX_j} = \bigcup_{k=1}^{n} \left(C^1_{X_iX_k} * C^1_{X_kX_j}\right) = \bigcup_{k=1}^{n} \left(C^1_{X_iX_k} \bullet C'^1_{X_kX_j}\right)$$

$$C^3_{X_iX_j} = \bigcup_{k=1}^{n} \left(C^2_{X_iX_k} * C^1_{X_kX_j}\right) = \bigcup_{k=1}^{n} \left(C^2_{X_iX_k} \bullet C'^1_{X_kX_j}\right)$$

$$C^{n-1}_{X_iX_j} = \bigcup_{k=1}^{n} \left(C^{n-1}_{X_iX_k} * C^1_{X_kX_j}\right) = \bigcup_{k=1}^{n} \left(C^{n-1}_{X_iX_k} \bullet C'^1_{X_kX_j}\right)$$

Для любых целых чисел r и s имеем:

$$C^{r+s}_{X_iX_j} = \bigcup_{k=1}^{n} \left(C^r_{X_iX_k} * C^s_{X_kX_j}\right) = \bigcup_{k=1}^{n} \left(C^r_{X_iX_k} \bullet C'^s_{X_kX_j}\right)$$

Латинские матрицы:

$$||M||^{r+s} = ||M||^r \bullet ||M'||^s$$

- матрицы, где на пересечении i-й строки и j-й столбцв матрицы $||M||^{r+s}$ стоит

$$C^{r+s}_{X_iX_j} = \bigcup_{k=1}^{n} \left(C^r_{X_iX_k} \bullet C'^s_{X_kX_j}\right)$$

а на пересечении k-й строки и j-й столбцв матрицы $||M'||^s$ стоит $C'^s_{X_kX_j}$

В латинской матрице направление дуг задаётся порядком букв, которыми задаются вершины.

Таким образом можем описать процесс перечисления всех ϕ латинских последовательностей графа.

Перечисление путей Рассмотрим свойство ϕ "последовательность есть путь". Пусть $||M||^1$ - латинская матрица для путей длины 1 и $||M^{'}||^1$ - латинская матрица для путей длины 1, с удаленными первыми вершинами. Композиция $||M||^1 \bullet ||M^{'}||^1$ дает $||M||^2$ - латинскую матрицу путей длины 2. Последовательно получаем перечисление всех путей длины 1,2,..,r:

$$||M||^2 \bullet ||M^{'}||^1 = ||M||^3$$

$$||M||^3 \bullet ||M^{'}||^1 = ||M||^4$$

$$||M||^{r-1} \bullet ||M^{'}||^1 = ||M||^r$$

Перечисление элементарных контуров Заметим, что элементарный контур $(A, X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_{p-1}}, A)$ длины p становится элементарным путем, если удалить из него первую вершину. Рассмотрим свойство ϕ "последовательность есть элементарный контур". Латинская матрица $||M^{'}||^r \bullet ||M^{'}||^s$ отличется от матрицы $||M^{|}|^r \bullet ||M^{'}||^s$ тем , что из путей в клетках матрицы $||M||^r$ удалены первые вершины. Подмножество

$$C_{ij}^{"r+s} = \bigcup_k C_{ik}^{'r} \bullet C_{kj}^{'s}$$

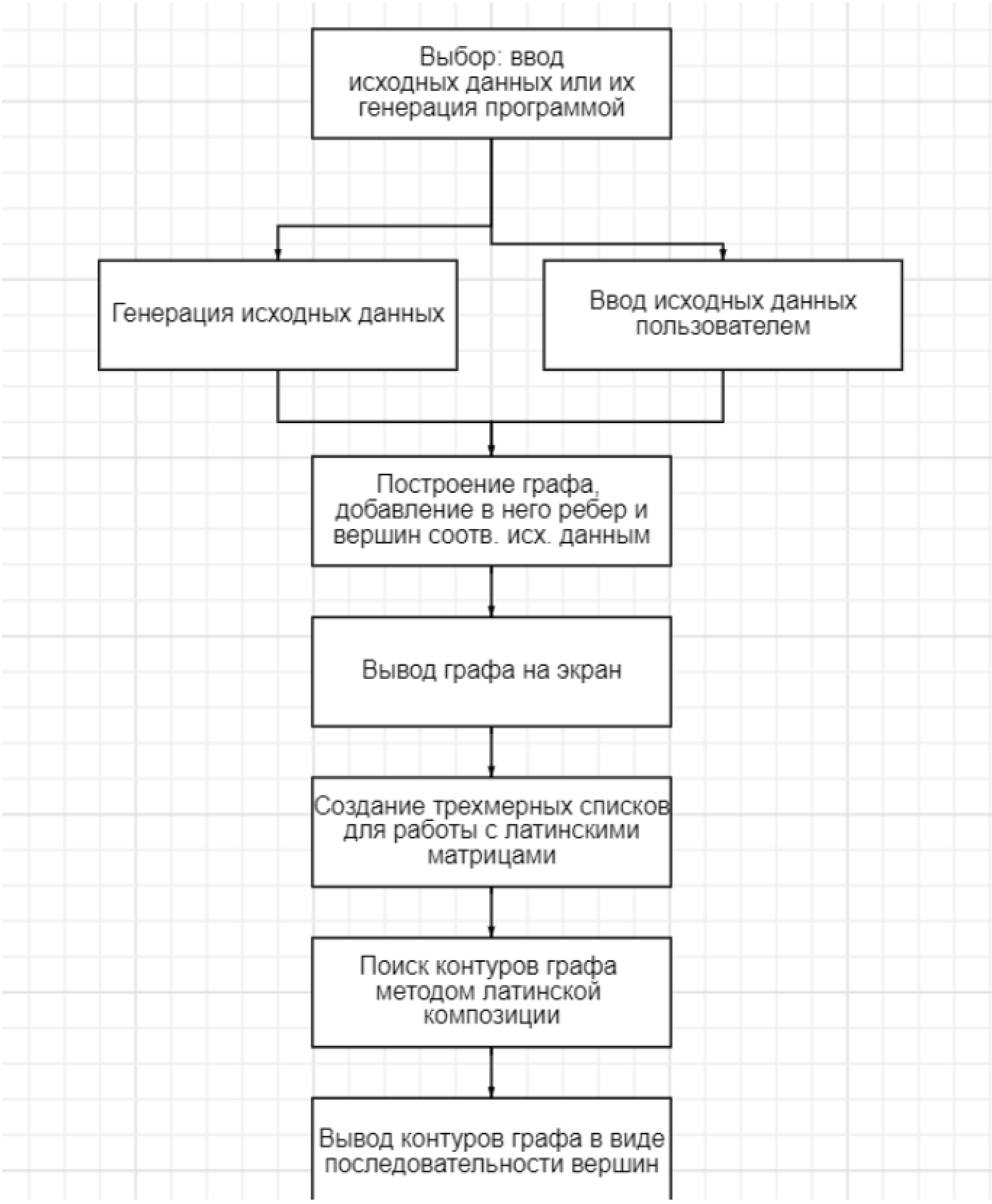
совпадает с подмножеством $C_{ij}^{'r+s}$ матрицы $||M^{'}||^{r+s}$ если $i \neq j$. Если $i = j$, то $C_{ij}^{r+s} = \oslash$ для любого j. Отсюда вытекает, **что для получения элементарных контуров графа длины $p = r + s (p \leq n)$ достаточно найти элементы главной диагонали матрицы**:

$$||M^{"r+s}|| = ||M^{'r}|| \bullet ||M^{'s}||$$

которую можно представить как

$$||M^{"p}|| = ||M^{'p-1}|| \bullet ||M^{'1}||$$

Логическая блок-схема алгоритма



Описание программы

Алгоритм реализован на языке python в связи с тем, что этот эзык наиболее удобен и прост в реализации агоритмов такого плана. Программа состоит из нескольких блоков: подключения необходимых модулей-библиотек для упрощения выполнения задания, интерфейс для ввода пользователем начальных данных или для генерации начальных данных самой программой, создание структуры графа, основываясь на введенных начальных данных добавления в граф вершин и ребер, вывода графа на экран, и затем выполнения самого алгоритма - перечисления контуров графа методом латинской композиции. В первом блоке подключены модули - numpy для работы с математикой в Python, networkx для создания и работы с графами, display, image, и toagraph - для корректного вывода графа на экран. Далее создан простой интерфейс для пользователя - предлагается выбрать 3 варианта задания матрицы смежности - ее генерация программой, ввод матрицы смежности вручную или использование заготовленной матрицы смежности, для выбора пользователю предлагается выбрать один из пунктов 1 2 3, при выборе пунктов 1 и 2 пользователю предлагается ввести n - количество вершин графа. В программе реализованы функции ввода и вывода матрицы смежности - entermatrix и printmatrix. Далее созданы списки для хранения множества вершин и множества ребер - nodes и edges. Далее используя функцию модуля networkx создается граф G, в него добавляются вершины и ребра, согласно введенной матрице смежности, так же добавляются ребра в множество ребер edges. Граф построен. Чтобы вывести граф на экран применяется функция to-agraph, граф выводится функцией draw в созданный файл, затем функциями image и display происходит собственно вывод содержимого файла - картинки с графом на экран. После этого начинается сама реализация алгоритма - создаются три трехмерных списка - matrix-, matrix-1 и matrix-next, соответствующие латинским матрицам $||M||^{p-1}$,$||M^{'}||^{1}$ и $||M||^{p}$. В начале заполняется первая из них - по свойству латинских матриц - В латинской матрице направление дуг задаётся порядком букв, которыми задаются вершины, а в матрице смежности 1 соответствуют дуги, соответственно латинскую матрицу можно заполнить имея матрицу смежности - это будет матрица $||M||^{1}$ - начальная, аналогично с $||M^{'}||^{1}$, но с удаленными первыми вершинами. Для вывода контуров длины 1 - петель достаточно знания матрицы $||M||^{1}$, происходит их вывод на экран. Затем начинается сам итерационный процесс для нахождения матриц $||M||^{2}, \ldots ,||M||^{p}$, при заполнении этих матриц и нужен третий трехмерный список - matrix-next, именно он будет хранить каждую из этих матриц в каждой итерации. Реализуется операция

$$||M^{p}|| = ||M^{p-1}|| \bullet ||M^{'1}||,$$

и после нахождения каждой следующей матрицы $||M^p||$- элементы на ее главной диагонали - строки без повторяющихся букв вершин (кроме начальной) - будут являться элементарными контурами длины p, они сразу выводятся на экран и стираются для дальнейших вычислений, так как в дальнейшем вершины начнут повторяться. Затем в трехмерный список matrix- копируются значения матрицы matrix-next, таким образом далее формула будет применяться для только что найденной матрицы$||M^p||$, начинается следующая итерация, итерации продолжаются пока p не достигнет n, в последней итерации выведутся гамильтоновы контуры графа (p=n). Все элементарные контуры выведены, выполнение программы завершается.

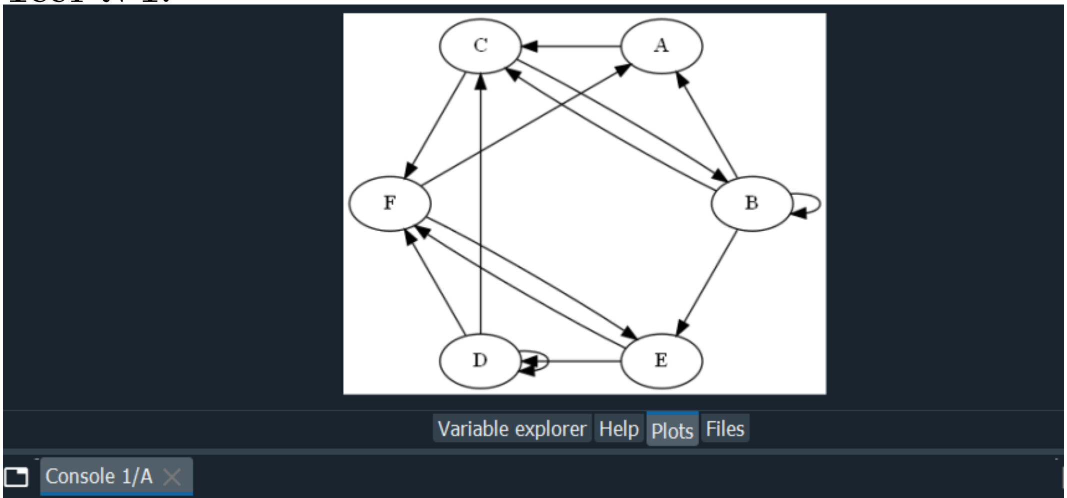
Сложность алгоритма

Наибольшую сложность имеет подпрограмма, в которой реализуется операция - $||M^p|| = ||M^{p-1}|| \bullet ||M'^1||$, в ней 6 вложенных циклов, но два из них не зависят от n, поэтому сложность - $O(N^4)$ что соответствует максимальному числу вложенных циклов по n в программе – 4.

Тесты

Скриншоты программы:

Тест №1.

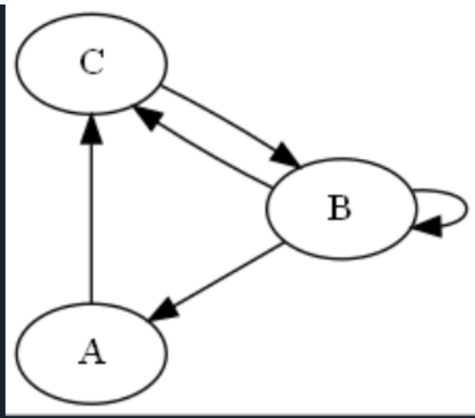



```
Выберите, что Вы хотите сделать:


1-сгенерировать матрицу смежности
2-задать матрицу смежности
3-использовать заготовленную матрицу смежности
3

Матрица смежности:

0 0 1 0 0 0
1 1 1 0 1 0
0 1 0 0 0 1
0 0 1 1 0 1
0 0 0 1 0 1
1 0 0 0 1 0
```

```
Петли:
BB
DD

Контуры длины 2
BCB
CBC
EFE
FEF

Контуры длины 3
ACBA
ACFA
BACB
CBAC
CFAC
DFED
```

```
Контуры длины 4
BEDCB
CBEDC
CFEDC
DCBED
DCFED
EDCBE
EDCFE
FEDCF

Контуры длины 5
ACBEFA
BEFACB
CBEFAC
EFACBE
FACBEF

Контуры длины 6
ACBEDFA
BEDFACB
CBEDFAC
DFACBED
EDFACBE
FACBEDF
```

Тест №2.



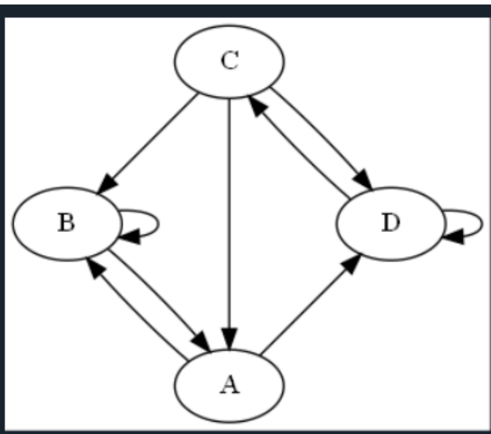
Variable explorer Help Plots Files

Console 1/A

```
Данила/.spyder-py3')
Выберите, что Вы хотите сделать:


1-сгенерировать матрицу смежности
2-задать матрицу смежности
3-использовать заготовленную матрицу смежности
2

Введите число вершин графа:3

Введите матрицу смежности:

0

0

1

1

1

1

0

1

0
```

```
Матрица смежности:

0 0 1
1 1 1
0 1 0

Граф:

Петли:
BB

Контуры длины 2
BCB
CBC

Контуры длины 3
ACBA
BACB
CBAC
```

Тест №3.




```
Выберите, что Вы хотите сделать:


1-сгенерировать матрицу смежности
2-задать матрицу смежности
3-использовать заготовленную матрицу смежности
1

Введите число вершин графа:4

Матрица смежности:

0 1 0 1
1 1 0 0
1 1 0 1
0 0 1 1
```

```
Граф:

Петли:
BB
DD

Контуры длины 2
ABA
BAB
CDC
DCD

Контуры длины 3
ADCA
CADC
DCAD

Контуры длины 4
ADCBA
BADCB
CBADC
DCBAD
```

Прикладная задача

Турист запланировал тур по Европе, у него на выбор есть n городов которые он хотел бы посетить, но средств у него хватит только на посещение p городов и на p прямых перелетов (он летает без пересадок) из города в город. Есть граф G, описывающий карту городов с прямыми рейсами самолетов между ними. Опишите в виде последовательности перелетов все варианты для туриста посетить p городов и вернуться домой.